Funções e relações

Uma **função** é um mapeamento de elementos de um conjunto para outro.

Uma função $f: A \to B$ mapeia um elemento de A para exatamente um elemento de B. Denotamos essa associação da seguinte forma:

$$f(a) = b$$

- O conjunto A é chamado de **domínio** da função f
- O conjunto B é chamado de **contra-domínio**
- Os elementos do contra-domínio que são mapeados pela função f constituem a **imagem** da função
  - $Im(f) = \{b \in B \mid \ \exists a \in A \ \ f(a) = b\}$

Exemplo: Considere os conjuntos $A = \{x, \ y, \ z\}$, $B = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$ e a função $f: A \to B, \ \ f = \{(x,2),(y,4),(z,2)\}$.

- Domínio de f: $\{x, \ y, \ z\}$
- Contra-domínio de f: $\{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$
- Imagem de f: $\{2, \ 4\}$

Algumas funções (e conjuntos) podem ser especificadas através de uma **definição recursiva**, isto é, a partir de mapeamentos de outros elementos. Nesse caso, a definição segue dois passos:

1. **Caso base**: estabelece-se a relação mais básica entre os elementos dos conjuntos
2. **Passo indutivo**: estabelece-se a relação de novos elementos a partir de relações anteriores.

Exemplo:

1. Fatorial:
   a. $n! = \begin{cases} 1, & se \ \ n \leq 1 \\ n \times (n-1)!, & caso \ \ contrário \end{cases}$

Um **predicado** é uma função cujo contra-domínio é o conjunto de valores lógicos verdadeiro e falso.

- Impar: $\mathbb{Z} \to \{T, \ F\}$
- Impar(6) = F
- Impar(3) = T

Uma **relação** é um subconjunto do produto cartesiano de conjuntos. Ela denota uma associação entre os elementos desse conjunto.

- $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$
- Uma relação binária é uma relação envolvendo apenas dois conjuntos ($R \subseteq A \times B$)
- Relações binárias podem ser representadas pela notação infixada
    - Para $a \in A, b \in B,\ (a, b) \in R \equiv aRb$

Uma relação de equivalência é uma relação que possui as seguintes propriedades:

- Reflexividade: xRx para todo x
- Simetria: $xRy \rightarrow yRx$
- Transitividade: $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

Exemplo: Considere a relação $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que dois reais a e b se relacionam se e somente se $a - b \in \mathbb{Z}$. Essa relação é uma relação de equivalência?