ISEN | école d'ingénieurs
ALL IS DIGITAL!

Traitement analogique et numérique du signal
Chapitre 2 : *La numérisation*

Antony Pottier / Pierre-Jean Bouvet / Charles Vanwynsberghe
ISEN Ouest - Yncréa Ouest
M1 2021-2022

Sommaire

Sommaire

Introduction

Pourquoi numériser ?

Intérêts

- Stockage d'une grande quantité d'information
- Précision et Reproductibilité
- Diffusion rapide (internet, ...)
- Traitement rapide et automatique (index, statistiques)

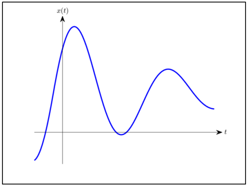
Inconvénients

Perte irréversible d'information lors de la numérisation...

Introduction

Conversion analogique numérique

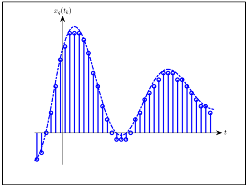
Signal analogique



Convertisseur analogique/numérique (CAN ou ADC)

Convertisseur numérique/analogique (CNA ou DAC)

Signal numérique



Numérisation d'un signal

- Discrétisation (Échantillonnage)
- Quantification

Sommaire

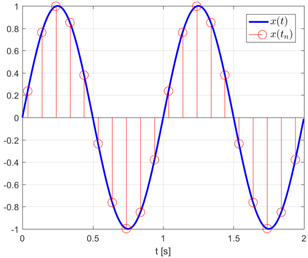
Signal discret

Échantillonnage

Définition d'un échantillon

On dit que la suite $\{x(t_n)\}$ représente les échantillons du signal continu $x(t)$ où t_n correspond à l'instant d'échantillonnage.

→ Si $t_n - t_{n-1} = T_e$ on dit que l'échantillonnage est régulier et $f_e = 1/T_e$ représente la fréquence d'échantillonnage.



Signal discret

Modélisation

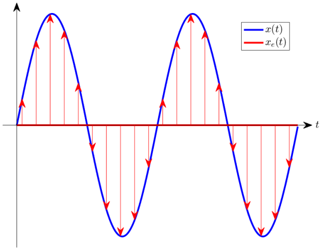
Définition

Le signal échantillonné à la cadence $f_e = 1/T_e$ d'un signal continu $x(t)$ s'écrit :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t_n)\delta(t - nT_e) = x(t)w(t)$$

où $w(t)$ représente le peigne de Dirac :

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$



Signal discret

Spectre du signal échantillonné

ISEN ALL IS DIGITAL! BREST | yncréa

Propriétés

Échantillonner un signal $x(t)$ à la fréquence $f_e = 1/T_e$ revient à périodiser le spectre $X(f)$ avec une période de $1/T_e$:

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

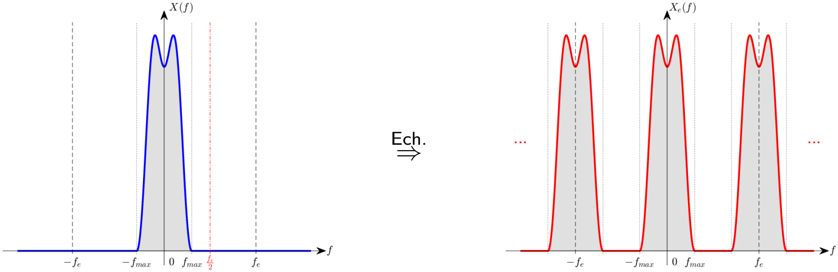
- Preuve avec la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_e}\right) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi k f T_e}$$

- Interprétation avec la propriété produit/convolution de la TF

Signal discret

Spectre du signal échantillonné



Sommaire

Théorème de l'échantillonnage

Principe

Théorème de Nyquist-Shannon

La représentation discrète d'un signal exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage f_e supérieure au double de la fréquence maximale f_{max} présente dans ce signal :

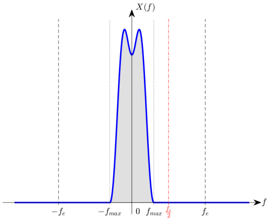
$$f_e > 2f_{max}$$

Réciproquement un signal échantillonné à f_e ne peut contenir des fréquences supérieures à $f_e/2$ appelée fréquence de Nyquist.

Exemple : un signal audio numérique échantillonné à 44.1 kHz (CD audio) ne peut contenir que des fréquences inférieures à 22.05 kHz. En théorie, l'oreille humaine est censée percevoir des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz.

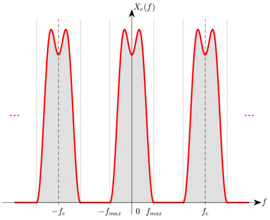
Théorème de l'échantillonnage

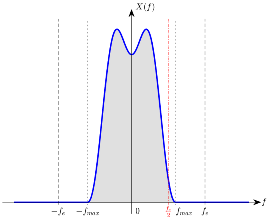
Illustration fréquentielle



$f_e > 2f_{max}$

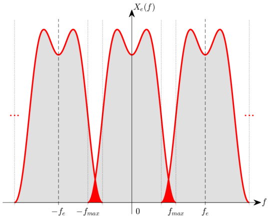
$\overset{\text{Ech.}}{\Longrightarrow}$





$f_e < 2f_{max}$

$\overset{\text{Ech.}}{\Longrightarrow}$



Théorème de l'échantillonnage

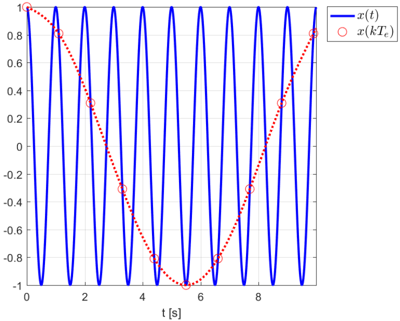
Aliasing

Quand le théorème d'échantillonnage n'est pas respecté ($f_{max} > f_e/2$), il se produit un phénomène de repliement de spectre, appelé *aliasing*.

Exemple :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

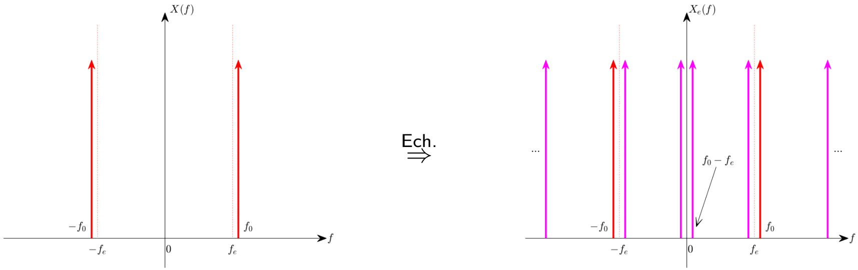
avec $f_0 = 1$ Hz et $f_e = 0.91$ Hz



$\rightarrow$ les échantillons semblent provenir d'une sinusoïde de fréquence inférieure : il y a *ambigüité*.

Théorème de l'échantillonnage

Aliasing



Exemples dans la vie courante :

- Roue de voiture dans un film
- Stroboscope
- Hand spinner
- ...

Théorème de l'échantillonnage

Reconstruction

Propriété

Si le critère de Shannon est respecté i.e. $f_e \geq 2f_{max}$, on peut reconstruire de façon unique le signal continu $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x(kT_e)$ de la façon suivante :

$$x(t) = \sum_{n-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \operatorname{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{T_e} - n\right)\right)$$

- La reconstruction parfaite reste théorique car non-causale et nécessitant un ensemble infini d'échantillons.
- En pratique, on approxime la reconstruction en tronquant la somme et en introduisant un retard.

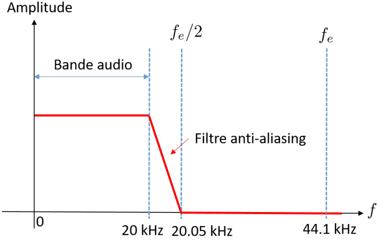
Théorème de l'échantillonnage

Limites pratiques

- Le spectre du signal est rarement parfaitement connu à l'avance
- Un signal réel est rarement à bande limitée : en pratique il n 'existe pas de fréquence f_{max} telle que :

$$\forall f > f_{max} \quad X(f) = 0$$

- On utilise alors un filtre anti-repliement (anti-aliasing) pour atténuer fortement les fréquences supérieures à une fréquence f_{max} donnée.



Théorème de l'échantillonnage

Exercice

Numérisation d'un signal

Soit $x(t)$ un signal analogique défini t.q. :

$$x(t) = \cos 4\pi t - 2\sin 2\pi t$$

1. On echantillonne $x(t)$ à $f_e = 6$ Hz. Calculez et représentez le spectre du signal échantillonné.
2. On echantillonne $x(t)$ à $f_e = 3.5$ Hz. Calculez et représentez le spectre du signal échantillonné. Décrire le phénomène
3. Quelle condition doit-on imposer à f_e pour numériser correctement le signal $x(t)$?

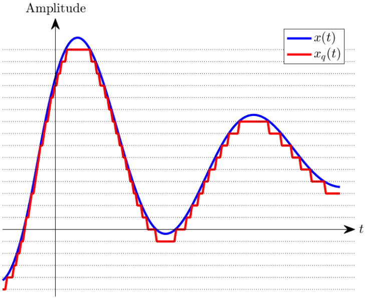
Sommaire

Quantification

Principe

Définition

La quantification permet de passer d'un signal $x(t)$ à amplitude continue à un signal $x_q(t)$ à amplitude discrète représentée par 2^{n_b} niveaux où n_b est le nombre de bits de quantification.



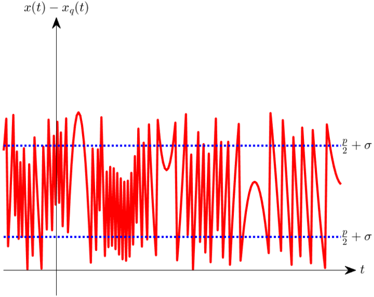
Si les intervalles entre niveaux de quantification sont identiques, on parle de *quantification uniforme* :

$$p = \frac{2V_{max}}{2^{n_b}}$$

Quantification

Distorsion

- Quantification : opération destructrice d'information.
- Elle introduit une erreur (ou un bruit) entre le signal quantifié et le signal source
- Bruit de quantification : $\sigma^2 = V_{max}^2 \frac{2^{-2n_b}}{3}$



Quantification

Distorsion

- Plus le pas p est petit, plus la bruit de quantification est petit mais plus le débit numérique est élevé
- Plus le pas p est grand, plus la bruit de quantification est élevé mais plus le débit numérique est faible

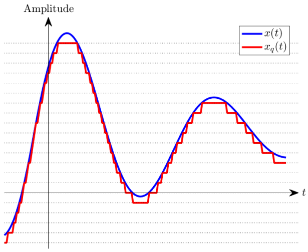


FIGURE 1 – Quantification à 5 bits

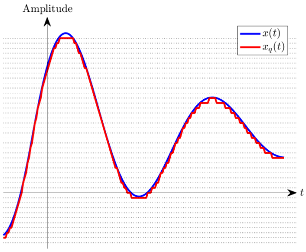


FIGURE 2 – Quantification à 6 bits

Quantification

Le SNR (ou SQNR)

Le rapport signal à bruit (SNR) du au bruit de quantification est égal à :

$$\mathrm{SNR} \approx 10\log(3) + 20\log(2)n_b$$

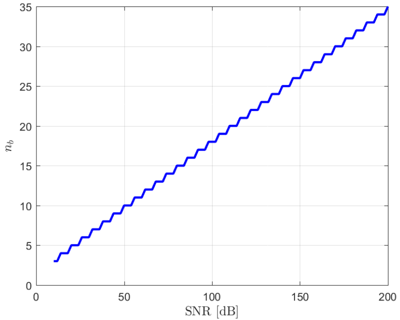
- on l'appelle aussi SQNR (Signal to quantized noise ratio)
- augmenter n_b de $1 =$ améliorer le SQNR de 6.02 dB
- si x(t) $= \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, alors $\mathrm{SNR} = 1.76 + 6.02 n_b$ dB

Quantification

Choix du pas

Le nombre de bits de quantification n_b est fixé pour atteindre un rapport signal à bruit (SNR) donné :

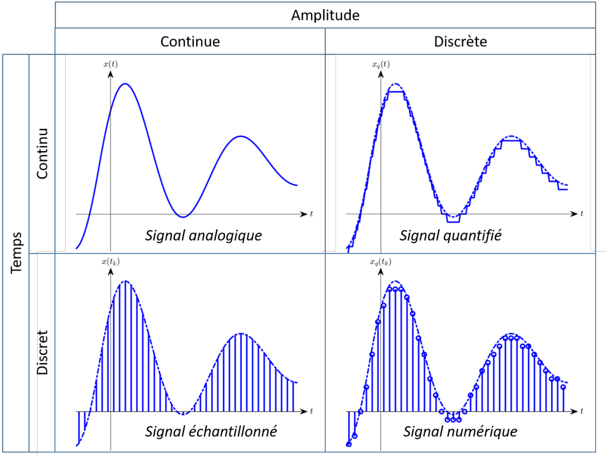
$$n_b \approx \frac{1}{20 \log 2} \mathrm{SNR} - \frac{\log 3}{2 \log 2}$$



Sommaire

En résumé

Classification continu/discret



En résumé

Signal numérique

Numérisation = échantillonnage + quantification

L'échantillonnage régulier d'un signal :

- réplique son spectre tous les f_e
- ne fait théoriquement pas perdre d'information si $f_e > 2f_{max}$

La quantification d'un signal :

- fait perdre de l'information par une distorsion de son amplitude
- induit un SQNR croissant en fonction du nombre de bits n_b

#cestimportant