AFN com transição λ

Vimos que os AFN são formalismos que aumentam a expressividade dos AFDs, preservando o mesmo poder computacional. Agora veremos uma extensão dos AFNs que, novamente, não aumenta seu poder computacional, mas confere ainda mais expressividade a eles. Veremos AFN que admitem transições sob palavras. Especificamente, transições sob a palavra vazia.

☆ Transições sob a palavra vazia podem ser imaginada como transições espontâneas no autômato. Ou seja, há mudança de estado sem consumo efetivamente de símbolos da palavra. O autômato do diagrama abaixo apresenta um AFN com esse tipo de transição. Autômatos desse tipo são chamados de **autômatos finitos não determinísticos com transição lambda (AFNλ)**.

☆ Formalmente, um autômato finito com transições λ é uma quíntupla $(Q, \ \Sigma, \ \delta, \ I, \ F)$ em que:

- $Q, \ \Sigma, \ I \ e \ F$ são como nos AFNs
- $\delta: Q \times \ (\Sigma \cup \{\lambda\}) \rightarrow \ \mathcal{P}(Q)$

Note que, por definição, λ não é um símbolo do alfabeto. No entanto, o autômato admite transições com essa palavra.

O reconhecimento de palavras se dá pelos mesmos critérios de um AFN. Contudo, como agora existe o conceito de transições lambda, precisamos definir outra função para definirmos a função de transição estendida.

☆ A **função fecho lambda**, $f_\lambda: \ \mathcal{P}(Q) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$, é uma função que determina todos os estados alcançáveis a partir de um conjunto de estados, fazendo-se somente transições lambda. Formalmente a função é definida por:

- $X \subseteq f_\lambda(X)$ para todo $X \subseteq Q$
- $e \in f_\lambda(X) \rightarrow \ \delta(e, \lambda) \subseteq f_\lambda(X)$

Essa definição nos mostra que todo estado de um conjunto pertence a seu fecho lambda. Isso é bastante intuitivo, já que, podemos permanecer parados naqueles estados sem consumir qualquer símbolo. A segunda parte diz que se um estado pertence ao fecho lambda de um conjunto, então todos os estados alcançáveis a partir dele com transições lambda também fazem parte do fecho.

Exemplo: Considerando o autômato do exemplo anterior, $f_{\lambda}(\{1, 3'\}) = \{1, 2, 3'\}$, já que alcançamos o estado 2 a partir do 1 com uma transição lambda.

Tendo apresentado o conceito de fecho lambda, podemos agora definir a função de transição estendida para AFNλ. A **função de transição estendida** $\hat{\delta}: \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ para AFNλ é definida recursivamente por:

- $\hat{\delta}(X, \lambda) = f_{\lambda}(X)$ para todo $X \subseteq Q$
- $\hat{\delta}(X, ay) = \hat{\delta}(\bigcup_{e \in f_{\lambda}(X)} \delta(e, a), y)$ para $X \subseteq Q$, $a \in \Sigma$, e $y \in \Sigma^*$

A primeira parte é simples de interpretar. Naturalmente, os estados alcançáveis a partir de X consumindo-se a palavra vazia são extamente os estados do fecho lambda de X. A segunda parte é um pouco menos trivial. Para determinar os estados alcançáveis a partir de X consumindo-se a palavra ay, primeiro se determinar quais são os estados alcançáveis consumindo-se o símbolo a. Há de se lembrar, contudo, que podemos fazer transições lambda a partir daqueles estados antes de consumirmos o símbolo a. Portanto, os estados alcançáveis a partir de X consumindo a são os estados alcançáveis com transições sob esse símbolo a partir de seu fecho lambda. O restante segue a mesma interpretação das funções anteriores.

Exemplo: Construa um AFNλ que reconheça $L_1 L_2$ tal que
$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \eta_0(w) \ \ mod \ \ 2 = 0\}$ e
$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \eta_1(w) \ \ mod \ \ 2 = 1\}$