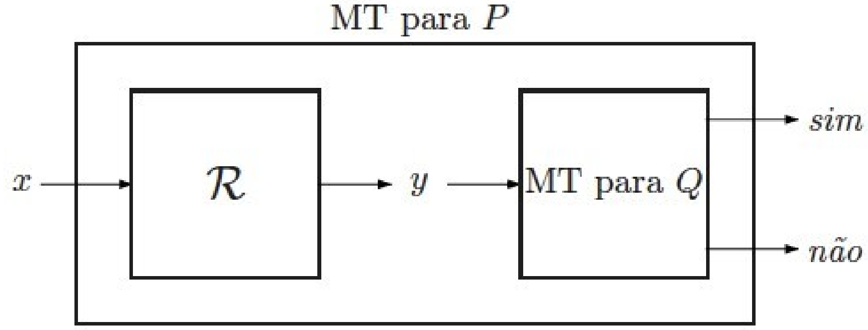
Redução de um problema a outro

Vamos discutir agora como certos problemas podem ser mapeados a outros para que as soluções de uns possam ser usadas pelos outros. Um 'efeito colateral' desse processo é auxiliar na demonstração de que certos problemas não são decidíveis ou computáveis, mapeando-se problemas dessa natureza aos desconhecidos.

Esse mapeamento de problemas é conhecido como **redução**. Um problema de decisão P é redutível a um outro problema Q, se existe um algoritmo redutor R que, ao receber uma instância x do problema P, a mapeia a uma instância y do problema Q, de tal forma que a resposta de x é igual ou complementar à resposta de y. Em outras palavras, ao reduzir um problema a outro, usamos a MT que soluciona o problema Q para construir uma solução para o problema P. O diagrama abaixo mostra esse processo.



☆ Se soubermos que Q é decidível e que P é redutível a Q, então P também é decidível. De forma análoga, se soubermos que P é indecidível e que ele é redutível a Q, então concluímos que Q é indecidível.

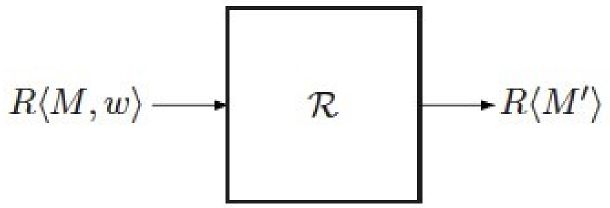
Para exemplificar a primeira afirmação, suponha que queiramos determinar se $w \in L(r)$ onde r é uma expressão regular. Esse problema é decidível, já que podemos reduzi-lo ao problema de determinar se $w \in L(M)$ em que M é um AFD (basta usar o algoritmo de autômatos a partir de expressões regulares; a segunda parte também é simples de demonstrar, já que uma MT pode simular um AFD e esse sempre para com qualquer palavra).

Problema da fita em branco

Agora veremos um exemplo da segunda afirmação. Considere o seguinte problema: dada uma MT M determinar se M para quando processa λ. Vemos que o problema, de certa forma, é similar ao problema da parada. Contudo, aqui a palavra de entrada é uma palavra específica, a palavra vazia. Esse problema é conhecido como *o problema da fita em branco*. Queremos demonstrar que o problema da fita em branco é indecidível.

O problema da fita em branco possui um único parâmetro: uma máquina de Turing M. Vamos mostrar como reduzir o problema da parada ao da fita em branco, de forma que, se há solução para o último, então há solução para o primeiro. Como já demonstramos que não há solução para o problema da parada, demonstraremos que não é possível existir solução para o problema da fita em branco.

Nossa máquina redutora deve ser da seguinte forma.



Ela recebe uma instância do problema da parada e a transforma em uma instância do problema da fita em branco. A máquina M' deve ter o seguinte comportamento:

- No início da computação, M' escreve w na fita.
- M' reposiciona o cabeçote de leitura sobre o primeiro símbolo de w.
- M' se comporta exatamente como M.

Veja que, dessa forma, M' para ao processar λ se, e somente se, M para com a palavra w. Portanto, o problema da fita em branco é indecidível.

Problema da linguagem vazia

Vamos ver agora um segundo exemplo de redução de um problema indecidível a um desconhecido para demonstrar que esse também é indecidível.

Considere o problema de determinar se a linguagem de uma MT não é vazia. Em outras palavras, queremos determinar se $\{R\langle M\rangle \mid \; L(M) \neq \emptyset\}$ é decidível.

Para demonstrar que esse problema é indecidível, vamos reduzir o problema da parada a ele. Assim como no problema da fita em branco, esse problema só possui um único parâmetro, a própria MT. Dessa forma, nosso algoritmo redutor produzirá uma instância desse problema a partir do problema da parada. Nosso redutor produzirá uma MT M' com o seguinte comportamento a partir de uma instância $R\langle M, w\rangle$ do problema da parada:

- M' apaga todo o conteúdo da fita no início da computação.
- M' escreve w na fita.
- M' posiciona o cabeçote sobre o primeiro símbolo de w.
- M' se comporta exatamente como M.

Como podemos ver, M' ignora completamente o conteúdo da fita e se comporta exatamente igual a M com a entrada w. Portanto, $L(M') \neq \emptyset$ se, e somente se, $w \in L(M)$. Em outras palavras, M' para com qualquer entrada se, e somente se, M para com w.

Como o problema da parada é indecidível, temos que o problema da linguagem vazia também é.

Teorema de Rice

Os exemplos do problema da fita em branco e da linguagem vazia compartilham uma característica: ambos tratam de propriedades sobre a linguagem de uma máquina de Turing. Demonstraremos, em breve, que problemas dessa natureza são todos indecidíveis. Ou seja, problemas de decisão que envolvam propriedades não-triviais de linguagens de MTs não podem ser decididos. Essa afirmação é enunciada no

Teorema de Rice.

Antes de enunciarmos o teorema de Rice, precisamos definir o que significa propriedade não-trivial.

- Uma propriedade P de LREs é trivial se for satisfeita por toda LRE ou por nenhuma.

Alguns exemplos de propriedade triviais:

- Determinar se $L(M) \subseteq \Sigma^*$ é uma propriedade trivial pois todas linguagens satisfazem.
- Determinar se uma linguagem $L(M)$ não é reconhecida por parada. Toda LRE é reconhecida por parada (nenhuma satisfaz a propriedade).

Alguns exemplos de propriedades não-triviais:

- Determinar se $L(M)$ é regular. Algumas linguagens são, outras não.
- Determinar se $L(M) = \Sigma^*$. As linguagens de algumas máquinas são, outras não.

Teorema de Rice: Se P for uma propriedade não trivial de LREs, então $\{R\langle M\rangle \mid \ L(M) \ \ satisfaz \ \ P\} \notin LRec$.

Prova (intuição):

Vamos considerar dois casos: (1) ∅ não satisfaz P, e (2) ∅ satisfaz P.

Caso 1: Suponha que ∅ não satisfaça a propriedade. Como P é não trivial, existe uma máquina M_x tal que $L(M_x)$ satisfaz P. Sabemos que $L(M_x) \neq \emptyset$, pois vazio não satisfaz a propriedade.

Agora vamos reduzir o problema da parada ao de determinar se a $L(M')$ satisfaz P. Nosso redutor recebe como parâmetro $R\langle M, w\rangle$ e produz uma instância do problema $R\langle M'\rangle$ em que M' possui o seguinte comportamento:

- M' escreve w na fita após sua entrada da seguinte forma: $\langle x[w \sqcup$ em que x é a entrada de M', e $[$ fará o papel de marcador de início de fita para a simulação de M.
- M' posiciona o cabeçote sobre o primeiro símbolo de w.
- M' simula M com a entrada $[w$.
- Se M parar com w, M' apaga ao conteúdo da fita até $[$; retorna o cabeçote para o início de x; e simula M_x.

Assim, $L(M')$ satisfaz P se, e somente se, M para com w. Como o problema da parada é indecidível, $\{R\langle M\rangle \mid \ L(M) \ \ satisfaz \ \ P \wedge \emptyset \ \ não \ \ satisfaz \ \ P\}$ não pode ser recursiva.

Caso 2: A demonstração desse caso é análoga à do caso 1 com respeito ao complemento.

■

Note que nem toda linguagem da forma $\{R\langle M\rangle \mid \ L(M) \ \ satisfaz \ \ P\}$ é LRE. A linguagem $\{R\langle M\rangle \mid \ \lambda \notin L(M)\}$ não é LRE (Por quê?).