Lista 8

Exercício 1. Considere o triângulo de Pascal:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Calcule os valores dessas 5 primeiras linhas e da próxima linha. Você nota algum padrão? Em ordem, da esquerda pra direita, de cima pra baixo: 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 5, 10, 10, 5, 1. O padrão é que o número é sempre a soma de seus vizinhos superiores.

Exercício 2. Num grupo de 20 homens e 20 mulheres, de quantas maneiras podemos montar um grupo de trabalho com 10 homens e 10 mulheres? De quantas maneiras podemos montar um grupo de 20 pessoas com 5 homens? E se forem 20 pessoas com k homens? $\binom{20}{10}^2$ e $\binom{20}{k}\binom{20}{20-k}$.

Exercício 3. Considere a igualdade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

O objetivo deste exercício é mostrar esta igualdade.

(i) Mostre que o lado esquerdo é igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Para todos $n \geq k \geq 0$, segue que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Daí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(ii) O que o lado direito está contando?

Maneiras de formar subconjuntos de tamanho n em um conjunto com $2n$ elementos.

(iii) Imagine que o conjunto com $2n$ elementos foi dividido em duas metades. Se um conjunto com n elementos tiver k elementos de uma das metades, quantos elementos ele terá da outra?

Obviamente $n - k$.

(iv) Conclua a demonstração da igualdade apresentada.

Para todo $k = 0, ..., n$, há $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ suconjuntos de n elementos com precisamente k elementos na primeira metade. E exatamente todo conjunto de n elementos será contemplado como um dos conjuntos com k elementos na primeira metade para algum k. Logo o número total de subconjuntos de n no conjunto de $2n$ é igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k},$$

exatamente como queríamos mostrar.