Lista 12

Exercício 1. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, e $R = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 4)\}$.

(a) Desenhe o gráfico e a matriz de R, de $R \circ R$, e de $R \circ R \circ R$.

(b) Desenha o gráfico e a matriz dos fechos reflexivo, simétrico e transitivo de R, separadamente.

(c) Desenhe o gráfico e a matriz a menor relação de equivalência que contém R.

(d) O *complemento* $\overline{R}$ de R no conjunto A é definida por

$$(a, b) \in \overline{R} \iff (a, b) \notin R.$$

Desenhe o gráfico e a matriz de $\overline{R}$.

Exercício 2. Considere as relações abaixo, do conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Qual o tamanho de R? Ou seja, na matriz que representa a relação, quantas entradas da matriz são iguais a 1?

(a) $\{(a, b) : a > b\}$.

$\binom{100}{2}$

(b) $\{(a, b) : a + b = 100\}$.

99

(c) $\{(a, b) : a + b \leq 101\}$.

$\binom{101}{2}$

(d) $\{(a, b) : a \neq b\}$.

$100^2 - 100$.

(e) $\{(a, b) : a = b + 1\}$.

99

(f) $\{(a, b) : a \leq b\}$.

$\binom{101}{2}$

Qual o maior tamanho possível para uma relação anti-simétrica?
$\binom{101}{2}$.

Exercício 3. Quantas relações binárias há em um conjunto com n elementos que sejam, ao mesmo tempo, simétricas e anti-simétricas? Explique em detalhes. Nenhum par do tipo (a, b) com $a \neq b$ pode pertencer à relação. Logo sobram os pares da forma (a, a). Podemos ou não colocar cada um deles, e há n pares. Logo 2^n.

Exercício 4. Considere as relações binárias dos números reais definidas abaixo:

R1: $\{(a, b) : a < b\}$.

R2: $\{(a, b) : a \leq b\}$.

R3: $\{(a, b) : a > b\}$.

R4: $\{(a, b) : a \geq b\}$.

R5: $\{(a, b) : a \neq b\}$.

R6: $\{(a, b) : a = b\}$.

Determine quem são as relações abaixo.

(a) $R_1 \cup R_3$, $R_2 - R_4$, $R_5 \oplus R_6$, $R_3 \cap R_5$.

Respectivamente: R_5, R_1, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, R_3

(b) O fecho simétrico de R_2.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(c) O fecho reflexivo de R_1.

R_2

(d) O fecho reflexivo e simétrico de R_3.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(e) O fecho transitivo de R_5.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(f) Quais delas são anti-simétricas?

Todas menos R_5.

Exercício 5. Uma relação é *irreflexiva* se nenhum elemento se relaciona consigo. Determine, dentre as relações abaixo dos números reais, quais são reflexivas, irreflexivas, simétricas, anti-simétricas e transitivas. As relações são definidas como os pares (x, y) tais que...

(i) $x + y = 0$.

Simétrica, transitiva.

(ii) $x - y$ é racional.

Reflexiva, simétrica, transitiva.

(iii) $x = 2y$.

Anti-simétrica.

(iv) $x = y + 2$.

Irreflexiva, anti-simétrica.

(v) $xy = 0$.

Simétrica.

(vi) $x = 1$ ou $y = 1$.

Simétrica.

(vii) $x = \pm y$.

Reflexiva, simétrica, transitiva.

(viii) $xy \geq 0$.

Reflexiva, simétrica.

(ix) $x = 1$.

Anti-simétrica e transitiva.

(x) $xy < 0$.

Irreflexiva, simétrica.

Exercício 6. Seja A um conjunto e R uma relação binária em A. Suponha que cada elemento de A se relaciona com pelo menos algum outro elemento de A. Demonstre que se R é simétrica e transitiva, então R é necessariamente reflexiva.
Seja $a \in A$ um elemento qualquer. Como a se relaciona com pelo menos alguém, seja este elemento b. Se $b = a$, já temos que $(a, a) \in A$. Caso $b \neq a$, note que, por R ser simétrica, temos tanto (a, b) como (b, a) em R. Por transitividade, segue então que $(a, a) \in R$.

Exercício 7. Seja A um conjunto e R uma relação binária em A. Mostre que se R é transitiva e irreflexiva, então R é anti-simétrica.
Sendo R transitiva, se houvesse dois pares (a, b) e (b, a) em R, teríamos tanto (a, a) como (b, b). Mas se R é irreflexiva, então isso não pode acontecer.

Exercício 8. Dentre as propriedades de reflexividade, simetria, anti-simetria, irreflexividade e transitividade, para quais delas podemos dizer que se R a satisfaz, então $R \circ R$ também a satisfaz?
Reflexividade, simetria e transitividade. Fica como exercício mesmo explicar o motivo, e achar um contra-exemplo que mostre R anti-simétrica, mas $R \circ R$ não.

Exercício 9. Seja A o conjunto de todas as possíveis maneiras de colorir um tabuleiro 2×2 com cores azul e vermelha.

(a) Qual o tamanho de A?

16

(b) Dadas duas colorações C_1 e C_2 de A, definimos uma relação R_{rot} em A dizendo que C_1 se relaciona com C_2 se ela puder ser obtida de C_2 após uma rotação (que pode ser de 0, $\pi/2$, π ou $3\pi/2$ radianos). Esta relação é de equivalência? Quantas classes de equivalência ela possui? Descreva um representante de cada classe, e diga quantos elementos a classe correspondente possui.

Sim. Possui 6 classes de equivalência. Todos vermelhos é uma, todos azuis outra. Um vermelho e 3 azuis, com 4 elementos. Um azul e 3 vermelhos, com 4 elementos. E 2 classes diferentes com 2 de cada cor. Uma tem as quinas opostas de mesma cor, com 2 elementos. E outra tem os que tem duas cores de cada lado, com 4 elementos.

(c) Agora suponha que R relaciona colorações que podem ser obtidas após rotações ou reflexões. Esta relação é de equivalência? Quantas classes de equivalência ela possui? Descreva um representante de cada classe, e diga quantos elementos a classe correspondente possui.

Na verdade aqui me dei conta que não faz diferença. Fica igual ao de cima.

Lembre-se que uma relação de equivalência corresponde a uma partição do conjunto (e vice-versa). Em termos da matriz, isso significa que toda relação de equivalência corresponde a uma matriz que, a menos de permutar a ordem das linhas e colunas, é formada por blocos quadrados de 1s.

Exercício 10. Quantas relações de equivalência há em um conjunto com 5 elementos? E 6 elementos? (Pesquise sobre números de Bell.)

Exercício 11. Quais os possíveis tamanhos que uma relação de equivalência pode ter em um conjunto com 7 elementos?
Temos $7 = 7$, $7 = 6 + 1$, $7 = 5 + 2$, $7 = 5 + 1 + 1$, $7 = 4 + 3$, $7 = 4 + 2 + 1$, $7 = 4 + 1 + 1 + 1$, $7 = 3 + 3 + 1$, $7 = 3 + 2 + 2$, $7 = 3 + 2 + 1 + 1$, $7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1$, $7 = 2+2+2+1$, $7 = 2+2+1+1+1$, $7 = 2+1+1+1+1+1$, $7 = 1+1+1+1+1+1+1$. Essas são todas as possíveis maneiras de decompor 7 como soma de inteiros positivos (sem contar a ordem). O tamanho das classes será a soma dos quadrados de cada uma das parcelas. Então respectivamente: 49, 37, 29, 27, 25, 21, 19, 19, 17, 15, 13, 13, 11, 9, 7.

Exercício 12. Se R é uma relação de equivalência, então $R \circ R$ é de equivalência?
Conforme vimos, as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade são mantidas, portanto "sim".

Exercício 13. Suponha que você recebe uma matriz quadrada M de 0s e 1s que representa uma relação. Descreva um algoritmo (eficiente!) que retorne a menor relação de equivalência que contém M.
Vou deixar este para pesquisarem.

Exercício 14. Suponha que você recebeu uma relação R. A partir dela, você construiu o fecho reflexivo. Depois o fecho simétrico. Depois o fecho transitivo. O resultado é uma relação de equivalência?
Sim. O único problema que poderia acontecer é a relação deixar de ser simétrica após tomar o fecho transitivo. Mas isso não acontecerá, pois em já sendo simétrica, o fecho transitivo adicionará somente pares simétricos.

Exercício 15. E se primeiro fizermos o fecho transitivo, depois o reflexivo e por último o simétrico?
Sim também. O único risco seria ela deixar de ser transitiva depois de tomarmos o fecho simétrico. Mas isso não aconteceria. Pense o motivo.

Exercício 16. Considere o POSET $\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$, cuja relação é divisibilidade.

(a) Quem são os elementos maximais e os minimais?

Maximais: 24 e 45. Minimais: 3 e 5.

(b) Existe algum elemento maior que todos os outros? E menor?

Não. 45 não divide 24 e 24 não divide 45. 3 não divide 5 nem 5 divide 3.

(c) Ache as quotas superiores de $\{3, 5\}$.

15 e 45.

(d) Ache a menor quota superior de $\{3, 5\}$, se ela existir.

15.

(e) Ache as quotas inferiores de $\{15, 45\}$.

3, 5 e 15.

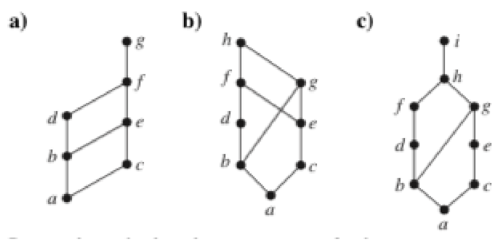
(f) Ache a maior quota inferior de $\{15, 45\}$, ela ela existir.

15.

Responda as mesmas perguntas para $\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$, e respectivos subconjuntos $\{2, 9\}$ e $\{60, 72\}$.

Exercício 17. Explique por que um diagrama de Hasse jamais conterá um triângulo.
Porque qualquer triângulo corresponderia a um triângulo com direções originalmente. Neste caso, haveria duas possibilidades: ou uma seta seria o atalho, e portanto teria sido apagada para o diagrama de Hasse. Ou o triângulo seria direcionado, mas aí por transitividade da relação original, haveria um par simétrico de setas, contrariando a propriedade de anti-simetria do POSET original.
Em seguida, desenhe todos os possíveis diagramas de Hasse com quatro vértices (você não precisa desenhar aquele que sejam desconectados...)

Exercício 18. Determine quais dos POSETS abaixo são reticulados.



(a) é. (b) não é, pois f e g são quotas superiores de b e e e são incomparáveis. (c) é.

Exercício 19. Explique por que todo conjunto totalmente ordenado é um reticulado.
Porque se tivermos duas quotas superiores diferentes, elas são comparáveis, e portanto uma será menor que a outra. O mesmo vale para quotas inferiores.