Lista 2 - Solução

Exercício 1. Prove os seguintes fatos. Tenha o cuidado de escrever sua prova de modo claro, usando pontuação e preposições adequadas. Se você fizer uma prova por contrapositiva ou contradição, você deve anunciar isso no começo da prova. Cuidado para não cometer erros comuns tais como supor a conclusão ou introduzir variáveis sem definir de que tipo são.

(a) Mostre que o produto de dois números é ímpar se e somente se ambos os números são ímpares.

Se a e b são ímpares, então existem inteiros m e n tais que $a = 2m+1$ e $b = 2n+1$. Logo $ab = 4mn+2m+2n+1 = 2(2mn+m+n)+1$. Segue portanto que ab é ímpar. Se a ou b é par, suponha sem perda de generalidade que a é par. Note que b pode ser ímpar ou par, é irrelevante. Então existe um inteiro m tal que $a = 2m$. Daí $ab = 2mb = 2(mb)$, que é par. Isso mostra, por contrapositiva, que se o produto de a e b é ímpar, então ambos precisam ser ímpares.

(b) Prove que se n é um quadrado perfeito, então $n + 2$ não é um quadrado perfeito.

Suponha que existam inteiros a e b, $b > a$, e sem perda de generalidade, $a > 0$, tais que $b^2 = n+2$, e $a^2 = n$. Daí $b^2 - a^2 = 2$, mas $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$. Como $b > a$, a única possibilidade é $b+a = 2$, e $b-a = 1$, já que 2 é primo. A única solução possível para o sistema, $b = 3/2$ e $a = 1/2$, não é inteira. Portanto se n é quadrado perfeito, $n+2$ não pode ser.

(c) Mostre que a soma de um número racional com um número irracional é sempre irracional (por contradição?).

Suponha, para derivar contradição, que $p \in \mathbb{Q}$ e $q \notin \mathbb{Q}$ são tais que $p+q = r \in \mathbb{Q}$. Sejam a, b, c, d inteiros tais que $p = a/b$ e $r = c/d$. Note que $p + q = r$, implica $q = r - p$, mas

$$r - p = c/d - a/b = \frac{cb - ad}{bd} \in \mathbb{Q},$$

contradição ao fato que $q \notin \mathbb{Q}$. Portanto $r \notin \mathbb{Q}$.

(d) Prove ou refute que se a e b são racionais, então a^b é racional.

É falso. $2^{1/2} = \sqrt{2}$, que é irracional, como vimos em sala.

(e) Prove que não existe um número inteiro positivo n tal que $n^2 + n^3 = 100$.

Note que se $n > 4$, então $n^3 > 100$, e como $n^2 > 0$, a igualdade não pode ocorrer. Portanto basta testar que a igualdade não é válida para $n = 1, 2, 3$ ou 4. No caso, teremos $n^2 + n^3$ igual a, respectivamente, $2, 12, 36$ e 80. Nenhum deles igual a 100.

(f) Prove que para todo número inteiro positivo n, 4 não divide $n^2 + 2$ (por contradição?).

Suponha que 4 divide n^2+2 para algum n. Se n é ímpar, então n^2 é ímpar, e n^2+2 é ímpar. Uma contradição, pois 4 só divide números pares. Se n é par, seja a tal que $n = 2a$. Então $n^2 = 4a^2$. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $4k = n^2 + 2$. Segue que

$$4k = 4a^2 + 2,$$

daí teremos

$$4(k - a^2) = 2,$$

uma contradição, pois 4 não divide 2. Portanto 4 não divide $n^2 + 2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exercício 2. Dados dois inteiros n e m, mostre que ambos são pares se, e somente se, $(n \cdot m)$ e $(n+m)$ são ambos pares.

Sejam n e m números pares. Então existem inteiros k e ℓ tais que $n = 2k$ e $m = 2\ell$. Logo $n+m = 2k+2\ell = 2(k+\ell)$, e portanto $n+m$ é par. Temos também $n \cdot m = (2k)\cdot(2\ell) = 2\cdot(2k\ell)$, que é par. Agora precisamos mostrar que se nm e $n+m$ são pares, então n e m também são. Faremos isso por contrapositiva. Então suponha que n e m não são ambos pares. Há duas possibilidades. Ou ambos são ímpares, e neste caso há inteiros k e ℓ tais que $n = 2k+1$ e $m = 2\ell + 1$, e portanto $nm = 2(2k\ell + k + \ell) + 1$, que é ímpar. Ou um deles é par e o outro é ímpar. Suponha sem perda de generalidade que n é ímpar. Neste caso, há inteiros k eℓ tais que $n = 2k+1$ e $m = 2\ell$. Portanto $n + m = (2k+1) + 2\ell = 2(k+\ell) + 1$, que ímpar. Ou seja, mostramos que se n e m não são ambos pares, então nm e $n+m$ não são ambos pares, o que é equivalente, por contrapositiva, a mostrar que se nm e $n+m$ são ímpares, então n e m são ímpares.

Exercício 3. Mostre em detalhes que se p é primo, então $\sqrt{p}$ é irracional.

Suponha, para efeito de derivar contradição, que $\sqrt{p}$ é racional. Sejam portanto a e b números inteiros sem fatores primos em comum tais que

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}.$$

Segue que $pb^2 = a^2$. Portanto p divide a^2. As fatorações em primos de a e a^2 contém os mesmos primos, com a diferença que os expoentes na de a^2 estão dobrados. Se p aparece na fatoração de a^2, também precisa aparecer na de a. Logo $a^2 = p^2.q$, onde q é um inteiros. Segue daí que

$$pb^2 = p^2 q,$$

portanto $b^2 = pq$. Daí p divide b^2, e logo p divide b, uma contradição, já que a e b não possuíam fatores em comum. Esta contradição implica que a hipótese inicial de que $\sqrt{p}$ era racional era falsa.