ISEN école d'ingénieurs
ALL IS DIGITAL!

Traitement analogique et numérique du signal
Chapitre 5 : *Signaux aléatoires*

Antony Pottier / Pierre-Jean Bouvet / Charles Vanwynsberghe
ISEN Ouest - Yncréa Ouest
M1 2021-2022

Sommaire

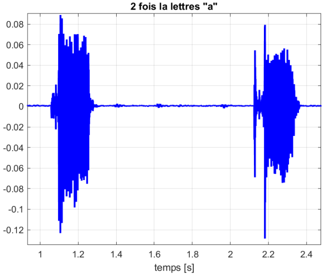
Sommaire

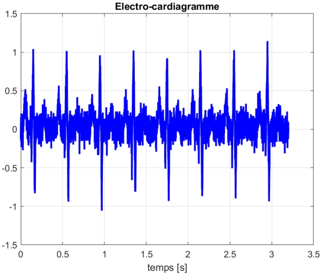
Introduction

Notion d'aléatoire

De nombreux phénomènes physiques, bien que résultant d'expériences identiques, donnent à chaque fois des résultats différents :

- Signal vocal différents pour un même mot prononcé
- Battements d'électrocardiogramme différents mais provenant d'un même cœur
- ...





Introduction

Signal aléatoire

- L'observation d'un phénomène physique comporte généralement un caractère *aléatoire*
  - Impossibilité de déterminer à un instant donné la valeur précise de la mesure
  - Mais on peut associer une distribution de probabilité permettant de décrire la *vraisemblance* de chaque observation

Introduction

Signal aléatoire

- L'observation d'un phénomène physique comporte généralement un caractère *aléatoire*
  - Impossibilité de déterminer à un instant donné la valeur précise de la mesure
  - Mais on peut associer une distribution de probabilité permettant de décrire la *vraisemblance* de chaque observation
- L'observation $X[n]$ d'un capteur à chaque instant n est donc une *variable aléatoire* et son évolution au cours du temps est un *processus aléatoire*

Introduction

Signal aléatoire

- L'observation d'un phénomène physique comporte généralement un caractère *aléatoire*
  - Impossibilité de déterminer à un instant donné la valeur précise de la mesure
  - Mais on peut associer une distribution de probabilité permettant de décrire la *vraisemblance* de chaque observation
- L'observation $X[n]$ d'un capteur à chaque instant n est donc une *variable aléatoire* et son évolution au cours du temps est un *processus aléatoire*
- Un signal physique peut être modélisé comme une signal déterministe auquel on superpose une composante aléatoire

Introduction

Signal aléatoire

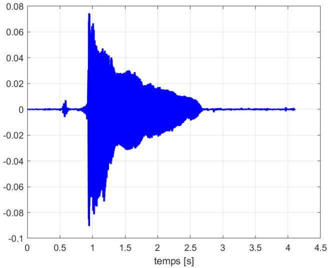


FIGURE 1 – Prononciation du mot "hello"

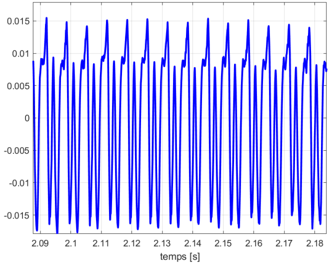


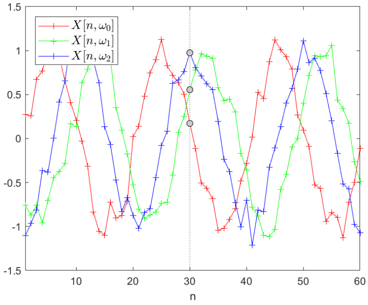
FIGURE 2 – Zoom

Introduction

Processus aléatoire

Définition

Un processus aléatoire $\{X[n,\omega]\}$ est une famille de variables aléatoires indexées par n. Chaque réalisation (associée à une épreuve $\omega \in \Omega$) est appelée trajectoire.



- A chaque instant n correspond une variable aléatoire
- A chaque épreuve ω correspond une trajectoire

Sommaire

Généralités

Rappels de probabilité

- Fonction de répartition $F_X(t)$ d'une variable aléatoire X

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X < t)$$

Généralités

Rappels de probabilité

- Fonction de répartition $F_X(t)$ d'une variable aléatoire X

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X < t)$$

- Densité de probabilité $p_X(t)$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} p_X(x)dx$$

Généralités

Rappels de probabilité

- Fonction de répartition $F_X(t)$ d'une variable aléatoire X

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X < t)$$

- Densité de probabilité $p_X(t)$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} p_X(x)dx$$

- Moyenne ou moment d'ordre 1

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot p_X(u)du \quad \text{[cas continu]}$$

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum_{n \in I} x_n \mathbb{P}(x = x_n) \quad \text{[cas discret]}$$

Généralités

Rappels de probabilité

- Moment centré d'ordre k

$$\mathbb{E}\left\{\left(X - \mathbb{E}\{X\}\right)^k\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathbb{E}\{X\}\right)^k \cdot p_X(x)dx \quad \text{[cas continu]}$$

$$\mathbb{E}\left\{\left(X - \mathbb{E}\{X\}\right)^k\right\} = \sum_{n \in I} \left(x_n - \mathbb{E}\{X\}\right)^k \mathbb{P}(x = x_n) \quad \text{[cas discret]}$$

Généralités

Rappels de probabilité

- Moment centré d'ordre k

$$\mathbb{E}\left\{\left(X-\mathbb{E}\{X\}\right)^k\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mathbb{E}\{X\}\right)^k\cdot p_X(x)dx \quad \text{[cas continu]}$$

$$\mathbb{E}\left\{\left(X-\mathbb{E}\{X\}\right)^k\right\}=\sum_{n\in I}\left(x_n-\mathbb{E}\{X\}\right)^k\mathbb{P}(x=x_n) \quad \text{[cas discret]}$$

- Variance ou moment centrée d'ordre 2

$$\sigma_X^2=\mathbb{E}\left\{\left(X-\mathbb{E}\{X\}\right)^2\right\}$$

Généralités

Rappels de probabilité

- Moment centré d'ordre k

$$\mathbb{E}\left\{\left(X-\mathbb{E}\{X\}\right)^k\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mathbb{E}\{X\}\right)^k\cdot p_X(x)dx \quad \text{[cas continu]}$$

$$\mathbb{E}\left\{\left(X-\mathbb{E}\{X\}\right)^k\right\}=\sum_{n\in I}\left(x_n-\mathbb{E}\{X\}\right)^k\mathbb{P}(x=x_n) \quad \text{[cas discret]}$$

- Variance ou moment centrée d'ordre 2

$$\sigma_X^2=\mathbb{E}\left\{\left(X-\mathbb{E}\{X\}\right)^2\right\}$$

- L'écart type est la racine carrée de la variance

Généralités

Caractéristiques statistiques

Moyenne

On appelle moyenne statistique du processus aléatoire $\{X[n]\}$ la quantité définie à l'instant n comme :

$$m_X[n] = \mathbb{E}\{X[n]\}$$

Généralités

Caractéristiques statistiques

Moyenne

On appelle moyenne statistique du processus aléatoire $\{X[n]\}$ la quantité définie à l'instant n comme :

$$m_X[n] = \mathbb{E}\{X[n]\}$$

Autocorrélation et autocovariance

On appelle autocorrélation et autocovariance statistique du processus aléatoire $\{X[n]\}$ les quantités définies respectivement comme :

$$R_{XX}[n_1, n_2] = \mathbb{E}\{X[n_1]X^*[n_2]\}$$

$$C_{XX}[n_1, n_2] = \mathbb{E}\{(X[n_1] - m_X[n_1])(X^*[n_2] - m_X^*[n_2])\}$$

Généralités

Caractéristiques temporelles

- On ne connait généralement pas la loi de probabilité du processus aléatoire à chaque instant n
- On ne dispose pas non plus d'une infinité de trajectoires permettant d'estimer les différents moments
- En pratique on ne dispose que d'une trajectoire $X[n, \omega]$ et on estime la moyenne et l'autocorrélation temporelles

$$\hat{m}_X[\omega] = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} X[n, \omega]$$

$$\hat{R}_{XX}[m, \omega] = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} X[n+m, \omega] X^*[n, \omega]$$

Généralités

Ergodisme

Définition

Le processus $\{X[n]\}$ est dit ergodique si ses moments temporels ne dépendent pas de la trajectoire. Les moments statistiques peuvent alors être obtenus en calculant une moyenne temporelle sur une seule trajectoire de durée infinie et non plus à un instant donné sur un nombre de trajectoires infinies.

Si le processus $\{X[n]\}$ est ergodique alors :

$$m_X[n] = \hat{m}_x[\omega]$$

$$R_{XX}[n, n+m] = \hat{R}_{XX}[n, m, \omega]$$

Généralités

Loi fini-dimensionnelle

- Processus = collection de variables aléatoires $(X[n_1], \ldots, X[n_k])$ à des instants d'observations distincts $(n_1, \ldots, n_k)$

  $\Rightarrow$ nécessité de connaitre les lois jointes de ces variables aléatoires
- On appelle loi fini-dimensionnelle du processus $\{X[n]\}$ d'ordre k l'ensemble des lois de probabilité des vecteurs aléatoires $(X[n_1], \ldots, X[n_k])$ où $(n_1, \ldots, n_k)$ est un k-uplet arbitraire d'instants distincts
- Une loi k-dimensionnelle est définie par sa fonction de répartition :

$$F(x_1, \ldots, x_k; n_1, \ldots, n_k) = \mathbb{P}\{X[n_1] < x_1, \ldots, X[n_k] < x_k\}$$

Sommaire

Stationnarité

Stationnarité stricte

Stationnarité stricte

Un processus aléatoire est stationnaire au sens strict si sa fonction de répartition est invariante par changement de l'origine du temps :

$$F(x_1, \ldots, x_k; n_1, \ldots, n_k) = F(x_1, \ldots, x_k; n_1 + m, \ldots, n_k + m) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

- Les variables aléatoires $X[n]$ ont toutes la même distribution de probabilité quel que soit l'instant d'observation n
- Un phénomène aléatoire est stationnaire dans la mesure où il présente une certaine permanence dans son évolution

Stationnarité

Stationnarité stricte

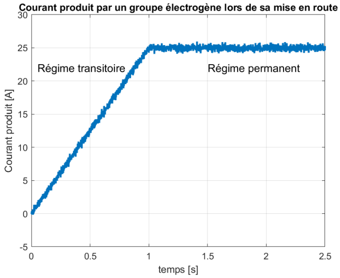


FIGURE 3 – Exemple

- En régime transitoire, le courant produit est un processus aléatoire non stationnaire
- En régime permanent, le courant produit est un processus aléatoire strictement stationnaire

Stationnarité

Stationnarité du second ordre

Stationnarité au sens large

Un processus aléatoire $X[n]$ est stationnaire au sens large (SSL) si :

- $\mathbb{E}\{X[n]\} = m_X$ indépendant de n
- $\mathbb{E}\{|X[n]|^2\} < +\infty$
- $R_{XX}[m] = \mathbb{E}\{X[n+m]X^*[n]\}$ ne dépend que de l'écart temporel m

- La stationnarité stricte est en général difficile à vérifier
- La stationnarité au sens large peut se démontrer simplement à partir des moments d'ordre 1 et ordre 2

Stationnarité

Processus SSL ergodique

Si un procesus aléatoire est à la fois stationnaire au sens large et ergodique alors on a :

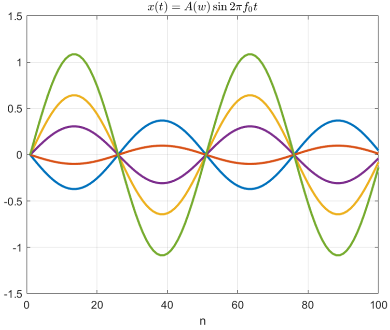
$$R_{XX}[m] = \Gamma_{XX}[m] = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} X[n+m]X^*[n]$$

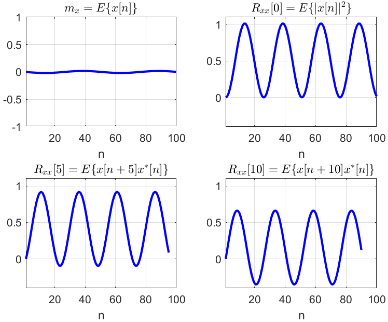
- Si le processus est ergodique, alors toutes les caractéristiques statistiques peuvent se déduire de l'observation d'une seule trajectoire
- Pour la suite, nous ne ferons plus la différence entre un processus aléatoire $X[n]$ et une trajectoire $X[n,w]$ de ce signal $x[n]$. Les signaux aléatoires seront donc représentés par des lettres minuscules...

Stationnarité

Exemple

Signal non stationnaire

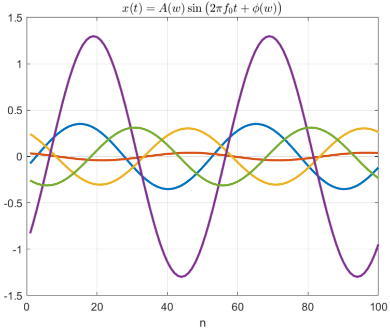


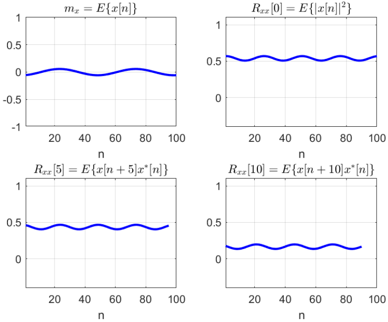


Stationnarité

Exemple

Signal SSL

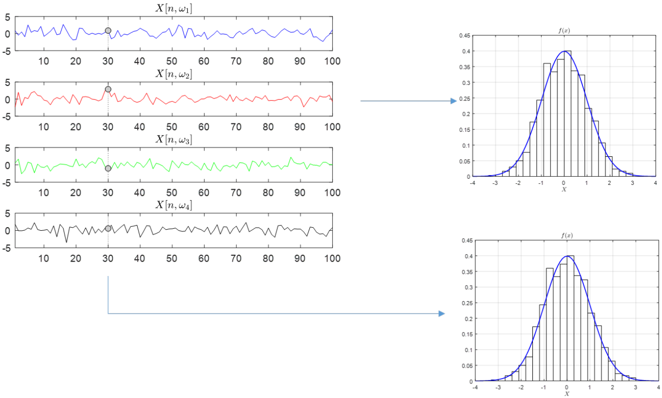




Stationnarité

Exemple

Signal SSL ergodique



Sommaire

Représentation spectrale et filtrage

Densité spectrale

Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance d'un signal stationnaire au sens large est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{xx}[k]e^{-j\omega k} \\ &= \mathrm{TZ}\{R_{xx}[n]\}\big|_{z=e^{j\omega}} \end{aligned}$$

avec :

$$R_{xx}[n] = \mathbb{E}\{x[m+n]x^*[m]\} = \mathbb{E}\{x[m]x^*[m-n]\}$$

où ω est la fréquence angulaire normalisée ($\omega = \pi$ correspond à $f_e/2$ et $\omega = -\pi$ correspond à $-f_e/2$)

Représentation spectrale et filtrage

Densité inter-spectrale

Densité inter-spectrale de puissance

La densité inter-spectrale de puissance de deux signaux aléatoires stationnaires au sens large est définie comme :

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{xy}[n] e^{-j\omega k} \\ &= \mathrm{TZ}\{R_{xy}[n]\}\Big|_{z=e^{j\omega}} \end{aligned}$$

avec :

$$R_{xy}[n] = \mathbb{E}\{x[m+n]y^*[m]\} = \mathbb{E}\{x[m]y^*[m-n]\}$$

Représentation spectrale et filtrage

Puissance moyenne

Puissance d'un signal stationnaire

Pour un signal aléatoire stationnaire au sens large, la puissance moyenne est constante et vaut :

$$P_x = R_{xx}[0] = \mathbb{E}\{|x[n]|^2\}$$

Dans le cas de signaux stationnaires, seule la catégorie des puissances moyennes finies existe : un signal à énergie finie, ne peut pas avoir des propriétés statistiques identiques à chaque instant !

Représentation spectrale et filtrage

Bruit blanc

Bruit blanc discret

Un signal aléatoire $b[n]$ stationnaire au sens large, centré et dont la densité spectrale de puissance est constante sur toutes les fréquences est appelé *bruit blanc* discret :

$$S_{bb}(\omega) = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow R_{bb}[n] = \frac{N_0}{2}\delta[n]$$

- Bonne approximation des phénomènes de bruit observés sous l'effet d'un grand nombre de variables aléatoires centrées indépendantes.
- Analogie avec la lumière blanche qui est un mélange des couleurs fondamentales dont le spectre est large.
- La fonction d'autocorrélation implique que $b[n]$ et $b[n+m]$ ne sont pas corrélés pour $m \neq 0$
- La puissance moyenne vaut $P = N_0/2$

Représentation spectrale et filtrage

Bruit blanc Gaussien

- Si les échantillons d'un bruit blanc discret suivent une distribution Gaussienne, on parle de *bruit blanc Gaussien*.
- La densité de probabilité des échantillons d'un bruit blanc Gaussien de variance σ_b^2 est une loi Normale :

$$p_X(x) = \mathcal{N}(0, \sigma_b^2) = \frac{1}{\sigma_b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_b^2}}$$

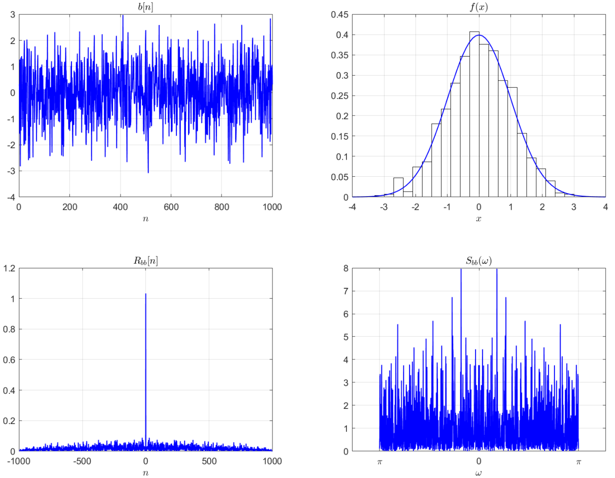
- La puissance d'un bruit blanc Gaussien vaut :

$$P_b = R_{bb}[0] = \sigma_b^2$$

- Attention : un bruit blanc n'est pas forcément Gaussien et réciproquement

Représentation spectrale et filtrage

Bruit blanc Gaussien



Représentation spectrale et filtrage

Filtrage d'un processus SSL

Théorème

Si on filtre un signal SSL $x[n]$ au moyen d'un filtre de réponse impulsionnelle $h[n]$ t.q. $\sum_n |h[n]| < +\infty$ alors le signal de sortie $y[n]$ est également SSL et sa densité spectrale de puissance vaut :

$$S_{yy}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{xx}(\omega)$$

ce qui équivaut dans le domaine temporel à :

$$R_{yy}[n] = \sum_{k=\infty}^{+\infty} R_{hh}[k] R_{xx}[n-k] = R_{hh}[n] * R_{xx}[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n] \overset{\mathrm{TZ}}{\rightleftharpoons} H(z)} \longrightarrow y[n]$$

Représentation spectrale et filtrage

Filtrage d'un processus SSL

- La fonction d'intercorrélation entre $y[n]$ et $x[n]$ vaut :

$$R_{yx}[n] = \sum_{k=\infty}^{+\infty} h[k]R_{xx}[n-k] = h[n] * R_{xx}[n]$$

- La moyenne du signal $y[n]$ vaut :

$$m_y = m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|^2 \quad \text{avec } m_x = \mathbb{E}\{y[n]\}$$

- La puissance moyenne du signal $y[n]$ vaut :

$$P_y = P_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|^2$$

Sommaire

Conclusion

En résumé

- Un processus aléatoire discret est un vecteur de variables aléatoires où chaque réalisation de ce processus est appelée trajectoire.

Conclusion

En résumé

- Un processus aléatoire discret est un vecteur de variables aléatoires où chaque réalisation de ce processus est appelée trajectoire.
- Un processus aléatoire est dit stationnaire si ses statistiques sont constantes dans le temps
  - $\Rightarrow$ Si uniquement les moments d'ordre 1 et 2 sont invariants dans le temps, on parle de stationnarité au sens large (SSL)

Conclusion

En résumé

- Un processus aléatoire discret est un vecteur de variables aléatoires où chaque réalisation de ce processus est appelée trajectoire.
- Un processus aléatoire est dit stationnaire si ses statistiques sont constantes dans le temps
  - $\Rightarrow$ Si uniquement les moments d'ordre 1 et 2 sont invariants dans le temps, on parle de stationnarité au sens large (SSL)
- Un processus aléatoire est dit ergodique si l'estimation de ses caractéristiques statistiques peut se faire sur la suite des échantillons d'une trajectoire.

Conclusion

En résumé

- Un processus aléatoire discret est un vecteur de variables aléatoires où chaque réalisation de ce processus est appelée trajectoire.
- Un processus aléatoire est dit stationnaire si ses statistiques sont constantes dans le temps
  - $\Rightarrow$ Si uniquement les moments d'ordre 1 et 2 sont invariants dans le temps, on parle de stationnarité au sens large (SSL)
- Un processus aléatoire est dit ergodique si l'estimation de ses caractéristiques statistiques peut se faire sur la suite des échantillons d'une trajectoire.
- Si $y[n] = h[n] * x[n]$ avec $x[n]$ de type SSL alors spectralement on a :

$$S_{yy}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{xx}(\omega)$$