# Lista 5

**Exercício 1.** Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

(a) Quantos elementos possui $\mathcal{P}(A)$?

$2^3 = 8$.

(b) Determine quais são os conjuntos $A \cap \mathcal{P}(A)$ e $A \cup \mathcal{P}(A)$.

$A \cap \mathcal{P}(A) = \emptyset$, pois nenhum elemento de $A$ é também um subconjunto de $A$.
$A \cup \mathcal{P}(A) = \{1, 2, 3, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

(c) É verdade que $\emptyset \in A$? E se for $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ ?

Não, e sim..

(d) É verdade que $\exists x \in \mathcal{P}(A) : (\forall y \in \mathcal{P}(A), y \subseteq x)$ ? Prove.

Sim! $\{1, 2, 3\} \in \mathcal{P}(A)$, e para todo $y \in \mathcal{P}(A)$, ou seja, para todo $y \subseteq A$, temos que $y \subseteq \{1, 2, 3\}$.

(e) É verdade que $\{A\} \subseteq A$ ? E se for $\{A\} \in \mathcal{P}(A)$? Que tal $\{A\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?

Não, não, e sim, uma vez que $A \in \mathcal{P}(A)$, e portanto o conjunto que contém o elemento $A$ é elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

**Exercício 2.** Demonstre que, para quaisquer conjuntos $S$ e $T$, temos

$$(S \cap T) \cap (S - T) = \emptyset.$$

Se $x \in S \cap T$, então $x \in T$, por definição da interseção. Mas se $x \in T$, então $x \notin (S - T)$, por definição da diferença. Portanto não há $x$ tal que $x \in S \cap T$ e $x \in (S - T)$, logo $(S \cap T) \cap (S - T) = \emptyset$.

**Exercício 3.** Seja $U$ um conjunto contendo $A$ e $B$. Mostre que:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$x \in \overline{A \cap B}$ se, e somente se, $x \notin A \cap B$. Significa que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Equivalentemente, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

**Exercício 4.** (Rosen 2.2.50) Determine $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ para cada $A_i$ abaixo:

1. $A_i = \{i, i + 1, i + 2, ...\}$.

   A união é $\mathbb{N}$ (inteiros maiores que 0), e a interseção é $\emptyset$.

2. $A_i = \{0, i\}$.

   A união é $\mathbb{N} \cup \{0\}$, e a interseção é $\{0\}$.

3. $A_i = (0, i)$, i.e., o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

   A união é $\mathbb{R}_{>0}$, e a interseção é $(0, 1)$.

4. $A_i = (i, \infty)$, i.e., o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > i\}$.

   A união é $\mathbb{R}_{>1}$, e a interseção é $\emptyset$.

**Exercício 5.** Quantas partições distintas possui o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? Quem pesquisou um pouco em casa, e principalmente quem lembra do triângulo que eu desenhara ao final da aula, saberá facilmente que a resposta é 203. (Mas perguntas deste tipo não cairão amanhã na prova.

**Exercício 6.** Demonstre que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ se, e somente se, $A \subseteq B$.
Primeiro vamos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ implica em $A \subseteq B$. Suponha que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Seja $y \in A$. Portanto $\{y\} \in \mathcal{P}(A)$. Como todo elemento de $\mathcal{P}(A)$ também é de $\mathcal{P}(B)$, temos que $\{y\} \in \mathcal{P}(B)$, ou seja $y \in B$. Logo para todo $y \in A$, temos $y \in B$, ou seja, $A \subseteq B$. Agora suponha $A \subseteq B$. Seja $C \in \mathcal{P}(A)$. Por definição, $C \subseteq A$. Logo $C \subseteq B$, e portanto $C \in \mathcal{P}(B)$. Logo $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, como queríamos.