Álgebra A

Folha 1 de exercícios

csaba@mat.ufmg.br

1. Demonstre as seguintes afirmações por indução:

(1) $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$;
(2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$;
(3) $(1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \cdots + n^7) = 2[n(n+1)/2]^4$.

2. Seja $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ uma progressão aritmética com diferença comum d. Usando indução, demonstre que

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d$;
(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n(a_1 + a_n)/2$.

3. Seja $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$. Usando indução, demonstre que

(1) $a_n = a_1 q^{n-1}$;
(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1(q^n - 1)/(q-1)$.

4. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine uma possível fórmula para A^n $(n \in \mathbb{N})$ e demonstre-a por indução.

5. Para $n,\ p \in \mathbb{N}$, defina $\binom{n}{p} = n!/(p!(n-p)!)$. Demonstre por indução que

(1) $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$;
(2)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad \text{para todo} \quad a,\ b \in \mathbb{R};$$

6. Seja $a \in \mathbb{Z}$. Mostre que na divisão de a^2 por 8, os restos possíveis são 0, 1, ou 4.

7. Determine os inteiros positivos que divididos por 17 deixam um resto igual ao quadrado do quociente.

8. Sejam $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$. Demonstre as seguintes afirmações ou dê contraexemplo:

(1) se $ac \mid bc$, então $a \mid b$;
(2) se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b-c)$;
(3) se $c \mid (a+b)$, então $c \mid a$ ou $c \mid b$;
(4) se $a \mid b$, então $a \mid xb$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

9. Mostre que se $a \mid (2x - 3y)$ e $a \mid (4x - 5y)$ então $a \mid y$ para todo $a,\ x,\ y \in \mathbb{Z}$.

10. Sejam $a,\ b,\ n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 2$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $n \mid (a-b)$;
(2) os restos de a e b, quando divididos por n, são iguais.