UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

BRENO DE CASTRO PIMENTA
RA: 2017114809

Trabalho: LISTA 01
Disciplina: ALC
Turma: TZ

Belo Horizonte
2019

1) **Professor permitiu a realização da primeira pergunta usando computador:**

```
x = np.array([0.85, 0.1, 0.05, 0])
A = np.array([
            [0.9, 0.07, 0.02, 0.01],
            [0, 0.93, 0.05, 0.02],
            [0, 0, 0.85, 0.15],
            [0,0,0,1]
])


for i in range(10):
    x = x@A

print("A distriubuição em 10 anos será: ", x)
print("Ou seja:")
print("  • asymptomatic = {0:.0%}".format(x[0]))
print("  • symptomatic = {0:.0%}".format(x[1]))
print("  • AIDS = {0:.0%}".format(x[2]))
print("  • dead = {0:.0%}".format(x[3]))
```

```
A distriubuição em 10 anos será:  [0.29637667 0.3167509  0.1342175  0.25265492]
Ou seja:
  • asymptomatic = 30%
  • symptomatic = 32%
  • AIDS = 13%
  • dead = 25%
```

2)

a) $(-1)^0$ → primeiro bit é zero, pois queremos que o valor seja positivo

$(1,00000)_2$ → já que procuramos o menor valor, toda a mantissa é zero

→ base dois, pois estamos trabalhando com bits.

2^{-6} → já que procuramos o menor valor, o expoente é o menor possível.

$\therefore (-1)^0 \cdot (1,00000)_2 \cdot 2^{-6}$

b) $(-1)^0$ → primeiro bit é zero para manter o número positivo.

$(1,11111)_2$ → já que é o maior que procuramos toda a mantissa será com 1's.

2^7 → maior expoente disponível.

c) $(-1)^0$ → o número é positivo.

$(1,01000)_2$ → ajustamos o valor de forma a alocá-lo na mantissa.

2^1 → ajustamos o expoente conforme a modificação realizada na mantissa.

d) $(-1)^1$ → O primeiro bit é 1, já que o número é negativo.

$(1,10101)_2$ → aproximamos o número dentro da limitação da mantissa.

$2^{-5} \to = 2^{-2} \cdot 2^{-3}$

→ ajuste da mantissa

→ valor original

e) $(-1)^0$ → o número é positivo, logo primeiro bit é zero

$(1,00001)_2$ → a mantissa toda zerada já é precedida por 1, portanto o próximo valor, seria adicionar outro 1 na parte mais a direita possível

2^0 → expoente é zero, pois trabalhamos diretamente na unidade

f) $\left[(1,00001)_2 - (1,00000)_2\right] \div 2 \cong (0,000001)_2 = 2^{-6}$

OBS: Já que as respostas já foram dadas, o professor pediu as justificativas.

3) $A = U_{m \times m} \times \Sigma_{m \times n} \times V^T \quad \therefore \quad A^T = V \cdot \underset{\Downarrow}{\Sigma} \cdot U^T$

OBS: Σ é uma matriz quadrada e diagonal, logo $\Sigma^T = \Sigma$

3.1) $A \cdot A^T = (U \cdot \Sigma \cdot V^T) \cdot (V \cdot \Sigma \cdot U^T)$

$$= U \cdot \Sigma \cdot \underbrace{V^T \cdot V} \cdot \Sigma \cdot U^T$$

$$= U \cdot \Sigma \cdot I \cdot \Sigma \cdot U^T$$

$$= U \cdot \underbrace{\Sigma \cdot \Sigma} \cdot U^T$$

$$A \cdot A^T = U \cdot \Sigma^2 \cdot U^T$$

3.2) $A^T \cdot A = (V \cdot \Sigma \cdot U^T) \cdot (U \cdot \Sigma \cdot V^T)$

$$= V \cdot \Sigma \cdot \underbrace{U^T \cdot U} \cdot \Sigma \cdot V^T$$

$$= V \cdot \Sigma \cdot I \cdot \Sigma \cdot V^T$$

$$= V \cdot \underbrace{\Sigma \cdot \Sigma} \cdot V^T$$

$$A^T \cdot A = V \Sigma^2 V^T$$

4. a) Verificando ortonormalidade das matrizes através da ortonormalidade dos seus vetores (colunas ou linha)

a.1) $U = \begin{bmatrix} -0{,}632 & 0 \\ 0{,}316 & -0{,}707 \\ -0{,}316 & -0{,}707 \\ 0{,}632 & 0 \end{bmatrix}$ $V_1 = (-0{,}632; 0{,}316; -0{,}316; 0{,}632)$, $V_2 = (0; -0{,}707; -0{,}707; 0)$

Restrição de ortogonalidade entre vetores →

$$V_1 \cdot V_2 \Rightarrow 0 + (0{,}316 \cdot [-0{,}707]) + (-0{,}316 \cdot [-0{,}707]) + 0$$

Restrição de comprimento para cada vetor

$$\|V_1\| = \sqrt{(-0{,}632)^2 + (0{,}316)^2 + (-0{,}316)^2 + (0{,}632)^2} = 1$$

$$\|V_2\| = \sqrt{(-0{,}707)^2 + (-0{,}707)^2} = 1$$

---

a.2) $V = \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0{,}707 \\ -0{,}707 & -0{,}707 \end{bmatrix}$ $V_3 = (-0{,}707 ; -0{,}707)$, $V_4 = (0{,}707 ; -0{,}707)$

$$V_3 \cdot V_4 = (0{,}707 \cdot [-0{,}707]) + ([-0{,}707] \cdot [-0{,}707]) = 0$$

$$\|V_3\| = \sqrt{(-0{,}707)^2 + (0{,}707)^2} = 1$$

$$\|V_4\| = \sqrt{(0{,}707)^2 + (-0{,}707)^2} = 1$$

$\therefore$ U e V são matrizes ortonormais

---

a.3)

$$U \cdot \Sigma = \begin{bmatrix} (-0{,}632 \cdot 2{,}236) & 0 \\ (0{,}316 \cdot 2{,}236) & -0{,}707 \\ (-0{,}316 \cdot 2{,}236) & -0{,}707 \\ (0{,}632 \cdot 2{,}236) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}413152 & 0 \\ 0{,}706576 & -0{,}707 \\ -0{,}706576 & -0{,}707 \\ 1{,}413152 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(U \cdot \Sigma) \cdot V^T = \begin{pmatrix} 0{,}99909 & -0{,}99909 \\ \begin{matrix}(0{,}706576 \cdot -0{,}707) \\ (-0{,}707 + -0{,}707)\end{matrix} \cong 0{,}0002999 & 0{,}99909 \\ 0{,}999676 & 0{,}0002999 \\ -0{,}99909 & 0{,}99909 \end{pmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{U \cdot \Sigma \cdot V^T = C}$$

5)

$$C_{+1} = \begin{array}{c} \text{site1} \quad \text{site2} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \to \text{Novo usuário} \end{array}$$

OBS: Já que foi adicionado uma linha e o sistema com duas colunas já possui 2 valores singulares, as matrizes Σ e V^T da decomposição não serão alteradas, logo:

$$\underset{U_{novo}}{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ a & b \end{bmatrix}} \cdot \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} 2,236 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{V^T}{\begin{bmatrix} -0,707 & 0,707 \\ -0,707 & -0,707 \end{bmatrix}} = \underset{C_{novo}}{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{(U_{novo} \cdot \Sigma)}{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 2,236a & b \end{bmatrix}} \cdot \underset{V^T}{\begin{bmatrix} -0,707 & 0,707 \\ -0,707 & -0,707 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

OBS: $2,236 \times 0,707 = 1,580852$

$$\underset{(U_{novo} \cdot \Sigma \cdot V^T)}{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ -1,580852a - 0,707b & +1,580852a - 0,707b \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\therefore \begin{cases} -1,580852a - 0,707b = 1 \\ +1,580852a - 0,707b = 1 \end{cases} \Rightarrow -1,414b = 2 \quad \therefore \quad b = -1,414427157$$

$$1,580852a - 0,707 \cdot (-1,414427157) = 1$$

$$1,580852a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

$\to$ Sendo $1,414427157 \cong \sqrt{2}$

$\therefore$ A linha que deve ser adicionada a U para que C tenha as avaliações do novo usuário é:

$$[0; -\sqrt{2}]$$