Cours traitement du signal
Chapitre 3: Signaux numériques - Résumé pratique
Houssem Gazzah, ISEN Nantes, 2023-2024

A l'origine, il y a le signal analogique $x(t)$, $t = -\infty, \cdots, \infty$,
et sa transformée de Fourier $X(f)$, $f = -f_{\max}, \cdots, f_{\max}$.

Pour des considerations pratiques, i) le signal ne peut etre observé que N fois entre 0 et T, soit les échantillons $x[1], x[2], \cdots$ chaque $T_e = 1/F_e$ secondes
ii) sa représentation dans le domaine fréquentiel ne peut être evaluée qu'en M fréquences.
Par commodite, $M = N$, et les fréquences d'intérêts sont choisies entre 0 et F_e, car le spectre se repète au delà de F_e.

$$
\begin{array}{rcl}
x(t) & \longrightarrow \text{TF} \longrightarrow & X(f) \\
x[0], x[1], \cdots, x[N-1] & \longrightarrow \text{TFD} \longrightarrow & X[0], X[1], \cdots, X[N-1] \\
x[0], x[1], \cdots, x[N-1] & \longrightarrow \text{FFT} \longrightarrow & X[0], X[1], \cdots, X[N-1], N = 2^b \\
x[n] = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{2j\pi kn/N} & & X[k] = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2j\pi kn/N} \\
\text{Temps : } 0, T_e, \cdots, (N-1)T_e & & 0, \Delta f, \cdots, (N-1)\Delta f \text{ :Fréquences} \\
\text{Période d'échantillonnage } T_e & & \Delta f \text{ Précision fréquentielle} \\
\text{Durée d'observation } T = NT_e & & N\Delta f = F_e \text{ fréquence maximale} \\
\text{Énergie } \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 & = & \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2
\end{array}
$$

Cours traitement du signal
Chapitre 5: Signaux aléatoires - Résumé pratique
Houssem Gazzah, ISEN Nantes, 2023-2024

On caractérise un signal déterministe à énergie finie par $x(t) \longrightarrow \text{TF} \longrightarrow X(f)$ spectre.
Dét. à puiss. finie par fonct. d'auto-correl. $\Gamma_{xx}(\tau) \longrightarrow \text{TF} \longrightarrow S_{xx}(f)$ densité spec. puiss.
Num. aléat. (SSL) par moy. m_x et auto-co. $R_{xx}[n] \longrightarrow \text{TZ}(z = e^{j\omega}) \longrightarrow S_{xx}(\omega)$, $P = R_{xx}[0]$
Bruit blanc ($m_x = 0$) par sa puissance P et donc $R_{xx}[n] = P\delta[n] \longrightarrow \text{TZ} \longrightarrow S_{xx}(\omega) = P$

$$
\begin{array}{llll}
\text{Analogique} & x(t) & \longrightarrow [\text{Filtre LIT h(t),H(f)}] \longrightarrow & y(t) = x(t) * h(t) \\
 & X(f) & & Y(f) = X(f)H(f) \\
\text{Numérique} & x[n] & \longrightarrow [\text{Filtre LIT h[n],H(z),H}(\omega)] \longrightarrow & y(t) = x[n] * h[n] \\
 & m_x & & m_y = m_x \sum_n h[n] \\
 & R_{xx}[n] & \text{“}x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]\text{”} & R_{yy}[n] = R_{xx}[n] * h[n] * h[-n] \\
 & S_{xx}(\omega) & & S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega)|H(\omega)|^2
\end{array}
$$

Cours traitement du signal
Chapitre 4: Filtrage numérique - Résumé pratique
Houssem Gazzah, ISEN Nantes, 2022-2023

Transformée en z: $X(z) = \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$ definie pour $R_1 < |z| < R_2$ (en effet, la somme converge si z est petit si z est grand)

Propriétés

$x[n] \rightarrow X(z)$
$x[n-n_0] \rightarrow z^{-n_0}X(z)$
$x[-n] \rightarrow X(1/z)$
$x^*[n] \rightarrow X^*(z^*)$
$a^n x[n] \rightarrow X(\frac{z}{a})$
$nx[n] \rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$
$x[n] * y[n] \rightarrow X(z)Y(z)$

Exemple: $X(z)$
$= z^M + \cdots + z^2 + z + x[0] + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-N}$
$= (\cdots + z + 1)\, z + x[0] + z^{-1}\left(1 + z^{-1} + \cdots\right)$
$= \frac{1-z^M}{1-z} z + x[0] + z^{-1}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

Signaux usuels

$\delta[n] \rightarrow 1$
$\delta[n-n_0] \rightarrow z^{-n_0}$
$a^n u[n] \rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$
$na^n u[n] \rightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $|z| > |a|$
Définition: $u[n] = 1$ si $n \geq 0$, 0 si non

Un **filtre** numérique transforme un signal num. $x[n]$ en un signal num. $y[n]$:
un μP opère add./multip. sur les échantillons successifs $x[n], x[n-1], \cdots$
Dom. temporel: $y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots = h[n] * x[n]$, $h[n]$ rep. impul.
Domaine en z: $Y(z) = H(z)X(z)$, $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\text{poly en } z^{-1}}{\text{poly en } z^{-1}}$ fonction de transfert
Domaine fréq.: $H(e^{jw})$, $z = e^{jw}$ réponse fréquentielle, $w = 2\pi$ équivaut à $f = f_e$

Un filtre est **réalisable** s'il est causal $(0 = \ldots = h[-2] = h[-1])$
et stable $(\ldots + |h[-1]| + |h[0]| + |h[1]| + \ldots$ finie).
On écrit en **fonction de puissances positives** de z: $H(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_P z^P}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_Q z^Q}$
Zéros de $H(z)$ sont les zéros de $a_0 + a_1 z + \cdots + a_P z^P$
Pôles de $H(z)$ sont les zéros de $b_0 + b_1 z + \cdots + b_P z^P$
Un filtre est **causal** si $P \leq Q$, c-à-d numérateur est un polynome de moindre degré
Un filtre est **stable** si ses pôles sont strictement à l'intérieur du cercle unité ($|\text{pôle}| < 1$)
Un filtre est **à minimum de phase** si zéros et pôles sont à l'intérieur du cercle unité