

## Propriedades das LLCs

Assim como verificamos que as linguagens regulares eram fechadas sob algumas operações e atendiam aos requisitos do lema do bombeamento, vamos discutir algumas propriedades das linguagens livres de contexto.

Começaremos discutindo algumas propriedades de fechamento dessas linguagens.

União: As LLCs são fechadas sob união.

Sejam  $L_1$  e  $L_2$  linguagens livres de contexto. Logo, existem GLCs  $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, P_1)$  e  $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, P_2)$  tais que  $L(G_1) = L_1$  e  $L(G_2) = L_2$ . Podemos obter uma GLC para reconhecer  $L(G_1) \cup L(G_2)$  da seguinte forma:

- $G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{P_3\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R_3, P_3)$
- $R_3 = R_1 \cup R_2 \cup \{P_3 \rightarrow P_1 \mid P_2\}$
- Supõe-se que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ; caso contrário, as variáveis em comum podem ser re-rotuladas antes de iniciar a construção da nova gramática

É fácil perceber que, a partir da nova variável inicial, podemos escolher gerar palavras com  $G_1$  ou  $G_2$ .

Concatenação: As LLCs são fechadas sob concatenação.

Sejam  $L_1$  e  $L_2$  linguagens livres de contexto. Logo, existem GLCs  $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, P_1)$  e  $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, P_2)$  tais que  $L(G_1) = L_1$  e  $L(G_2) = L_2$ . Podemos obter uma GLC para reconhecer  $L(G_1)L(G_2)$  da seguinte forma:

- $G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{P_3\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R_3, P_3)$
- $R_3 = R_1 \cup R_2 \cup \{P_3 \rightarrow P_1 P_2\}$
- Novamente, supõe-se que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Aqui a justaposição de  $P_1$  e  $P_2$  na regra acrescentada à gramática garante que uma palavra de  $L(G_1)$  será sucedida por uma de  $L(G_2)$ .

Fecho de Kleene: As LLCs são fechadas sob fecho de Kleene.

Seja  $L$  uma linguagem livre de contexto. Seja a GLC  $G = (V, \Sigma, R, P)$  tal que  $L(G) = L$ . A GLC abaixo reconhece  $L(G)^*$ :

- $G' = (V \cup \{P'\}, \Sigma, R', P')$
- $R' = R \cup \{P' \rightarrow PP' \mid \lambda\}$

Aqui a adição da primeira regra garante a concatenação de uma ou mais vezes  $L$ , enquanto a segunda regra inclui a palavra vazia (concatenação zero vezes).

No entanto, a classe das linguagens livres de contexto não são fechadas sob interseção e complemento como veremos em breve. Antes disso, precisamos apresentar o lema do bombeamento para LLCs.