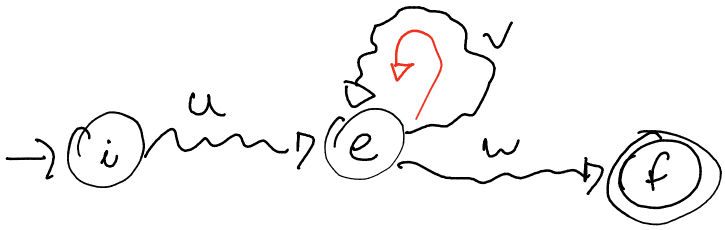
Lema do bombeamento

Discutimos, ao longo das últimas aulas, diversos formalismos e propriedades das linguagens regulares. Vimos, por exemplo, que as linguagens regulares são fechadas sob uma série de operações. Uma outra importante propriedade dessa classe de linguagens será discutida a seguir. Essa propriedade, chamada de lema do bombeamento (pumping lemma), indica que certas palavras de uma linguagem regular podem ser obtidas pela repetição (bombeamento) de subpalavras. Ou seja, pode-se construir novas palavras a partir de 'pedaços' de uma palavra que serão repetidos.

Lema (do bombeamento): Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$ tal que, para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$, existem palavras u, v, w tais que:

- $z = uvw$;
- $|uv| \leq k$;
- $v \neq \lambda$; e
- $uv^iw \in L$ para todo $i \geq 0$

Prova: Vamos mostrar apenas a intuição da prova.



$|uv| \leq k$

Dado que toda linguagem regular possui essa propriedade, podemos usar o lema para demonstrar que uma linguagem não é regular. Por exemplo, podemos usar o lema para demonstrar que a linguagem $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ não é regular. Para isso, supomos que a lingugagem é regular e que, portanto, satisfaz o lema. Em seguida, demonstramos uma contradição e, consequentemente, que a linguagem não pode ser regular. Segue o exemplo.

Exemplo: A linguagem $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ não é regular.

Prova: Suponha, para fins de contradição, que L seja regular. Logo, ela deve satisfazer o lema do bombeamento.

Existe k tal que $|z| \geq k$ atende aos requisitos do lema.

Seja a k tal constante. $z = a^k b^k$.

Então z pode ser decomposta em uvw.

$|uv| \leq k$ e $v \neq \lambda$. $\quad q \leq k$

Implica que $uv = a^q$

$\boxed{\forall i \; \cancel{u}v^i w \in L}$ $\quad uv^2w = a^{k-|v|} a^{2|v|} b^k$

$= a^{k+|v|} b^k$

Contradição. Logo L não é regular.

Em linhas gerais, a demonstração de que uma linguagem não é regular deve seguir os seguintes passos:

1. Supõe-se que a linguagem seja regular;
2. Escolhe-se uma palavra z cujo tamanho seja maior ou igual à constante do lema. A escolha deve ser tal que favoreça a demonstração de que as propriedades do lema são violadas por essa palavra (em geral, uma palavra que force uv a ter somente um tipo de símbolo).
3. Mostra-se que, para toda decomposição de z em u, v e w, existe um i tal que uv^iw não pertença à linguagem.

Vamos ver outros exemplos de demonstração de linguagens não regulares.

Exemplo 2: Mostre que a linguagem $L = \{0^m 1^n \mid m > n\}$ não é regular.

Prova:

Suponha para fins de contradição que L é regular. Seja k a constante do lema.

Seja $z = 0^{k+1} 1^k$.

- $|uv| \leq k \rightarrow uv$ só tem 0's
  $uv = 0^q \quad 0 < q \leq k$
- $v \neq \lambda \rightarrow v$ só tem 0's

$\forall i \; uv^i w \in L \quad - \; i = 2 \quad 0^{k+1-|v|} 0^{2|v|} 1^k$

$0^{k+1+|v|} 1^k$

- $\forall i \; uv^iw \in L$ — $i=2$: $0^{k+1+|v|}1^k \in L$

— $i=0$: $0^{k+1-|v|}0^{0|v|}1^k$

$0^{k+1-|v|}1^k \notin L$

$|v| \geq 1$ Contradição.

Então L não é regular.

Exemplo 3: Mostre que a linguagem $L = \{0^n \mid n \text{ é primo}\}$ não é regular.

Prova:

Suponha que L seja regular.

Seja k a constante do lema.

Seja $z = 0^p$, onde p é um primo $p \geq k$

- uv é composto somente por 0's

$uv^iw = 0^p 0^{|v|(i-1)}$

$= p + |v|(i-1)$ (não pode ser primo)

$\forall$ $\boxed{i = p+1}$ $uv^iw \notin L$

$p + |v|(p+1-1) =$

$p + |v|p = p(1+|v|)$ $\quad |v| \geq 1$

Contradição. Portanto L não é regular.

Exemplo 4: Mostre que a linguagem $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \eta_0(w) = \eta_1(w)\}$ não é regular.

Prova:

Prova:

Suponha que L seja regular.

$L \cap 0^* 1^* = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

não é regular.

Contradição.

Logo, L não é regular.