



Auteur : Pierre-Jean BOUVET
(site Brest)

Intervenant TD : Charles
VANWYNSBERGHE

Année 2021-2022

Traitement du signal

TD5 - Transformée de Fourier discrète

Exercice 1. Calcul d'une TFD

On suppose le signal numérique contenant N échantillons défini comme suit :

$$x[k] = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \in [0, 1] \\ 0 & \text{pour } k \in [2, N-1] \end{cases}$$

1. Représentez $x[k]$ pour $N = 10$ et $f_e = 1$ kHz
2. Calculez la TFD de $x[k]$ que nous noterons $X[k]$
3. Représentez $|X[k]|$

Exercice 2. Echantillonnage et TFD

Soit une sinusoïdale pure de fréquence $f_0 = 0.3$ Hz observé durant $T = 40$ secondes sur $N = 21$ points. On calcule le module de la TFD au moyen de Matlab et on affiche le résultat montré en figure 1.

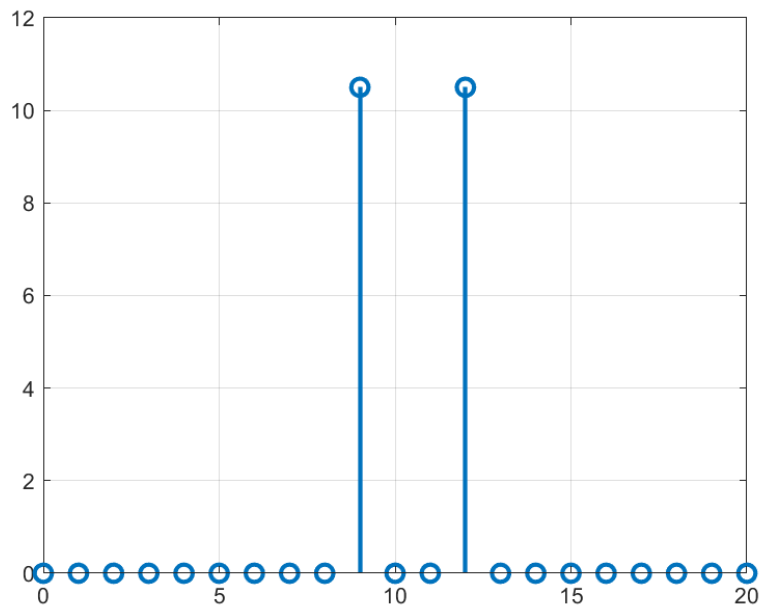


FIGURE 1 – $|X[k]|$

1. Donnez l'expression du signal $x[n]$ en fonction de N , T et f_0
2. Quel est le nombre minimum de points pour ne pas perdre d'information lors de la numérisation ?
3. Quel est la précision fréquentielle obtenue sur le spectre ? Comment peut-on augmenter cette précision ? Pourquoi observe t'on 2 pics ?
4. Représentez le spectre $|X[k]|$ en fonction de la fréquence centrée autour de 0 Hz. A quelles fréquences correspondent les pics visibles ?

Sur la même période d'observation, on échantillonne le même signal sur $N = 60$ points. La TFD obtenue est représentée en figure 2.

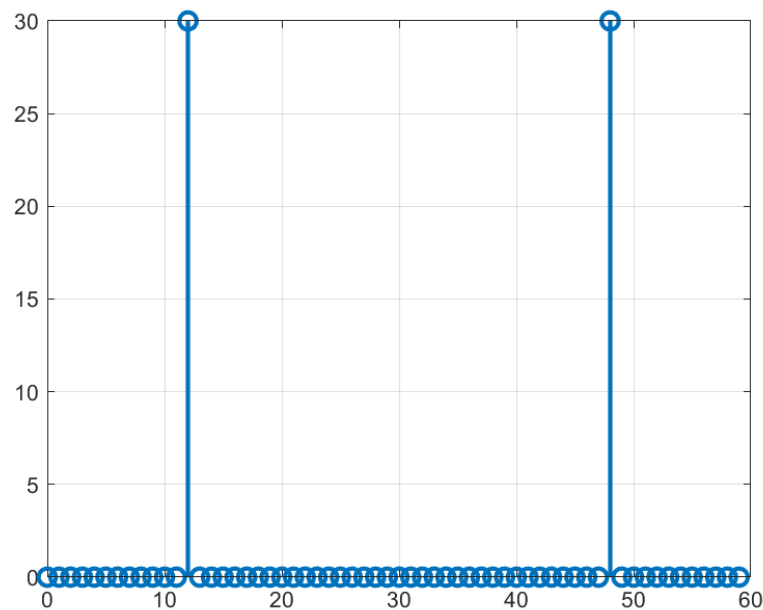


FIGURE 2 – $|X[k]|$

5. Le critère de Shannon est-il à présent vérifié ?
6. Calculez la précision fréquentielle
7. Représentez le spectre $|X[k]|$ en fonction de la fréquence centrée autour de 0 Hz. A quelles fréquences correspondent les pics visibles ?

Exercice 3. TFD d'une porte

On rappelle l'expression d'un signal porte numérique défini pour M pair :

$$\Pi_M[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{M}{2} \leq n < \frac{M}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On considère le signal $x[n]$ défini comme suit :

$$x[n] = \Pi_M \left[n - \frac{M}{2} \right]$$

La fréquence d'échantillonnage est choisie arbitrairement à $f_e = 1$ Hz et on supposera $N > M$ comme un entier pair.

1. On vous demande l'expression et la représentation de $x[n]$.
2. Calculez la TFD de $X[k]$. On pourra utiliser le résultat suivant :

$$1 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

3. En déduire la TFD de $X[k]$ entre $-f_e/2$ et $f_e/2$.
4. On vous demande de représenter les fonctions $\sin(\pi k/N)$ et $\pi k/N$ pour $-N/2 \leq k < N/2$.
5. En déduire une approximation de $X[k]$ à base de la fonction $\text{sinc}(\cdot)$.
6. Représentez le module de $X[k]$. Faire un lien avec la transformée de Fourier de $\Pi_T(t)$.