S T Q Q S S D   __/__/__

Teorema Mestre

BRENO DE CASTRO PIMENTA
RA: 2017114809

1) $T(n) = 3T(n/2) + n^2$

* $a = 3 \geq 1$ $b = 2 > 1$ $f(n) = n^2$

$\log_2^{3+\epsilon}$, se $\epsilon = 1$, $\log_2^{3+1} = 2$

$\therefore f(n) = \Omega(n^{\log_b^{a+\epsilon}}) = \Omega(n^2)$ ✓

* $af(n/b) \leq c \cdot f(n)$

$3 \cdot (n/2)^2 \leq c \cdot n^2$

$\frac{3}{4} \cdot n^2 \leq c \cdot n^2$

$3/4 = c$ ✓

Logo $T(n) = \Theta(n^2)$

2) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$

* $a = 4$ $b = 2$ $f(x) = n^2$

$\log_2^4 n$, se $K = 0$, $\log_2^4 \cdot \log^0 n = 2$

$\therefore f(n) = \Theta(n^{\log_b^a} \cdot \log^k n) = \Theta(n^2)$

Logo $T(n) = \Theta(n^{\log_2^4} \cdot \log n)$

spiral

__/__/__

S T Q Q S S D

3) $T(n) = T(n/2) + 2^n$

- $a = 1 \quad b = 2 \quad f(n) = 2^n$

$\log_2^{1+\epsilon}$, se $\epsilon =$, $\log_2^2 = 1$

$f(n) = \Omega(n^1)$ ✓

$a f(n/b) \leq c \cdot f(n)$

$1 \cdot 2^{n/2} \leq c \cdot 2^n$

$2^{n/2} \leq c \cdot 2^n$

se $c = 0{,}9$, é atendido ✓

$\therefore T(n) = \Theta(2^n)$

4) $T(n) = 2^n \cdot T(n/2) + n^n$

* $a = 2^n \quad b = 2 \quad f(x) = n^n$

$\log_2^{2^n} \cdot \log^k n$, se $k = 0$, $\log_2^{2^n} = n$

$f(n) = \Theta(n^{\log_b^a} \cdot \log^k n) = \Theta(n^n)$

$\therefore T(n) = \Theta(n^n \cdot \log n)$

5) $T(n) = 16\, T(n/4) + n$

* $a = 16 \quad b = 4 \quad f(n) = n$

$\log_4^{16 - \epsilon}$, se $\epsilon = 12$, $\log_4^4 = 1$

Se $f(n) = O(n^{\log_4^4}) = O(n^1)$

Então $T(n) = \Theta(n^{\log_4^{16}}) = \Theta(n^2)$

spiral

S T Q Q S S D

__/__/__

6) $T(n) = 2\,T(n/2) + n \cdot \log^n$

$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = n \cdot \log^n$

Sendo $n^{\log_2^2} \cdot \log^K n$, se $K = 1$, $n \log^n$,

Logo $f(n) = \Theta(n \cdot \log n)$, então $T(n) = \Theta(n \cdot \log^2 n)$

7) $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n/\log^n$

$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = n/\log^n$

$\begin{cases} f(n) \neq O(n^1) \\ f(n) \neq \Omega(n^3) \\ K < 0 \end{cases}$

Não funciona o Teorema Mestre

8) $T(n) = 2\,T(n/4) + n^{0,51}$

$a = 2 \quad b = 4 \quad f(n) = n^{0,51}$

Sendo $n^{\log_4^2 + \epsilon}$, se $\epsilon = \log_4^{0,009}$, $n^{0,509}$,

$2 (n/4)^{0,51} \leq c \cdot n^{0,51}$

$\frac{2}{(4)^{0,51}} \cdot n^{0,51} \leq c \cdot 0,51$

Sendo $2/4^{0,51} < 1$

pode ser: $c < 1$

Logo $f(n) = \Omega(n^{0,509})$, então $T(n) = \Theta(n^{0,51})$

9) $T(n) = 0,5\;T(n/2) + 1/n$

$a = 0,5 \quad b = 2 \quad f(n) = 1/n$

Como $a < 1$, não há como aplicar o teorema mestre

_/_/_ S T Q Q S S D

10) $T(n) = 16\, T(n/4) + n!$

$a = 16 \quad b = 4 \quad f(n) = n!$

Se $n^{\log_4 16+\epsilon}$, $\epsilon = 48$, n^3

Então $f(n) = \Omega(n^3)$

E $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$

$16 \cdot (n/4)! \leq c \cdot n!$

$16 \cdot \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{n}{4} - 1\right)! \leq c \cdot n \cdot (n-1)!$

$4 \cdot n \cdot \left(\frac{n}{4} - 1\right)! \leq c \cdot n \cdot (n-1)!$

$4\left(\frac{n}{4} - 1\right) \leq c \cdot (n-1)!$ → não consegui provar.

~~Logo $f(n) = \Theta(n!)$~~

11) $T(n) = \sqrt{2} \cdot T(n/2) + \log n$

$a = \sqrt{2} \quad b = 2 \quad f(n) = \log n$

$n^{\log_2 \sqrt{2} - \epsilon}$, se $\epsilon = \sqrt{2} - 1$, $n^{\log_2 1} = n^0$

Então $f(n) = O(n^0)$

logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\log_2 \sqrt{2}}) = \Theta(n^{0,5})$

12) $T(n) = 3T(n/2) + n$

$a = 3 \quad b = 2 \quad f(n) = n$

$n^{\log_2 3 - \epsilon}$, se $\epsilon = 0,5$, $n^{\log_2 2,5} = n^x$, sendo $x > 1$,

Então $f(n) = O(n^x)$

logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\log_2 3})$

13) $T(n) = 3T(n/3) + \sqrt{n}$

$a = 3 \quad b = 3 \quad f(n) = \sqrt{n}$

$n^{\log_3^{3-\epsilon}}$, se $\epsilon = 0,1$, $n^{\log_3^{2,9}} = n^x$,

onde sabemos que $0,5 < x < 1$,

Então $f(n) = O(n^x)$

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\log_3^3}) = \Theta(n)$

14) $T(n) = 4T(n/2) + c \cdot n$

$a = 4 \quad b = 2 \quad f(n) = c \cdot n$

$n^{\log_2^{4-\epsilon}}$, se $\epsilon = 0,5$, $n^{\log_2^{3,5}} = n^x$,

onde sabemos que $1 < x < 2$,

Então $f(n) = O(n^x)$

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\log_2^4}) = \Theta(n^2)$

15) $T(n) = 3T(n/4) \cdot n\log^n$

$a = 3 \quad b = 4 \quad f(n) = n\log^n$

$n^{\log_4^{3+\epsilon}}$, se $\epsilon = 13$, $n^{\log_4^{16}} = n^2$

Então $f(n) = \Theta(n^2)$

$$aF(n/b) \leq c \cdot f(n)$$

$$3 \cdot \frac{n}{4} \cdot \log^{n/4} \leq c \cdot n \cdot \log^n$$

$$\frac{3}{4} \cdot n \cdot \frac{\log n}{\log 4} \leq c \cdot n\log n$$

$$3/8 \cdot n \cdot \log^n \leq c \cdot n\log^n$$

$c = 3/8$ atende

Logo $T(n)$ é $\Theta(n \cdot \log^n)$

__/__/__ S T Q Q S S D

16) $T(n) = 3 \cdot T(n/3) + n/2$

$a = 3 \quad b = 3 \quad F(n) = n/2$

$n^{\log_3 3} \cdot \log^k n$, sendo $K = 0$, $n^{\log_3 3} = n^1$

Então $F(n) = \Theta(n)$

Logo $T(n)$ é $\Theta(n \cdot \log n)$

17) $T(n) = 6 \cdot T(n/3) + n^2 \cdot \log n$

$a = 6 \quad b = 3 \quad F(n) = n^2 \cdot \log n$

$n^{\log_3 6 + \epsilon}$, sendo $\epsilon = 3$, $n^{\log_6 9} = n^2$

Então $f(n) = \Omega(n^2)$

$a f(n/b) \leq c \cdot f(n)$

$6 \cdot (n/3)^2 \cdot \log n/3 \leq c \cdot n^2 \cdot \log n$

$6 \cdot \frac{n^2}{9} \cdot \frac{\log n}{\log 3} < c \cdot n^2 \cdot \log n$

$\frac{(6/9)}{\log 3} \cdot n^2 \cdot \log n < c \cdot n^2 \cdot \log n$

$c = {(6/9)}/{\log 3}$ atende, pois $\left[\frac{(6/9)}{\log 3}\right] < 1$ ✓

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^2 \cdot \log n)$

18) $T(n) = 4T(n/2) + \frac{n}{\log n}$

$a = 4 \quad b = 2 \quad F(n) = n/\log n$

$n^{\log_2 4 - \epsilon}$, sendo $\epsilon = 2$, $n^{\log_2 2} = n$

Então $f(n) = O(n)$

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$

spiral

S T Q Q S S D — / /

19) $T(n) = 64\, T(n/8) - n^2 \cdot \log n$

$a = 64 \quad b = 8 \quad f(n) = -n^2 \cdot \log n$

Como f(n) é negativa, não se aplica o Teorema Mestre

20) $T(n) = 7\, T(n/3) + n^2$

$a = 7 \quad b = 3 \quad f(n) = n^2$

$n^{\log_3 7 + \epsilon}$, sendo $\epsilon = 1$, $n^{\log_3 8} = n^x$

onde $1 < x < 2$

Então $f(n) = \Omega(n^{\log_3 8})$

$a f(n/b) \leq c\, f(n)$

$7\, (n/3)^2 \leq c\, n^2$

$\frac{7}{9} \cdot n^2 \leq c \cdot n^2$

Sendo $c = 7/9$ atende

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^2)$

21) $T(n) = 4\, T(n/2) + \log n$

$a = 4 \quad b = 2 \quad f(n) = \log n$

$n^{\log_2 4 - \epsilon}$, se $\epsilon = 2$, $n^{\log_2 2} = n$

Então $f(n) = O(n)$

__/__/__

S T Q Q S S D

22) $T(n) = T(n/2) + n(2 - \cos n)$

$a = 1 \quad b = 2 \quad f(n) = n(2 - \cos n)$

$n^{\log_2 1 + e}$, sendo $e = 1$, $n^{\log_2 2} = n$

Como $\cos n = [-1, 1]$, consideramos $(2 - \cos n) =$ constante
Então $f(n) = \Omega(n)$

$a f(n/b) = c \cdot f(n)$

$n/2 \cdot (2 - \cos(n/2)) \leq c \cdot n \cdot (2 - \cos n)$

$1/2 \cdot \cancel{n} \cdot (2 - \cos(n/2)) \leq c \cdot \cancel{n} (2 - \cos n)$

Se $n = y \cdot \pi$, sendo y valor par;
$2 - \cos(n/2) = 3$ e $2 - \cos(n) = 1$
$1/2 \cdot 3 \leq c \cdot 1$, ou seja não existe c que atenda!

Exemplo: $n = 2\pi$ → $\cos(n) = 1$
→ $\cos(n/2) = -1$

Não há como aplicar o teorema mestre

spiral