Traitement analogique et numérique du signal
Chapitre 4 : *Filtrage numérique*

Antony Pottier / Pierre-Jean Bouvet / Charles Vanwynsberghe
ISEN Ouest - Yncréa Ouest
M1 2021-2022

Sommaire

1. Introduction
2. Système numérique
3. Transformée en Z
4. Filtres numériques
5. En résumé

Sommaire

1 Introduction
  - Filtrage numérique
  - Exemple en 1D
  - Exemple en 2D

2 Système numérique

3 Transformée en Z

4 Filtres numériques

5 En résumé

Introduction

Filtrage numérique

- Objectif : modifier la représentation temporelle et fréquentielle d'un signal

Introduction

Filtrage numérique

- Objectif : modifier la représentation temporelle et fréquentielle d'un signal
- Une implémentation simple
  - Succession d'opérations sur un signal discret *produits & sommes*
  - Réalisable via circuits dédiés, processeurs programmables (FPGA, DSP, ...), ou logiciel
  - $\neq$ filtrage analogique – circuit de composants physiques : résistance, condensateur, inductance, transistor, etc.

Introduction

Filtrage numérique

- Objectif : modifier la représentation temporelle et fréquentielle d'un signal
- Une implémentation simple
  - Succession d'opérations sur un signal discret *produits & sommes*
  - Réalisable via circuits dédiés, processeurs programmables (FPGA, DSP, ...), ou logiciel
  - $\neq$ filtrage analogique – circuit de composants physiques : résistance, condensateur, inductance, transistor, etc.
- Exemples d'application :
  - Réduction du bruit d'un signal *image, audio, ...*
  - Modification de certaines zones de fréquence *égalisation*
  - Limitation à une bande fréquentielle pré-définie
  - Fonctions spéciales : dérivation, intégration, etc.

Introduction

Exemple en 1D

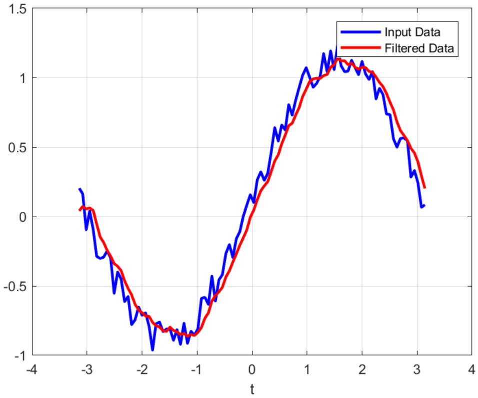


FIGURE 1 – Filtrage passe-bas par moyenne glissante

Introduction

Exemple en 2D

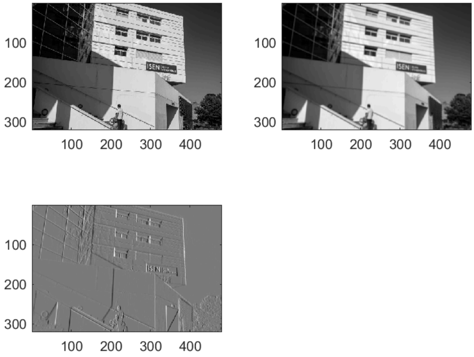


FIGURE 2 – Filtrage passe-bas et dérivation

Sommaire

1 Introduction

2 Système numérique
- Système discret
- Système LIT
- Réponse impulsionnelle
- Causalité
- Stabilité
- Équation aux différences finies

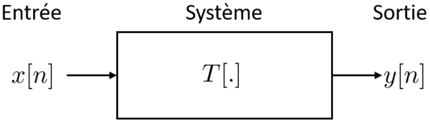
3 Transformée en Z

4 Filtres numériques

5 En résumé

Système numérique

Système discret



$$y[n] = T\left[x[n]\right]$$

Exemples :

- Délai : $y[n] = x[n-1]$
- Accumulateur : $y[n] = x[n] + x[n-1]$

Système numérique

Système LIT

Système linéaire – Définition

Un système discret est linéaire si il respecte les propriétés d'additivité et d'homogénéité :

$$y[n] = T\big[x_1[n] + ax_2[n]\big] = T\big[x_1[n]\big] + aT\big[x_2[n]\big] \quad \forall a \text{ constant}$$

Exemple :

- $y[n] = 4x[n]$
- $y[n] = x[n-1] + 2x[n] + x[n+1]$

Contre-exemple :

- $y[n] = 4x[n] + 1$
- $y[n] = x^2[n]$

Système numérique

Système LIT

Système invariant – Définition

Un système discret est invariant si il est invariant dans le temps :

$$y[\bullet - n_0] = T\big[x[\bullet - n_0]\big] \quad \forall x, \forall n_0 \in \mathbb{Z}$$

Système numérique

Système LIT

Système invariant – Définition

Un système discret est invariant si il est invariant dans le temps :

$$y[\bullet - n_0] = T\big[x[\bullet - n_0]\big] \quad \forall x, \forall n_0 \in \mathbb{Z}$$

Système LIT – Définition

Un système LIT est à la fois linéaire et invariant

Exemple :

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

Contre-exemple :

$$y[n] = \begin{cases} x[n] + x[n-1] & n \geq 0 \\ x[n] - x[n-1] & n < 0 \end{cases}$$

Système numérique

Réponse impulsionnelle

Définition

On appelle réponse impulsionnelle d'un système discret, la sortie du système quand l'entrée est une impulsion de Kronecker :

$$h[n] = T\left[\delta[n]\right]$$

En posant :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Dans le cas d'un système est LIT, il vient :

$$y[n] = T\left[x[n]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\left[\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = h[n]*x[n]$$

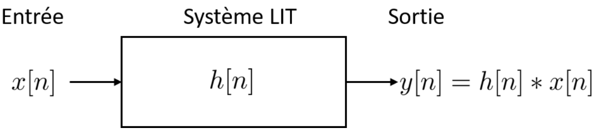
Système numérique

Réponse impulsionnelle

Propriétés

- Un système discret LIT est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h[n]$
- La sortie d'un système LIT $y[n]$ est caractérisée par $h[n]$ et $x[n]$, et

$$y[n] = (h * x)[n]$$



Exemple :

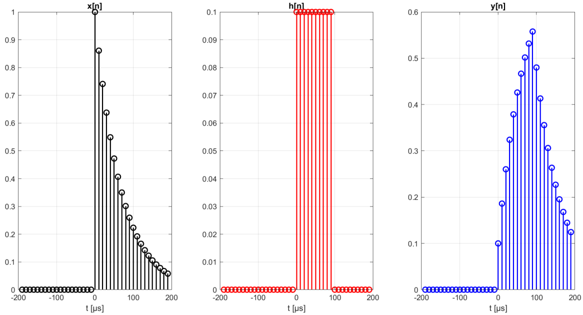
$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \Rightarrow y[n] = x[n] + x[n-1]$$

Système numérique

Réponse impulsionnelle

Exemple : moyenne mobile

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$$



Système numérique

Causalité

Le système peut pas connaître l'état futur du signal d'entrée $x[n]$.

Définition

Un système discret est dit *causal* si l'entrée à l'instant n_0 n'influe pas la sortie aux instants $n < n_0$. La réponse impulsionnelle a alors pour propriété :

$$h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

Exemple :

- $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Contre-exemple :

- $y[n] = x[n+1] + x[n]$

Système numérique

Stabilité

Définition

Un système discret est dit *stable* si n'importe quelle entrée bornée donne une sortie bornée.

$$\left|x[n]\right| < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \left|T\left[x[n]\right]\right| < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ou de façon équivalente :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|h[k]\right| < +\infty$$

Exemple :

- $y[n] = \sum_{k=0}^{K-1} x[n-k]$

Contre-exemple :

- $y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[n-k]$

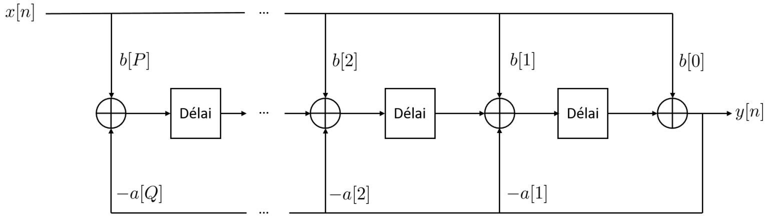
Système numérique

Équation aux différences finies

Propriété

Un système LIT peut s'écrire sous la forme d'une équation aux différences à coefficients constants :

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{P} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k] \quad (1)$$

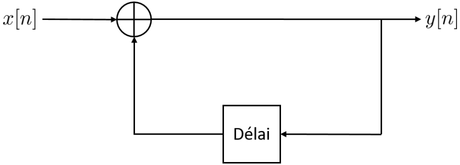


Système numérique

Équation aux différences finies

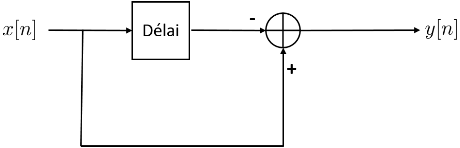
Exemple :

- Accumulateur simple



$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

- Dérivateur causal



$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Sommaire

1 Introduction

2 Système numérique

3 Transformée en Z
- Avant tout, revenons à Laplace...
- Définition
- Domaine de convergence
- Liens avec les autres transformées usuelles
- Propriétés
- TZ de signaux classiques
- Fonction de transfert
- Réponse fréquentielle

4 Filtres numériques

5 En résumé

Transformée en Z

Avant tout, revenons à Laplace...

Transformée de Laplace monolatérale

Pour un signal $x(t)$ continu & causal, la transformée de Laplace bilatérale

$$X(p) = \mathcal{L}(x)(p) = \int_{t=0}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt$$

est définie pour p appartenant au *domaine de convergence*.

Cas général (avec signaux non-causaux) : transformée bilatérale :

$$X(p) = \mathcal{L}(x)(p) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-pt}dt$$

Cas des signaux échantillonnés ?

Transformée en Z

Avant tout, revenons à Laplace...

Pour un signal discret $x_e(t) = \sum_n x[n]\delta(t - nT_e)$, on a :

- $$X(p) = \mathcal{L}(x)(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]e^{-pnT_e}$$

Transformée en Z

Avant tout, revenons à Laplace...

Pour un signal discret $x_e(t) = \sum_n x[n]\delta(t - nT_e)$, on a :

- $X(p) = \mathcal{L}(x)(p) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-pnT_e}$
- en posant $z = e^{pT_e}$, cela s'écrit :

$$X_e(p) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]z^{-n}$$

Transformée en Z

Avant tout, revenons à Laplace...

Pour un signal discret $x_e(t) = \sum_n x[n]\delta(t - nT_e)$, on a :

- $$X(p) = \mathcal{L}(x)(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]e^{-pnT_e}$$
- en posant $z = e^{pT_e}$, cela s'écrit :

$$X_e(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]z^{-n}$$

→ suite : expression simple pour les signaux à temps discret

Transformée en Z

Définition

Transformée en Z

La transformée en Z bilatérale d'un signal à temps discret $x[n]$ est définie pour $z \in \mathbb{C}$ par :

$$X(z) = \mathrm{TZ}\left[x[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

La transformée $X(z)$ est définie & absolument convergente pour $R_1 \leq |z| \leq R_2$.

$R_1 \leq |z| \leq R_2$ s'appelle domaine de convergence, ou rayon de convergence.

Transformée en Z

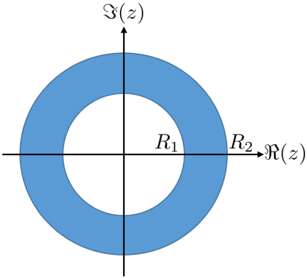
Domaine de convergence

La série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$ converge si le critère de Cauchy est respecté :

$$\lim_{n\to+\infty} |x[n]z^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow |z| > R_1$$

$$\lim_{n\to+\infty} |x[-n]z^{n}|^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow |z| < R_2$$

Si $R_1 < R_2$, la TZ converge dans une couronne du plan $\mathbb{C}$:



$$R_1 \leq |z| \leq R_2$$

Transformée en Z

Liens avec les autres transformées usuelles

- Transformée de Laplace $\mathcal{L}$
  - sur signaux continus uniquement $\Rightarrow X_e(p) = \mathcal{L}\Big(\sum_n x[n]\delta(t - nT_e)\Big)$
  - relation d'équivalence :

$$X_e(p) = X(z)|_{z=e^{pT_e}}$$

Transformée en Z

Liens avec les autres transformées usuelles

- Transformée de Laplace $\mathcal{L}$
  - sur signaux continus uniquement $\Rightarrow X_e(p) = \mathcal{L}\Big(\sum_n x[n]\delta(t-nT_e)\Big)$
  - relation d'équivalence :

$$X_e(p) = X(z)|_{z=e^{pT_e}}$$

- Analyse spectrale continue *cas particulier de la transformée $\mathcal{L}$*

$$X_e(f) = X(z)|_{z=e^{j2\pi fT_e}}$$

Transformée en Z

Liens avec les autres transformées usuelles

- Transformée de Laplace $\mathcal{L}$
  - sur signaux continus uniquement $\Rightarrow X_e(p) = \mathcal{L}\left(\sum_n x[n]\delta(t-nT_e)\right)$
  - relation d'équivalence :

$$X_e(p) = X(z)|_{z=e^{pT_e}}$$

- Analyse spectrale continue *cas particulier de la transformée $\mathcal{L}$*

$$X_e(f) = X(z)|_{z=e^{j2\pi fT_e}}$$

- Analyse spectrale discrète $X[k] = \mathrm{TFD}(x[n])$ *avec* $0 \leq k, n \leq N-1$

$$X[k] = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}}$$

Transformée en Z

Propriétés

- Linéarité

$$ax[n] + by[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} aX(z) + bY(z)$$

Transformée en Z

Propriétés

- Linéarité

$$ax[n] + by[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} aX(z) + bY(z)$$

- Retard

$$x[n - n_0] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} z^{-n_0} X(z) \quad \text{avec } n_0 \in \mathbb{Z}^+$$

Transformée en Z

Propriétés

- Linéarité

$$ax[n] + by[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} aX(z) + bY(z)$$

- Retard

$$x[n - n_0] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} z^{-n_0} X(z) \quad \text{avec } n_0 \in \mathbb{Z}^+$$

- Inversion du temps

$$x[-n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{avec } \frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_1}$$

Transformée en Z

Propriétés

- Linéarité

$$ax[n] + by[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} aX(z) + bY(z)$$

- Retard

$$x[n - n_0] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} z^{-n_0} X(z) \quad \text{avec } n_0 \in \mathbb{Z}^+$$

- Inversion du temps

$$x[-n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{avec } \frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_1}$$

- Convolution *ce qui nous sauve en analyse système !*

$$x[n] * y[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} X(z)Y(z)$$

Transformée en Z

Propriétés

- Linéarité

$$ax[n] + by[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} aX(z) + bY(z)$$

- Retard

$$x[n - n_0] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} z^{-n_0}X(z) \quad \text{avec } n_0 \in \mathbb{Z}^+$$

- Inversion du temps

$$x[-n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{avec } \frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_1}$$

- Convolution *ce qui nous sauve en analyse système !*

$$x[n] * y[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} X(z)Y(z)$$

- Produit

$$x[n]y[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} X(z) * Y(z)$$

Transformée en Z

Propriétés

- Dérivation

$$nx[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Transformée en Z

Propriétés

- Dérivation

$$n x[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

- Changement d'échelle complexe

$$a^n x[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{avec } |a|R_1 < |z| < |a|R_2$$

Transformée en Z

Propriétés

- Dérivation

$$nx[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

- Changement d'échelle complexe

$$a^n x[n] \overset{\text{TZ}}{\rightleftharpoons} X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{avec } |a|R_1 < |z| < |a|R_2$$

- Théorème des valeurs initiales et finales

$$\lim_{n\to 0} x[n] = \lim_{|z|\to +\infty} X(z)$$

$$\lim_{n\to +\infty} x[n] = \lim_{z\to 0} \left(1 - z^{-1}\right) X(z)$$

Transformée en Z

Propriétés

- Dérivation

$$n x[n] \overset{\mathrm{TZ}}{\rightleftharpoons} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

- Changement d'échelle complexe

$$a^n x[n] \overset{\mathrm{TZ}}{\rightleftharpoons} X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{avec } |a|R_1 < |z| < |a|R_2$$

- Théorème des valeurs initiales et finales

$$\lim_{n\to 0} x[n] = \lim_{|z|\to +\infty} X(z)$$

$$\lim_{n\to +\infty} x[n] = \lim_{z\to 0} \left(1 - z^{-1}\right) X(z)$$

- Conjugaison

$$x^*[n] \overset{\mathrm{TZ}}{\rightleftharpoons} X^*(z^*)$$

Transformée en Z

TZ de signaux classiques

$x[n]$	$X(z) = \mathrm{TZ}(x[n])$	Domaine de convergence
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$\delta[n-k]$	z^{-k}	$\mathbb{C}^*$
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$nu[n]$	$\dfrac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > a$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert > a$

avec $u[n]$ la fonction de Heaviside discrète :

$$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Transformée en Z

Fonction de transfert

- La fonction de transfert d'un système s'écrit sous la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Si le système répond à une équation aux différences à coefficients constants (eq. 1), on montre que :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_P z^{-P}}$$

- Les points où $|H(z)| = 0$ et $|H(z)| = +\infty$ s'appellent respectivement les *zéros* et les *pôles* de la fonction de transfert.

#cestimportant

Transformée en Z

Réponse fréquentielle

Définition

$H(e^{j\omega})$ est appelée réponse fréquentielle du système. On étudie son module et sa phase :

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg\left(H(e^{j\omega})\right)}$$

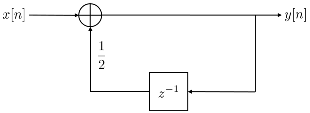
ω est appelée fréquence angulaire normalisée (π radians par échantillon).
$\Rightarrow \omega = \pi$ correspond à la fréquence de Nyquist du système $(f_e/2)$.

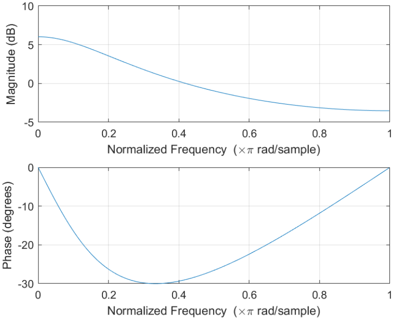
Transformée en Z

Réponse fréquentielle

Exemple :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$





Sommaire

1. Introduction
2. Système numérique
3. Transformée en Z
4. Filtres numériques
   - Représentation
   - Type
   - Gabarit fréquentiel normalisé
   - Propriétés
   - Classification
   - Exemples
5. En résumé

Filtres numériques

Représentation

Un filtre numérique linéaire peut être représenté sous 3 formes :

- Réponse impulsionnelle *nécessite la TZ inverse de $H(z) \rightarrow$ difficile*

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

Filtres numériques

Représentation

Un filtre numérique linéaire peut être représenté sous 3 formes :

- Réponse impulsionnelle *nécessite la TZ inverse de $H(z) \to$ difficile*

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

- Fonction de transfert en z *utile pour étudier stabilité & causalité*

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{Q} b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{P} a_n z^{-n}}, \text{ ou } H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{P} (z - z_k)}{\prod_{k=1}^{Q} (z - p_k)}$$

Filtres numériques

Représentation

ISEN ALL IS DIGITAL! BREST · yncréa

Un filtre numérique linéaire peut être représenté sous 3 formes :

- Réponse impulsionnelle *nécessite la TZ inverse de $H(z) \rightarrow$ difficile*

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

- Fonction de transfert en z *utile pour étudier stabilité & causalité*

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{Q} b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{P} a_n z^{-n}}, \text{ ou } H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{P}(z - z_k)}{\prod_{k=1}^{Q}(z - p_k)}$$

- Équation de récurrence *ce que calcule un programme*

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{P} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k]$$

Filtres numériques

Représentation

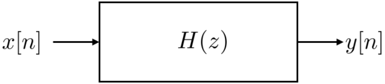


FIGURE 3 – Structure directe

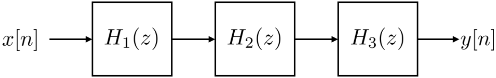


FIGURE 4 – Structure en cascade

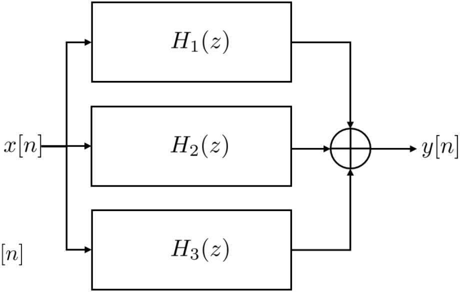


FIGURE 5 – Structure parallèle

Filtres numériques

Type

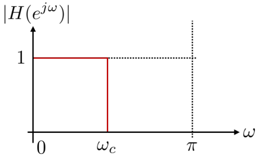


FIGURE 6 – Filtre passe-bas

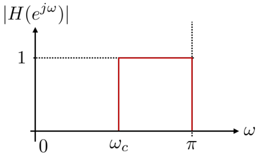


FIGURE 8 – Filtre passe-haut

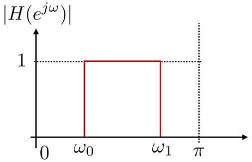


FIGURE 7 – Filtre passe-bande

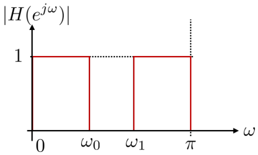


FIGURE 9 – Filtre réjecteur de bande

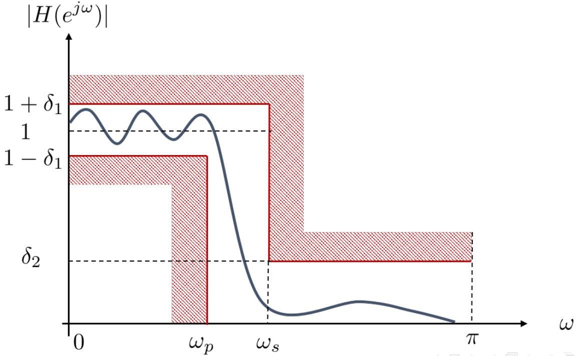
Filtres numériques

Gabarit fréquentiel normalisé

Un filtre passe-bas possède 3 zones :

en fréquence non-normalisée :

- Une bande passante ($\omega \in [0, \omega_p]$) — $f \in [0, f_p]$
- Une bande de transition ($\omega \in [\omega_p, \omega_s]$) — $f \in [f_p, f_s]$
- Une bande atténuée ($\omega \in [\omega_s, \pi]$) — $f \in [f_s, \frac{f_e}{2}]$

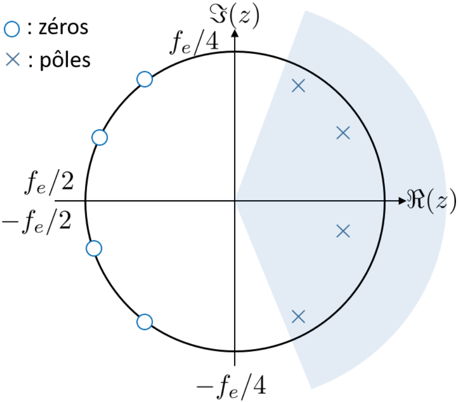


Filtres numériques

Gabarit fréquentiel normalisé

- Si les pôles et les zéros sont conjugués, $H(\omega)$ est paire
- Bande passante : partie du plan complexe où se trouvent les pôles
- Bande affaiblie : partie du plan où se trouvent les zéros

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{P}(z - z_k)}{\prod_{k=1}^{Q}(z - p_k)}$$



Filtres numériques

Propriétés

Causalité

Un filtre linéaire est dit *causal* si sa réponse impulsionnelle $h[n]$ est causale. Une condition suffisante est que le degré du numérateur de $H(z)$ soit inférieur ou égal au degré du dénominateur : $P \leq Q$.

Stabilité

Un filtre linéaire et causal est dit *stable* si $H(z)$ a ses pôles strictement à l'intérieur du cercle unité :

$$|z_{p,i}| < 1$$

Equivalence dans le domaine de Laplace $(z_{p,i} = e^{p_i T_e})$: $\Re(p_i) < 0$

Réalisabilité

Un filtre linéaire est réalisable si il est à la fois causal et stable.

Filtres numériques

Propriétés

Filtre à minimum de phase

Un filtre linéaire est dit à *minimum de phase* si tous les zéros et pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité.
$=$ filtre qui, pour une réponse en gain fixée, minimise le temps de propagation de groupe.

Filtre à phase linéaire

Un filtre linéaire est dit à *phase linéaire* si sa réponse fréquentielle peut s'écrire sous la forme :

$$\arg\left(H(e^{j\omega})\right) = \omega_0 + k\omega \quad \text{avec } k \text{ constante}$$

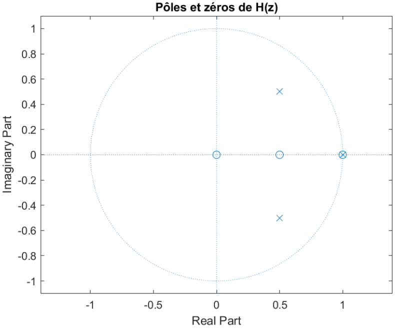
Avec un tel filtre le temps de propagation de groupe est constant et il y a pas de distorsion harmonique dans le signal

Filtres numériques

Propriétés

Exemple : filtre réalisable

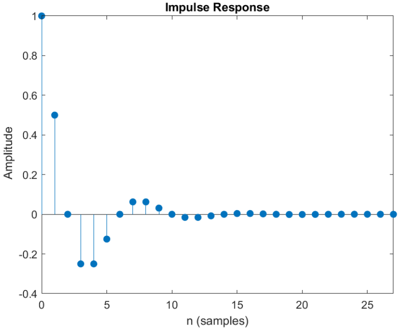
$$H(z) = \frac{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1.5z^{-2} - 0.5z^{-3}}$$

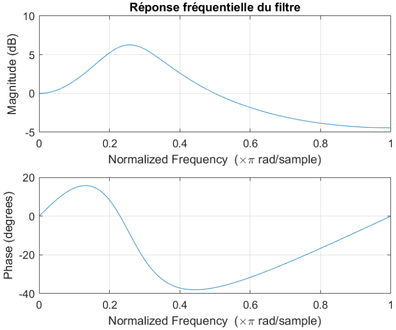


Filtres numériques

Propriétés

Exemple : filtre réalisable



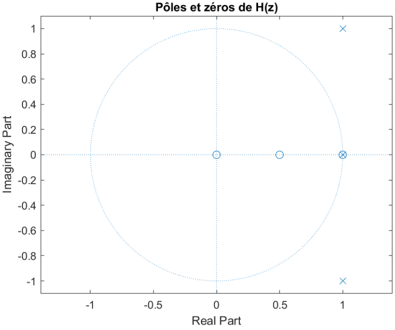


Filtres numériques

Propriétés

Exemple : filtre irréalisable

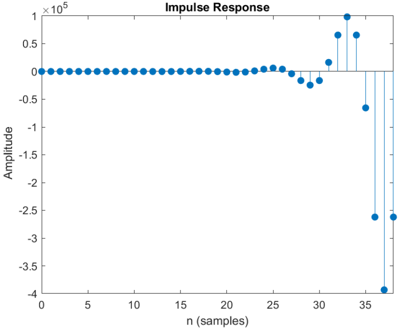
$$H(z) = \frac{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2} - 2z^{-3}}$$

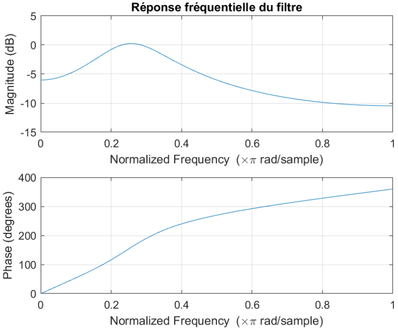


Filtres numériques

Propriétés

Exemple : filtre irréalisable





Filtres numériques

Classification

Les filtres linéaires sont généralement classés en 2 catégories :

- Les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF ou FIR en anglais)

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{Q-1} z^{-(Q-1)}$$

$$\Leftrightarrow h[n] = 0 \quad \text{pour } n < 0 \text{ et } n > N$$

- Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII ou IIR en anglais)

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{Q-1} z^{-(Q-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + b_{P-1} z^{-(P-1)}}$$

$$\Leftrightarrow h[n] \neq 0 \quad \forall n \geq 0$$

Filtres numériques

Classification

Structure FIR : fonction de x

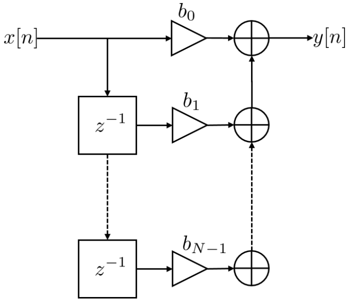


FIGURE 10 – Structure directe FIR

Structure IIR : fonction de x & y

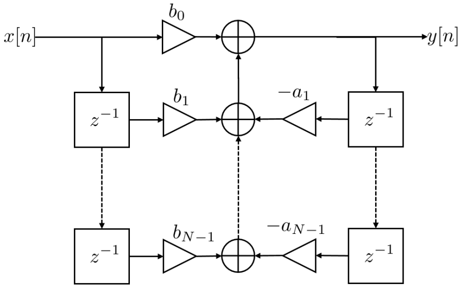


FIGURE 11 – Structure directe IIR

Filtres numériques

Classification

Principales caractéristiques des filtres FIR :

+ Stabilité inhérente

Filtres numériques

Classification

Principales caractéristiques des filtres FIR :

+ Stabilité inhérente
+ Une phase qui peut être linéaire = temps de propagation de groupe constant et absence de distorsion harmonique dans le signal

Filtres numériques

Classification

Principales caractéristiques des filtres FIR :

- Stabilité inhérente
- Une phase qui peut être linéaire = temps de propagation de groupe constant et absence de distorsion harmonique dans le signal
- Plus grande facilité d'implantation dans un système numérique de traitement

Filtres numériques

Classification

Principales caractéristiques des filtres FIR :

- Stabilité inhérente
- Une phase qui peut être linéaire = temps de propagation de groupe constant et absence de distorsion harmonique dans le signal
- Plus grande facilité d'implantation dans un système numérique de traitement
- Méthodes de synthèse permettant de dériver n'importe quelle réponse fréquentielle

Filtres numériques

Classification

Principales caractéristiques des filtres FIR :

+ Stabilité inhérente
+ Une phase qui peut être linéaire = temps de propagation de groupe constant et absence de distorsion harmonique dans le signal
+ Plus grande facilité d'implantation dans un système numérique de traitement
+ Méthodes de synthèse permettant de dériver n'importe quelle réponse fréquentielle
− Bande de transition qui sera toujours plus large qu'un filtre IIR à même nombre de coefficients

Filtres numériques

Classification

Principales caractéristiques des filtres IIR :

+ Une bande de transition qui peut être étroite

Filtres numériques

Classification

Principales caractéristiques des filtres IIR :

+ Une bande de transition qui peut être étroite
+ Une complexité plus faible qu'un FIR à sélectivité équivalente

Filtres numériques

Classification

Principales caractéristiques des filtres IIR :

+ Une bande de transition qui peut être étroite
+ Une complexité plus faible qu'un FIR à sélectivité équivalente
− Une instabilité potentielle due à des pôles de $H(z)$ situés en dehors du cercle unité

Filtres numériques

Classification

Principales caractéristiques des filtres IIR :

+ Une bande de transition qui peut être étroite
+ Une complexité plus faible qu'un FIR à sélectivité équivalente
− Une instabilité potentielle due à des pôles de $H(z)$ situés en dehors du cercle unité
− Une plus grande sensibilité numérique (quantification des coefficients, propagation d'erreur de calcul)

Filtres numériques

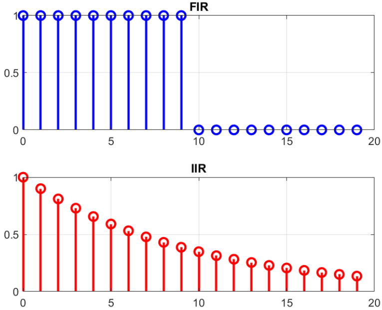
Exemples

- FIR

$$H(z) = 1 + z^{-1} + \dots z^{-9}$$

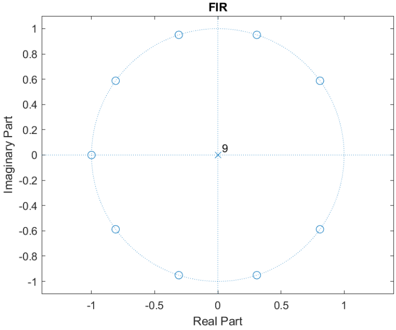
- IIR

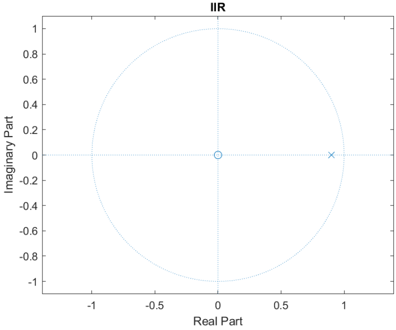
$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$$



Filtres numériques

Exemples





Filtres numériques

Exemples

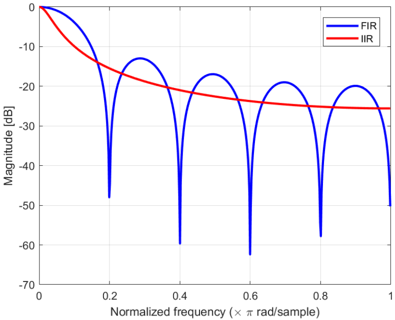


FIGURE 12 – Gain – $20 \log(|H(z)|)$

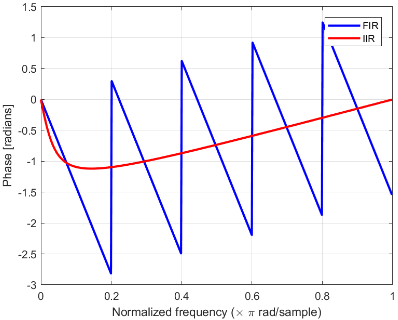


FIGURE 13 – Phase – $20\angle H(z)$

Sommaire

1 Introduction

2 Système numérique

3 Transformée en Z

4 Filtres numériques

5 En résumé

Les filtres numériques ...

En résumé

Les filtres numériques ...

Un système LIT est caractérisé par sa réponse impulsionnelle et l'opération de convolution

Un filtre numérique...

- ... modifie la représentation fréquentielle (ou temporelle)

En résumé

Les filtres numériques ...

Un système LIT est caractérisé par sa réponse impulsionnelle et l'opération de convolution

Un filtre numérique...

- ... modifie la représentation fréquentielle (ou temporelle)
- ... est réalisable simplement par un système LIT

En résumé

Les filtres numériques ...

Un système LIT est caractérisé par sa réponse impulsionnelle et l'opération de convolution

Un filtre numérique...

- ... modifie la représentation fréquentielle (ou temporelle)
- ... est réalisable simplement par un système LIT
- ... est réalisable si sa réponse impulsionnelle est stable et causale

En résumé

Les filtres numériques ...

Un système LIT est caractérisé par sa réponse impulsionnelle et l'opération de convolution

Un filtre numérique...

- ... modifie la représentation fréquentielle (ou temporelle)
- ... est réalisable simplement par un système LIT
- ... est réalisable si sa réponse impulsionnelle est stable et causale
- ... est analysable via par transformée en Z, grâce aux positions des pôles et zéros dans le plan

En résumé

Les filtres numériques ...

Un système LIT est caractérisé par sa réponse impulsionnelle et l'opération de convolution

Un filtre numérique...

- ... modifie la représentation fréquentielle (ou temporelle)
- ... est réalisable simplement par un système LIT
- ... est réalisable si sa réponse impulsionnelle est stable et causale
- ... est analysable via par transformée en Z, grâce aux positions des pôles et zéros dans le plan
- ... FIR est toujours stable, mais demande un grand nombre de coefficients pour atteindre une forte sélectivité fréquentielle

En résumé

Les filtres numériques ...

Un système LIT est caractérisé par sa réponse impulsionnelle et l'opération de convolution

Un filtre numérique...

- ... modifie la représentation fréquentielle (ou temporelle)
- ... est réalisable simplement par un système LIT
- ... est réalisable si sa réponse impulsionnelle est stable et causale
- ... est analysable via par transformée en Z, grâce aux positions des pôles et zéros dans le plan
- ... FIR est toujours stable, mais demande un grand nombre de coefficients pour atteindre une forte sélectivité fréquentielle
- ... IIR permet d'être très sélectif en fréquence, mais est potentiellement instable, déforme la phase, et sensible aux erreurs numériques