Cours traitement du signal
Chapitre 1: Signaux analogiques - Résumé pratique
Houssem Gazzah, ISEN Nantes, 2023-20234˜

Un **signal** est une gradeur physique observée au cours du temps, assimilable à une fonction continue, **éventuellement complexe**

Un signal transitoire a une duree limitée dans le temps. Integrable, on lui associe une **énergie** calculée comme $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$, et le signal est dit à énergie finie

Les signaux à durée infinie dans le temps sont dits de puissance finie. Ils incluent les signaux périodiques. On leur associe une **puissance moyenne**:

Signal T-périodique $P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt$
Signal non-périodique $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

Signaux usuels:

Porte de largeur T:	$\Pi_T(t) = 1$ si $t \in [-T/2, T/2]$, $\Pi_T(t) = 0$ si non	, à énergie finie
Signal unité:	$u(t) = 1$ si $t \geq 0$, $u(t) = 0$ si non	, à puissance finie
Signaux sinusoidaux:	$\cos(2\pi f_0 t), \sin(2\pi f_0 t), \exp(2j\pi f_0 t)$, de période $T = 1/f_0$,	à puissance finie
Sinus cardinal:	$sinc(t) = \frac{\sin(t)}{t}$. En particulier $sinc(0) = 1$, $sinc(\infty) = 0$,	à énergie finie

Impulsion de Dirac: $\delta(t) = 0$ pour $t \neq 0$. En particulier $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$
$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

Opérations de base:

$$\begin{aligned}
\text{Convolution : } \quad x(t) * y(t) = z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = y(t) * x(t) \\
\text{Inter} - \text{Correlation : } \quad \Gamma_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt, \text{ signaux à énergie finie} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt, \text{ signaux à puissance finie} \\
\text{auto} - \text{Correlation : } \quad \Gamma_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt, \text{ signal à énergie finie} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt, \text{ signal à puissance finie} \\
\Gamma_{xx}(0) &= E, \text{ signal à énergie finie} \\
&= P, \text{ signal à puissance finie}
\end{aligned}$$

Tout signal possède une représentation unique dans le domaine fréquentiel:

Signal à énergie finie possède une **transformée** de Fourier $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2j\pi ft}dt$

Signal de période T possède une **série** de Fourier $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-2j\pi\frac{n}{T}t}dt$

Inversement,

tout signal peut être retrouvé à partir de sa représentation dans le domaine fréquentiel

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2j\pi ft}df, \text{signal à énergie finie} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2j\pi\frac{n}{T}t}, \text{signal de période } T \end{aligned}$$

Propriétés de la transformée de Fourier: Si $x(t) \to X(f)$ et $y(t) \to Y(f)$, alors

$$\begin{aligned} X(t) &\to x(f) \\ x(at) &\to \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right) \\ x(t-t_0) &\to \exp(-2j\pi ft_0)X(f) \\ \exp(2j\pi f_0 t)x(t) &\to X(f-f_0) \\ x(t)y(t) &\to X(f)*Y(f) \\ x(t)*y(t) &\to X(f)Y(f) \\ \cdots + x(t+T) + x(t) + x(t-T) + x(t-2T) + \cdots = \sum_k x(t-kT) &\to \frac{1}{T}X(f)\sum_k \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df, \quad \text{Parseval} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(t) &\to \psi_{xx}(f) = |X(f)|^2, \text{ densité spectrale d'énergie si } x(t) \text{ à énergie finie} \\ \Gamma_{xx}(t) &\to S_{xx}(f), \text{ densité spectrale de puissance si } x(t) \text{ à puissance finie} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{xx}(f)df &= E \\ \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)df &= P \end{aligned}$$

Transformée de Fourier des signaux usuels:

$$\begin{aligned} 1 &\to \delta(f) \\ \delta(t) &\to 1 \\ \delta(t-t_0) &\to \exp(-2j\pi ft_0) \\ \exp(2j\pi f_0 t) &\to \delta(f-f_0) \\ \exp(-2j\pi f_0 t) &\to \delta(f+f_0) \\ \cos(2\pi f_0 t) &\to \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2} \\ \sin(2\pi f_0 t) &\to \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j} \\ \Pi_T(t) &\to T sinc(\pi fT) \\ sinc(\pi t/T) &\to T\Pi_{1/T}(f) \\ \sum_k \delta(t-kT) &\to \frac{1}{T}\sum_k \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$