Lista 3

Exercício 1. Mostre que

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Por indução:

1. Caso base: quando $n = 1$, ambos os lados são claramente iguais a 1.
2. Hipótese indutiva: Para $n = k$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $\sum_{j=1}^{n} k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.
3. Conclusão: Teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j^3 &= (k+1)^3 + \sum_{j=1}^{k} j^3 \\
&= (k+1)^3 + \frac{k^2(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{4(k+1)(k+1)^2 + k^2(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{(k^2+4k+4)(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Exercício 2. Prove que um quadrado perfeito é sempre a soma de números ímpares consecutivos (note que não necessariamente 2 ímpares.. podem ser várias, porém consecutivos).

Por indução:

1. Caso base: $1^2 = 1$, e é portanto a soma de um único ímpar.

   A dificuldade desta questão está em achar qual soma é esta, de quais e de quantos números impares consecutivos. Após testar mais alguns casos, notamos que $n^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ aparenta ser a fórmula ideal. Tentamos fazer então por indução.
2. Hipótese indutiva: $n^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.
3. Conclusão: Teremos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= 2n+1+\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= 2n+1+n^2 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Exercício 3. Prove que um conjunto de n retas pode dividir o plano em no máximo

$$\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Dica: use o fato de que a melhor configuração possível para as retas é que nenhum par seja paralelo, e nenhum trio de retas passe pelo mesmo ponto.

Por indução:

1. Caso base: Uma única reta divide o plano em no máximo 2 regiões.
2. Hipótese indutiva: n retas dividem o plano em no máximo $\frac{n^2+n+2}{2}$ regiões.
3. Conclusão: Suponha que há n retas dividindo o plano em $\frac{n^2+n+2}{2}$ regiões. Adicionamos uma reta a mais. Esta reta será separada em segmentos por cada cruzamento. Cada segmento desta reta estará dividindo uma região do plano em dois, e portanto o maior número possível de segmentos corresponde ao maior número possível de regiões que serão adicionadas. Seguindo a dica, podemos assumir que a nova reta terá precisamente n cruzamentos distintos, e portanto $n-1$ segmentos finitos entre eles, e mais dois infinitos. Um total de $n+1$ segmentos, e que adicionarão cada um deles 1 nova região. Portanto o número máximo de regiões será

$$\frac{n^2+n+2}{2}+(n+1)=\frac{n^2+2n+2+n+2}{2}=\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}.$$