1) a)

b) Criei um código para rodar a função 100.000 vezes para $m = 100$ e o mesmo para $m = 10000$. Os resultados foram:

$m = 100$
- maior erro = 1,01356
- menor erro = 0
- Média do erro = 0,43518

$m = 10000$
- maior erro: 0,09321
- menor erro: 0
- Média do erro: 0,04364

Logo é notável que apesar do limite inferior ser o mesmo, o que é compreensível pelo fato da matriz original ser aleatória, quanto mais linhas são adicionadas menor o erro, tanto a média, quanto o teto.

c) Sabendo que uma matriz ortonormal possui a sua matriz de covariância próximo à identidade. Quando pegamos uma matriz W qualquer e dividimos todos os elementos por $\sqrt{m}$ encontrando $\tilde{W}$, estamos tornando W mais próximo de uma matriz ortonormal, e quanto mais linhas tiver mais próxima sua covariância será à identidade pela diferença na norma de Frobenius.

2) a) $X_u = \dfrac{\langle x, u \rangle}{\|u\|_2^2} \cdot u \Rightarrow X_u = \dfrac{(1+2+0)}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2} * (1,1,0)^T$

$\Downarrow$

$\therefore X_u = \dfrac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_v = \dfrac{\langle x, v \rangle}{\|v\|_2^2} \cdot v = \dfrac{(1+(-2)+3)}{\left(\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{array}{cc} u & v \end{array}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; x$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\Downarrow$ $L_2 = L_2 - L_1$

$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$L_2 = L_2 + 2L_3$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

É um sistema impossível portanto X não é uma combinação linear de u e v: $X \neq u \cdot \alpha_1 + v \cdot \alpha_2$,

Logo X não está no plano criado por u e v, e nem paralelo a ele, Portanto a projeção de X nesse plano sempre será diferente de X.

3) Tomando Estudantes Como Variáveis.

Linha 1 ⇒ média = 81,25 Linha 2 ⇒ média = 75

Linha 3 ⇒ média = 61,25 Linha 4 ⇒ média = 68,5 Linha 5 ⇒ média = 80

$$X_{centralizado} := \begin{pmatrix} 8,75 & -1,25 & -21,25 & 13,75 \\ -10 & 0 & 15 & -5 \\ -21,25 & 28,75 & -1,25 & -6,25 \\ +11,5 & -8,5 & -9,5 & +6,5 \\ -20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2_{L1} = \frac{718}{4} = 179 \therefore \sigma_{L1} = 13,405$$

$$\sigma^2_{L2} = \frac{350}{4} = 87,5 \therefore \sigma_{L2} = 9,35$$

$$\sigma^2_{L3} = \frac{1318}{4} = 329,69 \therefore \sigma_{L3} = 18,16$$

$$\sigma^2_{L4} = \frac{337}{4} = 84,25 \therefore \sigma_{L4} = 9,1788$$

$$\sigma^2_{L5} = \frac{800}{4} = 200 \therefore \sigma_{L5} = 14,1421$$

$$X_{normalizado} = \begin{pmatrix} 0,65 & -0,09 & -1,59 & 1,03 \\ -1,07 & 0 & 1,6 & -0,53 \\ -1,17 & 1,58 & -0,07 & -0,34 \\ 1,25 & -0,93 & -1,093 & 0,71 \\ -1,41 & 1,41 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Já que as variáveis estão em Linha, então

$$CovX = X_{norm} \cdot X^T_{norm}$$

$$CovX = \begin{pmatrix} 4 & -3,79 & -1,16 & 3,27 & -1,06 \\ -3,79 & 4 & 1,32 & -3,38 & 1,51 \\ -1,16 & 1,32 & 4 & -3,11 & 3,89 \\ 3,27 & -3,38 & -3,11 & 4 & -3,08 \\ -1,06 & 1,51 & 3,89 & -3,08 & 4 \end{pmatrix}$$

4) (V) Um conjunto de n vetores ortogonais em $\mathbb{R}^m$ é sempre L.I.

Sendo ortogonais não tem como serem Linearmente Dependentes

(F) Um conjunto de n vetores L.I em $\mathbb{R}^m$ é sempre formado por vetores ortogonais

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; ou seja L.I. e não ortogonais.

(F) É possível obter vetores $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ L.I

Não há como ter mais vetores ortogonais do que o número de espaço existente, Logo n+1 vetores já existirá 1 Linearmente dependente.

(V) Uma base formada pelos vetores L.I $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ gera um subespaço do $\mathbb{R}^m$. Pois os vetores L.I gerariam um subespaço dentro de $\mathbb{R}^m$ com tamanho $\mathbb{R}^n$, onde os vetores existentes dentro desse espaço seria uma combinação linear dos $v_1, v_2, \dots, v_n$.

(F) A projeção de um vetor X em um subespaço de $\mathbb{R}^m$ é sempre diferente de X

Caso X seja paralelo a esse subespaço a projeção de X será igual a ele mesmo

(F) Seja X_s a projeção de um vetor unitário $x \in \mathbb{R}^m$ no subespaço vetorial S. É possível que $\|X_s\| > \|X\|$

Não, pois caso X tenha o mesmo número de coordenadas ou mais que exista no subespaço a se projetar, a $\|X_s\| \leq \|X\|$.