Lista 11

Exercício 1. Ache uma relação de recorrência que conte o número de sequências de n dígitos do conjunto $\{0, 1, 2\}$ e que não contenham dois 0s consecutivos.

Cada sequência de n dígitos que não termina com um 0 corresponde a uma sequência válida qualquer de $n-1$ dígitos acrescida de um 1 ou um 2. Cada sequência de n dígitos que termina com um 0 corresponde a uma sequência qualquer de $n-2$ dígitos acrescida de 10 ou de 20. Logo

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Exercício 2. Ache uma relação de recorrência que conte o número de sequências de n dígitos do conjunto $\{0, 1, 2\}$ e que não contenham (quaisquer) dois símbolos consecutivos iguais.

Correspondem a qualquer sequência válida de $n-1$ dígitos que sejam acrescidas de um dígito diferente do último. Ou seja,

$$a_n = 2a_{n-1}.$$

Exercício 3. Resolva as relações de recorrência abaixo:

(i) $a_n = a_{n-1}$ para $n \geq 1$, e $a_0 = 2$.

Nesta relação todos os termos são iguais aos anteriores. Logo $a_n = 2$ para todo n.

(ii) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ para $n \geq 2$, com $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$.

O polinômio característico é $x^2 - 3x + 2$, cujas raízes são 1 e 2. Logo as soluções gerais são da forma

$$a_n = \alpha 1^n + \beta 2^n.$$

Resolvendo para a_0 e a_1 teremos $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

(iii) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ para $n \geq 2$, com $a_0 = 6$ e $a_1 = 8$.

O polinômio característico é $x^2 - 4x + 4$, cujas raízes são 2 e 2. Logo as soluções gerais são da forma

$$a_n = \alpha 2^n + n\beta 2^n.$$

Resolvendo para a_0 e a_1 teremos $\alpha = 6$ e $\beta = -2$.

(iv) $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$ para $n \geq 3$, com $a_0 = a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

O polinômio característico é $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, cujas raízes são 1, 1 e 2. Logo as soluções gerais são da forma

$$a_n = \alpha 1^n + n\beta 1^n + \gamma 2^n.$$

Resolvendo para a_0, a_1 e a_2 teremos $\alpha = 0$, $\beta = -1$ e $\gamma = 1$.

Exercício 4. O polinômio característico de uma relação de recorrências possui raízes $1, 1, 2, 3, 3, 3$.

1. Qual o formato geral da solução?

   $a_n = (\alpha_{11} + \alpha_{12}n) + \alpha_{21}2^n + (\alpha_{31} + \alpha_{32}n + \alpha_{33}n^2)3^n.$

2. Quantos termos iniciais precisamos para poder determinar a solução unicamente?

   6 termos, uma vez que temos 6 variáveis na forma geral, e portanto precisaremos de 6 equações.