Lista de Exercícios 1 de Álgebra Linear Computacional

Prof.: Fabrício Murai e Letícia Pereira Pinto

Informações importantes:

- Data de entrega: até 23:59 do dia 21/03/2019.
- Questões podem ser discutidas entre até três alunos. Nomes dos colegas precisam ser listados. Contudo, a escrita das soluções e submissão deve ser feita individualmente.
- Submissão deve ser feita em formato PDF através do Moodle, mesmo que tenham sido resolvidas a mão e escaneadas.
- Todas as soluções devem ser justificadas.

1. Considere o exemplo visto em sala que usava uma Cadeia de Markov para ilustrar a transição de estados para um indivíduo que possui o vírus do HIV. Se a população está distribuída hoje conforme o vetor $\pi = (0.85, 0.10, 0.05, 0.00)$, qual será a distribuição após 10 anos? Você pode usar o computador para resolver.

2. Considere o seguinte computador hipotético, onde a representação de um número em ponto flutuante em base 2 (binária) possui apenas 5 dígitos para a mantissa e o expoente pode variar entre -6 e 7. Tendo como referência os padrões da IEEE apresentados em sala,

   (a) Qual o menor número positivo que pode ser representado de forma exata?
   $(-1)^0 \cdot 2^{-6} \cdot (1.)_2 = 2^{-6}$

   (b) Qual o maior? $(-1)^0 \cdot 2^7 \cdot (1.11111)_2 \approx 2^8$

   (c) Como seria representado o número $2^3 \cdot (0.01010)_2$ neste computador? Andando com o ponto duas casas para a direita e reduzindo o expoente: $(-1)^0 \cdot 2^1 \cdot (1.01000)_2$

   (d) Como seria representado o número $-2^{-2} \cdot (1101.01010)_2$ neste computador? Andando com o ponto três casas para a esquerda e aumentado o expoente: $(-1)^1 \cdot 2^{-5} \cdot (1.10101)_2 \approx 2^8$

   (e) Qual é o menor número maior que 1 neste computador? $(-1)^0 \cdot 2^0 \cdot (1.00001)_2 \approx 1 + 2^{-5}$

   (f) Qual é o $\epsilon_{machine}$? É a metade da diferença entre o menor número maior que 1 e 1: 2^{-6}.

3. Considere a decomposição SVD completa de uma $A_{m\times n} = U_{m\times m}\Sigma_{m\times m}V^\top_{n\times n}$, com $m > n$. Sabendo que U é uma matriz ortonormal e V também é uma matriz ortonormal, mostre que $AA^\top = U\Sigma^2U^\top$ e que $A^\top A = V\Sigma^2V^\top$.

4. Seja a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Mostre que $C = U\Sigma V^\top$, onde

$$U = \begin{bmatrix} -0.632 & 0.000 \\ 0.316 & -0.707 \\ -0.316 & -0.707 \\ 0.632 & 0.000 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2.236 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad V^\top = \begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix}$$

   é o SVD de C. (Dica: você precisa mostrar que U e V são ortonormais e que de fato o produto $U\Sigma V^\top$ é igual a C).

5. Suponha que a matriz C do exercício anterior denota a opinião de quatro usuários sobre dois sites na Internet (-1: negativa, 0: neutra, 1: positiva). Queremos adicionar informação sobre um novo usuário que tem opinião positiva sobre os dois sites $w = (1, 1)$ à matriz U, sem recalcular o SVD. Como seria a representação deste usuário?

6. **LEMBRETE:** Não deixe de submeter também a lista "Exercícios Práticos 1 (EP1)" pelo Moodle.