Probabilidad y Estadística II Clase 1 2020-19

Problema 1: Intervalos de Confianza

Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño $n = 41$, proveniente de una población con distribución $N(\mu = 2\theta + 1, \sigma^2 \rightarrow desconocido)$. Deduzca la expresión para un intervalo de confianza del 95% para el parámetro θ

Rta: $\left[\frac{\bar{X} - t_{1-\alpha/2} * S/\sqrt{n} + 1}{2}; \frac{\bar{X} + t_{1-\alpha/2} * S/\sqrt{n} + 1}{2}\right]$

Problema 2: EMC

Sea $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ una muestra de tamaño n con $E(Y_i) = \mu \ \forall \ i \in \{1, \cdots, n\}$; $Var(Y_i) = \sigma^2 \ \forall \ i \in \{1, \cdots, n\}$ y $Cov(Y_i, Y_j) = \sigma^2/2 \ \forall \ i \neq j$. Calcule el error cuadrático medio de $\bar{Y}$

Rta: $\sigma^2/n + \sigma^2/2 - \sigma^2/2n$

Problema 3: Estimadores

Se tiene una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{x}{\beta^2} e^{-x/\beta} & \beta > 0 x > 0 \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

Como beta es un parámetro desconocido se sugieren los siguientes estimadores:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\bar{X}}{2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{3\bar{X}}{4}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$E(X) = \beta$$

$$Var(X) = 2\beta^2$$

a. ¿Cuál/es de los estimadores presentados es/son sesgados? Rta: $\hat{\beta}_2$

b. Ordene los estimadores de mayor a menor, de acuerdo a la varianza de cada uno. Rta: $\hat{\beta}_2$ - $\hat{\beta}_3$ - $\hat{\beta}_1$

c. ¿Cuál de los estimadores recomendaría, basado en el error cuadrático medio? Rta: $\hat{\beta}_1$

d. ¿Es el estimador numero 2 consistente? Rta: No, porque el valor esperado no converge al párametro poblacional