Lista 6

Exercício 1. O objetivo deste exercício é mostrar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é injetiva.

1. Mostre que se $a \geq 0$ e $b < 0$, então $f(a) \neq f(b)$.

   Neste caso, $a^3 \geq 0$, e $b^3 < 0$, logo $a^3 > b^3$.

2. Mostre que se $a > b \geq 0$, então $a^3 > b^3$ (use o fato que existe um $c > 0$ tal que $a = b + c$).

   Usando o fato, segue que $a^3 = (b+c)^3 = b^3 + 3(b^2c + c^2b) + c^3$. Como $c > 0$, $c^3 > 0$, e daí $a^3 > b^3$.

3. Mostre que se $a < b < 0$, então $a^3 < b^3$.

   Neste caso teremos $0 < -b < -a$. Logo, pelo item acima, $(-b)^3 < (-a)^3$, mas então $-b^3 < -a^3$, logo $a^3 < b^3$.

4. Use os itens anteriores para mostrar que f é injetiva.

   Suponha que $a \neq b$. Sem perda de generalidade, algum dos casos acima será verdade. Mas então $f(a) \neq f(b)$, garantindo que f é injetiva.

Exercício 2. Suponha que f seja uma função de A para B.

1. Sejam $b_1 \neq b_2$ elementos de B. Explique por que a imagem inversa de b_1 é disjunta da imagem inversa de b_2.

   Suponha que $a \in A$ pertença a imagem inversa de b_1 e a de b_2. Por definição, seguiria que $f(a) = b_1$ e $f(a) = b_2$, o que contradiria a definição de função. Logo as imagens inversas são disjuntas.

2. Mostre que se f é sobrejetiva, então o conjunto que contém as imagens inversas de todos os elementos de B é uma partição de A.

   Uma coleção de subconjuntos de A é uma partição se eles são disjuntos, sua união contém todos os elementos de A, e eles são não vazios. Já vimos que são disjuntos. Para ver que eles contêm todos os elementos, note que por definição, f associa um elemento de B a todo elemento de A, logo todo elemento de a pertence a pelo menos uma imagem inversa. O único fato relevante aqui é as imagens inversas serem não-vazias: isso só ocorre se para cada elemento de $b \in B$, existir ao menos um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Mas esta é a definição de função sobrejetiva.

Exercício 3. Escreva em detalhes a demonstração de que a composição de funções bijetivas é uma bijeção. Seja $f : A \to B$ e $g : B \to C$ bijeções. Suponha que $x, y \in A$, e $x \neq y$. Então $f(x) \neq f(y)$, já que f é injetiva. Agora, como g também é, segue que $g(f(x)) \neq g(f(y))$, portanto $x \neq y$ implica $g \circ f(x) \neq g \circ f(y)$. A composição é injetiva. Agora seja $c \in C$. Existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$, já que g é sobrejetiva. Mas como f é sobrejetiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Daí teremos que dado o $c \in C$, existe $a \in A$ tal que $g \circ f(a) = c$, e a composição é portanto sobrejetiva, como queríamos mostrar.

Exercício 4. Determine quais das funções abaixo é $O(x)$. E $\Omega(x)$? E $\Theta(x)$? Note que aqui estou me referindo à função $g(x) = x$.

1. $f(x) = 15$

   É $O(x)$, por exemplo porque para todo $x \geq 15$, temos que $|15| \leq 1.|g(x)|$. Não é $\Omega(x)$, e portanto não é $\Theta(x)$.

2. $f(x) = x^2 - 30x$

   Não é $O(x)$, é Ω, mas não é Θ.

3. $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$

   É Θ. Note que para todo $x \geq 1$, temos

   $$1 \cdot |x| \leq |f(x)| \leq 3 \cdot |x|.$$

   A primeira desigualdade mostra que $f \in \Omega(x)$, e a segunda que $f \in O(x)$.

4. $f(x) = 5 \log x$

   É $O(x)$ mas não é Ω, e portanto não é Θ.

Exercício 5. Mostre que $f(x) = 2^x$ é $O(3^x)$. É $\Theta(3^x)$?
Note que para todo $x > 1$, temos que $2^x < 3^x$. Isso mostra que $f \in O(3^x)$. Para ver que não é Θ, vamos mostrar que não é $\Omega(3^x)$. Suponha que existem constantes $k > 0$ e C tais que para todo $x \geq k$,

$$C \cdot 3^x \leq 2^x.$$

Daí temos

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \frac{1}{C}$$

para todo x. Uma contradição.

Exercício 6. Ache o menor $n \in Z$ para o qual $f(x)$ é $O(x^n)$ para as funções abaixo.

1. $f(x) = 2x^2 + x^3 \log x$

   $n = 4.$

2. $f(x) = (\log(x))^4$

   $n = 1.$

3. $f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^4+1}$

   $n = 0.$

4. $f(x) = \sqrt{x}$

   $n = 1.$

Ache o maior $n \in \mathbb{Z}$ para o qual $f(x)$ é $\Omega(x^n)$.

1. $n = 3$.
2. $n = 0$.
3. $n = 0$.
4. $n = 0$.

Exercício 7.

1. Suponha que $f(x) \in O(1)$. O que podemos dizer sobre $f(x)$?

   Que $f(x)$ é limitada superiormente por uma constante.

2. Suponha que $f(x) \in \Omega(1)$. O que podemos dizer sobre $f(x)$?

   Que $f(x)$ é limitada inferiormente por uma constante.

3. Suponha que $f(x) \in \Theta(1)$. O que podemos dizer sobre $f(x)$?

   Que todos os valores de $f(x)$ se encontram entre duas constantes.