Traitement analogique et numérique du signal
Chapitre 1 : *Théorie du signal analogique*

Antony Pottier / Pierre-Jean Bouvet / Charles Vanwynsberghe
ISEN Ouest - Yncréa Ouest

M1 2021-2022

Sommaire

Sommaire

Notion de signal

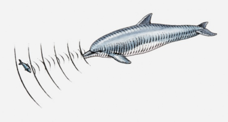
Qu'est-ce qu'un signal ?

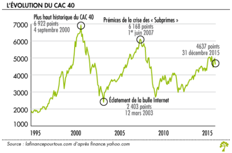
Définition : Signal

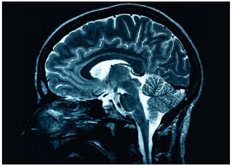
- Un signal est une *fonction* qui dépend d'un ou de plusieurs paramètres et qui contient une *information*

Exemples :

- Courant électrique
- Suite de nombres
- Onde lumineuse
- Onde acoustique
- Onde radio-électrique
- Flux video
- ...



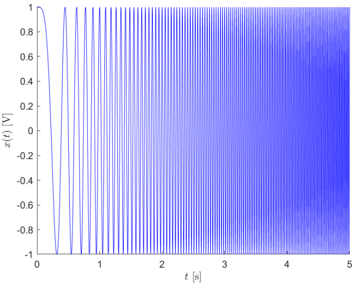




Notion de signal

Qu'est-ce qu'un signal ?

Exemple : le signal *chirp*, ou sinus glissant



$$x(t) = \cos\left(2\pi(f_0 t + kt^2)\right)$$

$$\text{avec } k = \frac{f_1 - f_0}{2T}$$

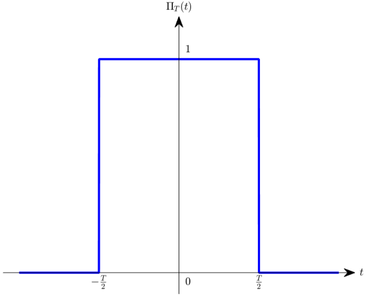
Notion de signal

Signaux de base

ISEN ALL IS DIGITAL! BREST yncréa

Fonction porte

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

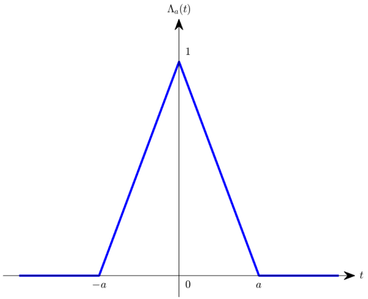


Notion de signal

Signaux de base

Fonction triangle

$$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{pour } |t| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

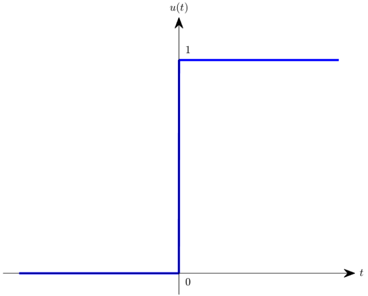


Notion de signal

Signaux de base

Fonction echelon unité (ou echelon de Heaviside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

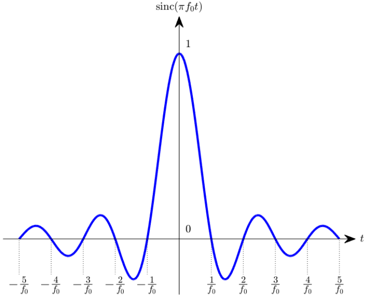


Notion de signal

Signaux de base

Fonction sinus cardinal

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$



Notion de signal

Acquisition d'un signal physique

- Utilisation d'un capteur
- Un capteur est un dispositif qui permet de transformer les variations $p(t)$ du phénomène physique qui nous intéresse en une tension $x(t)$

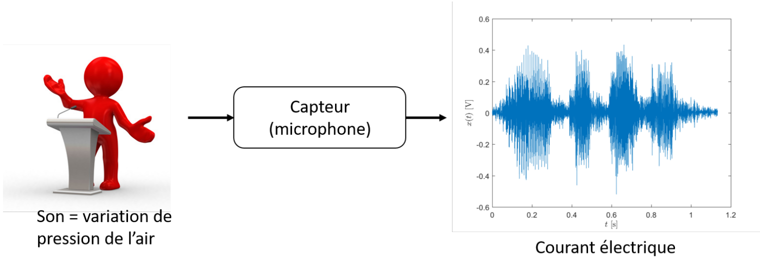


FIGURE 1 – Acquisition de la parole

Notion de signal

Fonctions essentielles du traitement du signal

- *L'analyse* : isoler les composantes essentielles d'un signal pour mieux en comprendre ses origines et sa nature

Notion de signal

Fonctions essentielles du traitement du signal

- *L'analyse* : isoler les composantes essentielles d'un signal pour mieux en comprendre ses origines et sa nature
- *La mesure* : estimer la valeur d'une grandeur caractéristique associée au signal

Notion de signal

Fonctions essentielles du traitement du signal

- *L'analyse* : isoler les composantes essentielles d'un signal pour mieux en comprendre ses origines et sa nature
- *La mesure* : estimer la valeur d'une grandeur caractéristique associée au signal
- *Le filtrage* : éliminer certaines composantes d'un signal (ex : réduire les parasites d'un signal sonore)

Notion de signal

Fonctions essentielles du traitement du signal

- *L'analyse* : isoler les composantes essentielles d'un signal pour mieux en comprendre ses origines et sa nature
- *La mesure* : estimer la valeur d'une grandeur caractéristique associée au signal
- *Le filtrage* : éliminer certaines composantes d'un signal (ex : réduire les parasites d'un signal sonore)
- *La détection* : extraire un signal d'un bruit de fond qui lui est superposé

Notion de signal

Fonctions essentielles du traitement du signal

- *L'analyse* : isoler les composantes essentielles d'un signal pour mieux en comprendre ses origines et sa nature
- *La mesure* : estimer la valeur d'une grandeur caractéristique associée au signal
- *Le filtrage* : éliminer certaines composantes d'un signal (ex : réduire les parasites d'un signal sonore)
- *La détection* : extraire un signal d'un bruit de fond qui lui est superposé
- *L'identification* : complémentaire à la détection et sert à effectuer un classement d'un signal observé (ex : la reconnaissance de formes)

Notion de signal

Fonctions essentielles du traitement du signal

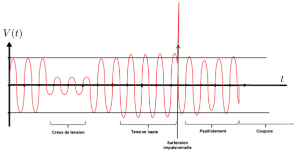
- *L'analyse* : isoler les composantes essentielles d'un signal pour mieux en comprendre ses origines et sa nature
- *La mesure* : estimer la valeur d'une grandeur caractéristique associée au signal
- *Le filtrage* : éliminer certaines composantes d'un signal (ex : réduire les parasites d'un signal sonore)
- *La détection* : extraire un signal d'un bruit de fond qui lui est superposé
- *L'identification* : complémentaire à la détection et sert à effectuer un classement d'un signal observé (ex : la reconnaissance de formes)
- *La synthèse* : opération inverse de l'analyse qui sert à recréer un signal de forme appropriée

Sommaire

Classification des signaux

Classification dimensionnelle

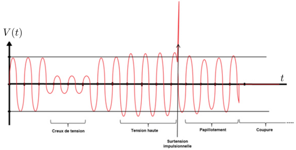
- *Unidimensionnel*
  - ex : tension électrique $V(t)$



Classification des signaux

Classification dimensionnelle

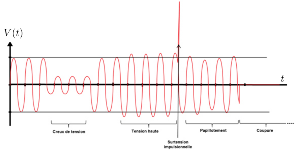
- *Unidimensionnel*
  - ex : tension électrique $V(t)$
- *Bidimensionnel*
  - ex : image noir et blanc statique $B(x, y)$ = brillance

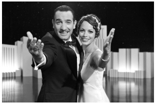


Classification des signaux

Classification dimensionnelle

- *Unidimensionnel*
  - ex : tension électrique $V(t)$
- *Bidimensionnel*
  - ex : image noir et blanc statique $B(x, y) =$ brillance
- *Tridimensionnel*
  - ex : film noir et blanc $B(x, y, t)$





Classification des signaux

Classification phénoménologique

- *Déterministe* : l'évolution temporelle peut être parfaitement prédite à partir d'un modèle mathématique

Classification des signaux

Classification phénoménologique

- *Déterministe* : l'évolution temporelle peut être parfaitement prédite à partir d'un modèle mathématique
- *Aléatoire* : comportement imprévisible = description probabiliste (variable aléatoire)

Classification des signaux

Classification phénoménologique

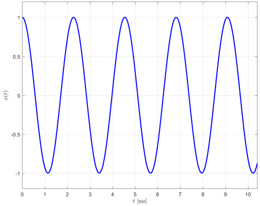
- *Déterministe* : l'évolution temporelle peut être parfaitement prédite à partir d'un modèle mathématique
- *Aléatoire* : comportement imprévisible = description probabiliste (variable aléatoire)

Attention

Tout signal physique comporte une composante aléatoire

Classification des signaux

Classification phénoménologique



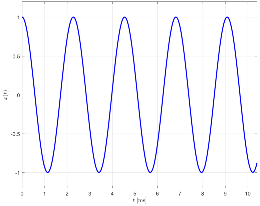
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

avec $f_0 = 440$ Hz

$\Rightarrow$ signal unidimensionnel déterministe...

Classification des signaux

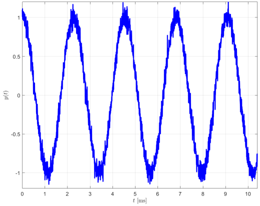
Classification phénoménologique



$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

avec $f_0 = 440$ Hz

$\Rightarrow$ signal unidimensionnel déterministe...



$$y(t) = \cos(2\pi f_0 t) + w(t)$$

avec $w(t)$ bruit Gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma_w^2 = 5e^{-3}$

$\Rightarrow$ signal unidimensionnel aléatoire...

Classification des signaux

Classification énergétique

Énergie d'un signal

On appelle énergie d'un signal $x(t)$, la quantité E_x définie quand elle existe par :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Classification des signaux

Classification énergétique

Énergie d'un signal

On appelle énergie d'un signal $x(t)$, la quantité E_x définie quand elle existe par :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Puissance moyenne d'un signal

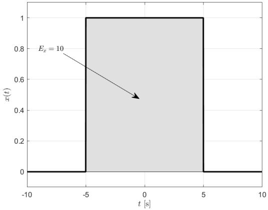
On appelle puissance moyenne d'un signal $x(t)$, la quantité P_x définie quand elle existe par :

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

Classification des signaux

Classification énergétique

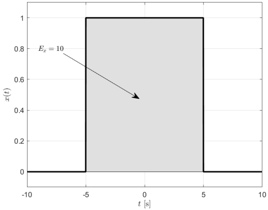
- *Signaux à énergie finie*
  - $0 < E_x < +\infty \Rightarrow P_x = 0$
  - Correspondent à tous les signaux de type transitoire
  - Signaux rencontrés dans la réalité physique
  - Ex : signal porte



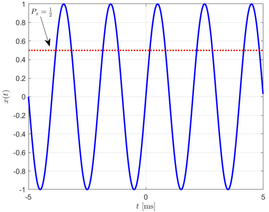
Classification des signaux

Classification énergétique

- *Signaux à énergie finie*
  - $0 < E_x < +\infty \Rightarrow P_x = 0$
  - Correspondent à tous les signaux de type transitoire
  - Signaux rencontrés dans la réalité physique
  - Ex : signal porte



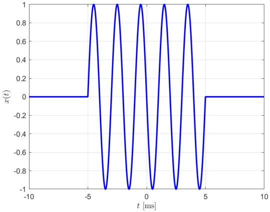
- *Signaux à puissance moyenne finie non nulle*
  - $0 < P_x < +\infty \Rightarrow E_x = +\infty$
  - Signaux périodiques,quasi-périodiques et aléatoires
  - Modélisent le comportement permanent des systèmes physiques
  - Ex : signal $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$



Classification des signaux

Classification temporelle

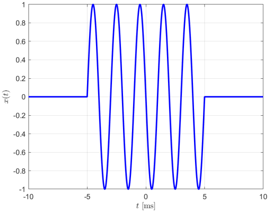
- *Signaux à durée finie (ou support temporel borné)*
  - L'amplitude s'annule en dehors d'un intervalle T



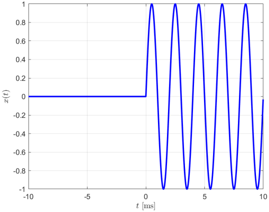
Classification des signaux

Classification temporelle

- *Signaux à durée finie (ou support temporel borné)*
  - L'amplitude s'annule en dehors d'un intervalle T



- *Signaux causaux*
  - Le signal est nul pour toute valeur négative du temps



Classification des signaux

Signaux physiques

Afin d'être physiquement réalisable, un signal doit être :

- causal
- de durée finie
- d'énergie finie
- d'amplitude bornée

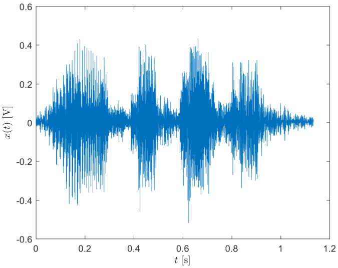


FIGURE 2 – Enregistrement sonore du mot "coucou"

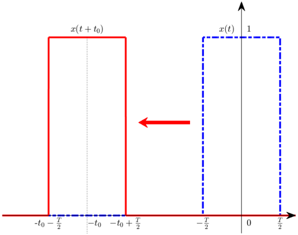
Sommaire

Opérations de base

Avancer ou retarder un signal

Décalage à gauche (ou avance)

$$y(t) = x(t + t_0) \quad \text{avec } t_0 > 0$$



Opérations de base

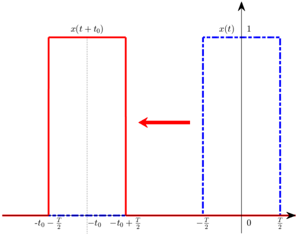
Avancer ou retarder un signal

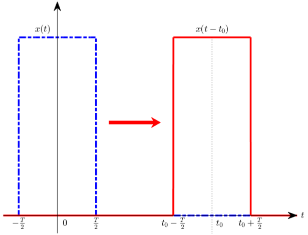
Décalage à gauche (ou avance)

$$y(t) = x(t + t_0) \quad \text{avec } t_0 > 0$$

Décalage à droite (ou retard)

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \text{avec } t_0 > 0$$



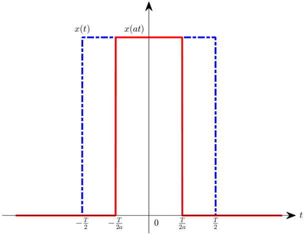


Opérations de base

Dilatater ou compresser un signal

Compression

$$y(t) = x(at) \quad \text{avec } a > 1$$



Opérations de base

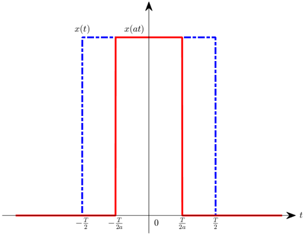
Dilatater ou compresser un signal

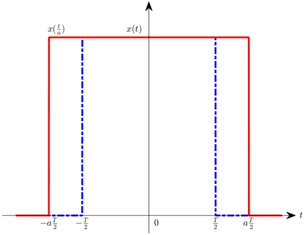
Compression

$$y(t) = x(at) \quad \text{avec } a > 1$$

Dilatation

$$y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) \quad \text{avec } a > 1$$



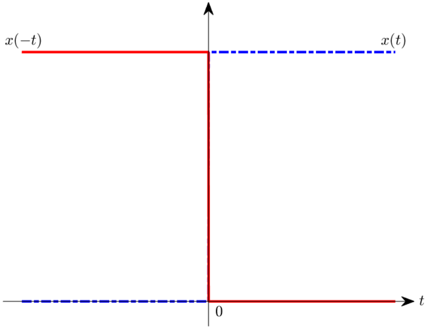


Opérations de base

Retourner temporellement un signal

Retournement temporel

$$y(t) = x(-t)$$



Opérations de base

Convolution

Produit de convolution

Soient 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$ localement sommables, on appelle produit de convolution de $x(t)$ et $y(t)$ la fonction intégrale $z(t)$ définie par :

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

Opérations de base

Convolution

Produit de convolution

Soient 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$ localement sommables, on appelle produit de convolution de $x(t)$ et $y(t)$ la fonction intégrale $z(t)$ définie par :

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

Permet de caractériser l'influence d'un système sur un signal d'entrée

- $e(t)$: entrée du système
- $s(t)$: sortie du système
- $h(t)$: réponse impulsionnelle du système

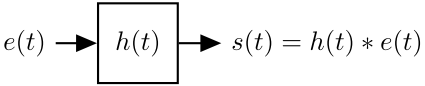


FIGURE 3 – Produit de convolution et système

Opérations de base

Convolution

Un exemple en images ...

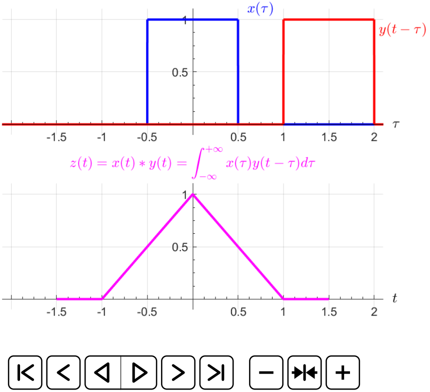


FIGURE 4 – Convolution de 2 fonctions portes

Opérations de base

Corrélation

Fonction d'intercorrélation [Signaux à énergie finie]

Pour 2 signaux à énergie finie $x(t)$ et $y(t)$, on définit la fonction d'intercorrélation $\Gamma_{xy}(\tau)$ telle que :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Opérations de base

Corrélation

Fonction d'intercorrélation [Signaux à énergie finie]

Pour 2 signaux à énergie finie $x(t)$ et $y(t)$, on définit la fonction d'intercorrélation $\Gamma_{xy}(\tau)$ telle que :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Fonction d'intercorrélation [Signaux à puissance moyenne finie non nulle]

Pour 2 signaux de puissance moyenne finie non nulle $x(t)$ et $y(t)$, on définit la fonction d'intercorrélation $\Gamma_{xy}(\tau)$ telle que :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y^*(t)dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Opérations de base

Corrélation

Quelques propriétés :

- Symétrie : $\Gamma_{xy}(\tau) = \Gamma^*_{yx}(-\tau)$
- Dans le cas particulier ou $x(t) = y(t)$, on parle de fonction d'autocorrélation que l'on note $\Gamma_{xx}(\tau)$
- Maximum à l'origine de la fonction d'autocorrélation :

$$\Gamma_{xx}(\tau) \leq \Gamma_{xx}(0) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

avec :

$$\Gamma_{xx}(0) = \begin{cases} E_s & \text{si signal à énergie finie} \\ P_s & \text{si signal à puissance moyenne non nulle finie} \end{cases}$$

Opérations de base

Corrélation

Un exemple en images ... et en calcul dans le TD.

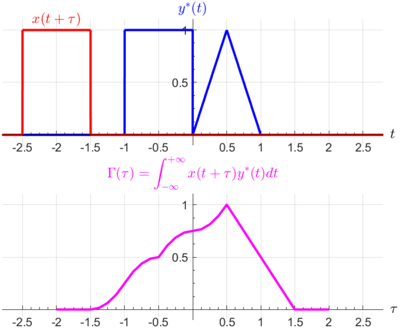


FIGURE 5 – Détection d'un signal porte

Sommaire

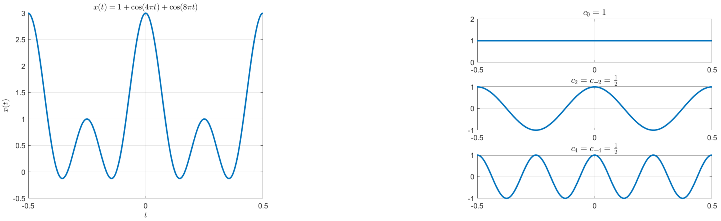
Analyse spectrale

Série de Fourier

Théorème de Dirichlet

Si $x(t)$ est un signal T-périodique, continue et à énergie finie sur $[0, T]$, alors $x(t)$ est décomposable en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2j\pi \frac{n}{T} t} \quad \text{avec } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2j\pi \frac{n}{T} t} dt$$



Analyse spectrale

Série de Fourier

- Un signal non-périodique peut être considéré comme la limite d'un signal périodique de période T avec $T \to +\infty$
- Si $x(t)$ est sommable, on montre que Tc_n tend vers une quantité finie, appelée *transformée de Fourier* du signal $x(t)$:

$$\lim_{T \to +\infty} Tc_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f) = \mathrm{TF}[x(t)]$$

- Inversement on montre que $x(t)$ se déduit de $X(f)$ par *transformée de Fourier inverse* :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \mathrm{TF}^{-1}[X(f)]$$

Analyse spectrale

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier directe

Soit $x(t)$ une fonction à valeurs réelles (ou complexes) de la variable t, on appelle $X(f)$ la transformée de Fourier de $x(t)$, la fonction complexe de la variable réelle f définie par :

$$X(f) = \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

- f désigne la fréquence et $X(f)$ est le spectre de $x(t)$
- $x(t)$ et $X(f)$ représentent la même grandeur physique et contiennent les mêmes informations mais dans des domaines différents (respectivement temporel et fréquentiel)

Analyse spectrale

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier inverse

Soit $X(f)$ une fonction à valeurs réelles (ou complexes) de la variable f, on appelle $x(t)$ la transformée de Fourier inverse de $X(f)$, la fonction complexe de la variable réelle t définie par :

$$x(t) = \mathrm{TF}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Scan
to discover !

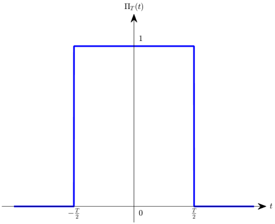
Download this free Unitag App to scan
at unitag.io/app

Analyse spectrale

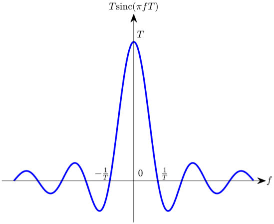
Transformée de Fourier

Un exemple : la TF de la fonction porte

$$\Pi_T(t) \overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons} T\,\text{sinc}(\pi f T)$$



$\overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons}$



#cestimportant

Analyse spectrale

Propriétés de la transformée de Fourier

Propriété	signal	TF du signal
Changement d'échelle	$x(at)$	$\frac{1}{\vert a\vert}X(f/a)$
Complexe conjugué	$x^*(-t)$	$X^*(f)$
Linéarité	$ax(t)+by(t)$	$aX(f)+bY(f)$
Translation	$x(t-t_0)$	$X(f)\exp(-j2\pi f t_0)$
Modulation	$x(t)\exp(j2\pi f_0 t)$	$X(f-f_0)$
Convolution	$x(t)*y(t)$	$X(f)Y(f)$
Produit	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
Symétrie hermitienne	$x(t)\in\mathbb{R}$	$X(-f)=X^*(f)$ $\Re(X(f))$ et $\vert X(f)\vert$ paires
Dualité	$X(t)$ (resp $X(f)$) $X(-t)$	$x(f)$ (resp $x(t)$) $x(f)$

Et autres : dérivées temporelle, dérivée fréquentielle...

Analyse spectrale

Propriétés de la transformée de Fourier

Convergence de la transformée de Fourier :

- Cas des signaux à énergie finie
  - La limite de Tc_n quand $T \to +\infty$ existe toujours
  - La transformée de Fourier est donc toujours définie
- Cas des signaux à puissance moyenne finie (à énergie infinie)
  - Exemple : $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$
  - La limite de Tc_n quand $T \to +\infty$ ne converge pas vers une valeur finie
  - La transformée de Fourier n'existe donc pas au sens des fonctions...
- Ces problèmes de convergence ont conduit les mathématiciens à introduire un nouveau formalisme : les *distributions*

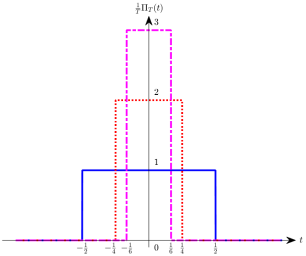
Analyse spectrale

Distribution de Dirac

Définition à base de fonction porte

La distribution (impulsion) de Dirac $\delta(t)$ est une fonction porte centrée en 0, de largeur infiniment étroite et de surface 1 :

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \Pi_T(t)$$



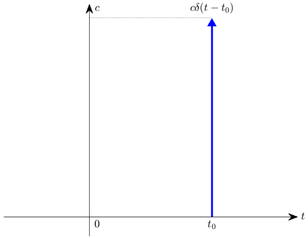
Analyse spectrale

Distribution de Dirac

Définition mathématique

La distribution de Dirac et définie mathématiquement par le produit scalaire avec le signal $x(t)$ tel que :

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt$$



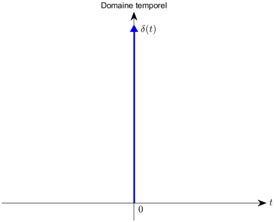
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

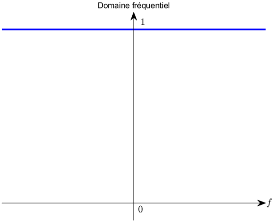
Analyse spectrale

Transformée de Fourier et distribution

$$\delta(t - t_0) \overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons} e^{-j2\pi f t_0}$$



$$\overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons}$$



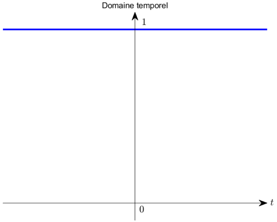
#cestimportant

"Ce qui est petit dans un monde est grand dans l'autre..."

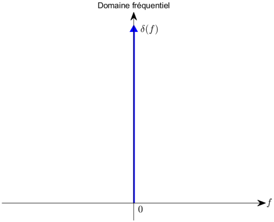
Analyse spectrale

Transformée de Fourier et distribution

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons} \delta(f - f_0)$$



$$\overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons}$$



#cestimportant

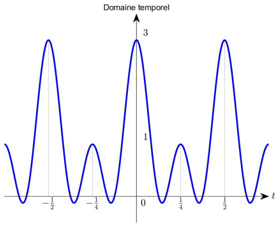
"Ce qui est petit dans un monde est grand dans l'autre..."

Analyse spectrale

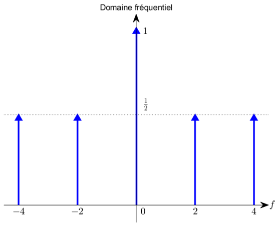
Transformée de Fourier et distribution

Exemple :

$$1+\cos(4\pi t)+\cos(8\pi t) \overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons} \delta(f)+\frac{\delta(f-2)+\delta(f+2)}{2}+\frac{\delta(f-4)+\delta(f+4)}{2}$$



$\overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons}$



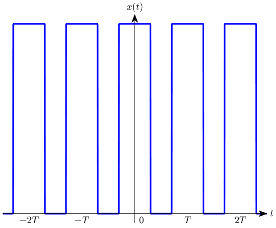
Analyse spectrale

TF d'un signal periodique

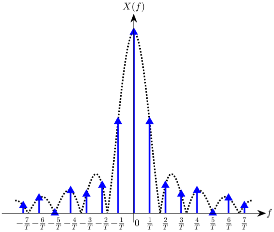
Spectre d'un signal périodique

Un signal de période T a pour spectre une série de raies fréquentielles séparées de $1/T$.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t) * \delta(t-kT) \overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons} X_T(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



$\overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons}$



Analyse spectrale

Densité spectrale d'énergie

Théorème de Wiener-Khintchine

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie et $\Gamma_{xx}(t)$ sa fonction d'autocorrélation. On définit la densité spectrale d'énergie comme la transformée de Fourier de $\Gamma_{xx}(t)$:

$$\Psi_{xx}(f) = \mathrm{TF}\left(\Gamma_{xx}(t)\right) = |X(f)|^2 \quad \text{[Joules/Hz]}$$

- $\rightarrow$ en Signal, un théorème qui est devenu une définition
- $\rightarrow$ l'énergie du signal est obtenue en intégrant $\Psi_{xx}(f)$ sur toutes les fréquences :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{xx}(f) df$$

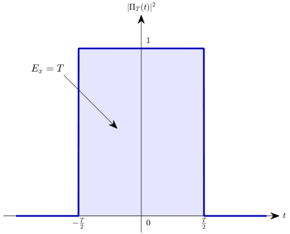
Analyse spectrale

Conservation de l'énergie

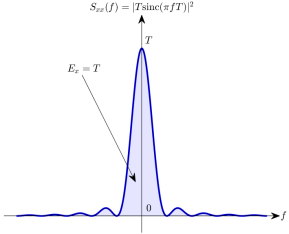
Théorème de Plancherel-Parseval

Soit x sommable et carré-sommable sur $\mathbb{R}$. Alors l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie (fréquentielle ou temporelle).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$



=



Analyse spectrale

Densité spectrale de puissance

Définition

Soit $x(t)$ un signal à puissance moyenne finie et $\Gamma_{xx}(t)$ sa fonction d'autocorrélation. On définit la densité spectrale de puissance comme la transformée de Fourier de $\Gamma_{xx}(t)$:

$$S_{xx}(f) = \mathrm{TF}\left(\Gamma_{xx}(t)\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{TF}\left(\Pi_T(t) x(t)\right) \quad \text{[Watt/Hz]}$$

→ La puissance du signal est obtenue en intégrant $S_{xx}(f)$ sur toutes les fréquences :

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$$

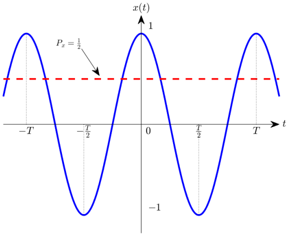
→ rigoureusement, $S_{xx}(f) \neq |X(f)|^2$ car non défini.

Analyse spectrale

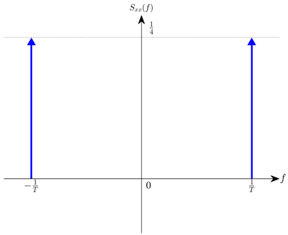
Densité spectrale de puissance

Exemple avec $x(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \frac{\cos\left(2\pi \frac{\tau}{T}\right)}{2} \overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons} S_{xx}(f) = \frac{\delta(f - \frac{1}{T}) + \delta(f + \frac{1}{T})}{4}$$



$\overset{d.s.p.}{\Longrightarrow}$



Sommaire

En résumé

Signal à temps continu

Un signal est :

- une *fonction* dépendant de plusieurs paramètres (dont le temps) et portant *une information*

Dans ce cours, 2 outils d'analyse fondamentaux en traitement du signal : l'intercorrélation et la transformée de Fourier.

En résumé

Signal à temps continu

Un signal est :

- une *fonction* dépendant de plusieurs paramètres (dont le temps) et portant *une information*
- caractérisé par son *énergie* et/ou sa *puissance moyenne*

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

Dans ce cours, 2 outils d'analyse fondamentaux en traitement du signal : l'intercorrélation et la transformée de Fourier.

En résumé

Signal à temps continu

Un signal est :

- une *fonction* dépendant de plusieurs paramètres (dont le temps) et portant *une information*
- caractérisé par son *énergie* et/ou sa *puissance moyenne*

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

- *déterministe* si son comportement peut être prévu à chaque instant ; sinon il est *aléatoire*

Dans ce cours, 2 outils d'analyse fondamentaux en traitement du signal : l'intercorrélation et la transformée de Fourier.

En résumé

Signal à temps continu

Un signal est :

- une *fonction* dépendant de plusieurs paramètres (dont le temps) et portant *une information*
- caractérisé par son *énergie* et/ou sa *puissance moyenne*

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

- *déterministe* si son comportement peut être prévu à chaque instant ; sinon il est *aléatoire*
- *causal*, d'*énergie finie*, de *durée finie*, et d'*amplitude bornée* $\forall$ signal physique

Dans ce cours, 2 outils d'analyse fondamentaux en traitement du signal : l'intercorrélation et la transformée de Fourier.

En résumé

Opération de base

Opération	Formule
Avance de t_0	$y(t) = x(t + t_0)$ avec $t_0 \geq 0$
Retard de t_0	$y(y) = x(t - t_0)$ avec $t_0 \geq 0$
Compression de a	$y(t) = x(at)$ avec $a \geq 1$
Dilatation de a	$y(t) = x(t/a)$ avec $a \geq 1$
Retournement temporel	$y(t) = x(-t)$
Convolution	$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$
Intercorrélation ($E_s < \infty$)	$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt$
Intercorrélation ($0 < P_s < \infty$)	$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y^*(t)dt$

En résumé

Analyse spectrale

- Tout signal $x(t)$ se représente de façon équivalente dans le *domaine spectral* $X(f)$

En résumé

Analyse spectrale

- Tout signal $x(t)$ se représente de façon équivalente dans le *domaine spectral* $X(f)$
- $X(f)$ décrit quelle proportion du signal appartient à telle ou telle (bande de) fréquence f.

En résumé

Analyse spectrale

- Tout signal $x(t)$ se représente de façon équivalente dans le *domaine spectral* $X(f)$
- $X(f)$ décrit quelle proportion du signal appartient à telle ou telle (bande de) fréquence f.
- L'outil de base de l'analyse spectrale est la *transformée de Fourier* :

$$X(f) = \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x(t) = \mathrm{TF}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

En résumé

Analyse spectrale

- Tout signal $x(t)$ se représente de façon équivalente dans le *domaine spectral* $X(f)$
- $X(f)$ décrit quelle proportion du signal appartient à telle ou telle (bande de) fréquence f.
- L'outil de base de l'analyse spectrale est la *transformée de Fourier* :

$$X(f) = \mathrm{TF}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \mathrm{TF}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

- La *densité spectrale* d'énergie (ou de puissance) représente la répartition de l'énergie (ou de la puissance) en fonction des fréquences :

$S_{xx}(f) = \mathrm{TF}[\Gamma_{xx}(\tau)]$ avec $S_{xx}(f) = |X(f)|^2$ si $x(t)$ est a énergie finie

En résumé

TF usuelles

$x(t)$	$X(f)$
1	$\delta(f)$
$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\left(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$
$\Pi_T(t)$	$T\,\mathrm{sinc}(\pi f T)$
$\mathrm{sinc}(\pi t/T)$	$T\Pi_{1/T}(f)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{k}{T})$