LES QUATERNIONS ET LES ROTATIONS

1. Les nombres complexes C

La construction du corps non commutatif **H** de quaternions est une variante plus compliquée de la construction du corps commutatif **C** de nombres complexes. Donc on commence en rappelant la construction de **C** à partir de **R**.

Les nombres complexes s'écrivent $a + bi$ avec $a, b \in \mathbf{R}$. Donc **C** est un espace vectoriel sur **R** de dimension 2 avec base $\{1, i\}$. La loi d'addition de **C** est celle que **C** possède en tant qu'espace vectoriel. La multiplication est ***R-bilinéaire****, et 1 est l'élément neutre. Cela signifie qu'on peut développer un produit comme

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2. \tag{1}$$

Finalement on fixe $i^2 = -1$. Cela nous donne la formule $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$.

Quand on définit **C** et ses opérations dans cette façon, il n'est pas évident *a priori* que la multiplication est associative ou commutative. Les autres propriétés des lois — l'addition est associative et commutative avec un élément neutre 0 et des opposés avec $z + (-z) = 0$, et il y a la loi de distributivité — se déduisent des faits que **C** est un **R**-espace vectoriel et la multiplication est bilinéaire. Pour l'associativité de la multiplication, on pourrait développer les deux membres de l'équation

$$\Big[(a + bi)(c + di)\Big](e + fi) = (a + bi)\Big[(c + di)(e + fi)\Big]$$

et les comparer. Mais c'est un peu lourd. Après développement il y a 8 termes de chaque côté. Mais à cause de la bilinéarité de la multiplication, on peut réduire ce calcul à la vérification qu'on a $(uv)w = u(vw)$ pour $u, v, w \in \{1, i\}$. Cela remplace un calcul légèrement gros avec $8 + 8$ termes par 8 petits calculs. De plus 7 des 8 calculs sont pris en charge par le lemme suivant.

Lemme 1.1. *Soit E un ensemble muni d'une loi de multiplication $E \times E \to E$ avec un élément neutre $1 \in E$ satisfaisant à $1u = u1 = u$ pour tout $u \in E$. Alors pour tout $u, v \in E$ on a*

$$(1u)v = 1(uv), \qquad (u1)v = u(1v), \qquad (uv)1 = u(v1).$$

En effet, toutes ces expressions sont égales à uv. Ce lemme s'occupe de tous les calculs de $(uv)w = u(vw)$ avec $u, v, w \in \{1, i\}$ avec au moins un des nombres u, v, w est 1. Il nous reste un seul calcul

$$(ii)i = (-1)i = -i = i(-1) = i(ii). \tag{2}$$

Donc la vérification de l'associatitivité de la multiplication dans **C** peut se réduire au petit calcul (2), si on prend compte de la bilinéarité de la multiplication et des propriétés de l'élément neutre 1.

---

*. La **R**-*bilinéarité* signifie que pour $r \in \mathbf{R}$ et $u, v, w \in \mathbf{C}$ (ou **H**) on a

$$(u + v)w = uw + vw, \qquad (ru)v = r(uv), \qquad u(v + w) = uv + uw, \qquad u(rv) = r(uv).$$

C'est à dire, pour tout $u \in \mathbf{C}$ les applications $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ envoyant $z \mapsto zu$ et $z \mapsto uz$ sont **R**-linéaires.

La commutativité de la multiplication dans $\mathbf{C}$ se réduit dans la même façon à la vérification qu'on a $uv = vu$ pour $u, v \in \{1, i\}$. Cela se fait très facilement parce que le neutre 1 commute avec tout élément, et i comme tout élément commute avec lui-même.

Une autre approche à la définition des nombres complexes est d'identifier $\mathbf{C}$ au l'espace de matrices

$$\mathbf{C}_{\mathrm{mat}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R} \right\} \subset M_2(\mathbf{R}). \tag{3}$$

Les éléments de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ s'écrivent donc $a\mathbf{1} + b\mathbf{j}$ avec $a, b \in \mathbf{R}$ et

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Donc $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 avec base $\{\mathbf{1}, \mathbf{j}\}$ †. Comme $\mathbf{1}$ est la matrice identité, il est l'élément neutre pour la multiplication des matrices. La multiplication des matrices donne

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1j} = \mathbf{j1} = \mathbf{j}, \qquad \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}, \tag{5}$$

et en développant

$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{j})(c\mathbf{1} + d\mathbf{j}) = (ac - bd)\mathbf{1} + (ad + bc)\mathbf{j}. \tag{6}$$

Donc l'application $\phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ envoyant $a + bi \mapsto a\mathbf{1} + b\mathbf{j}$ est une bijection telle que les sommes et produits de membres correspondants de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ correspondent : $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ et $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. On dit que $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ est un anneau isomorphe au $\mathbf{C}$ usuel. L'avantage de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ par rapport à la définition précédente de $\mathbf{C}$ est que la multiplication dans $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ est la multiplication de matrices, qui est connue d'être associative. Donc la vérification directe de l'associativité de la multiplication n'est pas nécessaire pour $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ Le désavantage de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ est qu'il faut vérifier que le produit de deux membres de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ reste dans le sous-espace $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$ de $M_2(\mathbf{R})$. Mais par la $\mathbf{R}$-bilinéarité de la multiplication, il suffit de montrer que les produits de membres de la base $\{\mathbf{1}, \mathbf{j}\}$ sont dans $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$, et ceci est fait dans (5).

La conjugaison complexe a une interpretation matricielle jolie. Pour une matrice 2×2 définissons sa *conjuguée* dans la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{conj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Pour toute matrice 2×2 on a

$$A \,\mathrm{conj}(A) = \mathrm{conj}(A) A = (ad - bc)\mathbf{1}. \tag{8}$$

On écrit $\det A = ad - bc$; c'est le *déterminant* de A. Pour une matrice $\mathbf{z} = a\mathbf{1} + b\mathbf{j} \in \mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$, on a $\mathrm{conj}(\mathbf{z}) = a\mathbf{1} - b\mathbf{j}$. Donc on a bien retrouvé la conjugaison complexe. On a $\det \mathbf{z} = a^2 + b^2$, qui est un réel > 0 quand $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

Le choix du sous-espace vectoriel $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}} \subset M_2(\mathbf{R})$ n'est pas un hasard. Chaque $z \in \mathbf{C}$ définit l'application linéaire de multiplication par z

$$\begin{aligned} \mu_z\colon \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ w &\longmapsto zw. \end{aligned} \tag{9}$$

Ecrivons les membres de $\mathbf{R}^2$ comme des vecteurs colonnes $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ au lieu de la notation (x, y) classique. Alors on peut identifier $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ en identifiant $x + yi \in \mathbf{C}$ à $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{R}^2$. Alors pour

†. On choisit la lettre $\mathbf{j}$ à cause des notations dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ ci-dessous.

$z = a + bi \in \mathbf{C}$, l'application $\mu_z \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de (9) s'identifie à l'application $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ envoyant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Voilà les matrices de $\mathbf{C}_{\mathrm{mat}}$.

2. Les quaternions : version matricielle $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$

On commence avec l'approche matricielle. Définissons

$$\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} = \left\{ \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbf{C} \right\} \subset M_2(\mathbf{C}). \tag{11}$$

Les membres de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ s'écrivent

$$\begin{pmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \tag{12}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ et

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Donc $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est un sous-espace vectoriel ***réel*** de $M_2(\mathbf{C})$ de dimension 4 avec base $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Calculons les produits de membres de la base. La matrice identité $\mathbf{1}$ est l'élément neutre pour la multiplication des matrices

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1i} = \mathbf{i1} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{1j} = \mathbf{j1} = \mathbf{j}, \qquad \mathbf{1k} = \mathbf{k1} = \mathbf{k}. \tag{14}$$

Les carrés des autres membres de la base sont

$$\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}. \tag{15}$$

Les autres produits sont

$$\begin{aligned} &\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \qquad &&\mathbf{jk} = \mathbf{i}, \qquad &&\mathbf{ki} = \mathbf{j}, \\ &\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \qquad &&\mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \qquad &&\mathbf{ik} = -\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{16}$$

Donc tous les produits de membres de la base de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ sont dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$. Par la bilinéarité de la multiplication de matrices, on en déduit que tout produit de membres de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ reste dans le sous-espace vectoriel réel $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \subset M_2(\mathbf{C})$. Donc la multiplication de matrices se restreint à une multiplication $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \times \mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$.

L'addition et la multiplication dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est l'addition et la multiplication de matrices, donc elles vérifient toutes les propriétés de celles-ci : l'associativité, la distributivité, les propriétés des éléments neutres $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$. L'addition est commutative, mais la multiplication ne l'est pas (voir (16)). De plus, comme $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est un espace vectoriel réel, il y a aussi une opération de multiplication par un scalaire $r \in \mathbf{R}$:

$$r(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = ra\mathbf{1} + rb\mathbf{i} + rc\mathbf{j} + rd\mathbf{k}.$$

La multiplication $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \times \mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \to \mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est $\mathbf{R}$-bilinéaire.

L'opération de conjugaison de (7) envoye

$$\begin{pmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a - bi & c + di \\ -c + di & a + bi \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$\operatorname{conj}(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k} \tag{17}$$

On a

$$\det\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} = |a+bi|^2 + |c+di|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2,$$

qui est réel et qui est > 0 pour $a\mathbf{1}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. On voit que tout membre de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ sauf $\mathbf{0}$ a un inverse dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$

$$(a\mathbf{1}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k})^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(a\mathbf{1}-b\mathbf{i}-c\mathbf{j}-d\mathbf{k}).$$

Important : *La division n'est pas réellement une opération fondamentale au même niveau que l'addition, la multiplication et les opposés et inverses. Diviser r par s veut dire multiplier r et s^{-1}. Pour des réels, dont la multiplication est commutative, la notation $\frac{r}{s}$ ne pose pas de problème parce qu'il n'y a qu'une valeur possible $rs^{-1} = s^{-1}r$. Pour les quaternions, avec une loi de multiplication non commutative, la notation symétrique $\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}$ n'est pas utilisée parce qu'elle a deux interpretations asymétriques et distinctes $\mathbf{u}\mathbf{v}^{-1} \neq \mathbf{v}^{-1}\mathbf{u}$.*

Dans le cadre des quaternions, on met dans un dénominateur uniquement un réel non nul.

Proposition 2.1. *Pour $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ et $r \in \mathbf{R}$ on a*

$$\begin{aligned} \operatorname{conj}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \operatorname{conj}(\mathbf{u}) + \operatorname{conj}(\mathbf{v}), & \operatorname{conj}(r\mathbf{u}) &= r\operatorname{conj}(\mathbf{u}), \\ \operatorname{conj}(\mathbf{u}\mathbf{v}) &= \operatorname{conj}(\mathbf{v})\operatorname{conj}(\mathbf{u}), & \operatorname{conj}(\operatorname{conj}(\mathbf{u})) &= \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{18}$$

La conjugaison est donc une opération $\mathbf{R}$-linéaire et auto-inverse qui ***inverse l'ordre de produits***.

Preuve. La seule formule qui n'est pas immédiatement claire est $\operatorname{conj}(\mathbf{u}\mathbf{v}) = \operatorname{conj}(\mathbf{v})\operatorname{conj}(\mathbf{u})$. On réduit par la $\mathbf{R}$-bilinéarité de la multiplication dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ aux cas particuliers $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \{\mathbf{1},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ qu'on vérifie à la main. ‡ □

3. Les quaternions : version abstraite $\mathbf{H}$

On peut définir les quaternions sans utiliser des matrices. On définit $\mathbf{H}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension 4 avec base $\{1, i, j, k\}$. Ses membres s'appellent des *quaternions*, et ils s'écrivent sous la forme $a+bi+cj+dk$ avec $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. La structure d'espace vectoriel réel nous donne déjà deux opérations : l'addition et la multiplication par un scalaire réel

$$(a+bi+cj+dk)+(e+fi+gj+hk) = (a+e)+(b+f)i+(c+g)j+(d+h)k, \tag{19}$$

$$r(a+bi+cj+dk) = ra+rbi+rcj+rdk. \tag{20}$$

‡. Une autre démonstration se fait en notant qu'on a $\operatorname{conj}(A) = P\,{}^tAP^{-1}$ pour $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Alors on déduit de ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ et de $P(CD)P^{-1} = (PCP^{-1})(PDP^{-1})$ qu'on a $\operatorname{conj}(AB) = \operatorname{conj}(B)\operatorname{conj}(A)$ pour toutes matrices A, B.

Pour les savants : *Notre conjugaison $A \mapsto P\,{}^tAP^{-1}$ est l'anti-involution induite sur $M_2(\mathbf{C}) \cong \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ par la conjugaison de $\mathbf{H}$. L'involution $A \mapsto P\overline{A}P^{-1}$ est l'involution sur $M_2(\mathbf{C}) \cong \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ induite par la conjugaison de $\mathbf{C}$. Le sous-espace $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \subset M_2(\mathbf{C})$ est le sous-anneau de matrices invariantes sous la dernière involution, qui est $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \overline{d} & -\overline{c} \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$.*

La multiplication $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ est définie pour les membres de la base par les mêmes formules que (14)–(16) :

$$\begin{array}{cccc} 1^2 = 1, & 1i = i1 = i, & 1j = j1 = j, & 1k = k1 = k, \\ & i^2 = -1, & j^2 = -1, & k^2 = -1, \\ & ij = k, & jk = i, & ki = j, \\ & ji = -k, & kj = -i, & ik = -j. \end{array} \tag{21}$$

On peut se souvenir des signes dans les deux dernières lignes de formules en notant la suivante : *Si u, v, w sont trois membres consécutifs de la suite périodique $i, j, k, i, j, k, i, j, k, \ldots$, alors on a $uv = w$ et $vu = -w$.*

Ce produit s'étend à deux quaternions généraux par bilinéarité

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &\qquad = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) i \\ &\qquad\qquad + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1) k. \end{aligned} \tag{22}$$

En pratique, on développe le produit en termes de produits d'éléments de la base $\{1, i, j, k\}$, puis on applique les formules (21) aux termes. Par exemple

$$(4 + i)(2 - 3j) = 4 \cdot 2 - 4 \cdot 3j + i \cdot 2 - i \cdot 3j = 8 - 12j + 2i - 3k = 8 + 2i - 12j - 3k.$$

Définition 3.1. Un quaternion est *réel* s'il est de la forme $r = r + 0i + 0j + 0k$ avec $r \in \mathbf{R}$. Il est *imaginaire pur* s'il est de la forme $bi + cj + dk$ avec $b, c, d \in \mathbf{R}$. L'ensemble de quaternions réels s'identifie à $\mathbf{R}$. On notera

$$\mathbf{H}^{\text{pur}} = \{\text{quaternions imaginaires purs}\} = \{bi + cj + dk \mid b, c, d \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{H}. \tag{23}$$

Tout quaternion a une *partie réelle* et une *partie imaginaire*

$$\Re\mathrm{e}(a + bi + cj + dk) = a \in \mathbf{R}, \tag{24}$$

$$\Im\mathrm{m}(a + bi + cj + dk) = bi + cj + dk \in \mathbf{H}^{\text{pur}}. \tag{25}$$

La partie réelle d'un quaternion est donc bien un nombre réel, mais la partie imaginaire a trois composantes.

Les quaternions réels commutent avec tous les autres

$$r(a + bi + cj + dk) = ra + rbi + rcj + rdk = (a + bi + cj + dk)r,$$

et la multiplication avec un quaternion réel r coïncide avec la multiplication par le scalaire $r \in \mathbf{R}$ dans l'espace vectoriel $\mathbf{H}$.

Parmi les quaternions réels sont $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$ et $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$.

Théorème 3.2. *Soit* $\mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathbf{H}$ *et* $r \in \mathbf{R}$. *Alors les opérations de* (19)–(22) *ont les propriétés suivantes*

$$\begin{array}{ccc} (\mathsf{u} + \mathsf{v}) + \mathsf{w} = \mathsf{u} + (\mathsf{v} + \mathsf{w}), & \mathsf{u} + \mathsf{v} = \mathsf{v} + \mathsf{u}, & \mathsf{u} + 0 = \mathsf{u}, \\ \mathsf{u}(\mathsf{v} + \mathsf{w}) = \mathsf{uv} + \mathsf{uw}, & (\mathsf{u} + \mathsf{v})\mathsf{w} = \mathsf{uw} + \mathsf{vw}, & r\mathsf{u} = \mathsf{u}r, \\ 1\mathsf{u} = \mathsf{u}, & 0\mathsf{u} = 0, & (-1)\mathsf{u} = -\mathsf{u}, \\ \mathsf{u} + (-\mathsf{u}) = 0, & (\mathsf{uv})\mathsf{w} = \mathsf{u}(\mathsf{vw}). & \end{array} \tag{26}$$

La multiplication n'est pas commutative : $\mathsf{uv} \neq \mathsf{vu}$ en général. Toutes les formules se déduisent facilement de (19)–(22) sauf l'associativité $(\mathsf{uv})\mathsf{w} = \mathsf{u}(\mathsf{vw})$. On peut démontrer l'associativité dans deux manières.

Première démonstration de l'associativité dans $\mathbf{H}$. L'application de $\mathbf{H}$ vers $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ envoyant le quaternion $a + bi + cj + dk$ en la matrice

$$a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_{\mathrm{mat}} \subset M_2(\mathbf{C})$$

est une bijection. La multiplication dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ est définie comme la multiplication des matrices, qui est associative. Les produits calculés dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ dans (14)–(16) et les produits définis dans $\mathbf{H}$ dans (21) correspondent. Donc si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ sont les membres correspondant à $u, v, w \in \mathbf{H}$, l'équation $(\mathbf{uv})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{vw})$ dans $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ implique l'équation $(uv)w = u(vw)$ dans $\mathbf{H}$. □

Deuxième démonstration de l'associativité dans $\mathbf{H}$. En développant les produits de quaternions généraux par la bilinéarité, on se réduit à avoir à démontrer $(uv)w = u(vw)$ pour $u, v, w \in \{1, i, j, k\}$. Si on a $u = 1$ ou $v = 1$ ou $w = 1$, alors l'équation se déduit du lemme 1.1. Donc les cas importants sont $u, v, w \in \{i, j, k\}$.

D'abord traitons les cas avec $u = i$. Ils sont

$$\begin{aligned} &(ii)i = (-1)i = -i = i(-1) = i(ii), \\ &(ii)j = (-1)j = -j = ik = i(ij) \\ &(ii)k = (-1)k = -k = i(-j) = i(ik), \\ &(ij)i = ki = j = i(-k) = i(ji), \\ &(ij)j = kj = -i = i(-1) = i(jj), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(ij)k = kk = -1 = ii = i(jk), \\ &(ik)i = (-j)i = k = ij = i(ki), \\ &(ik)j = (-j)j = 1 = i(-i) = i(kj), \\ &(ik)k = (-j)k = -i = i(-1) = i(kk). \end{aligned} \tag{27}$$

Ensuite notons que dans les équations (21) définissant le produit des i, j, k si on substitue simultanément $i \leftarrow j$ et $j \leftarrow k$ et $k \leftarrow i$, alors l'ensemble de formules ne changent pas. Donc si on fait ces mêmes substitions dans le calcul montrant par exemple $(ii)j = i(ij)$, on obtient un calcul montrant $(jj)k = j(jk)$. En faisant ces substitution dans les calculs ci-dessus, on trouve des calculs montrant $(jv)w = j(vw)$ pour tout $v, w \in \{i, j, k\}$.

Similairement si dans les calculs ci-dessus on substitue simultanément $i \leftarrow k$ et $j \leftarrow i$ et $k \leftarrow j$, on trouve des calculs montrant $(kv)w = k(vw)$ pour tout $v, w \in \{i, j, k\}$. □

Définition 3.3. Le *conjugué* d'un quaternion est

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk. \tag{28}$$

Donc la conjugaison quaternionique ne change pas la partie réelle, et elle change tous les signes dans la partie imaginaire.

Théorème 3.4. *Soit* $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbf{H}$ *et* $r \in \mathbf{R}$. *Alors on a*

$$\overline{\mathsf{u} + \mathsf{v}} = \overline{\mathsf{u}} + \overline{\mathsf{v}}, \qquad \overline{r\mathsf{u}} = r\overline{\mathsf{u}},$$
$$\overline{\overline{\mathsf{u}}} = \mathsf{u}, \qquad \overline{\mathsf{uv}} = \overline{\mathsf{v}}\,\overline{\mathsf{u}}.$$

Ainsi le conjugué d'un produit est le produit des conjugués ***dans l'ordre inverse***. C'est comme dans les formules pour les transposées et inverses de matrices ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Preuve. Les trois premières formules sont immédiates. La $\mathbf{R}$-linéarité de la conjugaison et la $\mathbf{R}$-bilinéarité de la multiplication entraînent qu'il suffit de vérifier $\overline{\mathsf{uv}} = \overline{\mathsf{v}}\,\overline{\mathsf{u}}$ pour $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \{1, i, j, k\}$. On a $\overline{1^2} = 1 = \overline{1}^2$. Pour $\mathsf{u} \in \{i, j, k\}$ on a $\overline{1\mathsf{u}} = -\mathsf{u} = \overline{\mathsf{u}}\overline{1}$ et $\overline{\mathsf{u}1} = -\mathsf{u} = \overline{1}\overline{\mathsf{u}}$ et $\overline{\mathsf{u}^2} = -1 = \overline{\mathsf{u}}^2$. Finalement, si $\mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}$ sont trois termes consécutifs dans $i, j, k, i, j, k, \ldots$, alors on a $\overline{\mathsf{uv}} = \overline{\mathsf{w}} = -\mathsf{w} = (-\mathsf{v})(-\mathsf{u}) = \overline{\mathsf{v}}\,\overline{\mathsf{u}}$ et $\overline{\mathsf{vu}} = \overline{-\mathsf{w}} = \mathsf{w} = (-\mathsf{u})(-\mathsf{v}) = \overline{\mathsf{u}}\,\overline{\mathsf{v}}$. □

Théorème 3.5. *Soit* $\mathsf{u} = a + bi + cj + dk$ *un quaternion* (*avec* a, b, c, d *réels*). *Alors*

$$\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} = \overline{\mathsf{u}}\mathsf{u} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{29}$$

Ainsi on a toujours $\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} \in \mathbf{R}$, *et on a* $\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} > 0$ *pour* $\mathsf{u} \neq \mathsf{0}$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} &= \big(a + (bi + cj + dk)\big)\big(a - (bi + cj + dk)\big) \\
&= a^2 + (bi + cj + dk)a - a(bi + cj + dk) - (bi + cj + dk)^2 \\
&= a^2 + 0 - (bi + cj + dk)(bi + cj + dk) \\
&= a^2 - \big(b^2 i^2 + c^2 j^2 + d^2 k^2 + bc(ij + ji) + bd(ik + ki) + cd(jk + kj)\big) \\
&= a^2 - (-b^2 - c^2 - d^2 + 0) \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2.
\end{aligned}$$

En substituant $\overline{\mathsf{u}} = a - bi - cj - dk$ pour u, on trouve

$$\overline{\mathsf{u}}\mathsf{u} = a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + (-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \qquad \square$$

Définition 3.6. La *norme* d'un quaternion $\mathsf{u} = a + bi + cj + dk$ (avec a, b, c, d réels) est le réel

$$\|\mathsf{u}\| = \sqrt{\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

On a $\|\mathsf{u}\| > 0$ pour tout $\mathsf{u} \neq 0$, et $\|\mathsf{0}\| = 0$.

Le théorème et la définition nous donnent alors les formule

$$\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} = \|\mathsf{u}\|^2 \in \mathbf{R}_{\geq 0}, \qquad \|\mathsf{u}\| = \|\overline{\mathsf{u}}\| \tag{30}$$

pour tout quaternion u, avec $\|\mathsf{u}\|^2 > 0$ pour $\mathsf{u} \neq \mathsf{0}$.

La norme d'un quaternion est l'analogue du module $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ d'un nombre complexe $z = a + bi$.

En multipliant (30) par le réel $\frac{1}{\|\mathsf{u}\|^2}$, on trouve une formule pour l'inverse de u.

Théorème 3.7. *Soit* u *un quaternion avec* $\mathsf{u} \neq \mathsf{0}$. *Alors* u *est inversible avec* $\mathsf{u}^{-1} = \frac{1}{\|\mathsf{u}\|^2}\overline{\mathsf{u}}$.

Corollaire 3.8. *Soit* u *un quaternion avec* $\|\mathsf{u}\| = 1$. *Alors* u *est inversible avec* $\mathsf{u}^{-1} = \overline{\mathsf{u}}$.

Théorème 3.9. *Soit* $\mathsf{u} \neq \mathsf{0}$ *et* $\mathsf{v} \neq \mathsf{0}$ *des quaternions. Alors on a* $\mathsf{uv} \neq \mathsf{0}$ *et* $(\mathsf{uv})^{-1} = \mathsf{v}^{-1}\mathsf{u}^{-1}$.

Noter que $(\mathsf{uv})^{-1} = \mathsf{v}^{-1}\mathsf{u}^{-1} \neq \mathsf{u}^{-1}\mathsf{v}^{-1}$ en général parce que la multiplication de quaternions n'est pas commutative.

Preuve. Par le théorème 3.7, u et v sont inversibles. Le produit uv des deux inversibles et inversible avec inverse $\mathsf{v}^{-1}\mathsf{u}^{-1}$ (car $\mathsf{uvv}^{-1}\mathsf{u}^{-1} = 1$ et $\mathsf{v}^{-1}\mathsf{u}^{-1}\mathsf{uv} = 1$), et un inversible est non nul. □

Ces deux derniers théorèmes sont non triviaux. Dans $M_2(\mathbf{R})$ il y a des matrices qui sont qui sont ni nulles ni inversibles, et parfois le produit de deux matrices non nulles est nulle. Par exemple, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ne sont ni nuls (de rang 0) ni inversibles (de rang maximal 2), et leur produit est nul : $AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Théorème 3.10. *Soit* u, v *des quaternions et* r *un réel. Alors on a* $\|\mathsf{uv}\| = \|\mathsf{u}\|\|\mathsf{v}\|$.

En particulier pour $r \in \mathbf{R}$ et $\mathsf{u} \in \mathbf{H}$ on a $\|r\mathsf{u}\| = |r|\|\mathsf{u}\|$.

Preuve. On a

$$\|\mathsf{uv}\|^2 = \mathsf{uv}\overline{\mathsf{uv}} = \mathsf{uv}\overline{\mathsf{v}}\,\overline{\mathsf{u}} = \mathsf{u}\|\mathsf{v}\|^2\overline{\mathsf{u}}.$$

Comme $\|\mathsf{v}\|^2$ est un réel, il commute avec tous les quaternions. D'où on a

$$\|\mathsf{uv}\|^2 = \mathsf{u}\overline{\mathsf{u}}\|\mathsf{v}\|^2 = \|\mathsf{u}\|^2\|\mathsf{v}\|^2 = \big(\|\mathsf{u}\|\|\mathsf{v}\|\big)^2.$$

En prenant les racines carrées de ces réels, on trouve $\|\mathsf{uv}\| = \|\mathsf{u}\|\|\mathsf{v}\|$. □

Les matrices de $\mathbf{H}_{\mathrm{mat}}$ se retrouvent dans la manière suivante. On identifie les nombres complexes aux quaternions de la forme $a + bi = a + bi + 0j + 0k$. On munit $\mathbf{H}$ d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel en utilisant la multiplication à droite par les membres de $\mathbf{C}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times \mathbf{H} & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ (z, \mathsf{u}) & \longmapsto & \mathsf{u}z. \end{array}$$

Comme chaque quaternion a une unique écriture sous la forme

$$\mathsf{u} = a + bi + cj + dk = 1(a + bi) + j(c - di) = 1z + j\overline{w},$$

avec $z = a + bi$ et $\overline{w} = c - di$ dans $\mathbf{C}$, on voit que $\{1, j\}$ est une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{H}$. Chaque quaternion a aussi une unique écriture sous la forme

$$\mathsf{u} = a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j = z + wj.$$

Noter qu'on a $wj = j\overline{w}$ pour tout $w \in \mathbf{C}$.

Maintenant pour chaque $\mathsf{u} \in \mathbf{H}$ on a une application

$$\begin{array}{cccc} \phi_{\mathsf{u}}\colon & \mathbf{H} & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ & \mathsf{a} & \longmapsto & \mathsf{ua}. \end{array}$$

Cette application est $\mathbf{C}$-linéaire parce qu'elle vérifie

$$\phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{a} + \mathsf{b}) = \mathsf{u}(\mathsf{a} + \mathsf{b}) = \mathsf{ua} + \mathsf{ub} = \phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{a}) + \phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{b}),$$
$$\phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{a}z) = \mathsf{u}(\mathsf{a}z) = (\mathsf{ua})z = \phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{a})z.$$

La multiplication à gauche par des éléments de $\mathbf{H}$ commute avec la multiplication à droite par les éléments de $\mathbf{C}$. Pour $\mathsf{u} = z + wj$ avec $z, w \in \mathbf{C}$, l'action de ϕ_{u} sur la base $\{1, j\}$ est donnée par

$$\phi_{\mathsf{u}}(1) = (z + wj)1 = z + wj = 1z + j\overline{w},$$
$$\phi_{\mathsf{u}}(j) = (z + wj)j = -w + zj = 1(-w) + j\overline{z}.$$

Donc la matrice de ϕ_{u} dans la $\mathbf{C}$-base $\{1, j\}$ de $\mathbf{H}$ est

$$\begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}.$$

4. La géométrie de $\mathbf{R}^3$

L'application la plus importante des quaternions est aux rotations de $\mathbf{R}^3$. Donc rappelons un peu de la géométrie de $\mathbf{R}^3$.

Deux vecteurs $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbf{R}^3$ ont un *produit scalaire* $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}$ et un *produit vectoriel* $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^3$:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$
$$\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Certains écrivent $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ au lieu de $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$. Les deux produits sont bilinéaires[§], et ils vérifient $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{u}}$ et ainsi $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$. La *norme euclidienne* d'un vecteur est

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Pour r un réel on a $\|r\vec{\mathbf{u}}\| = |r|\|\vec{\mathbf{u}}\|$. On a $\|\vec{\mathbf{u}}\| \geq 0$ pour tout $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^3$, et on a $\|\vec{\mathbf{u}}\| > 0$ pour tout $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Deux vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ sont *orthogonaux* s'ils vérifient $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$. L'*angle* entre deux vecteurs non nuls est défini par $0 \leq \theta \leq \pi$ et

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\|}. \tag{31}$$

Le produit vectoriel vérifie

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = 0, \qquad \vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = 0, \qquad \|\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\| \sin\theta. \tag{32}$$

Les deux premières formules de (32) se vérifient par substitution. Pour la troisième on vérifie la formule $\|\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})^2$ par substitution. Par (31) on a donc

$$\|\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2\|\vec{\mathbf{v}}\|^2(1 - \cos^2\theta) = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 \sin^2\theta$$

avec θ dans un intervalle où $\sin\theta \geq 0$.

Proposition 4.1. *Une famille $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\}$ de deux vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ est libre si et seulement si on a $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Quand ceci est vérifié, le plan vectoriel orthogonal à $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ est le plan engendré par $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$:*

$$\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^3 \mid (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0\}. \tag{33}$$

Preuve. Montrons que les vecteurs $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ sont liés ssi $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$. Il y a deux cas : (i) Si $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ ou $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$, alors $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ sont liés et satisfont à $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = 0$. (ii) Si $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{v}} \neq 0$, alors ils sont liés ssi il existe $r \in \mathbf{R}$ non nul avec $\vec{\mathbf{u}} = r\vec{\mathbf{v}}$. Et par (32) ils satisfont à $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$ ssi on a $\sin\theta = 0$, qui signifie $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ et donc $\vec{\mathbf{u}} = r\vec{\mathbf{v}}$ avec $r > 0$ ou $r < 0$. Les deux conditions sont équivalentes.

Les formules (32) montrent qu'on a $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot (r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}}) = 0$ pour tout $r, s \in \mathbf{R}$. Donc on a l'inclusion $\subset$ dans (33). Quand $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ sont libres et donc $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, l'ensemble à gauche est un espace vectoriel de dimension 2, et l'ensemble à droite est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ ne contenant pas $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ (on a $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = \|\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\|^2 > 0$). Donc l'ensemble à droite est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension < 3. Donc l'inclusion $\subset$ est une égalité $=$. $\square$

---

§. C'est à dire pour $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbf{R}^3$ et $r \in \mathbf{R}$ on a

$$(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}, \quad (r\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = r(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}), \quad \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}, \quad \vec{\mathbf{u}} \cdot (r\vec{\mathbf{v}}) = r(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$$

et similairement pour le produit vectoriel.

Définition 4.2. Une *base orthogonale* de $\mathbf{R}^3$ est une famille de trois vecteurs $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ ***non nuls*** avec

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0. \tag{34}$$

Une telle famille est toujours libre et ainsi une base de $\mathbf{R}^3$.[¶]

Une *base orthonormée* de $\mathbf{R}^3$ est une famille de trois vecteurs $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ avec

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{w}}\| = 1, \qquad \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0. \tag{35}$$

C'est une base orthogonale dont tous les membres sont de norme 1.

Proposition 4.3. *Une famille $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ de trois vecteurs est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ si et seulement si elle satisfait à*

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\| = 1, \qquad \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0, \qquad \vec{\mathbf{w}} = \pm\, \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}. \tag{36}$$

Preuve. ($\Leftarrow$) Pour trois vecteurs vérifiant (36), l'angle θ entre $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ vérifie $0 \le \theta \le \pi$ et $\cos\theta = 0$ par la formule (31). Par conséquent $\sin\theta = 1$. Les formules (32) donnent les conditions manquantes de la définition d'une base orthonormée

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \pm\, \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = 0, \qquad \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \pm\, \vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) = 0,$$
$$\|\vec{\mathbf{w}}\| = \|\pm\, \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{u}}\|\|\vec{\mathbf{v}}\| \sin\theta = 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

($\Rightarrow$) Soit $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Par le ($\Leftarrow$) ci-dessus $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Par conséquent $\vec{\mathbf{w}}$ et $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ sont tous les deux orthogonaux à $\vec{\mathbf{u}}$ et à $\vec{\mathbf{v}}$ et de norme 1. Ils sont donc des générateurs de norme 1 de la droite vectorielle orthogonale au plan vectoriel $\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{v}}$. Il y a exactement deux tels générateurs, qui sont opposés. Par conséquent $\vec{\mathbf{w}}$ et $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ sont égaux ou opposés. □

Chaque base ordonnée de $\mathbf{R}^3$, comme de $\mathbf{R}^2$, a une *orientation* : elle est directe ou indirecte. Pour $\mathbf{R}^2$ une base ordonnée $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\}$ avec $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2)$ et $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2)$ est *directe* si elle vérifie

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0.$$

Si le déterminant est < 0 elle est *indirecte* . Si le déterminant est $= 0$, les deux vecteurs sont liés.

Définition 4.4. Le *déterminant* d'une matrice 3×3 est

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 + u_2 v_3 w_1 - u_2 v_1 w_3 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1. \tag{37}$$

Pour trois vecteurs $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbf{R}^3$ notons

$$P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Donc (37) est une formule pour $\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$. En groupant les termes dans des différentes façons, on voit qu'on a

$$\det P(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = (\vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}. \tag{38}$$

¶. L'argument est le suivant. Soit $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ des vecteurs non nuls vérifiant (34), et soit r, s, t des réels avec $r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{0}}$. Alors on a $0 = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}}) = r\|\vec{\mathbf{u}}\|^2$. Mais on a $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ et ainsi $\|\vec{\mathbf{u}}\| > 0$. D'où $r = 0$. En faisant les produits scalaires de $r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{0}}$ avec $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, on déduit $s = 0$ et $t = 0$.

On en déduit que le déterminant est invariant quand on fait une permutation cyclique des 3 colonnes

$$\det P(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) = \det P(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{u}}) = \det P(\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}).$$

En revanche l'anti-symétrie du produit vectoriel implique que le déterminant change de signe quand on échange deux colonnes

$$\det P(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) = -\det P(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{w}}) = -\det P(\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}) = -\det P(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}}).$$

Proposition 4.5. *Une famille de trois vecteurs* $\{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\}$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *est une base de* $\mathbf{R}^3$ *si et seulement si on a* $\det P(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) \neq 0$.

Preuve. Montrons que c'est une base ssi $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} \neq 0$. C'est équivalent par (38).

Les trois vecteurs sont libres ssi $\{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\}$ est libre et $\vec{\mathbf{w}} \notin \mathbf{R}\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{v}}$. Par la proposition 4.1 ces conditions sont équivalentes à $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ et $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} \neq 0$. Et ces deux conditions sont équivalentes à la seule $(\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} \neq 0$. □

Définition 4.6. Une famille ordonnée de trois vecteurs $\{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\}$ dans $\mathbf{R}^3$ est une *base directe* de $\mathbf{R}^3$ si on a $\det P(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) > 0$. C'est une *base indirecte* si on a $\det P(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) < 0$. (C'est une famille liée si on a $\det P(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) = 0$.)

Proposition 4.7. *Une base orthonormée* $\{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\}$ *satisfaisant à* $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ *dans* (36) *est directe. Elle satisfait aussi à* $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}}$ *et* $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{u}}$.

Une base orthonormée satisfaisant à $\vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ *est indirecte.*

Preuve. Une base orthonormée satisfaisant à (36) avec $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ vérifie $\det P(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 1$.

Une base orthonormée avec $\vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$ vérifie $\det P(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) = -\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = -1$. □

La base canonique $\{\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}\}$ avec

$$\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0), \qquad \vec{\mathbf{j}} = (0,1,0), \qquad \vec{\mathbf{k}} = (0,0,1) \tag{39}$$

est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$, ainsi que $\{(1,0,0),(0,\cos\theta,\sin\theta),(0,-\sin\theta,\cos\theta)\}$

Corollaire 4.8. *Soit* $\{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\}$ *une base orthonormée directe de* $\mathbf{R}^3$. *Alors* $\{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{u}}\}$, $\{\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\}$ *sont aussi des bases orthonormées directes de* $\mathbf{R}^3$, *comme aussi* $\{-\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\}$ *et* $\{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{w}}\}$.

Mais $\{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{w}}\}$, $\{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}}\}$, $\{\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}\}$, $\{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},-\vec{\mathbf{w}}\}$ *et* $\{-\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}},-\vec{\mathbf{w}}\}$ *sont des bases orthonormées indirectes.*

Proposition 4.9. *Soit* $\vec{\mathbf{u}}$ *un vecteur de* $\mathbf{R}^3$ *avec* $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$. *Alors il existe vecteurs* $\vec{\mathbf{v}}$ *et* $\vec{\mathbf{w}}$ *tels que* $\{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\}$ *soit une base orthonormée directe de* $\mathbf{R}^3$.

Preuve. On choisit un vecteur $\vec{\mathbf{s}} = (x,y,z) \neq (0,0,0)$ avec $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{s}} = u_1x + u_2y + u_3z = 0$, et on pose $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{s}}$ et puis $\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{s}}\|}\vec{\mathbf{s}}$ et $\vec{\mathbf{w}} = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{t}}\|}\vec{\mathbf{t}}$. Cela suffit par la proposition 4.3. □

Le produit scalaire se calcule en utilisant les coördonnées par rapport à une base orthonormée quelconque.

Proposition 4.10. *Soit* $\{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\}$ *une base orthonormée de* $\mathbf{R}^3$ *et* $\vec{\mathbf{r}} = a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} + a_3\vec{\mathbf{w}}$ *et* $\vec{\mathbf{s}} = b_1\vec{\mathbf{u}} + b_2\vec{\mathbf{v}} + b_3\vec{\mathbf{w}}$ *des vecteurs. Alors* $\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{s}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Preuve. On développe

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{s}} &= (a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} + a_3\vec{\mathbf{w}}) \cdot (b_1\vec{\mathbf{u}} + b_2\vec{\mathbf{v}} + b_3\vec{\mathbf{w}}) \\
&= a_1b_1\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + a_1b_2\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + a_1b_3\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + a_2b_1\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + a_2b_2\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \\
&\qquad + a_2b_3\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + a_3b_1\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + a_3b_2\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + a_3b_3\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \\
&= a_1b_1 \cdot 1 + a_1b_2 \cdot 0 + a_1b_3 \cdot 0 + a_2b_1 \cdot 0 + a_2b_2 \cdot 1 \\
&\qquad + a_2b_3 \cdot 0 + a_3b_1 \cdot 0 + a_3b_2 \cdot 0 + a_3b_3 \cdot 1 \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \qquad \square
\end{aligned}$$

Le résultat analogue pour le produit vectoriel exige une base orthonormée directe.

Proposition 4.11. *Soit* $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ *une base orthonormée* ***directe*** *de* $\mathbf{R}^3$ *et* $\vec{\mathbf{r}} = a_1\vec{\mathbf{u}} + a_2\vec{\mathbf{v}} + a_3\vec{\mathbf{w}}$ *et* $\vec{\mathbf{s}} = b_1\vec{\mathbf{u}} + b_2\vec{\mathbf{v}} + b_3\vec{\mathbf{w}}$ *des vecteurs. Alors*

$$\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{s}} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\mathbf{u}} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{\mathbf{v}} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{\mathbf{w}}.$$

Cette proposition se démontre par des substitutions comme la précédente et en utilisant les formules $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}}$, $\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}$ de la proposition 4.7.

5. Les rotations dans $\mathbf{R}^3$

Il y a deux notions de rotations dans $\mathbf{R}^n$ en utilisation. Pour les distinguer on les appelera “rotations” et “isométries directes”. Nous regarderons seulement les rotations linéaires, qui sont celles qui fixent l'origine $\vec{\mathbf{0}} = (0, 0, \dots, 0)$. On verra que les deux notions sont équivalentes pour $\mathbf{R}^3$ [et $\mathbf{R}^2$] mais pas pour $\mathbf{R}^n$ avec $n \geq 4$. Informellement :

***Rotation*:** Une rotation fixe un sous-espace (affine ou vectoriel) de dimension $n-2$ dans $\mathbf{R}^n$ appelé l'*axe* — une droite dans $\mathbf{R}^3$, ou un point dans $\mathbf{R}^2$ — et agit sur les plans orthogonaux à l'axe dans la même manière qu'une rotation du plan.

***Isométrie directe*:** Une isométrie directe linéaire est une application linéaire $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ correspondant à un changement du système de coordonnées des coordonnées usuelles (x, y, z) (ou $(x_1, x_2, \dots, x_n)$) vers les coordonnées par rapport à une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^n$.

Nous étudions les rotations dans $\mathbf{R}^3$ autour d'axes passant par l'origine $\vec{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)$. Ces rotations-là envoyent $\vec{\mathbf{0}} \mapsto \vec{\mathbf{0}}$ et sont des ***applications linéaires*** de $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Pour décrire une telle application linéaire, il suffit de choisir une base $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ de $\mathbf{R}^3$ et donner $f(\vec{\mathbf{u}})$, $f(\vec{\mathbf{v}})$ et $f(\vec{\mathbf{w}})$ parce qu'un membre général de $\mathbf{R}^3$ s'écrit $r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}}$ avec $r, s, t \in \mathbf{R}$, et son image serait

$$f(r\vec{\mathbf{u}} + s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}}) = rf(\vec{\mathbf{u}}) + sf(\vec{\mathbf{v}}) + tf(\vec{\mathbf{w}}). \tag{40}$$

Maintenant soit $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. La rotation d'angle autour de $\vec{\mathbf{u}}$ (c'est à dire autour de l'axe $\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}$) devrait

(1) fixer l'axe $\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}$, et
(2) agir sur le plan vectoriel orthogonal à $\vec{\mathbf{u}}$ dans la même façon qu'une rotation du plan $\mathbf{R}^2$ d'angle θ centrée à l'origine. Ce plan orthogonal à $\vec{\mathbf{u}}$ est $\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}} + \mathbf{R}\vec{\mathbf{w}}$.

Soit $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1, 0)$ et $\vec{\mathbf{e}}_2 = (0, 1)$ les membres de la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Alors la rotation de $\mathbf{R}^2$ d'angle θ centrée à l'origine est l'application linéaire Rot_θ avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rot}_\theta(\vec{\mathbf{e}}_1) &= \cos\theta\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta\,\vec{\mathbf{e}}_2, \\
\mathrm{Rot}_\theta(\vec{\mathbf{e}}_2) &= -\sin\theta\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta\,\vec{\mathbf{e}}_2.
\end{aligned} \tag{41}$$

Ceci motive la définition suivante.

Définition 5.1. Soit $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^3$ un vecteur avec $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$. Par la proposition 4.9 il existe $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbf{R}^3$ avec $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Soit $\theta \in \mathbf{R}$.

La *rotation d'angle θ autour de* $\vec{\mathbf{u}}$ est l'application linéaire $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ avec

$$\begin{aligned} \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}(\vec{\mathbf{u}}) &= \vec{\mathbf{u}} \\ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}(\vec{\mathbf{v}}) &= \cos\theta\,\vec{\mathbf{v}} + \sin\theta\,\vec{\mathbf{w}}, \\ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}(\vec{\mathbf{w}}) &= -\sin\theta\,\vec{\mathbf{v}} + \cos\theta\,\vec{\mathbf{w}}. \end{aligned} \tag{42}$$

Donc la matrice de l'application linéaire $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ dans la base $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ de $\mathbf{R}^3$ est

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Noter que les coefficients dans les lignes de (42) deviennent les coefficients dans les colonnes de (43).

Proposition 5.2. (*a*) *La rotation* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ *d'angle θ autour de* $\vec{\mathbf{u}}$ *ne dépend pas du choix de* $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ *complétant la base orthonormée directe* $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$.

(*b*) *Les rotations* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ *et* $\mathrm{Rot}_{-\vec{\mathbf{u}},-\theta}$ *coïncident.*

(*c*) *Les rotations d'angles θ et $\theta + 2\pi n$ avec $n \in \mathbf{Z}$ coïncident.*

Comme $\vec{\mathbf{u}}$ et $-\vec{\mathbf{u}}$ engendrent le même axe $\mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}$, une rotation autour de l'un est aussi une rotation autour de l'autre, mais dans le sens opposé.

La démonstration usuelle de cette proposition utilise des matrices de passage pour les changements de base. Nous allons démontrer plusieurs formules pour les matrices et quaternions associées à des rotations où il sera immédiatement visible que la rotation ne dépend que de θ et $\vec{\mathbf{u}}$, et qu'on a $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = \mathrm{Rot}_{-\vec{\mathbf{u}},-\theta}$.

6. Le groupe spécial orthogonal $SO(3, \mathbf{R})$

Maintenant regardons les matrices $A \in M_3(\mathbf{R})$ qui induisent des isométries linéaires sur $\mathbf{R}^3$.

Définition 6.1. La *transposée* d'une matrice A est la matrice ${}^tA$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. C'est à dire si $A = (a_{ij})$ et ${}^tA = (b_{ij})$ avec a_{ij} et b_{ij} les coefficient dans la i-ème ligne et j-ème colonne, alors on a $b_{ij} = a_{ji}$.

Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quand on travaille avec des matrices, souvent on identifie les vecteurs $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ avec les colonnes $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$. Le produit scalaire devient

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = {}^t\mathbf{u}\mathbf{v} \tag{44}$$

Pour les produits de matrices on a

$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \tag{45} $$

parce que le coefficient dans la i-ème ligne et j-ème colonne de ${}^t(AB)$ comme de ${}^tB\,{}^tA$ est le produit (scalaire) de la j-ème ligne de A et de la i-ème colonne de B.

Définition 6.2. Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbf{R})$ est *orthogonale* si elle satisfait à ${}^tAA = I_n$. Elle est *spéciale orthogonale* si elle satisfait à ${}^tAA = I_n$ et $\det A = 1$.

La condition d'être orthogonale s'écrit aussi

$$ {}^tA = A^{-1}. \tag{46} $$

Les ensembles

$$ O(n,\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A \text{ est orthogonale}\} \tag{47} $$

$$ SO(n,\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A \text{ est spéciale orthogonale}\} \tag{48} $$

s'appellent le *groupe orthogonal* et le *groupe spécial orthogonal*, respectivement.

Théorème 6.3. *Une matrice à coefficients réels*

$$ A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} $$

est dans $O(3,\mathbf{R})$ si et seulement si ses colonnes $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Elle est dans $SO(3,\mathbf{R})$ si et seulement si ses colonnes $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ forment une base ***orthonormée directe*** *de $\mathbf{R}^3$.*

Preuve. Les lignes de ${}^tA$ sont ${}^t\mathbf{u}$, ${}^t\mathbf{v}$ et ${}^t\mathbf{w}$. Donc

$$ {}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u} \\ {}^t\mathbf{v} \\ {}^t\mathbf{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u}\mathbf{u} & {}^t\mathbf{u}\mathbf{v} & {}^t\mathbf{u}\mathbf{w} \\ {}^t\mathbf{v}\mathbf{u} & {}^t\mathbf{v}\mathbf{v} & {}^t\mathbf{v}\mathbf{w} \\ {}^t\mathbf{w}\mathbf{u} & {}^t\mathbf{w}\mathbf{v} & {}^t\mathbf{w}\mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \end{pmatrix} $$

Cette matrice est égale à la matrice identité I_3 si et seulement si $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ satisfont à

$$ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = 1, \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0, \tag{49} $$

qui sont les conditions (35) définissant une base orthonormée. Donc A est orthogonale si et seulement si $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ est une base orthonormée.

La matrice A est spéciale orthogonale si en plus $\det A = \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ est égal à 1. Mais cette condition caractérise les bases orthonormées qui sont directes (voir (38)). □

Par exemple les deux matrices

$$ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}, $$

sont orthogonales parce que leurs colonnes $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ sont des bases orthonormées de $\mathbf{R}^3$. Mais A n'est pas dans $SO(3,\mathbf{R})$ parce que pour ses colonnes on a $\mathbf{w} = -\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$. En revanche B est dans $SO(3,\mathbf{R})$ parce que ses colonnes vérifient $\mathbf{w} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$.

Théorème 6.4. *Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes* :
(a) *A est une matrice orthogonale.*
(b) *On a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$ pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$.*
(c) *On a $\|\mathbf{u}\| = \|A\mathbf{u}\|$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$.*

Donc les matrices orthogonales sont les matrices des *isométries linéaires*, c'est à dire des isométries fixant l'origine. Elles préservent les normes de vecteurs et les angles entre vecteurs.

Preuve. (a) ⇔ (b) : Par les formules (44) et (45) on a

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{v} = {}^t\mathbf{u}\, I_3 \mathbf{v}, \qquad A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = {}^t(A\mathbf{u})(A\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{u}{}^tAA\mathbf{v}.$$

Ces deux quantités sont égales pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ si et seulement si on a $I_3 = {}^tAA$, ce qui caractérise les matrices orthogonales.

(b) ⇔ (c) : Les produits scalaires déterminent les normes et vice-versa par les formules

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2).$$

De cela on déduit facilement qu'une matrice préserve les normes ssi elle préserve les produits scalaires. □

Théorème 6.5. *La matrice I_3 est dans $SO(3, \mathbf{R})$. De plus, si A et B sont dans $SO(3, \mathbf{R})$, alors A^{-1} et AB sont dans $SO(3, \mathbf{R})$.*

Pour démontrer ce théorème (et le théorème 9.1 ci-dessous) il faut connaitre quelques propriétés du déterminant.

Théorème 6.6. *Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif. Pour $A \in M_3(\mathbf{K})$ soit $\det A \in \mathbf{K}$ le déterminant défini par la formule (37). On démontrera ces propriétés dans le paragraphe suivant.*
(a) *On a $\det I_3 = 1$. Pour $A \in M_3(\mathbf{K})$ on a $\det {}^tA = \det A$.*
(b) *Pour $A, B \in M_3(\mathbf{K})$ on a $\det AB = (\det A)(\det B)$.*
(c) *Pour $B \in M_3(\mathbf{K})$ les condition suivantes sont équivalentes* : (i) $\det B = 0$, (ii) *B n'est pas inversible,* (iii) *il existe $\mathbf{v} \in \mathbf{K}^n$ avec $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.*
(c) *Si $P \in M_3(\mathbf{K})$ est inversible, on a $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$.*

Preuve du théorème 6.5. On a ${}^tI_3 = I_3 = I_3^{-1}$ et $\det I_3 = 1$. Donc I_3 est dans $SO(3, \mathbf{R})$.

Pour A dans $SO(3, \mathbf{R})$, alors on a ${}^tA = A^{-1}$. Par conséquent $C = {}^tA$ est inversible et satisfait à ${}^tC = A = C^{-1}$. Donc C est orthogonale. De plus $\det C = \det {}^tA = \det A = 1$. Donc $C \in SO(3, \mathbf{R})$.

Pour $A, B \in SO(3, \mathbf{R})$ on a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ et on a $\det AB = (\det A)(\det B) = 1 \cdot 1 = 1$. Donc $AB \in SO(3, \mathbf{R})$. □

7. Les quaternions et les rotations

On identifie l'ensemble $\mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ de quaternions imaginaires purs à l'espace $\mathbf{R}^3$ en identifiant le quaternion imaginaire pur $\mathsf{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ au vecteur $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

Proposition 7.1. *Soit $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ des quaternions imaginaires purs, et $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ correspondants. Alors on a $\Re\mathrm{e}(\mathsf{xy}) = -\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}}$, et $\Im\mathrm{m}(\mathsf{xy})$ est le quaternion imaginaire pur correspondant au vecteur $\vec{\mathbf{x}} \wedge \vec{\mathbf{y}}$.*

C'est la formule (22) avec les substitutions $a_0 = 0$ et $b_0 = 0$ correspondant aux quaternions imaginaires purs.

Corollaire 7.2. *Soit* x *un quaternion imaginaire pur, correspondant à* $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^3$. *Alors* $\mathsf{x}^2 = -\|\vec{\mathbf{x}}\|^2$ *est un quaternion réel négatif, et c'est* < 0 *pour* $\mathsf{x} \neq \mathsf{0}$.

Preuve. Par la proposition on a $\Re\mathrm{e}(\mathsf{x}^2) = -\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{x}} = -\|\vec{\mathbf{x}}\|^2$, tandis que $\Im\mathrm{m}(\mathsf{x}^2)$ est le quaternion imaginaire pur correspondant à $\vec{\mathbf{x}} \wedge \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. □

Théorème 7.3. *Soit* $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}$ *des vecteurs de* $\mathbf{R}^3$, *et soit* $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ *les quaternions imaginaires purs correspondants. Alors* $\{\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\}$ *est une base orthonormée directe de* $\mathbf{R}^3$ *si et seulement si* $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$ *satisfont à*

$$\mathsf{x}^2 = \mathsf{y}^2 = \mathsf{z}^2 = -1, \qquad \mathsf{xy} = -\mathsf{yx} = \mathsf{z}, \qquad \mathsf{yz} = -\mathsf{zy} = \mathsf{x}, \qquad \mathsf{zx} = -\mathsf{xz} = \mathsf{y}. \tag{50}$$

Ce sont les mêmes formules que pour les quaternions i, j, k dans (16) et (21).

Preuve. ($\Leftarrow$) Si $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$ vérifient les formules, alors par la proposition 7.1 ou le corollaire (7.2) on déduit de $\mathsf{x}^2 = \mathsf{y}^2 = \mathsf{z}^2 = -1$ qu'on a $\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{z}}\cdot\vec{\mathbf{z}} = 1$ et donc $\|\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$. Notez que $\mathsf{xy} = \mathsf{z}$ est imaginaire pur. Donc on a $\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}} = -\Re\mathrm{e}(\mathsf{xy}) = -\Re\mathrm{e}(\mathsf{z}) = 0$. Similairement $\mathsf{xz} = -\mathsf{y}$ et $\mathsf{yz} = \mathsf{x}$ sont imaginaires purs, et on a donc $\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{z}} = 0$ et $\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{z}} = 0$. Finalement on a $\mathsf{z} = \Im\mathrm{m}(\mathsf{z}) = \Im\mathrm{m}(\mathsf{xy})$. Donc par la proposition on a $\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{x}} \wedge \vec{\mathbf{y}}$. Donc $\{\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\}$ est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.

($\Rightarrow$) Si $\{\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\}$ est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$, alors on a $\|\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{z}}\| = 1$, et le corollaire implique qu'on a $\mathsf{x}^2 = \mathsf{y}^2 = \mathsf{z}^2 = -1$. La proposition nous donne $\Re\mathrm{e}(\mathsf{xy}) = -\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}} = 0$, et comme on et $\vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{z}}$, on a $\Im\mathrm{m}(\mathsf{xy}) = \mathsf{z}$. Donc on a $\mathsf{xy} = 0 + \mathsf{z} = \mathsf{z}$. Similairement $\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{x}} = 0$ et $\vec{\mathbf{y}} \wedge \vec{\mathbf{x}} = -\vec{\mathbf{z}}$ donnent $\mathsf{yx} = -\mathsf{z}$. Etc. □

Définition 7.4. Une quaternion $\mathsf{u} \in \mathbf{H}$ est *unitaire* s'il satisfait à $\|\mathsf{u}\| = 1$. On écrit

$$\mathbf{U} = \{\mathsf{u} \in \mathbf{H} \mid \|\mathsf{u}\| = 1\}.$$

pour l'ensemble des quaterions purs.

Proposition 7.5. (*a*) *Pour* $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbf{U}$ *on a* $\mathsf{u}^{-1} = \bar{\mathsf{u}} \in \mathbf{U}$ *et* $\mathsf{uv} \in \mathbf{U}$.

(*b*) *Les quaternions réels dans* $\mathbf{U}$ *sont* 1 *et* -1.

La partie (a) est une conséquence des propriétés de la norme développée dans la section précédente. Et si $a \in \mathbf{U}$ est réel, alors $\|a\|^2 = a\bar{a} = a^2 = 1$, et donc $a = \pm 1$.

Maintenant soit $\mathsf{u} \in \mathbf{U}$ un quaternion unitaire. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\mathsf{u}}\colon & \mathbf{H} & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ & \mathsf{x} & \longmapsto & \mathsf{ux\bar{u}} \end{array} \tag{51}$$

Théorème 7.6. *Pour tout quaternion unitaire* u *l'application* Φ_{u} *a les propriétés suivantes où* x, y *sont des quaternions et* $r \in \mathbf{R} \subset \mathbf{H}$ *est un quaternion réel :*

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}+\mathsf{y}) = \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) + \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{y}), & \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{xy}) = \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{y}), & \overline{\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})} = \Phi_{\mathsf{u}}(\bar{\mathsf{x}}), \\ \Phi_{\mathsf{u}}(r) = r, & \Re\mathrm{e}\,\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) = \Re\mathrm{e}\,\mathsf{x}, & \|\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})\| = \|\mathsf{x}\|. \end{array}$$

De plus, si z *est un quaternion imaginaire pur, alors* $\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{z})$ *est aussi imaginaire pur.*

Preuve. D'abord $\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}+\mathsf{y}) = \mathsf{u}(\mathsf{x}+\mathsf{y})\bar{\mathsf{u}} = \mathsf{ux\bar{u}} + \mathsf{uy\bar{u}} = \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) + \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{y})$ par distributivité. Puis $\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{xy}) = \mathsf{uxy\bar{u}} = \mathsf{ux\bar{u}uy\bar{u}} = \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{y})$ parce que $\bar{\mathsf{u}}\mathsf{u} = \|\mathsf{u}\| = 1$. On a $\overline{\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})} = \overline{\mathsf{ux\bar{u}}} = \bar{\bar{\mathsf{u}}}\bar{\mathsf{x}}\bar{\mathsf{u}} = \mathsf{u}\bar{\mathsf{x}}\bar{\mathsf{u}} = \Phi_{\mathsf{u}}(\bar{\mathsf{x}})$. Un r réel commute avec tout quaternion, donc on a $\Phi_{\mathsf{u}}(r) = \mathsf{u}r\bar{\mathsf{u}} =$

$r\mathsf{u}\overline{\mathsf{u}} = r\|\mathsf{u}\|^2 = r$. En écrivant $a = \Re\mathrm{e}\,\mathsf{x}$, on a $a = \frac{1}{2}(\mathsf{x}+\overline{\mathsf{x}})$ et ainsi $\Re\mathrm{e}\,\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) = \frac{1}{2}\big(\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) + \overline{\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})}\big) = \frac{1}{2}\big(\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) + \Phi_{\mathsf{u}}(\overline{\mathsf{x}})\big) = \Phi_{\mathsf{u}}\big(\frac{1}{2}(\mathsf{x}+\overline{\mathsf{x}})\big) = \Phi_{\mathsf{u}}(a) = a = \Re\mathrm{e}\,\mathsf{x}$. En écrivant $r = \|\mathsf{x}\|^2$, on a $\|\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})\|^2 = \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})\overline{\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})} = \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x})\Phi_{\mathsf{u}}(\overline{\mathsf{x}}) = \Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}\overline{\mathsf{x}}) = \Phi_{\mathsf{u}}(r) = r = \|\mathsf{x}\|^2$. Finalement si z est imaginaire pur, on a $\Re\mathrm{e}\,\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{z}) = \Re\mathrm{e}\,\mathsf{z} = 0$ et donc $\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{z})$ est aussi imaginaire pur. □

Lemme 7.7. *Soit* x *un quaternion qui commute avec tout* $\mathsf{z} \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$. *Alors* x *est réel.*

Preuve. Si $\mathsf{x} = a + bi + cj + dk$ commute avec tous les quaternions imaginaires purs, alors on a $\mathsf{x}i = i\mathsf{x}$ et $\mathsf{x}j = j\mathsf{x}$. En substituant et développant cela donne

$$ai - b - ck + dj = ai - b + ck - dj, \qquad aj + bk - c - di = aj - bk - c + di.$$

En simplifiant, cela donne $2dj - 2ck = 0$ et $-2di + 2bk = 0$. Donc on a $b = c = d = 0$, et par conséquent $\mathsf{x} = a$ est réel. □

Théorème 7.8. *Soit* $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbf{U}$ *des quaternions unitaires.*

(*a*) *On a* $\Phi_{\mathsf{u}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{H}}$ *ssi on a* $\mathsf{u} = \pm 1$.
(*b*) *On a* $\Phi_{\mathsf{u}} \circ \Phi_{\mathsf{v}} = \Phi_{\mathsf{uv}}$ *et* $\Phi_{\mathsf{u}}^{-1} = \Phi_{\overline{\mathsf{u}}}$.
(*c*) *On a* $\Phi_{\mathsf{u}} = \Phi_{\mathsf{v}}$ *ssi on a* $\mathsf{u} = \pm\mathsf{v}$.

Preuve. (a) Clairement pour $\mathsf{u} = \pm 1$ on a $\mathsf{u}\mathsf{x}\overline{\mathsf{u}} = \mathsf{x}$. Réciproquement si on a $\Phi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) = \mathsf{u}\mathsf{x}\overline{\mathsf{u}} = \mathsf{x}$ pour tout $\mathsf{x} \in \mathbf{H}$, alors on a $\mathsf{u}\mathsf{x} = \mathsf{u}\mathsf{x}\overline{\mathsf{u}}\mathsf{u} = \mathsf{x}\mathsf{u}$ pour tout x. Alors par le lemme u est réel, et donc par la proposition 7.5 on a $\mathsf{u} = \pm 1$.

(b) On a $\Phi_{\mathsf{u}}(\Phi_{\mathsf{v}}(\mathsf{x})) = \mathsf{u}\mathsf{v}\mathsf{x}\overline{\mathsf{v}}\overline{\mathsf{u}} = (\mathsf{u}\mathsf{v})\mathsf{x}\overline{\mathsf{u}\mathsf{v}} = \Phi_{\mathsf{uv}}(\mathsf{x})$. Par conséquent $\Phi_{\overline{\mathsf{u}}} \circ \Phi_{\mathsf{u}} = \Phi_{\overline{\mathsf{u}}\mathsf{u}} = \Phi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{H}}$. Donc on a $\Phi_{\mathsf{u}}^{-1} = \Phi_{\overline{\mathsf{u}}}$.

(c) On a $\Phi_{\mathsf{u}} = \Phi_{\mathsf{v}}$ ssi on a $\mathrm{Id}_{\mathbf{H}} = \Phi_{\mathsf{u}} \circ \Phi_{\mathsf{v}}^{-1} = \Phi_{\mathsf{u}} \circ \Phi_{\overline{\mathsf{v}}} = \Phi_{\mathsf{u}\overline{\mathsf{v}}}$ ssi on a $\mathsf{u}\overline{\mathsf{v}} = \pm 1$ ssi on a $\mathsf{u} = \mathsf{u}\overline{\mathsf{v}}\mathsf{v} = \pm\mathsf{v}$. □

Par le théorème 7.6 on peut restreindre chaque Φ_{u} à une application $\mathbf{R}$-linéaire sur les quaternions imaginaires purs

$$\Psi_{\mathsf{u}} \colon \begin{array}{ccc} \mathbf{H}^{\mathrm{pur}} & \longrightarrow & \mathbf{H}^{\mathrm{pur}} \\ \mathsf{x} & \longmapsto & \mathsf{u}\mathsf{x}\overline{\mathsf{u}} \end{array} \tag{52}$$

Ces application linéaires vérifient les propriétés analogues à celles démontrées dans le théorème 7.8.

L'identification entre $\mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ et $\mathbf{R}^3$ qui identifie $xi + yj + zk \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ à (x, y, z) ou $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathbf{R}^3$ identifie Ψ_{u} à une application linéaire

$$\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}} \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3. \tag{53}$$

Théorème 7.9. *Soit* $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathbf{U}$ *des quaternions unitaires.*

(*a*) *Si* $\{\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\}$ *est une base orthonormée directe de* $\mathbf{R}^3$, *alors* $\{\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}(\vec{\mathbf{x}}), \mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}(\vec{\mathbf{y}}), \mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}(\vec{\mathbf{z}})\}$ *est aussi une base orthonormée directe de* $\mathbf{R}^3$. *Par conséquent la matrice de* $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}$ *est dans* $SO(3, \mathbf{R})$.
(*b*) *On a* $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$ *ssi on a* $\mathsf{u} = \pm 1$.
(*c*) *On a* $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}} \circ \mathrm{Rot}_{\mathsf{v}} = \mathrm{Rot}_{\mathsf{uv}}$ *et* $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}^{-1} = \mathrm{Rot}_{\overline{\mathsf{u}}}$.
(*d*) *On a* $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}} = \mathrm{Rot}_{\mathsf{v}}$ *ssi on a* $\mathsf{u} = \pm\mathsf{v}$.

Preuve. (a) Soit $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$ les quaternions imaginaires purs correspondant à $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}$. Par le théorème 7.3 ils vérifient les équations (50). Par le théorème 7.6 quand on applique Φ_{u} à $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$, les images continuent à vérifier (50). Ces images sont les mêmes que les images sous Ψ_{u}. On en déduit que $\{\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}(\vec{\mathbf{x}}), \mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}(\vec{\mathbf{y}}), \mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}(\vec{\mathbf{z}})\}$ est aussi une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$.

En particulier l'image sous $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}$ de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Ces images sont les colonnes de la matrice de $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}$. Par le théorème 6.3 la matrice de $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}$ est alors dans $SO(3,\mathbf{R})$. $\square$

Soit maintenant x un quaternion pur avec $\|\mathsf{x}\| = 1$. Par le corollaire 7.2 on a $\mathsf{x}^2 = -1$. Par conséquent la multiplication de quaternions de la forme $a + b\mathsf{x}$ (avec $a, b \in \mathbf{R}$) vérifie la même formule que la multiplication dans $\mathbf{C}$

$$(a + b\mathsf{x})(c + d\mathsf{x}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathsf{x}.$$

avec x remplaçant $i \in \mathbf{C}$. Pour la conjugaison on a $\overline{a + b\mathsf{x}} = a - b\mathsf{x}$, encore comme les nombres complexes. Il s'ensuit que pour les quaternions de la forme

$$e^{\theta\mathsf{x}} = \cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x},$$

avec θ réel on a les formules familières

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x})(\cos\theta - \sin\theta\,\mathsf{x}) &= \|\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x}\|^2 = 1,\\ (\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x})(\cos\phi + \sin\phi\,\mathsf{x}) &= \cos(\theta + \phi) + \sin(\theta + \phi)\mathsf{x}.\end{aligned} \tag{54}$$

Théorème 7.10. *Soit* $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^3$ *avec* $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 1$ *et soit* $\theta \in \mathbf{R}$. *Soit* $\mathsf{x} \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ *le quaternion imaginaire pur correspondant, et soit*

$$\mathsf{u}(\vec{\mathbf{x}}, \theta) = e^{\frac{\theta}{2}\mathsf{x}} = \cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x}. \tag{55}$$

Alors $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}(\vec{\mathbf{x}},\theta)}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *est la rotation linéaire d'axe* $\vec{\mathbf{x}}$ *et d'angle* θ*.*

Preuve. Complétons $\vec{\mathbf{x}}$ en une base orthonormée directe $\{\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}\}$ de $\mathbf{R}^3$. Alors les quaternions associés $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathbf{H}^{\mathrm{pur}}$ vérifient (50). Comme x commute avec toute combinaison linéaire de 1 et x on a

$$\Psi_{\mathsf{u}(\vec{\mathbf{x}},\theta)}(\mathsf{x}) = (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{x}(\cos\tfrac{\theta}{2} - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x}) = (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})(\cos\tfrac{\theta}{2} - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{x} = \mathsf{x}.$$

Mais on a $\mathsf{xy} = -\mathsf{yx}$, d'où

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathsf{u}(\vec{\mathbf{x}},\theta)}(\mathsf{y}) = (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{y}(\cos\tfrac{\theta}{2} - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x}) &= (\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})(\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathsf{x})\mathsf{y}\\ &= (\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x})\mathsf{y} = \cos\theta\,\mathsf{y} + \sin\theta\,\mathsf{z}.\end{aligned}$$

Similairement on a

$$\Psi_{\mathsf{u}(\vec{\mathbf{x}},\theta)}(\mathsf{z}) = (\cos\theta + \sin\theta\,\mathsf{x})\mathsf{z} = -\sin\theta\,\mathsf{y} + \cos\theta\,\mathsf{z}.$$

Quand on identifie les quaternions imaginaires purs aux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ on trouve les équations de (42). Donc $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}(\vec{\mathbf{x}},\theta)}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est la rotation linéaire d'axe $\vec{\mathbf{x}}$ et d'angle θ. $\square$

Théorème 7.11. *La rotation* $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *induite par un quaternion unitaire* $\mathsf{u} = a + bi + cj + dk \in \mathbf{U}$ *avec* $\mathsf{u} \neq \pm 1$ *est la rotation d'angle* $\theta = 2\arccos a$ *autour de* $\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}(b, c, d)$*.*

La rotation induite par $\mathsf{u} = \pm 1$ *est triviale.*

Preuve. Pour $\mathsf{u} \neq 1$, ce sont des valeurs de θ et $\vec{\mathbf{x}}$ qui donnent $\mathsf{u}(\vec{\mathbf{x}}, \theta) = a + bi + cj + dk$ dans (55). On a déjà traité le cas $\mathsf{u} = \pm 1$. $\square$

Théorème 7.12. *Soit* $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}^3$ *de norme* 1*, et soit* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$*. Si* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{a}},\alpha} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{b}},\beta} \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$*, alors* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{a}},\alpha} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{b}},\beta} = \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{c}},\gamma}$ *avec* $0 < \gamma < 2\pi$ *vérifiant*

$$\cos\tfrac{\gamma}{2} = \cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} - \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$$

et avec $\vec{\mathbf{c}} = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}\vec{\mathbf{v}}$ *pour*

$$\vec{\mathbf{v}} = \cos\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,\vec{\mathbf{b}} + \cos\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{\mathbf{a}} + \sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\,\vec{\mathbf{a}}\wedge\vec{\mathbf{b}}.$$

Pour continuer il est commode d'identifier $\mathbf{H}$ à $\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}^3$ et d'écrire les membres du dernier espace sous la forme $a+\vec{\mathbf{p}}$ avec $a\in\mathbf{R}$ un scalaire et $\vec{\mathbf{p}}\in\mathbf{R}^3$ un vecteur. Il pourrait sembler bizarre d'écrire la somme d'un scalaire et d'un vecteur, mais ce sont essentiellement les parties réelle et imaginaire pure d'un quaternion. Le produit quaternionique associative de deux vecteurs est alors $\vec{\mathbf{p}}\vec{\mathbf{q}} = -(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{q}}) + \vec{\mathbf{p}}\wedge\vec{\mathbf{q}}$ par la proposition 7.1.

On peut utiliser le produit quaternionique pour déduire quelques propriétés des produits vectoriel et scalaire.

Lemme 7.13. *Soit* $\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\in\mathbf{R}^3$*. Alors on a* $\vec{\mathbf{x}}\wedge(\vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{y}}) = (\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}})\vec{\mathbf{x}} - \|\vec{\mathbf{x}}\|^2\vec{\mathbf{y}}$*.*

Preuve. Pour le produit quaternionique on a $(\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{y}} = -\|\vec{\mathbf{x}}\|^2\vec{\mathbf{y}}$ et

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{x}}(\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{y}}) = \vec{\mathbf{x}}(-(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}}) + \vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{y}}) &= -(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}})\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}\cdot(\vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{y}}) + \vec{\mathbf{x}}\wedge(\vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{y}})\\ &= -(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}})\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}\wedge(\vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{y}})\end{aligned}$$

Comme le produit quaternionique est associative, on a $-\|\vec{\mathbf{x}}\|^2\vec{\mathbf{y}} = -(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}})\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}\wedge(\vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{y}})$. ☐

Explicitons ces applications Ψ_{u} et $\mathrm{Rot}_{\mathsf{u}}$. Décomposons u en ses parties réelle et imaginaire : $\mathsf{u} = a + (bi + cj + dk) = a + \mathsf{p}$. La valeur de Ψ_{u} en $\mathsf{x} = xi + yj + zk$ est alors

$$\Psi_{\mathsf{u}}(\mathsf{x}) = (a+\mathsf{p})\mathsf{x}(a-\mathsf{p}) = a^2\mathsf{x} + a(\mathsf{px} - \mathsf{xp}) - \mathsf{pxp}. \tag{56}$$

En convertissant à la notation scalaire-plus-vecteur, on a

$$\vec{\mathbf{p}}\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{p}} = -(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{x}}) + \vec{\mathbf{p}}\wedge\vec{\mathbf{x}} + (\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{p}}) - \vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{p}} = 2\vec{\mathbf{p}}\wedge\vec{\mathbf{x}},$$

$$\begin{aligned}-\vec{\mathbf{p}}\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{p}} = -\vec{\mathbf{p}}(-(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{p}}) + \vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{p}}) &= (\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{p}})\vec{\mathbf{p}} + (\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{p}}) - \vec{\mathbf{p}}\wedge(\vec{\mathbf{x}}\wedge\vec{\mathbf{p}})\\ &= (\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{p}})\vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{p}}\wedge(\vec{\mathbf{p}}\wedge\vec{\mathbf{x}}) = 2(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{p}} - \|\vec{\mathbf{p}}\|^2\vec{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

La dernière égalité vient de la formule du lemme 7.13. Finalement comme $\mathsf{u} = a + (bi + cj + dk) = a + \mathsf{p}$ est un quaternion unitaire, on a $\|\mathsf{u}\|^2 = a^2 + \|\mathsf{p}\|^2 = 1$. On trouve $\|\vec{\mathbf{p}}\|^2 = 1 - a^2$. En substituant dans (56) on trouve

$$\mathrm{Rot}_{a+\mathsf{p}}(\vec{\mathbf{x}}) = (2a^2-1)\vec{\mathbf{x}} + 2(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{p}} + 2a\vec{\mathbf{p}}\wedge\vec{\mathbf{x}}. \tag{57}$$

C'est cette formule qu'on

8. Les matrices de rotations

La proposition se vérifie par des calculs avec des matrices de passage pour des changements de base. Mais on peut éviter ces calculs-là en notant que dans (64) ci-dessous on a une formule pour $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ qui ne dépend que de $\vec{\mathbf{u}}$ et θ. Donc (a). De plus cette formule (64) est invariante quand on y substitue $(-\vec{\mathbf{u}},-\theta)$ pour $(\vec{\mathbf{u}},\theta)$. Donc (b).

Théorème 8.1. *Les rotations de* $\mathbf{R}^3$ *autour d'un* $\vec{\mathbf{u}}$ *fixé vérifient :*

$$\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},0} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}, \qquad \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}\circ\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\phi} = \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta+\phi}, \qquad \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}^{-1} = \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},-\theta}\,. \tag{58}$$

Preuve. La formule $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},0} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$ est valide parce qu'en substituant $\theta = 0$ dans (43) on trouve la matrice identité $I = I_3$. La formule $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\phi} = \mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta+\phi}$ est valide parce que le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ 0 & \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix}.$$

La formule pour $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}^{-1}$ se déduit des deux autres. □

La matrice (43) décrit l'action de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ sur les coördonnées d'un vecteur par rapport à la base orthonormée directe $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$. En principe la matrice de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ par rapport à la base canonique $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ de (39) et les coördonnées usuelles se calcule dans la manière suivante. Ecrivons $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$. Soit

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Soit A_θ la matrice de (43). Selon la théorie des matrices de passage pour les changements de base, la matrice de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ dans la base canonique est alors

$$R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = PA_\theta P^{-1}. \tag{60}$$

Cette formule a son intérêt, mais beaucoup de calculs on utilise une autre formule.

Théorème 8.2. *Soit $M \in M_3(\mathbf{R})$ et soit $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ une base de $\mathbf{R}^3$ avec $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathbf{w} = \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{smallmatrix}\right)$. Supposons qu'on a*

$$\begin{aligned} M\mathbf{u} &= a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w}, \\ M\mathbf{v} &= b_1\mathbf{u} + b_2\mathbf{v} + b_3\mathbf{w}, \\ M\mathbf{w} &= c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w}. \end{aligned} \tag{61}$$

Soit

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Alors on a $M = PAP^{-1}$.

Preuve. Les trois colonnes du produit MP sont $M\mathbf{u}$, $M\mathbf{v}$ et $M\mathbf{w}$. Les trois colonnes de PA sont $a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w}$, $b_1\mathbf{u} + b_2\mathbf{v} + b_3\mathbf{w}$ et $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w}$. Les équations (61) sont ainsi équivalentes à $MP = PA$. On en déduit $M = MPP^{-1} = PAP^{-1}$. □

La matrice (43) décrit l'action de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ sur les coördonnées d'un vecteur par rapport à la base orthonormée directe $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$. En principe la matrice de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ par rapport à la base canonique $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ de (39) et les coördonnées usuelles se calcule dans la manière suivante. Ecrivons $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$. Soit

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Soit A_θ la matrice de (43). Selon la théorie des matrices de passage pour les changements de base, la matrice de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ dans la base canonique est alors

$$R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = P A_\theta P^{-1}. \tag{63}$$

Cette formule a son intérêt, mais beaucoup de calculs on utilise une autre formule.

Théorème 8.3 (Formule de Rodrigues)**.** *Pour tout* $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^3$ *on a*

$$\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}(\vec{\mathbf{x}}) = \cos\theta\,\vec{\mathbf{x}} + (1-\cos\theta)(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{u}} + \sin\theta\,\vec{\mathbf{u}}\wedge\vec{\mathbf{x}}. \tag{64}$$

Preuve. Soit $f(\vec{\mathbf{x}})$ le membre de droite de (64). Alors l'application $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est une combinaison linéaire de trois applications linéaires. L'application $\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{x}}$ envoye $\vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}} \mapsto \vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \mapsto \vec{\mathbf{w}}$. L'application $\vec{\mathbf{x}} \mapsto (\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{u}}$ envoye $\vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}} \mapsto \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \mapsto \vec{\mathbf{0}}$. L'application $\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{u}}\wedge\vec{\mathbf{x}}$ envoye $\vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{v}} \mapsto \vec{\mathbf{w}}$ et $\vec{\mathbf{w}} \mapsto -\vec{\mathbf{v}}$. La matrice de f dans la base $\{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}\}$ est alors

$$\cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et c'est la même que (43). □

La formule de Rodrigues (64) permet de calculer les images des vecteurs $\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0,1,0)$ et $\vec{\mathbf{k}} = (0,0,1)$ et donc la matrice $R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ de $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ par rapport à la base canonique.

Théorème 8.4. *Soit* $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ *avec* $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$*, et soit* $\theta \in \mathbf{R}$*. Alors la matrice de la rotation* $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$ *est*

$$R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Preuve. Par la formule de Rodrigues l'application $\mathrm{Rot}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ est la combinaison linéaire de trois applications linéaires. La matrice de la première application $\vec{\mathbf{x}} \mapsto \vec{\mathbf{x}}$ est la matrice identité. La deuxième application envoye

$$\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0) \mapsto (\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{i}})\vec{\mathbf{u}} = u_1(u_1, u_2, u_3) = (u_1^2, u_1u_2, u_1u_3).$$

Donc la première colonne de la deuxième matrice est $\left(\begin{smallmatrix} u_1^2 \\ u_1u_2 \\ u_1u_3 \end{smallmatrix}\right)$. La troisième application envoye

$$\vec{\mathbf{i}} \mapsto \vec{\mathbf{u}}\wedge\vec{\mathbf{i}} = (0, u_3, -u_2).$$

Donc la première colonne de la troisième matrice est $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ u_3 \\ -u_2 \end{smallmatrix}\right)$. Les autres colonnes se calculent similairement en utilisant $\vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{k}}$. □

Exemple 8.5. Quelle est la matrice E de la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ autour de $\vec{\mathbf{v}} = (1,1,1)$? On remarque d'abord que $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$. Le $\vec{\mathbf{u}}$ parallèle avec $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$ est $\frac{1}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $1-\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc la matrice est

$$E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

9. Valeurs propres

Théorème 9.1. *Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$. Alors A est la matrice d'une rotation si et seulement si A est dans $SO(3,\mathbf{R})$.*

Pour démontrer ce théorème il faut connaitre aussi les notions de valeur propre et de vecteur propre.

Définition 9.2. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes. Un nombre complexe λ est une *valeur propre* de A si la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Pour une valeur propre λ de A le sous-espace $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) \subset \mathbf{C}^n$ n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$. Il s'appelle l'*espace propre* de A associé à la valeur propre λ. Ses membres sont les *vecteurs propres* associés à la valeur propre λ.

Quand on a $A \in M_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, le sous-espace réel $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) \subset \mathbf{R}^n$ est aussi appelé l'espace propre de A associé à λ.

Un vecteur propre $\mathbf{v}$ de A associé à la valeur propre λ satisfait à $(A - \lambda I_n)\mathbf{v} = A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Donc il vérifie

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{66}$$

avec $A \in M_n(\mathbf{C})$, $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{C}^n$. Cette équation est souvent appelée l'équation des valeurs propres.

Proposition 9.3. *Soit $R_{\mathbf{u},\theta}$ la matrice de la rotation d'angle θ autour de $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$. Supposons $R_{\mathbf{u},\theta} \neq I_3$ (c'est à dire $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$). Alors $\lambda = 1$ est une valeur propre de $R_{\mathbf{u},\theta}$, et les vecteurs propres associés sont les $r\mathbf{u}$ avec $r \in \mathbf{R}$.*

Preuve. Pour $\lambda = 1$ l'équation des valeurs propres est $R_{\mathbf{u},\theta}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, et ceci est vérifié pour les $\mathbf{x}$ qui sont fixés par $R_{\mathbf{u},\theta}$. Pour une rotation non triviale ce sont exactement les vecteurs dans l'axe $\mathbf{R}\mathbf{u}$ de la rotation. □

La clé du théorème 9.1 est le lemme suivant, qui sera démontré dans le paragraphe suivant.

Lemme 9.4. *Soit A dans $SO(3,\mathbf{R})$. Alors $\lambda = 1$ est une valeur propre de A.*

Preuve du théorème 9.1. ($\Rightarrow$) Soit $R_{\mathbf{u},\theta}$ la matrice de la rotation d'angle θ autour d'un $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ avec $\|\mathbf{u}\| = 1$. Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ la base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$ de la définition 5.1. Soit A_θ et P les matrices de (43) et (62). Par (63) on a $R_{\mathbf{u},\theta} = PA_\theta P^{-1}$. Or P est dans $SO(3,\mathbf{R})$ parce que ses colonnes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ forment une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Et A_θ et dans $SO(3,\mathbf{R})$ parce que ses colonnes $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ sont aussi une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Par le théorème 6.5 les matrices P^{-1} et $R_{\mathbf{u},\theta} = PA_\theta P^{-1}$ sont aussi dans $SO(3,\mathbf{R})$.

($\Leftarrow$) Comme I_3 est une matrice de rotation (d'angle 0), il suffit de montrer que tout $A \neq I_3$ dans $SO(3,\mathbf{R})$ est une matrice de rotation. Par le lemme 9.4 une telle A a $\lambda = 1$ comme une valeur propre. Soit $\mathbf{z}$ un vecteur propre non nul associé (donc vérifiant $A\mathbf{z} = \mathbf{z}$ et $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$). En posant $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{z}\|}\mathbf{z}$, on trouve un vecteur propre vérifiant $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ et $\|\mathbf{u}\| = 1$. Par la proposition 4.9 on peut compléter $\mathbf{u}$ en une base orthonormée directe $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ de $\mathbf{R}^3$.

On a $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Par la proposition 6.4 on a $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$. On en déduit qu'on a $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ et $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{w} = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$. Donc $A\mathbf{v}$ et $A\mathbf{w}$ sont orthogonaux à $\mathbf{u}$. Mais $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ engendrent le plan vectoriel orthogonal à $\mathbf{u}$. Donc il existe $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ avec $A\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ et $A\mathbf{w} = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$. Mais par les propositions 4.10 et 6.4 on a aussi

$$\begin{aligned} 1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} = (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a^2 + b^2, \\ 0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{w} = (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \cdot (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = ac + bd, \\ 1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} = (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) \cdot (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = c^2 + d^2. \end{aligned}$$

Donc les vecteurs $(a, b), (c, d) \in \mathbf{R}^2$ sont sur le cercle unité du plan $\mathbf{R}^2$ et sont orthogonaux. Il existe donc $\theta \in \mathbf{R}$ avec $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $(c, d) = \pm(-\sin\theta, \cos\theta)$. On a ainsi

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \mathbf{u} \\ A\mathbf{v} &= \qquad \cos\theta\, \mathbf{v} + \sin\theta\, \mathbf{w}, \\ A\mathbf{w} &= \quad \pm(-\sin\theta\, \mathbf{v} + \cos\theta\, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

La matrice dans la base $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ de l'application linéaire $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ envoyant $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est donc une des matrices suivantes

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad B_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si P est la matrice de colonnes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, alors on a $A = PA_\theta P^{-1}$ ou $A = PB_\theta P^{-1}$. On a $\det A = 1$ parce que A est dans $SO(3, \mathbf{R})$, mais par le théorème 6.6 on a

$$\det PB_\theta P^{-1} = (\det P)(\det B_\theta)\frac{1}{\det P} = \det B_\theta = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1.$$

Donc on a $A \neq PB_\theta P^{-1}$. Par conséquent $A = PA_\theta P^{-1}$, et A est la matrice de la rotation d'angle θ autour de $\mathbf{u}$. □

10. Déduire $(\vec{\mathbf{u}}, \theta)$ de la matrice d'une rotation

Supposons que A est une matrice spéciale orthogonale. Alors A est la matrice d'une rotation. Mais comment trouve-t-on l'axe $\vec{\mathbf{u}}$ et l'angle θ de cette rotation ?

Une complication : vu que les matrices de rotations satisfont à

$$R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = R_{-\vec{\mathbf{u}},-\theta}, \qquad R_{\vec{\mathbf{u}},-\theta} = R_{-\vec{\mathbf{u}},\theta} = {}^tR_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = R^{-1}_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$$

le vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ et l'angle θ sont bien définis seulement à signe près, et les différents choix de signes $\pm\vec{\mathbf{u}}$ et $\pm\theta$ correspondent à deux matrices spéciales différentes (sauf quand $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$) qui sont inverses.

Définition 10.1. La *trace* d'une matrice dans $M_3(\mathbf{R})$ est la somme de ses coefficients diagonaux

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Par exemple pour les trois matrices apparaissant dans la version matricielle (64) de la formule de Rodrigues on a

$$\operatorname{Tr} I_3 = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = 1+1+1 = 3,$$

$$\operatorname{Tr}\begin{pmatrix}u_1^2&u_1u_2&u_1u_3\\u_1u_2&u_2^2&u_2u_3\\u_1u_3&u_2u_3&u_3^2\end{pmatrix} = u_1^2+u_2^2+u_3^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 = 1, \tag{67}$$

$$\operatorname{Tr}\begin{pmatrix}0&-u_3&u_2\\u_3&0&-u_1\\-u_2&u_1&0\end{pmatrix} = 0+0+0 = 0.$$

et on a aussi

$$\operatorname{Tr} A_\theta = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix} = 1+\cos\theta+\cos\theta = 1+2\cos\theta. \tag{68}$$

Les propriétés élémentaires de la trace sont bien connues.

Théorème 10.2. *Soit $A, B, P \in M_3(\mathbf{R})$ avec P inversible, et soit $r \in \mathbf{R}$.*
(a) On a $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$, et on a $\operatorname{Tr}(rA) = r \operatorname{Tr} A$, et aussi $\operatorname{Tr} {}^tA = \operatorname{Tr} A$.
(b) On a $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ et on a $\operatorname{Tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{Tr} A$.

Théorème 10.3. *Soit $A = R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} \in SO(3,\mathbf{R})$ la matrice d'une rotation d'angle θ. Alors θ satisfait à*

$$\operatorname{Tr} A = 1 + 2\cos\theta$$

et donc

$$\boxed{\theta \equiv \pm \arccos \frac{\operatorname{Tr}(A)-1}{2} \pmod{2\pi}.}$$

Preuve. La première formule se déduit soit de

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = \operatorname{Tr}(PA_\theta P^{-1}) = \operatorname{Tr} A_\theta = 1 + 2\cos\theta,$$

soit de (65) et (67) et donc

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} = \cos\theta \cdot 3 + (1-\cos\theta)\cdot 1 + \sin\theta \cdot 0 = 1 + 2\cos\theta.$$

La deuxième formule se déduit de la première. □

Par exemple pour la matrice

$$B = \begin{pmatrix}\frac{9}{25}&\frac{12}{25}&-\frac{4}{5}\\\frac{12}{25}&\frac{16}{25}&\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&0\end{pmatrix}, \tag{69}$$

on a $\operatorname{Tr} B = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + 0 = 1$. Donc $\cos\theta = \frac{\operatorname{Tr}(B)-1}{2} = 0$ et $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Théorème 10.4. *Soit $A = R_{\mathbf{u},\theta}$ la matrice d'une rotation non triviale ($A \neq I_3$) autour de l'axe engendré par un $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ avec $\|\mathbf{u}\| = 1$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ un vecteur non nul satisfaisant à $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Alors on a $\mathbf{u} = \pm\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$.*

$$\boxed{(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}\neq 0, \qquad\qquad \mathbf{u}=\pm\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}.}$$

Pour la matrice B ci-dessus on a

$$B-I=\begin{pmatrix}\frac{9}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5}\\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5}\\ \frac{12}{25} & -\frac{9}{25} & \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -1\end{pmatrix}.$$

Donc on cherche les $\mathbf{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ tels que

$$\begin{pmatrix}-\frac{16}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5}\\ \frac{12}{25} & -\frac{9}{25} & \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

C'est le système linéaire

$$\begin{cases}-\frac{16}{25}x+\frac{12}{25}y-\frac{4}{5}z=0,\\ \frac{12}{25}x-\frac{9}{25}y+\frac{3}{5}z=0,\\ \frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-z=0.\end{cases}$$

En remplaçant les deuxième et troisième équations par $(E_2')=(E_2)+\frac{3}{4}(E_1)$ et $(E_3')=(E_3)+\frac{5}{4}(E_1)$, on trouve un système linéaire équivalent

$$\begin{cases}-\frac{16}{25}x+\frac{12}{25}y-\frac{4}{5}z=0,\\ 0=0,\\ -2z=0.\end{cases}$$

On peut prendre y comme variable libre, et on trouve $z=0$ et $x=\frac{3}{4}y$. Donc $\vec{\mathbf{x}}=(3,4,0)$ est une solution non nulle, et l'axe de la rotation de matrice B est engendré par le vecteur de norme 1

$$\vec{\mathbf{u}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}(3,4,0)=\pm(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5},0).$$

Alors B est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{\mathbf{u}}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0)$. Mais quel est le signe de l'angle (en fixant $\vec{\mathbf{u}}$) ? Pour répondre, on a besoin de quelques notions.

Définition 10.5. Une matrice $A\in M_3(\mathbf{R})$ est *symétrique* si elle satisfait à $A={}^tA$. Une matrice $B\in M_3(\mathbf{R})$ est *anti-symétrique* si elle satisfait à $B=-{}^tB$. De telles matrices ont les formes

$$A=\begin{pmatrix}a&r&s\\r&b&t\\s&t&c\end{pmatrix},\qquad\qquad B=\begin{pmatrix}0&-w&v\\w&0&-u\\-v&u&0\end{pmatrix}.$$

Théorème 10.6. *Soit $A\in M_3(\mathbf{R})$ une matrice. Alors*

$$A^{\mathrm{sym}}=\tfrac{1}{2}(A+{}^tA)\qquad\qquad A^{\mathrm{anti}}=\tfrac{1}{2}(A-{}^tA)\tag{70}$$

sont respectivement symétrique et anti-symétrique et satisfont à $A=A^{\mathrm{sym}}+A^{\mathrm{anti}}$. C'est le seul couple de matrices symétrique et anti-symétrique dont la somme est A.

Définition 10.7. On appelle $A^{\mathrm{sym}}=\frac{1}{2}(A+{}^tA)$ la *partie symétrique* de A et $A^{\mathrm{anti}}=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ la *partie anti-symétrique*.

Les matrices R et $R^{-1} = {}^tR$ des rotations d'angles $\pm\theta$ autour de $\pm\vec{\mathbf{u}}$ sont transposées. Par conséquent, elles ont les mêmes parties symétriques, mais des parties anti-symétriques opposées

$$\tfrac{1}{2}(R + {}^tR) = \tfrac{1}{2}({}^tR + R), \qquad \tfrac{1}{2}(R - {}^tR) = -\tfrac{1}{2}({}^tR - R)$$

Donc pour déterminer le signe de θ avec $\vec{\mathbf{u}}$ fixé (ou vice-versa), on peut regarder la partie anti-symétrique de la matrice de rotation.

La forme matricielle (65) de la formule de Rodrigues écrit la matrice de rotation $R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ comme une combinaison linéaire de trois matrices. Les deux premières sont des matrices symétriques. La troisième est anti-symétrique. Donc la partie symétrique de $R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ est

$$\tfrac{1}{2}(R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} + {}^tR_{\vec{\mathbf{u}},\theta}) = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{pmatrix}.$$

La partie anti-symétrique de $R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ est

$$\tfrac{1}{2}(R_{\vec{\mathbf{u}},\theta} - {}^tR_{\vec{\mathbf{u}},\theta}) = \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 10.8. *Soit $A = R_{\vec{\mathbf{u}},\theta}$ la matrice de la rotation d'angle θ autour de $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ avec $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right)$. Alors on a*

$$\sin\theta\,(u_1, u_2, u_3) = \Big(\frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \frac{a_{13} - a_{13}}{2}, \frac{a_{21} - a_{12}}{2}\Big). \tag{71}$$

Comme on a $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$, cela nous donne une formule

$$|\sin\theta| = \Big\|\Big(\frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \frac{a_{13} - a_{13}}{2}, \frac{a_{21} - a_{12}}{2}\Big)\Big\| \tag{72}$$

en plus de la formule $|\sin\theta| = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$.

La matrice B ci-dessus se décompose en parties symétrique et anti-symétrique

$$B = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & 0 \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix},$$

On déduit qu'on a $\sin\theta\,(u_1, u_2, u_3) = \big(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\big)$. On a $|\sin\theta| = \big\|\big(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\big)\big\| = 1$ (mais on a déjà vu qu'on a $\cos\theta = 0$, et cela implique $|\sin\theta| = 1$). En prenant $\sin\theta = -1$, on déduit que B est la matrice de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\big(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\big)$.

Exemple 10.9. La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est dans $SO(3, \mathbf{R})$ et est donc une matrice de rotation. On a $\mathrm{Tr}(C) = 0$. Donc l'angle θ de la rotation satisfait à $\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(C) - 1}{2} = -\frac{1}{2}$. On a donc $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. Aussi $|\sin\theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La partie anti-symétrique de C est

$$C^{\mathrm{anti}} = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}\,{}^tC = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'angle et le vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ avec $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 1$ dans l'axe de la rotation satisfont alors à $(\sin\theta)\vec{\mathbf{u}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Si on choisit le signe $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $\vec{\mathbf{u}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}(1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Donc C est la matrice de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ (ou autour du vecteur parallèle $(1,1,1)$).

Dans l'exemple 8.5 on a calculé la matrice E de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ avec le même axe. Comme l'angle de l'exemple actuel est le double de l'angle précédent, on devrait avoir $E^2 = C$. Ceci se confirme par calcul.

Exemple 10.10. La matrice

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

est dans $SO(3, \mathbf{R})$. Sa trace est $\mathrm{Tr}(D) = -1$, donc on a $\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(D)-1}{2} = -1$ et $\theta = \pi$. On a $\sin\theta = 0$. La matrice D est symétrique. Sa partie anti-symétrique est 0, et elle nous fournit l'information $(\sin\theta)\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ et donc $|\sin\theta| = \|\vec{\mathbf{0}}\| = 0$, mais elle ne nous fournit pas l'axe. Pour l'axe on cherche un $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ avec $(D - I)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. Donc on résout le système

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont les (x, y, z) multiples de $(1,1,1)$. Donc on a encore $\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Les signes ne sont pas importants cette fois parce que les rotations d'angles π et $-\pi$ autour du même axe coïncident. En comparant aux exemples précédents on a $E^3 = EC = CE = D$.

11. Quelques démonstrations

Dans ce paragraphe on démontre le lemme 9.4. On utilise la notion suivante.

Définition 11.1. Soit $A \in M_3(\mathbf{C})$. Soit T un indéterminé, et $\mathbf{C}[T]$ l'anneau de polynômes en T à coefficients dans $\mathbf{C}$.

Le *polynôme caractéristique* de A est le déterminant

$$P_A(T) = \det(A - TI_3) = \det\begin{pmatrix} a_{11} - T & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - T & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - T \end{pmatrix} = \det A - c_2(A)T + \mathrm{Tr}(A)T^2 - T^3$$

En développant on trouve un polynôme de degré 3 dont les coefficients dépendent des coefficients de A. Le terme de degré 3 est $-T^3$. Le terme constant se calcule en posant $T = 0$, et donc $P_A(0) = \det(A - 0I_3) = \det A$. Les coefficients de T et de T^2 nous intéresse moins ici.

Or un polynôme de degré 3 dans $\mathbf{C}[T]$ se factorise comme

$$P(T) = a(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)(T - \lambda_3)$$

avec $a \in \mathbf{C}^*$, et avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$ les *racines* de $P(T)$, les seuls nombres complexes vérifiant $P(\lambda_i) = 0$. Pour le polynôme caractéristique de $A \in M_3(\mathbf{C})$ comme ci-dessus on a $a = -1$.

Théorème 11.2. *Soit $A \in M_3(\mathbf{C})$ et soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines du polynôme caractéristique de A tel qu'il y ait une factorisation $P_A(T) = (\lambda_1 - T)(\lambda_2 - T)(\lambda_3 - T)$. Alors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de A, et on a $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det A$.*

L'idée est que les λ_i sont les nombres complexes λ vérifiant $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$. Mais le déterminant d'une matrice 3×3 est 0 ssi la matrice est non inversible, et les $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $A - \lambda I_3$ est non inversible sont par définition les valeurs propres de A.

Pour la dernière partie de l'énoncé : les deux formules pour $P_A(T)$ donnent $P_A(0) = \det(A - 0I_3) = \det A$ et $P_A(0) = (\lambda_1 - 0)(\lambda_2 - 0)(\lambda_3 - 0) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Donc on a $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Théorème 11.3. *Soit $A \in M_3(\mathbf{R})$. Si $\lambda \in \mathbf{C}$ est une valeur propre (non réelle) de A, alors son conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A.*

L'idée est que pour $A \in M_3(\mathbf{R})$ le polynôme caractéristique $P_A(T) = \det(A - TI_3) = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3$ a des coefficients réels donc vérifiant $\overline{a_i} = a_i$. On en déduit que pour tout nombre complexe λ on a $\overline{P_A(\lambda)} = P_A(\overline{\lambda})$. Donc si on a $P_A(\lambda) = 0$ on a aussi $P_A(\overline{\lambda}) = \overline{P_A(\lambda)} = 0$. Comme les racines de $P_A(T)$ sont les valeurs propres de A, cela démontre le théorème.

Théorème 11.4. *Soit $A \in O(3, \mathbf{R})$ et λ un valeur propre* ***réelle*** *de A. Alors $\lambda = \pm 1$.*

L'idée est que les vecteurs propres $\mathbf{x}$ associées aux valeurs propres réelles λ d'une matrice réelle A sont les solutions non nulles du système linéaire $(A - \lambda I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ à coefficients réels, et on peut trouver des solutions réelles. Donc il y a un vecteur propre $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ avec $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Par le théorème 6.4 on a

$$\|\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|.$$

En divisant par $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ on trouve $|\lambda| = 1$.

12. $SU(2, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})$

13. Les quaternions entiers et les sommes de quatres carrés