Exercice 1. (q-développement des séries d'Eisenstein, à la Weil (d'après Eisenstein-Schellbach))

i. Soient p, q et $r = p + q$ des variables. Vérifier que
$$\frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{p^2r^2} + \frac{1}{q^2r^2} + \frac{2}{pr^3} + \frac{2}{qr^3}.$$

ii. On introduit, avec Eisenstein, la série absolument convergente de dimension 1
$$\epsilon_1(x) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right) \tag{1}$$
et ses dérivées successives $-k\epsilon_{k+1} = \epsilon_k'$ pour $k \geqslant 1$. En choisissant $p = x+n, q = y+m$, déduire de la question précédente successivement que $3\epsilon_4 = \epsilon_2^2 + 2\epsilon_1\epsilon_3$, puis que $\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_3$, et ϵ_1 satisfait l'équation différentielle
$$-\epsilon_1'(x) = \epsilon_1^2(x) + a,$$
où a est une constante à déterminer.

iii. En conclure que
$\epsilon_1(z) = \pi\cot(\pi z) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \exp(2i\pi n z)$.

iv. En dérivant ces deux formules de $\pi\cot(\pi z)$, prouver que, pour $q = \exp(2i\pi z)$ et $k \geqslant 2$,
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1}q^m.$$

v. En déduire pour k pair le q-développement de la série d'Eisenstein G_k :
$$G_k(\tau) := \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n,$$
où $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ et $q = \exp(2i\pi\tau)$.

vi. Méditer à des variantes possibles de la méthode de Eisenstein-Schellbach.

Exercice 2. Démontrer que, pour k pair, les séries d'Eisenstein $G_k(\tau)$ sont des formes modulaires de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$. En déduire les valeurs en les points quadratiques imaginaires spéciaux (pour $j = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$) :
$$G_6(i) = G_4(j) = 0.$$

TSVP

k	2	4	6	8	10	12	14	16
$-\frac{2k}{\mathrm{B}_k}$	-24	240	-504	480	-264	65520/691	-24	16320/3617

Exercice 3. (Nombres de Bernoulli). On les définit par la série génératrice $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$.

i. Montrer que les B_k sont rationnels, que $B_{2j+1} = 0$ si $j > 1$, que $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$ et $B_{12} = \frac{-691}{2730}$.

ii. Montrer que $1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k} = \pi z \cot(\pi z) = \pi i z + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2i\pi z)^k}{k!}$.

iii. En déduire que si k est pair, $2\zeta(k) = -\frac{(2i\pi)^k}{k!} B_k$, ou de manière équivalente $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$.

iv. Normalisons la série d'Eisenstein $E_k = \lambda G_k$ de sorte que $E_k(\infty) = 1$. Montrer que $E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$.

v. Montrer que $E_4^2 = E_8$ et en déduire la relation $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_3(i)\sigma_3(n-i)$.

vi. Montrer que $E_4 E_6 = E_{10}$ et en déduire la relation $11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_3(i)\sigma_5(n-i)$.

Exercice 4. Soit Γ un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ et soit $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq \pm Id$. Montrer que

i. $|\operatorname{tr}(\gamma)| = 2 \iff \pm\gamma \cong \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \gamma$ possède un seul point fixe qui est dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On dit alors que γ est parabolique et ses points fixes sont appelés des pointes de Γ. Prouver que si $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, alors l'ensemble de ses pointes est $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

ii. $|\operatorname{tr}(\gamma)| < 2 \iff \gamma \cong \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \iff \gamma$ possède deux points fixes conjugués τ et $\overline{\tau}$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On dit alors que γ est un élément elliptique. Prouver que γ est elliptique si, et seulement s'il est d'ordre fini. Trouver les points fixes des éléments elliptiques de $SL_2(\mathbb{Z})$, et décrire le corps $K = \mathbb{Q}(\tau)$.

iii. $|\operatorname{tr}(\gamma)| > 2 \iff \gamma \cong \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*, |a| \neq 1 \iff \gamma$ possède deux points fixes distincts ω, ω' dans $\mathbb{R} \cup \infty$. On dit alors que γ est hyperbolique. Lorsque $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, décrire le corps $F = \mathbb{Q}(\omega)$, et le sous-groupe de F^* engendré par a.

Exercice 5. Soient $f \in M_k$ et $g \in M_\ell$ des formes modulaires de poids k et ℓ respectivement. i) Montrer que $\ell f' g - k f g' \in M_{k+\ell+2}$.

ii) Obtenir le développement de Fourier et les formules de transformations modulaires de $\frac{i\pi}{12} E_2 := \frac{d}{d\tau} \log \eta(\tau)$. Est-ce une forme modulaire ? De quel poids ?

TSVP

iii) (On note $\tau = x + iy$). Montrer que $E_2(\tau) - \frac{3}{\pi y}$ est invariante sous $SL_2(\mathbb{Z})$.
iv) Soit D l'opérateur différentiel $2i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ et $Z_r f(z) = \frac{r}{y} f(z) + Df(z)$, avec $y = Im(z)$.
a) Montrer que $Z_p Z_{p-1} \cdots Z_{-p} = D^{p+1}$ pour tout $p \geqslant 0$.
b) Etudier l'action de Z_r sur les formes de poids r.

Exercice 6. Pour un entier $D > 0$, on considère l'ensemble $\mathcal{Q}(D)$ des fonctions quadratiques $Q(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b^2 - 4ac = D$ et $a < 0$.

Pour chaque nombre réel x, Zagier considère les sommes

$$A_D(x) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}(D), \\ Q(x) > 0}} Q(x), \quad B_D(x) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}(D), \\ Q(x) > 0}} Q^3(x), \; C_D(x) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}(D), \\ Q(x) > 0}} Q^5(x).$$

a) Montrer que la somme qui définit $A_5(0)$ est une somme finie.

b) Plus généralement, si $x \in \mathbb{Q}$ est un nombre rationnel, montrer que la somme qui définit $A_5(x), B_5(x), C_5(x)$ et même $A_D(x), B_D(x), C_D(x)$ est finie.

c) Calculer $A_5(0), A_5(\frac{1}{2}), A_5(\frac{1}{3})$. Idem avec $B_5(0), B_5(\frac{1}{2}), B_5(\frac{1}{3})$.

d) i) Montrer que A_5 vérifie pour tout nombre rationnel x l'équation modulaire

$$x^2 A_5\left(\frac{1}{x}\right) - A_5(x) = 2x^2 - 2. \tag{2}$$

ii) En déduire que $A_5(x) = 2$ pour tout nombre rationnel x.

iii) Montrer que

$$x^6 B_5(\frac{1}{x}) - B_5(x) = 2x^6 - 2, \quad \text{puis que } B_5(x) = 2.$$

iv) Montrer que $x^2 A_D(1/x) - A_D(x) = \alpha_D(x^2 - 1)$ pour une constante α_D et que $x^6 B_D(1/x) - B_D(x) = \beta_D(x^6 - 1)$, pour une constante β_D.

v) Montrer que $A_D = \alpha_D$ est constant, avec

$$\alpha_D = \sum_{b \in \mathbb{Z}, |b| < \sqrt{D}, b \equiv D \bmod 2} \sigma_1\left(\frac{D - b^2}{4}\right).$$

Formuler un énoncé analogue pour B_D.

vi) Qu'est-ce qu'il se passe pour $x^{10} C_D(\frac{1}{x}) - C_D(x)$? (Traiter l'exercice 7 pourra vous aider à répondre).

Exercice 7. Pour un entier n pair positif, on note $R_{\leqslant n}$ l'espace vectoriel des polynômes P de degré $\leqslant n$ qui vérifient la relation de période

$$P(x) = P(x+1) + (x+1)^n P\left(\frac{x}{x+1}\right). \tag{3}$$

a) Déterminer une base et la dimension de $R_{\leqslant n}$ pour $n = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

b) On rappelle qu'une forme modulaire $f(\tau) = a_0 + \sum_{m \geqslant 1} a_m q^m$ de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$ satisfait l'équation fonctionnelle $f(-\frac{1}{\tau}) = \tau^k f(\tau)$. A une telle forme f on associe successivement la série

$$\tilde{f}(\tau) := \sum_{m \geqslant 1} \frac{a_m}{m^{k-1}} q^m,\ q = \exp(2i\pi\tau),$$

puis le "*polynôme de périodes*"

$$r_f(\tau) := \tilde{f}(\tau) - \tau^{k-2}\tilde{f}(-1/\tau).$$

On suppose que f est une forme modulaire parabolique (i.e. $a_0 = 0$) de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$. Démontrer que r_f est un polynôme de $R_{\leqslant k-2}$.

c) Déterminer r_f lorsque $f = G_k$ est la série d'Eisenstein de l'exercice 1.

d) Expliquer pourquoi la fonction C_D dans l'exercice 6 n'est pas constante.

Exercice 8. Soit $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ et $k \in \mathbb{N}$.

i. Montrer que si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma(1))$, alors $\tau \mapsto |f(\tau)|\Im(\tau)^{k/2}$ est invariante par $\Gamma(1)$.

ii. Montrer que si $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma(1))$, alors $\tau \mapsto |f(\tau)|\Im(\tau)^{k/2}$ est bornée.

iii. Montrer que si $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma(1))$ et $f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \exp(2i\pi n\tau)$ est son q-développement à la pointe ∞, alors $a_n = O(n^{k/2})$.

Indications de correction exercice 1.

a) est une simple vérification. Pour b), on commence par trouver

$$\epsilon_2(x)\epsilon_2(y) = (\epsilon_2(x)+\epsilon_2(y))\epsilon_2(x+y) + 2(\epsilon_1(x)+\epsilon_1(y))\epsilon_3(x+y), \tag{4}$$

puis l'on utilise les développements de (4) en $y=0$ de la forme $\epsilon_2(y) = \frac{1}{y^2} + b + O(y)$ avec $b = 2\zeta(2)$, et $\epsilon_3(x+y) = \epsilon_3(x) + y\epsilon_3'(x) + O(y^2)$. Modulo $O(y)$ Il vient

$$\epsilon_2(x)\left(\frac{1}{y^2}+b\right) = \left(\epsilon_2(x) + \frac{1}{y^2} + b\right)\left(\epsilon_2(x) + y\epsilon_2'(x) + \frac{y^2}{2}\epsilon_2''(x)\right) + 2\Big(\epsilon_1(x) + 1/y\Big)\Big(\epsilon_3(x) + y\epsilon_3'(x)\Big).$$

Les termes en $\frac{1}{y^2}$ et $\frac{1}{y}$ disparaissent, et ne restent que le terme constant qui donne

$$0 = \epsilon_2^2 + \frac{1}{2}\epsilon_2'' + 2\epsilon_1\epsilon_3 + 2\epsilon_3'.$$

Puisque $\epsilon_2'' = -2\epsilon_3' = 6\epsilon_4$, on trouve l'identité intermédiaire demandée

$$0 = \epsilon_2^2 + 2\epsilon_1\epsilon_3 - 3\epsilon_4. \tag{5}$$

Le terme constant du développement de (4) en $z=0$ fournit quant à lui (utilisant les parités)

$$\epsilon_2^2(x) = (2\epsilon_2(x) + \frac{z^2}{2}\epsilon_2''(x))(1/z^2+b) + 2(z\epsilon_1' - \frac{z^2}{2}\epsilon_1'' + \frac{z^3}{3!}\epsilon_1''')(\frac{1}{z^3} + O(z)),$$

ie $\epsilon_2^2 = 2b\epsilon_2 + \frac{1}{2}\epsilon_2'' + \frac{1}{3}\epsilon_1''' = 2b\epsilon_2 + \frac{1}{2}\epsilon_2'' - 2\epsilon_4$, ou encore

$$0 = -\epsilon_2^2 + 2b\epsilon_2 + \epsilon_4. \tag{6}$$

On reporte pour éliminer ϵ_4, de sorte que $\epsilon_2^2 - 3b\epsilon_2 = \epsilon_1\epsilon_3$. On dérive, et l'on trouve $\epsilon_1\epsilon_4 = \epsilon_2\epsilon_3 - 2b\epsilon_3$. On reporte la valeur de ϵ_4 provenant de (6), d'où $(\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_3)(2b - \epsilon_2) = 0$, $\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_3$. On utilise ceci pour faire disparaître ϵ_3, et on trouve l'équation différentielle voulue avec $b = 2\zeta(2) = \pi^2/3$, il vient $a = 3b$.