ISEN | école d'ingénieurs
ALL IS DIGITAL!

Traitement analogique et numérique du signal
Chapitre 3 : *Signaux numériques*

Antony Pottier / Pierre-Jean Bouvet / Charles Vanwynsberghe
ISEN Ouest - Yncréa Ouest
M1 2021-2022

Sommaire

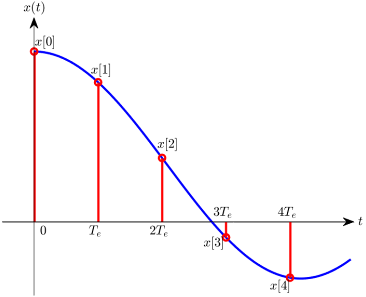
Sommaire

Introduction

Hypothèse et notations

- On note $x[k] = x(t_k)$ l'échantillon d'un signal $x(t)$ pris à l'instant d'échantillonnage t_k
- Hypothèse : l'échantillonnage est uniforme et de fréquence $f_e = 1/T_e$

→ $t_k = kT_e$ et $x[k] = x(kT_e)$

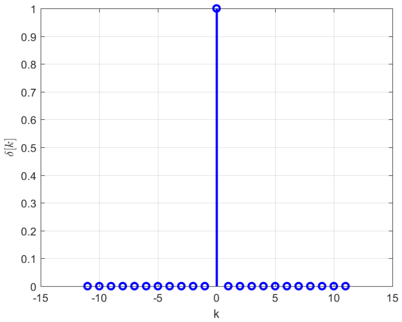


Introduction

Signaux élémentaires

Impulsion de Kronecker

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Remarques :

- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta[k] = 1$
- similarités avec la distribution de Dirac

Introduction

Signaux élémentaires

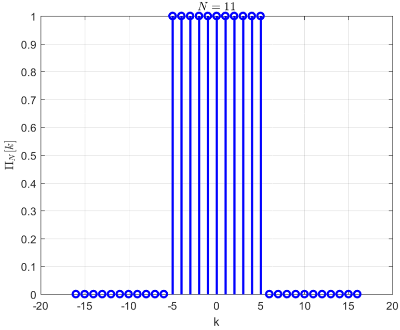
Fonction rectangulaire

- N impair

$$\Pi_N[k] = \begin{cases} 1 & -\frac{N-1}{2} \leq k \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- N pair

$$\Pi_N[k] = \begin{cases} 1 & -\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

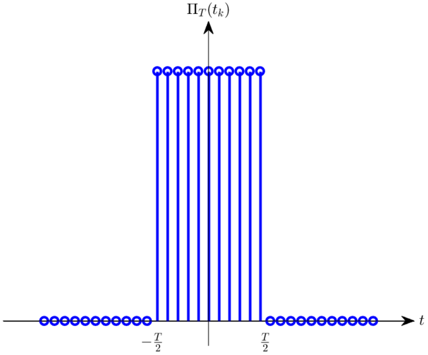


Introduction

Signaux élémentaires

Échantillonnage de $\Pi_T(t)$:

- $T = NT_e$
- $t_k = kT_e$



Sommaire

Opérations de base

Énergie et puissance

Énergie d'un signal numérique

On appelle énergie d'un signal numérique $x[k]$, la quantité E_x définie quand elle existe par :

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|x[k]\right|^2$$

Opérations de base

Énergie et puissance

Énergie d'un signal numérique

On appelle énergie d'un signal numérique $x[k]$, la quantité E_x définie quand elle existe par :

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|x[k]\right|^2$$

Puissance moyenne d'un signal numérique

On appelle puissance moyenne d'un signal numérique $x[k]$, la quantité P_x définie quand elle existe par :

$$P_x = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \left|x[k]\right|^2 \qquad \text{avec } N \text{ pair}$$

Opérations de base

Convolution discrète

Produit de convolution de 2 signaux discrets

Soient $x[k]$ et $y[k]$ deux signaux discrets, le convolution de x par y est noté $(x * y)[n]$ est défini par :

$$z[n] = (x * y)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k]$$

$$\begin{aligned} z[n] = &\ x[1]y[n-1] + x[2]y[n-2] + \dots && \text{(échantillons } y[k] \text{ passés)} \\ &+ x[0]y[n] && \text{(échantillons } y[k] \text{ courants)} \\ &+ x[-1]y[n+1] + x[-2]y[n+2] + \dots && \text{(échantillons } y[k] \text{ futurs)} \end{aligned}$$

Opérations de base

Corrélation

- Signaux discrets à énergie finie

$$\Gamma_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k+n]y^*[k]$$

Opérations de base

Corrélation

- Signaux discrets à énergie finie

$$\Gamma_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k+n]y^*[k]$$

- Signaux discrets à puissance moyenne finie non nulle

$$\Gamma_{xy}[n] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2+1}^{+N/2} x[k+n]y^*[k]$$

Sommaire

Analyse fréquentielle

De la TF à la TFD

- L'analyse fréquentielle fait appel à la transformée de Fourier

→ calcul d'une intégrale à support infini d'un signal à temps continu

- Analyse fréquentielle d'un signal numérique sur machine (ou µP) ?
  - signal est à temps discret (et non continu)
  - nombre d'échantillons disponibles fini
  - puissance et/ou temps de calcul (souvent) limités
- Nécessité d'introduire un nouvel outil d'analyse : la Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Analyse fréquentielle

De la TF à la TFD

- Problème 1 : la TF nécessite en entrée un signal continu
- Solution : on échantillonne le signal

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\Rightarrow X_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)e^{-j2\pi fnT_e}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi fnT_e}$$

On appelle $X_1(f)$ Transformée de Fourier à temps discret.

Analyse fréquentielle

De la TF à la TFD

- Problème 2 : la sommation est infinie
- Solution : on restreint la sommation à N échantillons du signal

$$X_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)e^{-j2\pi f nT_e}$$

$$\Rightarrow X_2(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)e^{-j2\pi f nT_e}$$

Analyse fréquentielle

De la TF à la TFD

- Problème 2 : la TF est une fonction continue de la fréquence
- Solution : on échantillonne $X_2(f)$ avec un pas de $\frac{1}{NT_e} = \frac{f_e}{N}$

$$X_2(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)e^{-j2\pi f nT_e}$$

$$\Rightarrow X_2\left(f_k = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)e^{-j2\pi nk/N}$$

Justification du choix du pas :

- Critère de Shannon-Nyquist : $f_k \in [-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}] \Leftrightarrow f_k \in [0, f_e]$
- Nombre d'échantillons fréquentiels = nombre d'échantillons temporels

Analyse fréquentielle

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Définition de la TFD

Soit $x[k]$ un signal numérique défini pour $n \in [0, \ldots, N-1]$, on appelle transformée de Fourier discrète du signal $x[n]$, le signal numérique $X[k]$ défini comme :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} \quad \text{avec } k \in [0, \ldots, N-1]$$

Analyse fréquentielle

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Définition matricielle

Soit $\mathbf{x}$ un vecteur colonne de taille N représentant un signal numérique, la transformée de Fourier discrète du vecteur $\mathbf{x}$ s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$

où $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ est la matrice de Vandermonde-Fourier définie comme :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi}{N}} & \dots & e^{-\frac{j2\pi(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e^{-\frac{j2\pi(N-1)}{N}} & \dots & e^{-\frac{j2\pi(N-1)(N-1)}{N}} \end{pmatrix}$$

Remarque : les vecteurs de $\mathbf{F}$ constituent une base orthonormale

Analyse fréquentielle

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

TFD inverse

Soit $X[k]$ un spectre numérique défini pour $k \in [0, \ldots, N-1]$, la transformée de Fourier discrète inverse du signal $X[k]$ s'écrit :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi nk/N} \quad \text{avec } n \in [0, \ldots, N-1]$$

Sous forme matricielle, la TFD inverse s'écrit :

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^H \mathbf{y}$$

Analyse fréquentielle

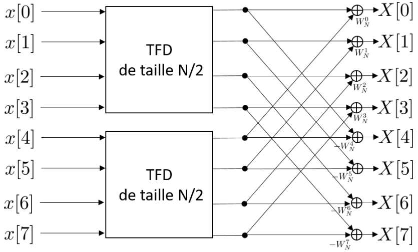
Implémentation Rapide

- La TFD revient à calculer le produit matriciel $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$

$\Rightarrow$ Complexité d'ordre $O(N^2)$

- Algorithme rapide : Fast Fourier Transform (FFT)
  - Introduit par J.W. Cooley et J. Tukey en 1965 sur une invention de C. F. Gauss de 1805
  - Approche *Diviser pour mieux Régner* : une TFD de taille N se déduit de 2 TFDs de taille $N/2$ (radix 2)

$\Rightarrow$ Complexité d'ordre $O(N \log N)$



$$W_N^k = e^{j2\pi\frac{k}{N}}$$

Analyse fréquentielle

Implémentation Rapide

Autres implémentations :

- Algorithme de Good-Thomas (1963) - algorithme des facteurs premiers
- Algorithme de Rader (1968)
- Algorithme de Bluestein (1968)
- Algorithme de Winograd (1978)
- Algorithme de Bruun (1978)
- FFTW de Frigo & Johnson (1997)
- ...

En bref

- une unique définition de la TFD
- de nombreux algorithmes de calcul de la TFD

Analyse fréquentielle

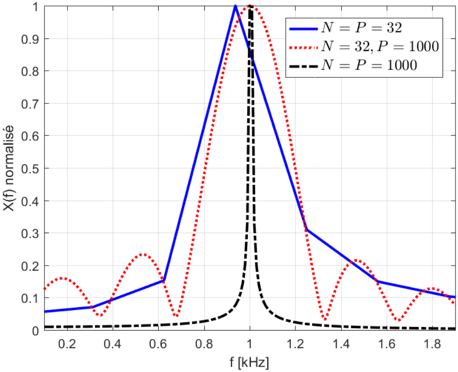
Résolution et précision

- La *résolution* en fréquence δf est l'aptitude à distinguer deux fréquences voisines dans le spectre
  - Dans le cas d'une fenêtre d'apodisation rectangulaire, la résolution fréquentielle est égale à $0.88/NT_e$ où N est le nombre d'échantillons utiles du signal
  - Pour augmenter la résolution, on peut
    - Réduire f_e, mais attention au repliement de spectre
    - Augmenter N, mais alourdissement du calcul de TFD
- La *précision* en fréquence Δf est l'aptitude à mesurer une valeur de fréquence
  - La précision est de f_e/P où P est le nombre de points de la TFD.
  - Pour augmenter la précision, il suffit de rajouter $P - N$ zéros en fin de signal (*zero-padding*)

Analyse fréquentielle

Résolution et précision

Exemple avec $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 1$ kHz et $f_e = 10$ kHz

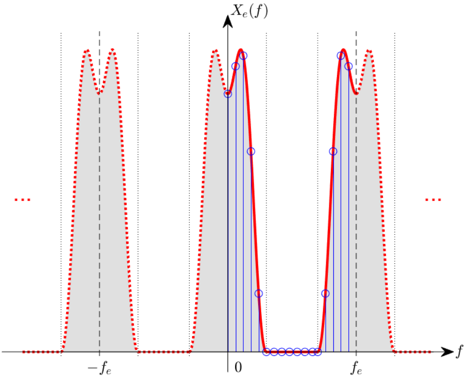


Sommaire

Propriétés de la TFD

Spectre

⇒ La TFD représente les échantillons du spectre allant de 0 à f_e par pas de $\frac{f_e}{N}$



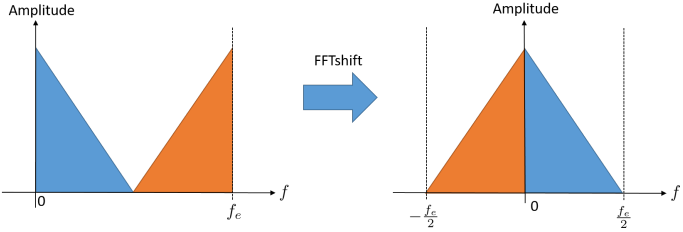
#cestimportant

Propriétés de la TFD

Spectre

- En traitement numérique du signal, on préfère représenter les fréquences entre $-f_e/2$ et $f_e/2$

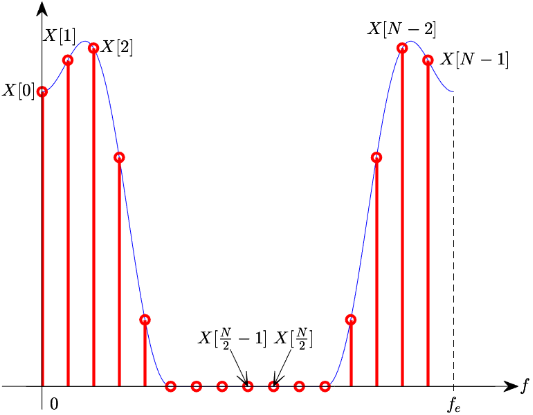
$\Rightarrow$ En sortie de TFD, il est d'usage de faire un centrage à 0 Hz du spectre



Propriétés de la TFD

Spectre

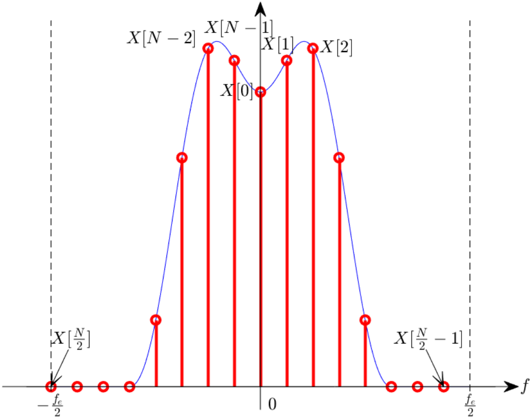
Signal en sortie de TFD



Propriétés de la TFD

Spectre

Après FFTshift :



Propriétés de la TFD

Troncature

- La Transformée de Fourier de $x(t)$ nécessite une infinité d'échantillons en entrée
  - $\Rightarrow$ En prenant seulement N échantillons, la TFD revient à tronquer le signal d'entrée :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n]\Pi_N[n]\right) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}$$

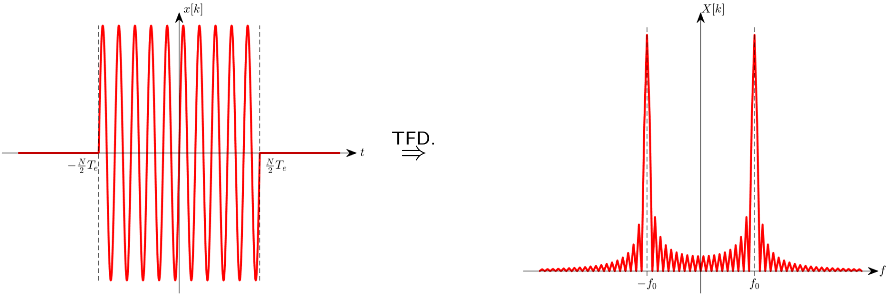
Propriété

La TFD revient à calculer le spectre numérique du signal $x(t)\Pi_{NT_e}(t)$ et non celui de $x(t)$.

Propriétés de la TFD

Troncature

Exemple avec $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, $N = 500$ et $f_e = 50 f_0$.



$\Rightarrow$ Apparition de lobes secondaires dues à la convolution du spectre utile par un sinus cardinal...

Propriétés de la TFD

Techniques d'apodisation

- Pour observer un signal sur une durée finie, on le multiple par une fenêtre d'observation (ou d'apodisation) :

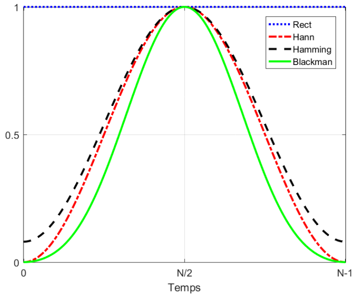
$$z[n] = h[n]x[n] \quad \text{pour } n \in [0, N-1]$$

$\Rightarrow$ La plus simple est la fenêtre rectangulaire : TFD classique

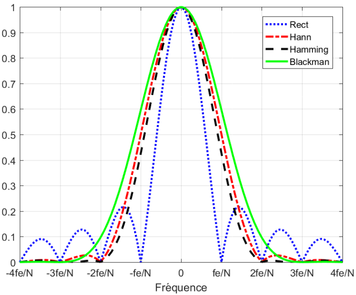
- Afin de changer la TFD du signal (et de compenser les effets de troncature), on peut utiliser des fenêtres d'apodisation dédiées :
  - Fenètre de Hann : $h[n] = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right)$
  - Fenètre de Hamming : $h[n] = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
  - Fenètre de Blackman : $h[n] = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
  - ...

Propriétés de la TFD

Techniques d'apodisation



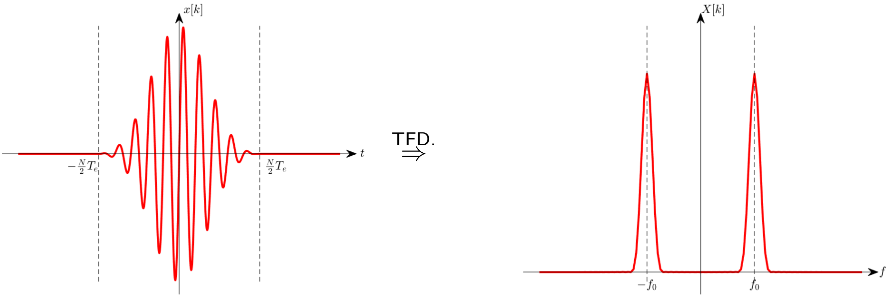
$\overset{\text{TFD.}}{\Longrightarrow}$



Propriétés de la TFD

Techniques d'apodisation

Exemple avec $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ et apodisation avec une fenêtre de Blackman



$\Rightarrow$ Réduction des lobes secondaires mais élargissement du lobe principal...

Propriétés de la TFD

TFD de signaux classiques

Propriétés	Suite numérique	TFD
Linéarités	$ax[n] + bx[n]$	$aX[k] + bY[k]$
Retard	$x\big((n-p) \text{ mod } N\big)$	$e^{-\frac{j2\pi pk}{N}} X[k]$
Déphasage	$e^{\frac{j2\pi pn}{N}} x[n]$	$X[(k-p) \text{ mod } N)]$
Signaux réels	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X[k] = X^*[-k]$
Conjugaison	$x^*[n]$	$X^*[-k]$
Convolution circulaire	$x[n] \otimes y[n]$	$X[k]Y[k]$
Produit	$x[n]y[n]$	$X[k] \otimes Y[k]$

avec

$$x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[(n-k) \mod N]$$

Propriétés de la TFD

Conservation de l'énergie

Théorème de Parseval

Soient $x[n]$ un signal numérique et $X[n]$ son spectre numérique après TFD avec $n \in [0, N-1]$, la relation de Parseval implique :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left|X[k]\right|^2$$

Propriétés de la TFD

Exercice

TFD d'un signal continu

Soit le signal numérique suivant :

$$x[n] = 1 \quad \text{avec } 0 \leq n \leq N-1$$

On supposera $f_e = 1$ kHz et $N = 10$.

1. Calculez l'expression de la transformée de Fourier discrète $X[k]$.
2. Représentez $|X[k]|$
3. On procède à un zero-padding afin d'obtenir une TFD avec $P = 100$. Calculez la nouvelle expression de $X[k]$
4. Représentez le nouveau spectre $|X[k]|$

Sommaire

En résumé

Signaux numériques

- Les opérations de traitement de signal analogique se déclinent en numérique de façon (quasi) identique
- L'outil de base pour l'analyse fréquentielle des signaux numériques est la Transformée de Fourier Discrète (TFD)
- La TFD s'implémente efficacement au moyen d'algorithmes rapides (FFT)
- La TFD calcule le spectre numérique entre 0 et f_e avec une précision de f_e/N
- la TFD implique une troncature du signal temporel qui peut être compensée par une fenêtre d'apodisation

#cestimportant

En résumé

ISEN ALL IS DIGITAL! BREST yncréa

Formules de traitement du signal analogique et numérique

Notation	Formule
Énergie et puissance moyenne (temps continu)	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt \ , \ P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \lvert x(t)\rvert^2 dt$
Énergie et puissance moyenne (temps discret)	$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\lvert x[k]\right\rvert^2 \ , \ P_x = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \left\lvert x[k]\right\rvert^2$
Transformée de Fourier (temps continu)	$X(f) = \mathrm{TF}\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$
Transformée de Fourier (temps discret)	$X[k] = \mathrm{TF}\left[x[n]\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}$
Produit de convolution (temps continu)	$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau = (y*x)(t)$
Produit de convolution (temps discret)	$(x*y)[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m]y[m] = (y*x)[n]$
Corrélation croisée (temps continu)	$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt = \Gamma_{yx}^*(-\tau)$
Corrélation croisée (temps discret)	$\Gamma_{xy}[n] = \sum_{m} x[m+n]y^*[m] = \Gamma_{yx}^*[-n]$
Théorème de Parseval (temps continu)	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$
Théorème de Parseval (temps discret)	$\sum_{n=0}^{N-1} \left\lvert x[n]\right\rvert^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left\lvert X[k]\right\rvert^2$

VC