

# Appunti Controlli Automatici

Brendon Mendicino

December 10, 2022

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Controllo ad Anello Aperto . . . . .	4
1.1.1	Problema dei Disturbi . . . . .	6
1.1.2	Problema dell'Approssimazione . . . . .	7
1.2	Controllo ad Anello Chiuso . . . . .	7
1.2.1	Prima conclusione Fondamentale . . . . .	8
1.2.2	Seconda conclusione Fondamentale . . . . .	8
1.2.3	Terza conclusione Fondamentale . . . . .	8
1.2.4	Schema di Retroazione Generale . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Sistemi Dinamici</b>	<b>10</b>
2.1	Sistemi Lineari Tempo-Invarianti . . . . .	15
2.2	Sulzioni di Sistemi LTI . . . . .	16
2.3	Matlab . . . . .	19
2.4	Rappresentazione in Funzioni di Trasferimento . . . . .	20
2.5	Stabilità Interna . . . . .	20
2.6	Stabilità BIBO . . . . .	23
2.7	Relazione tra Stabilità Interna e BIBO . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Analisi in Regime Stazionario</b>	<b>25</b>
3.1	Proprietà dello Stato Stazionario . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Sistemi Non-Lineari</b>	<b>26</b>
4.1	Linearizzazione di Sistemi Non-Lineari . . . . .	27
4.2	Stabilità di Equilibrio . . . . .	29
4.3	Stabilità di un Sisetema Linearizzato . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Risposta in Frequenza</b>	<b>31</b>
5.1	Diagrammi di Bode . . . . .	31
5.2	Diagrammi Polari . . . . .	32
5.3	Diagrammi di Nichols . . . . .	32
5.4	Diagramma di Nyquist . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Proprietà Strutturali</b>	<b>33</b>
6.1	Raggiungibilità nei Sistemi LTI TD . . . . .	35
6.2	Matlab . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Feedback</b>	<b>37</b>
7.1	Legge di Controllo . . . . .	37
7.2	Oservabilità . . . . .	39
7.3	Osservatore dello Stato . . . . .	40

---

7.4	Regolatore Dinamico . . . . .	42
7.5	Proprietà del Regolatore Dinamico . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Sistemi di Controllo</b>	<b>44</b>
8.1	Contour Mapping . . . . .	47
8.2	Struttura di un Controllore . . . . .	50
8.3	Stabilità Relativa . . . . .	50
8.4	Risposta Stazionaria . . . . .	50
8.5	Segnali Polinomiali . . . . .	51
<b>9</b>	<b>Risposta in Frequenza</b>	<b>58</b>
<b>10</b>	<b>Specifiche per Transitorio</b>	<b>61</b>
10.1	Luoghi di Magnitudo Costante . . . . .	65
10.2	Scelta di $K_c$ . . . . .	66
10.3	Progetto di LEAD e LAG . . . . .	67
<b>11</b>	<b>Sistemi a Tempo Discreto</b>	<b>71</b>
<b>12</b>	<b>Controlli Digitali</b>	<b>72</b>
<b>13</b>	<b>Problemi d'Esame</b>	<b>74</b>
13.1	Problema 1 . . . . .	74

# 1 Introduzione

**Sistema Dinamico** Un **Sistema Dinamico** è un oggetto matematico usato per descrivere un fenomeno fisico in termini generali. Sarà lo strumento che verrà utilizzato per modellare un sistema (o fenomeno) fisico, servirà a studiare le proprietà e le caratteristiche in determinate situazioni del sistema fisico.

**Sistema di Controllo** Si ottiene a partire da un sistema fisico ed aggiungendo dei pezzi si arriva ad ottenere un **Sistema di Controllo**. Un sistema di controllo è utilizzato per portare il sistema fisico ad autoregolarsi (da qui viene il termine Controlli **Automatici**, in inglese Automatic Controls). Per creare un sistema di controllo si avrà bisogno di:

- **sensori** che monitorano i parametri o le grandezze del sistema che si vogliono controllare;
- **attuatore** che in modifica in qualche modo i parametri del sistema;
- **controllore** che rappresenta l'algoritmo di controllo e calcola istante per istante, a partire dai dati forniti dai sensori, le nuove istruzione da dare agli attuatori attraverso dei criteri specifici.

Tutti gli oggetti studiati verranno rappresentati come dei sistemi.

Controllare un sistema vuol dire trovare un modo di imporre dei valori su delle grandezze di nostro interesse. I **segnali di riferimento**  $r(t)$  sono le grandezze a cui si vuole che il sistema venga regolato. Fare in modo che il sistema assuma il comportamento desiderato viene detto **problema dell'inseguimento** (tracking problem), corrisponde a rendere il segnale di uscita quanto più simile al segnale di riferimento.

## 1.1 Controllo ad Anello Aperto

I primi contesti in cui nasce il controllo automatico di sistemi sono gli impianti industriali, infatti ancora oggi viene usato per il termine **impianto** (o plant) per descrivere un qualsiasi sistema, anche se completamente scorrelato dagli impianti industriali, come ad esempio: la regolazione di temperatura in una stanza, la regolazione della curvatura della sterzo in un autoveicolo con guida autonoma, ecc...

I dati di principale interesse sono:

- $r(t)$ : segnale di riferimento, che rappresenta il comportamento desiderato;
- $y(t)$ : uscita del controllore;
- $u(t)$ : ingressi di comando (o ingressi manipolandi);

Risolvere il problema del controllo significa determinare  $u(t) \forall t \geq t_0$  tale che  $y(t) \simeq r(t) \forall t$ .

1. Innanzitutto si deve descrivere in modo matematico la relazione tra  $u(t)$  e  $y(t)$ :

$$y(t) = f(u(t))$$

Dove:  $f \triangleq$  generica funzione matematica. Questa descrizione non è accurata, infatti porterà a dei problemi nel modello del sistema;

2. Progettare un controllore che imponga automaticamente  $y(t) = r(t) \quad \forall t \geq t_0$ ;

### Example 1.1

Si consideri un generatore di corrente che genera una corrente  $i(t)$ , collegato in serie con una resistenza  $R$ . Si vuole controllare la tensione  $v(t)$  sulla resistenza  $R$ .

$$y(t) = v(t)$$

$$u(t) = i(t)$$

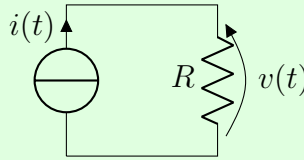


Figure 1: Circuito con generatore di corrente

$$\Rightarrow y(t) = f(u(t)) = R \cdot i(t) = R \cdot u(t)$$

Cerchiamo ora un controllore che imponga  $y(t) = r(t)$ .

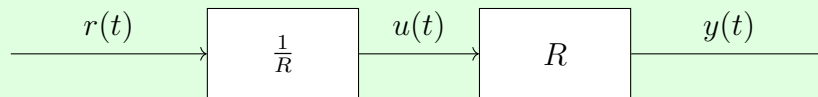


Figure 2: Controllore-Plant

$$y(t) = R \cdot u(t) = R \cdot \frac{1}{R} \cdot r(t)$$

$$\boxed{y(t) = r(t)}$$

*In generale:* risolvere il problema del tracking consiste nel trovare la funzione inversa ( $H_p : \exists f^{-1}$ ).

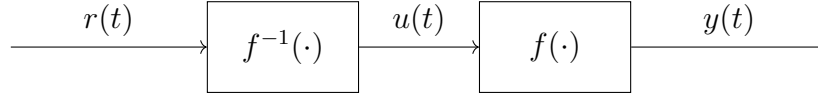


Figure 3

$$y(t) = f(f^{-1}(r(t))) \triangleq r(t) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = r(t)$$

Il controllo ad anello aperto non dovrebbe mai essere applicato per il controllo automatico, il motivo è il suo approccio molto naive al problema. Sorgono dunque dei problemi.

### 1.1.1 Problema dei Disturbi

Cosa succede se sul sistema intervengono degli ingressi di disturbo (disturbi)?

#### Example 1.2

Durante il controllo della traslazione laterale di un veicolo con guida autonoma, si possono individuare almeno due ingressi nel sistema: l'angolo di sterzo del volante ed il vento laterale che colpisce il veicolo. Un modello molto realistico potrebbe essere:

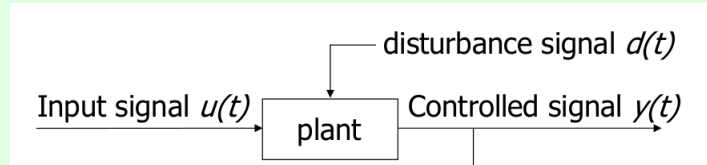


Figure 4: Rumore sommato all'Uscita

Applicando l'approccio open loop:

$$\begin{aligned} y(t) &= d(t) + f(u(t)) = \\ &= d(t) + f(f^{-1}(r(t))) = \\ &= d(t) + r(t) \end{aligned}$$

Si definisce l'errore di tracking:

$$\begin{aligned} e(t) &\triangleq \text{errore di tracking} \\ e(t) &\triangleq y(t) - r(t) = d(t) \end{aligned}$$

Lo schema open loop non è in grado di attenuare i *disturbi*, fallendo nell'obiettivo di inseguire il riferimento. Va bene nel momento in cui il problema è molto semplice ed i disturbi hanno valori molto piccolo, potendo essere considerati trascurabili.

### 1.1.2 Problema dell'Approssimazione

Cosa succede se la nostra descrizione matematica del sistema risulta essere un' approssimazione dell'effettivo comportamento del sistema?

#### Example 1.3

Si consideri la Figure 1 e si ipotizzi di voler regolare la grandezza  $v(t)$ . Si supponga che il modello matematico utilizzato sia:  $y(t) = \tilde{R} \cdot u(t)$ , dove in generale  $R \neq \tilde{R}$ .

Il costruttore ci fornisce i dati sul resistore:

$$R = \tilde{R} \pm \Delta R$$

Dove  $\Delta R$  è l'incertezza sulla misura.

Si trova che:

$$\begin{aligned} y(t) &= R \cdot u(t) = \\ &= R \cdot \frac{1}{\tilde{R}} \cdot r(t) = \\ &= r(t) \pm \frac{\Delta R}{\tilde{R}} \cdot r(t) \end{aligned}$$

Errore di tracking:

$$|e(t)| = \left| \frac{\Delta R}{\tilde{R}} \cdot r(t) \right|$$

#### Definition 1.1 – Errore di tracking

$$|e(t)| = |y(t) - r(t)|$$

Il controllo ad anello aperto fallisce l'obiettivo di inseguire il riferimento perché non è in grado di attenuare gli effetti degli *errori di modello*.

## 1.2 Controllo ad Anello Chiuso

Si è visto come la schema ad *anello aperto* (1.1) non sia utile a risolvere il problema dell'inseguimento. La soluzione a tale problema, che permette di abbandonare questo schema molto *naive*, sarà il **controllo ad anello chiuso**, che verrà imple-

mentato tramite la **retroazione negativa** (**negative feedback**). Esso si basa su tre conclusioni fondamentali.

### 1.2.1 Prima conclusione Fondamentale

Un sistema di controllo può attenuare l'effetto di eventuali disturbi esterni e/o errori di modello se e solo se è presente una **retroazione negativa**.

*L' intuizione è:* per attenuare l'effetto di disturbi e errori di modello, è necessario misurare istante per istante l'uscita  $y(t)$  e confrontarla con l'uscita desiderata  $r(t)$ , come si vede in Figure 5 l'uscita dell'impianto viene portata al controllore del sistema.

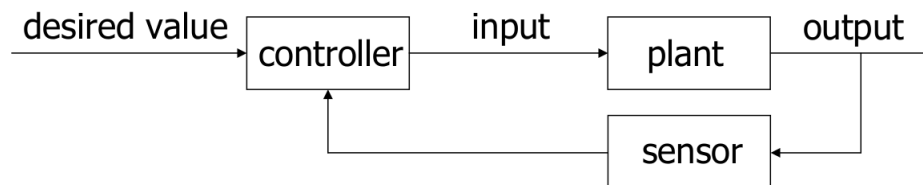


Figure 5: Retroazione Negativa

Gli errori di modello e gli errori di disturbo sono i motivi per cui nasce la *teoria dei controlli automatici* e della *teoria della retroazione negativa*.

### 1.2.2 Seconda conclusione Fondamentale

Per controllare l'uscita di un sistema si ha bisogno di dei sensori che monitorino costantemente il valore della uscita che si vuole controllare.

### 1.2.3 Terza conclusione Fondamentale

Progettare un sistema di controllo con retroazione per la **stabilizzazione di un sistema instabile!**

Il problema fu studiato per la prima volta nei laboratori *Bell* durante i primi anni del '900, per cercare di risolvere il problema del rumore nello scambio di segnali, riuscendo a trovare come soluzione proprio l'uso della retroazione negativa, anche se in alcuni casi, partendo da un sistema stabile, con l'uso di certi tipi di segnali, il sistema diventava instabile. L'idea si sviluppò fino alla moderna teoria, grazie alla sforzo di persone come *Bode*, *Black*, *Nyquist*, ecc...

Grazie alla retroazione si può, ad esempio, risolvere il problema della *levitazione magnetica*, che è un problema intrinsecamente instabile.

### 1.2.4 Schema di Retroazione Generale

Uno schema di retroazione generale per un sistema ad anello chiuso è mostrato in Figure 6.



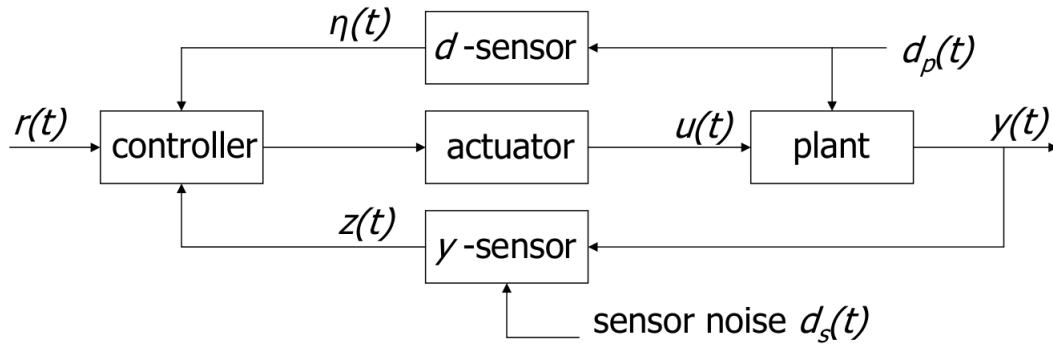


Figure 6: Schema di Retroazione Generale

Il controllore che è il cervello del processo di automazione, attraverso i dati ricevuti dei sensori, dà istruzioni al (o agli) attuatori.

Nella maggior parte dei casi i disturbi sono dei segnali non manipolabili e di solito non sono nemmeno misurabili. È possibile misurarli ( $\eta$ ) solo in alcuni casi.

## 2 Sistemi Dinamici

I sistemi si dividono in due tipologie: i sistemi statici ed i sistemi dinamici.

Nei sistemi statici la relazione tra ingresso ed uscita è univocamente determinata dell'ingresso a quel preciso istante  $t_0$ . Un esempio di sistema statico è la relazione tra corrente  $i(t)$  e la tensione  $v(t)$  nella Figure 1, infatti:  $v(t) = Ri(t)$ .

Un sistema è **dinamico** quando il valore dell'uscita dipende anche dai valori precedenti delle entrate e più in generale di tutta la storia passata del sistema. Il modello maggiormente usato è quello dei sistemi dinamici, raramente dei modelli fisici possono essere rappresentati con dei sistemi statici.

### Example 2.1

Prendiamo come esempio un condensatore  $C$  in serie con un generatore di corrente.

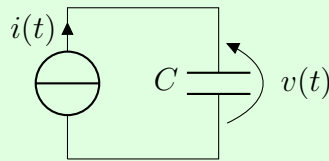


Figure 7: Generatore di corrente con condensatore in parallelo

Secondo le relazioni fondamentali dell'elettrotecnica:

$$v(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t u(t) dt$$

Il condensatore è un sistema dinamico in quanto l'uscita all'istante  $t$  dipende da tutti i valori passati dell'ingresso fino a quell'istante  $t$ .

Come si può descrivere un sistema se la sua descrizione dipende da tutti gli stati pregressi?

Come si può ovviare al problema della necessità di conoscere tutti i valori passati

dell'ingresso?

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \\&= \frac{1}{C} \left[ \int_{-\infty}^{t_0} i(t) dt + \int_{t_0}^t i(t) dt \right] = \\&= v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt\end{aligned}$$

Non esiste il bisogno di conoscere tutta la storia passata del condensatore ma, basta conoscere la tensione all'istante  $t_0$ , attraverso una misurazione della sua carica totale.

Per riuscire a descrivere l'uscita di un sistema si devono conoscere le **variabili di stato** (o **condizioni iniziali**) per poter descrivere la storia pregressa del sistema, queste variabili possono essere misurate.

Le variabili di stato possono essere trovate attraverso la risoluzione di *equazioni differenziali*:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t) \quad (1)$$

Per risolvere un'equazione differenziale si deve conoscere la *forzante* ( $u(t)$ ) e le **condizioni iniziali** ( $v(t_0)$ ).

Per descrivere un sistema in modo sistematico si applicano le leggi della fisica, la risultante del problema sono un insieme di equazioni differenziali che conterranno le variabili di stato.

**§Modellazione di un sistema** Per modellare un sistema si individuano gli ingressi e le uscite. Gli ingressi possono essere di due tipi:

- manipolabili;
- non-manipolabili (disturbi);

Il numero di variabili di stato determinano l'ordine del sistema dinamico e sono sempre in numero fisso.

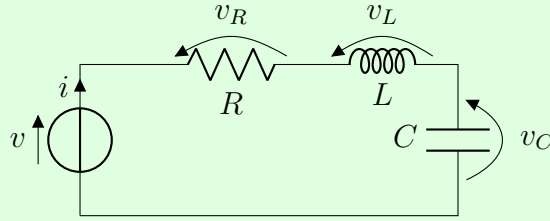
È possibile mostrare che è sempre possibile mostrare che è sempre possibile modellare un sistema fisico con una scelta di equazioni differenziali:

**Definition 2.1 – Equazioni di ingresso stato-uscita**

(o descrizione del sistema nello spazio dello stato):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \forall t \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p \\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^q \end{matrix} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1(t) = g_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{y}_2(t) = g_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \vdots \\ \dot{y}_q(t) = g_q(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

**Example 2.2 – Circuito RLC**

Come primo punto si individua l'uscita e l'ingresso (scelte da noi):

- $y(t) = v_C(t)$
- $u(t) = v(t)$

Per trovare la **variabili di stato** di deve prima trovare l'equazione del sistema. Studio del sistema:

- $v_R = Ri$
- $\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}i$
- $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}v_L$
- $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$

Scelgo delle variabili di stato. Per dei sistemi elettronici le scelta che si può fare per prene le variabili di stato sono: la tensione ai capi dei condensatori; le

passanti per gli induttori.

Si conosce da subito il grado del sistema (elettrico).

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

$v_L$  non è una variabile di stato, nè un ingresso, si devono trasformazioni per ricavarle.

$$KVL: \quad v_L = v - v_R - v_C$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

Calcoliamo  $\dot{x}_2$ :

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} \cdot i$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

Mentre  $y(t)$ :

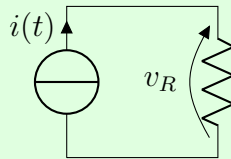
$$y = x_2$$

In generale le funzioni di stato e di uscita possono anche dipendere dal tempo (e.g.  $g(t, x(t), u(t))$ ). Se questo è vero il sistema viene definito **tempo-variante**. Se ciò non avviene il sistema viene detto **tempo-invariante**.

### Tempo variante VS tempo invariante

#### Example 2.3

Circuito R.



Sistema di ordine 0 (sistema statico).

$$y = g(u) = R \cdot u$$

C1:  $R$  è un *termistore*  $\equiv$  il valore della sua resistenza dipende dalla sua temperatura.

$$y(t) = R(t)u(t) \rightarrow y(t) = g(t, u(t))$$

Sistema tempo-variante.

$\boxed{C2}$ :  $R \equiv \text{costante}$ .

$$y(t) = Ru(t) \rightarrow y(t) = g(u(t))$$

Sistema tempo-invariante.

*OSS*: Se l'uscita del sistema dipende solo dalle variabili di stato ( $u(t)$ ) è detto **strettamente proprio**  $\rightarrow g(x(t))$ .

### Example 2.4 – Single link manipulator

Si vuole controllare il momento di inerzia di un pendolo semplice, con le seguenti variabili:

- $\theta$  = angular position (variable of interest)
- $m$  = mass
- $l$  = link length
- $\beta$  = hinge friction coefficient
- $u$  = applied torque at the hinge
- $g$  = gravity acceleration

Si usa l'equazione di Newton, con  $J$  momento di inerzia,  $M$  momento di una forza:

$$J \cdot \ddot{\theta} = \sum_i M_i$$

Si scrivono le equazioni:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) = -mgl \sin(\theta(t)) - \beta\dot{\theta}(t) + u(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) - \frac{\beta}{ml^2} \dot{\theta}(t) + \frac{1}{ml^2} u(t)$$

Per ovviare al problema delle derivate seconde si usa un trucco per le variabili di stato:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

## 2.1 Sistemi Lineari Tempo-Invarianti

Mettendo insieme la nozione di sistemi lineari e di tempo-invarianza si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Dove in generale le matrici sono:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times p} \quad C \in \mathbb{R}^{q \times n} \quad D \in \mathbb{R}^{q \times p}$$

Si potrà sfruttare questo modello anche per sistemi che non sono lineari. Questo modello non limita l'obiettivo di progettare un sistema di controllo, nell'imporre un determinato comportamento chiediamo al sistema di inseguire le nostre uscite desiderate, anche in presenza di disturbi. L'obiettivo è prendere un sistema ed imporre un certo comportamento. Si possono approssimare le equazioni non-lineari nell'intervallo di funzionamento a delle equazioni lineari.

Si userà matlab (matrix laboratory) per descrivere questi modelli. Matlab semplificherà i calcoli attraverso operazioni tra matrici e vettori.

Per definire un vettore o una matrice la etichetto con un nome. Per definire una matrice si usano valori separati da spazi o da virgole, per gli elementi di una riga, si usano i punti e virgola. Per trasporre una matrice si usa un apice.

### Definition 2.2 – Polinomio Caratteristico

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

Dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identità.

Ad esempio nelle matrici  $3 \times 3$  il polinomio caratteristico è:

$$\lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_3$$

### Definition 2.3 – Autovalore

Diciamo che  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  è un autovalore della matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se e solo se esiste un vettore  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$  (chiamato autovettore corrispondente a  $\lambda_i$ ) tale che:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{x}_i$$

Per calcolare gli autovalori su matlab si usa il comando *eig()*.

### Definition 2.4 – Rango di una matrice

Il rango di una matrice è il numero di colonne o righe linearmente indipendenti.

Per calcolare il rango si usa *rank()*.

Si supponga di voler risolvere un sistema lineare di equazioni algebriche:

$$A \cdot x = b$$

→  $\exists$  un'unica soluzione se e solo se (Hp:  $A$  quadrata)  $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$   
 $x = A^{-1} \cdot b$ .

Su matlab:

- Se  $A$  è invertibile  $\Rightarrow x = A \backslash b \triangleq A^{-1} \cdot b$ .

- Se  $A \in R^{m \times n} (m > n) \Rightarrow \nexists A^{-1}$ .

In questo caso  $x = A \backslash b$  fornisce la soluzione ai minimi quadrati del sistema di equazioni  $Ax = b$ . Questa soluzione è fatta da:

$$Ax = b$$

$$A^T Ax = A^T b$$

Adesso  $A^T A$  è quadrata. Se  $\det(A^T A) \neq 0$  allora

$$x = (A^T A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$$

Dove  $(A^T A)^{-1} \cdot A^T \equiv$  pseudoinversa di  $A$ .

Matlab gestisce entrambi i casi, sia di matrice quadrata sia che non lo sia. È possibile mostrare che:  $x_{LS} = \arg \min_x \|Ax - b\|_2$ .

Per creare un sistema stato-uscita si usa il comando `ss`, passando le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

## 2.2 Soluzioni di Sistemi LTI

Per risolvere un sistema di equazioni differenziali è necessario conoscere la forzante e le condizioni iniziali delle variabili di stato. Il risultato sarà la  $x(t)$  e dunque si otterrà la  $y(t)$ .

Per risolvere le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, la soluzione è data dalla **equazione di Lagrange**:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = x_{zi}(t) + x_{zs}(t)$$

$x_{zi}$ : **zero-input response** (risposta libera dello stato) e dipende solo dalle condizioni iniziali, non dipende dalla forzante.

$x_{zs}$ : **zero-state response** (risposta forzata dello stato), dipende dalla forzante che si va ad applicare sul sistema, che sia controllabile o non-controllabile.



Da questa formula si può trovare l'andamento dell'uscita, dove si trovano nuovamente due termini: uno indipendente dalla forzante, uno dipendente dalla forzante, dette rispettivamente **risposta libera dell'uscita** e **risposta forzata dell'uscita**.

Il problema dell'approccio attraverso l'equazione di Lagrange è che ad ogni segnale diverso in entrata al sistema, va ricalcolato il valore dell'integrale, ciò comporta un problema computazionale non banale, sorgono maggiori problemi anche nel caso in cui la funzione non sia integrabile analiticamente. Si usa allora la **Trasformata di Laplace**.

### Definition 2.5 – Trasformata di Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Proprietà della trasformata di Laplace:

1. Linearità
2. ok

### Theorem 2.1 – Teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s)$$

Vale se e solo se i limiti sono entrambi finiti.

### Theorem 2.2 – Teorema del valore iniziale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Vale se e solo se i limiti sono entrambi finiti.

Usando le trasformate di Laplace si potranno trasformare equazioni differenziali in equazioni algebriche.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad sX(s) - AX(s) &= x(0) + BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = X_{zi} + X_{zs} \\ Y = Y_{zi} + Y_{zs} \end{cases}$$

Bisogna tornare nel dominio del tempo.

I segnali utilizzati sono definiti solo per  $t > 0$ , tutti i segnali sono implicitamente moltiplicati per il gradino unitario  $\varepsilon(t)$ .

I segnali più utilizzati sono: i polinomi, la delta di Dirac, esponenziali, sinusoidi. Per questi segnali esistono delle tabelle con le relative trasformate.

Usando Laplace, si procede per step:

1. Trovare  $X$  e  $Y$  in  $s$ ;
2. Usare l'espansione in fratti semplici di Heaviside (PFE);
3. Trovare i residui;
4. Ottenere  $x$  e  $y$  antitrasformando;

### Example 2.5

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + u$$

Sapendo che  $u = \varepsilon$  e  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U$$

Svolgendo tutti i conti si ottiene

$$Y = \frac{s^2 + s - 2}{s(s + 3 - 2j)(s + 3 + 2j)}$$

$$y(t) = 1.38e^{-3t} \cos(2t + 0.58) - 0.15$$

Ogni qual volta c'è una coppia di radici coniugate, si può dimostrare che anche i residui sono coniugati:

$$\frac{R}{s - \sigma_0 - j\omega_0} + \frac{R^*}{s - \sigma_0 + j\omega_0}$$

La  $\mathcal{L}^{-1}$  corrisponde a:

**Definition 2.6 – Antitrasformata di Radici Coniugate**

$$2\|R\|e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \angle R)$$

**2.3 Matlab**

Per risolvere un sistema di equazioni in matlab è necessario introdurre la variabile  $s$ . Si può definire la variabile  $s$  con il comando `s = tf('s')` (dove `tf()` vuol dire Transfer Function). Sarà interpretata da ora in avanti come la pulsazione complessa.

Per calcolare l'uscita  $Y$  a partire dal sistema si usa:

$$Y = \text{minreal}(\text{zpk}(C \cdot \text{inv}(s \cdot \text{eye}(2) - A) \cdot (B \cdot U + x_0)))$$

- Comando `zpk()`: viene calcolata la fattorizzazione dei polinomi al numeratore e denominatore;
- Comando `minreal()`: forza le semplificazioni in `zpk()` fissando una tolleranza (e.g. `G = funzione; minreal(zpk(G), 1e-6);`) semplifica zeri e poli con una tolleranza di  $10^{-6}$ ;

Si procede dunque con la scomposizione in fratti semplici: si usa il comando `residue()` per trovare la rappresentazione vettoriale del numeratore e del denominatore.

$$[\text{numY}, \text{denY}] = \text{tfdata}(Y, 'v');$$

Per trovare i poli e gli zeri si usa il comando `residue()`.

$$[r, p, k] = \text{residue}(\text{numY}, \text{denY});$$

Dove  $r$  ed  $p$  sono zeri e poli, mentre  $k$  è la costante sommata. Nei sistemi fisicamente realizzabile  $k$  è sempre zero, se così non fosse antitrasformando apparirebbe una delta, quindi un comportamento impulsivo: non fisicamente realizzabile.

In *simulink* settando i parametri in auto, quando si simula un sistema, matlab previene (il più delle volte) che le soluzioni delle equazioni differenziali divergano. Nella sezione della configurazione si può scegliere il max step size di integrazione, se è troppo grande si rischia di far divergere la soluzione dell'equazione. In simulink si possono caricare delle condizioni iniziali andandole ad inserire dentro gli integratori, nella sezione *initial condition*, in questo modo si potrà vedere la solamente la risposta forzata, mentre quella libera rimane zero.

Per salvare i dati di una simulazione effettuata si usa il comando:

$$\text{save nome-del-file-in-cui-salvare variabile [variabile ...];}$$

Per caricare le variabili si usa il comando `load`:

$$\text{load nome-file;}$$

Per caricare il simulink nello script si usa il comando `sim()`, questo ci restituirà i parametri del sistema vista dal blocco `To Workspace`, è comodo impostare il valore di ritorno con `Structure With Time`.

## 2.4 Rappresentazione in Funzioni di Trasferimento

I sistemi LTI possono essere rappresentati attraverso fdt. Definizione di fdt di un sistema LTI.

### Definition 2.7 – Funzione di Trasferimento

$$\text{fdt} \triangleq H(s) \triangleq \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{x(0)=0} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

La funzione di trasferimento vale solo quando le condizioni iniziali sono nulle.

Dato un sistema descritto mediante una fdt, possiamo ricavare le equazioni di ingresso stato-uscita? Questo è un problema mal posto, infatti la fdt mescola tra di loro le matrici. Scelte diverse di matrici, possono portare ad ottenere la stessa fdt. Questo problema è detto **problema delle realizzazioni** e non ha una soluzione univoca. Per risolvere il problema si applica una scelta arbitraria che mi conduce ad una fra le tante soluzioni.

## 2.5 Stabilità Interna

Un esempio di sistema stabile è banalmente un pendolo, facendolo partire da una posizione iniziale la sua uscita tende a fermarsi sul centro (in presenza di attriti).

Un esempio di sistema instabile è un'asta in equilibrio, con cui uno stimolo piccolissimo porta l'asta a cadere: il coefficiente angolare va a  $\infty$ . Un sistema è stabile se, sottoponendolo a degli stimoli finiti o a delle condizioni iniziali finite, l'uscita rimane finita.

### Definition 2.8 – Stabilità Interna

Fa riferimento alla risposta libera dello stato. Un sistema LTI è internamente stabile quando la risposta libera dello stato rimane limitata per ogni condizione iniziale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  finita.

### Definition 2.9 – Stabilità Asintotica

Se la risposta libera tende a 0 per  $t \rightarrow \infty$  allora il sistema è asintoticamente stabile. Se la risposta libera tende a zero allora è implicitamente continua per tutti gli  $t$ .

**Definition 2.10 – Instabilità Interna**

Se si trova una sola condizione iniziale per cui la risposta libera diverge, allora il sistema è internamente instabile.

Gli unici sistemi di interesse sono quelli asintoticamente stabili.

Stabilità interna di un sistema LTI.

Troviamo un modo sistematico di descrivere il sistema a partire dalle equazioni del sistema, quando questo è internamente stabile. Partiamo dalla (2.1), considerando le radici del denominatore come reali e con molteplicità 1.

$$\mathbf{x}_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \mathbf{x}_{zi}(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_{zi}(0) \}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{N_{X_1}(s)}{D_{X_1}(s)} \\ \vdots \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N_{X_1}}{D_{X_2}} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_1}{s - p_1} + \dots \right\}$$

$$x_1(t) = R_1 e^{p_1 t} + \dots + R_n e^{p_n t}$$

$$\boxed{x_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \iff p_1, p_2, \dots, p_n < 0}$$

$$|x_1(t)| < M \in \mathbb{R} \implies p_1, \dots, p_n \leq 0, \exists \text{ almeno un } i : p_i = 0$$

$$x_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pm \infty \implies \exists i : p_i > 0$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

$$X_i(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} [a_{ij}(s)] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

$$X_1(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} [a_{11}(s) \dots a_{1n}(s)] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{a_{11}(s)x_1(0) + \dots + a_{1n}(s)x_n(0)}{\det(sI - A)}$$

Dove  $\det(sI - A) = P_c(A)$ :

$$\Rightarrow p_1, \dots, p_n \text{ sono gli autovalori della matrice } A!$$

Se esistono dei  $p_i$  complessi coniugati che appartengono a  $\mathbb{C}$ , il sistema è asintoticamente stabile  $\iff$  tutte le parti reali degli autovalori è negativa. Nella risposta libera si potranno avere dei termini del tipo:

$$2|R|e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \angle R)$$

Anche in questo caso con una parte reale negativa, il termine converge a 0.

Analizziamo il caso in cui la molteplicità sia maggiore di 1. Scomposizione in fratti semplici di Heaviside in presenza di radici del denominatore con molteplicità  $> 1$ :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{N_H(s)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)^{n_i}} \\ H(s) &= \frac{R_{1,1}}{s - p_1} + \dots + \frac{R_{1,n_1}}{(s - p_1)^{n_1}} + \\ &+ \frac{R_{2,1}}{(s - p_2)} + \dots + \frac{R_{2,n_2}}{(s - p_2)^{n_2}} + \\ &\frac{R_{m,1}}{(s - p_m)} + \dots + \frac{R_{m,n_m}}{(s - p_m)^{n_m}} \\ h(t) &= R_{1,1}e^{p_1 t} + R_{1,2}te^{p_1 t} + \dots + R_{1,n_1} \frac{t^{n_1-1}}{(n_1 - 1)!} e^{p_1 t} + \dots \end{aligned}$$

$$h(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \iff \forall i : \sigma_i < 0$$

### Definition 2.11 – Criteri di Stabilità

#### 1. Stabilità asintotica:

Un sistema LTI è asintoticamente stabile  $\iff$  tutti gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  hanno parte reale strettamente negativa:  $\forall i : \Re\{\lambda_i\} < 0$ .

#### 2. Stabilità interna (semplice):

Un sistema LTI è internamente stabile  $\iff$  tutti gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  hanno parte reale minore o uguale a zero e quelli con parte reale nulla compaiono tra le radici del polinomio minimo  $q_a$  con molteplicità 1.

#### 3. Instabilità interna:

Un sistema LTI è internamente instabile  $\implies$  non soddisfa le condizioni del risultato 2.

## 2.6 Stabilità BIBO

### Definition 2.12 – Stabilità BIBO

(O stabilità interna) è legata alla risposta forzata. Un sistema è BIBO se la risposta forzata dell'uscita rimane limitata a fronte di segnali in ingresso limitati.

$$\forall u_M \in (0, \infty), \quad \exists y_M \in (0, \infty) :$$

$$|u(t)| \leq u_M, \forall t \geq 0 \implies |y(t)| \leq y_M, \forall t \geq 0$$

Per capire sotto quali condizioni rimane limitata:

$$Y_{zs}(s) = H(s)U(s)$$

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}\{H \cdot U\} \text{ rimane limitata } \forall u, |u(t)| \leq M < \infty \quad M \in \mathbb{R}$$

$$Y(s) = \frac{N_H(s)N_U(s)}{D_H(s)D_U(s)} = \frac{N_Y(s)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i^H) \prod_{i=1}^a (s - p_i^U)}$$

Le radici di  $D_Y(s)$  si chiamano poli del sistema. Le radici di  $N_Y(s)$  si chiamano zeri del sistema.

1. Ipotesi che  $p_1^H, \dots, p_N^H, p_1^U, \dots, p_a^U$  sono tutti distinti.

$$\implies Y(s) = \frac{R_1^H}{s - p_1^H} + \dots +$$

$$\implies y_{zs} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_1^H}{s - p_1^H} \right\} + \dots +$$

$|y_{zs}(t)|$  sia limitato  $\forall t, \forall u(t)$  limitato. Siccome per definizione  $u(t)$  è limitato  $\implies \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_1^U}{s - p_1^U} \right\} + \dots + \left\{ \frac{R_N^U}{s - p_N^U} \right\}$  sono limitati.

$$\implies |y(t)| \text{ è limitata } \iff p_1^H, \dots, p_N^H \text{ sono tutti a parte reale } \leq 0.$$

2. Assumiamo che  $H$  e  $U$  non abbiano poli in comune.

$$Y_{zs}(s) = \frac{R_1^H}{(s - p_1^H)} + \dots + \frac{R_N^H}{(s - p_N^H)} + \frac{R_1^U}{(s - p_1^U)} + \dots + \frac{R_a^U}{(s - p_a^U)}$$

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_1^H}{(s - p_1^H)} + \dots + \frac{R_N^H}{(s - p_N^H)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_1^U}{(s - p_1^U)} + \dots + \frac{R_a^U}{(s - p_a^U)} \right\}$$

Sotto quali ipotesi è limitata questa condizione ( $u$  è limitata per ipotesi)?  $\implies |y_{zs}|$  è limitata se solo se  $p_1^H, \dots, p_N^H$  sono tutti a parte reale  $\leq 0$  e i poli a parte reale nulla hanno molteplicità pari a 1.

3. Nessuna assunzione sui poli di  $H$  e  $U \implies$  sto ammettendo la possibilità che  $D_H$  e  $D_U$  abbiano radici in comune.

Siccome  $|u(t)| \leq M < \infty \implies p_1^U(s), \dots, p_N^U(s)$  sono tutti a parte reale negativa o nulla.

Le radici di  $D_H$  eventualmente in comune con  $D_U$  saranno a parte reale  $\leq 0$ .

- Ci sono radici in comune a parte reale  $< 0$ :  
 $\implies D_Y$  avrà radici reali multiple a parte reale  $< 0 \implies$  modi asintoticamente convergenti a 0.
- Ci sono radici in comune con parte reale nulla.  
 $\implies D_Y$  avrà radici con parte reale nulla e con molteplicità  $> 1 \implies$  **modi divergenti.**

4. BIBO stabilità:

Un sistema LTI è BIBO stabile  $\iff$  i poli della sua funzione di trasferimento  $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  sono tutti a parte reale  $< 0$ .

## 2.7 Relazione tra Stabilità Interna e BIBO

$$x_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1}x(0) \} : y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\det(sI - A)} [\dots] x(0) \right\} : \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ C \frac{1}{\det(sI - A)} [\dots] B + D \right] U(s) \right\}$$

Confrontando  $X_{zi}$  e  $Y_{zs}$  si può dedurre che i poli di  $H$  sono un sottoinsieme (al più completo) degli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ .

Risultato 5: Se un sistema LTI  $S$  è stabile è asintoticamente stabile  $\implies S$  è BIBO stabile.

Risultato 6: Se  $S$  è BIBO instabile  $\implies S$  non è asintoticamente stabile.

—

Per calcolare il polinomio minimo si deve trovare il mcm di tutti i den della matrice  $\mathbf{A}$ .

Posso trovare la variabile  $\tau$  che corrisponde all'intersezione dell'asse con la retta tangente in 0 dell'esponenziale.

$$f(t) = e^{-\alpha t}$$

$$\implies \tau = \frac{1}{\alpha}$$

Per definire i tempi delle risposte forzate (vista la presenza degli esponenziali) si usa un metodologia:

```
time = [0:tau/10:10*tau];
```

Il motivo è che dopo 5-volte  $\tau$  l'esponenziale raggiunge il 99% del suo valore finale, diventando trascurabile.



### 3 Analisi in Regime Stazionario

Si consideri un sistema asintoticamente stabile e BIBO stabile, allora la sua funzione di trasferimento ha  $n_h$  distinti poli  $p_i$  con molteplicità  $\mu_i$ , con  $\Re[p_i] < 0, \forall i$ .

Possiamo studiare la risposta forzata con un'entrata  $u(t)$  con trasformata di Laplace:

$$U(s) = \frac{N_U(s)}{\prod_{j=1}^{n_u} (s - q_j)^{m_j}}$$

Si ha un'uscita:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{N_H(s)}{\prod_{i=1}^{n_h} (s - p_i)^{\mu_i}} \cdot \frac{N_U(s)}{\prod_{j=1}^{n_u} (s - q_j)^{m_j}}$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{R_{i,k}}{(s - p_i)^k} + \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{Q_{j,k}}{(s - q_j)^k}$$

Si ottengono dunque due termini:

- La **Risposta transitoria** ( $y_{tr}(t)$ ): che tende a zero per  $t$  che tende all'infinito, questo è dato dal fatto che il sistema è BIBO stabile  $\implies \Re[p_j] < 0, \forall j$ .
- La **Risposta in regime stazionario** ( $y_{ss}(t)$ ): che dipende solo dal segnale in entrata al sistema.

Si ottiene allora che:

$$y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} y_{ss}(t)$$

Posso definire queste risposte  $\iff$  il sistema è BIBO stabile o se le condizioni iniziali non sono nulle il sistema deve essere asintoticamente stabile.

Per trovare il valore della risposta forzata si può usare il teorema del valore finale (2.1). Il valore di  $H(0)$  viene detto **guadagno in continua** (DC Gain). Su matlab si può usare il comando `dcgain()`; per trovare il guadagno di una funzione di trasferimento.

#### Definition 3.1 – Guadagno Stazionario Generalizzato

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^r H(s) = K$$

### 3.1 Proprietà dello Stato Stazionario

La risposta stazionaria al gradino  $\bar{u}\varepsilon(t)$  è data da:

**Theorem 3.1 – Risposta al Gradino**

$$u(t) = \bar{u}\varepsilon(t)$$
$$y_{ss}(t) = \bar{u} \cdot H(0)$$

Se un segnale in entrata ad un sistema BIBO stabile è sinusoidale, allora, anche la risposta stazionaria è sinusoidale.

**Theorem 3.2 – Risposta alla Sinusoide**

$$u(t) = \bar{u} \sin(\varphi t)$$
$$y_{ss}(t) = \bar{u} |H(\varphi)| \sin(\varphi t + \angle H(\varphi))$$

## 4 Sistemi Non-Lineari

Un sistema dinamico non-lineare che ha uno stato costante  $\bar{\mathbf{x}}$  è una **soluzione di equilibrio** se, nella presenza di un input costante  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$  e delle condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$ , risulta:

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}, \forall t \geq 0$$

Allora:

- $\bar{\mathbf{u}}$ : ingresso di equilibrio;
- $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ : punto di equilibrio;
- $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ : uscita di equilibrio;

Un punto di equilibrio soddisfa la condizione di equilibrio:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$$

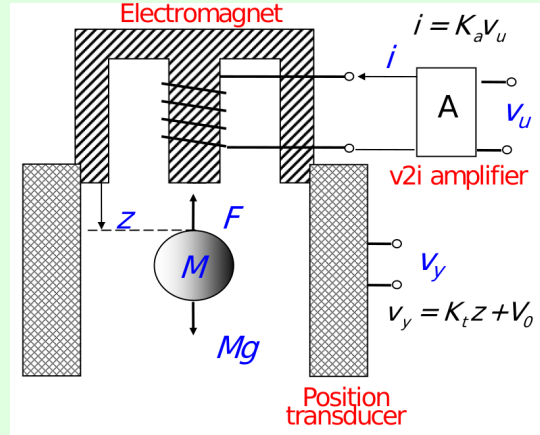
**Example 4.1 – Levitazione Magnetica**

Figure 8: Levitazione Magnetica

$$M\ddot{z} = Mg - F$$

$$F = \frac{B_m i^2}{z^2}$$

Rappresentazione stato-uscita:

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$u = v_u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g \end{cases}$$

**4.1 Linearizzazione di Sistemi Non-Lineari**

I sistemi nel mondo reale sono, in generale, non-lineari. Per studiarli si può approssimare il comportamento in un intorno di una soluzione (come soluzione di equilibrio) attraverso dei sistemi modelli lineari detti **modelli linearizzati**.

Per approssimare il modello si usa uno sviluppo in serie di Taylor troncato al primo membro, in questo modo il sistema risultante sarà lineare.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + \delta x) \\ &= f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \cdot \delta\mathbf{x}$$

Dove:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla^T f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla^T f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

#### Definition 4.1 – Matrice Jacobiana

Sia:  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Applicando piccole variazioni ai valori delle entrate e degli stati del sistema dello spazio degli stati, dove  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{Q}$  è un punto di equilibrio del sistema, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Risolvere un problema di Cauchy non-lineare non è facile, allora si linearizza il sistema, come primo passo si esprime la variazione della derivata dello stato come:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Si supponga che  $\mathbf{f}$  abbia espansione di Taylor in un intorno di  $\mathbf{Q}$ , allora la sua espressione diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{Q}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \\ &= \boxed{\mathbf{J}_x \mathbf{f}(\mathbf{Q}) \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{J}_u \mathbf{f}(\mathbf{Q}) \cdot \delta\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Dove  $\mathbf{f}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$ , essendo  $\mathbf{Q}$  un punto di equilibrio del sistema. Vale allora la seguente eguaglianza:

$$\boxed{\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_x \mathbf{f}(\mathbf{Q}) \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{J}_u \mathbf{f}(\mathbf{Q}) \cdot \delta\mathbf{u}}$$

Si può effettuare un ragionamento simile per la variazione dell'uscita:

$$\boxed{\delta\mathbf{y} = \mathbf{J}_x \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{J}_u \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \cdot \delta\mathbf{u}}$$

**Definition 4.2 – Matrici Delle Variazioni**

- $A = J_x f(Q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $B = J_u f(Q) \in \mathbb{R}^{n \times p}$
- $C = J_x g(Q) \in \mathbb{R}^{q \times n}$
- $D = J_u g(Q) \in \mathbb{R}^{q \times p}$

Si ottiene un sistema lineare della forma:

**Definition 4.3 – Sistema Linearizzato**

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \delta \mathbf{u} \end{cases}$$

**4.2 Stabilità di Equilibrio**

Intuitivamente parlando, un punto di equilibrio si dice **stabile** se tutte le soluzioni in un intorno di  $\bar{\mathbf{x}}$  rimangono nello stesso intorno  $\forall t$ .

Un punto di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  è detto **asintoticamente stabile** se è stabile e, tutte le soluzioni in un intorno di  $\bar{\mathbf{x}}$  tendono a  $\bar{\mathbf{x}}$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Se la soluzione in un intorno dell'equilibrio diverge al di fuori dell'intorno il punto è **instabile**.

Un pendolo ha un punto di equilibrio stabile quando è appeso verso il basso mentre, ha un punto di equilibrio instabile quando è punta verso l'alto. Se il pendolo è smorzato il punto di equilibrio stabile diventa un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Per studiare una soluzione in equilibrio  $Q$  di un sistema dinamico si introduce una variazione della soluzione  $\mathbf{x}_p(t)$ , ottenuta in presenza di:

- Lo stesso ingresso di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$ ;
- Un opportuno stato iniziale  $\mathbf{x}_0$  in un intorno di  $\bar{\mathbf{x}}$ ;

**Definition 4.4 – Stabilità Dell'Equilibrio**

Lo stato  $\bar{\mathbf{x}}$  è stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$$

$$\forall \mathbf{x}_0 : \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta, \implies \|\mathbf{x}_p(t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon, \forall t$$

**Definition 4.5 – Stabilità Asintotica Dell'Equilibrio**

Lo stato  $\bar{\mathbf{x}}$  è asintoticamente stabile se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_p(t) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0$$

Nel caso dei sistemi lineari:

- **stabilità interna**  $\iff$  **stabilità** di ogni punto di equilibrio;
- **stabilità asintotica**  $\iff$  **stabilità asintotica** di ogni punto di equilibrio;
- **instabile**  $\iff$  **instabilità** di ogni punto di equilibrio;

Per i sistemi LTI, la stabilità interna è una proprietà globale che si applica ad ogni soluzione.

**4.3 Stabilità di un Sisetema Linearizzato**

Per i sistemi non-lineari, la stabilità è un concetto locale, legato all'intorno di una soluzione.

Dato un punto stabile  $\mathbf{Q}$  di un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , dove  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} \in C^1$ , dove  $D$  è un intorno di  $\bar{\mathbf{x}}$ . Data:

$$\mathbf{A} = J_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{Q})$$

Allora, dati  $\lambda_i(\mathbf{A})$  gli autovalori di  $\mathbf{A}$ :

- $\forall i : \Re[\lambda_i(\mathbf{A})] < 0 \implies$  asintoticamente stabile
- $\exists i : \Re[\lambda_i(\mathbf{A})] > 0 \implies$  instabile
- $\forall i : \Re[\lambda_i(\mathbf{A})] \leq 0 \implies$  non si possono trarre delle conclusioni

## 5 Risposta in Frequenza

Data una funzione di trasferimento di un sistema lineare, si ottiene la **Risposta in Frequenza** sostituendo la variabile  $s \in \mathbb{C}$  con la variabile  $j\omega, \omega \in \mathbb{R}$ .

### 5.1 Diagrammi di Bode

Per rappresentare la risposta in frequenza si usano i diagrammi di **Bode**. Si usa rappresentazione del tipo:

$$H(s) = K \frac{\prod_{m=1} (1 - \frac{s}{z_m})}{s^r \cdot \prod_{n=1} (1 - \frac{s}{p_n})}$$

Data la *f.d.t.*, si passa alla risposta in frequenza utilizzando  $s = j\omega \implies H(j\omega)$ :

- $K$ : (**guadagno in continua**) dB contributo costante; non dà contributo alla fase, se  $K$  è negativo il contributo alla fase è di  $-\pi = -180^\circ$ ;
- $\frac{1}{s}$ : (**polo nell'origine**) dB contributo di  $-20dB/dec$ ; fase contributo di  $-\frac{\pi}{2}$ ;
- $s$ : (**zero nell'origine**) dB contributo di  $20dB/dec$ ; fase contributo di  $\frac{\pi}{2}$ ;
- $\frac{1}{1 - \frac{s}{p}}$ : (**polo reale**) dB contributo di  $-20dB/dec$  in  $p$ ; se il polo è negativo la fase ha un contributo di  $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ , altrimenti (polo positivo) sale di  $\frac{\pi}{2}$ ;
- $(1 - \frac{s}{z})$ : (**zero reale**) dB contributo di  $20dB/dec$  in  $z$ ; se lo zero è negativo la fase un contributo di  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ , altrimenti di  $-90^\circ$ ;
- $\frac{1}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$ : (**poli complessi coniugati**)

$\zeta$  viene detto smorzamento, ed è compreso tra  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Compare un **picco di risonanza**, che diventa più alto per  $\zeta$  che tende a 0. Nella frequenza  $\omega_n$  c'è un contributo sul modulo di  $-40dB/dec$ . Se i poli sono complessi coniugati negativi, la fase ha un contributo di  $-180^\circ$ , inoltre per  $\zeta$  che tende a 0 la fase ha pendenza maggiore fino a diventare una retta verticale per  $\zeta = 0$ , se sono coniugati positivi si ha un contributo di  $180^\circ$ .

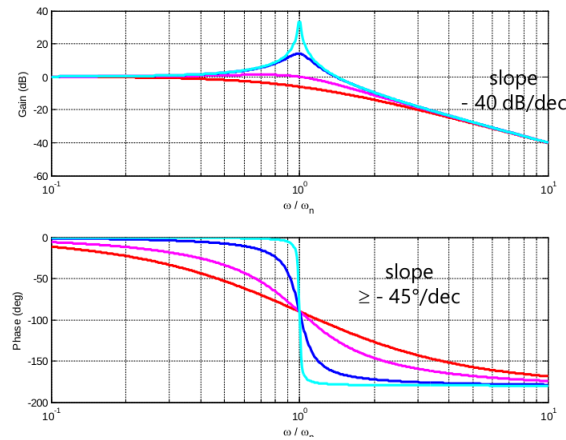


Figure 9: Effetto Smorzamento

Nell'intorno di  $\omega_n$  si trova questo picco, il cui valore massimo può essere espresso dalla formula:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

alla frequenza:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$

- $1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ : (zeri complessi coniugati)

Per gli zeri coniugati si ha un contributo di  $40dB/dec$  sul modulo; per zeri negativi si ha un contributo di  $180^\circ$  sulla fase, mentre per zeri positivi si ha un contributo di  $-180^\circ$ .

## 5.2 Diagrammi Polari

Si può usare una rappresentazione polare, usando la parte immaginaria contro la parte immaginaria su un grafico  $(\Re[H(j\omega)], \Im[H(j\omega)])$ , variando la frequenza si ottiene una curva sul grafico.

## 5.3 Diagrammi di Nichols

Il diagramma di Nichols è una rappresentazione della funzione di trasferimento plot-tata su un grafico con modulo della  $H$  contro la fase della  $H$ ,  $(\angle H(s), |H(s)|)$ .

Per creare un diagramma di nichols su matlab si usa:

```
1 omega = logspace(x1, x2, N);
2 nichols(H, omega);
```



## 5.4 Diagramma di Nyquist

### Definition 5.1 – Contorno di Nyquist

È una curva  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita come:

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \Gamma_1(\omega) + \Gamma_2(\omega) + \Gamma_3(\omega)$$

$$\Gamma_1(\omega) = jR \cdot \omega, \quad \omega \in [0, 1]$$

$$\Gamma_2(\omega) = Re^{j\omega}, \quad \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Gamma_3(\omega) = jR \cdot (\omega - 1), \quad \omega \in [0, 1]$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{\Gamma} = \Gamma$$

### Definition 5.2 – Diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist  $\Gamma_N$  è definito come l'immagine sul piano complesso  $(\Re[H], \Im[H])$ , della funzione  $H(s)$  calcolata sul contorno di Nyquist.

$$\Gamma_N = (H \circ \Gamma)$$

Nel caso in cui  $H(s)$  ha poli a parte reale nulla, il diagramma di Nyquist va modificato, il motivo è che la funzione di trasferimento non può essere calcolata. Per ovviare a questo problema si possono inserire dei semicerchi di raggio infinitesimo in senso anti-orario, questo corrisponde sul diagramma di Nyquist ad un semicerchio di raggio infinito e senso orario.

## 6 Proprietà Strutturali

L'analisi delle Raggiungibilità misura quanto l'ingresso riesce a modificare le variabili di stato.

### Definition 6.1 – Raggiungibilità

Uno stato  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ : **spazio di stato**) si dice **raggiungibile** (dallo stato  $\mathbf{x}_0$  al tempo  $t^*$ ), se:

- $\exists$  un istante di tempo  $t^* \in [t_0, \infty)$ ;
- $\exists$  una funzione di ingresso  $\mathbf{u}^*(t)$  definita in  $t \in [t_0, t^*]$ ;

tali che, il movimento della stato generato da  $\mathbf{u}^*$  a partire dalla stato  $\mathbf{x}_0$ , risulti:

$$\boxed{\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*}$$

Nello spazio di stato posso definire tutti i punti che sono raggiungibili.

**Definition 6.2 – Insieme di Raggiungibilità**

L'insieme di tutti i punti raggiungibili in  $t^*$  è l'insieme:

$$X_R(t^*)$$

Cambiando l'intervallo di tempo l'insieme di raggiungibilità, in generale, cambia. Si può trovare l'insieme di raggiungibilità massimo.

**Definition 6.3 – Sottospazio di Raggiungibilità**

$$X_R = \max_{t \in [t, \infty)} X_R(t^*)$$

**Definition 6.4 – Sistema Completamente Raggiungibile**

Se il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio di stato è detto **completamente raggiungibile**.

$$X = X_R$$

**Definition 6.5 – Sottospazio di Non-Raggiungibilità**

$$X_{NR} = X_R^\perp$$

**Definition 6.6 – Stato Controllabile**

Partendo da stati iniziali nulli, si può raggiungere lo stato:

$$\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}_0$$

Per la Controllabilità valgono delle definizioni analoghe alla Raggiungibilità.

**Per i sistemi LTI Tempo Continuo Controllabilità e Raggiungibilità coincidono:**

$$X_R = X_C$$

Un sistema con variabili di stato di dimensione  $n$ :

- Al sottospazio di raggiungibilità sono associati  $r$  autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ ;
- Al sottospazio di non-raggiungibilità sono associati  $n-r$  autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ ;
- $\dim(X_R) = r < n$ ;
- $\dim(X_{NR}) = n - r$ ;

Se  $r = n$  il sistema è completamente raggiungibile.

## 6.1 Raggiungibilità nei Sistemi LTI TD

Prendiamo ora in esempio un sistema LTI a tempo discreto.

### Definition 6.7 – Sistema LTI TD

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), \forall k \in \mathbb{N}$$

Troviamo il sottoinsieme di raggiungibilità  $X_R(l)$  al tempo  $l$ . Per semplicità usiamo un sistema con un solo ingresso  $u$  e con condizioni iniziali nulle.

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) = Bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1) \\ x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\ &\vdots \\ x(l) &= A^{l-1}Bu(0) + \dots + ABu(l-2) + Bu(l-1) \end{aligned}$$

Si può usare una notazione matriciale per rappresentare  $\mathbf{x}(l)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(l) &= \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{l-1}B \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_R(l)} \underbrace{\begin{bmatrix} u(l-1) \\ u(l-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}(l)} \\ &= \mathbf{M}_R(l) \mathbf{U}(l) \end{aligned}$$

La matrice  $\mathbf{M}_R(l) \in \mathbb{R}^{n \times l}$  fornisce un legame diretto tra la sequenza di entrata e lo stato  $x(l)$ . L'insieme di raggiungibilità  $X_R(l)$  è dato dallo **spazio immagine** della matrice  $\mathbf{M}_R(l)$ :

$$X_R(l) = \mathcal{R}(\mathbf{M}_R(l))$$

Per determinare il sottospazio di raggiungibilità bisogna trovare l'insieme di raggiungibilità massimo:

$$X_R = \max_{t \in \mathbb{R}^+} X_R(t)$$

La dimensione dell'insieme di raggiungibilità corrisponde al rango della matrice  $\mathbf{M}_R$ , che viene definita come **matrice di raggiungibilità**.

### Definition 6.8 – Matrice di Raggiungibilità

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Il rango può aumentare al massimo di uno per ogni colonna che viene aggiunta alla matrice, fino al raggiungere il massimo possibile che è  $n$ , dunque la dimensione dello spazio di raggiungibilità è dato da:

$$X_R = \rho(M_R) = r$$

Se  $\rho(M_R) = n$  allora il sistema è completamente raggiungibile.

Questo risultato ottenuto per i sistemi a tempo discreto è generalizzabile anche ai sistemi a tempo continuo con un numero di ingressi maggiore di 1, dove:

$$M_R = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-b}B], \quad b = \rho(B)$$

## 6.2 Matlab

La matrice di raggiungibilità può essere calcolata come:

```
1 M_R = ctrb(A, B);
2 r = rank(M_R);
```

## 7 Feedback

§ **Schema di Controllo in Feedback** Si usa uno schema di retroazione statica della stato, che si basa sul comportamento di un sistema LTI:

- Il comportamento dinamico dipende dai valori della matrice  $\mathbf{A}$ ;
- La possibilità di modificare il suo comportamento dipende dalla raggiungibilità, che dipende dalle matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ;

Agendo in retroazione si vuole:

- rendere asintoticamente stabile un sistema instabile;
- migliorare le proprietà di movimento di un sistema stabile come: smorzamento, rapidità di convergenza;
- portare lo stato del sistema in uno stato di equilibrio;

### 7.1 Legge di Controllo

Per modificare il comportamento dinamico del sistema l'ingresso  $u$ , deve poter agire sugli stati  $x$ , questo può avvenire se  $x$  dipende dallo stato in tale relazione:

**Definition 7.1 – Legge Di Controllo Per Retroazione Statica Dello Stato**

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \alpha r(t)$$

Dove:

- $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ;
- $u(t) \in \mathbb{R}$ ;
- $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ : matrice dei guadagni;
- $r(t) \in \mathbb{R}$ : ingresso esterno;
- $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

Si può considerare lo schema:

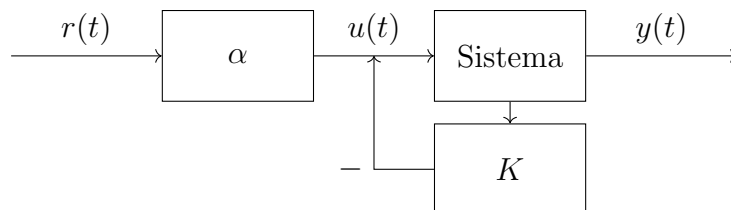


Figure 10: Schema in Retroazione

Dove:

- $\alpha r(t)$ : azione diretta (serve ad imporre un dato movimento o un equilibrio);
- $Kx(t)$ : retroazione dello stato;

Sostituendo nell'espressione la legge di controllo si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}[-\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \alpha r(t)] = \\ &= \boxed{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\alpha r(t)}\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene un'uscita:

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} - \mathbf{DK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\alpha r(t)$$

Modificando la matrice  $\mathbf{K}$ , che è può essere scelta in modo arbitrario, si possono modificare gli autovalori della nuova matrice  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ , e dunque cambiare il comportamento del sistema. Assegnare dei valori prestabiliti agli autovalori viene detto **assegnazione degli autovalori mediante retroazione statica dello stato**.

#### Theorem 7.1 – Teorema Di Assegnazione Degli Autovalori

Il problema di assegnazione degli autovalori mediante retroazione statica dello stato ammette soluzione se e soltanto se la coppia di matrici  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  soddisfa la condizione di completa raggiungibilità.

$$\rho(M_R) = n$$

Si può ottenere la funzione di trasferimento del sistema:

$$H_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \left\{ (\mathbf{C} - \mathbf{DK})[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right\} \alpha$$

Per determinare gli elementi della matrice  $\mathbf{K}$  occorre procedere come segue:

1. Verificare la completa raggiungibilità del sistema (in caso contrario non è possibile calcolare  $\mathbf{K}$ );
2. Dato l'insieme degli autovalori da assegnare  $\{\lambda_{1,des}, \dots, \lambda_{n,des}\}$ , si calcola il polinomio caratteristico desiderato  $p_{des}(\lambda)$ ;
3. Si calcola in funzione degli elementi di  $\mathbf{K}$  il polinomio caratteristico della matrice  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ :  $p_{A-BK}(\lambda)$ ;
4. Si trovano i valori incongruiti confrontando i valori di  $p_{des}(\lambda)$  e  $p_{A-BK}(\lambda)$  attraverso il **principio di identità dei polinomi**;

$$\boxed{p_{des}(\lambda) = p_{A-BK}(\lambda)}$$

**Theorem 7.2 – Principio di Identità dei Polinomi**

Un polinomio  $P$  è uguale ad un polinomio  $P'$  se e solo se tutti i coefficienti sono uguali.

$$P = P' \implies a_0 + \dots + a_n x^n = a'_0 + \dots + a'_n x^n$$

$$\iff$$

$$(a_0 \quad \dots \quad a_n) = (a'_0 \quad \dots \quad a'_n)$$

**Example 7.1 – Calcola dei Valori della Matrice K**

Dato il sistema LTI:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

Assegnare gli autovalori  $\lambda_{1,des} = -2$  e  $\lambda_{2,des} = -3$ .

$$M_R = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho(M_R) = 2 \implies$  il sistema è completamente raggiungibile.

$$p_{des}(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

Troviamo i valori di K:

$$K = [k_1 \quad k_2]$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 1 + k_1 & 3 + k_2 \\ 4 - 2k_1 & 2 - 2k_2 \end{bmatrix}$$

$$p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^2 + (-3 - k_1 + 2k_2)\lambda + 8k_1 - 6k_2 - 10$$

Eguagliamo i polinomi

$$\begin{cases} -3 - k_1 + 2k_2 = 5 \\ 8k_1 - 6k_2 - 10 = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = 8 \\ k_2 = 8 \end{cases}$$

$$K = [8 \quad 8]$$

**7.2 Osservabilità**

La proprietà di osservabilità di un sistema è la capacità di poter stimare lo **stato** a partire dalla misura dell'**uscita**.

### 7.3 Osservatore dello Stato

Supponiamo che non sia possibile misurare la variabili di stato, quindi non è possibile utilizzare la retroazione. Possiamo pensare di costruire un osservatore, supponendo di conoscere la composizione del sistema, e che l'uscita dipenda solo dalle variabili di stato.

Per conoscere  $x(t)$ , in generale:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} x(0) \} + \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} B U(s) \}$$

In generale non è possibile conoscere le condizione iniziali  $x(0) = x_0$ . Proviamo a costruire un approssimazione del sistema  $S$ , chiamato  $\hat{S}$ . Dove:

$$\hat{S} = \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{u} \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Scriviamo l'errore di approssimazione come:

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

$$e(0) = \hat{x}(0) - x(0) = \hat{x}(0) - x_0$$

La variazione dell'errore è data da:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = \\ &= A\hat{x} + Bu - Ax - Bu = \\ &= A(\hat{x} - x) = \\ &= Ae(t) \end{aligned}$$

Dunque:

$$\boxed{\dot{e}(t) = Ae(t)}$$

Che può essere ricavato come:

$$\begin{aligned} e(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} e(0) \} = \\ &= R_1 e^{\lambda_1 t} + R_2 \dots \end{aligned}$$

Non può essere usato quando il sistema non è asintoticamente stabile o quando il sistema è semplicemente stabile. Il motivo è che la stima deve convergere a 0 (gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  devono essere tutti a parte reale strettamente minore di 0). Questo metodo può essere utilizzato solo nel caso in cui il sistema è asintoticamente stabile.

Si deve trovare un modo per modificare gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ , si sfrutta la conoscenza dell'uscita del sistema ( $y(t)$ ), per costruire uno stimatore migliorato. Utilizziamo un termine che sfrutti la conoscenza dell'uscita.

$$-L(\hat{y}(t) - y(t))$$



- $-L$  = **matrice dei guadagni**;

Modifichiamo il sistema di stima  $\hat{S}$ , nel seguente modo (e lo rinominiamo **osservatore  $\mathcal{O}$** ):

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(\hat{y} - y)$$

Ricalcoliamo la stima  $e$ :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} = \\ &= A\hat{x} + Bu - L(\hat{y} - y) - Ax - Bu = \\ &= A(\hat{x} - x) - L[C\hat{x} + Du - Cx - Du] = \\ &= (A - LC)(\hat{x} - x) = \\ &= (A - LC)e(t) \end{aligned}$$

Pertanto la condizione  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$  sarà soddisfatta solo se  $(A - LC)$  ha autovalori asintoticamente stabili. Analogamente alla matrice  $(A - BK)$  la matrice  $(A - LC)$  (dove in questo caso  $L$  è modificabile), ci permette di modificare gli autovalori che interessano del sistema, rendendolo asintoticamente stabile. Il problema della scelta degli autovalori è un problema di raggiungibilità. In conclusione:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}(A - LC) \end{cases} \\ e(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ [sI - (A - LC)]^{-1} \cdot e(0) \} \end{aligned}$$

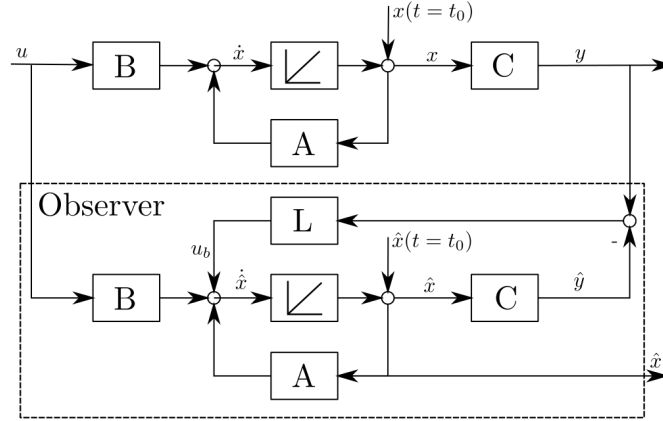


Figure 11: Luenberger Observer

Questo metodo ci permette di approssimare la misura delle variabili di stato (che non possono essere misurate).

Quando i guadagni  $L$  sono scelti arbitrariamente, l'osservatore viene detto **osservatore di Luenberger**, mentre quando i guadagni sono scelti attraverso dei criteri precisi, l'osservatore viene detto **filtro di Kalman**.

## 7.4 Regolatore Dinamico

Usando un osservatore dello stato è possibile misurare una stima dello stato. Si può usare questa conoscenza per utilizzare una legge di controllo in retroazione statica dello stato.

Si ottiene la seguente legge di controllo:

### Definition 7.2 – Regolatore Dinamico

$$u(t) = -\mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}(t) + \alpha r(t)$$

Lo schema utilizzato è il seguente, dove lo stimatore asintotico è composto dal sistema **osservatore** ( $\mathcal{O}$ ).

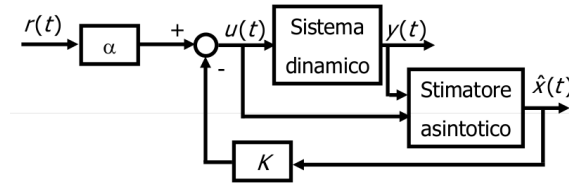


Figure 12: Regolatore Dinamico

L'impianto è descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases}$$

Mentre lo stimatore è descritto da:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u - \mathbf{L}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}u \end{cases}$$

Mettendo tutto insieme, con la legge di controllo  $u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \alpha r$ , il nuovo sistema è composto da  $2n$  variabili di stato, dove  $n$  sono le variabili dell'impianto, ed  $n$  provengono dalle  $\hat{\mathbf{x}}$ . Il nuovo sistema regolato è descritto come:

$$\mathbf{x}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{tot} = \mathbf{A}_{reg}\mathbf{x}_{tot} + \mathbf{B}_{reg}r \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_{reg}\mathbf{x}_{tot} + \mathbf{D}_{reg}r \end{cases}$$

Dove:

$$\mathbf{A}_{reg} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{L}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{reg} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \alpha$$

$$\mathbf{C}_{reg} = [\mathbf{C} \quad -\mathbf{D}\mathbf{K}] \quad \mathbf{D}_{reg} = [\mathbf{D}] \alpha$$

Scegliendo diverse combinazioni delle variabili di stato è possibile ottenere una descrizione da cui sia più facile ricavare delle informazioni, una scelta è ad esempio:

$$\mathbf{x}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{tot} = \mathbf{A}_{reg} \mathbf{x}_{tot} + \mathbf{B}_{reg} \mathbf{r} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_{reg} \mathbf{x}_{tot} + \mathbf{D}_{reg} \mathbf{r} \end{cases}$$

Dove:

$$\mathbf{A}_{reg} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0_{n \times n} & A - LC \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{reg} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} \alpha$$

$$\mathbf{C}_{reg} = [C - DK \quad -DK] \quad \mathbf{D}_{reg} = [D] \alpha$$

Si può notare che la matrice  $\mathbf{A}_{reg}$  risulta triangolare a blocchi, per cui i suoi  $2n$  autovalori sono dati da:

$$\lambda(\mathbf{A}_{reg}) = \{\lambda(A - BK) \cup \lambda(A - LC)\}$$

Questo è possibile grazie al teorema di separazione (7.3).

#### Theorem 7.3 – Teorema Di Separazione

...

## 7.5 Proprietà del Regolatore Dinamico

La proprietà della separazione permette di progettare il sistema in retroazione con la scelta delle matrici  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{L}$  indipendentemente una dall'altra.

Si può dimostrare che la matrice di trasferimento  $\mathbf{H}_{ry}(s)$  coincide con:

$$\mathbf{H}_{ry}(s) = \left\{ (C - DK)[sI - (A - BK)]^{-1} B + D \right\} \alpha$$

Questo dimostra che le dinamiche associate alla stima dello stato non influenzano il comportamento dell'ingresso. I poli della funzione di trasferimento sono gli autovalori del sistema, sia della parte **controllabile** e sia della parte **osservabile**.

## 8 Sistemi di Controllo

In questa sezione il sistema di controllo di riferimento è quello nella Figure 13.

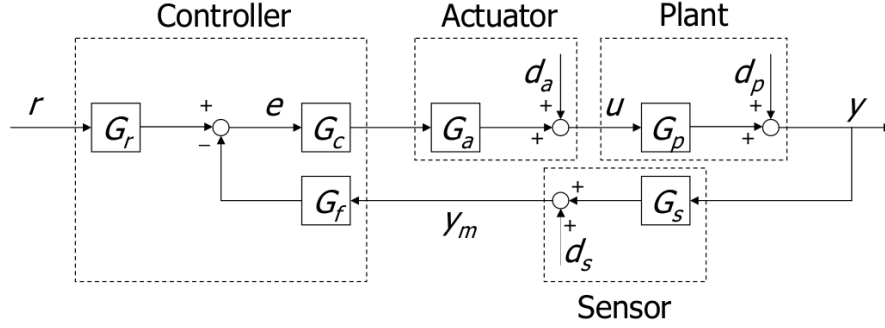


Figure 13: Feedback Control System

Gli attuatori mandano i segnali all'impianto, che vengono controllati dai controllori. Un controllore è formato da tre parti:

- **prefiltro** ( $G_r$ ): elabora il segnale di riferimento (sarà sempre 1);
- **controllore a cascata** ( $G_c$ );
- **controllore in retroazione** ( $G_f$ );

L'anello di controllo è costituito da:

- **catena diretta**: da  $G_c$  a  $G_p$ ;
- **catena di retroazione**:  $G_s$  e  $G_f$ ;

L'obiettivo principale di progettare un sistema di controllo è garantire che il sistema ottenuto sia stabile. In generale all'uscita di ogni blocco vi è sommato un rumore.

### Definition 8.1 – Stabilità Interna di un Sistema di Controllo

Il sistema di controllo in figura si dice **internamente stabile** se e solo se l'evoluzione temporale di tutti i segnali sull'anello rimane limitata quando i segnali esterni applicati ( $r, d_i$ ) sono limitati.

Da questa definizione ne consegue la **stabilità interna di un sistema di controllo LTI**:

Il sistema di controllo LTI sarà internamente stabile se e solo se tutte le funzioni trasferimento da tutti i segnali interni all'anello devono essere funzioni di trasferimento BIBO stabili: devono avere poli con parte reale  $\Re < 0$ .

Calcoliamo la *f.d.t.* tra il segnale di riferimento e l'uscita.

$$Y(s) = G_p(s)G_a(s)G_c(s)\left(R(s)G_r(s) - G_f(s)G_sY(s)\right)$$

$$Y(s)\left(1 + G_p(s)G_a(s)G_c(s)G_f(s)G_s(s)\right) = G_p(s)G_a(s)G_r(s)R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = H_{ry}(s) = \frac{G_pG_aG_cG_r}{1 + \underbrace{G_pG_aG_cG_fG_s}_{L(s)}} = \frac{G_r}{G_fG_s} \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

La  $L(s)$  viene detta **funzione ad anello** (8.2).

Adesso si considera il caso in cui tutti gli ingressi del sistema siano spenti tranne  $d_p$ , allora:

$$y = d_p + G_pG_aG_c \cdot (0 - G_fG_sy)$$

$$y \cdot (1 + G_pG_aG_cG_fG_s) = d_p$$

$$\boxed{\frac{y}{d_p} = H_{dpy}(s) = \frac{1}{1 + L}}$$

È possibile pensare che tutte le *f.d.t.* del sistema abbiano un termine  $1 + L$  al denominatore.

#### Definition 8.2 – Funzione ad Anello

La funzione ad anello viene definito come il prodotto delle *f.d.t.* di tutti i blocchi sull'anello.

$$L(s) \triangleq G_1 \dots G_n$$

#### Definition 8.3 – Funzione di Sensitività

$$S(s) \triangleq \frac{1}{1 + L(s)}$$

#### Definition 8.4 – Funzione di Sensitività Complementare

$$T(s) \triangleq 1 - S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

È possibile riformulare il problema, visto che quasi tutte la *f.d.t.* avranno lo stesso denominatore (a meno di cancellazioni), come:

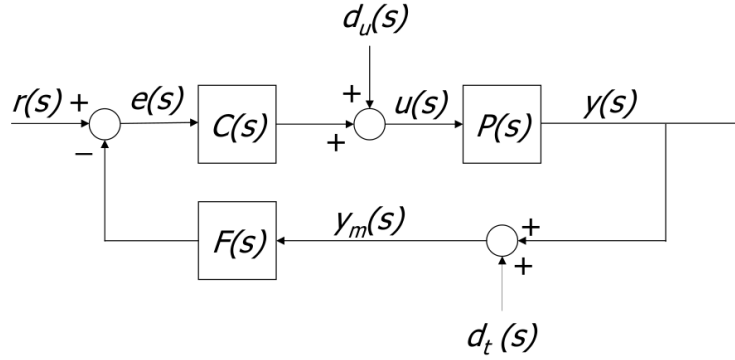


Figure 14: Reduced Control System

Le *f.d.t.* del sistema sono descritte da:

$$\begin{bmatrix} e \\ u \\ y_m \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + PCF} \begin{bmatrix} 1 & -PF & -F \\ C & 1 & -CF \\ PC & C & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ d_u \\ d_t \end{bmatrix}$$

### Theorem 8.1 – Interna Stabilità dei Sistemi in Feedback

Il sistema di controllo è internamente stabile se:

1. tutti le radici dell'equazione:  $1 + L(s) = 0$  devono avere parte reale  $< 0$ ;
2. non ci devono essere cancellazioni in  $\Re[s] \geq 0$  quando si forma il prodotto  $PCF$ : quando avvengono i prodotti dei numeratori e dei denominatori, se alcuni denominatori delle *f.d.t.* hanno dei poli a parte reale  $\Re > 0$  e questi vengono cancellati con uno zero in uno dei numeratori, il teorema non è più valido.

$$L = G_1 G_2 \dots G_n$$

$$L = \frac{N_1}{D_1} \frac{N_2}{D_2} \dots \frac{N_n}{D_n}$$

Cosideriamo un impianto instabile  $G_p = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$ , in alcuni casi è necessario realizzare un controllore che anche esso sia instabile, descritto da  $G_c = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$ . Anche se  $L(s)$  possiede dei poli a parte reale positiva, il motivo per il sistema di controllo risulta stabile **senza elidere i poli**, è dato dal fatto che si deve fare riferimento alla funzione  $1 + L(s) = 0$ , che risulterà:

$$1 + G_c(s)G_p(s) = 1 + \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \frac{N_p(s)}{D_p(s)} = 0$$

Che può essere riscritta come:

$$\frac{L}{1+L} = \frac{\overbrace{D_c D_p + N_c N_p}^{\text{poli della f.d.t.}}}{D_c D_p} = \frac{\frac{N_L}{D_L}}{\frac{D_L + N_L}{D_L}} = \frac{N_L}{D_L + N_L}$$

Dove i poli del sistema di controllo sono dati da  $D_c D_p + N_c N_p$ , e non dai poli di  $L(s)$ , ecco il motivo per cui non è necessario elidere i poli a parte reale positiva per rendere il sistema stabile, oltre a violare la seconda condizione del Teorema (8.1).

## 8.1 Contour Mapping

Il signor Nyquist usò il teorema di Cauchy, per stabilire un criterio per determinare la stabilità di un sistema di controllo.

Si definisce nel piano della variabile  $s = \sigma + j\omega$  una funzione che mappa due valori  $u$  e  $v$  sul piano complesso:  $F(s) = u + jv$ , la seguente mappatura viene applicata ad una curva chiusa  $\Gamma_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , tale che l'immagine della nuova curva è data da  $\Gamma_F = F \circ \Gamma_s$ .

### Theorem 8.2 – Cauchy's Argument Principle

Se consideriamo una curva  $\Gamma_s$  chiusa percorsa in senso orario nel piano di  $s$  allora, nel piano di  $F(s)$  si ottiene un'altra curva chiusa  $\Gamma_F = F(\Gamma_s) = \{F(s) : s \in \Gamma_s\}$ , percorsa in senso orario, che andrà a encircolare l'origine un numero  $N$  di volte dove  $N = Z - P$ , con:

- $Z$ : numero di zeri di  $F(s)$  encircolati da  $\Gamma_s$  in  $s$ ;
- $P$ : numero di poli di  $F(s)$  encircolati da  $\Gamma_s$  in  $s$ ;
- non attraversa l'origine;

### Example 8.1

Prendiamo  $F(s)$  con due poli e due zeri. Allora:

$$F(s) = |F(s)| \angle(s + z_1) + \angle(s + z_2) - \angle(s + p_1) - \angle(s + p_2)$$

$$F(s) = |F(s)| \angle(\phi_{z1} + \phi_{z2} - \phi_{p1} - \phi_{p2})$$

$$F(s) = |F(s)| \angle \phi_F$$

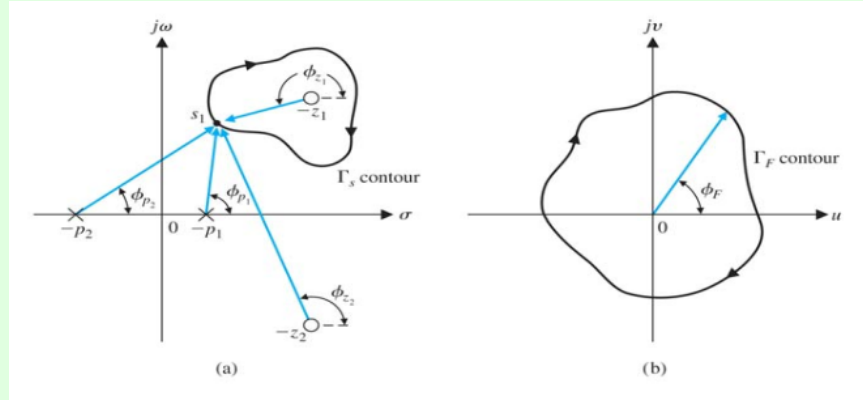


Figure 15: Encircolamento Esempio

Il contributo totale dato da  $p_1$ ,  $p_2$  e  $z_2$  all'angolo  $\phi_F$  è nullo. Dunque  $\phi_F$  deve necessariamente compiere un giro di  $360^\circ$  dato dal contributo di  $z_1$ .

Questo teorema è importante per stabilire la stabilità dei sistemi in retroazione.

Possiamo applicare il teorema di Cauchy nel modo seguente: si prende la curva di Nyquist  $\Gamma_s = \Gamma_N$  che viene mappata su:  $F(s) = 1 + L(s)$ . Dal momento che  $L(s) = F(s) - 1$  dove il numero di circolamenti passa da essere centrati nell'origine nel punto  $-1 + j0$ ; il numero di  $Z$  deve essere 0 per garantire la stabilità, il motivo è che la curva di Nyquist  $\Gamma_N$  contorna tutto il piano  $\Re \geq 0$ , dunque se  $Z$  è diverso da 0, vuol dire che  $1 + L(s)$  presenta una radice a parte reale positiva, che andrebbe a violare il teorema (8.1).

### Theorem 8.3 – Nyquist's Criterion

Data un **Contorno di Nyquist**  $\Gamma_s$ , sia  $P$  il numero di poli di  $L(s)$  encircolati da  $\Gamma_s$ , e  $Z$  il numero di zeri di  $1 + L(s)$  encircolati da  $\Gamma_s$ . Se  $Z$  è il numero di poli di un sistema chiuso in feedback sulla parte destra del piano, e  $P$  è il numero di poli di una *f.d.t.* ad anello aperto  $L(s)$  nella parte destra del piano, il contorno risultante nel  $L(s)$ -piano,  $\Gamma_{L(s)}$  deve encircolare in senso orario il punto  $(-1 + j0)$   $N$  volte, tale che  $N = Z - P$ .

Si assuma che il diagramma di Nyquist di  $L(j\omega)$  non attraversi il punto  $-1 + j0$ . Il numero  $P_{cl}$  (closed loop) di radice a parte reale positiva dell'equazione  $1 + L(s) = 0$  è dato da:

$$P_{cl} = P_{ol} + N$$

Dove:

- $P_{ol}$ : (open loop) è il numero di poli a parte reale strettamente positiva di  $L(s)$ ;



- $N$ : è il numero di encircolamenti del diagramma di Nyquist di  $L(j\omega)$  attorno al punto  $-1 + j0$ , calcolati come la differenza tra il numero di giri in senso orario ed antiorario;

Se il diagramma di Nyquist attraversa il punto  $-1 + 0j$ , allora: l'equazione  $1 + L(s) = 0$  ha una radice immaginaria.

In colusione:

$$\begin{aligned} & \# \text{Poli instabili di } L(s) = \\ & = \# \text{Poli instabili di } \frac{1}{1 + L(s)} + \# \text{Encircolamenti antiorari di } -1 \text{ da } L \circ \Gamma_N \end{aligned}$$

#### Theorem 8.4 – Stabilità BIDO dei Sistemi in Feedback

Si assuma che  $F^{-1}(s)$  sia BIBO stabile. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $N = -P_{ol}$ ;
- tutte le radici dell'equazione  $1 + L(s) = 0$  hanno parte reale negativa;
- il sistema in feedback è BIBO stabile;

Se il sistema ad anello aperto è instabile in origine, è necessario creare un sistema in feedback per stabilizzarlo.

#### Example 8.2

$$L(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

La funzione ad anello aperto non ha poli a parte reale negativa,  $P_{ol} = 0$ :

$$L(s) = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{s}{2}\right) (1 + s)}$$

Entrambi i poli sono stabili. Se ora prendiamo il diagramma di Nyquist di  $L$  vediamo che il punto  $-1$  non viene mai encircolato,  $N = 0$ :

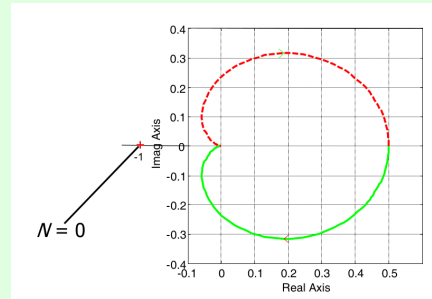


Figure 16: Diagramma Di Nyquist Esempio

In conclusione il numero di poli instabili della funzione closed loop sono:

$$P_{cl} = P_{ol} + N = 0 + 0 = 0$$

Il sistema è stabile.

## 8.2 Struttura di un Controllore

Per avere un sistema stabile si deve avere che, per tutti i disturbi e gli ingressi limitati, la risposta del sistema in ogni punto dell'anello di controllo deve essere finita. È possibile avere un sistema internamente instabile ma che abbia una *f.d.t.* stabile, quindi che sia **input-output stable**. Questo avviene quando il sistema ha dei modelli instabili nascosti. Inoltre un buon sistema retroazionato deve fornire un buon **tracking transitorio** ed un opportuno **stato stazionario**, generalmente non è possibile un buon tracciamento per un qualsiasi segnale, questo è il motivo per cui si usano solo dei segnali o delle classi di segnali specifici.

## 8.3 Stabilità Relativa

...

## 8.4 Risposta Stazionaria

Ora studiamo il comportamento del sistema di controllo quando vogliamo imporre il comportamento del segnale di riferimento alla risposta a steady-state del sistema. Per fare ciò apportiamo delle modifiche al sistema di controllo più generale in figura Figure 13, senza perdere di generalità, assumiamo che:

- $G_r = 1$ ;
- $G_a = \text{const}$ : larga banda a causa da una dinamica veloce;
- $G_f = \text{const}$ : controllare il guadagno della risposta stazionaria;

- $G_s = \text{const}$ : larga banda a causa da una dinamica veloce;

Nella struttura della *f.d.t.* di un controllore, il denominatore deve avere grado maggiore o uguale a quello del numeratore, in caso contrario il sistema prevede il futuro. La *f.d.t.* del controllare è possibile rappresentarla nella seguente forma:

#### Definition 8.5 – Controllore

$$G_c(s) = \frac{K_c}{s^\nu} \prod_i \underbrace{\left( \frac{1 + \frac{s}{z_{di}}}{1 + \frac{s}{m_{di}z_{di}}} \right)}_{\text{LEAD}} \prod_j \underbrace{\left( \frac{1 + \frac{s}{m_{ij}p_{ij}}}{1 + \frac{s}{p_{ij}}} \right)}_{\text{LAG}}$$

Il primo blocco della *f.d.t.* è detta rete **derivativa** (o **anticipatrice** o **LEAD**), dove il coefficiente  $m_{di}$  è sempre  $> 1$ , la rete LEAD è una rete con la frequenza dei poli sempre maggiore di quella degli zeri.

Il secondo blocco rappresenta una rete **integrativa** (o **attenuatrice** o **LAG**), nella quale lo zero è a frequenza più alta del polo, perchè  $m_{ij}$  è sempre  $> 1$ .

Si definiscono i guadagni:

#### Definition 8.6 – Guadagno Controllore

$$K_c = \lim_{s \rightarrow 0^+} s^\nu G_c(s)$$

#### Definition 8.7 – Guadagno Impianto

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0^+} s^p G_p(s)$$

Il progetto di un controllore deve soddisfare delle specifiche, le più importanti sono:

- La stabilizzazione di un sistema instabile;
- L'inseguimento di un segnale di riferimento;
- ...

## 8.5 Segnali Polinomiali

I segnali polinomiali sono una classe di segnali che vorremmo fossero inseguiti, della forma:

$$r(t) = R_0 \frac{t^h}{h!} \varepsilon(t) \quad \longrightarrow \quad r(s) = R_0 \frac{1}{s^{h+1}}$$

Si vogliono calcolare le **prestazioni relative** al tracking dei segnali di riferimento, si definisce l'errore di uscita:

**Definition 8.8 – Errore Relativo di Tracking**

$$e_r(t) = y_r(t) - y_d(t) = y_r(t) - K_d r(t)$$

L'obiettivo fondamentale del progetto è garantire l'inseguimento del riferimento, anche in presenza di segnali in ingresso esterni, per questo si definisce lo **steady-state tracking error**, che ci dà una misura di quanto bene l'uscita sta inseguendo il riferimento in risposta permanente.

**Definition 8.9 – Steady-State Tracking Error**

$$e_r^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$$

Si considera per primo il segnale di riferimento, successivamente si considerano i segnali di disturbo uno ad uno modificando di conseguenza il controllore, usando la sovrapposizione degli effetti.

$$e_r^\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s e_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(y_r(s) - K_d r(s))$$

**Theorem 8.5 – Specifiche per Fattore di Scala**

$$K_d = \frac{1}{G_f G_s}$$

Vediamo come è fatto  $y_r$  (solo con  $r$  acceso):

$$\begin{aligned} y_r(s) &= G_{ry}(s) \cdot r(s) \\ e_r(s) &= \frac{G}{1 + GH} r(s) - K_d r(s) \\ \frac{G}{1 + GH} &= \frac{\frac{L}{H}}{1 + L} = \frac{1}{H} T = \frac{1}{G_s G_f} T \\ y_r(s) &= T \frac{1}{G_s G_f} r(s) \end{aligned}$$

Cosa accade quando mandiamo in ingresso un segnale a gradino  $r(t) = R_0 \rightarrow r(s) = \frac{R_0}{s}$ , usiamo il teorema del valore finale per risolvere l'equazione (2.1):

$$\begin{aligned} y_r^\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s y_r(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s T(s) \frac{1}{G_s G_f} \frac{R_0}{s} = \\ &= T(0) \frac{1}{G_s G_f} R_0 \end{aligned}$$

Supponiamo che  $\nu + p > 0$ , allora  $T(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 1$ . L'uscita in regime permanente vale:

$$y_r^\infty = R_0 \frac{1}{G_s G_f} = R_0 K_d$$

Consideriamo ora l'uscita in presenza di un qualunque riferimento polinomiale.

$$H = G_s G_f = \frac{1}{K_d}$$

$$e_r(s) = \frac{G}{1 + GH} r(s) - K_d r(s)$$

$$e_r(s) = \frac{K_d^2}{K_d + G} r(s)$$

Posso scrivere la trasformata del mio errore come:

$$\begin{aligned} e_r^\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s(y_r(s) - K_d r(s)) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_d^2}{K_d + G} r(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_d^2}{K_d + G_c(s) G_p(s) G_a} \cdot \frac{R_0}{s^{h+1}} \end{aligned}$$

Analizziamo chi sono  $G_p$  e  $G_c$ .

Quando  $s$  tende a zero la parte LEAD e la parte LAG tendono a 1, dunque:  $G_p = \frac{K_c}{s^\nu}$ . Ma anche  $G_p$  ha una forma simile, dunque per  $s$  che tende a 0:  $G_p = \frac{K_p}{s^p}$ .

Dunque:

$$\begin{aligned} e_r^\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_d^2}{K_d + \frac{K_c}{s^\nu} \frac{K_p}{s^p} G_a} \frac{R_0}{s^{h+1}} \\ e_r^\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu+p} K_d^2}{s^{\nu+p} K_d + K_c K_p G_a} \frac{R_0}{s^h} \end{aligned}$$

### Theorem 8.6 – Specifiche per Riferimento Polinomiale

$$e_r^\infty = \begin{cases} 0 & \nu + p > h \\ \frac{K_d^2 R_0}{\beta K_d + K_c K_p G_a} & \nu + p = h \end{cases}$$

$\beta = 1$  (se  $\nu + p = 0$ );  $\beta = 0$  (se  $\nu + p > 0$ )

Si possono prendere due strade:

- $|e_r^\infty| = 0$ : L'errore relativo tende a 0: si deve imporre  $\nu + p > h$  (che sono decisi da noi);

- $|e_r^\infty| < \rho$ : L'errore relativo è minore di una certa costante.

Consideriamo ora gli effetti dati dai segnali di disturbo. Consideriamo la classe dei disturbi polinomiali:

$$d(t) = D_0 \frac{t^h}{h!} \xrightarrow{\mathcal{L}} D_0 \frac{D_0}{s^{h+1}}$$

I disturbi entrano direttamente nella catena, non sono decisi da noi e per questo non sono controllabili. Usando il metodo della sovrapposizione degli effetti possiamo chiudere tutti gli altri segnali di ingresso (compresi i disturbi) e studiarli singolarmente uno per uno. Il nostro compito sarà quello di limitare l'effetto che il disturbo comporta sull'uscita, idealmente portandolo a 0. Come vedremo lo studio dei segnali di disturbo non ha delle regole ben precise, sarà dunque necessario calcolare la *f.d.t.* per ogni disturbo.

Facalizziamoci sull'errore di uscita  $d_p$  (spegnendo gli altri segnali), idealmente (avendo anche il rifermento a 0), l'uscita deve rimanere a 0:

$$e_{d_p}(t) = y_{d_p}(t)$$

L'errore a steady-state è dato da:

$$e_{d_a}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{d_p}(t)$$

Anche in questo caso usiamo il teorema del valore finale:

$$\begin{aligned} e_{d_p}^\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e_{d_p}(t) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s y_{d_p}(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} d_p(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^{\nu+p}}{s^{\nu+p} + K_c K_p G_a G_f G_s} \frac{D_{p0}}{s^{h+1}} = \\ &= \begin{cases} 0 & \nu + p > h \\ \frac{D_{p0}}{\beta + K_c K_p G_a G_f G_s} & \nu + p = h \end{cases} \end{aligned}$$

**Problem 8.1 – Problema 1**

Costruire un controllore rispettando le specifiche.

$$G_p(s) = \frac{25}{s^3 + 3.3s^2 + 2s}$$

Il sistema ha i seguenti valori per i disturbi e le *f.d.t.* :

$$\begin{aligned} G_s &= 1 \\ G_a &= 0.095 \\ G_r &= 1 \\ G_d(s) &= 1; \\ d_a(t) &= D_{a0}; \quad |D_{a0}| \leq 5.5 \cdot 10^{-3}; \\ d_p(t) &= a_p \sin(\omega_p t), \quad |a_p| \leq 2 \cdot 10^{-2}, \quad \omega_p \leq 0.02 \text{ rad s}^{-1}. \\ d_s(t) &= a_s \sin(\omega_s t), \quad |a_s| \leq 10^{-1}, \quad \omega_s \geq 40 \text{ rad s}^{-1}. \end{aligned}$$

Specifications

Steady-state gain of the feedback control system:  $K_d = 1$

Steady-state output error when the reference is a ramp ( $R_0 = 1$ ):  $|e_r^\infty| \leq 1.5 \cdot 10^{-1}$

Steady-state output error in the presence of  $d_a$ :  $|e_{d_a}^\infty| \leq 1.5 \cdot 10^{-2}$

Steady-state output error in the presence of  $d_p$ :  $|e_{d_p}^\infty| \leq 5 \cdot 10^{-4}$ .

Steady-state output error in the presence of  $d_s$ :  $|e_{d_s}^\infty| \leq 5 \cdot 10^{-4}$ .

Rise time:  $t_r \leq 3 \text{ s}$

Settling time:  $t_{s, 5\%} \leq 12 \text{ s}$

Step response overshoot:  $\hat{s} \leq 10\%$

1. Partiamo dalla specifica che  $K_d = 1$ , sappiamo che  $K_d = \frac{1}{G_f G_s}$ , a patto che  $\nu + p > 0$ , se non fosse così il tipo del sistema è uguale a 0, allora in uscita ottengo un errore. Prima di poter applicare quella formula si deve andare a verificare se quella condizione è verificata.  $p$  è uguale a 1, allora sicuramente  $p + \nu$  è maggiore di 0:

$$K_d = \frac{1}{G_f G_s} \implies G_f = \frac{1}{G_s K_d} = 1$$

2. Troviamo per come primo punto il valore di  $\nu$ ; si ha dalla formula (8.6) che:  $p$  ha valore 1, infatti:

$$G_p = \frac{1}{s} \frac{25}{s^2 + 3.3s + 2}$$

Per ottenere un errore relativo in modulo minore di una certa costante, deve essere vero che:  $\nu + p = h$ , dove  $h$  è l'ordine del polinomio di riferimento, che in questo caso è 1, visto che  $r$  è una rampa. Dunque abbiamo che:  $\nu = h - p = 0$ . Allora se  $\nu + p \neq 0$ ,  $\beta$  è uguale a 0, dunque si trova il vincolo su  $K_c$ :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} s G_p(s) = 12.5$$

$$\begin{aligned}
|e_r^\infty| &= \left| \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - K_d r(t) \right| = \\
&= \left| \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [y(s) - K_d r(s)] \right| = \\
&= \left| \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [G_{ry}(s)r(s) - K_d r(s)] \right| = \\
&= \left| \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[ \frac{L}{1+L} \frac{1}{G_f G_s} r(s) - K_d r(s) \right] \right| = \\
&= \left| \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_d^2 s^{\nu+1}}{s^{\nu+1} K_d + K_p K_c G_a} \frac{R_0}{s^2} \right| = \\
&= \left| \frac{K_d^2 R_0}{K_c K_d G_a} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left| \frac{K_d^2 R_0}{K_c K_p G_a} \right| &< 0.15 \\
|K_c| &> \frac{1}{0.15} \left| \frac{K_d^2 R_0}{K_p G_a} \right| \\
|K_c| &> 5.61
\end{aligned}$$

3. Otteniamo le specifiche per il segnale  $e_{da}(t)$ :

$$\begin{aligned}
|e_{da}^\infty| &= \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{da}(t)| = \left| \lim_{s \rightarrow 0} s e_{da}(s) \right| = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} |s y_{da}(s)| = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} |s G_{day} d_a(s)| = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left| s \frac{G_p}{1+L} d_a \right| = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left| s \frac{\frac{K_p}{s}}{1 + \frac{K_p}{s} \frac{K_c}{s^\nu} G_a G_f G_s} \frac{D_{a0}}{s} \right| = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{s^\nu K_d K_p D_{a0}}{s^{\nu+1} K_d + K_p K_c G_a} \right| = \\
&= \left| \frac{K_d D_{a0}}{K_c G_a} \right|
\end{aligned}$$

Anche in questo caso otteniamo una specifica per  $\nu$  pari a 0, per ottenere un errore in feriore ad un costante.

$$\left| \frac{K_d D_{a0}}{K_c G_a} \right| < 1.5 \cdot 10^{-2}$$



$$|K_c| > 3.86$$

Sommario:

1.  $G_f = 1$ ;
2.  $\nu = 0$ ;  $|K_c| > 5.61$ ;
3.  $\nu = 0$ ;  $|K_c| > 3.86$ ;

Ricavo che:

$$\nu = 0; \quad |K_c| > 5.61$$

## 9 Risposta in Frequenza

Si può verificare che, per un sistema di controllo generico, il contributo dei rumori nella catena diretta risultano:

$$y(s) = T(s) \frac{1}{H} r(s) + S(s) d_p(s) + G_p(s) S(s) d_a(s) - T(s) \frac{1}{G_s} d_s(s)$$

Ideamente si vuole che in un sistema,  $T(s)$  sia uguale ad 1. Se ciò fosse vero allora,  $S(s)$  sarebbe uguale a 0, dunque l'uscita risulta proprio uguale a (considerando  $H = 1$ ):

$$y(s) = r(s) - \frac{1}{G_s} d_s(s)$$

L'unico termine che causa dei problemi è dato dal rumore causato dal sensore. Sorgono dei problemi, uno di questi è che se  $T$  fosse 1,  $L$  dovrebbe tendere ad infinito, ma questo non è realizzabile in un sistema fisico, inoltre non è possibile attenuare i disturbi senza l'incorretto inseguimento del riferimento, oltre al fatto che anche se  $T(s)$  fosse sempre 1, si avrebbero comunque dei termini dati dal rumore che non scompaiono.

Per risolvere questo problema devo confrontare  $r(s)$  e  $d_s(s)$ , guardando il problema nella sua risposta in frequenza riesco a risolvere il problema inseguendo il riferimento ed attenuare i disturbi. Infatti si può porre  $T(j\omega)$  a 1 nella banda di  $r(s)$  e a 0 nella banda dei disturbi  $d_s$ .

Vogliamo che la funzione  $|T(j\omega)|$  sia uguale a 0dB nel range della banda del riferimento. Per  $\omega$  maggiore della banda del riferimento, si vuole che il modulo sia 0. Un buon progetto ha una funzione simile alla forma nella Figure 17. Per  $S$  si vuole che a bassa frequenza si il suo modulo valga 0, per ridurre i disturbi.

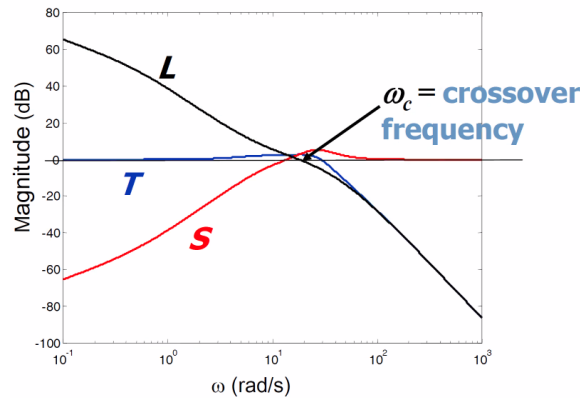


Figure 17: Buon Progetto

Il comportamento nell media frequenza:

**Definition 9.1 – Media Frequenza**

Anche detta **crossover frequency**, è la frequenza tale per cui:

$$\omega_c : |L(j\omega_c)| = 1 = 0dB$$

Per la frequenza di crossover il modulo di  $T$  ed il modulo di  $S$  hanno lo stesso valore. Sul diagramma di Nyquist il punto nella frequenza di  $\omega_c$  il valore del vettore è proprio 1. Se per qualche motivo la funzione ad anello encircola il punto  $-1 + j0$  (sistema diventa instabile), allora devo, in qualche modo, modificare la funzione ad anello in un intorno della frequenza di crossover.

Un comportamento ragionevole della funzione ad anello è: a 0 vale infinito, e decresce fino a raggiungere 0, vicino l'attraversamento della frequenza di crossover la sua fase deve trovarsi ad una distanza ragionevole da  $-180^\circ$ , se così non fosse ci sarebbe un attraversamento del punto a  $-1 + j0$ .

Consideriamo disturbi sinusoidali che entrano direttamente nell'anello di retroazione. Le funzioni sinusoidali non hanno limite per  $t$  che tende a infinito, non si può applicare il limite del valore finale, è per questo motivo che si usa il teorema della risposta armonica.

**Theorem 9.1 – Teorema della Risposta Armonica**

Supponendo che  $H(s)$  sia la *f.d.t.* di un sistema lineare, allora dato  $Y(s) = H(s)X(s)$ :

$$x(t) = a_x \sin(\omega_x t + \phi_x) \implies y(t) = a_x |H(j\omega_x)| \sin(\omega_x t + \phi_x + \angle H(j\omega_x))$$

Supponiamo di voler ridurre il rumore causato dal sensore:

$$|e_{d_s}^\infty| = |y_{d_s}^\infty| < \rho_d$$

La specifica di prestazione relativa alle sinusoidi è:

$$|e_{d_s}^\infty| < \rho_s$$

$$\implies \left| a_s |T(j\omega_s)| \frac{1}{G_s} \sin(\omega_s t + \phi_s) \right| < a_s |T(j\omega_s)| \frac{1}{G_s} < \rho_s$$

Per  $L(j\omega) \ll 1$ , la  $T(j\omega)$  ha valori molto simili, infatti si ha che  $T(j\omega) \simeq L(j\omega)$ , allora:

$$\boxed{|L(j\omega_s)| < \frac{\rho_s G_s}{a_s} = M_T^{HF} \quad \forall \omega_s > \omega_s^-}$$

Viene naturale fissare una soglia minima di frequenze  $\omega_s^-$ , oltre il quale si vuole che la funzione  $T$  sia inferiore di un certo valore.

Il primo vincolo è quello su  $\omega_c$ , definita la  $\omega_H$  potrei scegliere come vincolo  $\omega_c < \omega_H$

Un progetto fatto bene vuole che  $L$  passi in  $\omega_c$  esattamente che una pendenza di  $-20dB/dec$ . Il motivo per cui non si può scendere più velocemente è che se la pendenza è troppo ripida abbiamo più poli nell'origine, questo corrisponde ad un contributo nella fase di  $-90^\circ$  per ogni polo, come abbiamo visto ad un certo punto ho bisogno di far salire la fase vicino all'intorno a  $\omega_c$  con degli zeri, altrimenti il sistema non è stabile per il criterio di Nyquist (8.3), dunque è conveniente prendere i valori di  $\nu$  più bassi.

Per questa ragione è parsimonioso prendere come vincolo:

$$\omega_c \leq \frac{\omega_H}{2}$$

A meno che non si arriva sullo spigolo con una fase minore, in quel caso si ha più margine per scegliere il vincolo.

Consideriamo ora l'attenuazione di un disturbo sinusoidale che entra nella catena diretta. Consideriamo il disturbo  $d_p = a_p \sin(\omega_p t)$ ,  $\forall \omega_p < \omega_p^+$ .

Come prima utilizziamo il teorema della risposta armonica:

$$|e_{d_p}^\infty| = |y_{d_p}^\infty| = |a_p| |S(j\omega_p)| |\sin(\omega_p t + \phi_p)| < \rho_p$$

Allora:

$$\implies |S(j\omega_p)| < \frac{\rho_p}{a_p} = M_S^{LF} \quad \forall \omega_p < \omega_p^+$$

$$\implies |L(j\omega_p)| > \frac{a_p}{\rho_p} \quad \forall \omega_p < \omega_p^+$$

Anche in questo caso possiamo trovare un costante  $\omega_L$ , tale che:

$$\omega_c \geq 2 \cdot \omega_L$$

In conclusione ho dei vincoli dati da  $T$  e da  $S$ , che impongono di scegliere una  $\omega_c$  all'interno di un intervallo, che sarà che avrà come estremi i limiti sulle alte frequenze e sulle basse frequenze, tale frequenza sarà detta **frequenza di crossover desiderata**.

$$\omega_{c,des} \in \left[ 2\omega_L, \frac{\omega_H}{2} \right]$$

Se dovesse accadere che  $2\omega_L > \frac{\omega_H}{2}$ , le specifiche sono conflittuali, ciò vuol dire che il problema di controllo non ha soluzione.

## 10 Specifiche per Transitorio

Prendiamo in esame le specifiche per il transitorio. Come abbiamo già visto, il transitorio è sempre presente in un sistema e non si può eliminare. Una situazione tipica è la seguente:

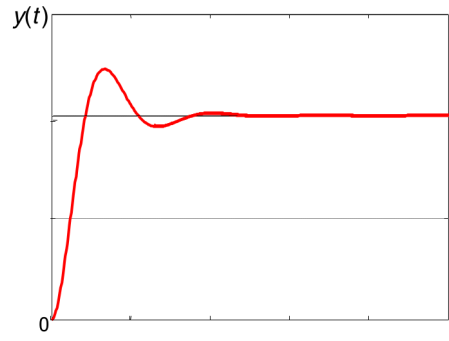


Figure 18: Transitorio Di Un Sistema

Per analizzare il comportamento del transitorio si manda in entrata un segnale gradino unitario e si definiscono delle grandezze a partire dall'uscita:

### Definition 10.1 – Maximum Overshoot

Anche detta **massima sovraelongazione**, è definita come:

$$\hat{s} = \frac{y_{max} - y_{\infty}}{y_{\infty}}$$

Questa quantità può essere anche definita in percentuale:

$$\hat{s}_{\%} = 100 \cdot \hat{s}$$

### Definition 10.2 – Rise Time

Il **tempo di salita**:  $t_r$  è definito come il tempo richiesto per arrivare dallo 0% al 100% del valore in regime stazionario.

### Definition 10.3 – 10%-90% Rise Time

$t'_s$  è definito come il tempo richiesto per arrivare dal 10% al 90% del valore a regime stazionario.

**Definition 10.4 – Settling Time**

Il tempo di assestamento  $\pm\alpha * 100\%$ :  $t_{s,\alpha\%}$  tale per cui:

$$\|y(t) - y_\infty\|_\infty < \alpha \cdot y_\infty \quad \forall t > t_{s,\alpha\%}$$

Si definiscono delle specifiche per ogni tipologia di segnale e durante il progetto si deve garantire il rispetto di tali costanti:

$$\hat{s} \leq \bar{\hat{s}}; \quad t_r \leq \bar{t}_r; \quad t_{s,\alpha\%} \leq \bar{t}_{s,\alpha\%}$$

In generale non si conosce la struttura di  $T$ . Per studiare i criteri sopra descritti facciamo un'assunzione molto forte su quello che è la struttura di  $T$ . La assumiamo come una funzione a poli complessi coniugati, detta **funzione prototipo del secondo ordine**:

$$y(s) = T(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{G_f G_s}}_{K_d} \cdot r(s)$$

$$T(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

I vantaggi di usare questa rappresentazione sono:

- guadagno stazionario;
- non ha zeri, 2 poli complessi coniugati;

$$0 < \zeta \leq 1$$

La risposta al gradino unitario è data da:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$

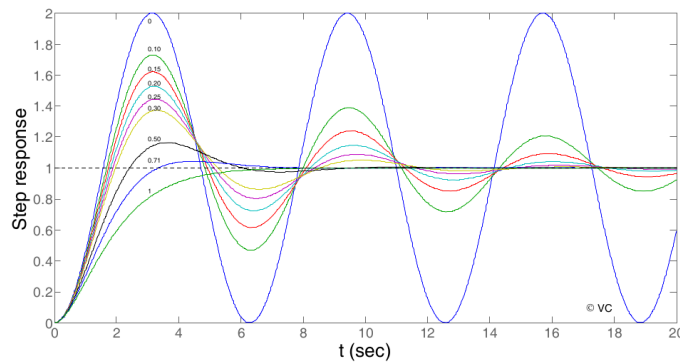


Figure 19: Risposta Al Gradino Unitario Di Un Sistema Del Secondo Ordine

Posso ricavare che:

$$\hat{s} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \cdot (\pi - \arccos(\zeta))$$

$$t_{s,\alpha\%} = -\frac{\log(\alpha)}{\omega_n \zeta}$$

Questi sono idealmente i vincoli per  $T$ , nella realtà  $T$  sarà diversa, anche se i vincoli risultanti da questo metodo saranno molto approssimati a quelli reali. Per diverse  $T(s)$  mi servono:

- **picco di risonanza**  $T_p$ :

$$T_p \triangleq \frac{\max\{|T(j\omega)|\}}{|T(j0)|}$$

$$S_p \triangleq \max\{|S(j\omega)|\}$$

- **banda passante del sistema di controllo**  $\omega_{BS}$ :

$$\omega_B : |T(j\omega_B)| = \frac{\sqrt{2}}{2} |T(j0)|$$

$$\omega_{BS} : |S(j\omega_{BS})| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (non si usa)}$$

Ovvero quando il modulo del guadagno diminuisce di  $3dB$  (infatti  $\frac{\sqrt{2}}{2} = -3dB$ )

Il motivo per cui si studia anche la  $S(s)$  è dato dal fatto che, alla fine dello studio del progetto, ci piacerebbe avere come risultato una funzione prototipo del secondo ordine, infatti se come risultato avessimo tale funzione  $T_p$  e  $S_p$  sarebbero equivalenti, ma così non sarà (nella maggior parte dei casi), per cui rafforziamo i nostri vincoli imponendoli anche su  $S$  per fare in modo che, le specifiche del sistema siano quanto più vicine alle stesse specifiche di una funzione prototipo del secondo ordine.

Avendo una funzione prototipo del secondo tipo, la funzione ad anello può essere calcolata come:

$$T(s) : L(s) = \frac{T}{1-T} \implies L(s) = \frac{\frac{\omega_n}{2\zeta}}{s \left(1 + \frac{s}{2\zeta\omega_n}\right)}$$

La frequenza di crossover può essere espressa in funzione di  $\zeta$  ed  $\omega_n$ :

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}$$

Possiamo allora esprimere il picco di risonanza e la banda in termini dei parametri:

$$T_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$S_p = \frac{2\zeta\sqrt{2+4\zeta^2+2\sqrt{1+8\zeta^2}}}{\sqrt{1+8\zeta^2+4\zeta^2-1}}$$

$$\omega_B = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$

### Example 10.1

$$\hat{s} \leq 10\%; \quad t_r \leq 0.5s; \quad t_{s,1\%} \leq 1.5s;$$

Parto da  $\hat{s}$ , che dipende solo da un parametro:

$$\hat{s} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta = \frac{|\log(\hat{s})|}{\sqrt{\pi^2 + \log^2(\hat{s})}} = 0.59 \Rightarrow \boxed{\zeta \geq 0.59}$$

Ricavo lo smorzamento, impongo  $T_p$  ed  $S_p$ :

$$T_p \leq \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \underset{\zeta=0.59}{=} 1.05$$

$$S_p \leq \frac{2\zeta\sqrt{2+4\zeta^2+2\sqrt{1+8\zeta^2}}}{\sqrt{1+8\zeta^2+4\zeta^2-1}} \underset{\zeta=0.59}{=} 1.36$$

Consideriamo ora i requisiti sul tempo di salita:

$$t_r = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot (\pi - \arccos(\zeta))$$

$$\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2}-2\zeta^2}$$

Otteniamo che:

$$t_r\omega_c = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot (\pi - \arccos(\zeta)) \cdot \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2}-2\zeta^2}$$

Quindi:

$$\omega_c \geq \frac{1.97}{t_r} \underset{t_r=0.5}{=} 3.94rad/s$$



Similmente possiamo ottenere i requisiti per il tempo di settling:

$$t_{s,1\%} = \frac{4.61}{\omega_n \zeta}$$

Si ottiene:

$$t_{s,1\%} \omega_c \underset{\zeta=0.59}{=} 5.64$$

Quindi:

$$\omega_c \geq \frac{5.64}{t_{s,1\%}} \underset{t_{s,1\%=1.5}}{=} 3.76 \text{ rad/s}$$

La traduzione delle specifiche porta a due valori della frequenza di crossover diversi, per scegliere quella corretta si procede nel seguente modo:

$$\omega_{c,des} = \max\left\{ \underbrace{\omega_c}_{t_r}, \underbrace{\omega_c}_{t_{s,1\%}} \right\} \implies \omega_{c,des} = 3.94 \text{ rad/s}$$

## 10.1 Luoghi di Magnitudo Costante

Che valori deve assumere la  $L(j\omega)$  per fare in modo che  $|T(j\omega)|$  non superi mai  $T_{p,max}$ ?

Per fare questa analisi, usiamo una rappresentazione per il modulo di  $T$ .

$$T = \frac{L}{1+L} = \frac{u+jv}{1+u+jv} = Me^{j\phi} \implies \begin{cases} M^2 = \frac{u^2+v^2}{(1+u)^2+v^2} \\ \phi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) - \arctan\left(\frac{v}{1+u}\right) \end{cases}$$

Voglio trovare dei valori della parte reale e della parte immaginario di  $L$  per cui  $M^2$  ha gli stessi valori, dunque voglio trovare una formula per rappresentare un valore costante del modulo di  $T$  al quadrato  $M_T^2$ . Facendo delle riscritture algebriche trovo che il luogo di punti che rispettano questa condizione sono:

$$\implies \left(u - \frac{M_T^2}{1-M_T^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{M_T}{1-M_T^2}\right)^2$$

Questa rappresenta l'equazione di un cerchio:

$$(u - C_u)^2 + (v - C_v)^2 = R^2$$

Infatti viene detto **cerchio**  $M_T$ :

$$\implies M_T \text{ circle} : \begin{cases} C = \left(\frac{M_T^2}{1-M_T^2}, 0\right) & ,(\text{centro}) \\ R = \left|\frac{M_T}{1-M_T^2}\right| & ,(\text{raggio}) \end{cases}$$

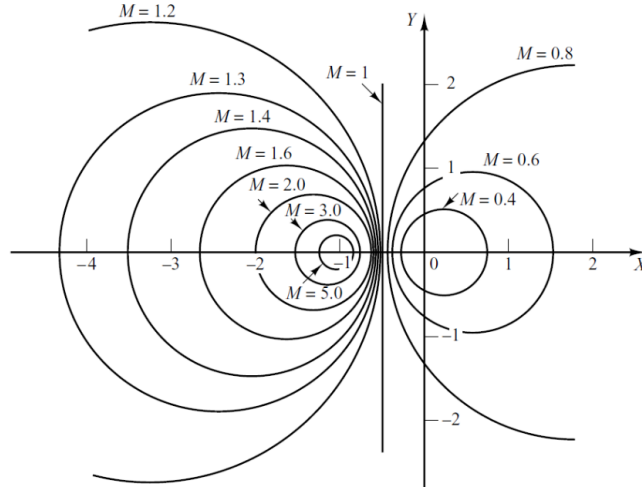


Figure 20: Luogo Dei Punti Del Cerchio Mt

Supponiamo quindi di avere un vincolo sulla massima sovraelongazione, ad esempio  $T_p \leq 6$ . Non deve mai accadere che il Diagramma Polare della funzione ad anello attraversi la regione contenuta all'interno del cerchio di raggio  $M_T = 6$ , ciò significherebbe che il valore di  $T_p$  viene superato da  $|T(j\omega)|$  e ciò non deve accadere. Plottando queste condizioni, si possono modificare opportunamente gli zeri i poli della funzione ad anello per far sì che vengano rispettati i vincoli, per far ciò si usano i Diagrammi di Nichols, che rendono più comoda la visualizzazione della funzione, dove le regioni formate dai cerchi verranno deformate come delle ellissi.

### Problem 10.1

4.  $|e_{d_p}^\infty| \leq 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $d_p(t) = a_p \cdot \sin(\omega_p t)$ ,  $|a_p| \leq 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\omega_p \leq 0.02 \text{ rad/s}$ .

$$|e_{d_p}^\infty| = |y_{d_p}^\infty| = |a_p| |G(j\omega_p)| |\sin(\omega_p t + \phi)| \leq |a_p| |G(j\omega_p)|$$

...

5.  $e_{d_s}^\infty$

## 10.2 Scelta di Kc

Quando si è trovato il modulo di  $K_c$  minimo si prende un valore leggermente più grande dei requisiti minimi. Per **scegliere il segno del modulo di  $K_c$** , e quindi di garantire la stabilità, è necessario vedere il numero di encircolamenti di  $L$  intorno a  $-1 + j0$ , assegnamo un valore arbitrario tra positivo e negativo, se  $P_d$  è un numero pari allora il segno va bene, altrimenti il segno va invertito.

### 10.3 Progetto di LEAD e LAG

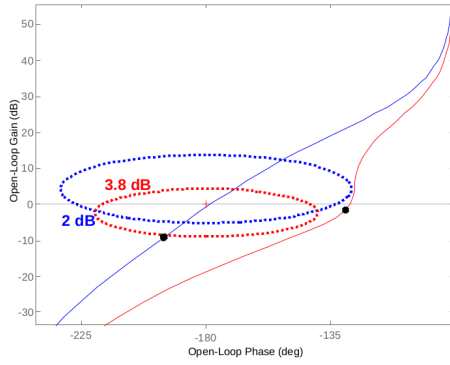
Ogni rete è un filtro del primo ordine, come si vede in (8.5). Per progettare questa rete si usa un metodo detto **loop-shaping design**.

Per garantire le specifiche del transitorio, si deve garantire che, inserendo le reti LEAD e LAG, il Diagramma di Nichols di  $L$  non entri all'interno delle regioni proibite, anche se questa condizione non è necessario né sufficiente a garantire le specifiche sulla sovraelongazione, questo è dato dal fatto che la  $T$ , in generale, non è equivalente alla funzione prototipo, dunque il suo comportamento si discosta leggermente da quello che ci aspettiamo, ciò nonostante, rispettare le zone è comunque un buon indicatore per il rispetto delle specifiche. Stare al di fuori delle regioni proibite garantisce un livello di robustezza: il progetto del controllore comporta degli errori, dati dalla differenza tra modello matematico e quella che è la realtà, sono presenti anche errori dati dalla linearizzazione, allora la funzione ad anello nella realtà sarà diversa da quella trovata, e se si trova vicino al punto critico  $(-1 + j0)$ , data la presenza di errori, si rischia di attraversarlo. Uscendo dalle regioni proibite spostiamo la fase ed il modulo lontano dal punto critico (in molti libri di testo vengono definite delle distanze dette **margin di fase** e **margin di guadagno**, per garantire la robustezza, ma questo non garantisce che in un intorno non ci si possa avvicinare al punto critico, è anche per questo motivo che si usano le regioni proibite).

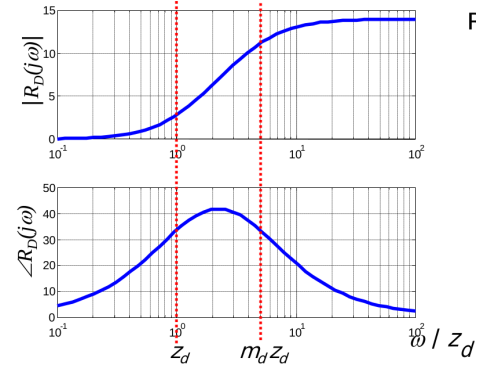
**Criteri per scegliere la frequenza di cross-over desiderata** (durante l'esame la scelta va motivata):

- se la prendo vicino al limite superiore, si ha il comportamento più veloce per il transitorio;
- se la prendo vicino al limite inferiore, si ottiene un'attenuazione maggiore dei disturbi;

Guardo l'intervallo e scelgo una  $\omega_{c,des}$  e vado a vedere dove viene mappato il punto sul diagramma di Nichols. Quel punto, essendo la frequenza di crossover, deve avere un guadagno di  $0dB$ . Per fare questo potrei semplicemente aumentare il guadagno e quindi traslare il grafico in alto, ma in contemporanea devo traslare anche orizzontalmente, altrimenti si rischia di far diventare instabile il sistema. Per fare ciò si può semplicemente aggiungere uno zero al controllore, ma ogni volta che si aggiunge uno zero, si deve anche aggiungere un polo, questo è dovuto al fatto che il controllore deve sempre essere realizzabile, dunque il grado del numeratore deve sempre essere minore o uguale al grado del denominatore, il polo che si aggiunge cancella la fase che viene aggiunta dallo zero. Per evitare che il contributo venga completamente annullato nell'intorno in cui si vuole applicare lo zero, il polo avrà una fase maggiore dello zero, il comportamento di tale è detto di **compansa di fase**, che avrà un'effetto di diminuire il guadagno e di aumentare la fase alla frequenza di crossover.



(a) Rete LEAD Su Nichols



(b) Bode Rete LEAD

Figure 21: Effetto rete LEAD

$$R_d(s) = \frac{1 + \frac{s}{z_d}}{1 + \frac{s}{m_d z_d}}, \quad m_d > 1$$

- $m_d$  determina quanto sarà grande la compana di fase;
- $z_d$  determina in frequenza dove sarà posizionata la compana di fase.

Si può mostrare che partendo una funzione prototipo del secondo ordine  $T_2$ , e ricavando  $L_2$  da essa, il diagramma di Nichols di  $L_2$  passa tangente a entrambe le regioni proibite. Quello che vorremmo ottenere è che:

$$T \simeq T_2 \implies L \simeq L_2$$

Se definisce una fascia di valori in cui si vuole che il comportamento della funzione ad anello ricavata sia simile a quello della funzione prototipo.

Consideriamo una situazione differente, per introdurre la rete LAG. Ad esempio la mia  $\omega_{c,des}$  si trova al di sopra dei  $0dB$ , per fare in modo di abbassare il suo modulo si inserisce un modulo nel controllore. Inserendo un polo, questo va a deteriorare la fase, che mi comporta nella maggior parte dei casi un attraversamento della zona proibita, aggiungendo uno zero a fase maggiore del polo si riesce avere un comportamento sulla fase simile quello precedente in un intorno della frequenza a cui si è diminuito il modulo.

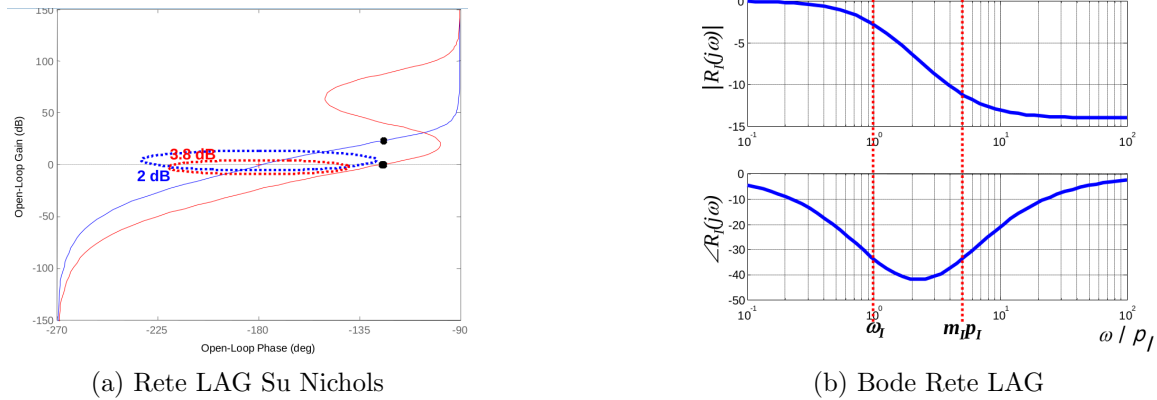


Figure 22: Effetto rete LAG

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{s}{m_i p_i}}{1 + \frac{s}{p_i}}, \quad m_i > 1$$

Considerazioni:

- Non ci sono effetti negativi nell'introduzione di una rete LEAD;
- Progettando una rete LAG si vuole ottenere solo uno dei due effetti che provoca, ovvero un abbassamento del modulo senza la perdita di fase, che è indesiderata, inoltre, una conseguenza provocata dall'inserimento dalle reti LAG è l'**effetto coda**;

...

Rete derivativa: prendo la differenza tra la fase alla frequenza di  $\omega_{c,des}$  e la fase che si trova al di fuori delle regioni proibite.

Quindi trovo la

"Progetto una rete LEAD con  $\omega$  normalizzata = 1.2 e  $m = ..$  al fine di recuperare deg 45 all  $\omega_{c,des} = 0.8 rad/s$ ",

$$\text{La } \omega_{norm} \triangleq \frac{\omega_{c,des}}{z_d} \iff 1.2 = \frac{0.8}{z_d}$$

Per la rete LAG si prende sempre un valore della  $\omega_{norm}$  di 100 Il modulo deve scendere di (può essere calcolato analiticamente):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} R_i(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{s}{m_i p_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} = \frac{p_i}{m_i p_i} = \frac{1}{m_i}$$

...

Valuto le prestazioni del sistema, valutando con una prestazione che tutte esse siano verificate.

...

Le reti LAG causano l'**effetto coda**: progettando una rete di tipo LAG, andiamo a inserire una frequenza normalizzata che diventerà uguale alla frequenza di crossover. Utilizzando la rete LAG, avrò uno zero ed un polo a bassa frequenza. La funzione  $T$  è uguale a  $\frac{L}{1+L}$ , questo comporta che gli zeri di  $T$  sono coincidenti con gli zeri di  $L$ , questo implica che gli zeri del controllore sono zeri di  $T$ . Ma deve rimanere vero il fatto che  $T$ , a bassa frequenza deve essere 1, dunque vicino allo zero, per forza di cose, deve comparire un polo (dato da  $1 + L$  al denominatore), si può provare che il residuo di quel polo è molto basso, quindi avremmo un'esponenziale in uscita che decresce lentamente (dato dal fatto che il polo si trova a bassa frequenza), ed ha un ampiezza molto ridotta, questo effetto non si nota perché il modello utilizzato per la  $T$  era quello di una funzione prototipo del secondo tipo, nella quale non era presente nessun polo a bassa frequenza. Questo problema non si pone nelle reti LEAD, perché il polo si trova ad alta frequenza, perché gli eventuali esponenziali decrescono molto velocemente ed il modulo di  $T$  scende molto velocemente.

Esiste un altro tipo di rete derivativa, detta **rete zero**, composta da un singolo zero. Questa rete è utilizzabile solo nel caso in cui  $\nu$  sia maggiore di 0, infatti è possibile usare un numero  $\nu$  di volte reti di tipo zero. La rete zero è la rete più raccomandata da utilizzare, nel caso in cui sia possibile farlo.

## 11 Sistemi a Tempo Discreto

...

Il sistema è stabile quando valgono le condizini:  $|\lambda_i| < 1, \forall i$

### **Definition 11.1 – D Stabilità BIBO**

Un sistema è BIBO stabile se e solo tutti i poli della *f.d.t.* hanno modulo strettamente minore di 1.

La definizione del punto di equilibrio è molto simile a quello a tempo continuo. Per valere la condizione di stabilità deve valere che:

$$\boxed{x(k+1) = x(k)}$$

Questo è dato dal fatto che in tempo discreto non esiste la derivata. Dunque per imporre il punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Anche in questo caso, trovato il punto di equilibrio di un sistema, si può linearizzare il sistema, attraverso l'uso delle matrici Jacobiane.

## 12 Controlli Digitali

Il controllore digitale ha delle caratteristiche nella sua implementazione. L'uscita del controllore digitale è descritta da:

$$\begin{aligned}
 U(z) &= G_{cd}(z)E(z) \\
 U(z) &= \frac{\beta_m z^m + \dots + \beta_0}{z^n + \dots + \alpha_0} E(z) \\
 U(z) &= \frac{\beta_n + \beta_{n-1} z^{-1} + \dots + \beta_0 z^{-n}}{1 + \alpha_{n-1} z^{-1} + \dots + \alpha_0 z^{-n}} E(z) \\
 U(z) + \alpha_{n-1} z^{-1} U(z) + \dots + \alpha_0 z^{-n} U(z) &= \beta_n E(z) + \dots + \beta_0 z^{-n} E(z) \\
 &\xrightarrow{z^{-1}} \\
 u(k) + \dots + \alpha_0 u(k-n) &= \beta_n e(k) + \dots + \beta_0 e(k-n) \\
 u(k) &= \alpha_{n-1} u(k-1) + \dots + \beta_0 e(k-n)
 \end{aligned}$$

Quando si costruisce un controllore digitale, uno dei parametri fondamentali da scegliere è la **frequenza di campionamento**. Analizzando la trasformata di Fourier del segnale campionato possiamo valutare la sua banda. Rispettare la frequenza di Nyquist (il doppio della banda del segnale), è importante perché dopo l'elaborazione del segnale esso dovrà essere ricostruito, se la frequenza non viene rispettata il segnale non ricostruito non è preciso.

$$\begin{aligned}
 e(t) &\longrightarrow |E(j\omega)| \\
 e(k) &\xleftarrow{T_s \rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}} \frac{1}{T_s} \sum \left| E\left(\omega + \frac{1}{T_s}\right) \right|
 \end{aligned}$$

Se la  $\omega_s$  non viene scelta correttamente, il segnale di uscita presenta il fenomeno dell'**aliasing**.

Per ricostruire il segnale analogico si usa la **zero-order hold** (ZOH): mantiene il valore del campione fino al prossimo. Lo ZOH usa un filtro di tenuta, rappresentato da:

$$e_0(t) = u(t) - u(t - T)$$

È possibile mostrare che:

$$E_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

È possibile mostrare che esiste una relazione tra la  $\omega_c$  e la  $\omega_{s\text{amp}}$  (primo vincolo sulla scelta della  $\omega_{s\text{amp}}$ ):

$$\boxed{\omega_{s\text{amp}} \geq 2 \cdot \omega_B \rightarrow \omega_{s\text{amp}} \geq 4 \cdot \omega_c}$$



Quando  $d_s$  appare nel problema allora (seconda specifica):

$$\omega_{samp} \geq 2 \cdot \omega_s^-$$

Dove  $\omega_s^-$  è la frequenza dopo la quale il modulo della *f.d.t.* della  $d_s$  deve essere minore del valore  $M^{HF}$ . Il motivo per cui si prende una frequenza maggiore a  $2 \cdot \omega_s^-$  è per garantire che nessun valore campionato sia più grande di  $M^{HF}$ .

La trasformata del filtro di tenuta è equivalente ad inserire un polo nel controllore, alla frequenza  $\frac{2}{T}$ :

$$\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \simeq \frac{T}{1 + \frac{sT}{2}}$$

In modo da limitare i danni creati dall'inserimento di questo, come la perdita di fase nell'intorno della  $\omega_c$ , perdita di fase tra 3 e 6 gradi alla  $\omega_{c,des}$  se e solo se  $0.1 < \omega_{c,des}T_s < 0.2$ .

$$\boxed{\frac{0.1}{\omega_{c,des}} < T_s < \frac{0.2}{\omega_{c,des}}}$$

Il passo successivo è passare dal controllore continuo al controllore discreto.

$$G_{cd} = c2d(G_c, T_s, '...')$$

Le ... rappresentano i **metodi di discretizzazione**:

- ZOH: migliore rappresentazione della risposta al gradino;
- TUSTIN: migliore rappresentazione della risposta in frequenza;
- MATCHED: mappa poli e zeri con un algoritmo;

Per considerare l'effetto della digitalizzazione, si deve inserire nella funzione ad anello il contributo della ZOH:

$$L(s) = G_c(s) \cdot G_a \cdot G_p(s) \cdot G_s \cdot G_f \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{sT}{2}}}_{ZOH}$$

## 13 Problemi d'Esame

Qua verranno svolti i passaggi su matlab di esempi di temi di esame.

### 13.1 Problema 1

hmm