Домашнее задание №2

Задание №17.

Дана выборка.

x_1	4	0	-1	3	4
x_2	2	-3	-2	1	2
x_3	3	2	2	1	-3

Составим матрицу $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ и найдем средние x_i, $i = 1, \dots, 3$

$(4+0-1+3+4)/5 = 2$

$(2-3-2+1+2)/5 = 0$

$(3+2+2+1-3)/5 = 1$

$$\bar{x} = (2, 0, 1)$$

Центрируем данные по формуле

$$\tilde{X}_c = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$C = X_c^T X_c \stackrel{\circledast}{=}$ ... считаем с помощью online calc.

$$\stackrel{\circledast}{=} \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix} = C$$

Теперь найдем с.ч. и с.в. матрицы C также это с помощью online calc.

$\lambda_1 = 1 \qquad v_1 = (-1, 1, 0)^T$

$\lambda_2 = 16 \qquad v_2 = (1/3, 1/3, 1)^T$

$\lambda_3 = 49 \qquad v_3 = (-3/2, -3/2, 1)^T$

Нормируем v_i $(i = 1, 2, 3)$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \sqrt{2}/2\,(-1, 1, 0)^T \\ \tilde{v}_2 &= \sqrt{11}/11\,(1, 1, 3)^T \\ \tilde{v}_3 &= \sqrt{22}/22\,(-3, -3, 2)^T \end{aligned}\right\} \text{главные направления}$$

Теперь найдём дисперсии по гл. компонентам.

$N = 5$ - измерений

$$\frac{1}{N-1}\lambda_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\left.\begin{aligned} 1/4 \cdot 1 &= 0{,}25 \\ 1/4 \cdot 16 &= 4 \\ 1/4 \cdot 49 &= 12{,}25 \end{aligned}\right\} \text{ Дисперсии по гл. комп.}$$

* Или приложения online calc.

Задание 4.1.

$$\bar{x} = 1/N \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \sum_{i=1}^{N} \| x^{(i)} - v_0 \|^2 \to \min_{v_0}$$ -> решение через ср. значен.

$$\sum_{i=1}^{N} (x^{(i)} - v_0, x^{(i)} - v_0) = \sum_{i=1}^{N} \{ (x^{(i)}, x^{(i)}) - 2(x^{(i)}, v_0) +$$

$$+ (v_0, v_0) \} = \sum_{i=1}^{N} (x^{(i)}, x^{(i)}) - 2\left(\sum_{i=1}^{N} x^{(i)}, v_0\right) + N(v_0, v_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (x^{(i)}, x^{(i)}) + \underbrace{N\{(v_0 - 1/N \sum_{i=1}^{N} x^{(i)}, v_0 - 1/N \sum_{i=1}^{N} x^{(i)})}_{NA} -$$

$$- 1/N^2 \left(\sum_{i=1}^{N} x^{(i)}, \sum_{i=1}^{N} x^{(i)} \right) \} =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \| x^{(i)} \|^2 - 1/N \sum_{i=1}^{N} \left(x^{(i)}, \sum_{i=1}^{N} x^{(i)} \right)} + NA$$

Не участвует в оптимизации,
а значит не влияет на результат,
значит оптимизируем $\underline{A}$

Собственно минимальный результат достигается
при $v_0 = \bar{X} = 1/N \sum_{i=1}^{N} x^{(i)}$, что и тр. док.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

Eigenvectors for the matrix A:

- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, eigenvalue $\lambda_1 = 1$
- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0{,}\overline{3}33 \\ 0{,}\overline{3}33 \\ 1 \end{pmatrix}$, eigenvalue $\lambda_2 = 16$
- $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$, eigenvalue $\lambda_3 = 49$