

---

# Análise Vetorial e o Mathematica

Versão : 11 - 10 - 2019

## Chapter 1: Introdução ao Wolfram Mathematica

EM PREPARAÇÃO

## Chapter 2: Funções Vetoriais: Continuidade e Diferenciabilidade

EM PREPARAÇÃO

## Chapter 3: Geometria de Curvas Espaciais

Cada curva tem certas características geométricas chamadas invariantes. Esses invariantes são relacionados com as propriedades físicas de curva. Alguns destes invariantes são:

- comprimento do arco
- o número das singularidades,
- curvatura, que mede quanto a curva se dobra,
- torção, que mede quanto a curva se torce.

---

### Curvas paramétricas:

Vamos conhecer as curvas paramétricas através de um exemplo. Um exemplo da curva é a trajetória de um móvel em 2D.

*In[ ]:=*

```
x[t_] := 0.2 t^2 + 5 t + 0.5  
y[t_] := -t^2 + 10 t + 2  
r[t_] := {x[t], y[t]}
```

vamos calcular o deslocamento entre 3s e 6s

```
In[ ]:= r3 = r[3]
        r6 = r[6]
```

```
In[ ]:= G1 = Graphics[{Arrow[{0, 0}, r3], Arrow[{0, 0}, r6]}, Axes → True, AxesLabel → {x, y}]
```

Podemos definir uma função para calcular o deslocamento entre dois instantes de tempo

```
In[ ]:= des[t1_, t2_] := r[t2] - r[t1]
```

```
In[ ]:= des[3, 6]
```

Agora vamos desenhar esses vetores

```
In[ ]:= G1 = Graphics[{Arrow[{0, 0}, r3], Arrow[{0, 0}, r6], Arrow[r3, r6]},
                    Axes → True, AxesLabel → {x, y}]
```

Vamos conhecer um comando novo para esboçar uma curva paramétrica.

```
In[ ]:= curve = ParametricPlot[r[t], {t, -2, 9}]
```

Colocando tudo juntos temos

```
In[ ]:= Show[G1, curve]
```

Oops! o móvel ainda não chegou ao chão. Então vamos calcular o tempo que o móvel vai colidir com a terra.

```
In[ ]:= time = Solve[y[t] == 0, t]
```

Um detalhe que merece ser enfatizado. O móvel não começou o seu movimento do ponto (0,0). Por isso para  $t=0$  não temos  $y=0$ . A trajetória do móvel corta o eixo  $y$  duas vezes. Uma vez na partida e outra vez na hora de colisão. Podemos interpretar que o móvel foi lançado em um palco acima do chão e fora do centro de sistema de coordenadas. Bom, vamos voltar ao nosso problema de achar o tempo de colisão com o chão. Está aí, o segundo resultado para  $t$ . Então, vamos esboçar o gráfico de novo. Primeiro temos que converter as regras de substituição acima em uma lista.

```
In[ ]:= curve = ParametricPlot[r[t], {t, t /. time[[1]], t /. time[[2]]}]
```

Então, uma curva paramétrica é uma trajetória traçada por o vetor de posição para um intervalo de tempo. Para exemplo acima, temos

```
In[ ]:= arrOrig[x_] := Arrow[{0, 0}, {x[[1]], x[[2]]}]
```

```
In[ ]:= vecPos = {r[1], r[2], r[4], r[5], r[8], r[9], r[t /. time[[2]]]}
```

```
In[ ]:= G2 = Graphics[arrOrig /@ vecPos]
```

```
In[ ]:= Show[{G2, curve}, Axes -> True, AxesLabel -> {x, y}]
```

As curvas paramétricas em 2D tem formato

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}$$

Por exemplo

```
In[ ]:= r(t) = (Cos(t), Sin(t)), t ∈ R
```

Ou no exemplo de trajetória de um móvel

$$\vec{r}(t) = (0.2t^2 + 5t + 0.5, -t^2 + 10t + 2), t \in \mathbb{R}$$

Ou Cicloide

```
In[ ]:= cycloid = {t - Sin[t], 1 - Cos[t]}
```

E em 3D tem o seguinte formato

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in \mathbb{R}$$

Por exemplo a curva abaixo que se chama Astroid

```
In[ ]:= astroid = {Cos[t]^3, Sin[t]^3, Cos[2 t]}
```

Ou Hélice

```
In[ ]:= helix = {Cos[t], Sin[t], t}
```

Agora vamos esboçar o hélice

```
In[ ]:= ParametricPlot3D[helix, {t, -2 Pi, 2 Pi}, Axes -> True, AxesLabel -> {x, y, z}]
```

## Segmento de reta

Na disciplina Geometria Analítica, a gente aprendeu como construir as equações paramétricas de um segmento de reta que conecta dois pontos  $P(x_1, y_1, z_1)$  e  $Q(x_2, y_2, z_2)$ . Para fazer isso temos que achar o vetor diretor. Depois usando esse vetor diretor e um dos pontos podemos construir as equações paramétricas na seguinte forma

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = a t + x_1 & \square \\ y(t) = b t + y_1 & \square \\ z(t) = c t + z_1 & \square \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

onde  $a, b$  e  $c$  são componentes do vetor diretor da reta.  $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$

## Velocidade e Aceleração

Se consideramos uma curva como a trajetória de uma partícula, podemos chamar  $\vec{r}(t)$  como o vetor de posição. Então a derivada deste vetor será o vetor de velocidade,  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$  e a segunda derivada será a aceleração,  $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$ . A rapidez é definido como o modulo (magnitude) do vetor de velocidade,  $v(t) = |\vec{v}(t)|$ .

Para calcular a velocidade de uma partícula que está se movimentando ao longo da hélice acima vamos fazer o seguinte procedimento

In[ ]:=

```
vectorLength[x_] := Sqrt[x.x]
velhelix = D[helix, t]
```

In[ ]:=

```
speedHelix = vectorLength[velhelix]
```

In[ ]:=

```
speedHelix = % // Simplify
```

In[ ]:=

```
acelHelix = D[velhelix, t]
```

In[ ]:=

```
acelHelix = D[helix, {t, 2}]
```

Chamamos uma curva de lisa se o seu vetor de velocidade seja uma função contínua e a rapidez nunca fique igual a zero.

## Reparametrização

Como já foi mencionado, a parametrização de uma curva não é única, ou seja, uma curva pode ser representada por parametrizações diferentes. Mas para as curvas que não se interceptam sempre há um jeito para transformar uma parametrização a outra. Esse procedimento se chama reparametrização. Este é possível através do uso da regra da cadeia.

Suponha que uma curva não-interceptante tem as duas seguintes parametrizações

$$F(t), t \in [a, b] \quad \text{e} \quad G(u), u \in [c, d]$$

Então existe uma função  $u = \varphi(t)$  tal que  $\varphi(a) = c$  e  $\varphi(b) = d$ . Então temos  $G(u) = G(\varphi(t)) = F(t)$ . Essa relação define a reparametrização da curva original. Se a parametrização for suave, logo  $\varphi$  é diferenciável e  $\varphi'$  é contínua. Então temos

$$F'(t) = G'(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

## Invariantes Geométricas

Agora a gente está pronto para calcular algumas quantidades invariantes de curvas. Vamos começar por o comprimento de arco.

## Comprimento de arco

Nós definimos o comprimento de arco como a integral da rapidez. Mais precisamente, o comprimento na curva  $\vec{r}(t)$  entre  $t = a$  e  $t = b$  é

$$L = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b |\vec{v}(t)| dt$$

Como a velocidade é não-negativa, a função comprimento de arco

$$s(t) = \int_a^t v(u) du$$

é sempre crescente. Usando o teorema fundamental de cálculo podemos calcular a derivada desta função por

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)|.$$

Agora vamos verificar que o comprimento de arco é independente da parametrização

$$\int_c^d |\vec{G}'(u)| du = \int_a^b |\vec{G}'(\varphi(t))| \varphi'(t) dt = \int_a^b |\vec{F}'(t)| dt.$$

No caso de uma curva espacial temos

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

Neste caso, para calcular o comprimento de arco temos

$$L = \int ds = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

Aplicando os conceitos acima, reparametrizando a curva em termo de comprimento de arco, para a hélice temos

Aqui a gente reescreve a curva com o parâmetro novo,  $s$

```
In[ ]:= unitHelix = helix /. t -> s / Sqrt[2]
```

Agora vamos calcular a “velocidade” (ou derivada) da hélice nesta nova parametrização

```
In[ ]:= newVelHelix = D[unitHelix, s]
```

E a rapidez é

```
In[ ]:= newSpeed = vectorLength[newVelHelix]
```

**Conclusão** : qualquer curva na parametrização de comprimento de arco tem rapidez igual 1

## Triedro de Frenet

É um conjunto abstrato de três vetores ( $\vec{T}$ ,  $\vec{N}$  e  $\vec{B}$ ) que diz respeito a propriedades cinemáticas de uma partícula que se move em uma trajetória curvilínea, usado em cálculo vetorial. No triedro, o vetor  $\vec{T}$  representa a tangente à curva, o vetor  $\vec{N}$  é a derivada de  $\vec{T}$ , e o vetor  $\vec{B}$  é o produto vetorial de  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$ . [Wikipedia]

### Na parametrização em relação ao comprimento de arco

Nesta seção as nossas curvas são parametrizadas em relação ao comprimento de arco.

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad s \in I$$

O vetor de velocidade

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{v}|} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}|}$$

é chamado de vetor tangente unitário. Esse vetor tem modulo 1 e é perpendicular ao vetor de aceleração (demonstre?).

O vetor normal unitário (normal principal) é definido como

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(s)}{|\vec{T}'(s)|}$$

Esse vetor é perpendicular ao vetor tangente ( $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$ ) e conseqüentemente a curva.

Os vetores  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$  determinem um plano que se chama plano osculador. Finalmente nos definimos o vetor binormal unitário como

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$$

Os três vetores  $T$ ,  $N$  e  $B$  constituem o triedro de Frenet. Esse sistema de coordenadas é independente de parametrização.

Agora vamos usar o Mathematica para calcular esse vetores para qualquer curva.

<code>In[ ]:=</code>	<code>unitVector[x_] = Simplify[<math>\frac{x}{\text{vectorLength}[x]}</math>]</code>
<code>In[ ]:=</code>	<code>UT = unitVector[D[unitHelix, s]] // Simplify</code>
<code>In[ ]:=</code>	<code>UN = unitVector[D[UT, s]] // Simplify</code>

In[ ]:=

```
UB = Cross[UT, UN] // Simplify
```

## Na parametrização geral

O triedro de Frenet também pode ser calculado em uma parametrização geral. Tendo a equação paramétrica da curva

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

o **vetor tangente unitário** é definido como

$$\vec{T}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

E o **vetor normal unitário** é

$$\vec{N}(t) = \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \frac{1}{|\vec{T}'(t)|} = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

Finalmente,

o **vetor binormal** é definido como producto vetorial dos vetores  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

## Curvatura e Torção

A curvatura mede, em qualquer ponto, o quanto a curva está se dobrando quanto estamos andando ao longo da curva. Dito de outra forma, mede a falha da curva em ser linear.

### Na parametrização em relação ao comprimento de arco

Nessa parametrização a curvatura é definida pela fórmula

$$\kappa(s) = |\vec{T}'(s)|, \quad s \in I \implies \vec{T}'(s) = \kappa(s) \vec{N}(s).$$

A torção mede o quanto a curva está torcendo ou a falha da curva é planar. Ou seja, a taxa de rotação do vetor binormal. A torção é determinada unicamente pela equação

$$\vec{B}'(s) = -\tau(s) \vec{N}(s)$$

da expressão acima temos que

$\vec{B}'(s) \cdot \vec{B}(s) = 0$ , pois  $\vec{B}(s)$  tem modulo constante. Também  $\vec{B}'(s)$  e  $\vec{N}(s)$  são paralelos, então eles se diferem de um fator scalar.

In[ ]:=

```
helcurv = vectorLength[D[UT, s]]
```

Então a helice tem curvatura constante  $\frac{1}{2}$ . E a torção é

In[ ]:=

```
vectorLength[D[UB, s]]
```

Praticamente sempre não é possível reparametrizar uma curva em termo de comprimento de arco. Por isso, as vezes, as formulas abaixo serão úteis para calcular a curvatura e torção.

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3}, \quad \tau = \frac{(\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}'}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2}, \quad \vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|}, \quad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

### Na parametrização geral

Podemos considerar a curvatura como a taxa de variação do vetor tangente em relação ao comprimento de arco. No caso de reta, como o vetor tangente é constante, a curvatura é zero.

$$\kappa(t) = \left| \frac{d\vec{T}(t)}{ds} \right| = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$$

A torção na parametrização geral é dada via

$$\vec{B}'(t) = \tau(t) |\vec{r}'(t)| \vec{N}(t)$$

Prestam atenção que essa equação é composta de três equações. Por exemplo, para o componente x temos

$$B_x'(t) = \tau(t) |\vec{r}'(t)| N_x(t)$$

Para achar a torção basta resolver uma dessas três equações. Tem outra formula para calcular a torção [Wikipedia]

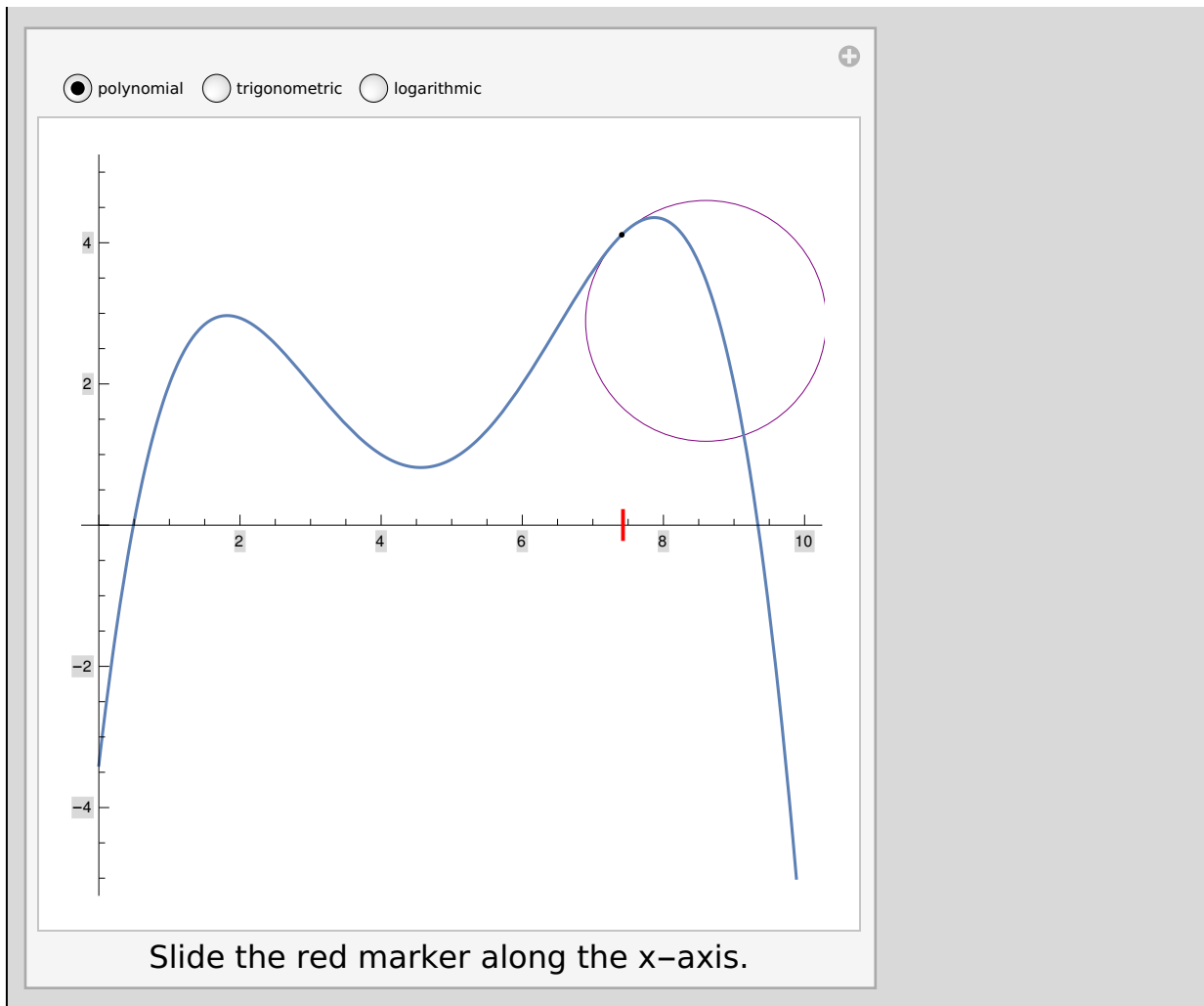
$$\tau(t) = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}'''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2}$$

### O círculo osculador

O círculo que melhor se aproxima da curva próximo a um ponto deve ser um que seja tangente à curva no ponto em questão. Mas existem muitos desses círculos. Escolhemos o círculo que tem a mesma curvatura que a curva e tem o centro ao longo do raio apontando na direção do vetor normal principal. O raio deste círculo é  $\rho = \frac{1}{\kappa(s)}$  e o centro fica no ponto

$$\vec{r}(s) + (1/\kappa(s))\vec{N}(s)$$



$Out[n] =$ 

Out[ ]:=



## Dois exemplos

Antes de começar estudar os exemplos vamos definir algumas funções que serão úteis

In[ ]:=

```
Clear[UT, UN, UB]
```

```

In[ ]:= velocity[r_] := Simplify[D[r, t]]
acceleration[r_] := Simplify[D[r, {t, 2}]]
speed[r_] := vectorLength[velocity[r]]
UT[r_] := unitVector[velocity[r]]
UN[r_] := unitVector[D[UT[r], t]]
UB[r_] := Simplify[Cross[UT[r], UN[r]]]

```

Definir as funções de curvatura e torção é um pouco mais complicado

```

In[ ]:= curvature[r_] := Simplify[vectorLength[D[UT[r], t]] / speed[r]]
torsion[r_] := tau /. Simplify[First[Solve[D[UB[r], t] == -tau * speed[r] * UN[r], tau]]]

```

## A astroide

A astroid foi definida parametricamente por

```

In[ ]:= astroid = {a Cos[t]^3, a Sin[t]^3} /. a -> 2

```

```

In[ ]:= ParametricPlot[astroid, {t, 0, 2 Pi}]

```

Calculamos a velocidade, rapidez e a aceleração como

```

In[ ]:= velocity[astroid]

```

```

In[ ]:= speed[astroid] // Simplify

```

```

In[ ]:= acceleration[astroid]

```

Usando speed[astroid], vemos que a velocidade da astroide é zero precisamente quando  $\sin(2t) = 0$ , que ocorre quando  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  ou  $\frac{3\pi}{2}$ . Assim, identificamos os locais das quatro cúspides que vimos no gráfico.

O proximo passo é computar a triedro de Frenet para a astroide

```

In[ ]:= UT[astroid]
% // Simplify

```

```

In[ ]:= UN[astroid] // Simplify

```

```

In[ ]:= UB[astroid]

```

E finalmente calculamos a curvatura e torção

```

In[ ]:= curvature[astroid]

```

```

In[ ]:= torsion[astroid]

```

A curvatura e a torção são indefinidas nas cúspides, onde  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  ou  $\frac{3\pi}{2}$ .

## A cicloide

Como já vimos a cicloide é uma curva plana definida via

```
In[ ]:= cycloid = {r (t - Sin[t]), r (1 - Cos[t])} /. r -> 2
```

```
In[ ]:= ParametricPlot[cycloid, {t, -4 Pi, 4 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

Antes de prosseguir, precisamos discutir uma diferença entre curvas planas e curvas espaciais. As fórmulas (e os programas do Mathematica) para velocidade, rapidez, aceleração, vetor tangente unitário, vetor normal unitário e curvatura funcionam igualmente bem para ambos os tipos de curvas. As fórmulas (e programas) para o vetor binormal e para torção funcionam apenas para curvas espaciais, uma vez que envolvem um produto vetorial. Como sabemos os valores desses itens para curvas planas, podemos simplesmente evitar o cálculo. Outra abordagem é adicionar um componente zero no final da parametrização do plano.

```
In[ ]:= cycloid = Join[cycloid, {0}]
```

```
In[ ]:= velocity[cycloid]
```

```
In[ ]:= acceleration[cycloid]
```

```
In[ ]:= speed[cycloid]
```

A rapidez da cicloide é zero quando  $\text{Cos}(t) = 1$ , o que acontece quando  $t = 0, 2\pi, 4\pi$ , etc. Estas são as cúspides onde a curva não é lisa. Agora podemos continuar a calcular o triedro de Frenet para o cicloide.

```
In[ ]:= UT[cycloid]
% // Simplify
```

```
In[ ]:= UN[cycloid]
% // Simplify
```

```
In[ ]:= UB[cycloid]
```

Como o cicloide é uma curva plana, sabíamos que o vetor binormal apontaria na direção z. Como poderíamos ter previsto o sinal negativo? O que isso significa?

```
In[ ]:= curvature[cycloid]
```

```
In[ ]:= torsion[cycloid]
```

Sem surpresa, a torção de uma curva plana é zero.

## A Epicloide

```
In[ ]:= Import[
  "/media/vahid/Windows/Users/Vahid/Google Drive/UERJ/Semestre Atual/Epicycloid.gif",
  "Animation"]
```

The red curve is an epicycloid traced as the small circle (radius  $r = 1$ ) rolls around the outside of the large circle (radius  $R = 3$ ).

```
In[ ]:= epicycloid := {(R + r) Cos[t] - r * Cos[ $\frac{R + r}{r} t$ ], (R + r) Sin[t] - r * Sin[ $\frac{R + r}{r} t$ ]}
```

```
In[ ]:= R = 10;
r = 1;
ParametricPlot[epicycloid, {t, 0, 2 Pi}]
```

## A Epitrocóide

```
In[ ]:= Import["/media/vahid/Windows/Users/Vahid/Google
  Drive/UERJ/Semestre Atual/Epitrochoid.gif", "Animation"]
```

The epitrochoid with  $R = 3$ ,  $r = 1$  and  $d = 1/2$

```
In[ ]:= epitrochoid := {(R + r) Cos[t] - d * Cos[ $\frac{R + r}{r} t$ ], (R + r) Sin[t] - d * Sin[ $\frac{R + r}{r} t$ ]}
```

```
In[ ]:= R = 10;
r = 5;
d = 1;
ParametricPlot[epitrochoid, {t, 0, 2 Pi}, PlotPoints -> 60]
```

### Exercício

Esboce a curva abaixo e calcule os vetores tangente unitário, normal unitário, o seu comprimento no intervalo dado. Também a sua curvatura e torção.

$$\vec{r}(t) = \cos(t) \sin(t) \hat{i} + \cos^2(t) \hat{j} + \sin(t) \hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

# Chapter 4: Campo Escalar e Vetorial

## Campo Escalar

Um exemplo clássico de campo escalar é o campo de temperatura,  $T(x,y,z)$ . Para cada ponto do espaço associamos um valor numérico que representa a temperatura naquele ponto. Por exemplo:  $T(2,0,-1)=22.1$ , isso significa que a temperatura no ponto  $(2,0,-1)$  é igual 22.1. O conceito de campo escalar é relacionado com o valor numérico que a função gera, perante do campo vetorial que gera um vetor para cada ponto do espaço. Vamos estudar o campo vetorial na próxima seção. Para visualizar um campo escalar podemos utilizar o comando `DensityPlot`.

Vamos imaginar que a temperatura de um plano metálico é descrito por a função  $T(x, y) = \frac{1}{|xy+1|}$ . A visualização desse campo é

```
In[ ]:= DensityPlot[ $\frac{1}{\text{Abs}[x y + 1]}$ , {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```

Como outro exemplo, imaginem que tem uma fonte térmica de 25 graus no ponto  $(0,0)$ . Na medida que se afastamos do ponto a temperatura cai. Depende da velocidade de caimento da temperatura, uma possível visualização seria

```
In[ ]:= DensityPlot[ $25 - (x^2 + y^2)$ , {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotLegends -> Automatic]
```

E se, no exemplo acima, fomos olhar para o espaço vamos ver

```
In[ ]:= DensityPlot3D[ $25 - (x^2 + y^2 + z^2)$ , {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, {z, -10, 10}]
```

## Campo Vetorial

Campo vetorial é uma função que associa um vetor para cada ponto do espaço. Por exemplo, esse campo pode ser o fluxo do vento de um ar-condicionado. Para cada ponto do espaço o vento tem uma velocidade diferente dos outros pontos e essa velocidade é representada com um vetor. Um campo vetorial tem o formato geral

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \hat{i} + Q(x, y, z) \hat{j} + R(x, y, z) \hat{k}$$

Em 2 D, um exemplo de campo vetorial pode ser  $\vec{F}(x, y) = -y \hat{i} + x \hat{j}$ . Para ver alguns desses vetores

```
In[ ]:= F2D[x_, y_] := {-y, x};
Table[Print[{x, y} -> F2D[x, y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```

Para visualizar esse campo podemos usar o comando `VectorPlot`

```
In[ ]:= VectorPlot[{-y, x}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```

Um dos campos vetoriais mais conhecidos é o campo gravitacional. O campo gravitacional entre dois objetos massivos de massa  $M$  e  $m$  localizados nos pontos  $\vec{r}$  e  $\vec{r}_1$  respetivamente é

$$\vec{F}(x, y, z) = - \frac{GmM}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{GmM}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{\frac{3}{2}}} ((x - x_1) \hat{i} + (y - y_1) \hat{j} + (z - z_1) \hat{k}).$$

Se um dos objetos for na origem do sistema de coordenadas teremos ( $\vec{r}_1 = 0$ )

$$\vec{F}(x, y, z) = - \frac{GmM}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = \frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}).$$

Agora vamos plotar esse campo vetorial

In[ ]:=

```
m = 1;
M = 100;
G = 1;

F[x_, y_, z_] = - (G m M / (x^2 + y^2 + z^2)^(3/2)) {x, y, z}

VectorPlot3D[F[x, y, z], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, {z, -10, 10}]
```

No gráfico acima, é fácil de ver que a força gravitacional do objeto  $M$  é uma força atrativa que perde a potencia na medida que se afastamos do objeto  $M$ .

## Chapter 5: Integral de Linha de Campos Escalares

Vamos começar estudar a integral de linha de um campo vetorial utilizando um exemplo. Aqui pretendemos calcular a massa de um arame não-homogéneo. Isso significa que grossura do arame não é constante. Nos temos o formato, densidade do material do arame. A densidade linear é definida como

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{comprimento}} \text{ ou seja } \rho = \frac{m}{l}$$

Na sua forma diferencial temos

$$\rho = \frac{dm}{ds}$$

Aqui  $ds$  é o elemento de comprimento. A relação acima pode ser escrito como

$$m = \int dm = \int \rho ds$$

Quando a densidade é constante ela sai da integração e a gente fica com

$$m = \rho \int ds = \rho L.$$

Mas se a densidade for uma função, ou seja,  $\rho = \rho(x, y, z)$ , a gente tem um exemplo de um campo escalar. Neste caso, a densidade é uma função de associa um valor a cada ponto do espaço. Mas para calcular a integral de massa a gente não precisa de todos os valores da função de densidade. Basta só os valores da função ao longo do arame. Para fazer isso temos que “comunicar” com a função para que só pegue os pontos que pertencem a arame, ou seja, a curva espacial. Na linguagem matemática isso se chama parametrização da função e é feito na seguinte maneira

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \\ \rho = \rho(x, y, z) \end{cases} \rightarrow \rho(x(t), y(t), z(t))$$

Então para uma integral de linha de campo escalar ao longo da curva C temos

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left| \vec{r}'(t) \right| dt$$

## Exemplo

Considere a seguinte curva, uma hélice. Também poderia representar, digamos, um arame que foi transformado em um furtivo. Observe que estamos usando os limites  $0 \leq t \leq 10$  :

```
In[ ]:= curva[t_] = {Cos[2 * Pi * t], Sin[2 * Pi * t], 1 + t / 5}
ParametricPlot3D[f[t], {t, 0, 10}, ViewPoint -> {0, -10, 1}]
```

Suponhamos que sabemos que a densidade do arame (em gramas por centímetro) em qualquer ponto e é igual a sua distância do plano x-y, ou seja,

```
In[ ]:= f[x_, y_, z_] = z
```

Então a massa total do arame é :

$$Mass = \int_C g ds = \int_0^{10} g(\vec{r}(t)) \left| \vec{r}'(t) \right| dt$$

Precisamos aprender a resolver essa integral com o computador. Primeiro de tudo, podemos fazer com que o Mathematica encontre o modulo da derivada de f. A derivada será um vetor e a função Norm encontrará seu tamanho :

```
D[curva[t], t]
Norm[%] // Simplify
```

Em seguida, temos que inserir a f(t) em g(x, y, z) :



In[ ]:=

```
Apply[f, curva[t]]
```

Hã? Por que usamos Apply [g, f [t]] quando queremos g [f [t]]? Nós tivemos que fazer isso para evitar um problema chato. Lembre-se, nós temos

$$f[t] = \{t \cos[2\pi t], t \sin[2\pi t], 2t\}$$

Para nossa integral, queremos avaliar g [t Cos [2π t], t Sin [2 π t], 2 t], mas o Mathematica entende g [f [t]] como g [{t Cos [2π t], t Sin [2π t], 2 t}]

Veja a diferença? O comando Apply faz tudo isso funcionar corretamente.

Agora podemos colocá-los todos juntos para encontrar a massa do arame :

In[ ]:=

```
Integrate[Apply[g, f[t]] * Norm[D[f[t], t]], {t, 0, 10}]
N[%]
```

Exercício:

Considere a curva C parametrizada por  $r(t) = (t, t^3, t^2)$ , onde  $0 \leq t \leq 1$ . Os engenheiros que constroem um novo avião percebem que terão que ter um arame na forma de C entre dois sistemas; por causa das diferentes tensões colocadas em diferentes partes do casco, o arame tem que ser mais denso em algumas áreas. Se a densidade do fio for dada por  $g(x, y, z) = 2x + 4y$  gramas/centímetro, encontre a massa do fio. (resposta: 5.09)

Exercício:

Siga as instruções do exercício anterior usando as seguintes funções:  
 $f(t) = (t, \cos t, \sin t)$  onde  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $g(x, y, z) = -x y z$ . (resposta: 2.22)

## Chapter 6: Integral de Linha de Campos Vetoriais

### Introdução

#### A força gravitacional proximo da terra

Neste exemplo, consideramos o campo de força gravitacional para pequenos objetos próximos da Terra. Nós aproximamos a Terra pelo plano x-y, e assumimos que a aceleração devida à gravidade é a constante  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . A primeira lei do movimento de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , dá uma expressão para a força gravitacional de um objeto :  $mg$ , onde  $m$  é a massa do objeto. Esta força puxa para baixo, então o campo de força gravitacional é  $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, -mg)$ , o que não deveria ser uma surpresa. Aqui está um gráfico, para um valor específico de  $m$ .

In[ ]:=

```
m = 1;
g = 9.8;
F[x_, y_, z_] = {0, 0, -m * g} * If[(z ≤ 0), 0, 1];

vf2 = VectorPlot3D[F[x, y, z], {x, -50, 50}, {y, -50, 50}, {z, -50, 50}, VectorScale → Small]
```

Seja  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , parametrize uma curva  $C$ . Então  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$  representa o trabalho feito por gravidade em uma partícula que se move desde o começo de  $C$  até o fim. Em outras palavras, essa é a energia potencial gravitacional que a partícula perde (ou "usa") seguindo a curva  $C$ . Se você estudou física, deve esperar que isso seja igual a  $mgh = mg(r_3(a) - r_3(b))$ , onde  $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ . Vamos provar isso.

Por definição,  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$  e como  $\vec{F}$  é constante,  $\vec{F}(\vec{r}(t)) = (0, 0, -mg) = -mg\hat{k}$ , onde  $\hat{k} = (0, 0, 1)$ . Então nós temos  $\int_a^b (-mg\hat{k}) \cdot \vec{r}'(t) dt = -mg \int_a^b r'_3(t) dt = -mg(r_3(b) - r_3(a))$ , usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

**Exercício 1:** Use Mathematica para verificar essa conta, para o caminho parametrizado por  $\vec{r}(t) = (50e^{-t} \cos(t), 50e^{-t} \sin(t), t^2 + 5t)$ ,  $0 \leq t \leq 5$ . [Especificamente: Use **ParametricPlot3D** e **Show** para traçar o caminho e o campo de vetores juntos e, em seguida, avalie a integral. Finalmente, verifique se a resposta é o que você esperava! Use os valores  $m = 1$ ,  $g = 9.8$ , conforme indicado acima.][resposta -490]

## A força gravitacional longe da terra

A lei da gravitação de Newton mostra como a força da gravidade da Terra sobre um objeto diminui à medida que o objeto se afasta da Terra. Se o centro da terra estiver na origem  $(0, 0, 0)$ , então a fórmula exata é  $\vec{F}(\vec{r}) = \left( \frac{GmM}{|\vec{r}|^2} \right) \left( -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) = -\frac{GmM}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$ .

Veja o que as letras significam :

$\vec{F}$  é a força gravitacional; um vetor

$\vec{r}$  é a posição do objeto- o vetor  $(x, y, z)$

$G$  é a constante gravitacional universal,  $6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$

$m$  é a massa do objeto

$M$  é a massa da Terra,  $5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Nesta fórmula, o primeiro fator,  $\left( \frac{GmM}{|\vec{r}|^2} \right)$ , é um escalar, que mede quão forte a força gravitacional será. O segundo fator,  $\left( -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)$ , é o vetor unitário apontando do objeto para a Terra; naturalmente, esta é a direção da força gravitacional!

Suponha que a posição do nosso objeto no tempo  $t$  seja dada por  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Então o trabalho feito pela gravidade da Terra entre o tempo  $a$  e o tempo  $b$  é dado pela integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ , onde  $C$  é a curva parametrizada por  $\vec{r}$ .

**Exercício 2:** Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\vec{r}(t) = (0, 0, \frac{R}{1+t})$ ,  $0 < t < 1$ , onde  $R$  é o raio da Terra,  $6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

a) Quais são os pontos finais de  $C$  - onde eles estão no espaço?

b) Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , o trabalho feito por gravidade da Terra para um amigo de 90 kg viajando ao longo  $C$ . [Dica: Sua resposta deve ser negativa: isso representa um trabalho contra a gravidade.]

c) Calcule o trabalho feito por gravidade em um Boeing 747-400 com massa 396890 kg quando sobe para uma altitude de cruzeiro de 10000m. [Dica: você pode usar qualquer caminho com altura inicial  $R$  e altura final  $R + 10000$ .]

d) Compare suas respostas às partes b) e c).

## Um campo vetorial diferente!

No primeiro exemplo de força gravitacional, descobrimos que o valor da integral de linha do campo de força gravitacional dependia apenas das alturas dos pontos extremos. O mesmo é verdade no segundo exemplo da força gravitacional. Quando as integrais de linha de um campo vetorial dependem apenas dos pontos finais (e não do caminho que os conecta), o campo vetorial é chamado de **conservativo**. Dos dois primeiros exemplos, uma pessoa pode ter a ideia de que isso sempre acontece, mas na verdade é bem raro. No exercício a seguir, por exemplo,  $\vec{F}$  não é conservativo (daí o título desta subseção).

**Exercício 3:** Seja  $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, z)$ . Para cada curva  $C$ : encontre os pontos extremos e depois calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

a)  $C$  é a metade superior do círculo unitário no plano  $xOy$ , ou seja, onde temos  $y \geq 0$ . [Dica: Todos os pontos no plano  $x-y$  têm o mesmo valor  $z$  - o que é isso?]

b)  $C$  é parametrizado por  $\vec{r}(t) = (\cos t, -\sin t, \sin 4t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

c) C é contido em plano  $y=0$  e também na folha da parabolóide  $z = x^2 - 1$ ; Ela começa no  $x=1$  e termina no  $x=-1$ .

d) C é parametrizado por  $\vec{r}(t) = (-t, e^{\frac{-1}{1-t^2}} \cos(20t), e^{\frac{-1}{1-t^2}} \sin(20t))$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . [Dica: Esta é uma parte difícil de computar, mesmo para o Mathematica. Em vez de usar o comando Integrate nesta parte, use **NIntegrate**, que aproxima o valor da integral. Observe que  $\vec{r}(t)$  não está realmente definido nos dois pontos extremos, então você terá que integrar de “perto de -1” para “perto de 1”. Tente integrar de -0.99 a 0.99, depois de -0.999 a 0.999 e assim por diante, para ver se os valores se aproximam de algo. ]

## O Teorema Fundamental das Integrais de Linha

### Teorema:

Seja C uma curva suave dada pela função vetorial  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Seja  $f$  uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente  $\vec{\nabla}f$  é contínuo em C. Então

$$\int_C \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

**OBSERVAÇÃO:** O Teorema acima diz que podemos avaliar a integral de linha de um campo vetorial conservativo (o campo vetorial gradiente da função potencial  $f$ ) simplesmente sabendo o valor de  $f$  nos pontos finais de C. De fato, o Teorema acima diz que a integral de linha de  $\vec{\nabla}f$  é a variação total em  $f$ . Se  $f$  é uma função de duas variáveis e C é uma curva plana com o ponto inicial  $A(x_1, y_1)$  e ponto terminal  $B(x_2, y_2)$ , então o Teorema torna-se

$$\int_C \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

### Teorema:

Seja  $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$  um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conexa D. Suponha que P e Q tenham derivadas contínuas de primeira ordem e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ em todo o D}$$

Então  $\vec{F}$  é **conservativo**

### Exemplo

Determine se o campo vetorial  $\vec{F} = (x - y)\hat{i} + (x - 2)\hat{j}$  é ou não é conservativo

**Exemplo :**

(a) Se  $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy)\hat{i} + (x^2 - 3y^2)\hat{j}$ , encontre uma função  $f$  tal que  $\vec{F} = \vec{\nabla}f$

(b) Calcule a integral de linha  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ,

onde  $C$  é a curva dada por  $\vec{r}(t) = e^t \sin(t)\hat{i} + e^t \cos(t)\hat{j}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$

```
Clear[f, x, y]
sol = DSolve[{D[f[x, y], x] == 3 + 2 x y, D[f[x, y], y] == x^2 - 3 y^2}, f[x, y], {x, y}]
f[x_, y_] = f[x, y] /. sol[[1, 1]]
r[t_] = {Exp[t] Sin[t], Exp[t] Cos[t]}
resultado = Apply[f, r[π]] - Apply[f, r[0]]
```

**Exemplo :** Se  $\vec{F}(x, y, z) = y^2\hat{i} + (2xy + e^{3z})\hat{j} + 3ye^{3z}\hat{k}$ ,

encontre uma função  $f$  tal que  $\vec{\nabla}f = \vec{F}$  (resposta :  $e^{3z}y + xy^2 + C$ )

## Chapter 7: Teorema de Green

O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples  $C$  e uma integral dupla sobre a região do plano  $D$  delimitada por  $C$ . Ou seja, em um lado a gente tem uma integral de linha de um campo vetorial e no outro lado a gente tem uma integral dupla.

**Teorema de Green:** Seja  $C$  uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja  $D$  a região delimitada por  $C$ . Se  $P$  e  $Q$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha  $D$ , então

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

### Exemplo

Calcule  $\oint_C x^4 dx + xy dy$ , onde  $C$  é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de  $(0, 0)$  a  $(1, 0)$ , de  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$ , e de  $(0, 1)$  a  $(0, 0)$ .

In[ ]:=

```
Graphics[{Pink, Triangle[{0, 0}, {1, 0}, {0, 1}]}],
ImageSize -> Small, Axes -> True, AxesLabel -> {x, y}]
```

Aqui nos temos uma curva fechada (o triângulo) e uma função vetorial ( $\vec{F}(x, y) = x^4\hat{i} + xy\hat{j}$ ). Calculando o lado direito da igualdade

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^4) = y$$

Então em vez de resolver a integral de linha podemos resolver a integral dupla

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} y \, dy \, dx$$

O Mathematica ajuda a gente para resolver-lo

In[ ]:=

```
Integrate[y, {x, 0, 1}, {y, 0, 1 - x}]
```

Exercício : Resolvem o lado direito da igualdade e mostram que o resultado é igual mesmo!

Exercício : Calcule  $\oint_C (3y - e^{\sin(x)}) \, dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) \, dy$ ,  
onde C é o círculo  $x^2 + y^2 = 9$ .

Podemos usar do teorema de Green para calcular a área de uma região fechada.

Basta escolher uma função arbitraria  $\vec{F}(x, y) = P(x, y) \hat{i} + Q(x, y) \hat{j}$  de tal forma que

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ . Por exemplo, as seguintes funções satisfazem essa condição:

$$\vec{F}(x, y) = -y \hat{i} \rightarrow A = -\oint y \, dx$$

$$\vec{F}(x, y) = x \hat{j} \rightarrow A = \oint x \, dy$$

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{2} \hat{i} + \frac{x}{2} \hat{j} \rightarrow A = -\frac{1}{2} \oint y \, dx - x \, dy$$

Exercício : Determine a área delimitada pela elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

## Integral Dupla: Regiões no plano

Através de um exemplo vamos aprender como achar uma região delimitada pelas duas curvas no plano.

Exemplo: Calcular a área delimitada pelas curvas abaixo

$$f(x) = \sin(x + 1)$$

$$g(x) = x^3 - 3x + 1$$

In[ ]:=

```
f = Sin[x + 1]
```

```
g = x^3 - 3 x + 1
```

```

In[ ]:= twocurves =
Plot[{f, g}, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {{}}, Thickness[0.008]], PlotLegends -> {f, g}]

```

As duas curvas tem três pontos de interseção. Para Achar esses pontos vamos usar o comando **FindRoot**. O comando **Solve** não funciona para esse sistema pois a função f não é um polinomial. **FindRoot** consegue resolver qualquer sistema de equações porem é mais lento e precisa de um ponto perto da solução!

```

In[ ]:= FindRoot[f == g, {x, -3}]

```

```

In[ ]:= x1 = x /. FindRoot[f == g, {x, -2}]
x2 = x /. FindRoot[f == g, {x, 0}]
x3 = x /. FindRoot[f == g, {x, 2}]

```

Agora podemos plotar a região da integração

```

In[ ]:= Show[twocurves, Table[Graphics[Line[{{x, f}, {x, g}}]], {x, x1, x3, 0.1}]]

```

Já podemos montar as integrais

```

In[ ]:= leftarea = Integrate[1, {x, x1, x2}, {y, f, g}]
rightarea = Integrate[1, {x, x2, x3}, {y, g, f}]
area = leftarea + rightarea

```

Esse método é geral e vai servir para outros casos alem de calcular a área entre duas curvas. Mas se o objetivo for só calcular a área tem outra forma de calcular essa integral

```

In[ ]:= Integrate[Abs[f - g], {x, x1, x3}]

```

**Automatizar o plot da região vertical entre duas curvas  $y=f(x)$  e  $y=g(x)$**

```

In[ ]:= verticalRegion[a_, b_, f_, g_] := Module[{twocurves}, twocurves =
Plot[{f, g}, {x, a, b}, PlotStyle -> {{}}, Thickness[0.008]], PlotLegends -> {f, g}];
Show[twocurves, Table[Graphics[Line[{{x, f}, {x, g}}]], {x, a, b,  $\frac{(b-a)}{150}$ }}]]

```

```

In[ ]:= verticalRegion[x1, x3, f, g]

```

**Exercício :** Montar uma função igual acima para as regiões horizontais ( $x=f(y)$  e  $x=g(y)$ ).

## Integral Dupla: Regiões Polares

Aqui a gente pretende resolver as integrais na seguinte forma

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta$$

Ou seja, a gente quer plotar as regiões definidas nos sistemas de coordenadas polares que são delimitadas por linhas de  $\theta=\alpha$  e  $\theta=\beta$ , e ficam entre curvas  $r = r_1(\theta)$  e  $r = r_2(\theta)$

Para poder fazer isso vamos transformar to sistemas de coordenadas cartesianas.

```
In[ ]:= xp[r_] := r * Cos[t]
        yp[r_] := r * Sin[t]
```

Aí a nossa função é montada na forma abaixo

```
In[ ]:= polarRegion[a_, b_, R1_, R2_] := Module[{twocurves},
  twocurves = PolarPlot[{R1, R2}, {t, a, b}, PlotStyle -> {{}}, Thickness[0.008]];
  Show[twocurves, Table[Graphics[Line[{xp[R1], yp[R1]}, {xp[R2], yp[R2]}]],
    {t, a, b, (b - a) / 50}]]]
```

Como um exemplo para região entre dois círculos abaixo temos

```
In[ ]:= circ1 = 2 Cos[t];
        circ2 = 4 Cos[t];
```

```
In[ ]:= polarRegion[-Pi / 2, Pi / 2, circ1, circ2]
```

E essa área é

```
In[ ]:= Integrate[r, {t, -Pi / 2, Pi / 2}, {r, circ1, circ2}]
```

## Chapter 8: Operadores Vetoriais

Neste chapter, definiremos duas operações que podem ser realizadas com campos vetoriais e

que são essenciais nas aplicações de cálculo vetorial em mecânica dos fluidos e em eletricidade e magnetismo. Cada operação lembra uma derivação, mas uma produz um campo vetorial enquanto a outra gera um campo escalar.

### Rotacional (curl)



Se  $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e as derivadas parciais de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  existem, então o rotacional de  $\vec{F}$  é o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Aqui vamos definir uma notação para operador diferencial vetorial  $\nabla$  (del)

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

A gente já conhece essa notação lembrando do gradiente

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Usando nesta notação o rotacional pode ser escrito na forma de determinante que é mais resumida

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

A notação  $\partial_x$ ,  $\partial_y$  e  $\partial_z$  significam  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  e  $\frac{\partial}{\partial z}$  respectivamente. Abrindo o determinante acima a gente se encontra a definição do rotacional. Agora vamos utilizar o Mathematica para fazer essa operação. A notícia boa é que tem um comando para calcular rotacional

In[ ]:=

```
vec[x_, y_, z_] = {x * y, y^2, z}
Curl[vec[x, y, z], {x, y, z}]
```

## Exemplo

Se  $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{i} + xyz\hat{j} - y^2\hat{k}$ , determine  $\text{rot } \vec{F}$ .

In[ ]:=

```
F = {x z, x y z, -y^2}
Curl[F, {x, y, z}]
```

**Teorema:** Se  $f$  é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{rot}(\vec{\nabla} f) = 0$$

**Exercício:** Demonstrem o teorema acima com o Mathematica

Como um campo vetorial conservativo é da forma  $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ , o teorema acima pode

ser reescrito como segue:

**Se  $\vec{F}$  é conservativo, então  $\text{rot } \vec{F} = \mathbf{0}$ .**

Theorema : Se  $\vec{F}$  for um campo vetorial definido sobre todo  $\mathbb{R}^3$  cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e  $\text{rot } \vec{F} = \mathbf{0}$ ,  $\vec{F}$  será um campo vetorial conservativo.

### Um campo conservativo não gira!

A razão para o nome rotacional é que o vetor rotacional está associado com rotações. Por exemplo, imaginem que  $\vec{F}$  represente um campo de velocidade em mecânica dos fluidos. Partículas perto de  $(x, y, z)$  no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de  $\text{rot } \vec{F}(x, y, z)$ , e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo. Se  $\text{rot } \vec{F} = \mathbf{0}$  no ponto  $P$ , então o fluido é isento de rotações em  $P$  e  $\vec{F}$  é chamado irrotacional em  $P$ . Em outras palavras, não há nenhum turbilhão ou redemoinho em  $P$ . Se  $\text{rot } \vec{F} = \mathbf{0}$ , uma pequena roda de pás move-se com o líquido, mas não roda em torno do seu eixo. Se  $\text{rot } \vec{F} \neq \mathbf{0}$ , a roda com pás giraria em torno de seu eixo.

Exercício : Mostrem que o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = y^2 z^3 \hat{i} + 2 x y z^3 \hat{j} + 3 x y^2 z^2 \hat{k}$  é conservativo e depois achem a sua função potencial.

Vamos olhar para o gráfico de um campo conservativo e um não-conservativo

```
In[ ]:= StreamPlot[{- y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2)}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```

```
In[ ]:= StreamPlot[{x, y}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```

### Divergente

### Operador de Laplace ou Laplaciano

## Chapter 9: Sistemas de Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Em preparação

# Chapter 10: Planos Tangentes

Esboçar um plano

Usar derivadas parciais para achar planos tangentes

Usar derivadas parciais para achar a equação geral do plano tangente

Vetor Gradiente como um campo vetorial

Todo mundo se lembra da definição do vetor gradiente mas vamos repetir!

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

A Mathematica tem uma função interna para calcular o vetor gradiente de qualquer função. Para a função

$$z = x^2 + 3xy + y^2$$

temos

```
In[ ]:= grad = Grad[f[x, y], {x, y}]
```

O objetivo desta subseção é mostrar que esse vetor é perpendicular as curvas de nível. Mas primeiro, vamos ver que o vetor gradiente é um campo vetorial. Mas o que é um campo vetorial?!

Um campo vetorial é uma função que associa um vetor para cada ponto do espaço( ou plano). Por exemplo,

$$\vec{F}(x, y, z) = \{x, y, z\}$$

O gráfico desta função é

```
In[ ]:= VectorPlot3D[{x, y, x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -3, 3}, VectorScale -> Small]
```

ou no plano

```
In[ ]:= VectorPlot[{x, y}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

Então o vetor gradiente também pode ser interpretado com um campo vetorial. O campo vetorial associado com o gradiente da nossa função é

```
In[ ]:= gradplot = VectorPlot[grad, {x, -30, 30}, {y, -30, 30}]
```

Tem uma função mais interessante para esboçar o vetor gradiente com uma corrente

```
In[ ]:= gradplot1 = StreamPlot[grad, {x, -30, 30}, {y, -30, 30}]
```

## O vetor gradiente e as curvas de nível

Agora vamos dar uma olhada nas curvas de nível da função

```
In[ ]:= nivel = ContourPlot[f[x, y], {x, -30, 30},
    {y, -30, 30}, Contours -> 50, ContourShading -> None];
nivel1 = ContourPlot[f[x, y], {x, -30, 30}, {y, -30, 30},
    Contours -> 50, ColorFunction -> "Pastel"]
```

Colocando essas curvas de nível junto com o vetor gradiente dá

```
In[ ]:= Show[nivel, gradplot]
```

Ou melhor

```
In[ ]:= Show[nivel1, gradplot1]
```

Neste gráfico é possível ver que o vetor gradiente em cada ponto é perpendicular a curva de nível que passa por aquele ponto. Em regiões que as curvas de nível são mais densas, o módulo do vetor gradiente é maior, mostrando que a variação da função é maior.

```
In[ ]:= Import["/home/vahid/Google Drive/UERJ/Minhas
    Apostilas/Analise Vetorial - Notebook do Mathematica/C2_2.png"]
```

## Vetor gradiente e as superfícies de nível

Vamos olhar para a superfície hiperboloide de suas folhas

```
In[ ]:= hiper = z2 - x2 - y2
```

```
In[ ]:= cp3d = ContourPlot3D[hiper, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}]
```

```
In[ ]:= grad3d = Grad[hiper, {x, y, z}]
```

```
In[ ]:= plotgrad3d =
    VectorPlot3D[grad3d, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5}, VectorScale -> Small]
```

```
In[ ]:= Show[plotgrad3d, cp3d]
```

## Plano tangente via vetor gradiente

Outra maneira de encontrar o plano tangente para uma superfície é usar o vetor gradiente. Lembre-se de que o vetor gradiente de uma função  $f(x, y)$  é definido como

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Hmmm. Este é um vetor bidimensional, e para definir um plano em espaço, definitivamente precisamos de vetores com três componentes. Nós contornamos isso fazendo pequenas reorganizações. Nossa superfície é definida por  $z = f(x, y)$ . Poderíamos mover tudo para o mesmo lado e dizer que nossa superfície é definida pela equação

$$z - f(x, y) = 0$$

Você pode estar pensando que este é um passo estranho; de alguma forma, é uma maneira mais complicada de escrevê-lo. Isso é verdade, e vai ficar um pouco pior. Em vez de dizer que nossa superfície é definida por essa equação, vamos definir uma nova função :

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

E agora dizemos que nossa função é a superfícies de níveis definido por  $g(x, y, z) = 0$ . Então, agora, em vez da afirmação simples e simples  $z = f(x, y)$ , estamos de repente falando sobre conjuntos de níveis. Caramba! Há uma razão para isso, no entanto ...

Observe que  $g(x, y, z)$  é uma função de três variáveis, e seu gradiente é

$$\vec{\nabla} g(x, y, z) = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).$$

- Podemos começar com um ponto  $(x, y, z)$  que esteja na superfície de nível  $g(x, y, z) = 0$ .
- Por causa da maneira como definimos  $g(x, y, z)$ , isso é o mesmo que dizer que o ponto está na superfície  $z = f(x, y)$ .
- Além disso,  $\vec{\nabla} g(x, y, z)$  será perpendicular (ou normal) à nossa superfície nesse ponto.
- Em particular, podemos usar o  $\vec{\nabla} g(x, y, z)$  como um vetor normal para definir a equação do nosso plano tangente!

Vamos usar esse método rapidamente para encontrar o mesmo plano tangente com o qual estamos trabalhando o tempo todo. Lembre-se que a função é dada por :

In[ ]:=

```
f[x_, y_] = x^2 + 3 x * y + y^2
```

Então podemos fazer nossa mágica "nova" função como:

In[ ]:=

```
g[x_, y_, z_] = z - f[x, y]
```

Estamos interessados no gradiente no ponto  $(1, -2, -1)$ .

In[ ]:=

```
gradg[x_, y_, z_] = Grad[g[x, y, z], {x, y, z}]
gradg[1, -2, -1]
```

Qual é exatamente o que encontramos antes como o vetor normal ao plano tangente. Show!

## Chapter 11: Superfícies Parametrizadas

Ainda não definimos rigorosamente as superfícies, mas você provavelmente tem uma ideia intuitiva do que é uma superfície. É como um pedaço de papel, mas não precisa ser plana; pode ser dobrado, curvo ou até ter buracos. Às vezes, uma superfície envolve uma região sólida no espaço. Se assim for, chamamos de **superfície fechada**. Plano é um exemplo de uma superfície aberta e esfera é uma superfície fechada.

## Parametrizar uma superfície

Muitas vezes nossas superfícies são (um pedaço de) o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$ , como neste exemplo :

```
In[ ]:= f[x_, y_] = x^2 + y^2
Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```

O Mathematica pode desenhar ótimos gráficos como este, mas o Plot3D tem suas limitações. Por exemplo, se quiséssemos plotar o gráfico de  $x = y^2 + z^2$ ? Você deve saber, olhando para esta equação, que este é um parabolóide, assim como a nossa imagem acima, exceto que este se abre na direção do eixo x positivo. Suponha que tentássemos traçar isso com Plot3D :

```
In[ ]:= Plot3D[y^2 + z^2, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```

Nós temos exatamente a mesma imagem de antes! Mas olhando com calma percebemos que o parabolóide abre para cima, o que é incorreto! A razão é que Plot3D espera uma função de duas variáveis e interpreta os valores da função como a altura. Normalmente, damos a ele uma função de x e y, e assim o eixo z representa a altura, isso se encaixa em nossa visão do mundo.

Como podemos obter um gráfico correto de  $x = y^2 + z^2$  do Mathematica? Uma possibilidade é usar as equações paramétricas. A gente já viu como fazer uma “parametrização trivial” de uma curva plana (2D) tipo  $y = g(x)$ . a parametrização fica  $\vec{r}(x) = (x, g(x))$ . Na mesma forma podemos parametrizar a superfície acima usando y, z como os parâmetros. Defina

$$\vec{r}(y, z) = (y^2 + z^2, y, z) = \begin{cases} x(y, z) = y^2 + z^2 \\ y(y, z) = y \\ z(y, z) = z \end{cases}$$

Agora podemos traçar o gráfico de  $\vec{r}$  usando ParametricPlot3D :

```
In[ ]:= Clear[y, z, surf]
surf[y_, z_] = {y^2 + z^2, y, z}
ParametricPlot3D[surf[y, z], {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```

E você pode ver que esta é a abertura da parabolóide é na direção positiva do eixo  $x$ , conforme desejado.

Observe que estamos usando dois parâmetros agora, o que é diferente de quando plotamos curvas. Isso faz sentido, se você pensar sobre isso. Curvas são como uma linha, um objeto unidimensional, então elas requerem um parâmetro. As superfícies são criaturas bidimensionais e, portanto, exigem dois parâmetros.

## Mais Exemplos

Vamos ver mais exemplos de como parametrizar superfícies. A gente já sabe que as regiões circulares são muito importantes, e há uma técnica que você deve aprender. Muitas de nossas superfícies serão relativamente fáceis de descrever usando coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ , que foram cobertas no cálculo 2. Porém, uma parametrização tem que ser em coordenadas retangulares  $(x, y, z)$ , então não podemos simplesmente descrever a superfície em coordenadas cilíndricas e dizer que terminamos. Mas, se descrevermos a superfície em coordenadas cilíndricas, podemos usar as seguintes fórmulas para converter a nossa descrição em coordenadas retangulares :

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos[\theta] \\y &= \rho \sin[\theta] \\z &= z\end{aligned}$$

### Exemplo 1: Discos de Raio $R$ no Plano $z = h$

Em coordenadas cilíndricas, tal disco é descrito por  $(\rho, \theta, h)$  onde  $0 \leq \rho \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , e  $h$  é algum número constante. Convertendo para coordenadas retangulares, temos :  $\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos[\theta], \rho \sin[\theta], h)$ , onde  $\rho$  e  $\theta$  tem os mesmos limites ( $\rho$  e  $\theta$  são nossos parâmetros agora.) Por exemplo, se  $R = 1$  e  $h = 0$

```
In[ ]:= f[p_, theta_] = {p * Cos[theta], p * Sin[theta], 0}
disk0 = ParametricPlot3D[f[p, theta], {p, 0, 1}, {theta, 0, 2 Pi}]
```

Ou, com outros valores de  $h$  :

```
In[ ]:= disk1 = ParametricPlot3D[{p * Cos[theta], p * Sin[theta], 1}, {p, 0, 1}, {theta, 0, 2 Pi}]
disk2 = ParametricPlot3D[{p * Cos[theta], p * Sin[theta], 2}, {p, 0, 1}, {theta, 0, 2 Pi}]
```

E colocando todos juntos temos

```
In[ ]:= Show[disk2, disk1, disk0]
```

### Exemplo 2: Um anel

Na verdade, não usaremos muito isso, mas é um exemplo interessante a ser desta-

cado. Suponha que nós parametrizamos o disco de raio 4 no plano  $z = 1$  :

```
In[ ]:= f[s_, t_] = {s * Cos[t], s * Sin[t], 1}
ParametricPlot3D[f[s, t], {s, 0, 4}, {t, 0, 2 Pi}]
```

Agora, em vez de deixar  $s$  variar de 0 a 4, vamos usar valores de  $s$  de 2 a 4 :

```
In[ ]:= ParametricPlot3D[f[s, t], {s, 2, 4}, {t, 0, 2 Pi}]
```

Este tipo de superfície é chamado de anel. Mais informalmente, podemos chamá-la como uma “borracha”, como daquela pecinha que você pode comprar na loja de ferramenta.

### Exemplo 4 : Cone

A parametrização do cone é dada por  $\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos[\theta], \rho \sin[\theta], \rho)$ . Vamos plotar um cone de raio 4

```
In[ ]:= f[s_, t_] = {s * Cos[t], s * Sin[t], s}
ParametricPlot3D[f[s, t], {s, 0, 4}, {t, 0, 2 Pi}]
```

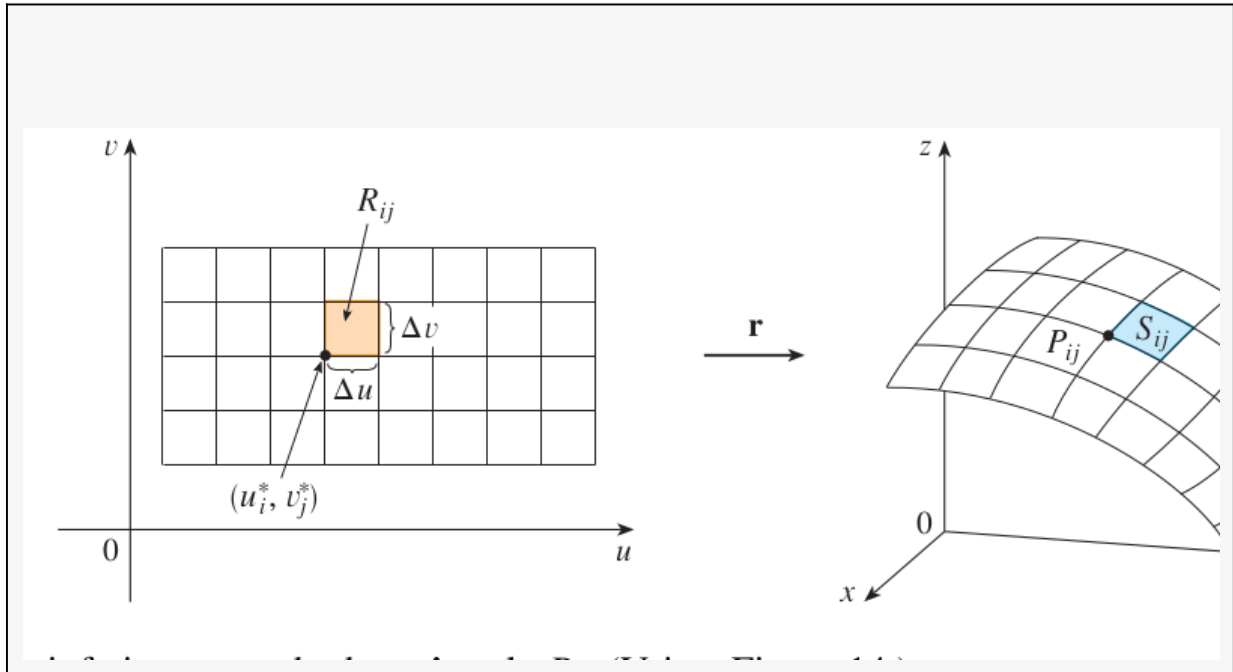
### Exemplo 3: Uma Elipse Cheia

## Chapter 12: Area de Superfície

Generalizando a forma de calculamos comprimento de arco para uma superfície vamos usar elementos de área para fazer isso. Para começar temos que dividir o espaço de parâmetros  $(u, v)$  em quadrados pequenos. Essa divisão implicará uma divisão da superfície uma vez que uma superfície pode ser construído a partir de monte quadrados pequenos. Prestem atenção que os quadrados pequenos do espaço de parâmetros são diferentes dos quadrados constituintes da superfície. A figura abaixo é do livro Stewart.



ln[ ]:=



A área de quadrados pequenos no espaço dos parâmetros é dado por  $\Delta u \times \Delta v$ . Mas como podemos relacionar essa área com a área dos quadrados da superfície? É aqui que o conceito de derivadas parciais ajuda a gente. A equação paramétrica da superfície é dada por  $\vec{r}(u, v)$ . Em cada ponto do canto de quadrados (tipo o ponto  $P_{ij}$  na figura) temos dois vetores tangentes, esses vetores, como vimos anteriormente, são derivadas parciais em relação de cada parâmetro.  $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$  e  $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ . Então os lados de quadrados da superfície, aproximadamente, podem ser dados por  $\Delta u \vec{r}_u$  e  $\Delta v \vec{r}_v$ . Então, lembrando da GA, a área de paralelogramo é dada via  $|\Delta u \vec{r}_u \times \Delta v \vec{r}_v| = \Delta u \Delta v |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$

Usando a argumentação acima vamos ter

**Definição** Se uma superfície parametrizada suave  $S$  é dada pela equação

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \hat{i} + y(u, v) \hat{j} + z(u, v) \hat{k}$$

e  $S$  é coberta uma única vez quando  $(u, v)$  abrange todo o domínio  $D$  dos parâmetros, então a área da superfície de  $S$  é

$$A(S) = \iint_D dS = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$$

**Exemplo** : Determine a área da esfera de raio  $a$

**Solução:** A equação paramétrica da esfera de raio  $a$  é dada via

$$x = a \sin \phi \cos \theta, \quad y = a \sin \phi \sin \theta, \quad z = a \cos \phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{ \{ \phi, \theta \} \mid 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \hat{i} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \hat{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = a^2 \sin \phi$$

$$A = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi d\phi d\theta = 4\pi a^2$$

In[ ]:=

```
Clear[phi, theta, a, surf]
norm[x_] = Sqrt[x.x]
surf[phi_, theta_] = {a Sin[phi] Cos[theta], a Sin[phi] Sin[theta], a Cos[phi]}
```

In[ ]:=

```
product = D[surf[phi, theta], phi]*D[surf[phi, theta], theta] // Simplify
```

In[ ]:=

```
integrand = norm[product] // Simplify
```

```
area = Integrate[integrand, {phi, 0, Pi}, {theta, 0, 2 Pi}] // Simplify[#, a > 0] &
```

Para uma esfera de raio 3 temos

In[ ]:=

```
area /. a -> 3
```

No livro tem uma discussão sobre o caso especial que a superfície pode ser expressa como  $z=f(x,y)$ . Nesse caso tem uma formula que analiticamente simplifica a conta mas como aqui estamos usando Mathematica daquela simplificação não vai ser útil.

Tem outra forma de implementar essa questão que facilita muito o trabalho. Tem uma forma de definir região no Mathematica e depois integrar em cima da região. Dessa forma podemos resolver a integral  $\iint dS$  diretamente sem necessidade de parametrizar e projetar no espaço dos parametros.

```
reg1 = ImplicitRegion[x^2+y^2+z^2 == 9, {x, y, z}];
Region[reg1]
Integrate[1, {x, y, z} ∈ reg1]
```

Exercicio : Determine a area da parte do paraboloid  $z =$

$x^2 + y^2$  que está abaixo do plano  $z = 9$  (resposta:  $\frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1)$ )

## Superfície de rotação e a sua área

Consideremos a superfície  $S$  obtida pela rotação da curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , em torno do eixo  $x$ , onde  $f(x) \geq 0$  e  $f'$  é contínua. A parametrização desta superfície é

$$x = x, \quad y = f(x) \cos \theta, \quad z = f(x) \sin \theta, \quad a \leq x \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

In[ ]:=

```
Import["/media/vahid/Windows/Users/Vahid/Google
Drive/UERJ/Minhas Apostilas/Notebook/rota.png"]
```

**Exercício :** Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva  $y = e^{-x}$ ,  $0 \leq x \leq 3$ , em torno do eixo  $x$  e use – as para traçar o gráfico da superfície e depois calcule a sua área. (resposta : 6.898)

## Chapter 13: Integral de Superfície de Campos Escalares

Uma aplicação da integral de superfície é calcular a massa de uma superfície dada a sua densidade. Essa aplicação é uma generalização do caso de integral de linha que estudamos a massa de um arame. A ideia é a mesma, partindo da parametrização da superfície, parametrizamos a função para que só tome valor em cima da superfície. Aí, temos que fazer uma mudança de variável. As variáveis antigas são as variáveis da função e as novas são os parâmetros da superfície.

Seja  $f(x, y, z): U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função contínua, e seja  $M$  uma superfície lisa situada em  $U$  que é parametrizada por  $\vec{r}(u, v)$ , onde  $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$ . A integral da superfície de  $f(x, y, z)$  sobre  $M$  é:

$$\iint_M f(x, y, z) dS = \iint_R f(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_R f(\vec{r}(u, v)) \left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\| du dv$$

Prestem atenção que essa integral é diferente das integrais que vocês estudaram no Cálculo 2. Lá vocês aprenderam resolver integrais tipo

$$\iint_M f(x, y, z) dA$$

A diferença se mostra nos elementos de área de cada integral.  $dS$  é o elemento de área da superfície, porém,  $dA$  é elemento da área do espaço de parâmetros. Na verdade, as integrais de superfície, depois da parametrização ficam uma integral do tipo cálculo 2. Então, o processo de parametrização ajuda a gente transforma uma integral de superfície em uma integral dupla comum.

### Um Exemplo:

Integrais de superfície podem ser difíceis no início, então, como um primeiro exem-

plô, vamos percorrer como configurar e resolver uma integral de superfície, deixando as partes duras para o Mathematica.

**Exemplo :** Calcule a integral da superfície de  $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$  sobre a metade superior da esfera do raio 1 centrada na origem.

Solução : Lembre-se da aula anterior que uma das melhores maneiras de parametrizar uma superfície é geralmente descrevê-la em coordenadas cilíndricas ou esféricas e depois converter a descrição novamente em coordenadas retangulares. (Lembre-se, nossa parametrização final tem que ser em coordenadas retangulares!) Neste caso particular, a descrição da metade superior da esfera é simplesmente  $\rho = 1$ , onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Então  $\rho$  for constante, e os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  serão nossos parâmetros. Usando a mudança de fórmulas de coordenadas, obtemos a seguinte parametrização (com os mesmos limites em  $\theta$  e  $\phi$  como antes):

```
In[ ]:= surf[theta_, phi_] = {Sin[phi] Cos[theta], Sin[phi] Sin[theta], Cos[phi]};
ParametricPlot3D[surf[theta, phi], {theta, 0, 2 Pi}, {phi, 0, Pi / 2}]
```

Agora vamos a integrar a função  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2) z$  sobre a esfera. Às vezes as pessoas têm dificuldade em visualizar o que isso realmente significa. Suponha que nosso hemisfério seja composto de uma mistura de diferentes tipos de metais, e diferentes partes da esfera tenham uma densidade diferente, representada pela função  $f(x,y,z)$ . Aqui está um gráfico diferente da nossa superfície, onde o hemisfério é colorido de acordo com a função  $f(x,y,z)$ ; tons mais claros indicam valores maiores de  $f(x,y,z)$ , enquanto áreas escuras na esfera representam áreas onde o valor de  $f(x,y,z)$  é menor.

Você não precisa entender os seguintes comandos; apenas execute-os para ver o gráfico!

```
In[ ]:= g[t_, p_] = Cos[p] Sin[p]^2;
graph[t_, p_] = {Sin[p] Cos[t], Sin[p] Sin[t], Cos[p]};
ParametricPlot3D[graph[t, p], {p, 0, Pi / 2}, {t, 0, 2 Pi},
  ColorFunction -> Function[{x, y, z, p}, GrayLevel[(g[0, p] / .4)]]]
```

```
In[ ]:= Plot[(g[0, p] / .4)^2, {p, 0, Pi / 2}]
```

Assim, por exemplo, se  $f(x,y,z)$  representa a densidade do material que compõe o hemisfério, as áreas mais claras são construídas com material muito mais denso que as áreas mais escuras. A integral de  $f(x,y,z)$  sobre a superfície nos dará a massa total do hemisfério.

O primeiro passo para calcular a integral, como você pode ver olhando a definição acima ou em seu livro, é encontrar as derivadas parciais de nossa parametrização  $f(\theta, \phi)$ . Para economizar tempo de digitação e leitura, vamos simplesmente escrever “t” e “p” em vez de “theta” e “phi” para os nomes

das variáveis.

```
In[ ]:=
dt = D[surf[t, p], t]
dp = D[surf[t, p], p]
```

Agora temos que calcular o produto vetorial das derivadas parciais e encontrar o comprimento do produto resultante. Lembre-se que definimos uma função de modulo para fazer isso por nós.

```
In[ ]:=
v = Cross[dp, dt];
norm[vector_] = Sqrt[vector . vector]
norm[v]
Simplify[%]
```

A outra parte do nosso integrando é  $f(\vec{r}(\theta, \phi))$ . Lembre-se que a maneira correta de fazer isso no Mathematica é usar o comando **Apply**.

```
In[ ]:=
f[x_, y_, z_] = (x^2 + y^2) z;
Apply[f, surf[t, p]]
Simplify[%]
```

Agora que você viu como podemos calcular cada parte do integrando separadamente, podemos fazer tudo de uma vez. (Se tivéssemos usado esse comando imediatamente, provavelmente teria confundido todo mundo)

```
In[ ]:=
integrand = Simplify[Apply[f, surf[t, p]] * norm[Cross[dp, dt]]]
Integrate[integrand, {p, 0, Pi/2}, {t, 0, 2 Pi}]
```

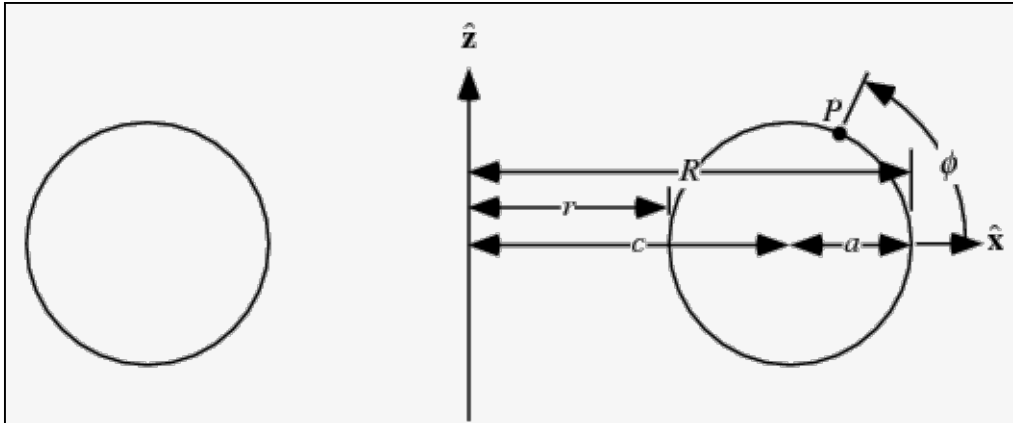
Portanto, se  $f(x,y,z)$  representa a densidade do material do hemisfério, a massa total do hemisfério é

$$\frac{\pi}{2}.$$

## Donut e Cobertura de Chocolate

Agora chegamos à importante aplicação no mundo real : medindo o chocolate.

Donut (rosquinha) é chamado de toro (torus) por matemáticos. É um objeto muito importante na matemática. O toro é a superfície de revolução de um círculo fora da origem.



A sua equação paramétrica é dada por

$$\vec{r}(\phi, \theta) = (r \cos \phi + R) \cos \theta \hat{i} + (r \cos \phi + R) \sin \theta \hat{j} + r \sin \phi \hat{k}$$

Por exemplo o gráfico de um torus de raio  $R=3$  e raio de círculo  $r=1$  é

```
In[ ]:= donut[p_, t_] := {(Cos[t] + 3) Cos[p], (Cos[t] + 3) Sin[p], Sin[t]};
ParametricPlot3D[donut[p, t], {p, 0, 2 Pi}, {t, 0, 2 Pi}]
```

Aqui está a configuração do nosso exemplo. Suponhamos que queremos fazer um donut e depois o mergulhamos de cabeça para baixo em uma vasilha de chocolate amargo, então cobrimos a metade superior do donut com cobertura de chocolate pegajoso. O chocolate na vasilha não é perfeitamente misturado, então o chocolate mais denso está se depositando no fundo da vasilha. O que isto significa é que o chocolate que acaba no topo do donut (lembre-se, é mergulhado de cabeça para baixo) é mais denso do que o chocolate nas laterais. Queremos saber quanto chocolate está realmente lá. Nós vamos fazer isso estimando a densidade do revestimento de chocolate em cada ponto na metade superior do donut, e então integrando a função de densidade ao longo desta metade.

Do jeito que escolhemos a parametrização, o chocolate está na metade superior do toro, o que acontece exatamente com os pontos acima ou acima do plano  $xy$ , onde  $z = 0$ . Execute o próximo comando e gire a imagem da superfície na qual vamos nos integrar. Usamos a mesma parametrização, mas agora  $0 \leq s \leq 2\pi$  e  $0 \leq t \leq \pi$ .

```
In[ ]:= ParametricPlot3D[donut[p, t], {p, 0, 2 Pi}, {t, 0, Pi}]
```

Suponha que a função de densidade seja  $f(x, y, z) = (z + 1) \frac{\text{gramas}}{\text{cm}^2}$ . Um gráfico da superfície do chocolate fica assim :

```
In[ ]:= ParametricPlot3D[donut[p, t], {p, 0, 2 Pi}, {t, 0, Pi},
ColorFunction -> Function[{x, y, z, t}, GrayLevel[(1 - z)]]]
```

Ao contrário do exemplo anterior, os tons mais escuros aqui representam o chocolate mais denso (porque o nosso chocolate é escuro, afinal). Agora que vimos todas as fotos bonitas, estamos prontos para calcular a massa do chocolate, integrando  $f(x,y,z)$  na metade superior do toro.

```
In[ ] := (* a função de densidade *)
f[x_, y_, z_] = z + 1 ;

(* a parametrização da superfície já é definida *)

(* derivadas parciais *)
dp = D[donut[p, t], p];
dt = D[donut[p, t], t];
(* a função de modulo já está definida acima*)

(* define integrando and integrate *)
integrand = Simplify[Apply[f, donut[p, t]] * norm[Cross[dp, dt]];
ans = Integrate[integrand, {p, 0, 2 Pi}, {t, 0, Pi}];
Simplify[ans];
N[ans]
```

Existem pontos e vírgulas após a maioria desses comandos, portanto, as únicas saídas são a resposta final, de forma simplificada, e uma aproximação numérica. Se você gostaria de ver as derivadas parciais, ou o integrando, você pode remover os pontos-e-vírgulas apropriados e executar a célula novamente.

Então, com a nossa configuração, existem quase 97 gramas de chocolate nesta superfície. (Soa como um bom donut! kkkkk)

Podemos resolver essa questão definindo uma região e depois integrar nessa região. Para definir a região, como já temos a equação paramétrica do donut, usamos o comando `ParametricRegion`.

```
In[ ] := reg = ParametricRegion[donut[t, p], {{t, 0, 2 Pi}, {p, 0, Pi}}];
```

```
In[ ] := Region[reg]
```

Agora simplesmente integramos a função de densidade nessa região

```
In[ ] := Integrate[1 + z, {x, y, z} ∈ reg] // N
```

Claramente, os resultados são iguais.

### Exercício 1 :

Calcule  $\iint_S z \, dS$ ,

onde  $S$  é a superfície cujo lado  $S_1$  é dado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,

cujo fundo  $S_2$  é o disco  $x^2 + y^2 \leq 1$  no plano  $z = 0$ ,  
e cujo topo  $S_3$  é a parte do plano  $z =$

$$1 + x \text{ que está acima do } S_2. \text{ Resultado : } \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$$

Dica : Usando ImplicitRegion

```
cilindro = ImplicitRegion[x^2 + y^2 == 1 && 0 < z <= 1 + x, {x, y, z}]
Region[cilindro]
```

### Exercício 2:

Encontre a área de superfície da superfície parametrizada (e representada graficamente) pelos seguintes comandos. (Você precisará recortar e colar antes de poder executá-los.)

```
surf[s_, t_] = {t Cos[2πt], t Sin[2πt], s*(4 - t)}
ParametricPlot3D[surf[s, t], {s, 0, 1}, {t, 0, 4}, PlotPoints -> {5, 200}]
```

Sua resposta deve incluir um esboço da superfície, sua resposta exata - que será feia - e uma aproximação numérica, que você pode encontrar usando o comando **N** no Mathematica. Alternativamente, você poderia usar o comando **NIntegrate** para obter sua aproximação numérica. O **NIntegrate** não tentará lhe dar uma resposta exata, mas apenas lhe dará a aproximação.

### Exercício 3

Encontre a área de superfície da superfície parametrizada (e representada graficamente) pelos seguintes comandos. (Você precisará recortar e colar antes de poder executá-los.)

```
surf[s_, t_] = {t Cos[2 π t], t Sin[2 π t], s(2 + Sin[7 π t])}
ParametricPlot3D[surf[s, t], {s, 0, 1}, {t, 0, 4}, PlotPoints -> {5, 200}]
```

Sua resposta deve incluir um esboço da superfície e uma aproximação numérica para a resposta final. Você terá que usar o **NIntegrate** em vez do Integrate (veja o exercício 1). Integrar vai pensar por um longo, longo tempo e provavelmente não lhe dará uma resposta.

### Exercício 4



Calcule a integral de superfície da função  $f(x, y, z) = x$  sobre a superfície que é o grafo de  $z = \sin[x] \cos[y]$ , onde  $0 \leq x \leq 2\pi$  e  $-\pi \leq y \leq \pi$ . Note que você terá que usar o **NIntegrate** com este exercício; mais uma vez **Integrate** não consegue obter a resposta, embora dê uma boa chance.

### Exercício 5

Calcule a integral da superfície da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$  sobre a seguinte superfície :

```
surf[p_, t_] = {Sin[p] Cos[t], Sin[p] Sin[t], Cos[p] (1 + Cos[3 t]/4)}
ParametricPlot3D[surf[p, t], {p, Pi/4, 3 Pi/4}, {t, 0, 2 Pi}]
```

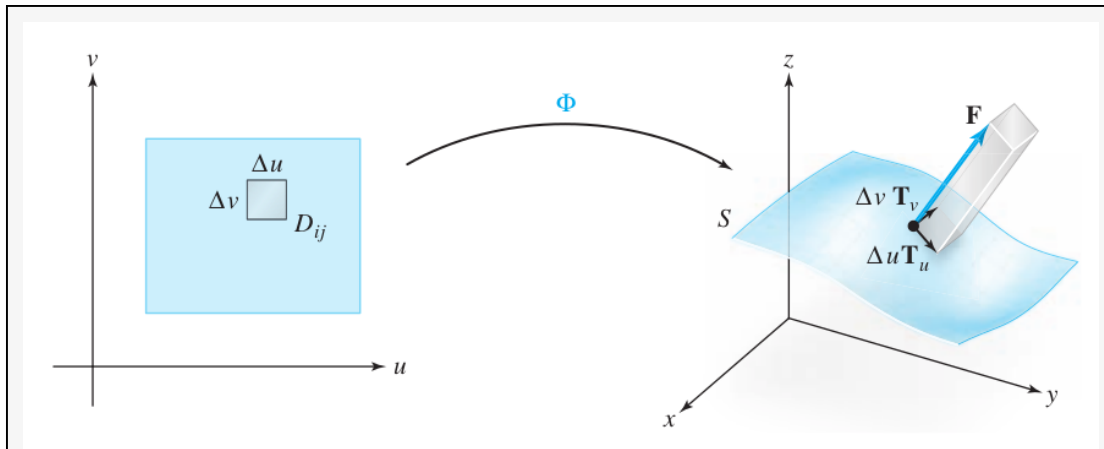
Você deve incluir uma imagem da superfície junto com o seu trabalho. Como nos exercícios 3 e 4, você terá que usar o **NIntegrate** aqui.

## Chapter 14: Integral de Superfície de Campos Vetoriais

A essa altura você está familiarizado com integrais de linhas de campos vetoriais, que em certo sentido medem o quanto o campo vetorial está “empurrando partículas” ao longo do caminho - em um caminho fechado, chamamos isso de circulação. E sobre integrais de superfície? Ou seja, que tal integrar um campo vetorial sobre alguma superfície parametrizada no espaço tridimensional?

Para superfícies, não faz mais sentido perguntar quanto o campo vetorial está empurrando partículas ao longo da superfície. Em vez disso, a pergunta que queremos responder é: quanto o campo vetorial empurra as partículas através da superfície?

Vamos tornar isso um pouco mais preciso. Diga que o campo vetorial representa velocidade. Considere um pouquinho da superfície (um pequeno paralelogramo, por exemplo), tão pequeno que podemos considerar o campo vetorial constante nesse paralelogramo. Nesse caso, os lados do paralelogramo e o vetor que representa o campo vetorial formam um paralelepípedo.



Para encontrar o volume desse paralelepípedo, usamos o produto tríplice escalar: pegamos o produto vetorial dos lados do paralelogramo e depois encontramos o produto escalar daquele com o vetor do campo vetorial. Interpretamos o resultado como “quantidade de fluido (ou partículas) movendo-se através superfície por unidade de tempo”.

A definição precisa de uma integral de superfície (ou integral de fluxo; os dois termos são intercambiáveis) de um campo vetorial está na próxima seção.

## Definição

Seja  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial contínuo, e seja  $M$  uma superfície lisa situada em  $U$ , parametrizada por  $\vec{r}(u, v)$ , onde  $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ . A **integral de superfície** (ou **integral do fluxo**) de  $\vec{F}$  sobre  $M$  é :

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du \, dv$$

onde  $\hat{n}$  é **vetor normal unitário** a superfície e é dado

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

Esta definição é muito similar àquela para integrais de superfície de funções escalares, que você pode encontrar no capítulo anterior. Para funções escalares, multiplicamos a função escalar pelo comprimento do vetor normal. Nesse caso, vamos pegar o produto escalar de nosso campo vetorial com o vetor normal. Lembre-se, o produto escalar de dois vetores é um número, então nosso integrando final ainda será, na verdade, uma função escalar.

Existem pelo menos duas maneiras de se convencer de que essa definição faz sentido. Como dissemos acima,  $\vec{F} \cdot \hat{n}$  representa o produto triplo escalar das derivadas parciais e  $\vec{F}$ , que sabemos que é igual ao volume do paralelepípedo usado por aqueles vetores (até um possível sinal de menos).

Outra maneira de ver isso é reescrever o produto de ponto:  $\vec{F} \cdot \hat{n} = ||\vec{F}|| ||\hat{n}|| \cos \theta$ . Nesse caso, vemos que o comprimento do vetor normal é a área do paralelogramo formado por duas derivadas parciais, que é multiplicado pelo comprimento de  $\vec{F}$  nesse ponto. O cosseno cuida da "inclinação": se o campo vetorial estiver se movendo na mesma direção da superfície, ele não está empurrando nenhuma partícula através superfície; nesse caso,  $\cos \theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  (lembre-se de que o vetor normal será perpendicular a  $\vec{F}$  neste caso). Da mesma forma, se  $\vec{F}$  estiver se movendo perpendicularmente à superfície,  $||\vec{F}|| ||\hat{n}||$  será multiplicado por  $\cos 0 = 1$ , então  $\vec{F}$  tem tanto efeito quanto pode.

É importante obter a orientação da superfície corretamente. A integral representa o fluxo do "interior" da superfície para o "exterior" - a direção na qual os pontos normais do vetor são considerados "externos". Toda vez que você faz uma integral de superfície de um campo vetorial, você deve verificar de que se está usando um vetor normal que aponta na direção correta (que deve ser especificada no problema).

## Dirigindo na chuva

Suponha que haja uma chuva bonita de primavera lá fora e você esteja dirigindo um carro. Você está parado atrás de um semáforo, e os limpadores estão na velocidade certa para manter a parabrisa limpa. A luz fica verde e você começa a dirigir a 30 km/h na estrada. De repente, você não consegue enxergar nada - há muita água na parabrisa e você precisa colocar seus limpadores em uma velocidade mais alta. O que houve? Podemos realmente explicá-lo usando integrais de fluxo.

Suponha que a nossa parabrisa seja um pedaço de vidro retangular, representado pelo plano  $z = 2 - 2x$  sobre o retângulo  $0 \leq x \leq 0.5$ ,  $-1.25 \leq y \leq 1.25$ . Aqui está uma parametrização e uma foto dela; como você pode imaginar pela inclinação do plano, estamos assumindo que o carro está dirigindo ao longo do eixo  $x$  positivo. Como os parâmetros são realmente  $x$  e  $y$ , não nos incomodamos em usar  $u$  e  $v$  aqui.

In[\*]:

```
surf1[x_, y_] = {x, y, 2 - 2 x};
windshield = ParametricPlot3D[surf1[x, y], {x, 0, 0.5}, {y, -1.25, 1.25}]
```

A chuva é realmente apenas um monte de água caindo do céu. Se estamos parados atrás de um semáforo, então a chuva está caindo, digamos, a 10 m/s. Assim, a velocidade das gotas de chuva é descrita pelo campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, -10)$ . O Mathematica pode traçar este campo vetorial para nós :

```
In[ ]:= chuva[x_, y_, z_] = {0, 0, -10}
rain = VectorPlot3D[chuva[x, y, z], {x, -.5, 1},
  {y, -2, 2}, {z, .5, 2.5}, VectorScale -> Small, VectorPoints -> 7]
```

O Mathematica também pode nos mostrar uma foto da pára-brisa na chuva.

```
In[ ]:= Show[windshield, rain, PlotRange -> {{-.5, 1}, {-2, 2}, {1, 2.5}}]
```

Agora, uma integral de fluxo mede a quantidade de fluido que cruza uma superfície. Se calcularmos a integral de fluxo desse campo vetorial sobre a pára-brisa, isso realmente nos dirá quanto a chuva está atingindo a pára-brisa. (Porque é feito de vidro, não pode fluir de verdade, então, em vez disso, ele respinga e força o motorista a ligar os limpadores.)

Os passos que precisamos tomar para calcular essa integral são muito parecidos com os que usamos no capítulo anterior. Precisamos encontrar  $\vec{F}(\vec{r}(x, y))$ , mas como  $\vec{F}$  é um campo vetorial constante (nunca muda), sabemos que  $\vec{F}(\vec{r}(x, y)) = (0, 0, -10)$  em todos os pontos. Vamos executar o seguinte comando de qualquer forma, para que o Mathematica saiba sobre ele e para que você saiba como usar o comando no futuro :

```
In[ ]:= Apply[chuva, surf1[x, y]]
```

Precisamos calcular o vetor normal, que para um plano é fácil (para este plano, é  $(2, 0, 1)$ ), mas para situações mais complicadas, você terá que usar algo como o seguinte comando para calcular o produto vetorial das derivadas parciais :

```
In[ ]:= n = Cross[D[surf1[x, y], x], D[surf1[x, y], y]]
```

E agora estamos prontos para integrar. O integrando é  $\vec{F}(\vec{r}(x, y))$

```
In[ ]:= integrand = Apply[chuva, surf1[x, y]].n;
Integrate[integrand, {x, 0, .5}, {y, -1.25, 1.25}]
```

Por que a resposta é negativa? A resposta tem a ver com o vetor normal. Nosso vetor normal está apontando na direção em que estamos viajando - olhe para  $\hat{n}$  e olhe para a imagem da pára-brisa até você acreditar nisso. Em certo sentido, o vetor normal define qual direção é "externa". Integrais de fluxo medem o fluxo

líquido de dentro da superfície para fora da superfície, então, neste caso, uma resposta positiva significaria que a água vinha do interior do carro; a água que atinge a pábrisa pelo lado de fora representa um fluxo negativo.

Lembre-se, esta primeira parte do exemplo foi para quando o carro está parado. Agora suponha que estamos dirigindo pela rua a 50 km/h. Como expressamos a velocidade da chuva em metros por segundo, devemos fazer o mesmo com o carro; Você pode verificar que 50 km/h é de cerca de 13,89 m/s.

Em nosso exemplo anterior, a velocidade da chuva foi descrita pelo campo vetorial  $(0, 0, -10)$ . Neste caso, em relação ao carro, a velocidade da chuva é descrita pelo campo vetorial,  $\vec{H}(x, y, z) = (-13,89, 0, -10)$ . Antes de continuar, convença-se de que esta é a fórmula correta! (Pense nos sinais negativos em particular.)

In[ ]:=

```
H[x_, y_, z_] = {-13.89, 0, -10};
newrain = VectorPlot3D[H[x, y, z], {x, -1, 1},
  {y, -2, 2}, {z, 0, 3}, VectorScale -> Small, VectorPoints -> 7]
Show[windshield, newrain, PlotRange -> {{-0.5, 1}, {-2, 2}, {1, 2.5}}]
```

Quanta chuva está atingindo a pábrisa desta vez? Vamos calcular a integral :

In[ ]:=

```
(* a nova função vetorial é H *)
(* a parametrização da superfície já é definida *)

integrand = Apply[H, surf1[x, y]].Cross[D[surf1[x, y], x], D[surf1[x, y], y]];
Integrate[integrand, {x, 0, .5}, {y, -1.25, 1.25}]
```

Então, há quase quatro vezes mais água batendo na pábrisa quando estamos dirigindo a 50 km/h ! Agora você entende por que você tem que transformar seus limpadores?

### Exercício 0

Determine o fluxo do campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = z \hat{i} + y \hat{j} + x \hat{k}$  através da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (result:  $\frac{4\pi}{3}$ )

### Exercício 1

Vamos refazer o exemplo acima, mas em vez de dirigir um carro chato e cotidiano, vamos imaginar que você esteja dirigindo o veículo de última geração e cheio de gadgets do Dark Knight of Gotham City, the Batmobile. Vamos supor que este Batmóvel é um pouco semelhante à versão usada na série de televisão Campy 60 e tem uma pábrisa hemisférica. (Para uma imagem do Batmóvel

campy original e mais informações do que você precisa saber, acesse <http://www.javelinamx.com/batmobile/> no seu navegador.)

(i) O que é uma parametrização deste hemisfério? Suponha que o raio do hemisfério seja 1 e que o centro esteja na origem. Você pode pensar nessa forma como uma esfera, mas estamos interessados apenas na parte do "equador" para o "pólo norte".

(ii) Enquanto estiver dirigindo, a chuva só estará atingindo a metade dianteira da pára-brisa. Descreva uma parametrização dessa parte da pára-brisa. Você deve ser capaz de restringir um pouco o domínio de seus parâmetros da sua parametrização em (i).

(iii) Digamos que Batman está dentro de um prédio, frustrando uma trama nefasta do Joker. Está chovendo e o Batmóvel está sentado do lado de fora do prédio, pronto para o Batman decolar e voltar para a Batcave. Se a velocidade da chuva é descrita pelo campo vetorial  $\vec{R}(x, y, z) = (0, 0, -5)$  metros/segundo, qual é a integral de fluxo desse campo vetorial sobre a pára-brisa do Batmóvel? Lembre-se de que o veículo está parado e a chuva está atingindo todo o hemisfério, não apenas a metade da frente.

(iv) Batman sai do prédio, entra no Batmóvel e decola. Se ele está dirigindo a 50 metros/segundo, qual é o fluxo integral da chuva sobre a pára-brisa? Vamos supor que agora a chuva está apenas atingindo a metade da frente da pára-brisa (isso não é totalmente preciso, mas tudo bem), então use sua parametrização da parte (ii). Você terá que ter cuidado sobre como você altera o campo vetorial que descreve a chuva; isso dependerá da escolha que você faz do eixo que o Batmóvel está percorrendo e da parametrização que você escolheu para a metade dianteira da pára-brisa. Mais sucintamente : verifique-se de que a chuva não bate no lado ou atrás da pára-brisa

## Exercício 2

Aqui está outro problema "dirigindo na chuva". Batman está perseguindo o Penguin durante uma tempestade. O carro de fuga do Penguin não tem nenhum limpador, por isso é de vital importância descobrir quanta chuva está atingindo sua pára-brisa. Se for demais, ele não será capaz de dirigir rápido o suficiente para escapar. Nenhum super vilão (ou super - herói) seria pego morto dirigindo

um automóvel normal, então o carro de Penguin não tem uma pára-brisa normal. Como o Batmóvel, seu carro tem um cockpit com uma pára-brisa "bolha" em forma da metade superior do elipsóide  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ .

(i) O que é uma parametrização de toda a pára-brisa? Suponha que o centro do elipsóide esteja na origem. Lembre-se, estamos interessados apenas na metade superior.

(ii) Enquanto estiver dirigindo, a chuva só estará atingindo a metade dianteira da pára-brisa. Descreva uma parametrização dessa parte da pára-brisa. Você deve ser capaz de restringir um pouco o domínio de seus parâmetros da sua parametrização em (i). (Vamos definir "metade da frente" como sendo a parte das pára-brisas onde  $x > 0$ . Isto é o mesmo que no exemplo acima.

(iii) Batman está à vista do Penguin quando ambos se aproximam de cruzamentos com semáforos. Sabendo que Batman é escrupuloso, o Penguin não tem escrúpulos em parar; Ele sabe que o Batman vai parar também, em vez de alcançá-lo. Se a velocidade da chuva é descrita pelo campo vetorial  $\vec{R}(x, y, z) = (0, 0, -5)$  metros/segundo, quanta chuva está atingindo a pára-brisa do Penguin enquanto ele está sentado atrás do semáforo? Lembre-se que ele está parado, então a chuva está batendo em toda a sua pára-brisa.

(iv) Quando a luz ficar verde, o Penguin decola. Seu carro é movido a foguete, e ele está dirigindo rapidamente 40 metros por segundo. Qual é o fluxo integral da chuva sobre a pára-brisa? Vamos supor que agora a chuva está apenas atingindo a metade da frente da pára-brisa (isso não é totalmente preciso, mas tudo bem), então use sua parametrização da parte (ii). Você terá que ter cuidado sobre como você altera o campo vetorial que descreve a chuva; isso dependerá da escolha que você faz do eixo que o Batmóvel está percorrendo e da parametrização que você escolheu para a metade dianteira da pára-brisa. Mais sucintamente : verifique-se de que sua chuva não bate no lado ou atrás da pára-brisa.

### Exercício 3

O comissário Gordon está precisando urgentemente da ajuda de Batman, então ele ativa o símbolo do Bat e brilha nas nuvens acima de Gotham City. Se você não está familiarizado com o que o símbolo Bat parece ... bem, você deveria estar. Há uma foto em <https://images.app.goo.gl/yzkCMt45Sjqh9pfp8> . Vamos modelar a superfície das nuvens com a função  $z = \sin(x + y)$ . Digamos que o

holofote para o símbolo do Bat esteja brilhando do topo da Prefeitura no centro de Gotham City para as nuvens rodopiantes acima da problemática metrópole. Em termos mais matemáticos, o holofote brilha do eixo  $z$  negativo para cima em um disco no plano  $x$ - $y$  centrado na origem, de raio 5. Como é difícil parametrizar a parte iluminada do símbolo Bat (a parte amarela em a imagem), vamos simplificar o problema e assumir que a parte iluminada do símbolo Bat é na verdade apenas um disco com um disco menor cortado dele; isso é chamado de anel. Você pode parametrizar este objeto bidimensional exatamente da mesma maneira que você parametriza um disco, mas inicia o raio em algo maior que 0. Para este problema, vamos usar o anel centrado na origem cujo raio varia de 2 a 5.

Por causa do nevoeiro (sempre parece estar enevoado em Gotham City), o campo vetorial que descreve a intensidade dos fótons atingindo as nuvens não é constante, mas é descrito por

$$\vec{L}(x, y, z) = (0, 0, (x + y)^2)$$

(este é um modelo bastante pobre, mas torna as integrais razoáveis).

(i) Descreva a parametrização da superfície das nuvens em que estamos interessados. A superfície das nuvens é descrita por  $\sin(x + y)$ ; a porção do plano  $x$ - $y$  em que estamos interessados é o anel de 2 a 5.

(ii) Encontre a integral da superfície do campo vetorial acima sobre o anel que estamos usando em vez do símbolo real do Bat. Use um vetor normal apontando para cima.

#### Exercício 4

Batman está tentando se infiltrar no covil subterrâneo secreto do Penguin. A Penguin, suspeitando disso, instalou um Sistema de Detecção Batman (BDS) que emite uma forma especial de radiação de detecção de Batman que pode ser descrita pelo campo vetorial.

$$\vec{B}(x, y, z) = (-y, x, -5z/6),$$

onde  $(0, 0, 0)$  é o centro do covil do Penguin. Nosso herói está familiarizado com as formas criminosas do Penguin, e trouxe consigo um Dispositivo de Sistema de Detecção Anti-Batman (ABDSD) especial que desativará o Sistema de Detecção Batman por um curto período de tempo. O dispositivo tem a forma de um toro



com  $R = 2$ .

(i) Batman colocou a ABDSD de forma que ela esteja centrada em  $(5, 5, 5)$  no covil do Pinguin e seja horizontal (isto é, a linha vertical descrita por  $x = 5, y = 5$  não intercepta nenhuma parte da toro, que "passa pelo meio do buraco donut"). Parametrize a superfície do ABDSD. (Dica : primeiro suponha que o ABDSD esteja centrado em  $(0, 0, 0)$ , depois traduza sua resposta para centralizar em  $(5, 5, 5)$ ).

(ii) Calcule o fluxo da radiação de detecção de Batman através do ABDSD. Use um vetor normal apontando para dentro.

(iii) A resposta de (ii) representa unidades de radiação atravessando o ABDSD por segundo. Digamos que o ABDSD de alguma forma absorve toda essa radiação (evitando assim que o Pinguin detete a presença de Batman), e que possa armazenar um total de 1000 unidades de radiação antes de parar de funcionar. Quanto tempo o Batman tem antes do ABDSD falhar?

(iv) (OPCIONAL) Você pode querer voltar a isso depois que tivermos aprendido sobre o Teorema da Divergência. Refazer parte (ii), mas desta vez dizem que o ABDSD está centrado na origem. Compare o fluxo que você recebe em ambos os casos. O que é incomum ou inesperado sobre essas duas respostas? Com o Teorema da Divergência, poderemos explicar isso com bastante facilidade.

## Chapter 15: O Teorema de Stokes

### Um resumo: Integração em 2D e 3D

Neste semestre, aprendemos a usar seis novos tipos de integrais.

Type	Symbol	Region	Integrand
double	$\iint_R u \, dA$	$R$ , a region	scalar function $u$
triple	$\iiint_S u \, dV$	$S$ , a solid	scalar function $u$
line (path)	$\int_C u \, ds$ or $\oint_C u \, ds$	$C$ , a curve with parametrization $\vec{r}(t)$ , $a \leq t \leq b$	scalar function $u$
line (path)	$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ or $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$C$ , a curve with parametrization $\vec{r}(t)$ , $a \leq t \leq b$	vector field $\vec{F}$

surface	$\iint_S f \, dS$ or $\oiint_S f \, dS$	S, a surface with parametrization $\vec{r}(u, v)$ and parameter domain R	scalar function f	]
surface (flux)	$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ or $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$	S, a surface with parametrization $\vec{r}(u, v)$ and parameter domain R	vector field $\vec{F}$	]

Observe que cada tipo de integral tem a sua própria definição, e não há maneira óbvia de converter um tipo em outro. O Teorema de Stokes fornece um jeito para conectar integrais de superfície de campos de vetores e integrais de linhas de campos de vetores. Esse teorema é uma generalização do teorema de Green para 3D.

## Anunciado

**Teorema de Stokes:** Seja  $S$  uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva  $C$  fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $S$ . Então

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

onde  $\partial S$  é a fronteira de  $S$ .

## Exemplo

Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  onde  $\vec{F}(x, y, z) =$

$-y^2 \hat{i} + x \hat{j} + z^2 \hat{k}$  e  $C$  é a curva de interseção do plano  $y + z = 2$  com o cilindro  $x^2 + y^2 =$

1. (Oriente  $C$  no sentido anti-horário quando observado de cima.)

Solução : Primeiro vamos plotar a configuração geométrica dada no exemplo

```

In[ ]:= cilindro = ContourPlot3D[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, 0, 5},
    Mesh -> None, ContourStyle -> Opacity[0.5], ContourStyle -> Red];
plano = Plot3D[2 - y, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, Mesh -> None];
curva = ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], 2 - Sin[t]},
    {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue, Thickness[0.01]}];
Show[cilindro, plano, curva, PlotRange -> All]

```

Qual é a equação paramétrica da curve de interseção? Para achar ela temos que vincular/misturar as equações paramétricas do cilindro e do plano.

$$\begin{cases} \text{Cilindro: } \vec{r}(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z) \\ \text{Plano: } \vec{r}(x, y) = (x, y, 2 - y) \end{cases}$$

Igualando as duas equações encontramos  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t)$

No Mathematica podemos definir uma curva de interseção como uma região 1D.

```

In[ ]:= RegCurve = ImplicitRegion[x^2 + y^2 == 1 && z == 2 - y, {x, y, z}]
Region[RegCurve, Axes -> True, AxesLabel -> {x, y, z}];

```

E a região dentro da curva de interseção é uma região 2D

```

In[ ]:= RegDisc = ImplicitRegion[x^2 + y^2 <= 1 && z == 2 - y, {x, y, z}]

```

```

In[ ]:= Region[RegDisc, Axes -> True, AxesLabel -> {x, y, z}]

```

Em vez de calcular a integral de linha diretamente podemos usar o teorema de Stokes para chegar no resultado com mais facilidade (será?) Primeiro temos que calcular a rotacional do campo vetorial  $\vec{F}$

```

In[ ]:= rot = Curl[{-y^2, x, z^2}, {x, y, z}]

```

Apesar de existirem muitas superfícies com fronteira C, a escolha mais conveniente é a região elíptica S no plano  $y+z=2$  cuja fronteira é C. Se orientarmos S para cima, em seguida, C tem a orientação induzida positiva. A projeção D de S no plano x-y é o disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ , então temos

```

In[ ]:= plane = {x, y, 2 - y}
dx = D[plane, x]
dy = D[plane, y]
integrand = Cross[dx, dy].rot

```

Em seguida, utilizando o teorema de Stokes temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D (1 + 2y) dA =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

```
In[ ]:= Integrate[r + 2 r^2 Sin[θ], {r, 0, 1}, {θ, 0, 2 Pi}]
```

Tem mais três formas de resolver essa integral

```
In[ ]:= Integrate[1 + 2 y, {x, y} ∈ Disk[{0, 0}, 1]]
```

```
In[ ]:= R = ImplicitRegion[x^2 + y^2 ≤ 1, {x, y}]
Region[R]
Integrate[1 + 2 y, {x, y} ∈ R]
```

```
In[ ]:= disc = ParametricRegion[{r Cos[t], r Sin[t]}, {{t, 0, 2 Pi}, {r, 0, 1}}]
Region[disc]
Integrate[1 + 2 y, {x, y} ∈ disc]
```

Exercicio : Use o Teorema de Stokes para calcular a integral  $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , onde  $\vec{F}(x, y, z) = xz \hat{i} + yz \hat{j} + xy \hat{k}$  e  $S$  é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e acima do plano  $xOy$ . (resultado 0)

Exercicio: Calculate  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ , where  $\vec{F}(x,y,z)=(x^2 z, xy^2, z^2)$ , and  $C$  is the intersection of the plane  $x+y+z=4$  with the cylinder  $x^2 + y^2 = 16$ . (resultado  $128\pi$ )

1) Graph the cylinder  $x^2 + y^2 = 1$  and the hyperbolic paraboloid  $z = y^2 - x^2$  on the same set of axes, and parametrize the curve  $C$  where they intersect. Verify Stokes's Theorem for the vector field  $\vec{F}(x,y,z)=(x^2 y, \frac{1}{3}x^3, xy)$  and the curve  $C$ . [i.e. Show that the line integral of  $\vec{F}$  along  $C$  equals the appropriate surface integral. You will need to produce your own surface.]

2) Now consider the vector field  $\vec{F}(x,y,z)=(x^2 y, x, xy)$ .

a) Calculate the line integral of  $\vec{F}$  along the circle parametrized by  $\vec{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$ , for  $0 < t < 2\pi$ .

b) Calculate the line integral of  $\vec{F}$  along the circle parametrized by  $\vec{r}_2(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ , for  $0 < t < 2\pi$ .

c) Calculate the surface integral of  $\text{curl}(\vec{F})$  over the surface parametrized by  $\vec{r}(s,t)=(\cos(t),\sin(t),s)$ , for  $0 < t < 2\pi$  and  $0 < s < 1$ .

d) Explain your answers in terms of Stokes's Theorem.

3) Use Stokes's Theorem to evaluate the line integral of the vector field  $\vec{F}(x,y,z)=(y+\sin(x), z^2+\cos(y), x^3)$ , where  $C$  is the curve parametrized by  $\mathbf{f}(t)=(\sin t, \cos t, \sin(2t))$ , for  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4) Consider the vector field  $\vec{G}(x,y,z)=(x,y,z)$ . Use Stokes's Theorem to prove, by contradiction, that  $\vec{G}$  is not the curl of any smooth vector field  $\mathbf{F}$ . [Hint: Let  $M$  be the unit sphere centered at the origin. The path integral over  $\partial M$  of every smooth vector field  $\vec{F}$  equals 0 -- explain why!]

## Chapter 16: O Teorema do Divergente (Gauss)

o Teorema do Divergente liga integrais de superfície de campos de vetores a triplas integrais através da divergência.

**O Teorema de Divergente:** Seja  $E$  uma região sólida simples e seja  $S$  a superfície fronteira de  $E$ , orientada positivamente (para fora). Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha  $E$ . Então

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV$$

Portanto, o Teorema do Divergente afirma que, sob as condições dadas, o fluxo de  $\vec{F}$  pela fronteira de  $E$  é igual à integral tripla da divergência de  $\vec{F}$  em  $E$ .

**Exemplo :** Determine o fluxo do campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) =$

$z\hat{i} + y\hat{j} + x\hat{k}$  sobre a unidade esferica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solução :** Primeiro calculamos o divergente do campo vetorial  $\vec{F}$

In[ ]:=

Div[{z, y, x}, {x, y, z}]

A esfera unitária  $S$  é a fronteira da bola unitária  $B$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 =$

1. Então o teorema de Gauss dá o fluxo como

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_B 1 dV = \frac{4}{3} \pi (1)^3$$

A integral acima podia ser resolvida em outras formas. No Mathematica podemos definir uma região e depois utiliza-la para integrar ou plotar. A esfera pode ser definida em duas formas diferentes, implícita e paramétrica.

```
In[ ]:= esfera = ImplicitRegion[x^2 + y^2 + z^2 <= 1, {x, y, z}]
Integrate[1, {x, y, z} ∈ esfera]
```

```
In[ ]:= sphere = ParametricRegion[
  {r Sin[φ] Cos[θ], r Sin[φ] Sin[θ], r Cos[φ]}, {{φ, 0, π}, {θ, 0, 2 π}, {r, 0, 1}}]
Region[sphere]
Integrate[1, {x, y, z} ∈ sphere]
```

## Elemento de volume em sistema de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas

cartesiana :  $dV = dx dy dz$

cilindrica :  $dV = r dr d\theta dz$

esferica :  $dV = r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi$

Então a integral no exemplo acima poderia ser resolvido via integração direta utilizando o elemento da integração no sistema de coordenadas esféricas

```
In[ ]:= Integrate[r^2 Sin[φ], {r, 0, 1}, {θ, 0, 2 Pi}, {φ, 0, π}]
```

### Exercício 1:

Utilize o teorema de Gauss para calcular  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , onde

$$\vec{F}(x, y, z) = x y \hat{i} + (y^2 + e^{x z^2}) \hat{j} + \sin(x y) \hat{k}$$

e  $S$  é a superfície da região  $E$  delimitada pelo cilindro parabólico  $z = 1 - x^2$  e os planos  $z = 0$ ,  $y = 0$  e  $y + z = 2$ .

Uma dica:

```
In[ ]:= F = {x y, y^2 + Exp[x z^2], Sin[x y]};
```

```
In[ ]:= divF = Div[F, {x, y, z}];
```

```
In[ ]:= Clear[x, y, z]
reg1 = ImplicitRegion[-1 ≤ x ≤ 1 && 0 ≤ z ≤ 1 - x^2 && 0 ≤ y ≤ 2 - z, {x, y, z}]
```

```
In[ ]:= Region[reg1, Axes → True, AxesLabel → {x, y, z}]
```

```
In[ ]:= Integrate[divF, {x, y, z} ∈ reg1]
```

```
In[ ]:= reg2 = ImplicitRegion[z ≤ 1 - x^2 && y + z ≤ 2 && z ≥ 0 && y ≥ 0, {x, y, z}]
```

```
In[ ]:= Region[reg2, Axes → True, AxesLabel → {X, Y, Z}]
```

## Exercicio2 :

Seja  $\vec{F}(x, y, z) = (\sin x \cos^2 y, \sin^3 y \cos^4 z, \sin^5 z \cos^6 x)$  e  $M$  a superfície de um cubo no primeiro octante delimitado por planos de coordenadas e planos  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = \frac{\pi}{2}$  e  $z = \frac{\pi}{2}$ . Usando o teorema de divergencia, calcule o fluxo do  $\vec{F}$  através da  $M$ .

## Exemplo :

Let  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2yz, z^2 - 2xz, x^2 - 2xy)$  and let  $M$  be the surface parametrized by  $\mathbf{f}(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \cos(\sin(5\pi(1-r))) - 1)$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Find the flux of  $\mathbf{F}$  through  $M$ , using the upward normal vector.

Solução : Primeiro vamos ver o plot da superfície

```
In[ ]:= f[r_, theta_] = {r * Cos[theta], r * Sin[theta], Cos[Sin[5 Pi * (1 - r)]] - 1};
M = ParametricPlot3D[f[r, theta], {r, 0, 1}, {theta, 0, 2 Pi}]
```

É feia para caramba!

Com certeza,  $M$  não é o limite de um sólido. No entanto, o limite de  $M$  é o círculo unitário no plano  $xy$  (verifique isso!). Portanto,  $M$  e o disco da unidade (chame - o  $\Delta$ ) formam o limite de um sólido (chame - o  $S$ ) : tente observar o seguinte gráfico de alguns pontos de vista diferentes.

```
In[ ]:= g[r_, theta_] = {r * Cos[theta], r * Sin[theta], 0};
Δ = ParametricPlot3D[g[r, theta], {r, 0, 1}, {theta, 0, 2 Pi}, Mesh → 10]
S = Show[M, Δ]
```

Grosso modo, em português, aqui está o que vamos fazer para calcular a integral

de superfície de nossa superfície original :

1. (Integral de superfície sobre a nossa superfície original e o disco) = (integral tripla do  $\text{Div } \vec{F}$  sobre a região sólida delimitada pelas duas superfícies)
2. (Integral de superfície sobre a superfície original) + (Integral de superfície sobre disco) = (integral tripla sobre a região sólida) [Calcular as duas integrais de superfície separadamente]
3. (Integral de superfície sobre a superfície original) = (integral tripla sobre a região sólida) - (Integral de superfície sobre o disco) [Resolvendo a nossa integral original]

Lembre-se, no Teorema do Divergente, usamos o vetor normal apontando para fora. No problema, somos solicitados a encontrar a integral sobre M com o vetor normal apontando para cima, mas quando a combinamos com o disco unitário, a normalização para fora é o vetor normal apontando para baixo. Isso significa que temos que substituir M por -M em nossos cálculos.

Vamos reescrever as três equações acima matematicamente. Prestem atenção no sinal (-) da M.

1.  $\oint_{\Delta+(-M)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_S \text{div } \mathbf{F} \, dV$
2.  $\iint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_{-M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_S \text{div } \mathbf{F} \, dV$
3.  $\iint_{-M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_S \text{div } \mathbf{F} \, dV - \iint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$

Estamos interessados na integral sobre M, não - M, então vamos corrigir isso :

- 4(a).  $-\iint_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_S \text{div } \mathbf{F} \, dV - \iint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  [integral sobre -M = -(integral sobre M)]
- 4(b).  $\iint_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \iiint_S \text{div } \mathbf{F} \, dV$  [multiplicando por -1]

Agora há outro passo que torna esse problema muito mais fácil. Acontece que  $\vec{F}$  é um campo vetorial muito bom : avalie a célula abaixo.

In[ ]:=

```
Clear[F]
F[x_, y_, z_] = {y^2 - 2 y z, z^2 - 2 x z, x^2 - 2 x y}
Div[F[x, y, z], {x, y, z}]
```

Daí a integral tripla da  $\text{Div } F$  é 0, e podemos concluir que  $\iint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \iint_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma =$



0, então as integrais são iguais. Isto significa que podemos trabalhar com o disco da unidade no lugar da nossa terrível superfície M.

Vamos terminar o cálculo em  $\Delta$

$\iint_{\Delta} \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\sigma = \iint_{\mathbb{R}} \vec{F}(\vec{g}(r, \theta)) \cdot \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial \theta} \right) dA$ , então, primeiro, nós substituímos  $\vec{g}$  em  $\vec{F}$

`In[ ]:=`

```
v1[r_, theta_] = Apply[F, g[r, theta]]
```

Depois calculamos o produto vetorial das derivadas parciais da  $\vec{g}$

`In[ ]:=`

```
dgdr[r_, theta_] = D[g[r, theta], r]
dgdtheta[r_, theta_] = D[g[r, theta], theta]
Cross[dgdr[r, theta], dgdtheta[r, theta]]
v2[r_, theta_] = Simplify[%]
```

E no final, fazemos o produto escalar e integramos

`In[ ]:=`

```
v1[r, theta].v2[r, theta]
Integrate[%, {r, 0, 1}, {theta, 0, 2 Pi}]
```

Então o fluxo de  $\vec{F}$  através  $\Delta$  é  $\frac{\pi}{4}$ . Note que este é o fluxo para cima através de  $\Delta$ : o vetor normal acima é  $(0, 0, r)$ , e  $r$  é positivo. Pelo Teorema do divergente, o fluxo de  $\vec{F}$  para baixo através de  $M$  é  $-\frac{\pi}{4}$ ; o fluxo de  $\vec{F}$  até  $M$  é  $\frac{\pi}{4}$ . Lembre-se, quando aplicamos o Teorema do divergente, nossa integral de superfície total  $(M+\Delta)$  tem que usar o vetor normal para cima; este é o normal para baixo da  $M$  e o normal para cima da  $\Delta$ .

## Exercícios

### Exercise 1

Let  $\mathbf{r}(x,y,z)=(x,y,z)$ , and  $\mathbf{F}(x,y,z)=\|\mathbf{r}\|\mathbf{r}$ , where the double bars stand for magnitude, and let  $M$  be the surface of the solid bounded by the paraboloid  $z=25-x^2-y^2$  and the  $xy$ -plane. Use the Divergence Theorem to compute the outward flux of  $\mathbf{F}$  through  $M$ . [Hint: Mathematica can't compute the integral exactly; you should use `NIntegrate`.]

### Exercise 2

Let  $\mathbf{r}(x,y,z)=(x,y,z)$ , and  $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ , where the double bars stand for magnitude, and let  $M$  be the surface of the solid bounded by the paraboloid  $z=26-x^2-y^2$  and the plane  $z=1$ . Use the Divergence Theorem to compute the

outward flux of  $\mathbf{F}$  through  $M$ . [Hint: Mathematica can't compute the integral exactly; you should use `NIntegrate`.]

### Exercise 3

Use the Divergence Theorem to calculate the outward flux of  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 x, \frac{1}{3} y^3 + \tan(z), x^2 z + y^2)$  through the top half of the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . [Hint: the surface is not closed; you need a closed surface to apply the Divergence Theorem. Make a closed surface by adding a flat bottom to the hemisphere -- and think carefully!]

### Exercise 4

Use the Divergence Theorem to calculate the outward flux of  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 x + e^{yz}, x^2 y + \tan(z), z^3/3 + x^2/5 + 9 y^2)/3$  through the bottom half of the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . [Hint: the surface is not closed; you need a closed surface to apply the Divergence Theorem. Make a closed surface by adding a flat top to the hemisphere -- and think carefully!]

### Exercise 5

In this problem, we will prove Archimedes's Principle: the buoyant force on a submerged object equals the weight of the fluid it displaces. We choose a system of coordinates so that  $z$  represents the depth below the fluid surface; that is, the fluid surface is the  $xy$ -plane and the  $z$ -axis points down into the fluid. At every point where  $z \geq 0$ , the pressure is given by the scalar function  $p(x, y, z) = \delta g z$ , where  $\delta$  is the density of the fluid (assumed constant) and  $g$  is the acceleration due to gravity (also assumed constant).

Set up an integral to calculate the weight of the fluid displaced by  $S$ , where  $S$  is any solid completely submerged in fluid (i.e.  $z \geq 0$  at every point of  $S$ ). This means that you are to write a general integral that works for every  $S$ , not just to choose some particular  $S$ . [Hint: how much fluid does  $S$  displace?]

b) Loosely, buoyant force is the integral of pressure. More precisely, the buoyant force is given by the vector integral  $\mathbf{B} = - \oint_{\partial S} (p \mathbf{n}) d\sigma$ . Write a paragraph explaining why this is a reasonable formula. [Hint: think of the integral as a sum of many little pieces. Don't forget to explain the minus sign!]

c) By direct calculations, we can see that  
 $\mathbf{p}\mathbf{n} = p(n_1, n_2, n_3) = (pn_1, 0, 0) + (0, pn_2, 0) + (0, 0, pn_3) = (p\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\mathbf{i} + (p\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})\mathbf{j} + (p\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\mathbf{k}$ . Use this  
 substitution, rearrange, and use the Divergence Theorem (three times) to prove Archimedes's Principle.