Lista 1 - solução

Exercício 1. Seja x um número real, e considere a seguinte implicação.

Se $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, então x está entre 1 e 2.

(i) Reescreva esta implicação sem usar qualquer palavra em português.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

(ii) Qual é a hipótese?

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0.$$

(iii) Qual a conclusão?

$$1 \leq x \leq 2.$$

(iv) Reescreva a implicação usando a "palavra necessária"

x estar entre 1 e 2 é condição necessária para que $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

(v) Reescreva a implicação usando a "somente se".

$x^2 - 3x + 2 \leq 0$ é condição suficiente para que x esteja entre 1 e 2.

(vi) Qual a implicação conversa?

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0.$$

(vii) Qual a negação da implicação?

Existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, e $x < 1$ ou $x > 2$.

(viii) Qual a contrapositiva da implicação?

Se $x < 1$ ou $x > 2$, então $x^2 - 3x + 2 > 0$.

(ix) Demonstre que tanto a implicação como sua conversa são, de fato, verdadeiras (sim, relembre seu ensino médio).

Qualquer pessoa nota facilmente que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. O produto de dois números reais é negativo se e somente se um deles é positivo e o outro é negativo, portanto, neste caso, se e somente se $1 < x < 2$; e o produto de dois números é 0 se e somente se ao menos um deles for igual a 0. Segue que $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ se e somente se $1 \leq x \leq 2$.

(x) Reescreva a implicação e sua conversa usando "se, e somente se".

Para todo x real, $1 \leq x \leq 2$ se, e somente se, $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Exercício 2. Demonstre as equivalências abaixo usando tabelas de verdade.

$$
\begin{array}{ccc}
(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) & \equiv & p \Rightarrow (q \wedge r) \\
(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) & \equiv & (p \vee q) \Rightarrow r \\
(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) & \equiv & p \Rightarrow (q \vee r) \\
(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) & \equiv & (p \wedge q) \Rightarrow r \\
p \iff q & \equiv & (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\
p \iff q & \equiv & \neg p \iff \neg q \\
p \iff q & \equiv & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\neg(p \iff q) & \equiv & p \iff \neg q
\end{array}
$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$q \wedge r$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	T	T	F	F	T	T

Basta notar agora que a última coluna é igual ao $\wedge$ da quarta e da quinta, e que a penúltima coluna é igual ao $\wedge$ da quarta e da sexta.

Agora para outras maneiras de demonstrar. Note que $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \equiv \neg p \vee q \vee \neg p \vee r$, pela lei da implicação, e que isso é equivalente a $\neg p \vee (q \vee r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$, também pela lei da implicação. O mesmo pode ser feito para o caso que falta.

Exercício 3. Mostre que $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ é uma tautologia.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$\wedge$	$p \Rightarrow r$	$\Rightarrow$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Como a última coluna é sempre verdade, segue que a implicação dada é uma tautologia.

Exercício 4. Sejam p, q e r as seguintes proposições:
p : Ursos pardos foram vistos na área.
q : É seguro caminhar na trilha.
r : Há frutas maduras ao longo da trilha.

Escreva as seguintes proposições utilizando p, q, r e conectivos lógicos.

(a) Há frutas maduras ao longo da trilha, mas ursos pardos não foram vistos na área.

$$r \wedge \neg p$$

(b) Ursos pardos não foram vistos na área e caminhar na trilha é seguro, mas frutas estão maduras ao longo da trilha.

$$\neg p \wedge q \wedge r$$

(c) Se há frutas maduras ao longo da trilha, caminhar é seguro se, e somente se, ursos pardos não foram vistos na área.

$$r \Rightarrow (q \iff \neg p)$$

(d) Não é seguro caminhar na trilha, mas ursos pardos não foram vistos na área e há frutas maduras ao longo da trilha.

$$\neg q \wedge \neg p \wedge r$$

(e) Para que seja seguro caminhar na trilha, é necessário mas não suficiente que não haja frutas maduras ao longo da trilha e que ursos pardos não tenham sido vistos na área.

$$\big[q \Rightarrow (\neg r \wedge \neg p)\big] \wedge \big[(\neg r \wedge \neg p) \wedge \neg q\big]$$

(f) Caminhar na trilha não é seguro sempre que ursos pardos tenham sido vistos na área e haja frutas maduras ao longo da trilha.

$$(p \wedge r) \Rightarrow q$$

Exercício 5. Determine nas sentenças abaixo as quatro partes que formam uma proposição quantificada:

(i) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x^3 + x^4 > 0$.

Quantificador: $\forall$. Variável: x. Domínio: $\mathbb{R}$. Sentença: $x^2 + x^3 + x^4 > 0$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \in \mathbb{Q}$.

Quantificador:$\forall$. Variável: x . Domínio:$\mathbb{Q}$. Sentença: $x^2 \in \mathbb{Q}$.

(iii) $\exists n \in \mathbb{Z} : \, (n > 1 \ \wedge \ n/n^2 \in \mathbb{Z})$.

Quantificador: $\exists$. Variável: n. Domínio:$\mathbb{Z}$. Sentença: $(n > 1 \ \wedge \ n/n^2 \in \mathbb{Z})$.

Determine se as proposições acima são verdadeiras ou falsas. Em cada exemplo, modifique precisamente uma das quatro partes de modo que o estado de verdade seja alterado.

(i) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x^3 + x^4 > 0$.

Falsa. Troque $>$ por $\geq$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \in \mathbb{Q}$.

Verdadeira. Troque $\mathbb{Q}$ pelo conjunto dos irracionais.

(iii) $\exists n \in \mathbb{Z} : (n > 1 \ \wedge \ n/n^2 \in \mathbb{Z})$.

Falsa. Troque $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Q}$.

Exercício 6. Três professores estão sentados em um restaurante, e a garçonete pergunta a eles: "Todo mundo quer café?" O primeiro professor diz: "Eu não sei." O segundo professor diz: "Eu não sei." Finalmente, o terceiro professor diz: "Não, nem todo mundo quer café." A garçonete, então, traz café para os professores que queriam café. Como ela deduziu quem queria café?

Se algum dos dois primeiros professores não quisessem, então eles saberiam que nem todo mundo quer, e teriam respondido "não". Portanto eles queriam. Já o último sabia que nem todos queriam porque ele não queria.