

Lista 9

Exercício 1 (Revisão...). De quantas maneiras possíveis podemos distribuir 5 cartas de baralho para cada um dos 4 jogadores em um jogo de poker? (note que a ordem com a qual os jogadores recebem as cartas não é relevante...)

Exercício 2. Qual o valor de k , em função de m e n , após o código a seguir ser rodado?

```

k = 0;
for i1 = 1 to n:
    for i2 = 1 to i1:
        ⋮
        for im = 1 to im-1:
            k = k + 1.

```

E se o código fosse como a seguir (em função de n apenas)?

```

k = 0;
for i1 = 1 to n:
    for i2 = 1 to i1 + 1:
        for i3 = 1 to i2 + 1:
            k = k + 1.

```

Exercício 3. De quantas maneiras diferentes podemos colocar 12 bolas iguais em 8 latas diferentes?

Exercício 4. Qual o coeficiente de $x^3y^2z^5$ em $(x + y + z)^{10}$?

Exercício 5. Quantos termos diferentes possui a expansão de $(x + y + z)^{10}$?

Exercício 6. Você seria capaz de encontrar uma “fórmula” parecida com a do Binômio de Newton para $(x + y + z)^n$?

Exercício 7. Uma tigela contém 10 bolas azuis e 10 vermelhas. Quantas bolas precisamos retirar para garantir termos 3 da mesma cor? E se forem 3 azuis?

Exercício 8. É possível cobrir um tabuleiro de xadrez com dominós se removermos dois cantos opostos do tabuleiro?

Exercício 9. (a) Considere seis pontos do plano (x_i, y_i) , com $i = 1, \dots, 6$. Suponha que $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ para todos i s. Mostre que há ao menos um par de pontos cujo ponto médio no segmento entre eles também possui coordenadas inteiras.

(b) E se forem pontos com coordenadas inteiras no \mathbb{R}^3 ? Quantos precisaríamos ter para garantir que o ponto médio de ao menos um par dos pontos também possui coordenadas inteiras?

Exercício 10. Construa uma sequência de 16 inteiros positivos que não possua qualquer subsequência estritamente crescente ou decrescente com 5 termos. Explique por que seria impossível construir uma sequência com 17 termos satisfazendo tal propriedade.

Exercício 11. Dê uma olhada aqui...

<https://www.geeksforgeeks.org/longest-monotonically-increasing-subsequence-size-n-log-n>

Mais algumas questões legais

Exercício 12.

- (a) Mostre que se cada ponto do plano for colorido com azul ou vermelho, haverá ao menos dois pontos à distância 1 com a mesma cor. E se forem 3 cores?
- (b) Os inteiros $1, 2, 3, \dots, 10$ estão escritos em um círculo, numa ordem arbitrária. Mostre que há 3 números adjacentes cuja soma é maior ou igual que 17. E se fosse 18?
- (c) Mostre que se 5 pontos estão dentro de um triângulo equilátero de lado 1, ao menos dois deles estão à distância 0.5.
- (d) Mostre que em qualquer conjunto de 51 pontos dentro de um quadrado de lado 1, ao menos 3 deles estão dentro de um círculo de raio $1/7$.
- (e) Mostre que se 19 inteiros forem escolhidos da sequência $1, 4, 7, 10, \dots, 97, 100$, haverá ao menos dois dentre eles cuja soma é 104.
- (f) Imagine que você selecionou 55 números distintos entre 1 e 100 (inclusive). Mostre que haverá pelo menos dois deles cuja diferença é 9, ao menos dois deles cuja diferença é 10, ao menos dois deles cuja diferença é 12, e ao menos dois deles cuja diferença é 13. Surpreendentemente, poderá não haver quaisquer dois deles cuja diferença é 11. Construa este exemplo.