Aulas 11 e 12

1 Funções

Uma *função* é uma maneira de associar a cada elemento de um dado conjunto A, um elemento de um conjunto B. Formalmente, uma função f de A para B é um subconjunto de $A \times B$ que, para cada elemento de A, contenha precisamente um único par ordenado onde aquele elemento é a primeira coordenada.

Exemplo 1. Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Definimos $f : A \to B$ indicando qual elemento de B é associado a cada elemento de A:

$$f(1) = x \quad f(2) = y \quad f(3) = z \quad f(4) = y.$$

Esta função também pode ser expressa como o subconjunto de $A \times B$ dado por

$$\{(1, x),\ (2, y),\ (3, z),\ (4, y)\}.$$

Exercício 1. Seja $A = \{2, 3, 4\}$, e $f : A \to \mathbb{N}$ dada pela regra $f(x) = x^3 - x^2$ para todo $x \in A$. Expresse o subconjunto de $A \times \mathbb{N}$ que define f.

Em uma função $f : A \to B$, temos a nomenclatura:

(i) A é o domínio.

(ii) B é o contradomínio.

(iii) A imagem de um elemento de A é o elemento de B a ele associado.

(iv) O conjunto dos elementos de B que são imagens de pelo menos um elemento de A é a imagem de f:
$$\Im(f) = f(A) = \{b \in B : (\exists a \in A : f(a) = b)\}.$$

(v) A imagem inversa de um elemento de $b \in B$ é o conjunto de valores $a \in A$ cuja imagem é b:
$$\text{imagem inversa de } b = \{a \in A : f(a) = b\}.$$

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ determinada pela regra $f(x) = x^2$.

(i) Qual o domínio?

(ii) Qual o contradomínio?

(iii) Qual a imagem de 5?

(iv) Qual a imagem da função?

(v) Qual a imagem inversa de 16?

(vi) Qual a imagem inversa de 13 ?

2 Mais propriedades

Um função $f : A \to B$ é *injetiva* (ou injetora) se para todos elementos $a_1, a_2 \in A$, temos

$$f(a_1) \neq f(a_2).$$

Exercício 3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(x)$ não é injetiva, uma vez que

$$f(0) = f(2\pi).$$

Ache o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $f : A \to \mathbb{R}$ dada pela mesma regra seja injetiva.

Exercício 4. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{3x-5}{7}$ é injetiva.

De fato, se $f(x) = f(y)$, então $\frac{3x-5}{7} = \frac{3y-5}{7}$, logo $3x-5 = 3y-5$, logo $3x = 3y$, logo $x = y$. Por contrapositiva, isso significa que se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$, como queríamos. $\square$

Um função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* (ou sobrejetora) se para todos elementos $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$; ou seja, se a imagem inversa de todos os elementos do contra-domínio é não vazia.

Exercício 5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4$ não é sobrejetiva, uma vez que -1 pertence ao contradomínio, mas não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = -1.$$

Ache um subconjunto B de $\mathbb{R}$ que contenha a imagem de f e tal que $f : \mathbb{R} \to B$ seja sobrejetiva.

Exercício 6. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{3x-5}{7}$ é sobrejetiva.

De fato, $y \in \mathbb{R}$, e definimos $x = \frac{7y+5}{3}$. Note que

$$f(x) = \frac{3x-5}{7} = \frac{3\frac{7y+5}{3} - 5}{7} = y.$$

Portanto dado um $y \in \mathbb{R}$, existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. $\square$

Uma função é *bijetiva* (ou bijetora) se ela for injetiva e sobrejetiva.

Exercício 7. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{3x-5}{7}$ é bijetiva?

Exercício 8. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^x$ é bijetiva? E se a regra for $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$?

A primeira não é bijetiva porque não existe qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $2^x = 0$, portanto a função não é sobrejetiva. A segunda não é porque $f(1) = f(2) = 0$, e portanto a função não é injetiva. $\square$

Se $f : A \to B$ é uma função bijetiva, então a função *inversa* $f^{-1} : B \to A$ é defina por

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

Como para todo $b \in B$, existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$, a função inversa está bem definida. Note entretanto que ela só existe se a função dada for bijetiva.

Exercício 9. Ache a inversa da função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x + 1$. E se fosse $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $g(x) = x + 1$, qual seria a inversa?

Seja $f : A \to B$ e $g : B \to C$. A função *composta* de g com f, denotada por $g \circ f : A \to C$, é definida por

$$g \circ f(a) = g\big(f(a)\big).$$

Exercício 10. Considere $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(n) = n + 1 \quad \text{e} \quad g(n) = n^2.$$

É verdade que

$$f \circ g = g \circ f?$$

Exercício 11. Prove que $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva.

3 Exemplos de funções relevantes

3.1 Módulo

Valor absoluto: a cada número real x, associamos outro número real, não negativo, $f(x) = |x|$ definido por

(i) Se $x \geq 0$, $f(x) = |x| = x$.

(ii) Se $x < 0$, $f(x) = |x| = -x$.

Exercício 12. Desenhe o gráfico da função $f(x) = |x|$.

Exercício 13. Resolva $|2x + 5| = 3$.

Exercício 14. Resolva $|2x + 3| = |x + 2|$.

3.2 Piso e chão

A função *piso* associa a cada número real x, o maior número inteiro menor ou igual a x. Ela é denotada por $f(x) = \lfloor x \rfloor$.
A função *teto* associa a cada número real x, o menor número inteiro maior ou igual a x. Ela é denotada por $f(x) = \lceil x \rceil$.

Exercício 15. Ache o piso e o teto dos seguintes números reais:

(i) π.

(ii) 2.

(iii) $-3,5$.

Exercício 16. Prove que

(i) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

(ii) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.

(iii) $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \leq x + 1$.

Dica: use que $\lfloor x \rfloor = x - \epsilon$ para um $\epsilon \in [0, 1)$, e $\lceil x \rceil = x + \epsilon$.

4 Equações funcionais

Resolva os desafios:

(i) Encontre todas as funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y).$$

(ii) Encontre todas a funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

(iii) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

5 Crescimento de funções

Muitas vezes, ao se analisar a complexidade de algoritmos em termos do tempo ou da quantidade de operações necessárias em função do tamanho n da entrada, poderemos estar interessados apenas nos componentes mais significativos do algoritmo, que realmente farão a diferença no que diz respeito à complexidade. Nesta seção, apresentaremos notações que permitem fazer análises assintóticas do comportamento de funções.

(1) Sejam $f, g : \mathbb{Z} : \mathbb{R}$. Dizemos que f é "big-Oh" de g se existem números constantes C e k tais que

$$|f(x)| \leq C.|g(x)|$$

para todo $x \geq k$. Denotamos este fato dizendo que $f(x)$ é $O(g(x))$, ou, possivelmente $f(x) \in O(g(x))$.

Exercício 17. Mostre que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ é $O(x^2)$.

Basta achar um C tal que $x^2 + 2x + 1 \leq C.x^2$ para $x \geq k$ para algum k. Por exemplo, se $k > 1$, note que $x^2 > x > 1$, portanto $x^2 + 2x + 1 \leq 4x^2$. Ou seja, $f(x)$ é $O(x^2)$. □

Exercício 18. Ache outro valor de C (e de k...) que mostrem que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ é $O(x^2)$.

Exercício 19. Mostre que $f(x) = 35x^2$ é $O(x^3)$.

Exercício 20. Mostre que se $f(x) \in O(g(x))$, e $g(x) \in O(h(x))$, então $f(x) \in O(h(x))$.

Exercício 21. Mostre que x^2 não é $O(x)$.

Exercício 22. Mostre que $f(n) = n!$ é $O(n^n)$.

Exercício 23. Mostre que $f(n) = \log n!$ é $O(n \log n)$.

5.1 Somas e produtos de funções

Sejam $f_1(x) \in O(g_1(x))$ e $f_2(x) \in O(g_2(x))$. Ou seja, para $x \geq k_1$ temos $|f_1(x)| \leq C_1|g_1(x)|$, e para $x \geq k_2$ temos $|f_2(x)| \leq C_2|g_2(x)|$. O que podemos dizer acerca da função

$$F(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \quad ?$$

Primeiro, devemos encontrar uma função $g(x)$ tal que $g_1 \in O(g(x))$ e $g_2 \in O(g(x))$. No pior caso possível podemos simplesmente definir $g(x) = \max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|\}$, mas em geral é possível achar uma $g(x)$ mais simples. Daí, note que

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)| && (1) \\ &\leq |\alpha| \cdot |f_1(x)| + |\beta| \cdot |f_2(x)| && (2) \\ &\leq |\alpha| \cdot C_1 \cdot |g_1(x)| + |\beta| \cdot C_2 \cdot |g_2(x)| \quad \text{para } x \geq k \geq k_1, k_2 && (3) \end{aligned}$$

Exercício 24. Use o fato que $g_1(x) \in O(g(x))$ e $g_2(x) \in O(g(x))$ para concluir que $F(x) \in O(g(x))$. Ou seja, termine essas contas aí em cima...

Exercício 25. Seja $f(n)$ um polinômio de grau d. Use o exercício acima para argumentar que $f(n) \in O(n^d)$.

Exercício 26. Mostre agora que se $f_1(x) \in O(g_1(x))$ e $f_2(x) \in O(g_2(x))$, então a função $F(x) = f_1(x)f_2(x)$ é $O(g_1(x)g_2(x))$.

Exercício 27. Encontre um estimador big-Oh para as funções abaixo:

- $f(n) = 2n\log(n!) + (n^2 + 3)\log(n)$.
- $f(x) = (x + 1)\log(x^2 + 1) + 3x^2$.

5.2 Big-Omega e Big -Theta

(2) Dizemos que uma função $f(x)$ é big-Omega de $g(x)$ se para todo $x \geq k$, existe um C tal que

$$|f(x)| \geq C|g(x)|.$$

Denotamos este fato por $f(x) \in \Omega(g(x))$.

Exercício 28. Pare para pensar agora. Qual a relação entre big-Oh e big-Omega ?!

(3) Quando $f(x)$ é ao mesmo tempo big-Oh e big-Omega de $g(x)$, dizemos que $f(x)$ é big-Theta de $g(x)$, e denotamos este fato por

$$f(x) \in \Theta(g(x)).$$

Note que isto é equivalente a dizer que existe um $k \in \mathbb{Z}$ e constantes C_1 e C_2 tais que, para todo $x \geq k$, temos

$$C_1|g(x)| \leq f(x) \leq C_2|g(x)|.$$

Exercício 29. Mostre que um polinômio na variável x de grau d é sempre $\Theta(x^d)$.

Exercício 30. Mostre que $f(x) = 3x^2 + 8x\log x$ é $\Theta(x^2)$.

5.3 Limites

Pode misturar um pouco essas noções de big-Oh e seus amigos com limites.

Teorema 1. *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Então $f(x) \in O(g(x))$.

Proof. Pela definição de limite, para todo $\delta > 0$, existe k tal que para todo $x \geq k$, temos

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \delta.$$

Segue que

$$|f(x)| \leq \delta |g(x)|.$$

□

- Na verdade, quando duas funções satisfazem a hipótese do Teorema acima, dizemos que $f(x) \in o(g(x))$ (small - oh).

Exercício 31. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

onde $A \in \mathbb{R}$. Mostre que ainda assim podemos dizer que $f(x) \in O(g(x))$.

Aulas 13 e 14

6 Cardinalidade

A cardinalidade de um conjunto com um número finito de elementos é exatamente a quantidade de elementos que ele possui. Uma maneira formal de estabelecer o conceito de "quantidade" é dizer que a cardinalidade de um conjunto A é o natural $M \in \mathbb{N}$ tal que há uma bijeção de

$$\{1, 2, 3, 4, ..., M\} \quad \text{para} \quad A.$$

Exemplo 2. Por exemplo, considere $A = \{x, y, z\}$. Qual a cardinalidade de A?

Ora, tentamos achar bijeções para A. Notaremos que qualquer função de $\{1\}$ ou $\{1, 2\}$ para A não serão sobrejetivas, ao passo que qualquer função de $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ou maiores não serão injetivas. De fato, existe uma bijeção de $\{1, 2, 3\}$ para A. Por exemplo:

$$1 \mapsto y \quad 2 \mapsto z \quad 3 \mapsto x.$$

O conceito de cardinalidade se estende para conjuntos infinitos. É por isso que a definição em termos de bijeção se faz necessária.

Dizemos que um conjunto A tem *cardinalidade infinita enuméravel* se existe uma bijeção entre $\mathbb{Z}$ e A, ou seja, se A é "do tamanho" dos números inteiros. Note que se há uma bijeção entre os conjuntos, nada mais natural do que esperar que eles tenham "o mesmo tamanho". Entretanto isso contradiz um pouco nossa intuição a respeito de tamanha, uma vez que não estamos acostumados a lidar com grandezas infinitas.

Exemplo 3. Mostre que o conjunto dos inteiros pares tem cardinalidade infinita enumerável, ou seja, tem o "mesmo tamanho" que o conjunto dos inteiros.

Para fazer isso, precisamos construir uma bijeção entre $\mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}$. Consideramos então

$$f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} \quad \text{tal que} \quad f(n) = 2n.$$

Mostramos que é injetiva: se $2n_1 = 2n_2$, então dividimos por 2, e então $n_1 = n_2$. Logo se $n_1 \neq n_2$, então $f(n_1) \neq f(n_2)$. Agora vemos que é sobrejetiva. Seja $k \in 2\mathbb{Z}$. Logo existe m tal que $2m = k$. Portanto $f(m) = k$. Já que f é bijetiva, a cardinalidade dos inteiros pares é igual à dos inteiros.

Exercício 32. Mostre que a cardinalidade dos inteiros ímpares é igual à dos inteiros.

Exercício 33. Mostre que o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, ...\}$ tem a mesma cardinalidade dos inteiros.

Aqui faremos da seguinte forma: considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(x) = (-1)^x \lceil x/2 \rceil.$$

Ela é sobrejetiva: de fato, se $k \in \mathbb{Z}$, e $k \geq 0$, note que $f(2k) = k$. Se $k < 0$, note que $-(2k + 1) \in \mathbb{N}$, e $f(-(2k + 1)) = -\lceil(-2k - 1)/2\rceil = \lfloor(2k + 1)/2\rfloor = k$.

Ela é injetiva: de fato, se $(-1)^x \lfloor x/2 \rfloor = (-1)^y \lfloor y/2 \rfloor$, então, por conta do sinal, x e y tem a mesma paridade. Se são ambos pares, $\lfloor x/2 \rfloor = x/2$, e $\lfloor y/2 \rfloor = y/2$. Logo $x/2 = y/2$, e $x = y$. Se são ambos ímpares, então $\lfloor x/2 \rfloor = (x - 1)/2$, e $\lfloor y/2 \rfloor = (y - 1)/2$. Logo, novamente, $x = y$.

Exercício 34. Mostre que o conjunto dos naturais que são potências de 2 maiores que 1 tem a mesma cardinalidade dos inteiros (dica: use o exercício anterior, lembrando que a composição de bijeções é uma bijeção).

As vezes não é possível achar facilmente uma bijeção entre dois conjuntos A e B. Porém em alguns desses casos é possível mostrar que existe uma função injetiva de A para B, e uma outra função injetiva de B para A. Vamos por enquanto usar o seguinte teorema:

Teorema 2. *Sejam A e B dois conjuntos. Se existe uma injeção $f : A \to B$ e uma injeção $g : B \to A$, então existe uma bijeção entre A e B.*

Exercício 35. Mostre que o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é enumerável.

Vamos mostrar esse resultado construindo duas funções. Uma de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e outra de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$. Nenhuma delas será sobrejetiva, mas ambas serão injetivas, e portanto o teorema acima garantirá que existe uma bijeção entre eles, ainda que não nos diga qual exatamente é esta bijeção.

Considere $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = (n, 0).$$

Claramente f é injetiva: $n_1 \neq n_2$ implica $(n_1, 0) \neq (n_2, 0)$.

Agora seja $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n, m) = 2^n 3^m.$$

Para mostrar que é injetiva, suponha por contrapositiva que $f(a, c) = f(b, d)$, ou seja,

$$2^a 3^b = 2^c 3^d.$$

Então $2^{c-a} = 3^{b-d}$. Como os inteiros possuem fatoração única, um número inteiro não pode ser simultanaemente uma potência de 2 e de 3, a não ser que este número seja 1, e a potência em questão tenha expoente 0. Logo $c = a$ e $b = d$, portanto

$$(a, c) = (b, d).$$

Usando que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ tem mesma cardinalidade, é fácil ver que existe bijeção de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ para $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Compondo esta bijeção com g, teremos uma injeção de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$.

Exercício 36. Mostre que o conjunto dos racionais é enumerável.

Teorema 3. *Sejam A, B, C e D quatro conjuntos, e suponha que existam bijeções $f : A \to C$ e $g : B \to D$. Então existe uma bijeção de $A \times B \to C \times D$.*

Proof. Considere a função $h : A \times B \to C \times D$ definida por

$$h(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Usando que f e g são bijeções, mostre como exercício que h é bijeção. □

Exercício 37. Mostre que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é enumerável.

Exercício 38 (Desafio)**.** Mostre por indução que a união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

7 Conjuntos não enumeráveis

Na aula passada, aprendemos que conjuntos que estão em bijeção com os naturais ou com os inteiros possuem um tipo de cardinalidade chamada de "infinito enumerável". Em certo sentido, este é o "menor" infinito que existe. Vamos agora mostrar que certos conjuntos são "maiores" que $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, e portanto terão cardinaldiade "infinita não-enumerável".

A idéia dos exemplos será sempre a mesma. Suporemos para efeito de chegar a uma contradição que o dado conjunto é enumerável, e usaremos esta enumeração para construir um elemento que pertence ao conjunto, mas que não pode estar contemplado na enumeração.

Teorema 4. *O conjunto de todas as sequências cujos elementos são* 0 *e* 1 *não é enumerável.*

Por exemplo, temos

(i) $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$, correspondendo à sequência $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0....)$.

(ii) $a_n = 1$ para todo $n \geq 1$, correspondendo à sequência $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1....)$.

(iii) $a_n = [(-1)^n + 1]/2$ para todo $n \geq 1$, correspondendo à sequência $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0....)$.

(iv) Basicamente qualquer sequência com 0s e 1s que você imaginar.

(v) Note que há uma maneira muito natural de associar cada número natural com uma sequência distinta de 0s e 1s. Por exemplo:

$$1 \to (1, 0, 0, 0, 0, ...) \quad 2 \to (0, 1, 0, 0, 0, ...) \quad 3 \to (0, 0, 1, 0, 0, ...) \quad \text{et cetera.}$$

A grande pergunta é: é possível associar cada sequência a um número natural distinto?

A demonstração abaixo contém uma técnica chamada "diagonal de Cantor". Apesar de Cantor não ter sido o primeiro a usar esta técnica, ela se tornou famosa após Cantor usá-la em 1891 para demonstrar que o conjunto dos números reais não é enumerável. Ela é aparentemente simples, todavia tem sido usada desde então para demonstrar importantes resultados da matemática. É justo dizer que é uma técnica ingenuamente revolucionária.
`https://pt.wikipedia.org/wiki/Argumento_de_diagonaliza%C3%A7%C3%A3o_de_Cantor`

Demonstração. Suponha que exista uma enumeração do conjunto S que contém todas as sequências de 0s e 1s. Ou seja, seja $S = \{s(1), s(2), s(3), s(4), s(5), ...\}$ onde cada $s(i)$ representa uma sequência de 0s e 1s.

Definimos então uma sequência t da seguinte forma. Para cada posição n de t, $n \geq 1$, faremos:

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{se } s(n)_n = 0 \\ 0 & \text{se } s(n)_n = 1. \end{cases}$$

Ou seja, t é construída de modo que sua n-ésima posição seja oposta da n-ésima posição da n-ésima sequência. Por exemplo, se

$$\begin{aligned}
s(1) &= (\boxed{1}, 1, 0, 1, 0, 1...)\\
s(2) &= (0, \boxed{0}, 0, 1, 0, 0...)\\
s(3) &= (1, 0, \boxed{1}, 0, 1, 0...)\\
s(4) &= (0, 1, 1, \boxed{1}, 0, 1...)\\
s(5) &= (0, 0, 1, 1, \boxed{0}, 1...)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

então t seria $t = (0, 1, 0, 0, 1, ...)$. Note que t é uma sequência de 0s e 1s, logo pertence a S, o conjunto de todos elas. Como S está enumerado, existe um n tal que $t = s(n)$. Mas por construção de t, t não pode ser igual a $s(n)$ já que eles diferem em pelo menos uma coordenada, a n-ésima. Logo t não pertence a S, uma contradição. □

Note que este argumento é simples, curto, porém extremamente criativo. E poderoso. Com ele, fomos capaz de construir um conjunto que contém uma ordem de infinitude maior de elementos que $\mathbb{N}$.

Corolário 5. *O conjunto de todas as funções de $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ é não enumerável.*

Demonstração. Ora, cada função $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ corresponde precisamente à sequência $(f(1), f(2), f(3), f(4), ...)$. Como o conjunto das sequências é não enumerável, o conjunto das funções também será. □

Corolário 6. *O conjunto das partes de $\mathbb{N}$ é não enumerável.*

Demonstração. Para mostrar este resultado, veremos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ está em bijeção com o conjunto S de todas as sequências de 0s e 1s. Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$, portanto um elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos a sequência Definimos então uma sequência t da seguinte forma. Para cada posição n de t, $n \geq 1$, faremos:

$$s(A)_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in A \\ 0 & \text{se } n \notin A. \end{cases}$$

Por exemplo, o conjunto $A = \{1, 3, 4, 6\}$ corresponde a $s(A) = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0....)$. É fácil ver que esta correspondência é uma bijeção. Portanto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tem a mesma cardinalidade que o conjunto S, e este é não-enumerável. □

Teorema 7. *O conjunto dos números reais é não-enumerável.*

Demonstração. Para cada sequência s de 0s e 1s, considere o número real em expansão decimal dado por

$$0, s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6...$$

Por exemplo, a sequência $s = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...)$ corresponde ao número real

$$0, 10111.$$

Note então que todos os números reais construídos desta forma estão em bijeção com o conjunto S de todas as sequências de 0s e 1s. Este conjunto de números reais, que é um subconjunto de $\mathbb{R}$, é portanto não-enumerável, e assim também será $\mathbb{R}$. $\square$

Teorema 8. *Há funções $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ que não são computáveis através de um programa de computador.*

Demonstração. Já vimos no Corolário 5 que o conjunto de todas essas funções é não enumerável. Por outro lado, o conjunto de todos os programas de computador é certamente enumerável, uma vez que cada programa é uma sequência finita escrita com um número finito de caracteres. Daí há mais funções do que programas que podem ser escritos, portanto há funções para as quais nenhum programa poderá computá-las.

Exercício 39. Mostre que o intervalo $(0, 1)$ e $\mathbb{R}$ possuem a mesma cardinalidade. (Dica: use o resultado da aula passada que diz que dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade se existe uma função injetiva de cada um deles para o outro, mesmo que estas duas funções não seja relacionadas).

Este exercício acima nos diz que a ordem de infinitude do número de pontos da reta real não está relacionada a quão longa é a reta, mas sim a quão contínua ela é.

Exercício 40. Dado um conjunto qualquer A, mostre que não existe bijeção entre A e $\mathcal{P}(A)$. (Dica: suponha que tal função f exista, e defina o conjunto $T \in \mathcal{P}(A)$ como $T = \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Seja $b \in A$ tal que $f(b) = T$. Ache uma contradição.)

Este exercício acima nos mostra que há conjuntos cuja ordem de infinitude é maior que a dos números reais, por exemplo, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Mostra também que há infinitas ordens de infinitude diferentes:

$$\mathbb{N} << \mathcal{P}(\mathbb{N}) << \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) << \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) << ....$$

Num resultado surpreendente e extremamente profundo na década de 60, o matemático Paul Cohen mostrou que decidir se existe ou não algum outro tipo de infinito entre $\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é independente dos demais axiomas do sistema Zermelo - Fraenkel introduzidos no começo do século, e portanto pode ser escolhido como sendo verdadeiro ou falso.

Exercício 41 (Desafio)**.** Mostre que a cardinalidade do conjunto dos números reais é igual à de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (use as idéias das demonstrações dos teoremas acima e o exercício 1).

Aulas 15 e 16

8 Coeficientes Binomiais

Dados dois números naturais n e k com $n \geq k \geq 0$, definimos o símbolo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Lembre-se: convenciona-se que $0! = 1$.

Exercício 42. Calcule $\binom{4}{2}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{97}{1}$, $\binom{117}{117}$.

Exercício 43. Mostre que, para quaisquer $n \geq k \geq 0$, temos

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Proposição 1. *Para $n \geq k \geq 0$, tem-se*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!\ (k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\ k!} \\
&= \frac{n! \cdot k}{(n+1-k)!\ k!} + \frac{n!(n+1-k)}{(n+1-k)!\ k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\ k!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

9 Permutações, arranjos, combinações

Exercício 44. Considere um conjunto com 4 elementos distintos. Quantas 4-tuplas podemos formar usando cada um desses elementos apenas uma única vez? Ou seja, de quantas maneiras podemos ordenar esses quatro elementos? (construa uma árvore de possibilidades).

Exercício 45. No exercício anterior, o que acontece se for possível repetir os elementos? Se S tem quatro elementos, quantos elementos existem em $S \times S \times S \times S$?

Exercício 46. Considere um conjunto com 6 elementos distintos. Quantas triplas podemos formar usando cada um desses elementos no máximo uma única vez? Ou seja, de quantas maneiras podemos ordenar esses seis elementos em três posições?

Exercício 47. No exercício anterior: e se for possível repetir?

Nos exercícios anteriores, vimos alguns exemplos que nos levam a concluir que:

Teorema 9. *Seja S um conjunto com n elementos.*

(i) Existem $n!$ permutações com os elementos de S.

(ii) Existem $n!/(n-m)!$ arranjos dos elementos de S em m posições sem repetição.

(iii) Existem n^m arranjos dos elementos de S em m posições com repetição.

□

Suponha agora que desejemos contar quantos subconjuntos com k elementos existem em um conjunto com n elementos. Note que cada arranjo sem repetição de k dos n elementos determina os elementos que pertencerão ao conjunto, e há $n!/(n-k)!$ arranjos possíveis. Mas acabaríamos contando um mesmo conjunto $k!$ vezes, cada uma delas correspondendo a uma das maneiras de apresentar os k elementos em uma determinada ordem, ou seja, correspondendo a uma permutação dos k elementos. Então o número total de subconjuntos distintos com k elementos num conjunto de n elementos é igual a

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Exercício 48. Quantos subconjuntos de 3 elementos há num conjunto com 6 elementos?

Note que agora temos uma interpretação combinatória para a igualdade

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ou seja, de um lado eamos contando o número de conjuntos com k elementos, do outro estamos contando o número de conjuntos com $(n-k)$ elementos, mas notamos que cada conjunto S de k elementos corresponde unicamente a um conjunto de $(n-k)$ elementos - o seu complemento $\overline{S}$, daí as quantidades de cada tipo são iguais.

Exercício 49. Quantas 10-tuplas de 0s e 1s contém no máximo quatro elementos iguais a 1?

Exercício 50. Quantas 10-tuplas de 0s e 1s contém pelo menos três elementos iguais a 0?

Exercício 51. De quantas maneiras diferentes o lançamento de uma moeda 8 vezes pode dar no máximo três caras?

Exercício 52. Um conjunto de n pessoas sentarão em uma mesa circular. De quantas maneiras diferentes essas pessoas podem ser posicionadas, levando em conta que uma maneira obtida de outra apenas por uma rotação da mesa não conta como uma maneira diferente?

Exercício 53. E se ao sentar as n pessoas na mesa redonda, a única coisa que importa são os vizinhos de cada pessoa, e não pra que lado cada um está, quantas maneiras existem?

Exercício 54. Em um baralho comum, quantas mãos de 4 cartas podem ser formadas com precisamente três figuras?

Exercício 55. Em uma reunião todas as pessoas se cumprimentaram. Houve 91 apertos de mão. Quantas pessoas estava lá?

Exercício 56. Quantos anagramas diferentes existem da palavra ARARAS?

Exercício 57. Quantas peças diferentes há em um trominó (números vão de 0 a 6) ?

Exercício 58. De quantas maneiras diferentes uma corrida com 4 pessoas pode acabar (empates são permitidos...) ?

Vamos ver mais alguns exemplos de demonstrações combinatórias, ou seja, demonstrações onde uma igualdade algébrica é demonstrada argumentando que ambos os lados contam a mesma coisa de formas diferentes.

Proposição 2. *Para naturais $n \geq k \geq 1$, temos*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração. Ambos os lados são maneiras diferentes de contar quantos times de k pessoas com um capitão escolhido podem ser formados num conjunto de n pessoas.

No lado esquerdo, primeiro escolhemos o time, daí $\binom{n}{k}$, e dentre os k membros, escolhemos o capitão (há portanto k escolhas). No lado direito, primeiro escolhemos o capitão (n escolhas), depois escolhemos os restantes $k-1$ membros do time.

Exercício 59. Prove a proposição acima algebricamente.

Exercício 60. Se $n \geq k \geq m \geq 0$, forneça uma prova combinatória e uma prova algébrica da igualdade

$$\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Exercício 61. Encontre uma prova combinatória da igualdade

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Exercício 62. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

10 Teorema Binomial

O objetivo desta breve seção é usar o princípio da indução para mostrar um importante resultado. Dados números reais x e y, e um inteiro não-negativo n, queremos mostrar que...

Teorema 10.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Demonstração. Por indução.

(i) Caso base: Se $n = 0$, ambos os lados da expressão são iguais a 1.

(ii) Hipótese indutiva:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

(iii) Conclusão:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x+y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \right) \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n+1-k} y^k \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

□

Exercício 63. Expresse $(x+y)^3$ e $(x+y)^4$.

Exercício 64. Qual o coeficiente de x^3 em

$$\left(x^2 + \frac{4}{x} \right)^{12} ?$$

Exercício 65. Qual o coeficiente de x^{25} em

$$\left(2x^4 - \frac{3}{x^3}\right)^{15} ?$$

Exercício 66. Calcule

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{10-k} y^k.$$

Agora expresse 3^n como uma soma de potências de 2 com coeficientes binomiais.

Exercício 67. O objetivo deste exercício é achar uma outra prova de que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(i) Expresse $(1+t)^n$ como um polinômio em t.

(ii) Calcule a derivada em ambos os lados com respeito a t.

(iii) Iguale os coeficientes dos termos em t^{k-1}, para todo k.

Proposição 3. *Dado um conjunto de tamanho n, o número de subconjuntos de ordem ímpar é igual ao número de subconjuntos de ordem par.*

Demonstração. Pelo teorema binomial, teremos

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Ou seja,

$$\sum_{k \text{ ímpar}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ par}} \binom{n}{k}.$$

□

Aulas 17 e 18

11 Contagens mais elaboradas

11.1 Permutação com repetição

Suponha que há 2 bolas azuis, 4 bolas amarelas e 3 vermelhas. De quantas maneiras distintas podemos dispor as 9 bolas em fila (considerando que trocar duas bolas amarelas de lugar não altera a configuração) ?!

Todos sabemos como resolver esta. A resposta é

$$\frac{9!}{2!3!4!},$$

correspondendo às permutações totais divididas pelas permutações parciais de cada subconjunto de bolas iguais.

Agora uma outra pergunta:

- De quantas maneiras diferentes, onde a ordem importa, podemos escrever o número 10 como a soma de três inteiros não negativos? Ou seja, quantas triplas de inteiros não negativos (x, y, z) existem tais que

$$x + y + z = 10 \quad ?$$

A idéia aqui é simples: imagine que há 10 bolas dispostas em fila, e que vamos por 2 separadores, indicando quais serão cada inteiro x, y ou z. Por exemplo

$$\circ\circ\circ \,|\, \circ \,|\, \circ\circ\circ\circ\circ\circ$$

corresponde a $3+1+6$. Estamos então fazendo nada mais do que permutação com repetição: são 12 objetos no total, com 10 iguais e 2 iguais. Logo

$$\frac{12!}{2!10!}.$$

Exercício 68. De quantas maneiras distintas podemos escrever n como a soma de k inteiros não negativos?

Exercício 69. De quantas maneiras distintas podemos escrever n como a soma de k inteiros maiores que 0?

Exercício 70. De quantas maneiras distintas podemos escrever 12 como $x_1 + x_2 + x_3$ onde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 2$?

Exercício 71. De quantas maneiras distintas podemos escrever 12 como a soma de 3 inteiros distintos, onde um é maior ou igual a 0, um é maior ou igual a 1 e um é maior ou igual a 2?

11.2 Combinações com repetição

Exercício 72. Dado um conjunto com n elementos distintos, quantos "subconjuntos" de k elementos podem ser formados onde repetições são permitidas?

Este problema pode ser facilmente modelado em termos do problema de soma de inteiros não negativos. Mais especificamente:

Queremos escolher k elementos, e temos n disponíveis. Suponha que o primeiro elemento vai ser escolhido x_1 vezes, o segundo será x_2 vezes, até o n-ésimo, que será escolhido x_n vezes. Ou seja, estamos perguntando quantas soluções há para a equação

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k.$$

Isso já aprendemos. A resposta é

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

Exercício 73. Qual o valor de k após o código a seguir ser rodado?

k = 0;

for $i_1 = 1$ to n:

  for $i_2 = 1$ to i_1:

    $\vdots$

    for $i_m = 1$ to i_{m-1}:

      $k = k + 1$.

Note que o valor de k é acrescido de 1 para cada sequência de inteiros $1 \leq i_m \leq i_{m-1} \leq ... \leq i_1 \leq n$. A pergunta então é: quantas sequências dessas existem?

12 Princípio da casa dos pombos

O princípio da casa dos pombos (sim, o nome é este mesmo) é um dos princípios mais básicos da combinatória / contagem. É muito simples:

- Se $k + 1$ objetos precisam ser colocados em k caixas, alguma caixa terá dois objetos.

Parece óbvio? Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 4. Se A e B são conjuntos finitos e $|A| > |B|$, então não há função injetiva de A para B.

Exemplo 5. Em um grupo de 367 pessoas, ao menos duas fizeram aniversário no mesmo dia.

Exemplo 6. Em um texto com pelo menos 27 palavras, ao menos duas começam com a mesma letra.

Exemplo 7. Quantos alunos precisamos ter nesta turma para garantir que ao menos 3 terminem com a mesma nota no final do curso?

O princípio da casa dos pombos pode ser generalizado para o caso em que, possivelmente, temos muito mais objetos do que caixas.

Teorema 11. *Se n objetos serão colocados em k caixas, então ao menos uma caixa terá $\lceil n/k \rceil$ objetos.*

Demonstração. Por contradição, suponha que cada caixa terá no máximo $\lceil n/k \rceil - 1$ objetos. Então a quantidade total de objetos será

$$\leq k \cdot \big(\lceil n/k \rceil - 1\big) < k \cdot \big((n/k) + 1 - 1\big) = n.$$

□

Exercício 74. Num grupo de 100 pessoas, qual o mínimo número de pessoas que nasceram em um mesmo mês?

Exercício 75. Quantos alunos precisaríamos na nossa turma para garantir que ao menos três alunos receberam a mesma nota?

Exercício 76. Quantas cartas temos que puxar aleatoriamente de um baralho para garantir que teremos pelo menos 4 do mesmo naipe? E se forem quatro de espadas?

Vamos agora ver aplicações mais interessantes:

Exercício 77. Mostre que para cada inteiro n, existe um múltiplo de n que só possui 0s e 1s na sua expansão decimal.

Exercício 78. Suponha que há 10 servidores e 15 estações em um laboratório. Cada servidor só pode estar ativamente conectado a uma estação por vez. Qual o número mínimo de cabos necessários para que possamos garantir que em qualquer momento, qualquer subconjunto de no máximo 10 estações pode estar ativamente ligado a servidores?

Exercício 79. Durante um mês de 30 dias, um time de basquete joga pelo menos um jogo por dia, mas não mais que 45 no total. Prove que há um período de dias consecutivos que o time joga precisamente 14 jogos. (dica: defina variáveis $a_1, ..., a_{30}$ que contam quantos jogos foram jogados até o final do i-ésimo dia).

Exercício 80. Mostre que entre um conjunto de $n + 1$ número inteiros menores ou iguais que $2n$, existe um deles que divide algum outro.

Teorema 12. *Toda sequência com $n^2 + 1$ números reais distintos possui uma subsequência de comprimento $n + 1$ que é estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Quais são as subsequências estritamente crescentes ou decrescentes de

$$8,\ 11,\ 9,\ 1,\ 4,\ 6,\ 12,\ 10,\ 5,\ 7 \quad ?$$

Proof. Seja $N = n^2 + 1$, e seja $a_1, ..., a_N$ a sequência. Para cada número a_k da sequência, associe um par (c_k, d_k), onde c_k é o comprimento da maior subsequência crescente começando em a_k, e d_k o da maior subsequência decrescente. Se todos os c_k e d_k fossem menores ou iguais a n, existiriam, pelo princípio da casa dos pombos, ao menos dois valores s e t tais que $(c_s, d_s) = (c_t, d_t)$. Digamos $s < t$. Como todos os termos da sequência são diferentes, ou $a_s < a_t$ ou $a_s > a_t$. Em ambos os casos, conseguiríamos achar, respectivamente, uma subsequência crescente ou decrescente de comprimento maior que c_s ou d_s começando em a_s, respectivamente. □

13 Um gostinho de grafos...

Um grafo é um conjunto de pontos, chamados vértices, e um conjunto de arestas que unem alguns dos pares de pontos. O grau de um vértices é o número de arestas que são incidentes a ele, equivalentemente, a quantidade de vizinhos que ele possui.

Exercício 81. Mostre que em um grafo qualquer, ao menos dois vértices possuem o mesmo grau.

Exercício 82. Em um grafo com 6 vértices onde quaiquer dois vértices são vizinhos (ou seja, em uma estrela de Davi), as arestas foram coloridas em azul ou vermelho. Mostre que existe ao menos um triângulo monocromático.

14 Princípio da inclusão e exclusão

Dados dois conjuntos finitos A e B, quantos elementos pertencem à união de A e B? A resposta é simples: se eles são disjuntos, é exatamente $|A| + |B|$. Se eles possuem em interseção, ao fazer $|A|+|B|$, estamos contanto os elementos da interseção duas vezes. Portanto precisamos subtrair uma vez. Em ambos os casos, segue que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

E se forem três conjuntos A, B e C? Fazendo simplesmente

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

acabaremos subtraindo os elementos que pertencem aos três conjuntos três vezes. São vezes demais. Precisamos adicioná-los mais uma vez. Teremos então: E se forem três conjuntos A, B e C? Fazendo simplesmente

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Será que já deu pra pegar a lógica?

Exercício 83. Encontre uma expressão para $|A \cup B \cup C \cup D|$?

Exercício 84. Quantos inteiros menores que 1000 são divisíveis por 11 ou por 7?

Exercício 85. Quantas 8-tuplas de 0s e 1s não contém seis 0s consecutivos?

Exercício 86. Quantas permutações de 10 dígitos ou começam com 987, ou tem 45 nas quinta e sexta posições, ou terminam com 123 ?

Teorema 13 (Princípio da inclusão e exclusão)**.** *Sejam A_1,...,A_n conjuntos finitos. Então*

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$- ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Demonstração. Suponha que x seja um elemento da união, e que x pertença a precisamente m dos subconjuntos dentre A_1 até A_n. Vamos mostrar que na expressão do lado direito x está sendo contado precisamente uma única vez. Note que x é contado m vezes em $\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i|$, $\binom{m}{2}$ vezes em $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$, $\binom{m}{3}$ vezes em $\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$, e assim subcessivamente. Por conta dos sinais, x está sendo então contado exatamente

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k}.$$

Mas lembre-se do teorema binomial!! Teremos

$$0 = (1-1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k = \binom{m}{0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}.$$

Ou seja

$$1 = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k},$$

como queríamos. $\square$

Exercício 87. Escreva a fórmula do princípio da inclusão e exclusão para 6 conjuntos, sabendo que nenhum conjunto de três deles possui interseção não-vazia.

Exercício 88. Na fórmula para 10 conjuntos, quantos termos aparecem na fórmula?

Exercício 89. Quantas soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ existem com $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 6$ e $x_3 \leq 7$?

Os dois exercícios abaixo são bem interessantes!

Exercício 90. Mostre que o número de permutações de $(1, 2, ..., n)$ em que nenhum elemento termina em sua posição inicial é igual a

$$n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Dica: defina A_i como o conjunto de todas as permutações que fixam o ponto i. Então $|A_i| = (n-1)!$. Qual o tamanho de $|A_i \cap A_j|$? Agora pense em como aplicar o princípio da inclusão e exclusão.

Exercício 91. Mostre que o número de funções sobrejetivas de um conjunto X com n elementos para um conjunto Y com k elementos é igual a

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Dica: defina A_i como o conjunto de todas as funções de X para Y onde o elemento $i \in Y$ está fora da imagem. Então $|A_i| = (|Y| - 1)^n = (k-1)^n$. Qual o tamanho de $|A_i \cap A_j|$? Agora pense em como aplicar o princípio da inclusão e exclusão.

Note que como consequência do exercício acima, teremos

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n.$$

Por que?

Aula 19 e 20

15 Probabilidade

Se S é um conjunto de eventos igualmente prováveis e independente, chamado tipicamente de espaço amostral, e E é um subconjunto de S, então a probabilidade que E ocorra é dada por

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|}.$$

Exercício 92. Qual a probabilidade que um dado lançado ao acaso dê 5? Qual a probabilidade que dois dados lançados ao acaso dêem o mesmo número?

Exercício 93. Se você jogar 8 números, qual a probabilidade de acertar na mega-sena?

Exercício 94. Em uma urna com 3 bolas azuis, 3 vermelhas e 3 amarelas, qual a probabilidade de escolhermos 3 bolas ao acaso e ser uma de cada cor? É a mesma probabilidade de serem as 3 da mesma cor?

Exercício 95. Qual a probabilidade de em uma mão de 5 cartas de baralho, ter 4 do mesmo tipo? Calcule de duas maneiras diferentes: (1) calculando o número total de mãos com 4 do mesmo tipo e dividindo pelo número total de mãos (2) calculando a probabilidade de que, se as cartas forem dadas de uma por uma, tenhamos a mão com 4 do mesmo tipo (neste caso, suponha que a carta dissonante é a última, e então multiplique o resultado por 5).

A probabilidade de que um evento ocorra adicionada a probabilidade de que ele não ocorra é sempre igual a 1. Essa importante observação pode ser bem útil ao calcularmos algumas probabilidades.

Exercício 96. Qual a probabilidade de que uma sequência aleatória de 10 bits tenha pelo menos um 0?

Exercício 97. Numa sala com 10 pessoas, qual a probabilidade que pelo menos duas delas façam aniversário no mesmo dia do ano? E se forem 30 pessoas?

O princípio da inclusão e exclusão também pode ser necessário para calcular probabilidades:

Exercício 98. Escolhido um inteiro aleatório entre 1 e 100, qual a probabilidade que ele seja divisível por 3, 4 ou 5?

16 Condicional

Exercício 99. Em um programa de auditório, há três portas, atrás das quais há um prêmio. Atrás de duas delas tem uma cabra, e atrás da outra tem um bolo de chocolate. Você é um participante do programa, e suponha que você é uma pessoa normal, ou seja, prefere levar um bolo de chocolate pra casa ao invés de uma cabra. Você escolhe uma porta. Antes de abri-la, Sílvio Santos resove abrir uma das outras duas - uma que necessariamente escondesse uma cabra. Aí ele pergunta se você quer trocar de porta. O que você faz?

Muitas vezes, ao compararmos eventos sucessivos, nos deparamos com ocasiões onde os eventos não são independentes. Ou seja, onde a informação do resultado de um dos eventos nos dá informação sobre o outro.

Exercício 100. Uma sequência de 4 dígitos foi gerada aleatoriamente. Qual a probabilidade de que ela contenha dois dígitos consecutivos iguais a 0? E se soubermos que o primeiro dígito foi 0, algo muda?

Denotamos a probabilidade de que um evento ocorra por $p(E|F)$.

Teorema 14.

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}.$$

Exercício 101. Qual a probabilidade de que uma família que possui dois filhos tenha duas meninas? E se soubermos de antemão que uma das filhas é menina? E se a informação for que é a criança mais velha que é a menina, algo muda?

Dois eventos E e F são independentes se

$$p(E|F) = p(E).$$

Ou seja, se

$$p(E \cap F) = p(E)p(F).$$

Exercício 102. Se F é o evento que uma sequência aleatória de quatro bits começa com 1, e E que a sequência tem um número par de 1s, esses eventos são independentes?

17 Bayes

Exercício 103. Há duas urnas, uma com 3 bolas azuis e 2 amarelas, e outra com 3 bolas vermelhas e 3 pretas. Você escolhe uma urna aleatoriamente, e depois escolhe uma bola aleatoriamente. A bola escolhida foi azul. Qual a probabilidade que você tenha escolhido a primeira urna?

Exercício 104. No problema anterior, e se ao invés de 3 vermelhas na segunda urna, fossem 3 azuis. O que mudaria? Como quantificar?!

Seja F o evento a primeira urna foi escolhida. Seja E o evento em que uma bola azul foi escolhida. Queremos calcular

$$p(F|E).$$

Pela fórmula da probabilidade condicional, isso é igual a

$$\frac{p(F \cap E)}{p(E)}.$$

Note entretanto que não é claro como calcular $p(F \cap E)$ ou $p(E)$, uma vez que a escolha da urna atrapalha a compreensão de quão provável é a escolha de uma bola azul.

Vamos primeiro calcular $p(E \cap F)$. Sabemos que

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}.$$

Ora, a probabilidade de que uma bola azul seja escolhida sabendo que a primeira urna foi a escolhida é fácil de calcular, é igual a 3/5. Também sabemos que $p(F) = 1/2$. Logo

$$\frac{3}{5} = \frac{p(E \cap F)}{1/2} \Rightarrow p(E \cap F) = 3/10.$$

E $p(E)$? Não é muito difícil ver que

$$p(E) = p(E \cap F) + p(E \cap \overline{F}),$$

ou seja, a probabilidade de escolheremos uma bola azul é igual a probabilidade de escolhermos a primeira urna e uma bola azul, mais a probabilidade de não escolhermos a primeira urna e então uma bola azul. Note que

$$p(E|\overline{F}) = 3/6.$$

Logo teremos

$$\frac{3}{6} = \frac{p(E \cap \overline{F})}{p(\overline{F})} \Rightarrow p(E \cap \overline{F}) = 1/4.$$

Portanto

$$p(F|E) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{3/10}{3/10 + 1/4} = \frac{6}{11}.$$

Como esperávamos: se a bola veio azul, é (levemente) mais provável que tenha sido porque a urna escolhida foi a primeira.

Teorema 15 (Bayes)**.** *Suponha que E e F são eventos de probabilidade não nula. Então*

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E)} = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})p(\overline{F})}.$$

Demonstração. Temos que

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}.$$

Equivalentemente,

$$p(F|E) = \frac{p(E \cap F)}{p(E)}.$$

Segue portanto que

$$p(F|E)p(E) = p(E|F)p(F).$$

O restante é consequência do fato que a probabilidade de que E aconteça pode ser particionada entre as situações em que F acontece e as que não acontece. $\square$

Exercício 105. Suponha que, em uma população, 1 em cada 100000 pessoas tenha uma doença rara. O teste para a doença aponta corretamente que uma pessoa com a doença de fato tem ela em 99% dos casos. Em 0,5% dos casos, o teste diz que uma pessoa saudável está doente. Calcule:

1. A probabilidade de que uma pessoa que testou positivo tenha, de fato, a doença.

   Faremos assim. Seja F o evento da pessoa ter a doença, e E o evento da pessoa testar positivo para a doença. Aqui, queremos calcular $p(F|E)$. Sabemos que $p(F) = 0,00001$, e então $p(\overline{F}) = 0,99999$. Pelas informações também sabemos que $p(E|F) = 0,99$. Por outro lado $p(E|\overline{F})$ é a probabilidade da pessoa testar positivo sem ter a doença - conforme diz o problema, isso é $0,005$. Portanto segue que

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})p(\overline{F})} \approx 0,002.$$

2. A probabilidade de que uma pessoa que testou negativo não tenha, de fato, a doença.

   Agora queremos calcular $p(\overline{F}|\overline{E})$. Usando o teorema de Bayes, veremos que este valor é $\approx 0,99999999$.

Dê uma olhada em `https://www.youtube.com/watch?v=R13BD8qKeTg`

Exercício 106. Suponha que a palavra "Rolex" apareça em 250 de 2000 mensagens que são spams, e em 5 a cada 1000 mensagens que não são spams. Assumindo uma probabilidade de 50% para que uma mensagem seja ou não um spam, calcule a probabilidade de que uma nova mensagem com a palavra "Rolex" seja um spam.

Seja E o evento - probabilidade de uma mensagem conter Rolex. Seja F o evento probabilidade de uma mensagem ser spam. Queremos calcular $p(F|E)$. Portanto faremos

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})p(\overline{F})} = \frac{(0,125)(0,5)}{(0,125)(0,5) + (0,005)(0,5)} \approx 0,962.$$

Exercício 107. Suponha que 1 em cada 10000 pessoas tenha uma doença rara. Há um teste que afirma corretamente que $99,9\%$ das pessoas com a doença de fato a tem, mas que aponta que $0,02\%$ sem a doença também a possuem.

(a) Qual a probabilidade de que uma pessoa que testou positivo de fato tenha a doença?

(b) Qual a probabilidade de que uma pessoa que testou negativo não tenha a doença?

18 O conceito de esperança

Ao jogar uma moeda 100 vezes, quantas vezes esperamos que ocorra cara? Ou então: em um jogo de azar, se sai cara duas vezes, ganhamos 2 reais, mas se sai coroa uma vez, perdemos 1. Qual o valor que esperamos ganhar (ou perder) se jogarmos a moeda 10 vezes?

Para responder essas perguntas, introduzimos o conceito de esperança:

A esperança de uma variável X que atribua um valor a cada elemento s de um espaço amostral S é dada por

$$E(X) = \sum_{s \in S} p(s)X(s).$$

Exercício 108. Qual o valor esperado do lançamento de um dado?

Exercício 109. Se o prêmio da mega-sena é de 50 milhões, qual o valor esperado do ganho de uma aposta?

Exercício 110. Responda a pergunta do jogo da moeda supondo que há 3 lançamentos.

Exercício 111. Ao jogarmos dois dados, qual o valor esperado da soma? E ao jogarmos 4 dados?

Exercício 112. Na prova da semana que vem, pode ser[1] que tenhamos 10 questões de verdadeiro ou falso, cada uma valendo 1 ponto, e 4 questões abertas, cada uma valendo 6 pontos. Se a chance de um aluno acertar uma questão de V ou F é 90%, a chance de acertar uma questão aberta integral é 30%, e a de acertar cada uma pela metade é 60%, qual a nota esperada deste aluno na prova?

[1] Mas pode não ser também.