Fund. Física I - Gabarito Aula 01 - Exercícios de Fixação

E1.1)

a) $10\ x\ 10^6\ watts = 10\ Megawatts$
b) $1\ x\ 10^7\ m = 10\ x\ 10^6\ m = 1\ x\ 10\ Megametros$
c) $0{,}004\ x\ 10^{-9}\ g = 4\ x\ 10^{-12}\ g = 4\ picogramas$
d) $0{,}0030s = 3{,}0\ x\ 10^{-3}s = 3{,}0\ milisegundos$

E1.2)

a) $30Gbytes = 30\ x\ 10^9\ bytes\ \rightarrow 3\ x\ 10^{10}\ bytes$
b) $0{,}19\ \mu m = 0{,}19\ x 10^{-6}m = 1{,}9\ x\ 10^{-7}m\ \rightarrow 2\ x\ 10^{-7}m$
c) $46\ mg = 46\ x\ 10^{-3}g = 4{,}6\ x\ 10^{-2}g\ \rightarrow 5\ x\ 10^{-2}g$
d) $0{,}12\ pm = 0{,}12\ x\ 10^{-12}m = 1{,}2\ x\ 10^{-13}m\ \rightarrow 1\ x\ 10^{-13}m$
e) $1980\ x\ 100^2kg = 1980\ x\ 10^4kg = 1{,}980\ x\ 10^7kg\ \rightarrow 2\ x\ 10^7kg$

E1.3)

a) $r = a + bt\ \rightarrow\ [km] = [a] + [b(h)]\ \rightarrow a = km\ ; b = \frac{km}{h}$
b) $v = \sqrt{br}\ \rightarrow [km/h] = \sqrt{[b(km)]}\ \rightarrow b = km/h^2$
c) $r = asen(bt)\ \rightarrow [km] = [a]sen[b(h)]\ \rightarrow a = km\ ; b = h^{-1}$
d) $r = a\ exp(-bt)\ \rightarrow\ [km] = [a]exp[-b(h)]\ \rightarrow a = km^{-1}\ ; b = h^{-1}$

E1.4)

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000m}{3600s}\ \rightarrow \frac{1km}{h} = \frac{1000m}{3{,}6x1000s}\ \rightarrow \frac{1km}{h} = \frac{1m}{3{,}6s}\ \rightarrow 3{,}6\frac{km}{h} = \frac{1m}{s}$$

E1.5)

$$\frac{R\$52000000{,}00}{R\$50{,}00} = 1040000\ notas$$

$1040000s \sim 289h \sim 12dias$

E1.6)

Uma volta completa da Terra em torno de seu eixo:

$24h = 24\ x\ 3600s = 8{,}64\ x\ 10^4s$

Uma volta completa em torno do Sol:

$365\ dias = 365\ x\ 24h = 8{,}76\ x10^3h$

$8{,}76\ x\ 10^3h = 8{,}76\ x\ 10^3\ x\ 3600s \sim 3{,}15\ x\ 10^7s$

E1.7)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2} \rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi F}\frac{q_1 q_2}{d^2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi(N)}\frac{(C)(C)}{(m^2)} \rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\left(kg.\frac{m}{s^2}\right)}\frac{(C)(C)}{(m^2)}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1C^2 s^2}{4\pi kg.m^3}$$

E1.8)

O soldado Arlem foi o que apresentou a maior exatidão nos disparos, pois seus tiros formaram um circulo cujo centro encontra-se sobre o alvo central, ou seja, o “alvo médio” dos disparos está sobre o alvo central. Entretanto, sua precisão foi a pior dentre os três policiais, pois seus disparos apresentam a maior diferença/distanciamento entre si.

O perito Anderson foi o que apresentou a maior precisão nos disparos, pois seus tiros apresentaram a menor diferença/distanciamento entre si (seus disparos formaram o circulo de menor raio). Sua exatidão é menor do que a do soldado Arlem, pois o “alvo médio” de seus disparos encontra-se a *2cm* de distância do alvo central.

O agente Arnaldo apresentou a segunda melhor precisão nos disparos, pois seus tiros apresentaram a segunda menor diferença/distanciamento entre si (circulo de raio *2cm*). Sua exatidão foi a pior dentre os três policiais, pois o “alvo médio” de seus disparos apresenta o maior afastamento do alvo central (o centro do circulo formado por seus disparos encontra-se a *12cm* do alvo central).

E1.9)

A taxa de perda de massa do quilograma padrão internacional, de *500μg/ano*, é uma taxa significativa. Pois, essa diferença de *500μg/ano* pode acarretar grandes desvios/erros em pesquisas cientificas a nível atômico.

E1.10)

Supondo uma freqüência cardíaca de 100 batimentos por minuto teríamos:

- Para um ano

$$\frac{100 batimentos}{minuto} x \frac{60 minutos}{hora} x \frac{24 horas}{dia} x \frac{365 dias}{ano} \sim 5 \ x \ 10^7 batidas/ano$$

- Considerando que uma pessoa vive em média 78 anos, temos então

$$5 \ x \frac{10^7 batidas}{ano} x \frac{78 anos}{vida} \sim 4 \ x \ 10^9 batidas/vida$$

Fund. Física I - Gabarito Unidade 01 - Problemas

P1.1)

a) $1mi = 1{,}6km$
$$\rightarrow \frac{1mi}{h} = \frac{1{,}6km}{h}$$

b) $1mi^3 = 1mi\ x\ 1mi\ x\ 1mi = 1{,}6km\ x\ 1{,}6km\ x\ 1{,}6km$
$1mi^3 = 1{,}6\ x\ 10^3m\ x\ 1{,}6\ x\ 10^3m\ x\ 1{,}6\ x\ 10^3m$
$1mi^3 = 4{,}1\ x\ 10^9m^3$

c) $1mi = 1{,}6km = 1{,}6\ x\ 10^3m$
$1mi = 1{,}6\ x\ 10^3\ x\ 10^2cm$
$1mi = 1{,}6\ x\ 10^5cm$

$1mi^2 = 1mi\ x\ 1mi = 1{,}6km\ x\ 1{,}6km$
$1mi^2 = 1{,}6\ x\ 10^3m\ x\ 1{,}6\ x\ 10^3m$
$1mi^2 = 1{,}6\ x\ 10^3\ x\ 10^2cm\ x\ 1{,}6\ x\ 10^3\ x\ 10^2cm$
$1mi^2 = 2{,}6\ x\ 10^{10}cm^2$

P1.2)

Temos que:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho V$$

A densidade do mercúrio é cerca de $13{,}6$ vezes maior que a densidade da água, sendo a densidade da água $1kg/l = 1kg/dm^3$. Logo, a massa de mercúrio (m_m) contida em um volume de $1l$ é dada por:

$$m_m = \rho_m V_m \rightarrow m_m = \rho_m 1l$$

$$m_m = 13{,}6\rho_a 1l \rightarrow m_m = 13{,}6\ x \frac{1kg}{l}\ x\ 1l$$

$$m_m = 13{,}6kg$$

onde m_m, ρ_m e V_m são respectivamente a massa, a densidade e o volume de mercúrio, ρ_a representa a densidade da água.

Para a massa de mercúrio contida em $1cm^3$, temos:

$$m_m = \rho_m V_m \rightarrow m_m = 13{,}6\rho_a V_m$$

$$m_m = 13{,}6\ x \frac{1kg}{dm^3}\ x\ 1cm^3 = 13{,}6\ x \frac{1kg}{10^3cm^3}\ x\ 1cm^3$$

$$m_m = 13{,}6\ x\ 10^{-3}kg = 1{,}36\ x\ 10^{-2}kg$$

P1.3)

$$\frac{12km}{l} = \frac{12\ x\ 10^3 m}{10^{-3} m^3}$$

$$\frac{12km}{l} = \frac{12\ x\ 10^2 dam}{10^{-3} m^3} = \frac{1{,}2\ x\ 10^5 dam}{m^3}$$

P1.4)

Calculando o perímetro, a área e o volume da caixa, utilizando a fita métrica, temos:

$P = l + l + l + l$

$P = 5{,}2cm + \ 5{,}2cm + 5{,}2cm + 5{,}2cm$

$P = 21cm$

$A = l\ x\ l$

$A = 5{,}2cm\ x\ 5{,}2\ cm$

$A = 27cm^2$

$V = l\ x\ l\ x\ l$

$V = 5{,}2cm\ x\ 5{,}2cm\ x\ 5{,}2cm$

$V = 1{,}4\ x\ 10^2 cm^3$

Os resultados anteriores foram apresentados com apenas dois algarismos significativos, pois, as medidas que deram origem a tais cálculos possuem apenas dois algarismos significativos.

Utilizando a régua milimetrada, temos os seguintes resultados para os cálculos do perímetro, área e volume da caixa:

$P = l + l + l + l$

$P = 5{,}24cm + \ 5{,}24cm + 5{,}24cm + 5{,}24cm$

$P = 21{,}0cm$

$A = l\ x\ l$

$A = 5{,}24cm\ x\ 5{,}24\ cm$

$A = 27{,}5cm^2$

$V = l\ x\ l\ x\ l$

$V = 5{,}24cm\ x\ 5{,}24cm\ x\ 5{,}24cm$

$V = 1{,}44\ x\ 10^2 cm^3$

Os resultados acima foram apresentados com três algarismos significativos, pois, as medidas que deram origem aos cálculos possuem três algarismos significativos.

P1.5)

Para estimar o número de malas necessárias para levar as moedas, iremos considerar moedas de *13mm* de raio e *2,0mm* de espessura e malas de dimensões *520mm x 390mm x 200mm*. Fazendo tais considerações, temos que cada mala pode levar um número de moedas igual a:

$$n = \frac{520mm}{26mm} x \frac{390mm}{26mm} x \frac{200mm}{2,0mm}$$

onde *26mm* é o diâmetro das moedas e *2,0mm* é a espessura das mesmas. Logo,

$$n = 3,0x\ 10^4 moedas$$

Temos ainda que cada moeda possui um volume de,

$$V_{moeda} = \pi r^2 h$$

$$V_{moeda} = \pi(13x10^{-3}m)^2 x2,0x10^{-3}m$$

$$V_{moeda} = 1,1x10^{-6}m^3$$

Considerando que a cotação do ouro seja de *R$50,00/g = R$50000,00/kg*, temos que a massa de ouro correspondente a *R$1000000,00* é de:

$$m_{ouro} = \frac{R\$1000000,00}{\frac{R\$50000,00}{kg}}$$

$$m_{ouro} = 20kg$$

Sabendo que a densidade do ouro é de *19,3g/cm³ = 19,3x10³kg/m³*, temos que o volume de ouro correspondente a essa massa é de:

$$\rho_{ouro} = \frac{m_{ouro}}{V_{ouro}} \rightarrow V_{ouro} = \frac{m_{ouro}}{\rho_{ouro}}$$

$$V_{ouro} = \frac{20kg}{\frac{19,3x10^3 kg}{m^3}}$$

$$V_{ouro} = 1,0x10^{-3}m^3$$

O número de moedas de ouro correspondente ao valor de *R$1000000,00*, é dado por:

$$n_{ouro} = \frac{V_{ouro}}{V_{moeda}}$$

$$n_{ouro} = \frac{1,0x10^{-3}m^3}{1,1x10^{-6}m^3}$$

$$n_{ouro} \sim 9,1\ x\ 10^2 moedas$$

Como o número de moedas de ouro é inferior ao número de moedas que podem ser levadas na mala, será necessária apenas uma mala para levar a quantia de *R$1000000,00* em moedas de ouro.

Para levar a quantia de *R$1000000,00* em moedas de prata, considerando a cotação da prata *R$1,00/g = R$1000,00/kg*, teríamos,

$$m_{prata} = \frac{R\$1000000,00}{\frac{R\$1000,00}{kg}}$$

$$m_{prata} = 1,0x10^3 kg$$

Sabendo que a densidade da prata é de *10,5g/cm³ = 10,5x10³kg/m³*, temos que o volume de ouro correspondente a essa massa é de:

$$\rho_{prata} = \frac{m_{prata}}{V_{prata}} \rightarrow V_{prata} = \frac{m_{prata}}{\rho_{prata}}$$

$$V_{prata} = \frac{1,0x10^3 kg}{\frac{10,5x10^3 kg}{m^3}}$$

$$V_{prata} = 9,5x10^{-2} m^3$$

O número de moedas de prata correspondente ao valor de *R$ 1000000,00*, é dado por:

$$n_{prata} = \frac{V_{prata}}{V_{moeda}}$$

$$n_{prata} = \frac{9,5x10^{-2} m^3}{1,1x10^{-6} m^3}$$

$$n_{prata} \sim 8,6\ x\ 10^4 moedas$$

Como o número de moedas de ouro é praticamente três vezes maior que o número de moedas que podem ser levadas em uma mala, serão necessárias três malas para levar a quantia de *R$ 1000000,00* em moedas de prata.

Agora, se levarmos a quantia de *R$ 1000000,00* em moedas de bronze, considerando a cotação da prata *R$ 0,05/g = R$ 50,00/kg*, teríamos,

$$m_{bronze} = \frac{R\$1000000,00}{\frac{R\$50,00}{kg}}$$

$$m_{bronze} = 2,0x10^4 kg$$

Sabendo que a densidade do bronze é de *8,74g/cm³ = 8,74x10³kg/m³*, temos que o volume de bronze correspondente a esta massa é de:

$$\rho_{bronze} = \frac{m_{bronze}}{V_{bronze}} \rightarrow V_{bronze} = \frac{m_{bronze}}{\rho_{bronze}}$$

$$V_{bronze} = \frac{2,0x10^4 kg}{\frac{8,74x10^3 kg}{m^3}}$$

$$V_{bronze} = 2,3 m^3$$

O número de moedas de bronze correspondente ao valor de *R$ 1000000,00*, é dado por:

$$n_{bronze} = \frac{V_{bronze}}{V_{moeda}}$$

$$n_{bronze} = \frac{2,3 m^3}{1,1x10^{-6} m^3}$$

$n_{bronze} \sim 2,1\ x\ 10^6 moedas$

Como o número de moedas de bronze é cerca de setenta vezes maior que o número de moedas que podem ser levadas em uma mala, serão necessárias setenta malas para levar a quantia de *R$ 1000000,00* em moedas de bronze.

P1.6)

O volume estimado de um oceano é de $1285600000 km^3 \sim 1,3\ x\ 10^9 km^3 \sim\ 1,3\ x\ 10^{18} m^3$. Considerando uma gota esférica, de raio $3,0mm = 3,0\ x\ 10^{-3} m$, temos que o número de gotas que existem um oceano é estimado em:

$$n_{gotas} = \frac{V_{oceano}}{V_{gota}}$$

$$n_{gotas} = \frac{1,3x10^{18}m^3}{\frac{4}{3}\pi(3,0x10^{-3}m)^3}$$

$$n_{gotas} \sim 1,2x10^{25} gotas$$

P1.7)

Para esta estimativa, iremos considerar uma geladeira cujo volume interno seja de $343l$ ou $3,43\ x\ 10^{-1} m^3$. Admitiremos também que $1mol$ ($6,02\ x\ 10^{23} átomos$) de átomos de ar ocupem um volume de $22,4l = 2,24\ x\ 10^{-2} m^3$. Temos então que o número de *moles* de átomos na geladeira é dado por:

$$n_{moles} = \frac{V_{geladeira}}{V_{mol}}$$

$$n_{moles} = \frac{3,43x10^{-1}m^3}{2,24x10^{-2}m^3}$$

$$n_{moles} = 15 moles$$

Logo, o número de átomos, estimado, em uma geladeira é de:

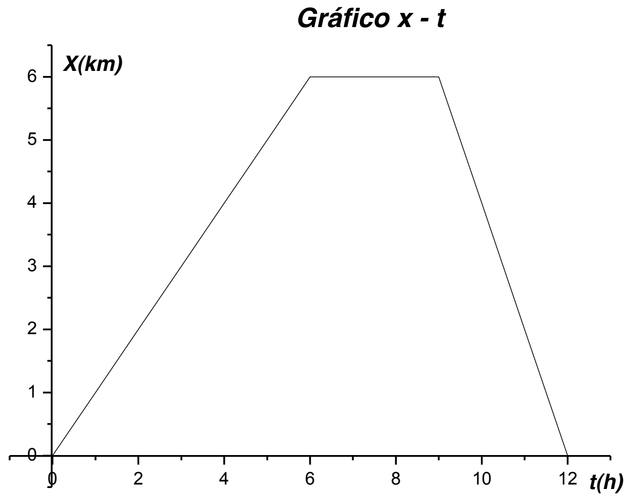
$$n_{átomos} =\ n_{moles} x \frac{n_{átomos}}{mol}$$

$$n_{átomos} =\ 15_{moles} x \frac{6,02x10^{23} átomos}{mol}$$

$$n_{átomos} \sim 9,0x10^{24} átomos$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 02 - Exercícios de Fixação

E2.1)



Na figura acima temos um gráfico de posição em função do tempo para o movimento de um corpo com deslocamento nulo.

Sabemos que a inclinação da reta entre dois pontos de um gráfico de posição em função do tempo é igual a velocidade média. Como neste gráfico temos deslocamento nulo (posição final = posição inicial), se unirmos o ponto inicial ao ponto final por uma reta, esta terá inclinação nula. O que indica que a velocidade média do corpo é nula.

Entretanto, observamos que do instante *0h* ao instante *6h* e do instante *9h* ao instante *12h* o corpo encontra-se em movimento, pois sua posição está variando com o passar do tempo. Logo, o corpo possui velocidade instantânea diferente de zero.

E2.2)

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Para Newton, que viajou de trem, temos:

$$v_{mN} = \frac{\Delta x}{\Delta t_N} \rightarrow \Delta x = v_{mN}\Delta t_N$$

Para Karla, que fez a viagem de avião, temos:

$$v_{mK} = \frac{\Delta x}{\Delta t_K} \rightarrow \Delta x = v_{mK}\Delta t_K$$

Mas o deslocamento de Newton e de Karla é o mesmo, pois os dois realizaram a mesma viagem. Logo:

$$v_{mN}\Delta t_N = v_{mK}\Delta t_K \rightarrow v_{mN}.15{,}3h = v_{mK}.1{,}70h$$

$$v_{mK} = v_{mN}.\frac{15{,}3h}{1{,}70h} \rightarrow v_{mK} = 9 = v_{mN}$$

E2.3)

Realizando a viagem a uma velocidade média de *90km/h*, temos:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\frac{90km}{h} = \frac{\Delta x}{26min} \rightarrow \frac{90km}{60min} = \frac{\Delta x}{26min}$$

$$\frac{3km}{2min}.26min = \Delta x \rightarrow \Delta x = 39km$$

Para realizar a mesma viagem a uma velocidade média de *55km/h* levaríamos um tempo de:

$$\frac{55km}{h} = \frac{39km}{\Delta t} \rightarrow \frac{55km}{60min} = \frac{39km}{\Delta t}$$

$$\Delta t = 39km\,.\frac{60min}{55km} \rightarrow \Delta t \sim 43\ min$$

E2.4)

a) Velocidade de percurso é igual a (distância total percorrida) / (tempo total gasto). Logo,

$$v_p = \frac{(\|100m\| + \|-30m\|)}{\left(\frac{100m}{\frac{6m}{s}} + \frac{(-30m)}{\left(-\frac{4{,}5m}{s}\right)}\right)} \rightarrow v_p = \frac{(130m)}{(16{,}7s + 6{,}7s)}$$

$$v_p = 5{,}6m/s$$

b) Velocidade média é igual a (deslocamento) / (tempo total percurso). Logo,

$$v_m = \frac{\big(100m + (-30m)\big)}{(16{,}7s + 6{,}7s)}$$

$$v_m = \frac{70m}{23{,}4s} \rightarrow v_m = 3{,}0m/s$$

E2.5)

a) $x(t) = \frac{2{,}50m}{s^2}\, t^2 - \frac{0{,}100m}{s^3}\, t^3$
$x(0s) = 0m$; $x(2{,}5s) = 14{,}1m$
$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v_m = \frac{14{,}1m - 0m}{2{,}5s - 0s}$
$v_m = 5{,}6m/s$

b) $x(0s) = 0m$; $x(4{,}5s) = 41{,}5m$
$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v_m = \frac{41{,}5m - 0m}{4{,}5s - 0s}$
$v_m = 9{,}2m/s$

c) $x(2{,}5s) = 14{,}1m$; $x(4{,}5s) = 41{,}5m$
$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v_m = \frac{41{,}5m - 14{,}1m}{4{,}5s - 2{,}5s}$
$v_m = \frac{14m}{s}$

E2.6)

a) A velocidade do caminhão é dada pela derivada de sua posição em relação ao tempo, logo:
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow v(t) = \frac{d\left(\frac{3{,}40m}{s^2}.t^2 - \frac{0{,}200m}{s^3}.t^3\right)}{dt}$$
$$v(t) = \frac{6{,}40m}{s^2}.t - \frac{0{,}60m}{s^3}.t^2$$
A velocidade instantânea do caminhão para os instantes de tempo *0s*, *6,00s* e *10,0s* são as seguintes:
$$v(0) = \frac{0m}{s}$$
$$v(6{,}00) = \frac{16{,}8m}{s}$$
$$v(12{,}0) = -9{,}60m/s$$

b) Para que o caminhão pare novamente é necessário que a velocidade seja nula. Logo, devemos encontrar o instante em que a velocidade será nula, para então utilizar este tempo na função posição do caminhão e verificar em que posição ele pára novamente.
$$v(t) = \frac{6{,}40m}{s^2}.t - \frac{0{,}60m}{s^3}.t^2 \rightarrow \frac{0m}{s} = \frac{6{,}40m}{s^2}.t - \frac{0{,}60m}{s^3}.t^2$$

Resolvendo a equação de segundo grau anterior, temos:

$$-0,60t^2 + 6,40t + 0 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 6,40^2 - 4 \, x \, (-0,60) \, x \, 0$$
$$\Delta = 40,96$$
$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow t_1 = \frac{-6,40 + 6,40}{[2(-0,60)]} \rightarrow t_1 = 0s$$
$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow t_1 = \frac{-6,40 - 6,40}{[2(-0,60)]} \rightarrow t_1 \sim 10,7s$$

Temos então que, para o caminhão parar novamente, são necessários aproximadamente *10,7s*. O caminhão irá parar na posição,

$$x(t) = \frac{3,40m}{s^2}.t^2 - \frac{0,200m}{s^3}.t^3$$
$$x(10,7) = \frac{3,40m}{s^2}.(10,7)^2 - \frac{0,20m}{s^3}.(10,7)^3$$
$$x(10,7) \sim 144m$$

E2.7)

a) A velocidade do professor Celso não foi crescente nem decrescente em nenhuma posição.

b) A velocidade do professor Celso foi constante e positiva desde a posição *0km* até a posição *6,5km*, pois sua posição é descrita no gráfico por uma reta de inclinação positiva e constante. O professor Celso se deslocou com velocidade constante e negativa desde a posição *6,5km* até a posição *0km*, pois sua velocidade foi descrita no gráfico por uma reta de inclinação negativa e constante.

c) A velocidade do professor Celso foi nula na posição *6,5km*, pois, nesta posição, sua posição é descrita por uma reta horizontal (inclinação nula) que indica que o tempo está passando e não há variação de posição, logo sua velocidade é nula.

d) De sua casa até o campus o professor Celso desenvolve uma velocidade média de:

$$v_m = \frac{6,5km - 0km}{7,5minutos - 0minutos} \rightarrow v_m = \frac{6,5km}{\frac{1}{8}h - 0h}$$
$$v_m = 52km/h$$

Já do campus até sua casa, a velocidade média desenvolvida pelo professor Celso é de:

$$v_m = \frac{0km - 6,5km}{14,5minutos - 9,5minutos} \rightarrow v_m = \frac{-6,5km}{5min} \rightarrow v_m = \frac{-6,5km}{\frac{1}{12}h}$$
$$v_m = -78km/h$$

e) A velocidade média do professor Celso no percurso total é dada por:

$$v_m = \frac{0km - 0km}{14{,}5minutos - 0minutos} \rightarrow v_m = \frac{0km}{14{,}5min}$$

$$v_m = 0km/h$$

O resultado anterior (velocidade média nula) já era esperado, pois, o deslocamento do professor Celso é nulo. Logo, sua velocidade média também deve ser nula.

E3.1)

a) Como a aceleração é constante, podemos escrever:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}$$

Utilizando este resultado na equação seguinte, temos:

$$d = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$d = v_0 t + \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)} . \frac{t^2}{2}$$

$$50m = v_0 x 3{,}5s + \frac{\frac{32m}{s} - v_0}{3{,}5s - 0s} . \frac{(3{,}5s)^2}{2}$$

$$50m = 3{,}5v_0 . s + \frac{\frac{32m}{s} - v_0}{3{,}5s} . \frac{(3{,}5s)^2}{2}$$

$$50m = 3{,}5v_0 . s + \frac{16m}{s} . 3{,}5s - 0{,}5v_0 . 3{,}5s$$

$$50m = 3{,}5v_0 . s - 1{,}75v_0 . s + 56m \rightarrow 50m - 56m = 1{,}75v_0 . s$$

$$-\frac{6m}{1{,}75s} = v_0 \rightarrow v_0 = -\frac{3{,}43m}{s}$$

b) Agora que já sabemos o valor da velocidade inicial, podemos calcular o valor da aceleração.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)} \rightarrow a = \frac{\frac{32m}{s} - \left(-\frac{3{,}43m}{s}\right)}{3{,}5s - 0s}$$

$$a = \frac{\frac{35{,}43m}{s}}{3{,}5s} \rightarrow a = \frac{10{,}1m}{s^2}$$

E3.2) Podemos considerar o movimento do ônibus como constituído por três partes. A primeira parte do movimento compreende o intervalo de tempo de *0s* a *10s*, onde o movimento do ônibus é acelerado. A segunda parte do movimento, que dura 30s, é a parte em que o ônibus mantém velocidade constante. E a ultima parte do movimento, é a parte em que o movimento é retardado, o ônibus está parando. A distancia total percorrida pelo ônibus é a soma das distâncias percorridas nos três trechos do movimento. Logo, temos que:

$$d_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2} \rightarrow d_1 = \frac{0m}{s} . 10s + \frac{\frac{2{,}20m}{s^2} . (10s)^2}{2}$$

$$d_1 = 110m$$

Para calcular a distancia percorrida no trecho 2, devemos saber qual o valor da velocidade no instante de tempo *10s*. Logo,

$$v = v_0 + at \rightarrow v = \frac{0m}{s} + \frac{2{,}20m}{s^2} . 10s$$

$v = 22m/s$

$d_2 = vt \rightarrow d_2 = \frac{22m}{s}.30s$

$d_2 = 660m$

Para calcular a distancia percorrida no trecho 3, iremos utilizar novamente uma equação do movimento acelerado. Entretanto, devemos considerar que a velocidade inicial ($22m/s$) com que o ônibus inicia a frenagem não é nula mais, e também não podemos esquecer que na frenagem a aceleração possui valor negativo (está em sentido contrário a velocidade e a velocidade é positiva). Logo,

$$v^2 = v_0^2 + 2ad_3 \rightarrow d_3 = \frac{(v^2 - v_0^2)}{2a}$$

$$d_3 = \frac{(0^2 - (22m/s)^2)}{2.(-\frac{3{,}00m}{s^2})}$$

$d_3 = 81m$

A distancia total é dada por:

$d_t = d_1 + d_2 + d_3$

$d_t = 110m + 660m + 81m$

$d_t = 851m$

E3.3)

a) A aceleração média da bicicleta é dada por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}$$

temos que:

$$v(0s) = \frac{2{,}50m}{s^2}.0s + \frac{0{,}200m}{s^3}.(0s)^2 \rightarrow v(0s) = \frac{0m}{s}$$

$$v(5{,}00s) = \frac{2{,}50m}{s^2}.5{,}00s + \frac{0{,}200m}{s^3}.(5{,}00s)^2 \rightarrow v(5{,}00s) = \frac{17{,}5m}{s}$$

Logo, a aceleração média será:

$$a = \frac{\frac{17{,}5m}{s} - \frac{0m}{s}}{5{,}00s - 0s} \rightarrow a = \frac{\frac{17{,}5m}{s}}{5{,}00s}$$

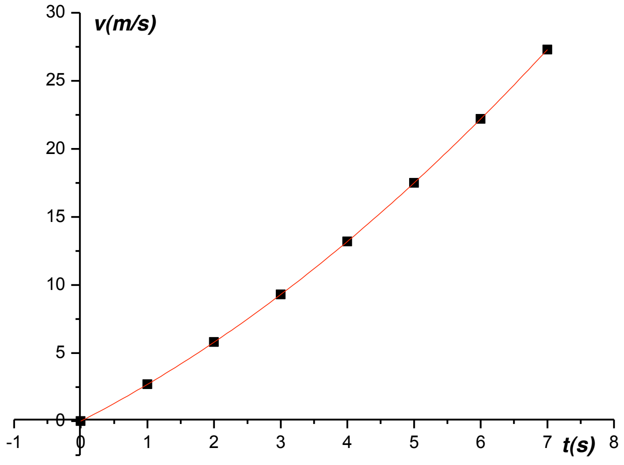
$a = 3{,}5m/s^2$

b)

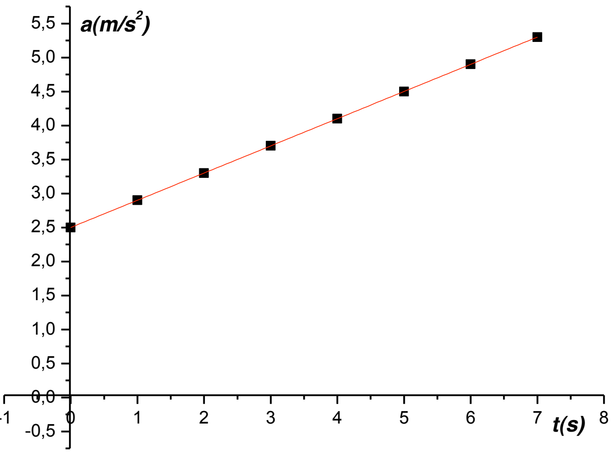
$$v(0s) = \frac{2{,}50m}{s^2}.0s + \frac{0{,}200m}{s^3}.(0s)^2 \rightarrow v(0s) = \frac{0m}{s}$$

$$v(2{,}00s) = \frac{2{,}50m}{s^2}.2{,}00s + \frac{0{,}200m}{s^3}.(2{,}00s)^2 \rightarrow v(2{,}00s) = \frac{5{,}8m}{s}$$

c) Abaixo encontra-se o gráfico da velocidade em função do tempo, para os 7 primeiros segundos de movimento da bicicleta.



O próximo gráfico representa a aceleração da bicicleta para o mesmo intervalo de tempo considerado anteriormente.



E3.4)

a) A partir do gráfico podemos ver que:

$$v(0min) = \frac{0km}{h} \;\; ; \;\; v(0{,}5\text{min}) = \frac{25km}{h}$$

Logo, a aceleração média no intervalo de 0 a $0{,}5min$ é dada por:

$$a = \frac{\left(\frac{25km}{h} - \frac{0km}{h}\right)}{0{,}5min - 0min} \rightarrow a = \frac{\frac{25km}{h}}{0{,}5min}$$

$$a = \frac{50km}{h}/min$$

b) A partir do gráfico podemos ver que:

$$v(3{,}0min) = \frac{50km}{h} \ ; \ v(6{,}0\text{min}) = \frac{50km}{h}$$

Logo, a aceleração média no intervalo de $3{,}0$ a $6{,}0min$ é dada por:

$$a = \frac{\left(\frac{50km}{h} - \frac{50km}{h}\right)}{6{,}0min - 3{,}0min} \rightarrow a = \frac{\frac{0km}{h}}{3{,}0min}$$

$$a = \frac{0km}{h}/min$$

Este resultado já era esperado uma vez que a velocidade é constante.

c) A partir do gráfico podemos ver que:

$$v(0min) = \frac{0km}{h} \ ; \ v(10{,}5\text{min}) = \frac{0km}{h}$$

Logo, a aceleração média no intervalo de 0 a 1$0{,}5min$ é dada por:

$$a = \frac{\left(\frac{0km}{h} - \frac{0km}{h}\right)}{10{,}5min - 0min} \rightarrow a = \frac{\frac{0km}{h}}{10{,}5min}$$

$$a = \frac{0km}{h}/min$$

Este resultado também já era esperado, pois, ao considerarmos o intervalo de tempo total a variação da velocidade é nula.

d) O deslocamento do metrô é obtido através da área do gráfico. Calculando a área do gráfico (trapézio), temos:

$$d = \frac{10{,}5min + 8{,}5min}{2} . \frac{50km}{h} \rightarrow d = 9{,}5min. 50km/h$$

$$d = \frac{9{,}5}{60} h . \frac{50km}{h} \rightarrow d = 7{,}9km$$

E3.5) Como a aceleração é constante, podemos escrever:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}$$

Utilizando este resultado na equação seguinte, temos:

$$d = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$d = v_0 t + \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)} . \frac{t^2}{2}$$

$$290m = \frac{0m}{s}x9{,}0s + \frac{v - \frac{0m}{s}}{9{,}0s - 0s}.\frac{(9{,}0s)^2}{2} \rightarrow 290m = \frac{v}{9{,}0s}.\frac{(9{,}0s)^2}{2}$$

$$580m = 9{,}0s.v \rightarrow \frac{580m}{9{,}0s} = v$$

$$v = 64m/s$$

E3.6)

a) Neste exercício temos um gráfico de posição em função do tempo para o movimento de um automóvel. A aceleração instantânea do automóvel é dada pela segunda derivada de sua posição em relação ao tempo. Logo, para encontrarmos sua aceleração instantânea precisamos primeiramente obter a função que representa sua posição em função do tempo. E em seguida, derivá-la duas vezes, em relação ao tempo, para encontrarmos a função que representa sua aceleração.

A posição do automóvel, em relação ao tempo, é descrita por uma parábola. Logo, sua posição é descrita por uma função do tipo $x(t) = at^2+bt+c$. Como no instante $t = 0s$ temos $x = 0m$ concluímos que a constante c da equação acima possui valor nulo. Observando o gráfico podemos ver que:

$x(1s) = 25m$
$x(2s) = 40m$
$x(3s) = 45m$

Temos então que:

$$x(1s) = a(1)^2 + b1 + 0 = 25m \rightarrow a + b = 25m$$
$$x(2s) = a(2)^2 + b2 + 0 = 40m \rightarrow 4a + 2b = 40m$$
$$x(1s) = a(3)^2 + b3 + 0 = 45m \rightarrow 9a + 3b = 45m$$

Iremos escolher duas equações, das três acima, para resolver o sistema encontrar o valor das constantes a e b.

Obs.: a unidade de medida do tempo foi omitida nas três equações anteriores.

$$a + b = 25\,;\ (-2)$$
$$\rightarrow -2a - 2b = -50$$
$$4a + 2b = 40$$
$$\rightarrow 2a = -10 \rightarrow a = -5m/s^2$$
$$a + b = 25 \rightarrow -5 + b = 25$$
$$\rightarrow b = 30m/s$$

Derivando a função posição, $x(t) = at^2+bt+c$, em relação ao tempo, temos:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(at^2 + bt + c)}{dt} = v(t)$$
$$v(t) = 2at + b$$

Derivando mais uma vez em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d^2x(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(2at + b)}{dt} = a(t)$$
$$a(t) = 2a$$

A aceleração instantânea para $t = 4{,}0s$ é dada por:

$$a(4{,}0s) = 2\left(-\frac{5m}{s^2}\right)$$
$$a(4{,}0s) = -\frac{10m}{s^2}$$

b) Como podemos observar no item anterior, letra a, a aceleração para o movimento do automóvel possui valor constante e negativo. Logo, durante todo o intervalo de tempo do movimento ($0s$ a $6s$) a aceleração foi constate e igual a $-10m/s^2$.

c) Para $t = 0s$, temos:

$x(t) = at^2 + bt$

$x(0s) = -\frac{5m}{s^2}(0s)^2 + \frac{30m}{s}0s = 0m$

$v(t) = 2at + b$

$v(0s) = 2\left(-\frac{5m}{s^2}\right)0s + \frac{30m}{s} = \frac{30m}{s}$

$a(t) = 2a$

$a(4{,}0s) = 2\left(-\frac{5m}{s^2}\right) = -\frac{10m}{s^2}$

Para $t = 3{,}0s$, temos:

$x(3{,}0s) = -\frac{5m}{s^2}(3{,}0s)^2 + \frac{30m}{s}3{,}0s = 45m$

$v(3{,}0s) = 2\left(-\frac{5m}{s^2}\right)3{,}0s + \frac{30m}{s} = \frac{0m}{s}$

$a(4{,}0s) = 2\left(-\frac{5m}{s^2}\right) = -\frac{10m}{s^2}$

Para $t = 6{,}0s$, temos:

$x(6{,}0s) = -\frac{5m}{s^2}(6{,}0s)^2 + \frac{30m}{s}6{,}0s = 0m$

$v(3{,}0s) = 2\left(-\frac{5m}{s^2}\right)6{,}0s + \frac{30m}{s} = -\frac{30m}{s}$

$a(4{,}0s) = 2\left(-\frac{5m}{s^2}\right) = -\frac{10m}{s^2}$

E3.7)

a) Assim como feito no exercício anterior, devemos encontrar a função de 2º grau ($x(t) = at^2+bt+c$) que descreve a posição do helicóptero em função do tempo. Com tal função podemos determinar a velocidade instantânea e a aceleração instantânea do helicóptero para qualquer instante de tempo.
Observando o gráfico concluímos que a constante $c = 10$, pois quando temos $t = 0s$ temos $x = 10m$. Podemos ver também através do gráfico que:

$x(2s) = 6m$

$x(4s) = 6m$

Temos então que:

$x(2s) = a(2)^2 + b2 + 10 = 6 \rightarrow 4a + 2b = -4$

$x(4s) = a(4)^2 + b4 + 10 = 6 \rightarrow 16a + 4b = -4$

Resolvendo o sistema, para encontrarmos os valores das constantes a e b, temos:

$4a + 2b = -4\ ;\ (-2)$

$\rightarrow -8a - 4b = 8$

$16a + 4b = -4$

$8a = 4 \rightarrow a = \frac{0{,}5m}{s^2}$

$4a + 2b = -4 \rightarrow 4\ x\ 0{,}5 + 2b = -4$

$\rightarrow b = -\frac{3m}{s}$

Então a posição do helicóptero em função do tempo é dada por:

$x(t) = 0{,}5\frac{m}{s^2}t^2 - \frac{3m}{s}t + 10m$

A velocidade do helicóptero é dada por:

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow v(t) = \frac{d\left(\frac{t^2}{2} - 3t + 10\right)}{dt}$

$v(t) = \frac{1m}{s^2}t - \frac{3m}{s}$

A aceleração do helicóptero é dada por:

$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(t-3)}{dt}$

$a(t) = \frac{1m}{s^2}$

Agora que já conhecemos as funções que descrevem a posição, a velocidade e a aceleração do helicóptero em função do tempo, podemos determinar a posição, a velocidade e a aceleração do helicóptero em qualquer instante de tempo. Para *t=5s*, temos:

$x(5s) = 0{,}5\frac{m}{s^2}(5s)^2 - \frac{3m}{s}5s + 10m$

$x(5s) = 7{,}5m$

$v(5s) = \frac{1m}{s^2}5s - \frac{3m}{s}$

$v(5s) = \frac{2m}{s}$

$a(5s) = \frac{1m}{s^2}$

Para *t = 15s*, temos:

$x(15s) = 0{,}5\frac{m}{s^2}(15s)^2 - \frac{3m}{s}15s + 10m$

$x(15s) = 78m$

$v(15s) = \frac{1m}{s^2}15s - \frac{3m}{s}$

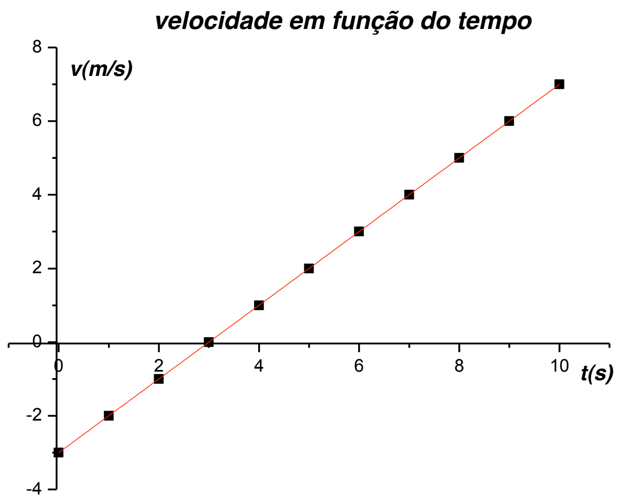
$v(15s) = \frac{12m}{s}$

$a(5s) = \frac{1m}{s^2}$

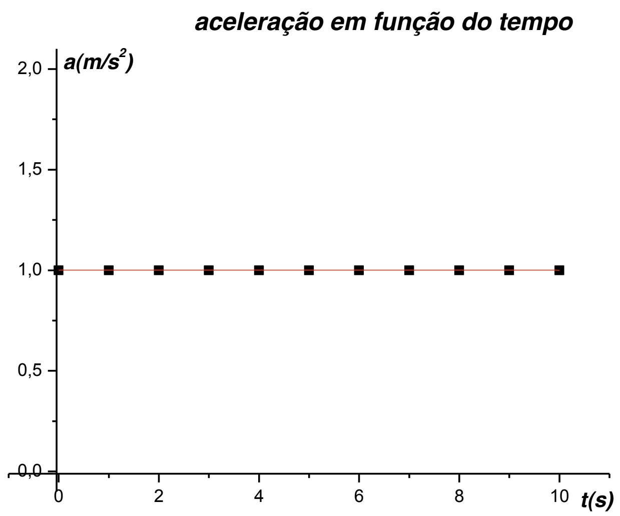
Para *t = 30s*, temos:

$$x(30s) = 0{,}5\frac{m}{s^2}(30s)^2 - \frac{3m}{s}30s + 10m$$
$$x(5s) = 3{,}7x10^2 m$$
$$v(30s) = \frac{1m}{s^2}30s - \frac{3m}{s}$$
$$v(5s) = \frac{27m}{s}$$
$$a(5s) = \frac{1m}{s^2}$$

b) Abaixo encontra-se o gráfico de velocidade em função do tempo para os primeiros *10s* de movimento do helicóptero.



A seguir está o gráfico de aceleração em função do tempo para os primeiros *10s* de movimento do helicóptero.



E3.8)

a) Podemos observar a partir do gráfico que de *t =0s* a *t =5s* não há variação na velocidade, logo a aceleração é nula durante todo este intervalo. Para *t = 4s*, temos então que a aceleração instantânea possui valor nulo.

No intervalo de *t = 5s* a *t = 9s*, a variação de velocidade é constante. Logo, a aceleração possui valor constante em todo este intervalo e, sendo assim, a aceleração instantânea é igual à aceleração média do intervalo. Calculando a aceleração média, para este intervalo, temos,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$a = \frac{-\frac{5m}{s} - \left(\frac{5m}{s}\right)}{9s - 5s} \rightarrow a = -\frac{\frac{10m}{s}}{4s}$$

$$a = -\frac{2{,}5m}{s^2}$$

Conclui-se então que a aceleração instantânea para *t = 6s* é igual a *-2,5m/s²*.

No intervalo de *t = 15s* a *t = 20s*, a variação de velocidade é constante. Logo, a aceleração também possui valor constante em todo este intervalo e, sendo assim, a aceleração instantânea é igual à aceleração média do intervalo. Calculando a aceleração média, para este intervalo, temos,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$a = \frac{\frac{2{,}5m}{s} - \left(-\frac{5m}{s}\right)}{20s - 15s} \rightarrow a = \frac{\frac{7{,}5m}{s}}{5s}$$

$$a = \frac{1{,}5m}{s^2}$$

Conclui-se então que a aceleração instantânea para *t = 18s* é igual a *1,5m/s²*.

b) A aceleração média para o intervalo de tempo de *t = 3s* a *t = 4s* é dada por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$a = \frac{\frac{5m}{s} - \frac{5m}{s}}{4s - 3s} \rightarrow a = \frac{\frac{0m}{s}}{1s}$$

$$a = \frac{0m}{s^2}$$

A aceleração média para o intervalo de tempo de *t = 7s* a *t = 8s* é dada por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$a = \frac{-\frac{2{,}5m}{s} - \frac{0m}{s}}{8s - 7s} \rightarrow a = \frac{-\frac{2{,}5m}{s}}{1s}$$

$$a = -\frac{2{,}5m}{s^2}$$

A aceleração média para o intervalo de tempo de $t = 16s$ a $t = 18s$ é dada por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$a = \frac{-\frac{0{,}5m}{s} - \left(-\frac{3{,}5m}{s}\right)}{18s - 16s} \rightarrow a = \frac{\frac{3{,}0m}{s}}{2s}$$

$$a = \frac{1{,}5m}{s^2}$$

c) O deslocamento do triciclo pode ser obtido a partir da área do gráfico de velocidade em função do tempo. O deslocamento nos primeiros seis segundos de movimento é dado pela área do intervalo de $0s$ a $6s$, então temos que:

$$x = área_{quadrado} + área_{trapézio}$$

$$x = 5s\, x \frac{5m}{s} + 1s\, x \left(\frac{\frac{5m}{s} + \frac{2{,}5m}{s}}{2}\right)$$

$$x = 25m + 3{,}8m \rightarrow x \sim 29m$$

O deslocamento nos primeiros doze segundos de movimento é dado pela área do intervalo de $0s$ a $7s$ mais a área do intervalo de $7s$ a $12s$, lembrando que a área do intervalo de $7s$ a $12s$ é "negativa" (pois a velocidade é negativa), logo temos que:

$$x = área_{trapézio} + área_{trapézio}$$

$$x = \left(\frac{7s + 5s}{2}\right) x \frac{5m}{s} + \left(\frac{5s + 3s}{2}\right) x \left(-\frac{5m}{s}\right)$$

$$x = 30m - 20m \rightarrow x = 10m$$

O deslocamento nos primeiros vinte segundos de movimento é dado pela soma da área do intervalo de $0s$ a $7s$, mais a área do intervalo de $7s$ a $18{,}3s$ (área "negativa) mais a área do intervalo de $18{,}3s$ a $20s$. Assim, temos que:

$$x = área_{trapézio} + área_{trapézio} + área_{triangulo}$$

$$x = \left(\frac{7s + 5s}{2}\right) x \frac{5m}{s} + \left(\frac{9{,}3s + 6s}{2}\right) x \left(-\frac{5m}{s}\right) + \frac{2s\, x \frac{2{,}5m}{s}}{2}$$

$$x = 30m - 38{,}3m + 2{,}5m \rightarrow x = -5{,}8m$$

A distância total percorrida é dada pela soma dos módulos dos deslocamentos dos três trechos do gráfico, logo:

$$d = |30m| + |-38{,}3m| + |2{,}5m|$$

$$d \sim 71m$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 04 - Exercícios de Fixação

E4.1)

Estimando que as nuvens encontram-se a *5km* acima da superfície, aproximadamente, e considerando que as gotas iniciam o movimento de queda a partir do repouso, temos, para o movimento de queda das gotas de chuva, que:

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

$$5\ x\ 10^3 m = \frac{0m}{s} t + \frac{\frac{10m}{s^2} t^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\ x\ 5\ x 10^3 m}{\frac{10m}{s^2}}}$$

$$t = \sqrt{1{,}0\ x\ 10^3 s^2} \rightarrow t \sim 32s$$

Temos então que o tempo de queda das gotas de chuva, desconsiderando a resistência do ar, é de aproximadamente *32s*. Logo, a velocidade final de queda das gotas, nesta situação, é de:

$$v = v_0 + gt$$

$$v = \frac{0m}{s} + \frac{10m}{s^2}\ x\ 32s \rightarrow v \sim 3{,}2\ x \frac{10^2 m}{s}$$

Como pode ser visto, a partir do resultado obtido acima, a resistência do ar não pode ser desprezada no movimento de queda das gotas de chuva. Pois o resultado obtido para a velocidade final de queda das gotas, desconsiderando a resistência do ar, é visivelmente distante do que é observado na realidade.

E4.2)

a) Como o bloco "se desprendeu do alto de um edifício" sua velocidade inicial é nula. Como, neste caso, podemos desprezar a resistência do ar sobre o movimento do bloco, temos que sua velocidade final (quando toca o solo) é dada por:

$$v = v_0 + gt$$

$$v = \frac{0m}{s} - \frac{10m}{s^2} x 2{,}35s$$

$$v = -\frac{23{,}5m}{s}$$

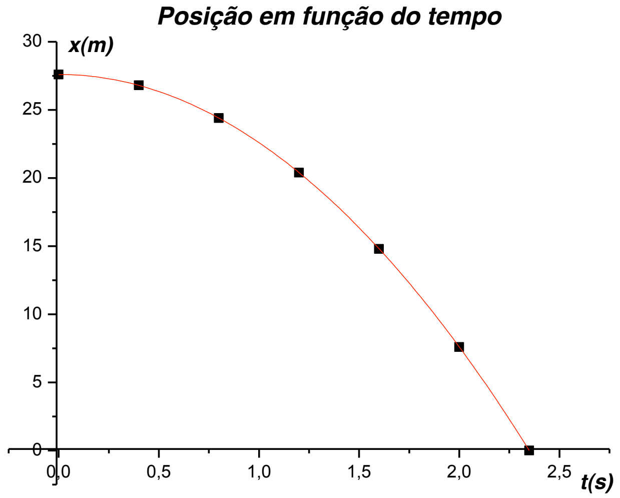
b) Para determinar a altura (*h*) do edifício iremos utilizar a *Equação de Torricelli*. Logo, temos que:

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

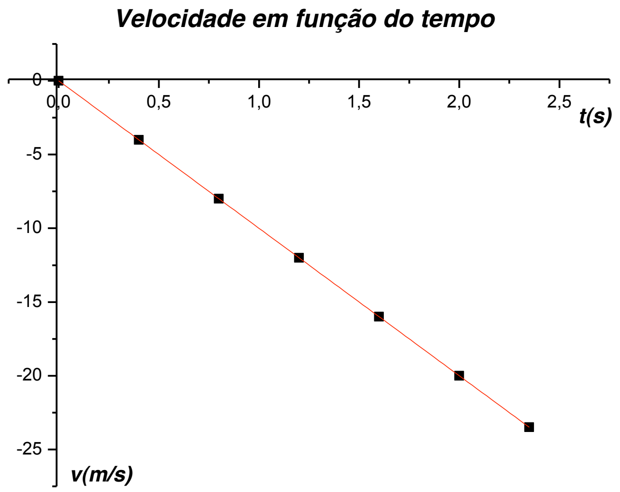
$$\rightarrow h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}$$

$$h = \frac{\left(-\frac{23{,}5m}{s}\right)^2 - \left(\frac{0m}{s}\right)^2}{2\left(-\frac{10m}{s^2}\right)} \rightarrow h = |-27{,}6m|$$

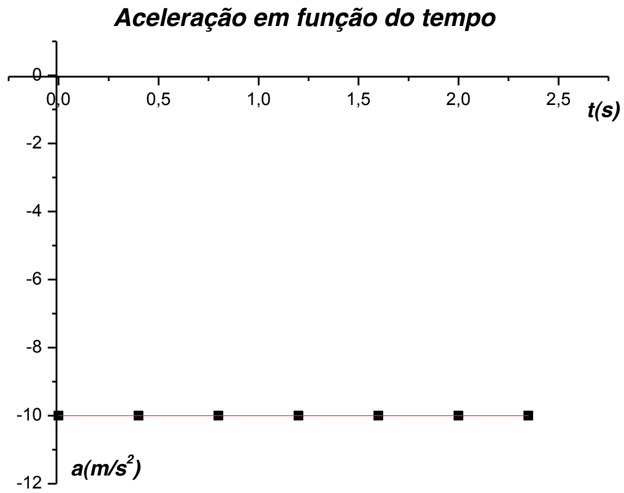
c) Abaixo encontra-se o gráfico de posição em função do tempo para o movimento do bloco.



A seguir temos o gráfico de velocidade em função do tempo para o movimento do bloco.



O próximo gráfico representa a aceleração do bloco em função do tempo.



E4.3)

a) Vamos utilizar a *Equação de Torricelli* para analisar esta situação, temos que:
$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$
$$\rightarrow h = \frac{v^2 - v_0^2}{-2g}$$
mas como no ponto mais alto (altura máxima), temos *V = 0m/s*, temos que a altura (*h*) é dada por,
$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$
Supondo que Maxwell salte com a mesma velocidade inicial nas duas situações, temos que a altura atingida por ele será inversamente proporcional a aceleração da gravidade. Na Terra, Maxwell consegue saltar a uma altura de *0,80m*, se ele for para um local onde a aceleração da gravidade local é dez vezes menor, pelo raciocínio anterior, concluímos que ele poderá saltar dez vezes mais alto. Logo, a altura atingida por Maxwell neste local será de *8,0m*.

b) Através do mesmo raciocínio desenvolvido no item anterior, concluímos que a altura em que Maxwell arremessará a bola será dez vezes maior. Logo, a altura atingida pela bola é de *150m*.

E4.4)

a) Utilizando a *Equação de Torricelli* para analisar o movimento da bala, e lembrando que no ponto mais alto atingido pela ela (altura máxima) temos *V=0m/s*, conclui-se que a altura máxima é dada por:
$$v^2 = v_0^2 + 2gh \rightarrow h = \frac{v^2 - v_0^2}{-2g}$$
$$h = \frac{\left(\frac{0m}{s}\right)^2 - \left(\frac{95m}{s}\right)^2}{-\frac{2x10m}{s^2}}$$
$$h = 4{,}5\ x\ 10^2 m$$

b) Temos que, $v = v_0 + gt$, logo:

$$t = \frac{v - v_0}{g}$$

Lembrando que para altura máxima temos $v = 0m/s$, temos,

$$t = \frac{\frac{0m}{s} - \frac{95m}{s}}{-\frac{10m}{s^2}}$$

$$t = 9{,}5s$$

c) Utilizando a equação $v = v_0 + gt$, temos que:

$$t = \frac{v - v_0}{g}$$

Mas, neste caso, temos $v = 30{,}0m/s$, logo,

$$t = \frac{\frac{30{,}0m}{s} - \frac{95m}{s}}{-\frac{10m}{s^2}}$$

$$t = 6{,}5s$$

d) Utilizando a equação $v = v_0 + gt$, temos que:

$$t = \frac{v - v_0}{g}$$

Mas, neste caso, temos $v = -30{,}0m/s$, logo,

$$t = \frac{-\frac{30{,}0m}{s} - \frac{95m}{s}}{-\frac{10m}{s^2}}$$

$$t = 12{,}5s$$

E4.5)

Supondo que a régua, solta por seu colega, percorra uma distância de $5cm$ até que você a segure, temos que:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

Mas y_0, posição inicial, e v_0, velocidade inicial, possuem valores nulos. y é a distância percorrida pela régua, logo,

$$-0{,}05m = 0m + \frac{0m}{s} + \frac{-\frac{10m}{s^2}t^2}{2}$$

$$\frac{5x10^{-2}m}{\frac{5m}{s^2}} = t^2$$

$$t = \sqrt{1x10^{-2}s^2}$$

$$t = 1x10^{-1}s = 0{,}1s$$

Temos então que o tempo de reação, para estes dados, é de $0{,}1s$.

Obs.: Em todos os exercícios desta aula foi utilizado o valor de $10m/s^2$ para a aceleração da gravidade com o objetivo de facilitar os cálculos, apesar do valor correto ser de $9,8m/s^2$.

Fund. Física I - Gabarito Aula 06 - Exercícios de Fixação

E6.1
Adotaremos como positivo o sentido da esquerda para a direita, temos os seguintes dados:

Velocidade do trem A em relação ao solo (estação de trem) $V_{SA} = +50 km/h$

Velocidade carro policial em relação ao solo $V_{SP} = +70 km/h$

Velocidade de Osama em relação ao trem A $V_{AO} = -3{,}0 m/s = -10{,}8 km/h$
(o sinal negativo indica que Osama está se movendo para a esquerda no referencial do trem)
Definição de velocidade relativa:

Se as velocidades dos corpos A e B em um refencial R são respectivamente V_{RA} e V_{RB}, então a velocidade de A em relação à B é: $V_{BA} = V_{RA} - V_{RB}$.
(Obs: deve-se sempre levar em consideração o sinal da velocidadepois este determinará o sentido do movimente)

a) Aplicando a definição de velocidade relativa acima temos:

$$V_{AO} = V_{SO} - V_{SA}$$

$$-10{,}8 km/h = V_{SO} - (+50 km/h)$$

$$V_{SO} = (50 - 10{,}8) km/h = +39{,}2 km/h$$

b) A velocidade de Osama em relação ao carro policial é:

$$V_{PO} = V_{SO} - V_{SP}$$

$$V_{PO} = +39{,}2 km/h - (+70 km/h)$$

$$V_{PO} = -30{,}8 km/h$$

c) A velocidade da viatura policial em relação ao trem é:

$$V_{AP} = V_{SP} - V_{SA}$$

$$V_{AP} = +70 km/h - (+50 km/h)$$

$$V_{PO} = +20 km/h$$

E6.2
Dados:

Velocidade de Osama em relação ao trem A: $V_{AO} = -3{,}5 m/s = -12{,}6 km/h$.

O trem B que se aproxima de A possui, em relação ao solo, uma velocidade de: $V_{SB} = -60 km/h$.

A velocidade da viatura policial em relação ao trem A: $V_{AP} = +90 km/h$

Como a velocidade do trem A não mudou temos: $V_{SA} = +50 km/h$
Resolução:
a) Os passageiros que estão sentados possuirão a mesma velocidade de seus respectivos trens, portanto a velocidade de um passageiro em A em relação à outro situado em B será:

$V_{BA} = V_{SA} - V_{SB}$

$V_{AP} = +50 km/h - (-60 km/h)$

$V_{BA} = +110 km/h$

b) Conhecemos a velocidade de Osama no referencial de A e também a velocidade de B no referencial de A $V_{BA} = -V_{AB} = +110 km/h$. Logo a velocidade de Osama em relação à B será:

$$V_{BO} = V_{AO} - V_{AB} = V_{AO} - (-V_{BA})$$

$$V_{BO} = -12{,}6 km/h - (-110 km/h)$$

$$V_{BO} = +97{,}4 km/h$$

c) A velocidade da viatura em relação à B será:

$$V_{BP} = V_{AP} - V_{AB} = V_{AP} - (-V_{BA})$$

$$V_{BO} = +90 km/h - (-110 km/h)$$

$$V_{BO} = +200 km/h$$

E6.3
Dados:
Velocidade do motoqueiro em relação ao solo: $V_{SM} = +86 km/h$.
Velocidade do trem em relação ao solo: $V_{ST} = +65 km/h$.
a) A velocidade do motoqueiro em relação ao trem é dada por:

$$V_{TM} = V_{SM} - V_{ST}$$

$$V_{TM} = +86 km/h - (-65 km/h)$$

$$V_{BO} = +21 km/h$$

b) Em relação ao trem a distância que o motoqueiro percorre em 1 minuto(1h/60) é:

$$D = V_{TM} * t = 21 km/h * \frac{1}{60} h = 0{,}35 km$$

$$D = 350 m$$

Portanto o motoqueiro consegue escapar.

E6.4
Dados:
Velocidade do vagão V em relação ao solo $V_{SV} = +45 km/h$.
Se V_{SG} é a velocidade do garoto em relação ao solo, então sua velocidade em relação ao vagão será dada por $V_{VG} = V_{GS} - V_{SV}$.
a) $V_{SG} = 0$ logo

$V_{VG} = V_{SG} - V_{SV} = 0 - (+45 km/h) = -45 km/h$ (o sinal indica que o garoto move-se para a esquerda).

b) $V_{SG} = +23 m/s = +82{,}8 km/h$ logo a velocidade do garoto em relação ao vagão será:

$V_{VG} = 82{,}8 km/h - (+45 km/h) = +37{,}8 km/h$

c) $V_{SG} = -10 m/s = -36 km/h$ nessa situação a velocidade relativa será:

$V_{VG} = -36 km/h - (+45 km/h) = -81 km/h$.

E6.5

Dados:

$$a(t) = \alpha \cdot t - \beta \cdot t^2$$

$$\beta = 0{,}100 m/s^4$$

$$\alpha = 1{,}00 m/s^3$$

Em t = 0 o caminhão se encontra na posição x = 0.

a) A velocidade é dada por:

$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt$, onde v_0 é a velocidade inicial do caminhão. Resolvendo a integral obtemos:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t (\alpha \cdot t - \beta \cdot t^2)dt$$

$$v(t) = v_0 + \frac{\alpha \cdot t^2}{2} - \frac{\beta \cdot t^3}{3}$$

Integrando v(t) obtemos a função x(t) que descreve a posição do caminhão.

$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt$, como $x_0 = 0$ temos:

$$x(t) = 0 + \int_0^t \left(v_0 + \frac{\alpha \cdot t^2}{2} - \frac{\beta \cdot t^3}{3} \right) dt$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{\alpha \cdot t^3}{6} - \frac{\beta \cdot t^4}{12}$$

b) O valor máximo da velocidade ocorrerá no ponto em que sua derivada (que é a aceleração) for nula, logo:

$a(t) = \alpha \cdot t - \beta \cdot t^2 = t(\alpha - \beta \cdot t) = 0$, temos como solução dessa equação os seguintes instantes de tempo: t= 0 e $t = \frac{\alpha}{\beta}$. Como t = 0 não é a solucção desejada temos que:

$$v_{máxima} = v(\frac{\alpha}{\beta}) = v_0 + \frac{\alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}{2} - \frac{\beta \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3}{3} = \frac{\alpha^3}{2\beta^2} - \frac{\alpha^3}{3\beta^2}$$

$$v_{máxima} = \frac{\alpha^3}{6\beta^2}$$

Fund. Física I - Gabarito Unidade 02 - Problemas

P2.1

A velocidade escalar média do percurso é dada por $V_M = \dfrac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2}$ (1)

onde d_1 e t_1, são respectivamente as distâncias e tempos associados à 1ª etapa do percurso e d_2 e t_2 os valores associados à 2ª etapa do percurso. Tem-se ainda que :

a velocidade média na 1ª etapa do percurso é $v_1 = \dfrac{d_1}{t_1}$ (2)

e na 2ª etapa $v_{21} = \dfrac{d_2}{t_2}$ (3)

Substituindo (2) e (3) em (1) temos que velocidade média é dada por:

$$V_M = \frac{d_1 + d_2}{\left(\dfrac{d_1}{v_1} + \dfrac{d_2}{v_2}\right)} \quad (4).$$

Dados:

$$d_1 = d_2 = 100m$$
$$v_1 = 11{,}5m/s$$

Deseja-se qual o valor de v_2. Da equação (4) temos:

$$V_M = \frac{d_1 + d_2}{\left(\dfrac{d_1}{v_1} + \dfrac{d_2}{v_2}\right)} \Rightarrow \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} = \frac{d_1 + d_2}{V_M}$$

$$\frac{d_2}{v_2} = \left(\frac{d_1 + d_2}{V_M} - \frac{d_1}{v_1}\right)$$

$$v_2 = \frac{d_2}{\left(\dfrac{d_1 + d_2}{V_M} - \dfrac{d_1}{v_1}\right)}$$

a) Se $V_M = 6{,}5m/s$ então temos:

$$v_2 = \frac{100m}{\left(\dfrac{100m + 100m}{6{,}5m/s} - \dfrac{100m}{11{,}5m/s}\right)}$$

$$v_2 = \frac{100m}{\left(\dfrac{200m}{6{,}5m/s} - \dfrac{100m}{11{,}5}\right)} = 4{,}5m/s$$

b) Se $V_M = 19{,}0m/s$ então temos:

$$v_2 = \frac{100m}{\left(\frac{100m+100m}{19{,}0m/s} - \frac{100m}{11{,}5m/s}\right)}$$

$$v_2 = \frac{100m}{\left(\frac{200m}{19{,}0m/s} - \frac{100m}{11{,}5}\right)} = 54{,}6m/s$$

$v_2 \approx 197\,km/h$ que é um valor impossível para um atleta.

P2.2

Dados:

$$x(t) = A\cdot t^3 - B\cdot t^2 + C\cdot t$$

$$A = 2{,}40m/s^3$$

$$B = 8{,}00m/s^2$$

$$C = 7{,}20m/s$$

a) A velocidade do corpo é :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3A\cdot t^2 - 2B\cdot t + C$$

sua aceleração é:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6A\cdot t - 2B$$

P2.3
Dados:

Velocidade da moto em relação ao solo $v_m = 75{,}0km/h = 20{,}8m/s$.

Velocidade da viatura $v_v = 62{,}0km/h = 17{,}2m/s$.

Aceleração da viatura $a_v = 0{,}755m/s^2$.

Distância entre a moto e a viatura antes da ultrapassagem $d_i = 31{,}0m$.

Comprimento da moto $c_m = 2{,}4m$.

Comprimento da viatura $c_v = 4{,}3m$.

Distância entre a moto e a viatura após a ultrapassagem $d_i = 15{,}0m$

a) Tomando como referência um ponto P na traseira do carro e um ponto Q na parte dianteira da moto, e considerando o movimento da viatura em relação à moto temos:

Posição inicial da viatura(ponto P em relação à Q) $x_0 = (-31{,}0 - 4{,}3 - 2{,}4)m = -36{,}7m$.

Posição final da viatura (após a ultrapassagem) $x_f = 15m$.

Velocidade inicial da viatura $v_0 = (17{,}2 - 20{,}8)m/s = -3{,}6m/s$

Aceleração da viatura (que independe do referencial inercial adotado) $a_v = 0{,}755m/s^2$.

A viatura descreve um movimento retilíneo uniforme, que no referencial da moto é descrito pelas seguintes equações:

$$x(t) = -36{,}7m - (3{,}6m/s)\cdot t + (0{,}755m/s^2)\cdot \frac{t^2}{2} \qquad \text{eq.(1)}$$

$$v(t) = -3{,}6m/s + (0{,}755m/s^2)\cdot t \qquad \text{eq.(2)}$$

O tempo t_f de ultrapassagem é obtido a partir da eq.(1) substituindo x(t) por 15m que é a posição final.

b) A velocidade final $v(t_f)$ da viatura em relação à moto é obtido substituindo na eq.(2) o valor de t_f encontrado no item a.

A velocidade da viatura em relação ao solo é dada por $V = v(t_f) + v_m$.

c) A distância d que a viatura percorre em relação à moto é :

$$d = x_f - x_0 = 15m - (-36{,}7m) = 51{,}7m$$

A distância que a moto percorre (em relação ao solo) é $d_m = v_m \cdot t_f$.

Logo a distância percorrida pela viatura em relação ao solo é:

$$D = d + v_m \cdot t_f$$

P2.4

Dados:

$$x(0) = 0m$$

$$v(t) = 5m/s - (2{,}5m/s^2)\cdot t$$

a) A posição do objeto é dada por:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt' = 0 + \int_0^t \left(5m/s - (2{,}5m/s^2)\cdot t'\right)dt'$$

$$x(t) = (5m/s)\cdot t - (2{,}5m/s^2)\cdot \frac{t^2}{2}$$

A aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -2{,}5m/s^2$$

b) x(t) é máximo quando v(t) = 0 e a(t) < 0

$$v(t) = 0 \Rightarrow 5m/s - (2{,}5m/s^2)\cdot t = 0$$

$$\Rightarrow t = 2s$$

Assim x é máximo para t=2s

$$x(2s) = (5m/s)\cdot 2s - (2{,}5m/s^2)\cdot \frac{(2s)^2}{2}$$

$$x(2) = 10m - 5m = 5m$$

P2.6

Dados:

$$x_A = (1{,}80m/s^2)\cdot t^2 + (3{,}60m/s)\cdot t + 1{,}00m$$

$$x_B = (0{,}0700m/s^3)\cdot t^3 + (1{,}8m/s^2)\cdot t^2 + (3{,}60m/s)\cdot t$$

a) No instante inicial temos:

$$x_A = (1{,}80\,m/s^2)\cdot 0^2 + (3{,}60\,m/s)\cdot 0 + 1{,}00\,m = 1\,m$$
$$x_B = (0{,}0700\,m/s^3)\cdot 0^3 + (1{,}8\,m/s^2)\cdot 0^2 + (3{,}60\,m/s)\cdot 0 = 0{,}0\,m$$

b) Quando eles se encontram temos $x_A = x_B$ logo:

$$(1{,}80\,m/s^2)\cdot t^2 + (3{,}60\,m/s)\cdot t + 1{,}00\,m = (0{,}0700\,m/s^3)\cdot t^3 + (1{,}8\,m/s^2)\cdot t^2 + (3{,}60\,m/s)\cdot t \Rightarrow$$
$$1{,}00\,m = (0{,}0700\,m/s^3)\cdot t^3 \Rightarrow t^3 = \frac{1{,}00\,m}{(0{,}0700\,m/s^3)} \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1\,m}{(0{,}0700\,m/s^3)}} = 2{,}42\,s$$

c) Os valores das acelerações são dados por:

$$a_A = \frac{d^2x_A}{dt^2} = 3{,}60\,m/s^2$$
$$a_B = \frac{d^2x_B}{dt^2} = (0{,}4200\,m/s^3)\cdot t + 3{,}6\,m/s^2$$

Logo:

$$a_A = a_B \Rightarrow \frac{d^2x_A}{dt^2} = 3{,}60\,m/s^2 = \frac{d^2x_B}{dt^2} = (0{,}4200\,m/s^3)\cdot t + 3{,}6\,m/s^2 \Rightarrow$$
$$(0{,}4200\,m/s^3)\cdot t = 0 \Rightarrow t = 0\,s$$

No instante inicial eles possuem mesma aceleração.

P2.7

Dados:

Adotando como origem o solo e como positivo o sentido vertical para cima temos:

Posição inicial do vaso $y(0) = H$.

Velocidade inicial do vaso $v(0) = 0\,m/s$

Aceleração do vaso até o instante em que ele atinge o jardim $a = -g$

Espessura do jardim e .

Posição do vaso quando ele toca o jardim $y_1 = e$.

Posição final do vaso $y_2 = 0\,m$.

Velocidade final do vaso $v_2 = 0\,m/s$.

Equação de Torricelli: $v^2 = v_0^2 + 2\cdot a\cdot \Delta y$.

a) Aplicando a equação de Torricelli temos:

$$v_1^2 = 0^2 + 2\cdot(-g)\cdot(y_1 - y_0)$$
$$v_1^2 = +2\cdot(-g)\cdot(e - H) = 2g(H - e)$$
$$v_1 = \sqrt{2g(H-e)}$$

b) Considerando os intantes t_1 (quando o bloco toca o jardim) e t_2 (quando o bloco toca o solo) temos:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\cdot(a)\cdot(y_2 - y_1)$$
$$0^2 = 2g(H-e) + 2\cdot(a)\cdot(0 - e) = 2g(H-e) - 2\cdot a\cdot e$$
$$0 = 2g(H-e) - 2\cdot a\cdot e$$
$$2\cdot a\cdot e = 2g(H-e) \Rightarrow a = \frac{g(H-e)}{e}$$

P2.8

Dados:
Adotando como origem a posição inicial da pá A temos:
Velocidade da pá A $v_A = +2{,}0\,cm/s$.
Posição inicial de A $x_{A0} = 0\,cm$
Velocidade da pá B $v_B = -3{,}0\,cm/s$.
Posição inicial de B $x_{B0} = 200\,cm$
Velocidade da bola $v_{bola} = 8{,}0\,cm/s$.
Posição inicial da bola $x_{(bola)0} = 0\,cm$.
Equações de movimento:
$$x_A = (2{,}0\,cm/s)\cdot t$$
$$x_B = 200\,cm - (3{,}0\,cm/s)\cdot t$$

a) A posição final da bola é a posição de emcontro das pás.
$$x_A = x_B$$
$$(2{,}0\,cm/s)\cdot t = 200\,cm - (3{,}0\,cm/s)\cdot t \Rightarrow$$
$$(5{,}0\,cm/s)\cdot t = 200\,cm \Rightarrow$$
$$t = 40\,s$$
$$x_{final\ \ da\ \ bola} = x_A = x_B = 200\,cm - 120\,cm = 80\,cm$$

O deslocamento da bola é $d = x_{final} - x_{(bola)0} = 80\,cm - 0\,cm = 80\,cm$
b) A distância total percorrida pela bola é dada por:
$$S = v_{bola}\cdot t = (8{,}0\,cm/s)\cdot 40\,s = 320{,}0\,cm$$

P2.9
Dados:
Adotando como positivo o sentido convencional (de baixo para cima) temos:
Velocidade do elevador em relação ao solo $v_E = +2\,m/s$.
Velocidade inicial da lâmpada em relação ao solo $v_{L0} = v_E = +2\,m/s$
Comprimento do elevador d.
Aceleração da lâmpada $a_L = -g$
a) No referencial do elevador a velocidade inicial da lâmpada é nula.
$$V_{EL} = v_{L0} - v_E = (2-2)\,m/s = 0\,m/s$$
Considerando o movimento da lâmpada em relação ao elevador, aplicando a equação de Torricelli temos:
$$V^2 = 0^2 + 2\cdot g\cdot d$$

logo a velocidade da lâmpada em relação ao elevador é $V_L = -\sqrt{2 \cdot g \cdot d}$
Para um observador parado fora do elevador a velocidade da lâmpada é:

$$v = v_E + V_L$$

$$v = (2m/s) - \sqrt{2 \cdot g \cdot d}$$

b) Novamente considerando o referencial do elevador temos:

$$d = \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{g}}$$

c) Para um observador no elevador a lâmpada percorreu uma distância d.
Para um observador fora do elevador a distância percorrida é:

$$D = d - v_E \cdot t$$

$$D = d - v_E \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot d}{g}}$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 07 - Exercícios de Fixação

E7.1 Um pequeno rato possui coordenadas x e y $(0,3;1,2)$ no instante de tempo $t=2,1s$ e coordenadas x e y $(1,9;5,2)$ no instante de tempo $t=4,3s$. As coordenadas x e y são dadas em metros.

a) Qual é a deslocamento do rato nesse intervalo de tempo?

b) Calcule o módulo do vetor velocidade média do rato.

c) Determine a direção e sentido do vetor velocidade média.

E7.2 Uma barata está na origem do sistema de coordenadas no instante de tempo $t=1,0s$. Entre o intervalo de tempo entre $t=1,0s$ e $t=8,0s$ sua velocidade média tem componentes $v_x=0,15m/s$ e $v_y=-0,23m/s$

a) Determine as coordenadas x e y da barata no instante de tempo $t=8,0s$.

b) Determine o vetor posição da barata no instante de tempo $t=8,0s$?

E7.3 A posição de uma partícula que se move no espaço é dada pela equação

$$\vec{r}=\left(A+Bt^2\right)\hat{i}+\left(Ct\right)\hat{j}, \text{ onde } A=2,0m,\ B=0,63m/s^2 \text{ e } C=3,1m/s$$

a) Determine o vetor posição para os instantes de tempo $t=1,0s$ e $t=2,2s$. Qual é o deslocamento nesse intervalo de tempo?

b) Determine a velocidade média no intervalo de tempo assinalado no item a.

c) Encontre uma expressão para a velocidade v para todo tempo t.

d) Faça um esboço mostrando a trajetória da partícula entre os instantes de tempo $t=1,0s$ e $t=2,2s$, mostrando as velocidades nesses instantes de tempo.

E7.4 Um trem se desloca na direção norte com velocidade de 65Km/h durante 6min. Em seguida ele se desloca na direção noroeste a 30º do norte com velocidade de 50Km/h durante 24min. Em seguida ele se desloca na direção oeste a 60º da direção noroeste com velocidade de 70Km/h durante 18min.

a) Encontre o deslocamento resultante do trem.

b) Determine a sua velocidade média no trajeto.

c) Calcule a sua velocidade escalar média.

Solução

E7.1

a) A posição do rato no instante de tempo inicial $t_1=2,1s$ é $\vec{r}_1=\left(0,3m\right)\hat{i}+\left(1,2m\right)\hat{j}$. Em um instante de tempo posterior $t_2=4,3s$ sua posição é $\vec{r}_2=\left(1,9m\right)\hat{i}+\left(5,2m\right)\hat{j}$. O seu deslocamento é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$\Delta\vec{r} = (1,9 - 0,3)\,\hat{i} + (5,2 - 1,2)\,\hat{j}$$
$$\Delta\vec{r} = (1,6m)\,\hat{i} + (4,0m)\,\hat{j}$$
b) O vetor velocidade média é dado pela razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo decorrido:
$$\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$
$$\vec{V}_m = \frac{(1,6m)\,\hat{i} + (4,0m)\,\hat{j}}{(4,3 - 2,1)\,s}$$
$$\vec{V}_m = (0,73m/s)\,\hat{i} + (1,8m/s)\,\hat{j}$$
Sendo o módulo de $\vec{V}_m$ dado por:
$$|\vec{V}_m| = \sqrt{(0,73)^2 + (1,8)^2}$$
$$|\vec{V}_m| = 2,0m/s$$
c) Desenhando o vetor velocidade em um plano cartesiano

Podemos ver que
$$tg\theta = \frac{1,8}{0,73}$$
$$\theta = arctg\left(\frac{1,8}{0,73}\right)$$
$$\theta = 1,2\ radianos$$
$$\theta = 68^{o}$$

E7.2
a)
$$\vec{V}_m = (0,15m/s)\,\hat{i} + (0,23m/s)\,\hat{j}$$
$$\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{V}_m\Delta t$$
$$\Delta\vec{r} = (1,1m)\,\hat{i} + (1,6m)\,\hat{j}$$
Como no instante de tempo inicial $t_1 = 1,0s$ ela estava na origem $\vec{r}_1 = 0$, ou seja, coordenadas x_1= 0 e y_1=0. As coordenadas x_2 e y_2 no instante de tempo $t_2 = 8,0s$ é (1,1;1,6) onde x_2 e y_2, obviamente, são dadas em metros.

b) O vetor posição $\vec{r}_2$ pode ser obtido uma vez que conhecemos o deslocamento $\Delta\vec{r}$ e a posição $\vec{r}_1$.
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
Portanto
$$\vec{r}_2 = \Delta\vec{r} + \vec{r}_1$$
Contudo, $\vec{r}_1 = 0$, pois a barata estava na origem (coordenadas x=0 e y=0).
Logo
$$\vec{r}_2 = (1,1m)\,\hat{i} + (1,6m)\,\hat{j}$$

E7.3
Seja $t_1 = 1,0s$, onde $\vec{r}_1 = \left[A + B(1,0s)^2\right]\hat{i} + \left[C(1,0s)\right]\hat{j}$

$$\vec{r}_1 = (\,,63m)\hat{i} + (\,,1m)\hat{j}$$

$\vec{r}_1$ e a posição da partícula no instante de tempo t_1.

Para t_2=2,2s

$$\vec{r}_2 = [A + B(\,,2s)^2]\hat{i} + [C(\,,2s)]\hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = (\,,1m)\hat{i} + (\,,8`m)\hat{j}$$

O deslocamento e

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = (\,,5m)\hat{i} + (\,,7m)\hat{j}$$

b) A velocidade media e dada por

$$\vec{v}_m = \frac{(\,,5m)\hat{i} + (\,,7m)\hat{j}}{(\,,2 - 1,0)s}$$

$$\vec{v}_m = (\,,1m/s)\hat{i} + (\,,1m/s)\hat{j}$$

c) A velocidade e a taxa de variação do vetor posição

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\,Bt)\hat{i} + C\hat{j}$$

$$\vec{v} = (\,3t)\hat{i} + 3,1\hat{j}$$

Onde $\vec{v}$ e dada em m/s.

d) Fazendo um gráfico de $y = y(x)$, estará desenhando a trajetória, pois estará dizendo simultaneamente as coordenadas x e y.

$$x = A + Bt \qquad (1)$$

$$y = Ct \qquad (2)$$

Como foi pedido apenas um esboço, obtenha pares x e y para os instantes de tempo entre 1,0s e 2,2s.

Para $t = 1,0s$

$$x(1,0s) = A + B(1,0s)^2 = 2,6m$$

$$y(1,0s) = C(1,0s) = 3,1m$$

Para $t = 1,2s$

$$x(1,0s) = A + B(1,2s)^2 = 2,9m$$

$$y(1,0s) = C(1,2s) = 3,7m$$

E fazendo para mais alguns instantes de tempo você poderá obter outros pares e fazer um esboço com os pontos obtidos.

E7.4

a) Inicialmente ele se desloca

$(\,5\,Km/h)\left(\frac{6}{60}h\right) = 6,5\,Km$ para o norte.

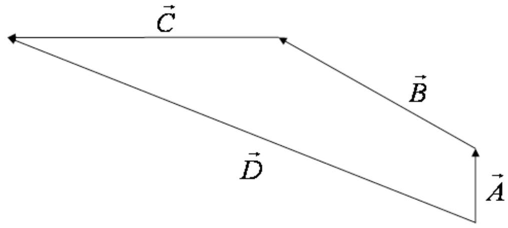
Em seguida

$(\,0\,Km/h)\left(\frac{24}{60}h\right) = 20\,Km$ na direção noroeste.

E por ultimo

$(\,0\,Km/h)\left(\frac{18}{60}h\right) = 21\,Km$ na direção oeste.

Denominado cada vetor como A, B e C, conforme a figura, podemos fazer a soma $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ para obter o vetor resultante $\vec{D}$.



$\vec{D} = 39{,}1\,Km$ 38º oeste para o norte

b) O vetor velocidade média é dado pela razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo decorrido:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V}_m = \frac{(-31\,Km/h)\,\hat{i} + (24\,Km/h)\,\hat{j}}{\left(\frac{48}{60}\right)h}$$

$$\vec{V}_m = (-39\,Km/h)\,\hat{i} + (30\,Km/h)\,\hat{j}$$

c) A velocidade escalar media e a razão entre a distancia total percorrida pelo intervalo de tempo decorrido

$$V_p = \frac{d}{\Delta t}$$

$$V_p = \frac{(6{,}5\,km) + (20\,km) + (21\,km)}{0{,}8\,h}$$

$$V_p = 59\,km/h$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 08 - Exercícios de Fixação

E8.1 Uma motocicleta está transitando pela cidade e em $t_1 = 0{,}5\,\text{min}$ a sua velocidade possui componentes $v_x = 9{,}0\,m/s$ e $v_y = 18\,m/s$. No instante de tempo $t_2 = 7{,}1\,\text{min}$ sua velocidade possui componentes $v_x = -3{,}0\,m/s$ e $v_y = 22\,m/s$.

a) Calcule as componentes da aceleração média.

b) Determine o vetor aceleração.

c) Faça um esboço das velocidades nos instantes de tempo t_1 e t_2. Qual é a diferença entre esses dois vetores?

E8.2 Um taxi faz uma corrida pelo centro da cidade e em $t_1 = 5{,}5\,\text{min}$ a sua velocidade possui componentes $v_x = 9{,}7\,m/s$ e $v_y = 21\,m/s$. No intervalo de tempo entre $t_1 = 5{,}5\,\text{min}$ e $t_2 = 7\,\text{min}$ ua aceleração possui módulo igual a $a = 0{,}098\,m/s^2$ faz um ângulo de 45º com o eixo Ox.

a) Determine as componentes v_x e v_y da velocidade do taxi em $t_2 = 7\,\text{min}$.

b) Escreva o vetor velocidade do taxi em $t_2 = 7\,\text{min}$.

c) Faça um esboço das velocidades nos instantes de tempo t_1 e t_2. Qual é a diferença entre esses dois vetores?

E8.3 Um avião à jato é observado suas coordenadas variam no tempo de acordo com as equações:

$$x(t) = A - Bt^2$$

$$y(t) = Ct\,,$$

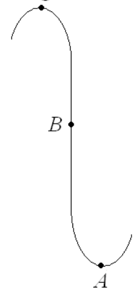
onde $A = 9{,}0\,Km$, $B = 0{,}0091\,Km/s^2$ e $C = 445\,Km/s$

a) Faça um esboço da trajetória do avião entre $t_1 = 0$ e $t_2 = 1\,\text{min}$.

b) Encontre uma expressão para a velocidade v e aceleração a para todo tempo t.

c) Faça um esboço mostrando o vetor velocidade e o vetor aceleração do avião no instante de tempo $t = 10\,s$.

E8.4 Um ciclista faz um percurso de A para C como indicado na figura 8.3. Desenhe o vetor aceleração e suas componentes vetoriais nos pontos A, B e C indicados na figura 8.3, quando:



a) o vetor velocidade possui módulo constante.

b) o módulo do vetor velocidade diminui de A para C.

c) o módulo do vetor velocidade aumenta de A para C.

Observação: *Em nenhum dos pontos assinalados na figura 8.3 a velocidade do* *ciclista é nula.* Figura 8.3

E8.5 Um abutre está voando em círculos. No instante de tempo t=0 sua velocidade possui componentes $v_x = 5{,}0 m/s$ e $v_y = 4{,}0 m/s$. No instante de tempo t=3,0s sua velocidade possui componentes $v_x = 4{,}0 m/s$ e $v_y = -5{,}0 m/s$.

a) Faça um desenho esquemático mostrando parte da trajetória do abutre e o vetor velocidade com suas componentes para os instantes de tempo t=0s e t=3,0s.

b) Determine as componentes do vetor aceleração média nesse intervalo de tempo.

Desafio: *Obtenha então o vetor aceleração em termos dos vetores* $\hat{i}$ *e* $\hat{j}$.

Solução

E8.1

a) As componentes da aceleração são

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ e } a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

$$a_x = \frac{(3{,}0 - 9{,}0)\, m/s}{(7{,}1 - 0{,}5)\, \text{min}} = \frac{-12 m/s}{396 s} = 0{,}030 m/s^2$$

$$a_x = \frac{(12 - 18)\, m/s}{(7{,}1 - 0{,}5)\, \text{min}} = 0{,}010 m/s^2$$

b) $\vec{a} = (3{,}0 x 10^{-2} m/s^2)\hat{i} + (1{,}0 x 10^{-2} m/s^2)\hat{j}$

c) A diferença entre esses dois vetores é

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\Delta\vec{v} = (-12 m/s)\hat{i} + (4{,}0 m/s)\hat{j}$$

E8.2

a) As componentes da aceleração a_x e a_y em t_2 são dadas por

$$a_x = a\cos 45^\circ$$

$$a_y = a sen 45^\circ$$

$$a_x = 0{,}069 m/s^2$$

$$a_y = 0{,}069 m/s^2$$

Como

$$a_x = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{v_{x2} - v_{x1}}{\Delta t}$$

$$v_{x2} = v_{x1} + a_x \Delta t$$

$$v_{x2} = 16 m/s$$

E

$$v_{y2} = v_{y1} + a_y \Delta t$$

$$v_{y2} = 27 m/s$$

b) $\vec{v}_2 = (16 m/s)\hat{i} + (27 m/s)\hat{j}$

c)

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\Delta\vec{v} = (6{,}2 m/s)\hat{i} + (6{,}2 m/s)\hat{j}$$

E8.3

a) Sabemos que

$$x(t) = A - Bt^2$$

$$y(t) = Ct\,,$$

Obtenha pares de valores de x e y para intervalos de tempo entre 0 e 1min. Faça então um gráfico com os valores encontrados em um plano cartesiano.

b) Como

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = (A - Bt^2)\hat{i} + (Ct)\hat{j}$$

Onde $A = 9{,}0\,Km$, $B = 0{,}0091\,Km/s^2$ e $C = 445\,km/s$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-2Bt)\hat{i} + C\hat{j}$$

$$\vec{v} = -2Bt\,\hat{i} + C\hat{j}$$

Onde $B = 0{,}0091\,Km/s^2$ e $C = 445\,km/s$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -2B\hat{i}$$

$$\vec{a} = -2B\hat{i}$$

Onde $B = 0{,}0091\,Km/s^2$

c) Em t = 10s, sua velocidade será

$$\vec{v} = \left[-2(0{,}0091)(10)\right]\hat{i} + 445\,\hat{j}$$

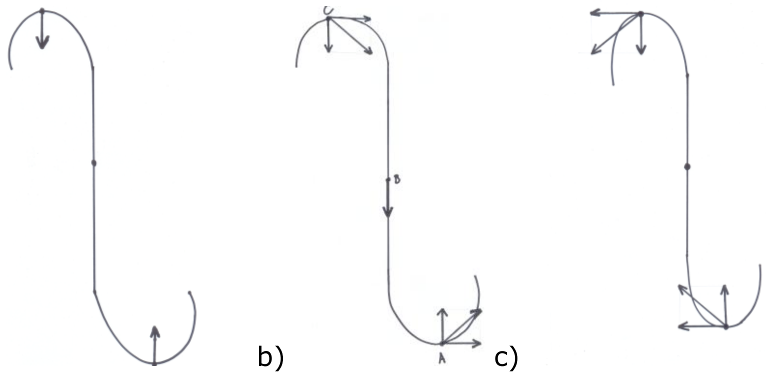
$$\vec{v} = (0{,}182\, m/s)\hat{i} + (45\, m/s)\hat{j}$$

E a aceleração será

$$\vec{a} = -2(0{,}0091\, Km/s^2)\hat{i}$$

$$\vec{a} = -(0{,}0182\, Km/s^2)\hat{i}$$

E8.4



a) b) c)

a) Quando a velocidade possui módulo constante existe aceleração apenas quando o vetor velocidade muda a sua direção (aceleração radial).

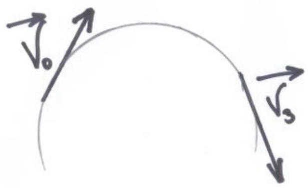
b) Se o módulo da velocidade diminui, além da aceleração radial (ou centrípeta) haverá aceleração tangencial que neste possui mesma direção e sentido contrário ao do vetor velocidade.

c) Se o módulo da velocidade aumenta, além da aceleração radial (ou centrípeta) haverá aceleração tangencial que neste caso possui mesma direção e mesmo sentido do vetor velocidade.

O vetor aceleração é encontrado fazendo-se a soma vetorial dos vetores aceleração radial e aceleração tangencial em cada caso.

E8.5

a) Fazendo um esboço do vetor velocidade para os dois intervalos de tempo e levando em consideração que o vetor velocidade é tangente a trajetória:



c) obtemos as componentes da velocidade média utilizando as equações

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ e } a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

$$a_x = \frac{(4{,}0 - 5{,}0)\,m/s}{(3{,}0 - 0)\,s}$$

$$a_x = -0{,}33\,m/s^2$$

$$a_y = \frac{(-5{,}0 - 4{,}0)\,m/s}{(3{,}0 - 0)\,s}$$

$$a_y = -3{,}0\,m/s^2$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 09 - Exercícios de Fixação

E9.1

O astronauta executará um movimento circular onde o período pode ser obtido pela equação

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a_c}}$$

Para $a_c = 2{,}5g$

$$T = 3{,}1s$$

Para $a_c = 2{,}5g$

$$T = 2{,}0s$$

E9.2

a) Uma vez que

$$v = \omega R$$

E

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Então

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$T = 11s$$

b) A aceleração radial (ou centrípeta) é constante, pois ω é não varia com o tempo.

$$a_c = \frac{v^2 R}{R^2} = \frac{v^2}{R}$$

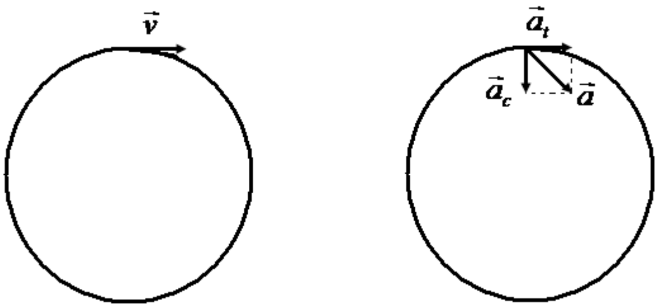
Portanto, $a_c = 4{,}8m/s^2$, verticalmente para baixo, no ponto mais alto e $a_c = 4{,}8m/s^2$ verticalmente para cima no ponto mais baixo.

c) Como ω é constante $\vec{a} = \vec{a}_c$ em qualquer ponto da trajetória.

E9.3

a) Nesse caso $a_c = 0{,}600m/s^2$ e $a_c = 4{,}8m/s^2$. Logo

$$a = \sqrt{a_c^{\,2} + a_t^{\,2}} = 4{,}9m/s^2$$



b)

E9.4

a) 365 dias são 8.760 horas. A velocidade linear é então

$$a_c = \frac{v^2}{R} \text{ e } v_p = \frac{2\pi R_T}{t}$$

dias são 8.760 horas. A velocidade linear é então $3{,}15x10^7\,s$

$$v_p^{\,2} = \frac{4\pi^2 R_T^{\,2}}{t^2}$$

$$a_c = \frac{4\pi^2 R_T^{\,2}}{t^2 R_T} = \frac{4\pi^2 R_T}{t^2}$$

$$a_c = ,88x10^5\,m/s^2$$

$$g = 9{,}8\,m/s^2$$

$$\frac{a_c}{g} = 1{,}92x10^4$$

b) A velocidade orbital é dada pela equação

$$v_p = \frac{2\pi R_T}{t} = \frac{2\pi\left(1{,}50x10^8\,km\right)}{8.760\,h}$$

$$v_p = 1{,}08x10^5\,km/h$$

E9.4

a) $165\,rpm = \dfrac{165\,rotações}{60\,s} = 2{,}75\,Hz$

Como $T = \dfrac{1}{f} \Rightarrow T = 0{,}36\,s$

b) A velocidade linear é dada pela equação

$$v = \omega R$$

$$\text{E } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$v = 8{,}29\, m/s$$

Um ponto a 2/3 da extremidade está a uma distância de 0,32m do eixo da lâmina

$$v = \frac{2\pi(2/3\, R)}{T}$$

$$v = 5{,}53\, m/s$$

b) $a_c = \omega^2 R$

Para R=0,48m

$$a_c = (2\pi\, f)^2 R$$

$$a_c = 143\, m/s^2$$

Para R=0,32m

$$a_c = 95{,}5\, m/s^2$$

E9.6

a) A bola sobe até certa altura em relação ao mesmo nível de que é chutada, gasta mais algum tempo para voltar a este mesmo nível e em seguida gasta certo tempo para chegar ao chão.

Em relação ao nível da laje os tempos de subida e descida são iguais.

Sabemos que

$$v_y = v_{oy} - gt$$

$v_y = 0$ no ponto mais alto da trajetória.

$$0 = v_{oy} - gt$$

$t = \frac{v_{oy}}{g}$ tempo de subida

$$t = \frac{7{,}04\, m/s}{9{,}8\, m/s^2}$$

$$t = 0{,}72\, s$$

Ela sobe e desce então, em relação ao nível da laje gastando 1,44s (o dobro de 0,72s).

A partir daí ela cai da laje ao solo, onde podemos utilizar a seguinte equação

$h = v_{oy}\, t + \frac{1}{2} g t^2$

$3{,}65 = 7{,}04\, t + 4{,}9\, t^2$

Resolvendo a equação de 2º grau em t obtemos

$$t_1' = 0{,}40\, s \text{ e } t_2' = -12\, s$$

Então o tempo total em que ele permanece no ar

$$1{,}44\text{s} + 0{,}40\text{s}$$

$$t = 1{,}84\,s$$

b) Pela equação de Torricelli

$$v_y^{\,2} = v_{oy}^{\,2} - 2gh'$$

$v_y = 0$ na altura máxima em relação à laje.

$$h' = \frac{v_{oy}^{\,2}}{2g}$$

$$h' = 5{,}06\,m$$

Logo a altura em relação ao solo é

$$h = (5{,}06 + 3{,}65)\,m$$

c) O deslocamento horizontal depende apenas da componente horizontal da velocidade. Como essa componente é constante

$$D = v_{ox}\,\Delta t$$

$$D = 5{,}49\,m$$

E9.7

$$h = v_{oy}\,t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = 37\,cm$$

b) A velocidade horizontal é constante

$$D = v_{ox}\,\Delta t$$

$$D = 6{,}35\,cm$$

c) A componente é obtida pela equação

$v_y = v_{oy} + gt$

$v_y = 9{,}8t$

$v_y = 4{,}15\,m/s$

Então $\vec{v} = (0{,}150\,m/s)\hat{\imath} - (4{,}15\,m/s)\hat{\jmath}$

d) A aceleração é constante (aceleração de queda livre)

$$\vec{g} = -(9{,}8\,m/s^2)\,\hat{\jmath}$$

E9.8

a) Determinamos a componente vertical da velocidade utilizando a equacao

$$v_y^{\,2} = v_{oy}^{\,2} - 2gh$$

$v_y = 0$ na altura máxima em relação à laje.

$$v_{oy} = \sqrt{2gh}$$

$$v_{oy} = 5{,}94\,m/s$$

Sabendo o tempo de subida podemos determinar a componente horizontal da velocidade

$$t = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{5{,}94\,m/s}{9{,}8\,m/s^2}$$

$$t = 0{,}61\,s$$

Logo

$$v_{oy} = \frac{D}{\Delta t} = \frac{3{,}00\,m}{0{,}61\,s}$$

$$v_{oy} = 4{,}95\,m/s$$

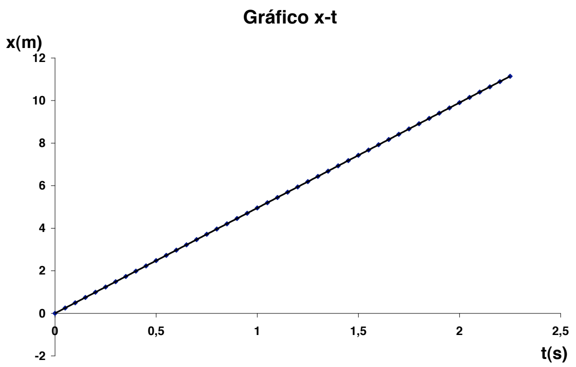
Então

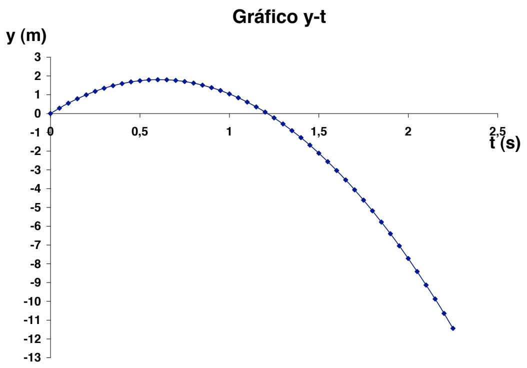
$$\vec{v}_o = (4{,}95\,m/s)\hat{\imath} + (5{,}94\,m/s)\hat{\jmath}$$

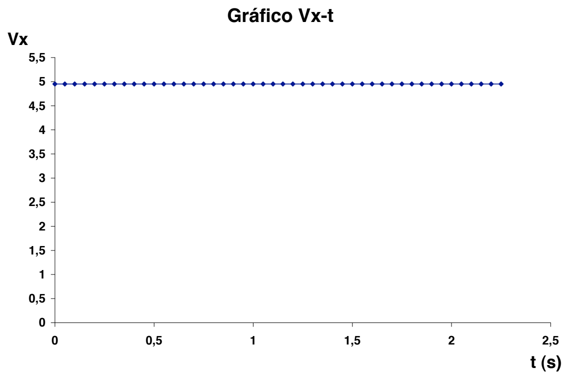
b) A componente vertical é nula e a componente horizontal é constante $\vec{v}_x = (4{,}95\,m/s)\hat{\imath}$ e

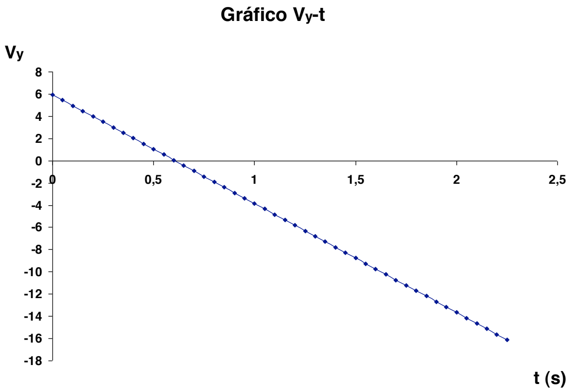
$$v_y = 0$$

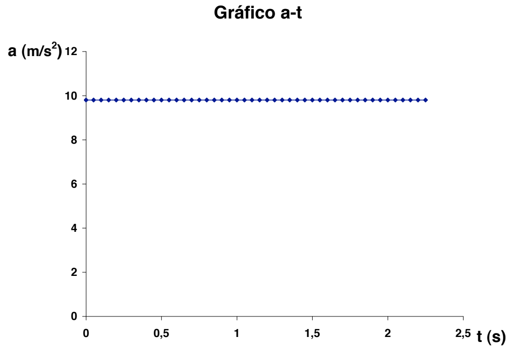
c)











E9.9

a) No ponto mais alto da trajetória a componente vertical

$$v_y = v_{oy} - gt$$

$$t = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{19\, m/s}{9{,}8\, m/s^2}$$

$$t = 1{,}94\, s$$

Logo o tempo em que ela permanece no ar é $t = 3{,}88\, s$.

b) $h = v_{oy} - \frac{1}{2} g t^2$

$$h = v_{oy} - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = 19(1{,}94) - 4{,}9(1{,}94)^2$$

$$h = 18{,}42\, m$$

c) como o tempo em que ela permaneceu no ar é de 3,88s

$$D = v_{ox}\, \Delta t$$

$$D = (12)(3{,}88)$$

$$D = 46{,}6\, m$$

d) Se a resistência do ar pode ser desprezada a velocidade imediatamente antes de atingir o solo tem o mesmo módulo da velocidade de arremesso. A diferença é que a componente vertical tem sentido contrário.

$$\vec{v} = (12m/s)\hat{i} + (19m/s)\hat{j}$$

e) $\vec{g} = -(9{,}8m/s^2)\hat{j}$

<u>Gabarito Aula 10 – exercícios de fixação</u>

E10.1)

Para que o barco alcance o ponto B, este deve mover-se perpendicularmente à margem do rio. Sendo assim, a velocidade do barco, em relação à água, deve possuir uma componente de mesmo módulo e mesma direção que a velocidade da correnteza em relação à margem, porém em sentido oposto ao desta. Logo, temos que

$$v_{B\hat{j}} = v_c$$

$$v_{B\hat{j}} = v_B \cdot sen\theta \rightarrow v_B \cdot sen\theta = v_c$$

$$\frac{30,0km}{h} \cdot sen\theta = \frac{15km}{h} \rightarrow sen\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 30^{\circ}$$

onde o ângulo é medido em relação à direção do vetor $\boldsymbol{j}$, direção perpendicular a velocidade da velocidade da correnteza. Portanto o barco deve mover-se com uma inclinação de 30º em relação à direção do vetor $\boldsymbol{j}$.

E10.2)

1. A velocidade relativa de um corpo 1 em relação a um corpo 2 é dada por

$$\overrightarrow{v}_{12} = \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2$$

logo, a velocidade do ônibus A em relação ao ônibus B será

$$\overrightarrow{v}_{AB} = \overrightarrow{v}_A - \overrightarrow{v}_B \rightarrow \overrightarrow{v}_{AB} = \left(\frac{56km}{h} \cdot \hat{i}\right) - \left(\frac{65km}{h} \cdot \hat{i}\right)$$

$$\overrightarrow{v}_{AB} = -\frac{9km}{h} \cdot \hat{i}$$

já a velocidade do ônibus B em relação ao ônibus A é de

$$\overrightarrow{v}_{BA} = \overrightarrow{v}_B - \overrightarrow{v}_A \rightarrow \overrightarrow{v}_{BA} = \left(\frac{65km}{h} \cdot \hat{i}\right) - \left(\frac{56km}{h} \cdot \hat{i}\right)$$

$$\overrightarrow{v}_{BA} = \frac{9km}{h} \cdot \hat{i}$$

1. A velocidade da moeda em relação ao professor é de $\overrightarrow{v}_{mp} = \frac{1,0m}{s} \cdot \hat{j}$. A velocidade da moeda em relação ao peão é dada pela soma da velocidade da moeda em relação ao professor com a velocidade do professor em relação ao peão. Como a velocidade do professor em relação ao peão é igual a velocidade do ônibus B em relação à Terra, pois o peão encontra-se em repouso em relação à Terra e o professor encontra-se em repouso em relação ônibus B, temos que

$$\overrightarrow{v}_{mpeo} = \overrightarrow{v}_{mp} + \overrightarrow{v}_{ppeo} \rightarrow \overrightarrow{v}_{mpeo} = \left(\frac{1,0m}{s} \cdot \hat{j}\right) + \left(\frac{18m}{s} \cdot \hat{i}\right)$$

$$\overrightarrow{v}_{mpeo} = \left(\frac{18m}{s}\right)\hat{i} + \left(\frac{1,0m}{s}\right)\hat{j}$$

1. Para o professor a trajetória da moeda será uma reta vertical, pois, em relação a este, a moeda só desloca-se verticalmente.

Já Alaor e o peão, observarão a moeda descrever trajetórias parabólicas, pois, em relação a estes, a moeda desloca-se tanto verticalmente (apresentando uma dependência com o quadrado do tempo) quanto horizontalmente. Entretanto, a parábola observada por Alaor é mais estreita do que a parábola observada pelo peão, pois a componente da velocidade da moeda, na direção horizontal, em relação à Alaor possui menor módulo do que a mesma componente em relação ao peão.

E10.3)

1. A velocidade do ônibus B em relação à Alaor é igual a velocidade do ônibus B em relação ao ônibus A, pois Alaor encontra-se em repouso em relação ao ônibus A. Logo, temos que

$$\overrightarrow{v}_{BAlaor} = \overrightarrow{v}_{B} - \overrightarrow{v}_{A} \rightarrow \overrightarrow{v}_{BAlaor} = \left(\frac{34,6km}{h}\right)\hat{i} + \left(\frac{20,0km}{h}\right)\hat{j} - \left(\frac{56km}{h} \cdot \hat{i}\right)$$

$$\overrightarrow{v}_{BAlaor} = \left(-\frac{21,4km}{h}\right)\hat{i} + \left(\frac{20,0km}{h}\right)\hat{j}$$

1. Como visto no exercício anterior, a velocidade da moeda em relação ao peão é dada pela soma da velocidade da moeda em relação ao professor com a velocidade do professor em relação ao peão. Como a velocidade do professor em relação ao peão é igual a velocidade do ônibus B em relação à

Terra, pois o peão encontra-se em repouso em relação à Terra e o professor encontra-se em repouso em relação ônibus B, temos que

$$\overrightarrow{v}_{mpeo} = \overrightarrow{v}_{mp} + \overrightarrow{v}_{ppeo} \rightarrow \overrightarrow{v}_{mpeo} = \left(\frac{1,0m}{s}\right)\hat{j} + \left(\frac{9,6m}{s}\right)\hat{i} + \left(\frac{5,6m}{s}\right)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{v}_{mpeo} = \left(\frac{9,6m}{s}\right)\hat{i} + \left(\frac{1,0m}{s}\right)\hat{j} + \left(\frac{5,6m}{s}\right)\hat{k}$$

1. A velocidade da moeda em relação à Alaor é dada pela soma da velocidade da moeda em relação ao professor com a velocidade do professor em relação a Alaor. Como a velocidade do professor em relação à Alaor é igual a velocidade do ônibus B em relação à Alaor, pois o professor encontra-se em repouso em relação ônibus B, temos que

$$\overrightarrow{v}_{mAlaor} = \overrightarrow{v}_{mp} + \overrightarrow{v}_{pAlaor} \rightarrow \overrightarrow{v}_{mAlaor} = \left(\frac{1,0m}{s} \cdot \hat{j}\right) + \left(-\frac{5,9m}{s}\right)\hat{i} + \left(\frac{5,6m}{s}\right)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{v}_{mAlaor} = \left(-\frac{5,9m}{s}\right)\hat{i} + \left(\frac{1,0m}{s}\right)\hat{j} + \left(\frac{5,6m}{s}\right)\hat{k}$$

1. Quando a moeda encontra-se no ponto mais alto de sua trajetória, esta possui velocidade vertical nula $(0)\,\hat{j}$. Logo, temos que, no ponto mais alto de sua trajetória, a moeda apresentará as seguintes velocidades relativas

$$v_{mp} = (0)\,\hat{i} + (0)\,\hat{j} + (0)\,\hat{k}$$

$$\overrightarrow{v}_{mpeo} = \left(\frac{9,6m}{s}\right)\hat{i} + (0)\,\hat{j} + \left(\frac{5,6m}{s}\right)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{v}_{mAlaor} = \left(-\frac{5,9m}{s}\right)\hat{i} + (0)\,\hat{j} + \left(\frac{5,6m}{s}\right)\hat{k}$$

E10.4)

1. A velocidade do avião em relação à Terra é de 33,0 m/s. Pois, como o enunciado da questão faz referência em relação a qual referencial a velocidade do avião foi medida iremos considerar que este referencial é a Terra.

1. Para que o avião desloque-se na direção Norte-Sul este deve possuir uma componente de velocidade de mesmo módulo e mesma direção que a velocidade do vento em relação à Terra (direção do vetor $\boldsymbol{i}$), porém em sentido oposto ao desta. Logo, considerando que o módulo da velocidade do avião seja de 33,0 m/s, temos que

$$v_{a\hat{i}} = v_v$$

$$v_{a\hat{i}} = v_a sen\theta \rightarrow v_a sen\theta = v_v$$

$$\frac{33,0m}{s} \cdot sen\theta = \frac{5,55m}{s} \rightarrow sen\theta = 0,168$$

$$\theta = sen^{-1}\left(0,168\right)$$

$$\theta = 9,68^{\circ}$$

onde o ângulo é medido em relação à direção do vetor $\boldsymbol{j}$, direção Norte-Sul. Portanto o barco deve mover-se com uma inclinação de 9,68º em relação à direção Norte-Sul.

1.

2. para a situação do item a

Neste caso a velocidade do avião é de 33,0 m/s (119 km/h), na direção do deslocamento, e a distância entre as cidades é de 830 km. Logo, o tempo de viagem é de

$$t = \frac{d}{v_a}$$

$$t = \frac{830km}{\left(\frac{119km}{h}\right)}$$

$$t = 6,97h$$

1. para a situação do item b

Neste caso o módulo da velocidade do avião é de 33,0 m/s (119km/h), mas somente a componente da velocidade na direção do deslocamento, direção $\boldsymbol{j}$, é que causa um deslocamento efetivo, pois a componente $\boldsymbol{i}$ da velocidade é utilizada para anular o deslocamento que o vento provocaria no avião. Logo, o tempo de viagem, para essa situação, é dado por

$$t = \frac{d}{v_a} \rightarrow t = \frac{d}{v_a cos\left(\theta\right)}$$

$$t = \frac{830km}{\left(\frac{119km}{h} \cdot cos\left(9,68°\right)\right)}$$

$$t = 7,08h$$

P3.1) Primeiro encontramos as velocidades e as posições nas respectivas direções:

Velocidades:

$$v_x = \int_{t_0}^{t} a_x dt = \int_0^t qt^2\, dt = \frac{qt^3}{3}$$

$$v_y = \int_{t_0}^{t} a_y dt = \int_0^t (b - ct)dt = bt - \frac{ct^2}{2}$$

Posições:

$$x = \int_{t_0}^{t} v_x dt = \int_0^t \left(\frac{qt^3}{3}\right)dt = \frac{qt^4}{12}$$

$$y = \int_{t_0}^{t} v_y dt = \int_0^t \left(bt - \frac{ct^2}{2}\right)dt = \frac{bt^2}{2} - \frac{ct^3}{6}$$

a) Agora podemos escrever a posição e a velocidade vetorialmente:

$$\vec{r} = \left(\frac{qt^4}{4}\right)\hat{i} + \left(\frac{bt^2}{2} - \frac{ct^3}{6}\right)\hat{j} \qquad \vec{v} = \left(\frac{qt^3}{3}\right)\hat{i} + \left(bt - \frac{ct^2}{2}\right)\hat{j}$$

b) A altura máxima será atingida quando a velocidade na direção y for zero, ou seja:

$$bt - \frac{ct^2}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{2b}{c}$$

Substituindo o valor de t obtido na expressão para a posição y, encontramos a altura máxima:

$$h = \frac{b(b/c)^2}{2} - \frac{c(b/c)^3}{6}$$

c) Não há um deslocamento horizontal máximo. Podemos ver isso observando que a função posição em x sempre cresce à medida que o tempo passa.

P3.3) Consideremos o Exemplo 9.2. Nesse exemplo um projétil é lançado e tem um alcance dado por R. No nosso problema o disco sobe até uma altura máxima que chamaremos de H, volta ao nível de onde foi lançado e depois cai uma altura h até atingir o solo. Seja θ o ângulo de lançamento. Como no Exemplo 9.2, emos a equação

$$y = y_0 + (v_0 sen\theta)t - \tfrac{1}{2} gt^2 .$$

Com ela podemos calcular o tempo que o disco gasta até atingir o solo. A altura y em que o disco alcança-o é $-h$ (o disco vai para baixo do ponto em que foi lançado), a altura inicial é $y_0 = 0$ e temos:

$$-h = (v_0\, sen\theta)t - \tfrac{1}{2} g t^2 ,$$

que é uma equação de segundo grau. Resolvendo para t obtemos:

$$t = \frac{v_0\, sen\theta}{g} + \sqrt{\frac{(v_0\, sen\theta)^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

O alcance na horizontal, que chamaremos de d, será dado por $d = (v_0 \cos\theta)t$. Substituindo t encontrado acima temos:

$$d = (v_0 \cos\theta)\left(\frac{v_0\, sen\theta}{g} + \sqrt{\frac{(v_0\, sen\theta)^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right) \Rightarrow$$

$$d = \frac{v_0^2\, sen\theta \cos\theta}{g} + v_0 \cos\theta \sqrt{\frac{(v_0\, sen\theta)^2}{g} + \frac{2h}{g}}$$

Substituindo v_0:

$$d = \frac{\left(\sqrt{20hg}\right)^2 sen\theta \cos\theta}{g} + \sqrt{20hg}\cos\theta \sqrt{\frac{\left(\sqrt{20hg}\, sen\theta\right)^2}{g} + \frac{2h}{g}} \Rightarrow$$

$$d = 20h\, sen\theta \cos\theta + \sqrt{20hg}\cos\theta \sqrt{20h\, sen^2\theta + \frac{2h}{g}}$$

Substituindo o ângulo dado, encontramos:

$$d = 20h\, sen(41{,}2°)\cos(41{,}2°) + \sqrt{20hg}\cos(41{,}2°)\sqrt{20h\, sen^2(41{,}2°) + \frac{2h}{g}}$$

b) O cálculo é o mesmo cálculo da altura máxima atingida pelo projétil no Exemplo 9.2. Então temos:

$$H = \frac{v_0^2\, sen^2\theta}{2g}$$

c) Seja v_h a velocidade horizontal e v_v a velocidade vertical. A equação da velocidade horizontal é $v_h = v_0 \cos\theta$ e o gráfico será:

Para a velocidade vertical a equação é $v_V = v_0 sen\theta - gt$ e o gráfico será:

P3.4) Neste problema temos a mesma situação do problema anterior. Vamos apenas escrever os resultados de maneira genérica.

a) O alcance e altura serão os mesmos do problema anterior:

$$d = \frac{v_0^2 sen\theta \cos\theta}{g} + v_0 \cos\theta \sqrt{\frac{(v_0 sen\theta)^2}{g} + \frac{2h}{g}} \qquad H = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g}$$

b) Do Exemplo 9.2 o alcance é dado por $R = \dfrac{v_0^2 sen(2\theta)}{g}$. Do problema anterior vimos que o alcance mais genérico (aquele em que o objeto lançado cai abaixo da altura de lançamento) é dado por

$$R = \frac{v_0^2 sen\theta \cos\theta}{g} + v_0 \cos\theta \sqrt{\frac{(v_0 sen\theta)^2}{g} + \frac{2h}{g}}$$

Podemos escrever esse alcance horizontal geral em função de R:

$$d = \frac{R}{2} + \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{2h}{g} v_0^2 \cos^2\theta}$$

Para $h = 0$ temos:

$$d = \frac{R}{2} + \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + 0} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

P3.5)

a) Para encontrar a equação da trajetória de um ponto fixo devemos eliminar o tempo das equações para x e y. Então elevamos as duas coordenadas ao quadrado e as somamos. Temos:

$$x^2 + y^2 = (R\cos(\omega t))^2 + (Rsen(\omega t))^2 = R^2\cos^2(\omega t) + R^2 sen^2(\omega t) = R^2(\cos^2(\omega t) + sen^2(\omega t)) = R^2$$

Portanto a equação da trajetória é a equação de um círculo de raio R.

b) Calculamos primeiramente as componentes do vetor velocidade:

$$v_x = x'(t) = -R\omega sen(\omega t) \qquad v_y = y'(t) = R\omega\cos(\omega t).$$

O módulo será:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(-R\omega sen(\omega t)\right)^2+\left(R\omega\cos(\omega t)\right)^2}=\sqrt{R^2\omega^2\left(\cos^2(\omega t)+sen^2(\omega t)\right)}=R\omega$$

c) As componentes do vetor aceleração serão:

$$a_x=v_x'(t)=-R\omega^2\cos(\omega t)\qquad a_y=v_y'(t)=-R\omega^2 sen(\omega t)$$

Lembramos que o vetor distância pode ser escrito como $\vec{r}=R\cos(\omega t)\hat{i}+Rsen(\omega t)\hat{j}$. Assim o vetor aceleração fica:

$$\vec{a}=-\omega^2\left(R\cos(\omega t)\hat{i}+Rsen(\omega t)\hat{j}\right)=-\omega^2\vec{r}$$

Portanto a aceleração aponta na direção contrária a $\vec{r}$, ou seja, aponta para o centro do círculo. O módulo será dado por:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{\left(-R\omega^2\cos(\omega t)\right)^2+\left(-R\omega^2 sen(\omega t)\right)^2}=\omega^2 R$$

d) $a=\omega^2 R=\omega(\omega R)=\omega v$

e) O produto escalar de dois vetores deve ser zero se eles forem perpendiculares. Vejamos:

$$\vec{v}\bullet\vec{a}=\left(-R\omega sen(\omega t)\hat{i}+R\omega\cos(\omega t)\hat{j}\right)\bullet\left(-R\omega^2\cos(\omega t)\hat{i}-R\omega^2 sen(\omega t)\hat{j}\right)$$

Os produtos escalares $\hat{i}\bullet\hat{j}$ são iguais a zero. Os produtos escalares $\hat{i}\bullet\hat{i}$ e $\hat{j}\bullet\hat{j}$ são iguais a um. Dessa forma temos

$$\vec{v}\bullet\vec{a}=\left(-R\omega sen(\omega t)\right)\left(-R\omega^2\cos(\omega t)\right)\hat{i}\bullet\hat{i}+\left(R\omega\cos(\omega t)\right)\left(-R\omega^2 sen(\omega t)\right)\hat{j}\bullet\hat{j}$$

$$\vec{v}\bullet\vec{a}=\left(R^2\omega^3 sen(\omega t)\cos(\omega t)\right)-R^2\omega^3 sen(\omega t)\cos(\omega t)=0$$

P3.6) O carro B está afastando-se do carro A a uma velocidade $v_r=2km/h$ (velocidade relativa). Então devemos fazer o lançamento da criança considerando que ela deve cair a uma distância $d=7,6m+v_r t$, sendo t o tempo que a criança leva para subir e descer, que é dado por $\frac{2v_0 sen(\theta)}{g}$, de acordo com o Exemplo 9.2. No mesmo exemplo também é calculado o alcance de um projétil, dado por $\frac{v_0^2 sen(2\theta)}{g}$. Devemos igualar esse alcance à distância d:

$$\frac{v_0^2\, sen(2\theta)}{g} = d = 7{,}6m + v_r t = 7{,}6m + v_r \frac{2v_0\, sen(\theta)}{g} \Rightarrow$$

$$\frac{v_0^2\, sen(2\theta)}{g} - v_r \frac{2v_0\, sen(\theta)}{g} - 7{,}6m = 0\,,$$

que é uma equação de segundo, com a incógnita v_0. Substituímos os valores e resolvemos:

$$v_0^2 \frac{sen(2(49°))}{9{,}8m/s^2} - v_0 \frac{2(0{,}06m/s)sen(49°)}{9{,}8m/s^2} - 7{,}6m = 0 \Rightarrow$$

$$0{,}1\left(\frac{s^2}{m}\right)v_0^2 - 0{,}009(s)v_0 - 7{,}6m = 0 \Rightarrow v_0 = 4m/s.$$

Logo a velocidade de lançamento deve ser $v_0 = 4m/s$.

b) A velocidade horizontal na chegada em B, v_{hB}, é a mesma velocidade horizontal de lançamento, pois não há aceleração: $v_{hB} = v_0\, sen\theta = (4m/s)sen(49°)$. Na vertical a criança é desacelerada até atingir uma altura máxima e depois é acelerada até atingir a mesma velocidade na mesma altura do ponto de lançamento. Portanto a velocidade na vertical apenas muda de sentido: $v_{vB} = -v_0\cos\theta = -(4m/s)\cos(49°)$

c) Em relação ao carro A é a velocidade calculada no item a. Em relação ao carro B a velocidade será a velocidade de lançamento menos a velocidade relativa:
$v_0\cos\theta - v_r = (4m/s)\cos(49°) - 2km/h = 2{,}62m/s - 0{,}06m/s = 2{,}6m/s$

P3.7)
a) A gota não possui velocidade horizontal, vista da Terra. Para uma pessoa que está no ônibus a velocidade $\vec{v}_g$ da gota é a soma vetorial da velocidade da gota em relação à Terra, $\vec{V}_g$, mais a velocidade $\vec{V}_o$ do ônibus também em relação à Terra (as velocidades da gota em relação à Terra serão designadas por V; em relação ao ônibus por v). Então a componente horizontal da velocidade da gota em relação ao ônibus, v_{oh}, será:

$$v_{gh} = V_{oh} + V_{gh} = 60km/h + 0 = 60km/h,$$

sendo V_{oh} e V_{gh} as respectivas componentes horizontais de $\vec{V}_o$ e $\vec{V}_g$.

b) A velocidade horizontal da gota, vista do ônibus, em função do ângulo e do módulo da velocidade é $v_{gh} = v_g\, sen(38°)$, sendo v_g o módulo da velocidade da gota. Assim encontramos:

$$v_g = \frac{v_{gh}}{sen(38°)} = \frac{60\,km/h}{sen(38°)} = 97\,km/h$$

Vista da Terra a gota só tem velocidade vertical. A velocidade vertical em relação ao ônibus é dada por:

$$v_{gv} = v_g \cos(38°) = (97\,km/h)\cos(38°) = 76\,km/h$$

Como o ônibus não possui velocidade na vertical, a gota tem a mesma velocidade vertical vista do ônibus ou a Terra. Logo o módulo da velocidade da gota vista da Terra será:

$$V_{gv} = 76\,km/h$$

P3.8) Seja $\vec{V}$ a velocidade do barco e $\vec{V}_c$ a velocidade da correnteza, ambas em relação a um observador na margem. A velocidade do barco em relação à água foi dada mas não sabemos a direção. Suporemos que ela forma um ângulo θ com a horizontal, como na figura:

Calculamos as componentes horizontal e vertical de $\vec{V}$, V_h e V_v, respectivamente:

$$V_h = \frac{15m}{3\min} = \frac{15m}{180s} = 0{,}0833\,m/s \qquad V_v = \frac{7{,}60m}{3\min} = \frac{7{,}60m}{180s} = 0{,}0422\,m/s$$

Montamos um sistema de equações observando que a velocidade do barco na direção vertical é a soma da velocidade da correnteza mais a velocidade do barco em relação à água também na vertical e que a correnteza não contribui para a velocidade horizontal (chamamos a velocidade do barco em relação à água de v):

(1) $V_v = -v_c + v sen\theta$ (componente vertical)

(2) $V_h = v\cos\theta$ (componente horizontal).

De (2) temos

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{V_h}{v}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0{,}0833\,m/s}{10\,m/s}\right) = 89{,}°5.$$

Substituindo em (1), encontramos:

$$v_c = v sen\theta - V_v = -(10\,m/s)sen(89{,}°5) - 0{,}0422\,m/s = 9{,}96\,m/s$$

b) Para se mover na horizontal a velocidade vertical deve ser zero. De (1) temos:

$$0 = -v_c + 10\,sen\theta \Rightarrow \theta = sen^{-1}\left(\frac{v_c}{v}\right) = sen^{-1}\left(\frac{8{,}50\,m/s}{10\,m/s}\right) = 58°$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 11 - Exercícios de Fixação

E11.1: Não é possível o corpo estar em equilíbrio quando só há uma força atuando sobre ele porque a segunda lei de Newton não seria obedecida.

E11.2: Pela segunda lei de Newton, o movimento da moeda ao longo da horizontal é retilíneo e uniforme porque não há forças atuando sobre ela nessa direção. Na vertical atua a força da gravidade e o movimento da moeda nessa direção é retilíneo e uniformemente variado.

O trem estando em movimento retilíneo e uniforme na direção horizontal, sua velocidade será igual à componente horizontal da velocidade da moeda e, portanto, a moeda ao cair voltará para a mesma posição relativamente ao trem (e a você se você não se moveu em relação ao trem).

Quando o trem acelera, ele passa a andar com velocidade maior que a da moeda quando foi lançada (e que permanece constante de acordo com a primeira lei de Newton). Assim, a moeda cairá em um ponto do trem situado atrás daquele em que ela foi lançada.

Quando o trem faz uma curva, ele descreve um círculo, enquanto que a moeda permanece em movimento horizontal retilíneo e uniforme. Portanto, a moeda tenderá a se afastar lateralmente do ponto do trem em que foi lançada e cairá ao lado da posição de lançamento.

E11.3: A bola de boliche está sob ação de uma força de atrito que a desacelera. Por isso, seu movimento deixa de ser uniforme.

E11.4: Quando você está parado sobre a Terra, você está com um movimento circular uniforme em torno do eixo de rotação da Terra. Sua velocidade em relação a esse eixo é a mesma da Terra. Quando você salta, sua velocidade linear em relação ao eixo de rotação não varia e é a mesma da velocidade da Terra (e portanto, das paredes). Por isso, elas não se chocam contra você.

Fund. Física I - Gabarito Aula 12 - Exercícios de Fixação

E12.1: Temos: F=129 N e m=63 kg. Então, da segunda lei:

$$a=\frac{F}{m}=\frac{129\,\mathrm{N}}{63\,\mathrm{kg}}=2.05\,\mathrm{m/s^2}$$

E12.2: Temos m=6 kg e F=4.2 N.

(a) a aceleração é: $a= = \frac{4.2\,\mathrm{N}}{6\,\mathrm{kg}}=0.7\,\mathrm{m/s^2}$

(b) Como a aceleração é constante, a velocidade é dada em função do tempo por: $v=v_0+a\,t$ de onde tiramos:

$$t=\frac{v-v_0}{a}=\frac{5.5-0}{0.7}=7.8\,\mathrm{s}$$

(c) a distância percorrida é dada por:

$$x=v_0\,t+\frac{1}{2}a\,t^2=0+\frac{1}{2}\times 0.7\times 7.8^2=21.3\,\mathrm{m}$$

E12.3: A força que atua sobre o passageiro é $F=m\,a$ sendo m a massa do passageiro e a a sua desaceleração, que é a mesma que tem o carro do instante em que bate contra a árvore até parar. Ela pode ser calculada sabendo que o passageiro se desloca de x=0.67 m enquanto sua velocidade varia de 52 km/h a 0 km/h. Supondo a desaceleração constante e com v=0, temos:

$$a=\frac{v_{0\,\mathrm{m/s^2}}^2}{2x}$$

Mas $v_0=52\,\mathrm{km/h}=52\times 10^3\,\mathrm{m}/3600\,\mathrm{s}=14.4\,\mathrm{m/s}$. Então:

$$a=\frac{(14.4)^2}{2\times 0.67}=1.55\times 10^2\,\mathrm{m/s^2}$$

Finalmente,

$$F=m\,a=39\,\mathrm{kg}\times 1.55\times 10^2\,\mathrm{m/s^2}=6.04\times 10^3\,\mathrm{N}$$

E12.4: Temos $m=1.7\times 10^3$ kg e $v_0=505$ m/s , Δx=0.07 m e v=0 m/s.. A desaceleração da bala é dada, em função da distância percorrida por ela até parar por:

$$a=\frac{v^2-v_0^2}{2\,\Delta x}=\frac{0-5.05\times 10^2}{2\,7\times 10^{-2}}=-1.82\times 10^2\,\mathrm{m/s^2}$$

em que o sinal negativo mostra que a bala está desacelerando. Então, a força exercida pela árvore é:

$$F = m\,a = 1.7\times10^{-3}\,\mathrm{kg}\times1.82\times10^{2}\,\mathrm{m/s^2} = 0.31\,\mathrm{N}$$

E12.5: A força aplicada à rocha é $F=m\,a$ em que m é a massa da rocha e a a sua aceleração. se o peso da rocha é P, a sua massa é $m=P/g$ e a força exercida spelo super-herói sobre a rocha é:

$$F = \frac{P}{g}a = \frac{300\,\mathrm{N}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}\times10\,\mathrm{m/s^2}} = 3.06\times10^{2}\,\mathrm{N}$$

E12.6: (a) A massa da melancia na superfície da Terra é $m=P/g=40\,\mathrm{N}/9.8\,\mathrm{m/s^2}=4.1\,\mathrm{kg}$.
A massa da melancia na Lua é a mesma que na Terra. Seu peso é $P_1=m g_1$ em que g_1 é a aceleração da gravidade na Lua. Como $g_1=g/6$, o peso da melacia na Lua é 1/6 do seu peso na Terra:

$$P_1 = m\frac{g}{6} = \frac{1}{6}\times4.1\,\mathrm{kg}\times9.8\,\mathrm{m/s^2} = 0.68\,\mathrm{N}$$

E12.7: A massa da pessoa é $m = = \dfrac{700\,\mathrm{N}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}} = 71\,\mathrm{kg}$.

(a) A massa não varia e, portanto, quando $g=4.7\,\mathrm{m/s^2}$ o peso da pessoa é:

$$P = m\,g = 71\,\mathrm{kg}\times4.4\,\mathrm{m/s^2} = 3.4\times10^{2}\,\mathrm{N}$$

(b) A massaé sempre a mesma mas, quando g–0, o peso é nulo.

Fund. Física I - Gabarito Aula 13 - Exercícios de Fixação

E13.1: (a) As forças que atuam no copo são seu peso (vertical e dirigido para baixo) e a força de resistência do ar (vertical e dirigida para cima.
(b) A força de reação ao peso é a força que o copo exerce sobre a Terra (vertical e dirigida para cima) sendo aplicada na Terra; a força de reação à resistência do ar é aplicada nas moléculas do ar em contato com o copo. Ela é vertical e dirigida para cima.

E13.2: Se o elevador estiver em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, a força que a pessoa exerce no elevador tem o mesmo módulo e sentido contrário da que o elevador exerce na pessoa, portanto 630 N. Como a força que o elevador exerce na pessoa é de 600 N, a força de reação da pessoa sobre o elevador é 600N. Sendo ela menor que a que deveria exercer se o elevador estivesse em equilíbrio, concluimos que o sistema elevador+pessoa deve estar acelerado. A força do elevador sobre a pessoa é de baixo para cima e, obviamente, a da pessoa sobre o elevador — que é o peso da pessoa — tem sentido de cima para baixo. Escolhendo um eixo vertical com sentido para cima, a segunda lei de Newton aplicada à pessoa nos dá:

$$F_{ep} - P = m\,a = \frac{P}{g}a$$

em que F_{ep} é a forca do elevador sobre a pessoa, P é o peso da pessoa, $m = P/g$ a sua massa e a a sua aceleração suposta dirigida de baixo para cima. Então:

$$a = \frac{F_{ep} - P}{P} \times g = \frac{600N - 630N}{630\,\text{N}} \times 9.8\,\text{m.s}^{-2} = -0.47\,\text{m/s}$$

O sinal negativo mostra que o elevador tem aceleração dirigida de cima para baixo; portanto, ou ele está subindo desacelerando ou descendo acelerado.

E13.3: Temos: $m_o = 2000\,\text{kg}; m_c = 570\,\text{kg}; a_o = 11\,\text{m/s}^2;$

A força que o ônobus exerce no carro é a mesma que a do carro sobre ele. Ela vale:

$$F = m_o a_o = 2000\,\text{kg} \times 11\,\text{m/s}^2 = 2.2 \times 10^4\,\text{N}$$

A aceleração do carro é:

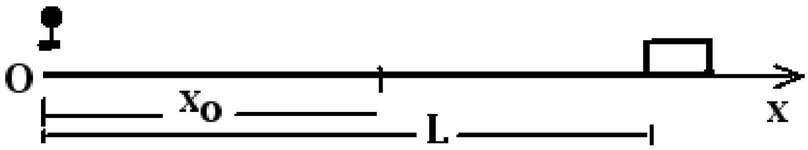
$$a_c = \frac{F}{m_c} = \frac{2.2 \times 10^4\,\text{N}}{5.5 \times 10^2\,\text{kg}} = 39\,\text{m/s}^2$$

E13.4: Temos: $m_H = 60\,\text{kg}; m_T = 10\,\text{kg}; L = 17\,\text{m}$ em que L é a distância inicial entre o homem e o trenó.
(a) A força que o homem exerce no trenó ao puxá-lo é F=6.0 N, a aceleração do trenó é:

$$a_T = \frac{6.0\,\text{N}}{10\,\text{kg}} = 0.6\,\text{m/s}^2$$

(b) A aceleração do homem é:

$$a_H = \frac{6.0\,\mathrm{N}}{60\,\mathrm{kg}} = 0.1\,\mathrm{m/s^2}$$



(c) Seja a origem dos eixos do x na posição do homem no instante em que ele começa a puxar o trenó e sentido dirigido para o trenó. Então, nesse instante, o trenó está à distância L do homem. A força que atua no homem o acelera no sentido positivo do eixo e a que atua no trenó o acelera no sentido negativo do eixo. O movimento do homem é acelerado, partindo so repouso. Sua posição em relação à origem é dada, em função do tempo, por:

$$x_H = \frac{1}{2} a_H t^2$$

O trenó parte do repouso do ponto de coordenada L. Sua posição em função do tempo é:

$$x_T = L - \frac{1}{2} a_t t^2$$

Seja t_0 o instante em que eles se encontram. Nesse instante, a posição do homem em relação à origem é:

$$x_H = \frac{1}{2} a_H t_0^2$$

e a posição do trenó é:

$$x_T = L - \frac{1}{2} a_T t_0^2$$

Como eles estão à mesma distância x_0 da origem, temos $x_H = x_T = x_0$ e:

$$\frac{1}{2} a_H t_0^2 = L - \frac{1}{2} a_T t_0^2$$

Eliminando t_0 das duas equações vem:

$$L - x_0 = \frac{1}{2} a_T \frac{2x_0}{a_H}$$

Resolvendo a equação acima para x_0 obtemos:

$$x_0 = \frac{L}{1 + \frac{T}{H}} = \frac{17\,\mathrm{m}}{1+6} = 2.4\,\mathrm{m}$$

Fund. Física I - Gabarito Unidade 04 - Problemas

P4.1:
(a) Sobre o peixe atuam duas forças verticais: o peso, dirigido para baixo, e a força da mola, dirigida para cima. A força da mola é a reação à força que o peixe exerce sobre a mola, dirigida para baixo. Como o peixe está preso a um elevador acelerado, ele terá a mesma aceleração do elevador. Assim, a resultante de forças que atuam sobre o peixe é igual à massa do peixe multiplicada pela sua aceleração. Então, se P é o peso do peixe e F é a força da mola sobre ele:

$$F - P = m\,a$$

em que consideramos o sentido vertical para cima como positivo. Dessa equação vem:

$$F - m\,g = m\,a$$

ou:

Erro!

O peso verdadeiro do peixe é

$$P = m\,g = 3.72\,\text{kg} \times 9.81\,\text{m/s}^2 = 36.4\,\text{N}$$

(b) a aceleração do peixe é: $a = (F - P)/m$. Portanto, para que o ponteiro da balança marque F=35.0 N, é preciso que a aceleração do peixe seja:

Erro!

O sinal negativo indica que a aceleração deve ter sentido oposto ao escolhi como positivo para o eixo. Portanto, para que o ponteiro da balança marque 35.0 N, é preciso que o elevador desça com aceleração $a = 0.38\text{m/s}^2$.
(c) Se o cabo do elevador se romper, a=0 e a leitura da balança será igual ao peso verdadeiro do peixe.

P4.2: As forças que atuam no artista são seu peso P (dirigido para baixo) e a força do tecido N (dirigida para cima). Então, se a é a aceleração do artista, temos:

$$T - P = m\,a$$

(a) se o movimento é uniforme, a=0 e T=P;
(b) se o artista está suspenso em repouso, a=0 e T=P;
(c) Se ele está subindo com aceleração a: $t - P = m\,a$, de onde vem que $T = P + a$;
(d) Se elke está descendo com aceleração a, então: $T - P = m\,(-a)$ e $T = P - a$.

P4.3: Sobre o balde atuam duas forças: a tensão T na corda, dirigida para cima e o seu peso P, dirigido para baixo.
1- nesse caso, o movimento do blade é acelerado para cima. Então:

$$T - P = m\,a \qquad T = m\,(g + a)$$

Mas como a aceleração é constante, ela pode ser calculada a partir das velocidades inicial ($v_0 = 0\,\text{m/s}$) e final ($v = 0.6\,\text{m/s}$) do balde e da distância percorrida por ele ($x = 0.15\,\text{m}$). Temos

Erro!

Então:

$$T = 5.0\,\text{kg} \times (9.8 + 1.2)\,\text{m/s}^2 = 55\,\text{N}$$

2- Como a velocidade é constante, $T = m\,g = 5.0\,\text{kg} \times 9.8\,\text{m/s}^2 = 49\,\text{N}$.

3- O movimento agora é uniformemente desacelerado e $T - m\,g = m\,a$ ou $T = m\,(g - a)$. Mas a aceleração é $a = -0.70\,\text{m/s}^2$. Então:

$$T = 5.0\,\text{kg} \times (9.8 - 0.7)\,\text{m/s}^2 = 46\,\text{N}$$

P4.4: Temos $a_1 = 10\,\text{m/s}^2$ e $a_2 = 4\text{m/s}^2$.

(a) A força que atua sobre a massa m_1 é $F = m_1 a_1$ e a que atua sobre m_2 é $F = m_2 a_2$, a mesma que atua sobre m_1.Então:

Erro!

Aplicando agora uma propriedade das proporções, temos que:

Erro!

de onde tiramos:

Erro!

onde o sinal (-) indica que $m_1 < m_2$.

A força que atua sobre a diferença de massas é:

$$F = (m_1 - m_2)\,a$$

e como ela igual à força que atua sobre m_2 para produzir a aceleração $a_2 = 4\,\text{m/s}^2$, temos:

Erro!

(b) Da mesma forma, podemos escrever que:

Erro!

ou:

Erro!

A força que atua sobre a soma de massas é:

$$F = (m_1 + m_2)\,a$$

e como ela igual à força que atua sobre m_2 para produzir a aceleração $a_2 = 4\,\text{m/s}^2$, temos:

Erro!

P4.5: Temos m=0.28 kg, a=9.3 m/s vertical e para baixo.

O meteoro está sujeito a duas forças: seu peso (P) e a força da resistência do ar (F), que está dirigida para cima. Então, a segunda lei de Newton nos dá:

$$F - P = -m\,a$$

em que tomamos o sentido para cima como positivo. Logo:

$$F-P = mg-m\,a= m(g\text{-}a) = 0{,}28kg(9{,}8\text{-}9{,}3)\ m/s^2=0{,}14N.$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 14 - Exercícios de Fixação

E14.1)
Dados:
$m_1 = 3{,}7\,kg$
$m_2 = 2{,}3\,kg$
$\theta = 30^\circ$
a) Aplicando a segunda lei de Newton temos:
$$\begin{cases} N_1 - m_1 g\cos\theta = 0 \ \ (1) \\ T - m_1 g sen\theta = m_1 a \ \ (2) \\ m_2 g - T = m_2 a \ \ (3) \end{cases}$$
Somando (2) e (3)
$$m_2 g - m_1 g sen\theta = m_2 a + m_1 a$$
$$g(m_2 - m_1 sen\theta) = a(m_1 + m_2)$$
$$a = \frac{g(m_2 - m_1 sen\theta)}{(m_1 + m_2)} = 0{,}7\,m/s^2$$
A aceleração do bloco m_2 é vertical para baixo.

b) De (3) temos:
$$T = m_2 g - m_2 a = 20{,}9\,N$$

E14.2
Dados:
Peso da caixa $P = 800\,N$
Força mínima que o estudante deve fazer para manter a caixa em repouso $F = 200\,N$
Ângulo de inclinação do plano $\theta = 30^\circ$
Força de atrito estático máximo $F_{Emáx} = \mu_e N = \mu_e P\cos\theta$
a) Como o bloco está em repouso (na iminência de deslizar para paixo) temos:
$$F + F_{Emáx} - Psen\theta = 0$$
$$F_{Emáx} = Psen\theta - F$$
$$\mu_e P\cos\theta = Psen\theta - F$$
$$\mu_e = \frac{Psen\theta - F}{P\cos\theta}$$
b) A maior força F_M que a pessoa pode aplicar na caixa, tende a provocar um deslizamento para cima, logo o atrito atua em sentido oposto. Assim temos:
$$F_M - F_{Emáx} - Psen\theta = 0$$
$$F_M = F_{Emáx} + Psen\theta$$
$$F_M = (Psen\theta - F) + Psen\theta$$
$$F_M = 2Psen\theta - F = 2\cdot(800\,N)\cdot 0{,}5 - (200\,N) = 600\,N$$

E14.3
Dados:
Massa da melancia $m = 5\,kg$

Constante elástica da mola $k = 400 N/m$
Como a melancia está em equilíbrio temos:
$mg - kx = 0$

$$x = \frac{mg}{k}$$

E14.4
Dados:
Massa do corpo $m = 4kg$
Constante da mola $k = 300 N/m$
Aceleração do corpo $a = 5m/s^2$
Na situação descrita a força resultante que atua no corpo é a força que a mola faz, logo:
$k \cdot x = m \cdot a$

$$x = \frac{m \cdot a}{k}$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 15 - Exercícios de Fixação

E15.1
Dados:
Tração na corda que puxa o bloco $T = 20\,N$
Coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0{,}3$
Como o bloco se move com velocidade constante sua aceleração é nula. Assim o módulo da força de atrito é igual ao da tração $F_{at} = 20\,N$.
Qual a massa do bloco?

E15.2
Dados:
Peso do bloco $P = 20\,N$
$\mu_e = 0{,}8$
$\mu_c = 0{,}6$
Como o bloco se encontra em uma superfície horizontal temos $N = P$, logo a maior valor da força de atrito estático é:
$F_{Emáx} = \mu_e \cdot N = 16\,N$
Quando o bloco estiver em movimento o atrito será $F_c = \mu_c \cdot N = 12\,N$
a) Como a tração na corda é 15 N, ou seja, menor que $F_{Emáx}$ o bloco não entra em movimento e o módulo da força de atrito é igual à tração na corda $F_{at} = 15\,N$.
b) Se a tração na corda for de 20N o bloco entrará em movimento e o módulo da força de atrito será $F_{at} = F_c = 12\,N$

E15.3
Dados:
Massa do caixote $m = 100\,kg$
Força que o trabalhador exerce $F = 500\,N$
$\mu_e = 0{,}6$
$\mu_c = 0{,}4$
Força de atrito estático máximo $F_{Emáx} = \mu_e \cdot N = 300\,N$
Força de atrito cinético $F_c = \mu_c \cdot N = 200\,N$
Como a força que o trabalhador é maior que $F_{Emáx}$ o bloco entra em movimento e o atrito será cinético $F_{at} = F_c = 200\,N$

E15.4
Dados:
Massa da caixa apoiada sobre o plano $m_1 = 3\,kg$
Reação normal do plano sobre a caixa $N_1 = m_1 \cdot g$
Massa da caixa dependurada pela corda $m_2 = 2\,kg$
Altura da caixa que está dependurada $h = 2\,m$
a) Se as caixas estão na iminência de entrar em movimento então temos:

$$\begin{cases} T = m_2 \cdot g \\ F_{Emáx} = T \end{cases} \Rightarrow F_{Emáx} = m_2 \cdot g \Rightarrow$$

$$\mu_e \cdot N_1 = m_2 \cdot g$$

$$\mu_e \cdot m_1 \cdot g = m_2 \cdot g$$

$$\mu_e = \frac{m_2}{m_1}$$

b) Na situação proposta o bloco entrará em movimento e $\mu_c = 0{,}3$. Aplicando as leis de Newton temos:

$$\begin{cases} T - \mu_c \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \\ m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a \end{cases} \Rightarrow g(m_2 - \mu_c \cdot m_1) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow$$

$$a = \frac{g(m_2 - \mu_c \cdot m_1)}{(m_1 + m_2)}$$

A caixa descreve um movimento retilíneo uniformemente variado onde:

$$h = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{\left(\frac{g(m_2 - \mu_c \cdot m_1)}{(m_1 + m_2)}\right)}} = \sqrt{\frac{2h \cdot (m_1 + m_2)}{g(m_2 - \mu_c \cdot m_1)}}$$

E15.5

Dados:

Coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada $\mu_e = 0{,}6$

Se o carro está em uma pista horizontal e a resultante sobre o carro é a força de atrito estático, então temos:

$$F_R = m \cdot a$$

$$\mu_e \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

$$a = \mu_e \cdot g$$

E15.6

Dados:

Massa do bloco $m = 5\,kg$

Força que comprime o bloco contra a parede $F = 100\,N$

a) Como o bloco está em repouso a força de atrito deve ser igual ao seu peso

$$F_{at} = m \cdot g$$

b) $\mu_e = 0{,}40$, se o bloco está na iminência de começar a se mover temos:

$$F_{Emáx} = m \cdot g$$

$$\mu_e \cdot N = m \cdot g$$

$$N = \frac{m \cdot g}{\mu_e}$$

A força F que a pessoa exerce deve ser igual à N, logo $F = \dfrac{m \cdot g}{\mu_e}$.

E15.7
Dados:
Força de resistência em um fluido $F = -bv$ (a força é oposta à velocidade).
Quando a pedra atinge a velocidade terminal sua aceleração é nula, portanto;

$$m \cdot g - bv_t = 0$$

$$bv_t = m \cdot g$$

$$v_t = \frac{m \cdot g}{b}$$

E15.8

Quando a gota de chuva atinge a velocidade terminal temos:

$$m \cdot g - C \cdot v_t^2 = 0$$

$$C \cdot v_t^2 = m \cdot g$$

$$v_t = \sqrt{\frac{m \cdot g}{C}}$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 16 - Exercícios de Fixação

E16.1)

Dados:
Massa da caixa $m = 0{,}300\,kg$
Comprimento da corda que prende a caixa $R = 0{,}140\,m$ (raio da trajetória da caixa).
Freqüência do movimento $f = 2\,rev/s = 2\,Hz$
O tempo de cada revolução, ou seja, o período do movimento é $T = \frac{1}{f} = 0{,}5\,s$.
A velocidade linear da caixa é $V = \frac{2\pi R}{T}$
Na situação descrita a tração F na corda atua como força centrípeta logo:

$$F = F_C = \frac{m \cdot V^2}{R}$$

E16.2

Dados:
Raio da curva $R = 200\,m$
Coeficiente de atrito estático $\mu_S = 0{,}8$
A força de atrito estático é quem permite ao carro realizar a curva (força centrípeta) logo:

$$F_{at} = F_C$$

$$\mu_S \cdot m \cdot g = \frac{m \cdot V_{máx}^2}{R}$$

$$\mu_S \cdot g = \frac{V_{máx}^2}{R} \Rightarrow V_{máx} = \sqrt{\mu_S \cdot g \cdot R}$$

E16.3
a) O Motorista deve fazer a curva para a direita, pois (devido à inércia) tendência da garota é permanecer em MRU. A sensação que a garota tem é de que está sendo "jogada para fora da curva", ou seja, para a esquerda (lado em que o motorista se encontra).

b) A velocidade do carro é $V = 20\,m/s$, o coeficiente de atrito é $\mu_S = 0{,}35$.
Na situação em que a garota está prestes a deslizar temos:

$$F_{at} = F_C$$

$$\mu_S \cdot m \cdot g = \frac{m \cdot V^2}{R_{máx}}$$

$$\mu_S \cdot g = \frac{V^2}{R_{máx}} \Rightarrow R_{máx} = \frac{V^2}{\mu_S \cdot g}$$

Para valores de R menores que $R_{máx}$ a garota desliza.

E16.4

Quando o carro está no topo da pista temos:

$$P - N = F_C$$

$$m \cdot g - N = \frac{m \cdot V^2}{R}$$

Como o carro está na iminência de perder o contato N = 0, logo:

$$m \cdot g - 0 = \frac{m \cdot V_{máx}^2}{R}$$

$$m \cdot g = \frac{m \cdot V_{máx}^2}{R} \Rightarrow V_{máx}^2 = R \cdot g$$

$$V_{máx} = \sqrt{R \cdot g}$$

E16.5

Dados:

Raio da curva $R = 7{,}5\,m$

Velocidade $V = 90\,km/h = \left(\frac{90}{3{,}6}\right) m/s$

A aceleração centrípeta da equipe é $a_c = \frac{V^2}{R}$

O numero N de vezes que essa aceleração é maior que a da gravidade é:

$$a_c = N \cdot g \Rightarrow N = \frac{a_c}{g}$$

$$N = \frac{V^2}{R \cdot g}$$

E16.6

Dados:

Peso do estudante $P = 550\,N$

Massa do estudante $m = \frac{P}{g}$

Leitura na balança (a balança lê a Nornal) $N = 450\,N$

a) Como o módulo da força peso é maior que a Normal, a força resultante é vertical para baixo. A aceleração possui mesma direção e sentido que a resultante e seu módulo é dado por:

$$P - N = m \cdot a$$

$$a = \frac{(P - N)}{m} = \frac{(P - N)}{\left(\frac{P}{g}\right)}$$

$$a = g \cdot \frac{(P - N)}{P}$$

b) Se a leitura na balança é $N = 670\,N$ a resultante (logo a aceleração também) é vertical para cima. Nesse caso temos:

$$N - P = m \cdot a$$

$$a = \frac{(N - P)}{m} = \frac{(N - P)}{\left(\frac{P}{g}\right)}$$

$$a = g \cdot \frac{(N - P)}{P}$$

c) Se a leitura na balança é zero $N = 0$, a aceleração do elevador será igual à da gravidade (o elevador estará em queda livre).

Fund. Física I - Gabarito Unidade 05 - Problemas

P 16.1 → P5.1)
Dados:
Massa da caixa $m = 100\,kg$

Ângulo de inclinação da rampa $\theta = 10^\circ$
Como a velocidade da caixa é constante, a resultante sobre o caixote é nula e a força F que o carregador faz deve ser igual à $m \cdot g \cdot sen\theta$.

P16.2 → P5.2)
Dados:
Peso do estudante $P = 570\,N$

Massa do estudante $m = \dfrac{P}{g}$

a) Se a leitura na balança é $N = 470\,N$ então o elevador possui aceleração vertical para baixo. Aplicando a segunda lei de Newton temos:

$$P - N = m \cdot a$$

$$a = \frac{P - N}{m}$$

b) Se a leitura na balança for $N = 670\,N$ então a resultante será para cima e consequentemente a aceleração também será vertical para cima.Seu módulo é:

$$N - P = m \cdot a$$

$$a = \frac{N - P}{m}$$

P16.3 → P5.3)
Dados:
Massa da caixa $m = 20\,kg$

Coeficiente de atrito cinético $\mu_C = 0{,}26$

Coeficiente de atrito estático $\mu_e = 0{,}36$

a) Quando a caixa está prestes a deslizar temos:

$$\mu_e \cdot mg\cos\theta = mgsen\theta \Rightarrow$$

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta} = \mu_e \Rightarrow$$

$$\theta = tg^{-1}(\mu_e)$$

b) Quando a caixa começa a deslizar a força de atrito cinético vale $F_c = \mu_C \cdot mg \cdot \cos\theta$.
Aplicando a segunda lei de Newton temos:

$$mg \cdot sen\theta - \mu_C \cdot mg \cdot \cos\theta = m \cdot a$$

$$a = g(sen\theta - \mu_C \cdot \cos\theta)$$

c) Após a caixa percorrer a distância $d = 4m$, sua velocidade será:

$$V^2 = 0^2 + 2 \cdot a \cdot d$$

$$V = \sqrt{2 \cdot a \cdot d} = \sqrt{2 \cdot (g \cdot (sen\theta - \mu_C \cdot \cos\theta)) d}$$

P16.4 → P5.4)

Dados:
Força que o vento exerce na caixa $F_x = 160\,N$
A velocidade inicial da caixa possui as seguintes componentes:
$V_{xi} = +80\,m/s$

$V_{yi} = 0$

Posição inicial da caixa:
$X_i = 0$

$Y_i = +1300\,m$

Altura final da caixa $Y_F = 0$
Aceleração da caixa:
$a_y = -g$

$$a_x = -\frac{F}{m}$$

Onde m é a massa da caixa.

A componente horizontal da caixa, assim como a horizontal, descreve um MRUV.
Assim temos:

$$Y_F = Y_i + V_{yi} \cdot t_q + \frac{1}{2} a_y \cdot t_q^2$$

$$0 = Y_i - \frac{1}{2} g \cdot t_q^2$$

$$t_q^2 = \frac{2Y_i}{g} \Rightarrow t_q = \sqrt{\frac{2Y_i}{g}}$$

A componente horizontal será dada por:

$$X_F = X_i + V_{xi} \cdot t_q + \frac{1}{2} a_x \cdot t_q^2$$

$$X_F = 0 + V_{xi} \cdot t_q - \frac{1}{2} \frac{F}{m} \cdot t_q^2$$

$$X_F = V_{xi} \cdot \sqrt{\frac{2Y_i}{g}} - \frac{1}{2} \frac{F}{m} \cdot \frac{2Y_i}{g}$$

$$X_F = V_{xi} \cdot \sqrt{\frac{2Y_i}{g}} - \left(\frac{F}{m} \cdot \frac{Y_i}{g} \right)$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 17 - Exercícios de Fixação

E17.1
Dados:
Massa do baú $m = 27\,kg$
Ângulo de inclinação do plano $\theta = 25^\circ$
Distância percorrida pelo baú $d = 3{,}6\,m$
Força exercida pelo trabalhador $F = 120\,N$
a) $W_{TRABALHADOR} = F \cdot d \cdot \cos 0 = F \cdot d$
b) $W_{PESO} = (-mg) \cdot d \cdot sen\theta$, só a componente paralela ao plano realiza trabalho.
c)Como a Normal é perpendicular ao deslocamento ela não realiza trabalho.

E17.2
Dados:
Distância percorrida pelo bloco d
Massa do bloco M
Aceleração do bloco g/4 para baixo.
a) A tração no bloco é:

$$Mg - T = M \cdot \frac{g}{4}$$

$$T = Mg - M \cdot \frac{g}{4} = \frac{3Mg}{4}$$

O trabalho realizado pelo cabo é:

$$W_{CABO} = T \cdot d \cdot \cos 180 = -\frac{3Mg}{4} \cdot d$$

b) O trabalho realizado pela força peso é:

$$W_{PESO} = (Mg) \cdot d \cdot \cos 0 = Mgd$$

E17.3
Dados:
$\theta = 13^\circ$
$d = 300\,m$
$F = 175\,N$
$W = F \cdot d \cdot \cos(13^\circ)$

Fund. Física I - Gabarito Aula 18 - Exercícios de Fixação

E18.1
Dados:
Velocidade inicial do trenó $V_i = 4{,}00 m/s$
Velocidade final do trenó $V_f = 6{,}00 m/s$
Massa do trenó $m = 9{,}00 kg$
Módulo do deslocamento do trenó $d = 2{,}40 m$

O trabalho da força resultante (que é a própria força F) é igual à variação da energia cinética, logo:

$$W_F = E_{CF} - E_{Ci}$$

$$F \cdot d \cdot \cos 0 = \frac{mV_f^2}{2} - \frac{mV_i^2}{2}$$

$$F = \frac{m}{2d}\left(V_f^2 - V_i^2\right)$$

E18.2
Dados:
Massa da bola $m = 0{,}410 kg$
Velocidade inicial da bola $V_i = 2{,}00 m/s$
Força que o jogador exerce $F = 45{,}0 N$
Velocidade final da bola $V_f = 6{,}00 m/s$
Se a força resultante sobre a bola for a força que o jogador exerce então teremos:

$$W_F = \Delta E_C$$

$$F \cdot d \cdot \cos(0) = \frac{m}{2}\left(V_f^2 - V_i^2\right)$$

$$d = \frac{m}{2F}\left(V_f^2 - V_i^2\right)$$

E18.3
Dados:
Massa da bola $m = 0{,}250 kg$
Velocidade inicial da bola $V_i = 35{,}0 m/s$
Velocidade final da bola $V_i = 33{,}5 m/s$
Como a altura inicial da bola é igual à sua altura final, podemos adotar esse nível como zero para a energia potencial. Assim a energia mecânica do bloco será igual à sua energia cinética.

$$E_{Mi} = \frac{mV_i^2}{2}$$

$$E_{Mf} = \frac{mV_f^2}{2}$$

$$\Delta E_M = \frac{m}{2}\left(V_f^2 - V_i^2\right)$$

A energia perdida devido à resistência do ar é igual à variação da energia mecânica.

E18.4

Dados:
Massa do melão $m = 0{,}300\,kg$

Altura inicial $h_i = 30\,m$

Velocidade inicial $V_i = 0$

a) Podemos relacionar o trabalho da força peso com a variação da energia potencial. Assim temos:

$$W_{PESO} = -\Delta E_{PG}$$

$$W_{PESO} = -(mgh_f - mgh_i)$$

$$W_{PESO} = -(0 - mgh_i) = +mgh_i$$

b) Como não há forças dissipativas a energia mecânica se conserva, logo:

$$E_{Mi} = E_{Mf}$$

$$\frac{1}{2}mV_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mV_{fi}^2 + mgh_f$$

$$0 + mgh_i = \frac{1}{2}mV_{fi}^2 + 0$$

$$V_{fi}^2 = 2gh_i$$

$$V_{fi} = \sqrt{2gh_i}$$

E18.5

Dados:

Constante elástica da mola $k = (1{,}60 \times 10^3)\,N/m$

a) O trabalho que deve ser realizado sobre a mola para que ela se alongue de $x_1 = (7{,}50 \times 10^{-3})m$ é igual ao ganho de energia potencial da mola.

$$W = \Delta E_{PE}$$

$$W = \frac{k \cdot x_1^2}{2} - \frac{k \cdot (0)^2}{2}$$

$$W = \frac{k \cdot x_1^2}{2}$$

b) O trabalho adicional que deve ser realizado sobre a mola para que ela se alongue de $x_1 = (7{,}50 \times 10^{-3})m$ até $x_2 = (15{,}00 \times 10^{-3})m$ é igual ao ganho de energia potencial da mola.

$$W = \Delta E_{PE}$$

$$W = \frac{k \cdot x_2^2}{2} - \frac{k \cdot x_1^2}{2}$$

$$W = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

E18.6
Dados:
Massa do bloco $m = 5{,}00\,kg$
Constante da mola $k = 250\,N/m$
Deformação sofrida pela mola $x_1 = 0{,}020\,m$
a) O trabalho realizado pela mola é o negativo da variação de sua energia potencial elástica, logo:

$$W_{MOLA} = -\Delta E_{PE}$$

$$W_{MOLA} = -\left(\frac{k \cdot (0)^2}{2} - \frac{k \cdot x_1^2}{2}\right)$$

$$W_{MOLA} = +\frac{k \cdot x_1^2}{2}$$

b) Como não há forças dissipativas temos:

$$E_{Mf} = E_{Mi}$$

$$\frac{mV_f^2}{2} = \frac{k \cdot x_i^2}{2}$$

$$V_f = \sqrt{\frac{k \cdot x_i^2}{m}}$$

E18.7
Dados:
Massa do tijolo $m = 1{,}90\,kg$
Constante elástica da mola $k = 470\,N/m$
Altura máxima atingida pelo tijolo $h = 3{,}8\,m$
Como não há forças dissipativas toda a energia potencial elástica será convertida em energia potencial gravitacional logo:

$$E_{PE} = E_{PG}$$

$$\frac{k \cdot x_i^2}{2} = mgh$$

$$x_i^2 = \frac{mgh}{k}$$

$$x_i = \sqrt{\frac{mgh}{k}}$$

Fund. Física I - Gabarito Aula 19 - Exercícios de Fixação

E19.1
Dados:
Massa do bloco $m = 1200\,kg$
Altura que o bloco sobe $h = 10\,m$
Tempo gasto $t = 35\,s$
Como o bloco sobe com velocidade constante a força que o guindaste faz é igual ao peso do bloco, assim temos:

$$P = \frac{W_F}{t}$$

$$P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$$

E19.2
Dados massa do carro $m = 990\,kg$
Velocidade final do carro $V = \frac{100}{3{,}6}\,m/s$
Tempo gasto $t = 4{,}2\,s$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\Delta E_c}{t}$$

$$P = \frac{\left(\frac{mV^2}{2}\right)}{t}$$

E19.3
Dados:
Massa do balde cheio (desprezando a massa do balde) $m = 5{,}0\,kg$
Velocidade com que o balde sobe $V = 0{,}62\,m/s$
a) Como a velocidade é constante a força resultante é nula e consequentemente o trabalho e a potência também são nulos.

b) A força que a pessoa faz possui módulo igual ao peso do objeto logo:
$P = F \cdot V \cdot \cos(0) = +mgV$
c) Os trabalhos realizados possuem o mesmo módulo, porém o trabalho da força peso é negativo e o trabalho realizado pela pessoa, positivo.

E19.6
Dados:
Vazão das cataratas $v = 1500\,m^3/s$ que corresponde à uma taxa de $Q = 1{,}5 \times 10^6\,kg/s$.
Altura da queda $h = 80\,m$
Numero de quedas d'água $N = 27$
A potência gerada por cada queda é: $p = Q \cdot g \cdot h$,
A potência total é $P_{TOTAL} = N \cdot Q \cdot g \cdot h$

E19.7

Dados:

Massa de cada engradado $m = 9{,}0\,kg$

Altura do 5º andar $h = 12\,m$

a) É necessário entregar 100 engradados em 30minutos ($t = 1800\,s$). Cada empregado desenvolve uma potência p (p = 5w ou p = 10w) logo:

A potência total necessária é $P = \dfrac{W_{TOTAL}}{t} = \dfrac{100 \cdot m \cdot g \cdot h}{t} = 60\,w$.

O número de trabalhadores é $N = \dfrac{P}{p}$.

Se p = 5 então N = 12.

Se p = 10 então N = 6.

b) Um empregado desenvolver uma potência média de 100W significa que ele realiza um trabalho de 100J a cada segundo. Supondo que ele esteja subindo com uma velocidade de aproximadamente 1m/s, então para percorrer 10m ele gastaria 10s e teria que carregar 100kg para desenvolver essa potência média.

Fund. Física I - Gabarito Unidade 06 - Problemas

P19.1 → P6.1)

Dados:
Altura inicial da bola $h_i = 1{,}90\,m$
Percentual de energia cinética perdida em cada colisão 10%
Altura final $h_f = 0{,}95\,m$
A bola perde em cada colisão 10% de sua energia MECÂNICA, como conseqüência após cada colisão ela atinge uma altura 10% menor que a atingida na colisão anterior. Assim as alturas atingidas formam a seguinte progressão geométrica.

$$h_i \cdot \frac{9}{10}, h_i \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2, h_i \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3, \ldots, h_i \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

Onde $h_i \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$ é a altura atingida após enésima colisão.

$$h_i \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n = h_f$$

Logo: $\left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{h_f}{h_i}$

$$n \cdot \log\left(\frac{9}{10}\right) = \log\left(\frac{h_f}{h_i}\right) \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{h_f}{h_i}\right)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}9)}$$

Como o Número de colisões N deve ser inteiro devemos pegar o primeiro natural maior que n.

P19.2 → P6.2)

Dados:
Deslocamento do elevador $d = 19{,}0\,m$
Trabalho realizado pela Normal $W_N = 8{,}25 \times 10^3\,J$
Trabalho da força peso $W_P = -7{,}35 \times 10^3\,J$

a) Podemos determinar a massa da mulher a partir do trabalho realizado pela força peso.

$$W_P = -m \cdot g \cdot d$$

$$m = -\frac{W_P}{g \cdot d}$$

b) A força normal é:

$$W_N = N \cdot d$$

$$N = \frac{W_N}{d}$$

c) Sua aceleração é:

$$N - mg = m.a$$

$$a = \frac{N - mg}{m} = \frac{\frac{W_N}{d} - \left(-\frac{W_P}{g \cdot d} \cdot g \right)}{-\frac{W_P}{g \cdot d}}$$

$$a = \frac{\frac{W_N}{d} + \frac{W_P}{d}}{-\frac{W_P}{g \cdot d}} = -g\frac{W_N + W_P}{W_P}$$

P19.3 → P6.3)

$$W = \int_{x=2m}^{x=3m} F(x)dx$$

c) $W = \int_{x=2m}^{x=3m} -a \cdot x^3 dx = \left. \frac{-a \cdot x^4}{4} \right]_{x=2m}^{x=3m}$

$$W = \frac{-a}{4}\left((3m)^4 - (2m)^4\right)$$

P19.4 → P6.4)

Dados:
Massa do carro $m = 1300kg$
Velocidade $V = 0,60m/s$
Deformação máxima da mola $x_1 = 0,075m$
Quando o carro comprime a mola toda sua energia cinética é convertida em energia potencial elástica, logo:

$$E_C = E_{PE}$$

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2}$$

$$k = m\left(\frac{V}{x_1^2}\right)^2$$

P19.5 → P6.5)
Dados:
Massa do carro m
Velocidade em função da posição $V = C \cdot x$
a) A aceleração do carro é:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dx} \cdot V = C \cdot V = C^2 x$$

A força que atua no carro é:

$$F = m \cdot a = m \cdot C^2 \cdot x$$

$$W = \int_{x=0}^{x=X_1} F(x)\,dx$$

b) $$W = \int_{x=0}^{x=X_1} mC^2 x\,dx = \left.\frac{mC^2 x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=X_1}$$

$$W = \frac{mC^2 X_1^2}{2}$$

Fund. de Física I - Gabarito Aula 20 - Exercícios de Fixação

E20.1: Temos m=0.5 kg e h=15 m.

(a) como o peso tem sentido oposto ao do movimento da pedra, o ângulo entre ele e o deslocamento dela é 180°. Então, o trabaalho realizado pelo peso na subida da pedra é:

$$W_s = m\,g\,h\,\cos 180° = -m\,g\,h$$

(b) Na descida, o peso tem o mesmo sentido do deslocamento da pedra e o ângulo entre eles é 0°. Logo:

$$W_d = m\,g\,h\,\cos 0° = m\,g\,h$$

(c) O tabalho total realizado pelo peso é:

$$W = W_s + W_d = 0$$

(d) a força gravitacional (peso) que atua na pedra é conservativa pois $W = 0$.

E20.2:

(a) Seja f a força de atrito. Como ela sempre se opõe ao movimento do caderno, o ângulo entre o seu sentido e o do deslocamento do caderno é de 180°. Assim, no movimento da direita para a esquerda, seu trabalho é:

$$W_1 = -f\,d\,\cos 180 = -f\,d$$

(b) No deslocamento da esquerda para a direita, ocorre o mesmo que no caso qnterior. Assim:

$$W_2 = -f\,d$$

(c) O trabalho total é: $W = W_1 + W_2 = -2\,f\,d$

(d) a força de atrito não é conservativa pois seu trabalho durante um deslocamento em uma trajetória fechada entre dois pontos é diferente de zero.

E21.1:

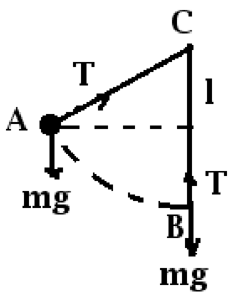
(a) Como a velocidade do pacote é constante, a força F, dirigida para cima, aplicada nele para levantá-lo deve ser igual ao peso do pacote:

$$F = m\,g = 5.00 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 40.0 \text{ N}$$

(b) Como a força F está dirigida para cima e o deslocamento do pacote tem sentido para cima, o trabalho realizado pela força é:

$$W = F\,h\,\cos 0° = 49.0 \text{ N} \times 10.0 \text{ m} = 4.9 \times 10^2 \text{J}$$

E21.1: Temos que $m = 0.15$ kg, $\hat{C}$=45°, ℓ=0.90 m



(a) no ponto B, tomando o nível de energia potencial nele, temos:

$$T_B = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 \qquad\qquad U_B = 0$$

No ponto A, temos:

$$T_A = 0 \qquad\qquad U_A = m\,g\,\ell\,(1 - \cos\hat{C}) = m\,g\,\ell\,(1 - \cos 45°)$$

A conservação da energia nos dá que:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_B^2 + 0 = 0 + m\,g\,\ell\,(1 - \cos 45°)$$

ou:

$$v_B = \sqrt{2\,g\,\ell\,(1 - 0.707)} = \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.90 \text{ m} \times 0.293} = 2.27 \text{ m/s}$$

(b) Quando o fio faz o ângulo de 45° com a vertical (ponto A), temos, da segunda lei de Newton:

$$T - mg\,\cos 45° = \frac{m\,v_A^2}{\ell}$$

Mas, nesta posição, $v_A = 0$. Então:

$$T = mg\,\cos 45° = 0.15 \text{ kg} \times 9.9 \text{ m/s}^2 \times 0.707 = 1.04 \text{ N}$$

(c) Na posição vertical, a segunda lei de Newton dá:

$$T - mg = \frac{m\,v_B^2}{\ell}$$

Do item (a), temos que:

$$v_B^2 = 2\,g\,\ell\,(1 - \cos 45°)$$

Então:

$$T = m\,g + \frac{2\,m\,g\,\ell\,(1 - \cos 45°)}{l} = m\,g + 2\,m\,g \times 0.293 = 1.586\,m\,g$$

ou:

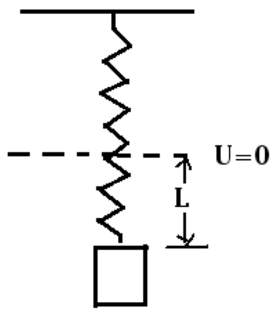
$$T = 1.586 \times 0.15 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 2.33 \text{ N}$$

E21.3: Temos $F = 700$ N e $d = 0.10$ m. Então, a constante da mola é:

$$k = \frac{F}{d} = 7000 \text{ N/m}$$

Quando prendemos a massa na mola, o sistema massa-mola fica sujeito a duas forças conservativas: o peso da massa e a força restauradora da mola. Sob ação do peso da massa m, a mola estica-se até que a força restauradora dela se iguala ao peso da massa.

Tomando o nível de energia potencial gravitacional e de energia potencial da mola na posição em que a mola não está esticada, temos que (figura abaixo) a energia potencial total do sistema é:



$$U = -m\,g\,L + \frac{1}{2}\,k\,L^2$$

sendo que o segundo termo do segundo membro é a energia potencial da mola.

E21.4: Temos $U = a\,x^3$, com $a = 1.30$ J/m^4. Então:

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -3\,a\,x^2$$

Para $x = -0.90$ m, $F = 3 \times 1.30$ J/m$^4 \times (-0.90)^2$ m$^2 = -3.16$ N. O sinal negativo dá o sentido da força.

E21.5: Temos $F_x = 5$ N.

(a) Da definição de energia potencial:

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F_x \mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x} 5\,\mathrm{d}x = -5\,(x - x_0)$$

Vemos que, para $x = x_0$, $U = 0$.

(b) Na expressão acima basta fazer $x_0 = 4$, obtendo: $U(x) = -5\,(x - 4)$

(c) Para $x = 6$ m, temos que $U = 14$ Joules. Então:

$$14 \text{ Joules} = -5 \text{ N}\,(6 \text{ m} - x_0)$$

ou:

$$14 \text{ Joules} = -30 \text{ N.m} + 5\text{N.m}\,x_0$$

ou:

$$x_0 = \frac{44}{5} \text{ m}$$

Então:

$$U(x) = -5\,(x - \frac{44}{5})$$

AULA 22 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

OBJETIVOS

- **DEFINIR ENERGIA MECÂNICA TOTAL;**
- **ESTUDAR A SUA CONSERVAÇÃO;**
- **APLICAR A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS MECÂNICOS.**

22.1- CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

O teorema do trabalho--energia estabelece que o trabalho realizado por uma força sobre uma partícula, no deslocamento de um ponto A pera outro B, é igual à variação da energia cinética dessa partícula entre os pontos A e B:

$$W_{AB} = E_c(B) - E_c(A)$$

Se a força que atua na partícula for uma força conservativa, pode se definir também uma função energia potencial (U) associada a essa força, de modo que a diferença dos seus valores em A e B seja igual ao negativo do trabalho realizado pela força sobre a partícula no deslocamento de A até B:

$$W_{AB} = -[U(B) - U(A)]$$

Dessas duas equações pode-se eliminar W_{AB} e obter:

$$E_c(B) - E_c(A) = -[U(B) - U(A)]$$

que pode ser escrita:

$$E_c(B) + U(B) = E_c(A) + U(A)$$

Essa equação mostra que, para uma força conservativa, a soma da energia cinética e da energia potencial da partícula é constante em qualquer ponto do espaço.

Denomina-se ***Energia Mecânica Total*** ou simplesmente ***Energia Mecânica*** da partícula, à *função matemática* E, soma da energia cinética e potencial da partícula.

$$E = E_c + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \qquad (22.1)$$

e o resultado acima, conhecido como ***Princípio de conservação da energia*** mostra que ***quando uma partícula se move sob ação de uma força conservativa, a sua energia mecânica se conserva***.

Quando, sobre a partícula, atuam várias forças conservativas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_1$, $\cdots$ $\vec{F}_n$ a eenergia potencial total é a soma das energias potenciais associadas a cada uma das forças; a equação da conservação da energia fica, então:

$$E = E_c + \sum_{i=1}^{n} U_i$$

É importante notar que quando atuam várias forças sobre a partícula, a energia potencial associada a cada uma delas é medida em relação a um nível de energia potencial que pode ser arbitrariamente estabelecido para cada uma delas; entretanto, os cálculos ficam mais simples se escolhermos um único nível para todas elas.

Exemplo 22.1

Seja um bloco de massa $m = 6.0$ kg colocado sobre um plano inclinado de um ângulo $\theta = 30^\circ$ sem atrito. O bloco é solto a partir do repouso no topo do plano e choca-se com uma mola de constante $k = 1.12 \times 10^3$ N/m no ponto mais baixo do plano inclinado (Figura 22.1). A mola, então, é comprimida de uma distância $d = 5.5$ cm. Deseja-se calcular qual a distância que o bloco percorre sobre o plano inclinado.

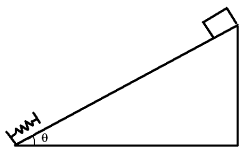


Figura 22.1: Bloco no plano inclinado e mola.

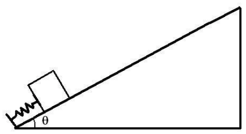


Figura 22.2: Bloco comprimindo a mola

Solução: Quando o bloco comprime a mola, temos a situação da Figura 22.2. Nela, O é o ponto em que a força da mola é nula; H é a altura do topo do plano em relação a O; h é a distância vertical do ponto de máxima compressão da mola em relação a O; x_0 é a deformação da mola.

Há duas forças conservativas atuando no bloco a partir do instante em que ele toca a mola: a da gravidade e a restauradora da mola. Escolhendo o mesmo nível zero para as energias potenciais como o ponto O, temos, para o topo do plano inclinado, lembrando que a mola está livre:

$$E_{c1} = 0 \qquad U_1(mola) = 0 \qquad U_1(corpo) = mgH$$

o que dá, para a energia mecânica no topo do plano:

$$E_1 = E_{c1} + U_1(mola) + U_1(corpo) = 0 + 0 + mgH = mgH$$

Para o ponto em que a mola tem sua máxima compressão, temos:

$$E_{c2} = 0 \qquad U_1(mola) = \frac{1}{2}kx_0^2 \qquad U_1(corpo) = -mgh$$

e a energia mecânica total se escreve para este ponto:

$$E_2 = E_{c2} + U_2(mola) + U_2(corpo) = 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 - mgh = \frac{1}{2}kx_0^2 - mgh$$

A conservação da energia dá, então:

$$mgH = \frac{1}{2}kx_0^2 - mgh \qquad (22.2)$$

Note que a energia potencial da mola é dada em função da *distância sobre o plano* de que a mola é comprimida, enquanto que a energia potencial gravitacional é expressa em função da altura sobre a base do plano. Então, se D é a distância percorrida pelo bloco sobre o plano, temos que:

$$h = x_0\,sen\theta \qquad e \qquad H = (D - x_0)sen\theta$$

Levando esses valores de h e H na equação (22.2), obtemos:

$$mg(D - x_0)sen\theta = \frac{1}{2}kx_0^2 - mgx_0\,sen\theta$$

de onde tiramos:

$$D = \frac{kx_0^2}{2mg\,sen\theta}$$

que, com os valores numéricos, dá: $D = 0.06$ m

Atividade 22.1: Resolver o Exemplo 21.1 colocando o nível de energia no ponto onde a mola está com compressão máxima.

A conservação da energia é uma ferramenta muito importante quando tratamos problemas em que a determinação da direção e sentido da força são difíceis ou quando o ângulo entre a força e o deslocamento varia com a posição do corpo. O fato de que a conservação da energia se aplica ao início e fim do intervalo de distâncias considerado ou do deslocamento, torna dispensável conhecer como essas variáveis se comportam.

Exemplo 22.2

Um bloco de massa m é solto do alto de um trilho curvo sem atrito mostrado na Figura 22.3. Determinar a força resultante que atua sobre o bloco no ponto Q.

Solução:

No ponto Q há duas forças atuando sobre o bloco: o seu peso, com direção vertical e para baixo e a força normal que o trilho exerce sobre o bloco.

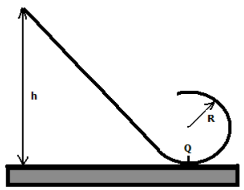


Figura 22.3: Bloco deslizando sobre um trilho curvo

Essa força é a força centrípeta que faz o bloco ter movimento circular. Então:

$$N = \frac{mv^2}{r}$$

Para determinar a velocidade em Q aplicamos a conservação da energia ao bloco. Ao longo de toda a sua trajetória, o bloco está sujeito a duas forças: o seu peso, que é uma força conservativa, e a reação normal do trilho sobre o bloco, que não realiza trabalho porque ela é sempre perpendicular ao deslocamento do bloco.

No ponto inicial P, a velocidade do bloco é nula e sua altura em relação ao solo é $H = 5R$. A energia cinética do bloco ($E_c(P)$) é, então, nula. Tomando o nível zero de energia potencial no solo, a energia potencial do bloco, relativa a este nível, é:

$$U(P) = mg(5R)\ .$$

No ponto Q, a energia cinética do bloco é: $E_c(Q) = \frac{1}{2}mv^2$ e a energia potencial, relativa ao solo, é:

$$U(Q) = mgR$$

A conservação da energia dá:

$$0 + 5mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR$$

de onde tiramos que:

$$N = \frac{mv^2}{R} = 8mg$$

As forças são, portanto, a normal N e o peso mg. A força resultante tem módulo:

$$R = mg\sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}mg$$

A direção é dada por:

$$\theta = arctg\left(\frac{mg}{N}\right) = arctg\left(\frac{1}{8}\right) = 7.^\circ 13$$

com a horizontal, contado no sentido horário a partir do sentido de $\vec{N}$.

Atividade 22.2: De que altura acima do solo o bloco deve ser solto para que, no ponto mais alto da parte circular do trilho, a força que o corpo exerce sobre o trilho seja igual a seu peso?

22.2 - CONSERVAÇÃO DA ENERGIA E FORÇAS DISSIPATIVAS

Quando, sobre uma partícula atuam forças conservativas e dissipativas, pode ser aplicado o teorema do trabalho--energia, separando as forças conservativas das dissipativas. Para as primeiras, pode se associar a elas um ou vários tipos de energia potencial (elástica, gravitacional, etc); para as forças dissipativas, não se pode fazer isso. Com o teorema do trabalho--energia aplicado ao deslocamento da partícula entre dois pontos A e B, pode se escrever que:

$$W_{AB}(cons) + W_{AB}(dis) = E_c(B) - E_c(A)$$

Associando ao trabalho das forças conservativas uma variação de energia potencial, têm-se que:

$$-[U(B) - U(A)] + W_{AB}(dis) = E_c(B) - E_c(A)$$

ou:

$$W_{AB}(dis) = E_c(B) - E_c(A) + U(B) - U(A) = [E_c(B) + U(B)] - [E_c(A) + U(A)]$$

ou ainda:

$$W_{AB}(dis) = E(B) - E(A) \qquad (22.3)$$

sendo E a energia mecânica da partícula.

Essa equação nos diz que, ***quando atuam forças conservativas e dissipativas sobre uma partícula o trabalho realizado pelas forças dissipativas no deslocamento da partícula de um ponto A para outro B é igual à variação da energia mecânica da partícula.***

Exemplo 22.3

Suponha que, no Exemplo 22.1, o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano seja $\mu = 0{,}20$. Calculemos o valor da distância D' que o bloco deve percorrer para comprimir a mola da mesma quantidade $x_0 = 0{,}055$ cm do Exemplo 22.1.

Solução: Agora, além da força de restauração da mola (que começa a atuar quando ela começa a ser comprimida) e da força da gravidade (que atua ao longo de todo o percurso do corpo), atua também uma força de atrito (ao longo de todo o percurso do corpo) que, como já se sabe, se opõe ao movimento do corpo e tem módulo constante $f_a = \mu m g cos\theta$.

O trabalho da força de atrito ao longo da distância D é:

$$W = -\mu m g cos\theta D'$$

A energia total inicial, no alto do plano inclinado, é:

$$E_i = K + U(grav) + U(mola) = 0 + mgH + 0 = mgH$$

em que os níveis zero de energia potencial são tomados no ponto O. A energia total final, no ponto onde a mola tem compressão máxima, é:

$$E_f = K + U(grav) + U(mola) = 0 - mgh + \frac{1}{2}kx_0^2$$

Aplicando a equação (22.3), obtemos:

$$-\mu m g cos\theta D' = -mgh + \frac{1}{2}kx_0^2 - mgH$$

ou:

$$-\mu m g cos\theta D' = -mg(h+H) + \frac{1}{2}kx_0^2$$

Como $h + H = D' sen\theta$ vem:

$$-\mu m g cos\theta D' = -mg D' sen\theta + \frac{1}{2}kx_0^2$$

Resolvendo para D', temos que:

$$mg(sen\theta - \mu cos\theta)D' = \frac{1}{2}kx_0^2$$

ou:

$$D' = \frac{kx_0^2}{2mg\,sen\theta(1 - \mu tg\theta)}$$

Então, com $x_0 = 0{,}055$ m, $m = 6$ kg, $k = 1.12 \times 10^3$, $\theta = 30^\circ$, $\mu = 0{,}20$, o resultado é

$$D' = 0.09\ cm$$

Observe que, se compararmos esta equação com a que dá D no Exemplo 22.1, veremos que:

$$D' = \frac{D}{(1 - \mu tg\theta)}$$

Portanto, para comprimir a mola de 5,5 cm, o corpo deve percorrer uma distância maior, pois parte de sua energia total inicial (que é energia potencial gravitacional) é consumida para vencer a força de atrito.

RESPOSTAS COMENTADAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 22.1:

Resposta Comentada: Neste caso, com o mesmo sistema de coordenadas do Exemplo 22.1, a energia potencial gravitacional do corpo no alto do plano é:

$$U_1(corpo) = mg(H+h) = mgD\,\text{sen}\theta$$

A energia potencial da mola quando o corpo está no alto do plano é: $U_1(mola) = 0$. A energia potencial gravitacional do corpo na posição de compressão máxima é $U_2(corpo) = 0$ pois o nível zero das energias agora está neste ponto. A energia potencial da mola, na posição de compressão máxima pode ser calculada com:

$$U_2(mola) = -\int_{x_0}^{0} \vec{F}\cdot\vec{ds} = -\int_{x_0}^{0} kx\,dx = -\frac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_0}^{0} = \frac{1}{2}kx_0^2$$

A conservação da energia dá, então:

$$mgD\,\text{sen}\theta = \frac{1}{2}kx_0^2$$

de onde tiramos:

$$D = \frac{kx_0^2}{2mg\,sen\theta}$$

mesmo resultado que no Exemplo 22.1.

Atividade 22.2:

Resposta Comentada: No ponto mais alto da parte circular do trilho, a força resultante que atua no corpo é: $\vec{N} + \vec{m}g$. Então, escolhendo o sentido positivo do eixo Ox com origem nesse ponto e sentido para baixo, têm-se que:

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}$$

sendo v a velocidade do bloco neste ponto.

Como a força que o corpo exerce sobre o trilho é a reação da força normal do trilho sobre ele, de acordo com a condição do problema, $N = mg$ e a equação acima fica:

$$2mg = \frac{mv^2}{R}$$

de onde se tira que:

$$mv^2 = 2mgR$$

Para determinar v, usa-se a conservação da energia; No ponto mais alto da seção circular do trilho:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R)$$

No ponto P, a energia total é:

$$E = 0 + mgh$$

em que h é a altura de que deve ser solto o corpo. Então, a conservação da energia nos dá:

$$mgh = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2$$

Levando o valor de mv^2 obtido acima nesta equação, obtêm-se que

$$mgh = 3mgR$$

Logo:

$$h = 3R\,.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

E22.1) Um pêndulo simples de massa *m* e comprimento *l* é solto de uma posição tal que sua corda faz um ângulo θ com a vertical. (a) Qual a sua energia potencial em relação ao ponto mais baixo de sua trajetória? (b) Qual a sua energia potencial relativa ao ponto de que foi solto? (c) Qual a sua energia cinética ao chegar no ponto mais baixo da trajetória?

E22.2) A massa do Sol é 329 390 vezes maior que a massa da Terra M_t = $5{,}983\times10^{24}$

kg. A distância média da Terra ao Sol é de $r = 1{,}49598 \times 10^8$ km. Qual a energia potencial gravitacional da Terra associada à força de atração do Sol sobre ela?

E22.3) Um bloco de massa *m* é empurrado por uma força *F* para cima sobre um plano inclinado de um ângulo θ com uma velocidade constante. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é μ. Após ter se deslocado de uma distância *d* sobre o plano, qual foi o trabalho realizado (a) pela força peso do bloco?

(b) pela força normal do plano sobre o bloco?

(c) pela força de atrito?

(d) pela força *F*?

E22.4) Uma força com direção do eixo dos *x* de um sistema de coordenadas atua sobre uma partícula de massa *m*. A força varia com a posição segundo a equação: $F=a+B\,x$.

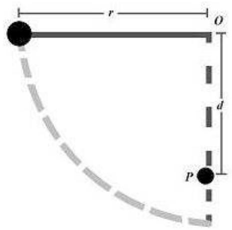
(a) Calcule a energia potencial no ponto *x* relativamente ao ponto *x*=0.

(b) Calcule a velocidade da partícula neste ponto sabendo que em *x*=0, $v=v_0$.

E22.5) Um bloco de massa *m* é solto de uma altura *h* sobre uma mola, comprimindo-a de uma distância *d*. Qual é a constante (*k*) de restauração da mola?

PROBLEMAS DA UNIDADE 7

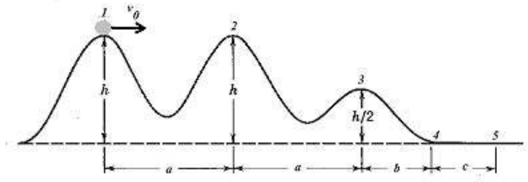
P7.1) O pêndulo da figura abaixo tem comprimento de 1,20 m. Quando a massa *m* é solta, ela descreve a trajetória pontilhada da figura.



(a) Qual a sua velocidade no ponto mais baixo da trajetória?

(b) Um pino está situado à distância *d* abaixo do suporte do pêndulo. Qual deve ser o valor de *d* para que a massa *m* consiga chegar ao alto da trajetória?

P7.2) Um bloco de massa *m* desce uma montanha russa sem atrito com velocidade inicial v_0 no ponto 1 da figura ao lado.

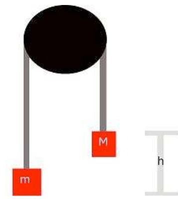


(a) Qual a velocidade do bloco nos pontos 2 e 3?

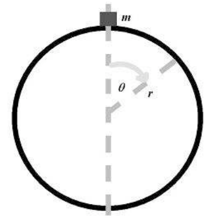
(b) Que desaceleração constante deve ter o bloco entre os pontos 4 e 5 para que ele pare em 5?

(c) Se v_0=0, quanto tempo o bloco leva para chegar ao ponto 2?

P7.3) Os dois blocos da figura estão inicialmente em repouso e começam a se mover. Com que velocidade o bloco de massa *M* chega ao solo?



P7.4) Uma partícula de massa *m* parte do repouso do alto de uma esfera sólida e sem atrito, de raio R, deslizando sobre a ela. Medindo os ângulos a partir da vertical e tomando o zero de energia potencial no topo da esfera, calcule:



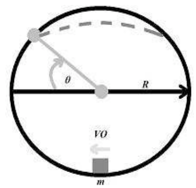
(a) a energia potencial da partícula em função do ângulo θ;

(b) a energia cinética em função do ângulo θ;

(c) as acelerações radial e tangencial do ângulo θ;

(d) o ângulo θ em que a partícula perde contato com a esfera.

P7.5) A partícula de massa *m* da figura abaixo move-se dentro do trilho circular vertical de raio *R*. Não há atrito. Quando *m* está na posição mais baixa do trilho, sua velocidade é v_0.

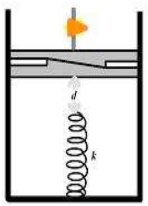


(a) qual é o valor mínimo (v_m) de v_0 para o qual a massa *m* dá uma volta completa no trilho sem perder contato com ele?

(b) Suponha que $v_0 = 0{,}775\ v_m$. A partícula se move, então sobre o trilho até certo ponto P, onde perde contato com o trilho e descreve a trajetória aproximada mostrada na figura pela linha pontilhada. Ache a posição angular do ponto P.

P7.6) Um bloco de massa de 1,0 kg move-se sobre uma superfície horizontal com atrito. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é μ_c = 0,25. O bloco choca-se com uma mola de constante k=2 N/m que é comprimida de uma distância de 4,0 m. O sistema bloco + mola fica então em repouso. Qual era a velocidade do bloco quando colidiu com a mola?

P7.7) O cabo de um elevador de massa m=2000 kg, arrebenta quando o elevador está em repouso no primeiro andar do edifício e a uma distância de 4.0 m de uma mola amortecedora de constante k = 6,82 x 10^3 N/m. Um fio de segurança produz atrito nos trilhos guias do elevador cuja força vale F = 2,25 x 10^3 N, que freia o elevador.



(a) Ache a velocidade do elevador quando logo antes dele se chocar com a mola;

(b) ache a distância s de compressão da mola;

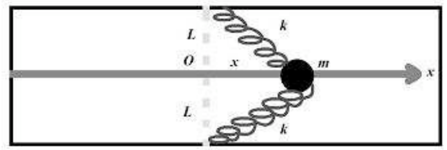
(c) ache a distância total que o elevador percorre até para definitivamente.

P7.8) Um garoto observou que toda vez que soltava uma bola de uma altura h, ela caía verticalmente até o chão e, após colidir com ele, voltava a uma altura 18% menor que a altura h.

(a) Porque a bola não volta à mesma altura?

(b) Calcule a velocidade inicial com a bola deve ser jogada verticalmente para baixo de uma altura de 5,0 m, para que ela volte à mesma altura.

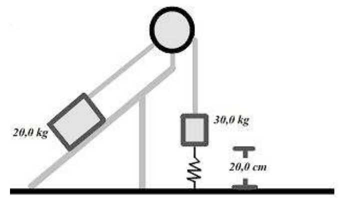
P7.9) Uma partícula de massa m, sobre uma mesa horizontal sem atrito, é ligada a duas molas idênticas sem estarem deformadas. Se a partícula é puxada até um ponto A, situado a uma distância x perpendicularmente à posição inicial das molas (figura), calcule:



(a) a força exercida pelas molas sobre a partícula;

(b) a energia potencial do sistema de molas relativamente à posição não deformada.

P7.10) Um bloco A de massa 20,0 kg está sobre um plano inclinado de um ângulo de 30°, sem atrito. O bloco é ligado a outro com um fio de massa desprezível que passa por uma roldana sem atrito. O bloco B está, por sua vez, preso a uma mola de massa desprezível e de constante k=250 N/m e comprimento de 20,0 cm. Quando o sistema está na posição mostrada na figura, com os blocos à mesma altura relativamente à base do plano, o bloco A é puxado de 20,0 cm para baixo ao longo do plano inclinado, de modo que o bloco B fique a 40 cm acima da base do plano. Ele é então solto a partir do repouso. Ache a velocidade dos blocos quando o bloco B volta para sua posição original, a 20,0 cm da base do plano.

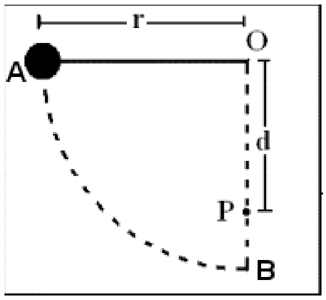


P7.1:

(a) A figura mostra o pêndulo em sua posição inicial A. Tomando o nível de energia potencial em B, a energia potencial e a energia cinética do pêndulo em A são, repectivamente:

$$U(A) = m\,g\,r \qquad\qquad T_A = 0$$

$$v_C = \sqrt{v_0^2 - g\,h}$$



A energia potencial em B é nula e, se v_A é a velocidade do pêndulo em B, temos que:

$$U(B) = 0 \qquad\qquad T_B = \frac{1}{2}\,m\,v_A^2$$

A conservação da energia dá:

$$m\,g\,r = \frac{1}{2}\,m\,v_A^2$$

de onde tiramos que:

$$v_a = \sqrt{2\,g\,r}$$

(b) Depois de passar por B, o pêndulo de enrola no pino passando a descrever um movimento circular em torno dele, de raio $r - d$. Quando a massa chega no ponto mais alto da sua trajetória (ponto C) a sua velocidade é v_C. O valor mínimo u que essa velocidade pode ter é obtido com as forças que atuam na massa nesse ponto C. Nele, atuam sobre a massa duas forças: o peso dela e a tensão na corda. De acordo com a segunda lei de Newton a resultante delas é a força centrípeta:

$$T + m\,g = \frac{m\,v_C^2}{r - d}$$

Para que a velocidade no ponto C seja a velocidade mínima u, é necessário que a tensão na corda seja nula. Assim, a equação acima fica:

$$m\,g = \frac{m\,u^2}{r - d}$$

de onde vem que:

$$u = \sqrt{g\,(r - d)}$$

Para conhecermos d, temos que conhecer u. Ela pode ser dada pela conservação da energia, aplicada aos pontoa A er C. Temos:

$$\frac{1}{2}\,m\,u^2 + m\,g\,[2\,(r-d)] = m\,g, r + 0$$

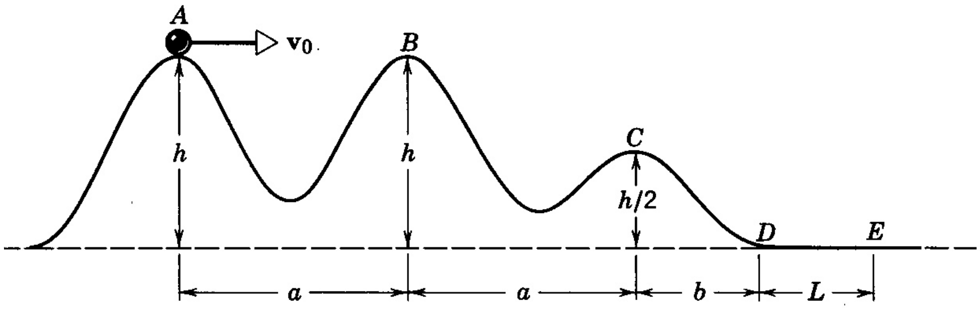
Eliminando u dessas duas últimas equações, vem:

$$\frac{1}{2}\,m\,[g\,(r-d) + 2\,m\,g\,r - 2\,m\,g\,d = m\,g\,d$$

de onde se tira:

$$d = \frac{3}{5}\,r$$

P22.2: Na figura abaixo, escolhendo o nível zero de energia potencial como a base DE, temos:



(a) Em B, a energia potencial é $U(B) = m\,g\,h$, a mesma que em A. Como não há atrito, a energia se conserva e a energia cinética em B deve ser igual à em A. Logo, $v_B = v_0$.

Em C, a energia potencial é $U(C) = m\,g\,h/2$. Então, aplivcando a conservação da energia para os pontos A e C, temos:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_C^2 + \frac{m\,g\,h}{2}$$

de onde vem que:

$$v_C^2 = v_0^2 - g\,h \qquad \longrightarrow \qquad v_C = \sqrt{v_0^2 - g\,h}$$

(b) Em D, a energia potencial é nula e a cinética é $m\,v_D^{2|}/2$. A conservação da energia entre os pontos A e D nos dá:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_D^2$$

de onde tiramos:

$$v_D = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h}$$

Como, em E, a velocidade é nula. entre D e E houve uma desaceleração constante dada por:

$$a = \frac{v_E^2 - v_D^2}{2\,L}$$

ou, com os valores de v_D e v_E:

$$a = -\frac{v_0^2 + 2\,g\,h}{2\,L}$$

P22.3: A figura mostra as situações tratadas no problema.
(a) No ponto mais alto do trilho temos que a resultante das forças é a força centrípeta. Então:

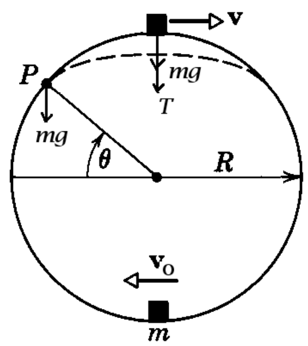
$$T + m\,g = \frac{m\,v^2}{R}$$

Por outro lado, da conservação da energia aplicada aos pontos mais baixo e mais alto do trilho, vem:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,(2\,R)$$

Eliminando v das duas equações, vem:

$$\frac{m\,v_0^2}{R} = N + 5\,m\,g$$



O menor valor de v_0 para que a partícula mantenha contato com o trilho é tal que, no ponto mais alto da trajetória, a força normal de anule. Portanto, da última equação:

$$v_m = \sqrt{5\,g\,R}$$

(b) Se, quando $v_0 = 0.775\,v_m$, a partícula perde contato no ponto P, então, nesse ponto, $N = 0$ e a força centrípeta é a componente do peso da partícula na direção radial. Então:

$$\frac{m\,v^2}{R} = m\,g\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \longrightarrow v^2 = g\,R\,\mathrm{sen}\,\theta$$

O ângulo θ especifica a posição do ponto P, que é ponto em que a partícula perde contato com o trilho. Para determinar θ, usamos a conservação da energia. Em P:

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,(R + R\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

e, no ponto mais baixo do trilho, onde tomamos $U = 0$,

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

Igualando:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,(R + R\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

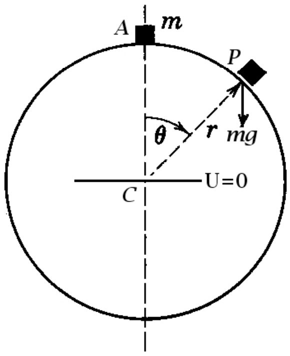
Substituindo agora v^2 por $2\,g\,R\,\mathrm{sen}\,\theta$ e v_0 por $0.775\,v_m = 0.775\,\sqrt{5\,g\,R}$, obtemos:

$$3\,g\,\mathrm{sen}\,\theta = (0.775)^2 \times 5\,g - 2\,g$$

de onde vem:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{3} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right)$$

P22.4: A figura abaixo ilustra o problema.



(a) Tomando o nível de energia potencial no centro da esfera, temos que a energia potencial da massa no ponto A é $U(A) = m\,g\,R$ e a energia potencial no ponto P é $U(P) = m\,g\,R\,\cos\theta$.

(b) Como, em A a massa está em repouso, $v_A = 0$ e a energia cinética também é nula.Seja v a velocidade da massa em P. Como não há forças dissipativas atuando na massa, a sua energia se conserva. Então:

$$0 + m\,g\,R = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,R\,\cos\theta)$$

de onde vem:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = m\,g\,R\,(1 - \cos\theta)$$

(c) a aceleração radial da massa no ponto P é igual à diferença entre a componente do peso na direção radial e da força normal da superfície sobre a massa:

$$a_r = m\,g\,\cos\theta - N$$

A aceleração tangencial em P é a componente tangencial do peso da massa:

$$a_t = m\,g\,\mathrm{sen}\,\theta$$

(d) o ângulo θ em que a massa perde contato com a esfera é obtido fazendo a força de contato $N = 0$. Suponhamos que esse ponto seja o ponto P da figura. A força centrípeta nesse ponto, com $N = 0$, passa a ser:

$$\frac{m\,v^2}{R} = m\,g\,\cos\theta \tag{1}$$

Da conservação da energia entre P e A temos:

$$0 + m\,g\,R = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,R\,\cos\theta)$$

de onde tiramos que:

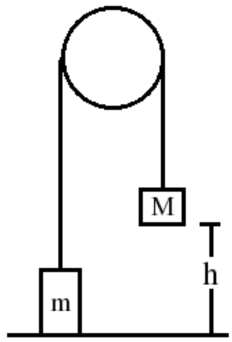
$$v^2 = 2\,g\,R\,(1 - \cos\theta) \tag{2}$$

Eliminando v de (1) e (2) e resolvendo a equação resultante para $\cos\theta$, obtemos:

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

que dá a posição em que a massa perde contato com a esfera.

P22.5: Na figuara abaixo, seja o nível de energia potencial situado no solo.



Como o sistema está inicialmente em repouso, as energias cinéticas das massas são nulas. A energia potencial da massa m também é nula e a da massa M é $M\,g\,h$.

Quando a massa M atinge o solo, o sistema tem velocidade v, a massa M tem energia potencial nula e a massa m tem energia potencial $m\,g\,h$. As únicas forças que atuam no sistema são os pesos, que são conservativas. Da conservação da energia, podemos ecrever:

$$0 + (0 + M\,g\,h) = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,M\,v^2 + 0 + m\,g\,h$$

de onde vem que:

$$(M - m)\,g\,h = \frac{1}{2}\,(M + m)\,v^2$$

ou, ainda:

$$v = \sqrt{2\,\frac{M - m}{M + m}\,g\,h}$$

P22.5:

(a) Ao descer, o elevador sofre ação de duas forças constantes: a de atrito F, dirigida para cima, e a de seu peso, dirigida para baixo. Da segunda lei de Newton:

$$m\,a = m\,g - F$$

onde tomamos o sentido positivo do eixo de coordenadas para baixo. A aceleração do elevador é, então:

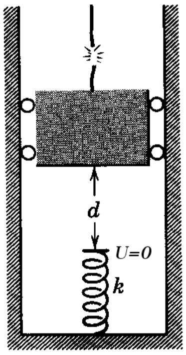
$$a = \frac{m\,g - F}{m} = \frac{2000\ \text{kg} \times 9.81\ \text{m/s}^2 - 2.25 \times 10^3\ \text{N}}{2000\ \text{kg}} = 8.68\ \text{m/s}^2$$

Antes de se chocar com a mola, o elevador percorre a distância de $d = 4.0$ m. Portanto, a velocidade do elevador antes do choque com a mola é:

$$v^2 = 2\,a\,d = 2 \times 8.68 \text{ m/s}^2 \times 4.0 \text{ m} = 69.4 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

e:

$$v = 8.3 \text{ m/s}^2$$



OUTRA SOLUÇÃO:

A força de atrito é dissipativa, enquanto que o peso do bloco é conservativo. Então, podemos aplicar o teorema: o trabalho das forças dissipativas em um deslocamento é igual à variação da energia mecânica total do bloco. Assim se W é o trabalho da força (constante) F:

$$E_i = m\,g\,h \qquad E_f = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad W = F\,d\,\cos 180° = -F\,d$$

e:

$$-F\,d = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - m\,g\,h$$

de onde vem:

$$v^2 = 2\,d\,\frac{(m\,g - F)}{m} = 2 \times 4.0 \text{ m} \times \frac{2000 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 - 2.25 \times 10^3 \text{ N}}{2000 \text{ kg}} = 69.4 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

(b) ao se chocar com a mola, o elevador passa a comprimí-la. Ela reage com uma força restauradora sobre o elevador. Sela L a distância de máxima compressão da mola. Tomando o nível de energia potenial gravitacional e da mola na posição em que esta não está comprimida (figura), temos:

— o trabalho realizado pela força de atrito é $W = -F\,L$;

— a variação da energia potencial gravitacional do elevador, do ponto onde ele encontra amola até o ponto de maior compressão, é $\Delta U(e) = -m\,g\,L$; a variação da energia cinética $\Delta E_e = -\frac{1}{2}\,m\,v^2$

— a variação da energia potencial da mola é $\Delta U_m = (1/2)\,k\,L^2$; a da energia cinética da mola é $\Delta E_m = 0$;

Então, como o trabalho da força de atrito é igual à variação da energia total, temos:

$$-F\,L = -\frac{1}{2}\,m\,v^2 - m\,g\,L + \frac{1}{2}\,k\,L^2$$

ou:

$$\frac{1}{2}\,k\,L^2 - (m\,g - F)\,L - \frac{1}{2}\,m\,v^2 = 0$$

ou, ainda:

$$3.41 \times 10^3\ \mathrm{N/m}\,L^2 - 17.37 \times 10^3\ \mathrm{N}\,L - 69.4 \times 10^3\ \mathrm{J} = 0$$

(note que as unidades são coerentes: N.m=Joule) Essa é uma equação do segundo grau em L. Simplificando e não escrevendo as unidades, temos:

$$3.41\,L^2 - 17.37\,L - 69.48 = 0$$

O determinante é $\Delta =1\ .25 \times 10^3$, e $\sqrt{\Delta} = 35.35$. Então:

$$L = \frac{17.37 \pm 35.35}{6.82}$$

que dá duas raízes: $K_1 = 7.73$ e $L_2 = -2.64$. A raiz negativa não satisfaz ao problema pois não existe distância negativa. Então, a solução é $L = \sqrt{L^2 + x^2}7.73$ m.

(c) a distância total percorpelo elevador é então: D=4 m + 7.7 m = 11.7 m.

P22.7:

(a) A bola não volta à altura inicial porque perdeu energia durante a colisão com o solo.

(b) A bola parte do reposo de uma altura h e volta até uma outra altura $h' = h - 0.18\,h = 0.82\,h$. A perda de energia foi, portanto, igual à variação da energia potencial da bola, já que tanto na partida, quanto na chegada, a energia cinética da bola é nula. Então, se ΔE é a perda de energia:

$$\Delta E = m\,g\,(h' - h) = -0.18\,m\,\sqrt{L^2 + x^2}g\,h$$

Para que a bola volte à altura original, deve-se dar a ela uma energia cinética inicial para compensar a perda dessa energia. Como a energia cinética final é nula, a variação da energia cinética é, então

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

Igualando as duas equações:

$$-\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = -0.18\,m\,g\,h$$

de onde vem:

$$v_0^2 = 2 \times 0.18 \times g\,h = 0.26 \times 9.81\ \mathrm{m/s^2} \times 5.0\ \mathrm{m} = 17.64 \mathrm{m^2/s^2}$$

e:

$$v = 4.2 \mathrm{m/s}$$

P22.8:

O trabalho das forças dissipativas é igual à variação da energia total do bloco. Seja d a distância percorrida pelo bloco desde o instante em que se chocou com a mola até parar. Esse também deve ser o valor da deformação da mola.

A energia cinética inicial do bloco é $E_C = (1/2)\,m\,v^2$ e a final é zero.

Tomando o nível de enrgia potencial da mola na posição de repouso dela, a sua energia potencial inicial é nula; a energia potencial depois de comprimida de d pelo bloco é $U = (1/2)\, k\, d^2$. Então, da variação da energia sob ação da força de atrito F vem:

$$-f\, d = -\frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, k\, d^2$$

Mas o bloco de desloca sobre uma superfície horizontal. Então, podemos escrever para a força de atrito:

$$F = \mu\, N = \mu\, m\, g$$

Levando o valor de F na equação anterior vem:

$$-2\, \mu\, m\, g\, d == -m\, v^2 + k\, d^2$$

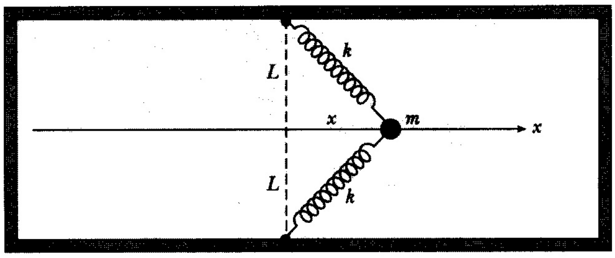
que resolvida para v dá:

$$v^2 = \frac{k\, d^2 - 2\, \mu\, m\, g\, d}{m} = \frac{2.0 \text{ N.m} \times 16 \text{ m}^2 - 2 \times 0.25 \times 1.0 \text{ kg} \times 9.8 \text{m/s}^2 \times 4.0 \text{ m}}{1.0 \text{ kg}}$$

ou:

$$v^2 = 12.4 \text{ m}^2/\text{s}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v = 3.5 \text{ m/s}$$

P22.9: A figura mostra as molas em sua posição esticada.



Vista de cima

(a) O comprimento da mola sem deformar é L. Quando deformada, o comprimento é $L' = \sqrt{L^2 + x^2}$. Logo a variação de comprimento da mola é:

$$\Delta L = L' - L = \sqrt{L^2 + x^2} - L$$

A força restauradora da mola exercida sobre o corpo é *em módulo*:

$$F = k\, \Delta L = k\, (\sqrt{L^2 + x^2} - L)$$

Como há duas molas ligadas à partícula, a força resultante é a *soma vetorial* das duas forças. Como elas são de mesmo módulo e fazem o mesmo ângulo com o eixo dos x, a componente da força resultante, perpendicular ao eixo x, é nula. Então, a força resultante é a soma das componentes x das forças das molas:

$$F_r = -2\, F_x = -2\, F\, \cos\theta$$

em que θ é o ângulo que as forças da mola fazem com o eixo x. O sinal negativo indica que aresultante tem sentido oposto ao do eixo x. Da figura:

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}}$$

Então:

$$F_r = -2\,k\,(\sqrt{L^2+x^2}-L)\,\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}} = -2\,k\,x\,\left(\frac{\sqrt{L^2+x^2}-L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right)$$

ou:

$$F_r = -2\,k\,x\,\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right)$$

(b) A energia potencial , relativa à origem do eixo x, é:

$$U = -\int_0^x 2\,k\,x\,\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right)\mathrm{d}x = -2\,k\int_0^x k\,x\,\mathrm{d}x + 2\,k\,L\int_0^x \frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Então:

$$U = k\,x^2 + k\,L\int_0^x \frac{2\,x}{\sqrt{L^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

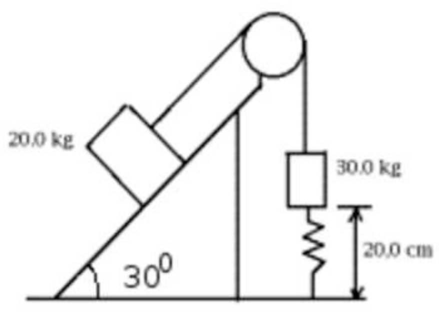
Fazendo $u = L^2+x^2$ vem $du = 2\,x\,\mathrm{d}x$; além disso, para $x=0$, $u=L^2$ e para $x=x$, $u=L^2+x^2$.
Então:

$$\int_{L^2}^{\sqrt{L^2+x^2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/2}} = 2\,(\sqrt{L^2+x^2}-L)$$

Finalmente:

$$U = k\,x^2 + 2\,k\,L\,(\sqrt{L^2+x^2}-L)$$

P22.10: Temos $M = 30$ kg, $m = 20$ kg, $h = 20$ cm, $k = 250$ N/m. A figura abaixo mostra o sistema.



No instante inicial, o bloco m está deslocado de 20 cm sobre o plano da sua posição da figura, o bloco M está deslocado da mesma quantidade e a mola ficou esticada de 0.20 cm. A energia cinética inicial do sistema de blocos é nula. A energia potencial inicial é a soma da gravitacional e da mola, que está destendida:

$$U_i = M\,g\,h_1 + m\,g\,h_2 + \frac{1}{2}\,k\,L^2$$

onde $h_1 = 0.40$ m, $h_2 = h_1 - 0.20$ m sen $30°$ é a altura do bloco de massa m em relação à base do plano. A deformação da mola é $L = 0.20$ m.

x

Os blocos são soltos; o bloco M desce verticalmente e o bloco m sobe o plano inclinado. A mola fica comprimida pelo bloco M. No instante em que M está a 20 cm de altura, a energia cinética dos blocos é:

$$E_f = \frac{1}{2}\,(m+M)\,v^2$$

pois os blocos possuem a mesma velocidade. A energia potencial nesse instante é a soma das dos blocos, pois a mola não está agora deformada:

$$U_f = (M+m)\,g\,L$$

Da conservação da energia, temos:

$$0 + M\,g\,h_1 + m\,g\,h_2 + \frac{1}{2}\,k\,L^2 = \frac{1}{2}\,(m+M)\,v^2 + (M+m)\,g\,L$$

ou:

$$[M\,h_1 + m\,h_2 - (M+m)\,L]\,g + \frac{1}{2}\,k\,L^2 = \frac{1}{2}\,(m+M)\,v^2$$

Numericamente:

$$(30 \times 0.4 + 20 \times 0.30 - 50 \times 0.20) \times 9.8 + 125 \times (0.2)^2 = 25\,v^2$$

de onde tiramos:

$$v^2 = 3.34\ (\mathrm{m/s})^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v = 1.83\mathrm{m/s}$$

E23.1 $\vec{R}_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$ onde M é a massa total do sistema. Calculando cada coordenada separadamente temos:

$$X_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{0{,}40kg \cdot 0{,}30m + 0{,}30kg \cdot (-0{,}30m) + 0{,}20kg \cdot (-0{,}20m)}{(0{,}40 + 0{,}30 + 0{,}20)kg}$$

$$X_{CM} = -\frac{1}{90}m$$

$$Y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{0{,}40kg \cdot 0{,}20m + 0{,}30kg \cdot 0{,}10m + 0{,}20kg \cdot 0{,}50m}{(0{,}40 + 0{,}30 + 0{,}20)kg}$$

$$Y_{CM} = \frac{0{,}21}{0{,}90}m = \frac{7}{30}m$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{90}\left(-\hat{\imath} + 21\hat{\jmath}\right)m$$

E23.2

Adotando como referencial o centro do Sol temos:

$$R_{CM} = \frac{M_T \cdot R_{S,T} + M_S \cdot 0}{M_T + M_S}$$

A massa do Sol é $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$kg, e a massa da Terra é $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$kg, calculando a distância do centro de massa, temos que:

$$R_{CM} = \frac{5{,}97 \times 10^{24}\,kg \cdot 1{,}50 \times 10^{8}\,km + 1{,}99 \times 10^{30}\,kg \cdot 0\,km}{5{,}97 \times 10^{24}\,kg + 1{,}99 \times 10^{30}\,kg} = 450\,km$$

A posição do centro de massa está a 450 km do centro do Sol, ou seja, dentro do Sol.

E23.3

$$Y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{3kg \cdot 0{,}30m + 3kg \cdot 0{,}70m + 3kg \cdot 0m}{(3+3+3)kg}$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{3}m$$

E23.4

a) Quando a altura do nível de água é "x" a massa de água contida no recipiente é $m = \dfrac{M}{H}x$. A posição do centro de massa será:

$$Y_{CM} = \frac{M \cdot \frac{H}{2} + m \cdot \frac{x}{2}}{M + m}$$

$$Y_{CM} = \frac{M \cdot \frac{H}{2} + \frac{M}{H} x \cdot \frac{x}{2}}{M + \frac{M}{H} x} = \frac{\frac{M}{2H} \cdot \left(H^2 + x^2\right)}{\frac{M}{H}\left(H + x\right)}$$

$$Y_{CM} = \frac{\left(H^2 + x^2\right)}{2\left(H + x\right)}$$

b) Y é mínimo quando $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$. Resolvendo temos:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{2\left(H + x\right) \cdot 2x - \left(H^2 + x^2\right) \cdot 2}{4\left(H + x\right)^2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left(H + x\right) \cdot 2x - \left(H^2 + x^2\right) = 0$$

$$x^2 + 2Hx - H^2 = 0$$

$$\Delta = 4H^2 - 4(1)(-H^2) = 8H^2$$

$$x = \frac{-2H + 2H\sqrt{2}}{2} = H\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Quando a água vaza completamente, o centro de massa passa a ser o centro de massa do cilindro, ou seja, H/2.

E24.1
A velocidade do centro de massa de um sistema de partículas é dada por:

$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M_T}$. Assim temos:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{2kg\cdot\left((3m/s)\hat{\imath} + (2m/s)\hat{\jmath}\right) + 2kg\cdot\left((5m/s)\hat{\imath} + (-3m/s)\hat{\jmath}\right)}{2kg + 2kg}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{16(kg\cdot m/s)\hat{\imath} + (-2kg\cdot m/s)\hat{\jmath}}{4kg} = (4m/s)\hat{\imath} + (-0{,}5m/s)\hat{\jmath}$$

E24.2
Dados:
Massa do automóvel: $m = 1600kg$.
Massa do ônibus: $M = 3500kg$.
Velocidade do automóvel: $\vec{v} = (+25m/s)\hat{\imath}$.
Velocidade do ônibus: $\vec{V} = (-17m/s)\hat{\imath}$, o sinal negativo é relevante.
A velocidade do centro de massa é dada por:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M} = \frac{1600kg\times 25m/s + 3500kg\times(-17m/s)}{1600kg + 3500kg} = -3{,}8m/s$$

E24.3
Posição do centro de massa: $\vec{R}_{CM} = (2{,}0m)\hat{\imath}$.
Velocidade do centro de massa: $\vec{V}_{CM} = (5{,}0m/s)\hat{\imath}$.
Posição da partícula (1): $\vec{r}_1 = (0m)\hat{\imath}$.
Posição e massa da partícula (2): $\vec{r}_2 = (8{,}0m)\hat{\imath}$; $m_2 = 0{,}10kg$.
Como o movimento é unidimensional, a notação vetorial pode ser deixada de lado.
A posição do centro de massa do sistema é dada por:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Da expressão acima podemos obter m_1:

$$R_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

$$R_{CM}(m_1 + m_2) = m_1 r_1 + m_2 r_2$$

$$m_1(R_{CM} - r_1) = m_2(r_2 - R_{CM})$$

$$m_1 = \frac{m_2(r_2 - R_{CM})}{(R_{CM} - r_1)} = \frac{(0{,}10kg)(8{,}0m - 2{,}0m)}{2{,}0m - 0m} = 0{,}3kg$$

E24.4
Adotemos como referencial a posição inicial da patinadora de menor massa, assim temos:

Posição e massa da patinadora (1): $x_1 = 0m$, $m_1 = 45kg$.
Posição e massa da patinadora (2): $x_2 = 8m$, $m_2 = 60kg$.
A posição inicial do centro de massa é:

$$R_{CMi} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Como a resultante das forças externas é nula, a posição do centro de massa não se altera, pois inicialmente o sistema estava em repouso.

O deslocamento da patinadora de 45 kg é $D = R_{CMi} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 4{,}6m.$

E24.5
Adotando como referencial o ponto em que as pedras foram soltas, para $t \geq 0{,}1s$ valem as seguintes equações de movimento:
Partícula (1) de massa m_1

$$s_1(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_1(t) = gt$$

Partícula (2) de massa $2m_1$

$$s_2(t) = \frac{1}{2}g(t - 0{,}1)^2$$

$$v_2(t) = g(t - 0{,}1)$$

Onde g é a aceleração da gravidade e t é dado em segundos.
a) A posição do centro de massa é dada por:

$$R_{CM}(t) = \frac{m_1 s_1(t) + 2m_1 s_2(t)}{m_1 + 2m_1} = \frac{m_1\left(\frac{1}{2}gt^2\right) + 2m_1\left(\frac{1}{2}g(t - 0{,}1)^2\right)}{3m_1}$$

$$R_{CM}(t) = \frac{g\left(t^2 + 2(t - 0{,}1)^2\right)}{6} = \frac{9{,}8m/s^2\left[(0{,}2s)^2 + 2(0{,}2s - 0{,}1s)^2\right]}{6} = 9{,}8 \times 10^{-2}\, m$$

b) A velocidade do centro de massa é:

$$V_{CM}(t) = \frac{m_1 v_1(t) + 2m_1 v_2(t)}{m_1 + 2m_1} = \frac{m_1(gt) + 2m_1(g(t - 0{,}1))}{3m_1}$$

$$V_{CM}(t) = \frac{g(3t - 0{,}2)}{3} = 0{,}33m/s$$

E25.1

Consideremos duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância "D". Adotando como referencial a posição da partícula de massa m_1, o cálculo da posição do centro de massa nos fornece a distância d_1 entre a partícula de massa m_1 e o CM.

$$d_1 = R_{CM,1} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot D}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot D}{m_1 + m_2}$$

De forma análoga, adotando como referencia a posição da partícula de massa m_2, temos:

$$d_2 = R_{CM,2} = \frac{m_2 \cdot 0 + m_1 \cdot D}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot D}{m_1 + m_2}.$$

Logo para a razão entre as distâncias temos:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\left(\frac{m_2 \cdot D}{m_1 + m_2}\right)}{\left(\frac{m_1 \cdot D}{m_1 + m_2}\right)} = \frac{m_2}{m_1}$$

E25.2

Sendo M_T, M_L, $D_{T,L}$ e R_T, as massas da Terra e da Lua, distância entre a Terra e a Lua e o raio da Terra, respectivamente, então

$$R_{CM} = \frac{M_T \cdot 0 + M_L \cdot D_{T,L}}{M_T + M_L} = \frac{M_L \cdot D_{T,L}}{M_T + M_L} = \frac{0{,}013 M_T \cdot 60 R_T}{0{,}013 M_T + M_T} = 0{,}77 R_T$$

E25.4

Dados:

$$m_P = 100 g = 0{,}100 kg$$

$$m_Q = 300 g = 0{,}300 kg$$

$$d = 1{,}0 m$$

Como não há forças externas atuando e as partículas inicialmente estavam em repouso, o CM não se move. As partículas colidem na posição do CM.

$$R_{CM,P} = \frac{m_P \cdot 0 + m_Q \cdot d}{m_P + m_Q} = \frac{m_Q \cdot d}{m_P + m_Q} = 0{,}75 m.$$

E25.5)

Inicialmente a velocidade do CM era nula, como a resultante das forças externas é nula, a velocidade do CM não se altera após o chute, logo:

$$V_{CM} = \frac{m_H \cdot v_H + m_B \cdot v_B}{m_H + m_B} = 0 \Rightarrow m_H \cdot v_H + m_B \cdot v_B = 0$$

$$v_H = -\frac{m_B \cdot v_B}{m_H} = -1{,}4 \times 10^{-2} m/s$$

O sinal negativo indica que o homem move em sentido oposto à bola.

P8.1

Por simetria o CM da placa se encontra sob o eixo Y e sua posição é dada por:

$Y_{CM} = \frac{1}{A}\int ydA$, onde “A” é a área total da placa. Por sua vez, temos que:

$\int ydA = \int \sqrt{R^2 - y^2} \cdot 2ydy = -\int \sqrt{u}du$, onde $u = R^2 - y^2$. Logo:

$$Y_{CM} = -\frac{1}{A}\int_{u=R^2}^{u=0} \sqrt{u}du = -\frac{1}{A}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{R^2}^{0}$$

$$Y_{CM} = \frac{2}{3A}R^3 = \frac{2}{3\left(\frac{\pi R^2}{2}\right)}R^3$$

$$Y_{CM} = \frac{4R}{3\pi}$$

P8.2

$Z_{CM} = \frac{1}{V}\int zdv = \frac{1}{V}\int\int\int z\cdot rdrd\theta dz$, onde:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ é o volume do cone, e “r” está relacionado com “z” pela seguinte expressão; $r = \frac{R}{H}z$.

Resolvendo a integral temos:

$$Z_{CM} = \frac{1}{V}\int_0^H\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{Rz}{H}} z\cdot rdrd\theta dz = \frac{1}{V}\int_0^H\int_0^{2\pi} z\cdot\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{Rz}{H}}\right)d\theta dz$$

$$= \frac{1}{V}\int_0^H\left(\int_0^{2\pi}\frac{R^2 z^3}{2H^2}d\theta\right)dz = \frac{1}{V}\int_0^H\left(\frac{R^2 z^3}{2H^2}\theta\Big|_0^{2\pi}\right)dz = \frac{1}{V}\int_0^H\frac{\pi R^2 z^3}{H^2}dz = \frac{1}{V}\left(\frac{\pi R^2 z^4}{4H^2}\Big|_0^H\right)$$

$$= \frac{1}{V}\frac{\pi R^2 H^2}{4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)}\frac{\pi R^2 H^2}{4} = \frac{3H}{4}$$

$$Z_{CM} = \frac{3H}{4}$$

Segunda forma de resolver:

Considerando que o cone é formado por discos de massa dm e volume $dv = \pi r^2 dz$, sendo $r = \frac{R}{H}z$, temos:

$$Z_{CM} = \frac{1}{V}\int zdv = \frac{1}{V}\int z\cdot\pi r^2 dz = \frac{1}{V}\int z\cdot\pi\left(\frac{R}{H}z\right)^2 dz$$

$$Z_{CM} = \frac{1}{V}\int\frac{\pi R^2}{H^2}z^3 dz$$

Substituindo os limites de integração e resolvendo a integral:

$$Z_{CM} = \frac{1}{V}\int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2} z^3 dz = \frac{1}{V}\left(\frac{\pi R^2}{4H^2} z^4 \Bigg|_{z=0}^{z=H} \right) = \frac{1}{V}\frac{\pi R^2}{4} H^2$$

Substituindo V:

$$Z_{CM} = \frac{1}{V}\frac{\pi R^2}{4} H^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)} \cdot \frac{\pi R^2}{4} H^2 = \frac{3H}{4}$$

$$Z_{CM} = \frac{3H}{4}$$

P8.3

No cálculo do centro de massa podemos considerar o paralelepípedo como sendo constituído de dois objetos: Um bloco sólido B (sem o buraco) e um cilindro C de mesma densidade, cuja contribuição para o centro de massa será "negativa".

Por simetria o CM se encontra no eixo AB, sendo que sua posição em relação à "A" é:

$Y_{CM} = \dfrac{M_B \cdot Y_B - M_C \cdot Y_C}{M_B - M_C}$, onde:

$Y_B = 5{,}0cm$, é a posição do CM do bloco B.

$Y_C = 2{,}0cm$, é a posição do CM do cilindro.

$M_B = \rho \cdot V_B$, é a massa do bloco B sendo $V_B = 240{,}0cm^3$ seu volume.

$M_C = \rho \cdot V_C$, é a massa do cilindro C sendo $V_C = 6\pi cm^3$ seu volume.

Assim temos:

$$Y_{CM} = \frac{\rho V_B \cdot Y_B - \rho V_C \cdot Y_C}{\rho V_B - \rho V_C} = 5{,}3cm$$

P8.4)

Dados:

Massa do projétil, 2m.

Massa de cada fragmento, m.

Velocidade inicial do projétil, $V_0 = 50m/s$.

Ângulo de inclinação do lançamento, $\theta = 45^\circ$.

$g = 10m/s^2$

O movimento inicial do projétil é descrito pelas seguintes equações:

$$Y(t) = V_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$V_Y(t) = V_0 sen\theta - g \cdot t$$

$$X(t) = V_0 \cos\theta \cdot t$$

O tempo que o projétil gasta para atingir a altura máxima é $T = \dfrac{V_0 sen\theta}{g}$.

A altura máxima atingida é $H = \dfrac{(V_0 sen\theta)^2}{2g}$.

A coordenada X_H do projétil quando este atinge a altura máxima é

$$X_H = V_0^2 \frac{\cos\theta \cdot sen\theta}{g}.$$

Avaliando as situações instantes antes e depois da colisão a velocidade do centro de massa não muda, assim temos:

$$2m \cdot V_0 \cos\theta = m \cdot v_1$$
$$v_1 = 2 \cdot V_0 \cos\theta$$

, onde v_1 é a velocidade do segundo fragmento logo após a colisão.

Observe que não há conservação da energia!

As equações que descrevem o movimento do fragmento são:

$$Y_1(t) = H - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$V_{1Y}(t) = -g \cdot t$$

$$X_1(t) = X_H + 2V_0 \cos\theta \cdot t$$

A partir das equações acima temos que o tempo de queda é dado por:

$$t_q = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\frac{(V_0 sen\theta)^2}{2g}}{g}} = \frac{V_0 sen\theta}{g}$$ (o mesmo valor obtido para o tempo de subida).

O alcance do fragmento é:

$$D = X_H + 2V_0 \cos\theta \cdot t_q$$

$$D = V_0^2 \frac{\cos\theta \cdot sen\theta}{g} + 2V_0 \cos\theta \cdot \frac{V_0 sen\theta}{g} = 3V_0^2 \frac{\cos\theta \cdot sen\theta}{g}$$

$$D = 375m$$

P8.5

Dados:

Taxa de ejeção do gás $R = 10{,}0 kg/s$.

Velocidade relativa do gás em relação ao foguete $u = 3000 m/s$.

Massa inicial do foguete $m_0 = 5000 kg$.

a) O empuxo que o foguete sofre é $E = R \cdot u = 3{,}00 \times 10^4 N$

b) Como não há forças externas (desprezando a gravidade) temos:

$$m_0 \cdot a_0 = R \cdot u \Rightarrow a_0 = \frac{R \cdot u}{m_0} = 6{,}00 m/s^2$$

c) A massa do foguete em função do tempo é $m(t) = m_0 - R \cdot t$.

Sua aceleração em função do tempo é $a(t) = \dfrac{R \cdot u}{m_0 - R \cdot t}$.

Assim temos, para $t = 60s$

$$V(t) = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t \frac{R \cdot u}{m_0 - R \cdot t} dt = R \cdot u \int_0^t \frac{1}{m_0 - R \cdot t} dt$$

$$V(t) = -u \cdot \ln(m_0 - R \cdot t)\Big|_0^t$$

$$V(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot t}\right) \Rightarrow V(t = 60s) = 384 m/s.$$

P8.6

Dados:

Velocidade relativa do gás $u = 2000 m/s$.

Massa inicial do foguete $m_0 = 10000 kg$.

Aceleração inicial do foguete $a_0 = 3g$.

Deseja-se saber a taxa de ejeção do gás:

$$m_0 a_0 = F_R + Ru$$

$$m_0 a_0 = -m_0 g + Ru$$

$$R = \frac{m_0 a_0 + m_0 g}{u} = \frac{4 m_0 g}{u} = 196 kg/s.$$

P26.1)

a) $\Delta p = (0{,}4\,kg)(360\,m/s) - 0 = 144\,N \cdot s$. Logo

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{144\,N \cdot s}{0{,}010\,s} = 1{,}4 \times 10^4\,N$$

b) Cancelada.

P26.2) Na primeira colisão, o bloco de massa m_1 está em repouso. Então do texto a velocidade final v_{1f} do bloco de massa m_1 e a velocidade final v_{2f} do bloco de massa m_2 serão respectivamente dadas por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_2 \qquad (1)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_2 \qquad (2)$$

Da conservação do momento na segunda colisão (depois que o bloco bateu na parede e voltou) temos:

$$m_1 v_{1f} + 2m_2 v_{2f} = (m_1 + m_2) v_f \qquad (3)$$

Na equação (3) acima foi usado o fato que quando o bloco bate na parede e volta o seu momento dobra. Também foi usada a condição que a velocidade final (v_f) dos blocos é igual. Falta ainda encontrar v_f. Para encontrá-la utilizamos a conservação da energia (considerando a situação inicial em que só m_2 tem velocidade e a situação final depois de o bloco ter batido na parede, voltado e colidido com m_1):

$$\frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 \Rightarrow v_f^2 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} u_2^2$$

Substituindo v_f, (1) e (2) em (3) e com um pouco de álgebra, encontramos:

$$m_2 = \frac{100}{3} kg$$

P26.3) Pela conservação do momento temos:

$$m_{bala} v_{bala} = (m_{bala} + M_{bloco}) v_{final} \qquad (1)$$

Devemos encontrar v_{final}, que é a velocidade do conjunto bala+bloco após a colisão. Logo após esta, o conjunto sai com a velocidade v_{final}. O conjunto terá uma energia cinética que será dissipada. Então a energia cinética será igual à energia dissipada:

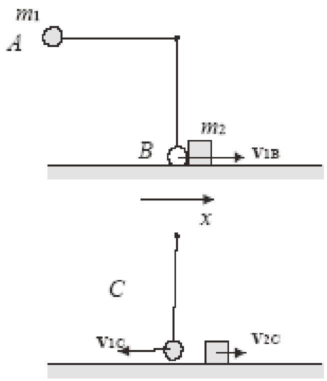
$$\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})v^2_{final} = \mu(m_{bala} + M_{bloco})g \cdot d \Rightarrow v^2_{final} = 2\mu gd$$

$$v_{final} = \sqrt{2(0{,}20)(9{,}8m/s^2)(2m)} = 2{,}8m/s$$

Substituindo v_{final} em (1), temos

$$v_{bala} = \frac{(m_{bala} + M_{bloco})}{m_{bala}} v_{final} = \frac{(0{,}05kg + 2{,}0kg)}{0{,}05kg} \times 2{,}8m/s = 115m/s$$

P26.4)



O movimento de A até B é feito com energia mecânica constante (ausência de forças dissipativas), logo:

$$E_A = E_B$$

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$0 + m_1 g l = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + 0$$

$$v_{1B} = \sqrt{2gl} = 3,67136\cdots \text{m/s}$$

(a) Durante o choque o momento linear é conservado. Vamos chamar de B a situação do sistema antes do choque e C a situação imediatamente após o choque. Para choques elásticos, v_{1C} é dada por:

$$v_{1C} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1B}$$

$$v_{1C} = -2,4709\cdots \text{m/s}$$

$$\boxed{v_{1C} = -2,47 \text{ m/s}}$$

(b) Para choques elásticos v_{2C} é dada por:

$$v_{2C} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1B}$$

$$v_{2C} = 1,20043\cdots \text{m/s}$$

$$\boxed{v_{2C} = 1,20 \text{ m/s}}$$

(c) Energia cinética:

$$K_{C'} = \frac{K_B}{2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1C'}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2C'}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2\right)$$

$$m_1 v_{1C'}^2 + m_2 v_{2C'}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + 0 \qquad (1)$$

Conservação do momento linear $B \to C'$:

$$P_{Bx} = P_{C'x}$$

$$m_1 v_{1B} + m_2 v_{2B} = m_1 v_{1C'} + m_2 v_{2C'}$$

$$m_1 v_{1B} + 0 = m_1 v_{1C'} + m_2 v_{2C'}$$

$$v_{2C''} = \frac{m_1 v_{1B} - m_1 v_{1C''}}{m_2} \quad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1):

$$v_{1C''} = \frac{2m_1 v_{1B} \pm v_{1B}\sqrt{2m_2\left(m_2 - m_1\right)}}{2\left(m_1 + m_2\right)} \quad (3)$$

São duas as possibilidades para $v_{1C''}$:

$$v_{1C''} = -1,34768\cdots \text{m/s}$$

$$v_{1C''} = 2,54811\cdots \text{m/s}$$

Como $m_1 < m_2$, sabe-se que $v_{1C''} < 0$. Logo:

$$\boxed{v_{1C''} \approx -1,35 \text{ m/s}}$$

Substituindo-se (3) em (2):

$$v_{2C''} = \frac{2m_1 m_2 v_{1B} \pm m_1 v_{1B}\sqrt{2m_2\left(m_2 - m_1\right)}}{2m_2\left(m_1 + m_2\right)}$$

Também são duas as possibilidades para $v_{2C''}$:

$$v_{2C''} = 0,219525\cdots \text{m/s}$$

$$v_{2C''} = 0,980907\cdots \text{m/s}$$

Somente $v_{2C''} = 0,980907...$ torna $K_{C''} = K_B/2$ (verifique você!). Logo:

$$\boxed{v_{2C''} \approx 0,981 \text{ m/s}}$$

P26.5)

Como foi sugerido no enunciado, no momento da compressão máxima da mola os blocos viajam à mesma velocidade (colisão inelástica). Aplicando-se a conservação do momento linear:

$$P_{xi} = P_{xf}$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = \left(m_1 + m_2\right) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Como não há forças dissipativas agindo no sistema, a energia mecânica é conservada:

$$E_i = E_f$$

$$K_{1i} + K_{2i} + U_i = K_{1f} + K_{2f} + U_f$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 + 0 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_f^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 - \left(m_1 + m_2\right) v_f^2}{k}} \quad (2)$$

Substituindo-se (1) em (2):

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 - \left(m_1 + m_2\right)\left(\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}\right)^2}{k}}$$

A simplificação desta expressão resulta em:

$$\Delta x = \left(v_{1i} - v_{2i}\right)\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k\left(m_1 + m_2\right)}} = 0,24499\cdots \text{m}$$

$$\boxed{\Delta x \approx 24,5 \text{ cm}}$$

P26.6) O peso das bolinhas na caixa depois de um tempo t é $mgRt$ pois Rt é o número de bolinhas na caixa. As bolinhas caem uma distância h. O tempo para isso acontecer é $\sqrt{\frac{2h}{g}}$. A velocidade das bolinhas quando elas batem na caixa é $v = gt = \sqrt{2gh}$. O momento que cada bolinha passa à caixa é então $m\sqrt{2gh}$. Se as bolinhas batem na caixa na razão R, a força requerida para pará-las é $Rm\sqrt{2gh}$.

Assim temos

$$W = mR(\sqrt{2gh} + gt)$$

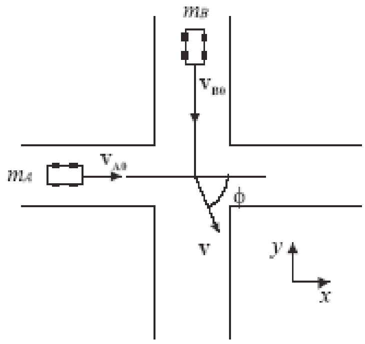
Substituindo os valores

P26.7) A componente y do momento inicial é zero. Assim os módulos das componentes y devem ser iguais:

$$\begin{aligned} m_\alpha v_\alpha \sin\theta_\alpha &= m_O v_O \sin\theta_O, \\ v_\alpha &= \frac{m_O v_O \sin\theta_O}{m_\alpha v_\alpha \sin\theta_\alpha}, \\ &= \frac{(16\ \text{u})(1.20\times10^5 \text{m/s})\sin(51°)}{(4.00\ \text{u})\sin(64°)} = 4.15\times10^5 \text{m/s}. \end{aligned}$$

P26.8)

Considere o seguinte esquema da situação:



Considerando-se que as forças internas envolvidas na colisão são muito mais intensas que outras forças externas, admite-se que o momento linear é conservado na colisão. Em x:

$$P_{0x} = P_x$$

$$p_{A0x} + p_{B0x} = p_{Ax} + p_{Bx}$$

$$m_A v_{A0} + 0 = m_A v_A + m_B v_B$$

$$m_A v_{A0} = m_A v\cos\phi + m_B v\cos\phi = (m_A + m_B) v\cos\phi \qquad (1)$$

Conservação do momento linear em y:

$$P_{0y} = P_y$$

$$p_{A0y} + p_{B0y} = p_{Ay} + p_{By}$$

$$0 - m_B v_{B0} = m_A v_A + m_B v_B = m_A v \operatorname{sen}\phi + m_B v \operatorname{sen}\phi$$

$$-m_B v_{B0} = (m_A + m_B) v \operatorname{sen}\phi \qquad (2)$$

Dividindo-se (1) por (2):

$$\tan\phi = -\frac{m_B v_{B0}}{m_A v_{A0}}$$

$$\phi = -63,5189\cdots^{\circ}$$

O sinal negativo está relacionado ao sentido anti-horário de ϕ em relação ao eixo x. Interessa-nos apenas seu valor absoluto.

$$\boxed{\phi \approx 63,5^{\circ}}$$

De (1):

$$v = \frac{m_A v_{A0}}{(m_A + m_B)\cos\phi} = 59,4654\cdots \text{km/h}$$

$$\boxed{v \approx 59,5 \text{ km/h}}$$

P26.9)

a) A bola A deve ter um momentum $\vec{p} = m_B v\mathrm{i} - \frac{m_B v}{2}\mathrm{j}$, e assim a direção será:

$\theta = \arctan(-0,5/1) = 27^{\circ}$ da direção original de B, ou 117° da direção final.

b) Não.

P26.10) Novamente temos o caso especial de uma colisão elástica com um dos objetos parados. Então sabemos que a velocidade do núcleo de hidrogênio v_{nc} será:

$$v_{nc} = \frac{2m_e}{m_e + m_p} v_e$$

Elevando os dois lados ao quadrado, multiplicando por m_p e dividindo por $m_e v_e^2$, temos a fração da energia cinética do átomo de Hidrogênio em relação à energia cinética inicial do elétron:

$$\frac{m_p v_{nc}^2}{m_e v_e^2} = \frac{4 m_p m_e}{(m_e + m_P)^2}$$

Substituindo os valores

E27.1)

$$33\,rpm = 33 \times 2\pi \;\; rad\,/\,60\,s = 3{,}5\,rad\,/\,s$$

$$v = \omega R$$

a) $v = (3{,}5\,rad\,/\,s)(0{,}144\,m) = 0{,}5\,m/\,s$

b) $v = (3{,}5\,rad\,/\,s)(0{,}07\,m) = 0{,}2\,m/\,s$

E27.2) $1200\,rpm = 125{,}7\,rad\,/\,s$; $3000\,rpm = 314{,}2\,rad\,/\,s$

a) $\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \dfrac{\omega - \omega_0}{t} = \dfrac{314{,}2\,rad/\,s - 125{,}7\,rad/\,s}{12\,s} = 15{,}7\,rad/\,s^2$

b)

$\theta = \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = (125{,}7\,rad/\,s)(12\,s) + \dfrac{1}{2}(15{,}7\,rad/\,s^2)(12\,s)^2 = 2638{,}8\,rad = 420\,revoluções$

E27.3)

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(a + 3bt^2 - 4ct^3\right) = 6bt - 12ct^2$$

E27.4) O ponteiro das horas dá uma volta a cada 12 horas. Então serão $2\pi \;\; rad$ em $12 \times 60 \times 60\,segundos = 43200\,s$. A velocidade angular do ponteiro menor será:

$$\omega_{menor} = \frac{2\pi \;\; rad}{43200\,s} = 1{,}5 \times 10^{-4}\,rad\,/\,s.$$

A velocidade linear será:

$$v_{menor} = \omega R = (1{,}5 \times 10^{-4}\,rad/\,s)(0{,}001\,m) = 1{,}5 \times 10^{-7}\,m/\,s$$

O ponteiro dos minutos dá uma volta em uma hora. Logo sua velocidade angular será:

$$\omega_{maior} = \frac{2\pi \;\; rad}{(60 \times 60)\,s} = 1{,}7 \times 10^{-3}\,rad/\,s.$$

A velocidade linear será:

$$v_{maior} = \omega R = (1{,}7 \times 10^{-3}\ rad/s)(0{,}0012\ m) = 2{,}0 \times 10^{-6}\ m/s$$

P10.1) Suponha que a velocidade angular inicial seja w_i. Depois do primeiro minuto a velocidade será $0{,}90\,w_i$. Então a aceleração angular, constante pelo fato de o atrito ser constante, será:

$$\alpha = \frac{0{,}90\,w_i - w_i}{1\,\text{min}} = -0{,}1\,w_i/\text{min}$$

Depois de dois minutos a velocidade angular final w_f será:

$$w_f = w_i + \alpha t = w_i + (-0{,}1\,w_i/\text{min})(2\,\text{min}) = 0{,}8\,w_i$$

P10.2)

a) Para que cada termo tenha unidade de aceleração angular, ou seja, rad/s^2, a constante 3 deve ter dimensão $\underline{rad/s^4}$ e a constante 4 deve ter dimensão $\underline{rad/s^5}$.
b) Seja v a sua velocidade angular. Temos

$$v = \int_0^4 a\,dt = \left[-t^3 + t^4\right]_0^4 = -4^3 + 4^4 = 192\,rad/s$$

Para determinar o número de rotações devemos determinar a posição angular que vamos chamar de θ. Assim

$$\theta = \int_0^4 v\,dt = \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5}\right]_0^4 = -4^3 + \frac{4^5}{5} = 140{,}8\,rad$$

Uma volta é igual a $2\pi\ rad$. Logo $140{,}8\,rad$ é igual a $22{,}4\ voltas$.

P10.3)

a) Em um ano, a Terra percorre $2\pi\ rad$. Agora,

$$1\,ano = 365 \times 24 \times 60 \times 60\,segundos = 3{,}2 \times 10^7\,s.$$

Assim a velocidade angular da Terra será:

$$\omega = \frac{2\pi \ rad}{3{,}2 \times 10^{7}\, s} = 2{,}0 \times 10^{-7}\, rad/s$$

A distância da Terra ao Sol é $R = 1{,}5 \times 10^{11}\, m$. Portanto

$$a_{cT} = \omega^2 R = (2{,}0 \times 10^{-7}\, rad/s)^2 (1{,}5 \times 10^{11}\, m) = 6{,}0 \times 10^{-3}\, m/s^2$$

b) Sabemos que $1 dia = 24 \times 60 \times 60 \, segundos = 86400\, s$. Então

$$\omega_P = \frac{2\pi \ rad}{86400\, s} = 7{,}3 \times 10^{-5}\, rad/s$$

c) A velocidade linear v e a aceleração centrípeta de um ponto a_{cP} serão:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(6340\, km)}{86400\, s} = 4{,}6 \times 10^{-1}\, km/s$$

$$a_{cP} = \frac{v^2}{R} = \frac{((4{,}6 \times 10^{-1})\, km/s)^2}{6340\, km} = 3{,}3 \times 10^{-5}\, km/s = 3{,}3 \times 10^{-2}\, m/s^2$$

c) Comparando vemos que a velocidade angular em um ponto na superfície da Terra é cerca de 365 vezes maior que a velocidade angular da Terra em relação ao Sol. Já a aceleração centrípeta em um ponto da Terra é um pouco mais que a metade da aceleração centrípeta da Terra em relação ao Sol.

$$\frac{\omega_P}{\omega} = \frac{7{,}3 \times 10^{-5}\, rad/s}{2{,}0 \times 10^{-7}\, rad/s} = 365 \qquad \frac{a_{cP}}{a_{cT}} = \frac{3{,}3 \times 10^{-2}\, m/s^2}{6{,}0 \times 10^{-3}\, m/s^2} = 0{,}55$$

P10.4) Vide resolução da Atividade 27.5.

P10.5)

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 4{,}00\, rad/s + (-3{,}00\, rad/s^2 \times 3 s) = -5\, rad/s$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = (4{,}00\, rad/s \times 3 s) + \frac{1}{2}(-3{,}00\, rad/s^2)(3 s)^2 = -1{,}5\, rad,$$

considerando que o sentido positivo é o sentido horário.

P10.6)

a) De $t = 0s$ até $t = 2s$, a roda se desloca:

$$\theta_{0\to 2} = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = (24\, rad/s)(2s) + \frac{1}{2}(30{,}0\, rad/s^2)(2s)^2 = 108\, rad.$$

Quando ela é freada, ainda passa por 432 rotações. Cada rotação tem $2\pi\ rad$. Logo o deslocamento será:

$$\theta_{2\to\, final} = 432 \times 2\pi\ rad = 2714{,}3\, rad.$$

Assim o deslocamento angular total será:

$$\Delta\theta = \theta_{1\to 2} + \theta_{2\to\, final} = 108\, rad + 2714{,}3\, rad = 2822{,}3\, rad$$

b) $\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \Rightarrow t = \frac{2\theta}{(\omega_0 + \omega)}$. No instante final, $\omega = 0$. Consideremos agora $t = 2s$ como instante inicial. Logo teremos

$$\omega_{02} = \omega_0 + \alpha t = 24\, rad/s + (30{,}0\, rad/s)(2s) = 84\, rad/s$$

de modo que

$$t_{2\,f} = \frac{2 \times 2714{,}3\, rad}{84\, rad/s} = 64{,}6s.$$

Então a roda parou no instante $t = t_{2\,f} + 2s = 66{,}6s$.

c)

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\theta} = \frac{-(84\, rad/s)^2}{2 \times 2714{,}3\, rad} = -1{,}3\, rad/s^2$$

P10.7)

a) $\omega = \frac{v}{R} = \frac{125\, cm/s}{2{,}5\, cm} = 50\, rad/s$

b) $\omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{125\,cm/s}{5{,}8\,cm} = 22\,rad/s$

c) Seja T o tamanho da trilha. Assim:

$$T = vt = (125\,cm/s)\times(74\times 60)\,s = 5{,}5\,km$$

P10.8)

a) $a_r = 0$, pois a velocidade inicial é zero. Para a_t temos:

$$a_t = \alpha R = (0{,}600\,rad/s^2)(0{,}3m) = 0.18\,m/s^2$$

A aceleração resultante será a aceleração tangencial.

b) A aceleração angular permanece a mesma. Mas a aceleração radial $a_r = \omega^2 R$ mudará. Para calculá-la, primeiro calculamos ω. $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$. Mas $\omega_0 = 0$, $\Delta\theta = 60° = 1{,}05\,rad$ e $\omega = \sqrt{2\times 0{,}600\,rad/s^2 \times 1{,}05\,rad} = 1{,}12\,rad/s$

$$a_r = \omega^2 R = (1{,}12\,rad/s)^2(0{,}3m) = 0{,}38\,m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{(0{,}18\,m/s^2)^2 + (0{,}38\,m/s^2)^2} = 0{,}42\,m/s^2$$

b) Para $\Delta\theta = 120° = 2{,}09\,rad$, temos $\omega = \sqrt{2\times 0{,}600\,rad/s^2 \times 2{,}09\,rad} = 1{,}58\,rad/s$

$$a_r = \omega^2 R = (1{,}58\,rad/s)^2(0{,}3m) = 0{,}47\,m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{(0{,}18\,m/s^2)^2 + (0{,}47\,m/s^2)^2} = 0{,}50\,m/s^2$$

P10.9)

a) $\omega = \omega_0 + \alpha t = 0{,}250\,rev/s + (0{,}900\,rev/s^2)(0{,}200\,s) = 0{,}430\,rev/s = 2{,}70\,rad/s$

b) $\theta = \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = (0{,}250)(0{,}200\,s) + \dfrac{1}{2}(0{,}900\,rev/s^2)(0{,}200)^2 = 0{,}068\,rev = 0{,}42\,rad$

c) $v_t = \omega R = (2{,}70\,rad/s)(0{,}75\,m) = 2{,}0\,m/s$

d)

$$a_t = \alpha R = (0{,}900\, rad/s^2)(0{,}75\, m) = 0{,}675\, m/s^2$$

$$a_r = \omega^2 R = (2{,}70\, rad/s)^2 (0{,}75\, m) = 5{,}5\, m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{(0{,}675\, m/s^2)^2 + (5{,}5\, m/s^2)^2} = 5{,}5\, m/s^2$$

P10.10)

a) A força radial máxima acontece para a maior rotação (640 rpm) e a mínima para a menor rotação (423 rpm). A razão entre elas será:

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \frac{m\omega_{\max}^2 R}{m\omega_{\min}^2 R} = \frac{\omega_{\max}^2}{\omega_{\min}^2} = \left(\frac{\dfrac{640 \times 2\pi \;\; rad}{60\, s}}{\dfrac{423 \times 2\pi \;\; rad}{60\, s}} \right)^2 = \left(\frac{640}{423} \right)^2 = 2{,}29$$

b)

$$\frac{v_{t\max}}{v_{t\min}} = \frac{\omega_{\max} R}{\omega_{\min} R} = \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} = \frac{640}{423} = 1{,}51$$

E28.1) Pelo teorema dos eixos paralelos o momento de inércia será o momento de inércia em relação ao centro mais a correção:

$$I = I_{centro} + mr^2 = mr^2 + mr^2 = 2mr^2 = 2(2,0kg)(0,50m)^2 = 1,0kg\cdot m^2$$

E28.2) O momento de inércia de uma barra em torno do eixo que passa por umas das extremidades perpendicular ao seu comprimento L é $\frac{1}{3}mL^2$. O momento de inércia da roda será o momento de inércia dos 8 aros mais o momento de inércia do anel:

$$I = m_{anel}r^2 + \frac{8}{3}m_{barra}L^2 = (1,40kg)(0,300m)^2 + \frac{8}{3}(0,280kg)(0,300m)^2 = 0,193kg\cdot m^2$$

E28.3)

$$\overline{\alpha} = \frac{5rad/s}{3s} = 1,7rad/s^2$$

$\overline{\tau} = I\overline{\alpha} = (0,193kg\cdot m^2)(1,7rad/s) = 0,33kg\cdot m^2/s = 0,33N\cdot m$, usando o momento de inércia calculado no exercício anterior. Logo seria necessário um torque médio de $0,33N\cdot m$ para que a roda passe a girar a $5rad/s$.

E29.1)

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow a_y = \frac{2y}{t^2} = \frac{2(0,75m)}{(5s)^2} = 0,06m/s^2$$

Do texto temos as equações:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_y$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_y$$

$$(T_1 - T_2)R = I\alpha = Ia/R$$

Há três equações e três incógnitas. Devemos resolver o sistema para I. Somamos as duas primeiras equações:

$$m_1 g - T_1 + T_2 - m_2 g = m_1 a_y + m_2 a_y$$
$$T_1 - T_2 = (g - a_y)m_1 - (g + a_y)m_2$$

Substituindo $T_1 - T_2$ da terceira equação:

$$(g - a_y)m_1 - (g + a_y)m_2 = Ia_y / R^2$$

$$I = \left[\left(\frac{g}{a_y} - 1\right)m_1 - \left(\frac{g}{a_y} + 1\right)m_2\right]R^2$$

Então:

$$I = \left[\left(\frac{9,8m/s^2}{0,06m/s^2} - 1\right)0,500\,kg - \left(\frac{9,8m/s^2}{0,06m/s^2} + 1\right)0,460\,kg\right](0,05m)^2 = (81,17\,kg - 75,69\,kg)(2,5 \times 10^{-3}\,m^2)$$

$$I = 1,37 \times 10^{-2}\,kg \cdot m^2$$

E29.2) Pela conservação da energia:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{2}{10}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

$$h = \frac{7v^2}{10g} = \frac{7\times(5m/s)^2}{10\times(9{,}8m/s^2)} = 1{,}8m$$

Da Cinemática temos que: $y = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$. Substituindo a altura encontrada acima e como $v = 0$, $v_0 = vsen(30°)$, sendo v a velocidade final e v_0 a velocidade inicial, ambas na vertical, temos:

$$h = \frac{1}{2}vsen(30°)t \Rightarrow t = \frac{2h}{vsen(30°)} = \frac{2\times(1{,}8m)}{5m/s\times sen(30°)} = 1m.$$

E30.1)

a) Se o carro se desloca para direita, o ponto da roda que toca o chão terá velocidade v, como dada no enunciado, e esta será para a esquerda. Pela soma das velocidades, considerando o sentido positivo para direita, temos:

$$\vec{V}_t = \vec{V} + \vec{v} \Rightarrow V_t = V - v = 40 km/h - 30 km/s = 10 km/s$$

Portanto o carro derrapa para direita.

b)

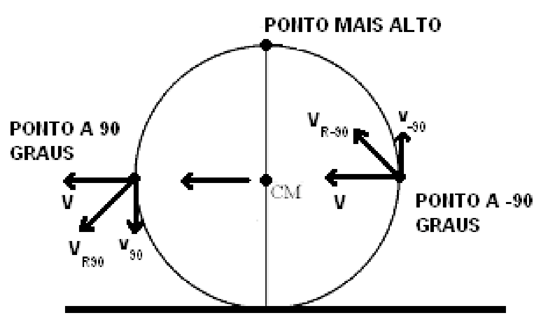
$$V_t = V - v = 40 km/h - 50 km/s = -10 km/s$$

O carro derrapa, então, para a esquerda.

c) A situação da letra a representa um carro freando. Já a situação da letra b representa um carro acelerando.

d) Para $v = 40 km/h$, de modo que $V_t = 0$.

E30.2) Na figura abaixo vemos um esquema da situação, na qual V_{R90} e V_{R-90} representam a velocidade resultante dos pontos a 90 graus e -90 graus respectivamente.



Para o ponto a 90 graus:

$V_{R90}^2 = v_{90}^2 + V^2 = (\omega R)^2 + (\omega R)^2 = 2(\omega R)^2 = \sqrt{2}\omega R$, sendo a direção e o sentido do vetor indicado na figura.

Para o ponto a -90 graus:

O módulo do vetor é o mesmo, sendo a sua direção e sentido diferentes, como indicado na figura.

E30.3) A força de atrito é paralela ao plano e para cima. A aceleração é a mesma do exemplo 30.1.

E30.4) O momento de inércia do disco é $\frac{1}{2}MR^2$. Refazendo a Atividade 30.3 com o momento de inércia do disco, encontramos que a velocidade quando o disco começa a rolar será:

$$v = \frac{1}{3}v_0$$

Então a perda de energia será:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{final} - E_{inicial}}{E_{inicial}} = \frac{\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{\frac{1}{18}mv_0^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{1}{9} \approx 11\%$$

E30.5) Vimos em 30.3 que a distância que uma percorre até rolar é:

$$x = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu g}$$

Essa distância deve ser a mesma na Lua e na Terra. Assim temos:

$$\frac{12}{49}\frac{v_{0L}^2}{\mu g_L} = \frac{12}{49}\frac{v_{0T}^2}{\mu g_T} \Rightarrow \left(\frac{v_{0L}}{v_{0T}}\right)^2 = \frac{g_L}{g_T}.$$

Portanto a razão das velocidades iniciais depende da razão das gravidades na Lua e na Terra. Então:

$$\frac{v_{0L}}{v_{0T}} = \sqrt{\frac{g_L}{g_T}} = \sqrt{\frac{1,67}{9,78}} = 0,413$$

P11.1) Seja z a coordenada ao longo do eixo vertical. Então temos que o raio de cada disco infinitesimal que está a uma certa altura z será (por semelhança de triângulos): $r(z) = \frac{zR}{h}$. A massa infinitesimal desse disco será: $dm = \pi(r(z))^2 \cdot \rho dz$, sendo ρ a densidade do cone. Assim $dm = \pi\rho \frac{R^2 z^2}{h^2} dz$ e temos:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^h \frac{\pi\rho}{2} \frac{R^4}{h^4} z^4 dz = \frac{\pi\rho}{2} \frac{R^4}{h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{\pi\rho R^4 h}{10} = \frac{3}{10}\left(\frac{\pi\rho R^2 h}{3}\right) R^2$$

O volume do cone é $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ e sua massa é $M = \frac{1}{3}\pi\rho R^2 h$. Então:

$$I = \frac{3}{10} MR^2$$

P11.2)

a) O momento de inércia do disco com buraco será o momento de inércia do disco sem o buraco menos o momento de inércia do buraco, todos em relação ao eixo pedido. O momento de inércia do disco em relação a esse eixo será:

$$I_d = \frac{1}{2} MR^2$$

Já o momento de inércia do buraco é o momento de inércia de um disco de raio $\frac{R}{4}$ que gira em torno de um eixo que está a uma distância $L = \frac{R}{2}$ em relação ao eixo que passa pelo centro do buraco e é perpendicular a ele. Pelo teorema dos eixos paralelos, temos:

$$I_b = \frac{1}{2} m_b R_b^2 + mL^2,$$

sendo m_b a massa do buraco e R_b o seu raio. Para calcular a massa do buraco: calculamos a densidade areal ρ do disco e multiplicamos pelo área do buraco, pois o disco é uniforme. $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ e então $m_b = \frac{M}{\pi R^2} \cdot \pi R_b \Rightarrow m_b = M\left(\frac{R_b}{R}\right) = M\left(\frac{R/4}{R}\right) = \frac{M}{4}$

Assim:

$$I_b = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{4}\right)\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \left(\frac{M}{4}\right)\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{MR^2}{128} + \frac{MR^2}{16} = \frac{MR^2 + 8MR^2}{128} = \frac{9}{128} MR^2$$

Logo o momento de inércia pedido será:

$$I_T = I_d - I_b = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{9}{128}MR^2 = \frac{64MR^2 - 9MR^2}{128} = \frac{55}{128}MR^2$$

b) Agora devemos considerar o momento de inércia do disco em relação ao eixo pedido menos o momento de inércia do buraco em relação ao eixo que passa pelo seu centro e é perpendicular a ele. Momento de inércia do disco em relação ao eixo pedido (teorema dos eixos paralelos):

$$I_{dc} = \frac{1}{2}MR^2 + ML^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 = \frac{3}{4}MR^2$$

Momento de inércia do buraco em relação ao eixo que passa pelo seu centro e é perpendicular a ele:

$$I_{bc} = \frac{1}{2}m_bR_b^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{4}\right)\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{MR^2}{128}$$

Logo:

$$I_T = I_{dc} - I_{bc} = \frac{3}{4}MR^2 - \frac{MR^2}{128} = \frac{96MR^2 - MR^2}{128} = \frac{95}{128}MR^2$$

P11.3)

a) Como a aceleração é constante, temos:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 39{,}0\,rev/s}{32\,s} = 1{,}2\,rev/s^2 = 7{,}5\,rad/s^2$$

b) $\tau = I\alpha$, sendo I o momento de inércia do objeto formado pela barra e pela bola. Temos:

$$I = I_{barra} + I_{bola}$$

O momento de inércia da bola é igual ao momento de inércia de uma partícula que gira a uma distância $L/2$ do eixo, sendo L o comprimento da barra:

$$I_{bola} = m_b(L/2)^2 = 1{,}06\,kg\cdot(1{,}20\,m/2)^2 = 3{,}82\times10^{-1}\,kg\cdot m^2$$

O momento de inércia da barra é (no texto):

$$I_{barra} = \frac{1}{12}m_{barra}L^2 = \frac{6{,}40\,kg\cdot(1{,}20\,m)^2}{12} = 7{,}68\times10^{-1}\,kg\cdot m^2$$

Logo $I = 1{,}15\,kg\cdot m^2$ e o torque será:

$\tau = (1{,}15\,kg\cdot m^2)(7{,}5\,rad/s^2) = 8{,}6\,N\cdot m$

c) $\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 39{,}0\,rev/s\cdot 32\,s + \frac{1}{2}(1{,}2\,rev/s^2)(32\,s)^2 = 1{,}9\times 10^2\,rev$

P11.4)

a) A quantidade de energia potencial gravitacional que se transformou em energia cinética é:

$$K = m_1 gh - m_2 gh.$$

sendo m_1 a massa do bloco de $30\,kg$ e m_2 a massa do bloco de $20\,kg$. A altura h que o bloco m_1 desce é a mesma altura que o bloco m_2 sobe. Temos:

$$K = (30\,kg - 20\,kg)(9{,}8\,m/s^2)(2{,}0\,m) = 196\,J$$

Os blocos têm a mesma velocidade final v e a polia tem velocidade angular dada por $\omega = \frac{v}{R}$, pois não há deslizamento.A energia cinética do sistema é:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 = 196\,J \Rightarrow v = \sqrt{\frac{392\,J}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}$$

O momento de inércia da polia é o momento de inércia de um disco, ou seja,

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}5{,}0\,kg\cdot(0{,}10\,m)^2 = 0{,}025\,kg\cdot m^2$$

Assim

$$v = \sqrt{\frac{392\,J}{30\,kg + 20\,kg + \frac{0{,}025}{(0{,}10\,m)^2}}} = 2{,}7\,m/s$$

b)

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2{,}7\,m/s}{0{,}10\,m} = 27\,rad/s$$

c) O trabalho realizado sobre cada bloco é igual à variação da energia cinética. Para o bloco m_1:

$$W = \int \vec{F}\bullet d\vec{s} = \int (P_1 - T_1)dy = (P_1 - T_1)h = \frac{1}{2}m_1 v^2 \Rightarrow$$

$$T_1 = P_1 - \frac{m_1 v^2}{2h} = 30kg \cdot 9{,}8 m/s^2 - \frac{30kg \cdot (2{,}7 m/s)^2}{2 \cdot 2{,}0 m} = 2{,}4 \times 10^2\ N$$

Para o bloco m_2:

$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int (T_2 - P_2) dy = (T_2 - P_2) h = \frac{1}{2} m_2 v^2 \Rightarrow$$

$$T_2 = P_2 + \frac{m_2 v^2}{2h} = 20kg \cdot 9{,}8 m/s^2 + \frac{20kg \cdot (2{,}7 m/s)^2}{2 \cdot 2{,}0 m} = 2{,}3 \times 10^2\ N$$

As forças apontam para cima.

d) A aceleração do bloco será:

$$P_1 - T_1 = m_1 a \Rightarrow a = \frac{P_1 - T_1}{m_1} = \frac{30kg \cdot 9{,}8 m/s^2 - 2{,}4 \times 10^2\ N}{30kg} = 1{,}8 m/s^2$$

Temos das equações da Cinemática que:

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}0 m}{1{,}8 m/s^2}} = 1{,}5 s$$

P11.5)

a) O momento de inércia será $I = I_{R_1} + I_{R_2}$, sendo I_{R_1} o momento de inércia do disco de raio R_1 e I_{R_2} o momento de inércia do disco de raio R_2. Então temos:

$$I = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 + \frac{1}{2} M_2 R_2^2 = \frac{1}{2}((0{,}80kg)(2{,}50 \times 10^{-2} m)^2 + (1{,}60kg)(5{,}00 \times 10^{-2} m)^2) =$$

$$I = 2{,}25 \times 10^{-3}\ kg \cdot m^2$$

b) Pela conservação da energia temos:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v}{R_1} \right)^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + (I / mR_1^2)}} \Rightarrow$$

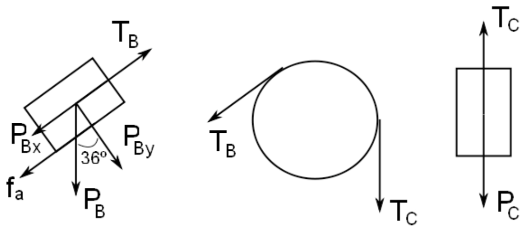
$$v = \sqrt{\frac{2(9{,}8 m/s^2)(2{,}00 m)}{(1 + ((2{,}25 \times 10^{-3}\ kg \cdot m^2)/(1{,}50)(0{,}025)^2))}} = 3{,}40 m/s$$

c) Trocando R_1 por R_2 na equação para v acima, temos:

$$v = 4{,}95 m/s$$

Análise: $R_2 > R_1$. Pela relação $\omega = \frac{v}{R}$ vemos que quanto maior o raio, menor a velocidade angular e consequentemente a energia. Assim a velocidade do bloco ao atingir o solo deverá ser maior quando a corda estiver enrolada no disco de raio R_2, que é o resultado que encontramos, pois o bloco terá maior energia cinética translacional que rotacional.

11.6) Considere a figura abaixo:



Mostramos as forças aplicadas nos três objetos do problema. Aplicamos a segunda lei de Newton aos objetos, sendo o caso da roldana na forma rotacional:

Bloco B, direção x: $T_B - f_a - P_{Bx} = m_B a$ (eq. 1)

Bloco B, direção y: $N - P_{By} = 0$ (eq. 2)

Bloco C, direção y: $P_C - T_C = m_c a$ (eq. 3)

Roldana: $T_C R - T_B R = I\alpha = I\frac{a}{R}$ (eq. 4)

Portanto, das equações acima temos um sistema com quatro equações e quatro incógnitas: N, T_B, T_C, a. Estamos interessados nas três últimas. Isolamos T_B na equação 1: $T_B = m_B a + f_a + P_{Bx}$. Isolamos T_C na equação 3: $T_C = m_c a + P_C$.Substituímos esses valores na equação 4 e encontramos a aceleração:

$$(m_c a + P_C)R - (m_B a + f_a + P_{Bx})R = I\frac{a}{R} \Rightarrow$$

$$a=\frac{P_C-f_a-P_{Bx}}{m_C+m_B+\frac{I}{R^2}}=\frac{m_C g-\mu N-m_B g sen(36°)}{m_C+m_B+\frac{\frac{1}{2}m_R R^2}{R^2}}=\frac{m_C g-\mu m_B g\cos(36°)-m_B g sen(36°)}{m_C+m_B+\frac{1}{2}m_R}$$

Encontramos a força normal da equação 2 e substituímos o momento de inércia da roldana, que é o momento de inércia de um disco. Resolvendo numericamente temos:

$$a=\frac{12{,}0kg-0{,}10\cdot 3{,}0kg\cdot\cos(36°)-3{,}0kg\cdot sen(36°)}{12{,}0kg+3{,}0kg+\frac{1}{2}1{,}0kg}\cdot 9{,}8m/s^2=6{,}3m/s^2$$

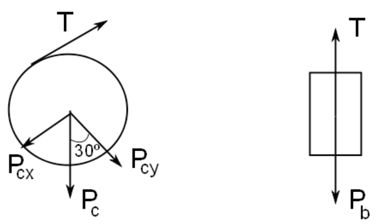
Substituindo a na equação 1, encontramos T_B:

$$T_B=m_B a+f_a+P_{Bx}=3{,}0kg\cdot 6{,}3m/s^2+0{,}10\cdot 3{,}0kg\cdot\cos(36°)\cdot 9{,}8m/s^2+3{,}0kg\cdot sen(36°)\cdot 9{,}8m/s^2\Rightarrow$$
$$T_B=39N$$

Substituindo a na equação 3, encontramos T_C:

$$T_C=P_C-m_C a=12kg\cdot 9{,}8m/s^2-12kg\cdot 6{,}3m/s^2\Rightarrow$$
$$T_C=42N$$

11.7) Considere a figura abaixo:



Mostramos as forças aplicadas nos dois objetos do problema. Aplicamos a segunda lei de Newton aos objetos, sendo o caso do cilindro tanto na forma linear quanto rotacional:

$P_b-T=m_b a_b$ (eq. 1)

$T-P_{cx}=m_c a_c$ (eq. 2)

$TR=I\alpha=I\frac{a_b}{R}$ (eq. 3)

A equação 1 se refere à componente y para o bloco, a equação 2 à componente x para o cilindro e a equação 3 é a equação rotacional também do cilindro. Temos então três equações e três incógnitas: T, a_b, a_c. Para encontrar T, isolamos a_b na equação 3: $a_b = \frac{TR^2}{I}$. Substituímos na equação 1:

$$P_b - T = m_b\left(\frac{TR^2}{I}\right) \Rightarrow T = \frac{P_b}{\left(1+\frac{m_b R^2}{I}\right)} = \frac{m_b g}{\left(1+\frac{m_b R^2}{\frac{1}{2}m_c R^2}\right)} = \frac{m_b g}{1+2\frac{m_b}{m_c}}$$

Substituindo os valores, temos:

$$T = \frac{5{,}0kg \cdot 9{,}8m/s^2}{1+2\cdot\frac{5{,}0kg}{25kg}} = 35N$$

Agora substituímos o valor de T na equação 2 e encontramos a_c:

$$T - P_{cx} = m_c a_c \Rightarrow a_c = \frac{T - P_{cx}}{m_c} = \frac{T - m_c g \cdot sen(30°)}{m_c} = \frac{35N - (25kg \cdot 9{,}8m/s^2 \cdot sen(30°))}{25kg} =$$

$$a_c = 3{,}5m/s^2$$

P11.9) Seja m a massa da bola e R o seu raio. $\vec{F}$ atua na direção x. Então temos nessa direção:

$F = ma$ (eq. 1)

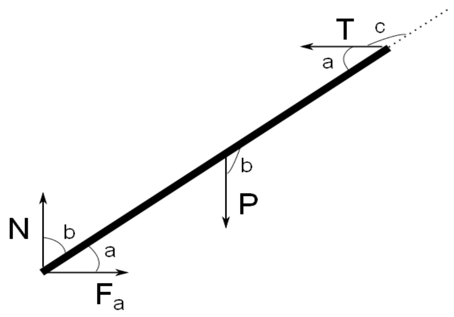
A equação rotacional dá

$\tau = I\alpha \Rightarrow F \cdot x = I\alpha$ (eq. 2)

O momento de inércia da bola é o momento de inércia de uma esfera, $I = \frac{2}{5}mR^2$, e a condição para que a bola role inicialmente é $\alpha = \frac{a}{R}$. Substituindo F (da equação 1), I e α na equação 2, temos

$$ma \cdot x = \frac{2}{5}mR^2 \cdot \left(\frac{a}{R}\right) \Rightarrow x = \frac{2}{5}R$$

11.10) Considere a figura abaixo:



Do desenho vemos que $tg(a) = \dfrac{4{,}0m}{3{,}0m} \Rightarrow a = tg^{-1}\left(\dfrac{4{,}0m}{3{,}0m}\right) = 53°$

a) O guindaste está em equilíbrio, portanto temos $I\alpha = 0$. Escrevendo a equação da segunda lei de Newton para rotação (L é o comprimento do guindaste), temos:

$$P\left(\frac{L}{2}\right)sen(b) - TLsen(c) = I\alpha = 0$$

As forças N e F_a não contribuem pois estamos calculando o torque em relação ao ponto de apoio em que elas estão aplicadas. Logo:

$$T = \frac{Psen(b)}{2sen(c)}$$

Da figura vemos que $sen(c) = sen(180° - a) = sen(180° - 53°) = 0{,}80$ e que $sen(b) = sen(90° - a) = sen(90° - 53°) = 0{,}60$. Portanto:

$$T = \frac{Psen(b)}{2sen(c)} = \frac{mgsen(b)}{2sen(c)} = \frac{150\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 0{,}60}{2 \cdot 0{,}80} = 5{,}5 \times 10^2\ N$$

b) A tensão não atuará mais. Então teremos:

$$I\alpha = P\left(\frac{L}{2}\right)sen(b) \Rightarrow \alpha = \frac{PLsen(b)}{2I},$$

usando novamente o mesmo ponto do item anterior para calcular o torque. I é o momento de inércia do guindaste, que é o momento de inércia de uma barra que gira em torno de sua extremidade. Logo:

$$\alpha = \frac{PLsen(b)}{2I} = \frac{mgLsen(b)}{2\cdot\left(\frac{1}{3}mL^2\right)} = \frac{3\cdot g\cdot sen(b)}{2L} = \frac{3\cdot 9{,}8m/s^2\cdot 0{,}60}{2\cdot 5{,}0m} = 1{,}8\,rad/s^2\,,$$

c) A aceleração angular será constante. Então usamos a equação da Cinemática:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\Delta\phi)\,,$$

sendo $\Delta\phi$ a variação do ângulo, que no nosso caso será $\Delta\phi = a = 53° = 0{,}93\,rad$. No momento do corte tínhamos $\omega_0 = 0$. Portanto:

$$\omega^2 = 2\alpha(\Delta\phi) \Rightarrow \omega = \sqrt{2\alpha(\Delta\phi)} = \sqrt{2\cdot 1{,}8\,rad/s^2\cdot 0{,}93\,rad} = 1{,}8\,rad/s$$

E31.1) Marquinhos considera desprezível os aros e considera a roda como um anel. Então ele sabe que o momento de inércia da roda será mR^2. A energia cinética será:

$$E_{CR} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}(1{,}5kg)(0{,}30m)^2(6rad/s)^2 = 2{,}4J$$

E31.2) A energia cinética de rotação será (o momento de inércia de uma esfera é $\frac{2}{5}mR^2$):

$$E_{CR} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{5}mR^2\left(\frac{V^2}{R^2}\right) = \frac{1}{5}mV^2$$

A energia cinética total será a soma da energia cinética rotacional com a energia cinética linear:

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{5}mV^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{7}{10}mV^2$$

E31.3) Unidade de energia = $J = N \cdot m$. Vejamos:

$$I_e = kg \cdot m^2 \text{ e } \omega = rad/s \Rightarrow \omega^2 = 1/s^2.$$

Logo:

$$I_e\omega^2 = kg \cdot m^2 \cdot \left(\frac{1}{s^2}\right) = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = \left(\frac{kg \cdot m}{s^2}\right) \cdot m = N \cdot m$$

E31.4) $\tau = I_c\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I_c}$. Então temos que

$$\Delta\theta = (\omega_0 = 0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{I_c}\right)t^2.$$

Então o trabalho será dado por:

$$W = \tau\Delta\theta = \tau\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{I_c}\right)t^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{I_c}t^2$$

E31.5) A energia inicial será:

$$mgh + \frac{1}{2} I\omega_1^2 + \frac{1}{2} mV_1^2$$

A final será:

$$\frac{1}{2} I\omega_2^2 + \frac{1}{2} mV_2^2 \, .$$

Portanto a diferença de energia fica:

$$\frac{1}{2} I\omega_2^2 + \frac{1}{2} mV_2^2 - mgh - \frac{1}{2} I\omega_1^2 - \frac{1}{2} mV_1^2 = \frac{1}{2} I(\omega_2^2 - \omega_1^2) + \frac{1}{2} m(V_2^2 - V_1^2) - mgh.$$

Como $\omega_1 < \omega_2$ e $V_1 < V_2$ as quantidades no primeiro e segundo membros são positivas. Se a soma dessas quantidades for igual ao termo mgh, o cilindro não deslizará. Se for diferente, temos dois casos: se for menor que mgh significa a energia final é menor e o cilindro deslizou; se for maior significa que a energia final é maior e que o houve alguma fonte extra de energia (por exemplo, alguém empurrou) para o cilindro.

E32.1) A massa de um carro de Fórmula 1 é aproximadamente $650\,kg$. O momento angular é então dado por:

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} \Rightarrow l = rp = (30\,m)(650\,kg)(320\,km/h) = 1{,}7\times10^{6}\,\frac{m^2\cdot kg}{s} = 1{,}7\times10^{6}\,J\cdot s$$

E32.2) No caso podemos escrever o momento angular da seguinte forma:

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} \Rightarrow l = rp = rmv = r^2 m\omega$$

Logo a variação do momento angular será:

$$\Delta l = r^2 m(\omega_{final} - \omega_{inicial})$$

Mas $\omega_{final} = 3\,Hz\times 2\pi\ \ rad = 18{,}8\,rad/s$ e $\omega_{inicial} = 5\,Hz\times 2\pi\ \ rad = 31{,}4\,rad/s$. Assim:

$$\Delta l = r^2 m(\omega_{final} - \omega_{inicial}) = (5m)^2\,3kg(18{,}8\,rad/s - 31{,}4\,rad/s) = -9{,}5\times10^{2}\,J\cdot s.$$

Para uma freqüência de $5\,Hz = 31{,}4\,rad/s$, a esfera demorará $\dfrac{2\pi\ \ rad}{31{,}4\,rad/s} = 0{,}2\,s$ para dar um giro. Sabemos que o torque é a variação do momento angular no tempo, de modo que temos:

$$\tau = \frac{\Delta l}{t} = \frac{-9{,}5\times10^{2}\,N\cdot m\cdot s}{0{,}2\,s} = 4{,}75\times10^{3}\,N\cdot s$$

E32.3) $\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p}$. Escrevendo a matriz para o produto vetorial e lembrando dos cálculos de seus componentes, temos:

$$l_x = yp_z - p_y z = m(yv_z - v_y z)$$

$$l_y = p_x z - xp_z = m(v_x z - xv_z)$$

$$l_z = xp_y - p_x y = m(xv_y - v_x y)$$

E32.4)

a) $\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p}$. Temos que $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j}$. Usando as equações acima para as componentes do momento angular, temos:

$$l_x = yp_z - p_y z = m(yv_z - v_y z) = 0{,}5\,kg(1\,cm(0) - 1\,cm/s(0)) = 0$$

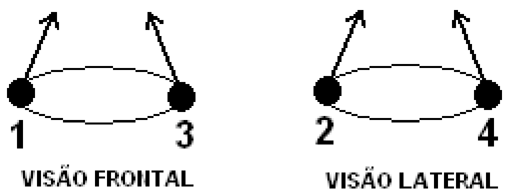
$$l_y = p_x z - x p_z = m(v_x z - x v_z) = 0{,}5kg(1cm/s(0) - 1cm(0)) = 0$$
$$l_z = x p_y - p_x y = m(x v_y - v_x y) = 0{,}5kg(1cm \cdot 1cm/s - 1cm/s \cdot 1cm) = 0$$

b)
$$l_x = y p_z - p_y z = m(y v_z - v_y z) = 0{,}5kg(1cm(0)+3cm/s(0)) = 0$$
$$l_y = p_x z - x p_z = m(v_x z - x v_z) = 0{,}5kg(1cm/s(0) - 1cm(0)) = 0$$
$$l_z = x p_y - p_x y = m(x v_y - v_x y) = 0{,}5kg(1cm \cdot -3cm/s - 1cm/s \cdot 1cm) = 2J \cdot s$$

c) $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$. Trocando l por F nas equações das componentes do momento angular e usando a força dada, temos:

$$\tau_x = y F_z - F_y z = 1cm \cdot 0N - 1N \cdot 0cm = 0$$
$$\tau_y = F_x z - x F_z = 1N \cdot 0cm - 1cm \cdot 0N = 0$$
$$\tau_z = x F_y - F_x y = 1cm \cdot 1N - 1N \cdot 1cm = 0$$

E30.5)
a) A partícula nas posições 1, 2, 3 e 4.



b) $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = rpsen\theta = rmvsen\theta = 0{,}5m \cdot 2kg \cdot 5m/s \cdot sen\theta = 5sen\theta \ J \cdot s$

E33.1) O momento angular de um sistema é dado por:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$$

Como temos 3 partículas, a equação acima fica:

$$\vec{L} = L_1 + L_2 + L_3 = \vec{l}_1 \times m_1 \vec{v} + \vec{l}_2 \times m_2 \vec{v} + \vec{l}_3 \times m_3 \vec{v}$$

E33.2) O momento de inércia de uma haste fina que gira em torno do seu centro é dado por $I = \dfrac{MR^2}{12}$. O momento angular do sistema será dado por:

$$L = I\omega = \frac{MR^2\omega}{12} = \frac{0{,}4\,kg \cdot (1{,}5\,m)^2 \cdot 2{,}0\,rad/s}{12} = 0{,}15\,J \cdot s$$

Suponhamos que o eixo perpendicular ao papel e saindo deste seja o positivo. Se a haste gira no sentido horário no plano do papel, então o momento angular será negativo, ou seja, paralelo ao eixo e entrando na folha de papel. Se a haste gira no sentido anti-horário o momento angular será positivo, ou seja, paralelo ao eixo e saindo da folha de papel.

E33.3)

a) Momento de inércia de um anel: $I = MR^2$. Logo o momento angular será:

$$L = I\omega = MR^2\omega$$

b) Momento de inércia de um disco: $I = \dfrac{1}{2}MR^2$. Então o momento angular será:

$$L = I\omega = \frac{MR^2\omega}{2}$$

Como toda massa do anel está mais afastada do eixo de rotação, este deveria possuir um momento angular maior, como encontramos acima.

E33.4) Da equação (33.4) podemos escrever:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha} \Rightarrow \frac{d(\vec{r} \times \vec{F})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{F} + \vec{r} \times \frac{d\vec{F}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

O momento de inércia de um disco é dado por $I = \frac{1}{2}Mr^2$ Assim a aceleração angular será:

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{I}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{F} + \vec{r} \times \frac{d\vec{F}}{dt}\right) = \frac{2}{Mr^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{F} + \vec{r} \times \frac{d\vec{F}}{dt}\right)$$

E33.5) Como o atrito é paralelo ao plano inclinado e direcionado para cima, a solução será a mesma da Atividade 33.1. Portanto a aceleração será:

$$a = \frac{5}{7} g sen\varepsilon$$

E34.1)

a) Para que a Lua mostre sempre a mesma face, ela precisa ter a mesma velocidade angular de rotação e translação. Chamemos de $I_{Lua,r}$ o momento de inércia da Lua em torno dela mesmo, ou seja, o momento de inércia de uma esfera, ou $I_{Lua,r} = \frac{2}{5}MR.$ Chamemos de $I_{Lua,t}$ o momento de inércia da Lua em torno da Terra, ou seja, uma partícula em uma órbita circular de raio D, que é dado por $I_{Lua,t} = MD^2$. Então a razão dos momenta angulares será:

$$\frac{L_{rotacao}}{L_{translacao}} = \frac{I_{Lua,r}\omega}{I_{Lua,t}\omega} = \frac{I_{Lua,r}}{I_{Lua,t}} = \frac{\frac{2}{5}MR^2}{MD^2} = \frac{2}{5}\frac{R^2}{D^2}$$

O raio da Lua é $R = 1{,}7\times10^3\,m$ e a distância Terra-Lua é $D = 3{,}84\times10^8\,m$. Portanto:

$$\frac{L_{rotacao}}{L_{translacao}} = \frac{2}{5}\frac{R^2}{D^2} = \frac{2}{5}\frac{\left(1{,}7\times10^3\,m\right)^2}{\left(3{,}84\times10^8\,m\right)^2} = 7{,}8\times10^{-12}$$

b) Para vermos a Lua toda, sua velocidade angular de rotação precisa ser no mínimo 2 vezes a velocidade angular de translação. Logo o momento angular de rotação irá dobrar.

E34.2) Sabemos que o impulso é a variação do momento linear:

$$I = p_f - p_i$$

Da mesma forma podemos escrever para rotação:

$Ir = I_0(\omega_f - \omega_i)$ (a letra I representa impulso e I_0 representa momento de inércia)

Da primeira equação: $p_i = 0$, pois a barra está parada. Então encontramos o movimento do seu centro de massa:

$$I = p_f \Rightarrow I = mv_f \Rightarrow v_f = \frac{I}{m} = \frac{2N\cdot s}{0{,}050kg} = 40m/s$$

Da segunda equação: $\omega_i = 0$, pois a barra está parada. O momento de inércia de uma barra de comprimento L e massa M que gira em torno do seu centro de massa é dado por $\frac{ML^2}{12}$. Então o movimento de rotação em torno do centro de massa será:

$$Ir = I_0\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{Ir}{I_0} = \frac{12 \cdot 2 N \cdot s \cdot 0{,}10 m}{0{,}050 kg \cdot (0{,}30 m)^2} = 533 rad/s$$

E34.3) O momento angular do sistema se conserva, pois não atua torque externo. Seja I_1 o momento de inércia da roda que gira e I_2 o momento de inércia da segunda roda. Chamemos de ω_f a velocidade angular final do sistema e ω_i a velocidade angular inicial, que é apenas da roda que gira. Temos:

$$I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i = \left(\frac{I_1}{I_1 + I_2}\right) 500 rpm$$

E34.4)

a) Como não há torque externo, o momento angular se conserva. Então:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f} = \frac{6 kg \cdot m^2 \cdot 2\pi \ rad/s}{2 kg \cdot m^2} = 18{,}4 rad/s$$

b) Energia cinética inicial: $E_i = \frac{1}{2} I_i\omega^2 = \frac{1}{2} 6 kg \cdot m^2 \cdot (2\pi \ rad/s)^2 = 118{,}4 J$

Energia cinética final: $E_i = \frac{1}{2} I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2} 2 kg \cdot m^2 \cdot (18{,}4 \ rad/s)^2 = 338{,}6 J$

Logo a energia cinética aumenta $220{,}2 J$

E34.5)

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} = \frac{0{,}5 kg \cdot 9{,}8 m/s^2 \cdot \dfrac{0{,}04}{\cos(30°)}}{5{,}0 \times 10^{-4} kg \cdot m^2 \cdot 30 \cdot 2\pi \ rad/s} = 2{,}4 rad/s$$

A velocidade está no sentido positivo do eixo z.

P12.1) O momento angular do sistema criança carrossel se conserva. Logo antes da criança encostar no carrossel, o momento angular será:

$$I_{criança}\omega_{criança} = (40)(1{,}32)^2\left(\frac{30x10^{-2}}{1{,}32}\right) = 15{,}8$$

O momento angular depois do salto será:

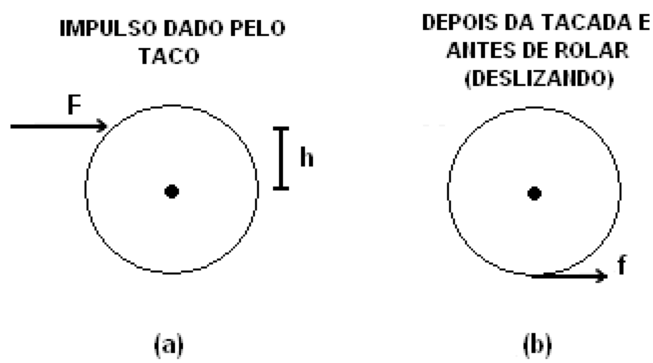
$$(I_{criança} + I_{carrossel})\,\omega_{final} = \left((40)(1{,}32)^2 + 173\right)\omega_{final} = 243\ \omega_{final}$$

Igualando as duas expressões:

$$243\omega_{final} = 15{,}8$$

$$\omega_{final} = \frac{15{,}8}{243} = 6{,}50x10^{-2}\ rad/s$$

P12.2) Consideremos a figura abaixo:



O momentum linear e o momentum angular não se conservam. Então escrevemos as seguintes equações:

$$(1)\qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow Mv_0 = \int_0^t F\,dt$$

$$(2)\qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \Rightarrow I\omega_0 = h\int_0^t F\,dt$$

Substituindo $\int_0^t F\,dt$ encontrado em (1) em (2), sendo I o momento de inércia de uma esfera, temos:

$$(3) \qquad \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\omega_0 = hMv_0 \Rightarrow \omega_0 = -\frac{5hv_0}{2R^2}$$

Consideramos agora o movimento da bola entre o instante em que ela atinge v_0 e o instante em que ela atinge $\frac{9}{7}v_0$ (parte (b) da figura). A força que atua nesse intervalo é a força de atrito cinético f mostrada. A equação para translação (que está na direção x) será :

$$F = f = ma \Rightarrow a = \frac{f}{m}$$

Como a aceleração é constante, escrevemos $v = v_0 + at$. Depois de um tempo t a velocidade será $\frac{9}{7}v_0$. Substituindo a encontrado acima , temos

$$\frac{9}{7}v_0 = v_0 + \frac{f}{M}t \Rightarrow ft = \frac{2}{7}Mv_0$$

A equação para rotação será:

$$\tau = I\alpha \Rightarrow fR = \frac{2}{5}MR^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{5f}{2MR^2}$$

A aceleração angular também é constante e então escrevemos $\omega = \omega_0 + \alpha t$. Quando a bola rolar, temos $\omega = \frac{v}{R} = -\frac{9v_0}{7R}$. Calculamos ω_0 em (3). A equação fica:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow -\frac{9v_0}{7R} = -\frac{5hv_0}{2R^2} + \frac{5f}{2MR^2}t \Rightarrow ft = Mv_0\left(\frac{h}{R} - \frac{18}{35}\right)$$

$$-\frac{9v_0}{7R} = -\frac{5hv_0}{2R^2} + \frac{5f}{2mR^2}t \Rightarrow ft = mv_0\left(\frac{h}{R} - \frac{18}{35}\right)$$

Igualando-se as duas expressões para ft, encontramos:

$$\frac{2}{7}Mv_0 = Mv_0\left(\frac{h}{R} - \frac{18}{35}\right) \Rightarrow h = \frac{4}{5}R$$

P12.3) Consideremos o cilindro menor. O momento angular não se conserva, pois o cilindro maior exerce torque sobre o cilindro menor (em torno do eixo em relação ao qual ele gira). O mesmo é válido se considerarmos o cilindro maior.

O cilindro maior exerce um impulso no menor que é dado por:

(1) $R_2 f_a \Delta t = I_2 \omega_f$, sendo f_a a força de atrito

O cilindro menor também exerce um impulso no maior, que é dado por:

(2) $R_1 f_a \Delta t = -I_1(\omega_2 - \omega_1)$

O sinal negativo vem do fato que o cilindro menor tende a frear o maior mas a velocidade linear das bordas dos dois cilindros são iguais, de modo que:

$$\frac{\omega_f}{R_2} = \frac{\omega_2}{R_1} \Rightarrow \omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega_f$$

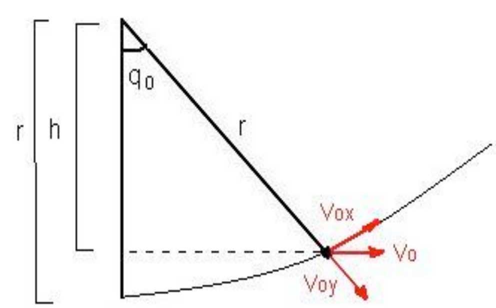
Substituindo ω_2 em (2) dividindo (1) por (2), temos:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{-I_2\omega_f}{I_1\left(\frac{\omega_f R_1}{R_2} - \omega_0\right)}$$ Então

$$I_1\omega_f - \frac{I_1 R_2 \omega_0}{R_1} = -I_2\omega_f \Rightarrow \omega_f(I_1 + I_2) = \frac{I_1 R_2}{R_1}\omega_0 \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1 R_2 \omega_0}{R_1(I_1 + I_2)}$$

$$\omega_f = \frac{\omega_0}{\left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{I_2 R_1}{R_2 I_1}\right)}$$

P12.4) Consideremos a figura abaixo:



Para a bola atingir o topo, a energia cinética deve ser igual a potencial, uma vez que a bola sobe uma altura h. A velocidade da energia cinética é V_{0x}, uma vez que V_{0y} é anulada. Então:

Energia potencial: $mgh = mg(\cos q_0)$, tomando como zero na altura da qual a partícula parte.

Energia cinética: $\frac{1}{2}mv_{0x}^{\ 2} = \frac{1}{2}mv_0^{\ 2}\cos^2 q_0$, sendo do diagrama $v_{0x} = v_0 \cos q_0$

Igualando-se as duas expressões temos:

$$\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}\cos^2 q_0 = mgr\cos q_0 \Rightarrow v_0^{\ 2} = 2gr\sec q_0$$
$$v_0 = \sqrt{2g\ r\sec q_0}$$

P12.5) O momento angular se conserva: $1\ rpm = \frac{2\pi}{60} = 0{,}10\ rad/s = \omega$

Momento angular inicial: $I\omega = 1200\ Kg.m^2\ \ x\,0{,}10\ rad/s = 120\,\frac{kg.m^2}{s}$

Quando a criança se move, ela contribui para aumentar o momento de inércia do sistema. Quando ela está a $2{,}0m$, seu momento de inércia será:

$$mr^2 = (40\,kg)(2{,}0\,m)^2 = 160\,kg.m^2.$$

O momento angular final do sistema será:

$$(I_{carrossel} + I_{criança})\omega_f = (1200 + 160)\omega_f = 1360\omega_f\ .$$

Igualando-se as expressões para o momento angular final e inicial, temos:

$$1360\omega_f = 120$$
$$\omega_f = 8{,}8x10^{-2}\ rad/s$$

P12.6) Vamos supor que a lama fique presa na borda. O momento de inércia será:

$$I_{lama} = (0{,}5\,kg)(1{,}0\,m)^2 = 0{,}50\,kg.m^2.$$

O momento de inércia da porta é:

$$I_{porta} = \frac{1}{3} ma^2 = \frac{1}{3} (40 kg)(1,0 m)^2 = 13\ kg.m^2 ,$$

sendo $a = l\arg ura$ .Vemos que o momento de inércia da lama é desprezível. Então o momento angular da lama em relação ao eixo em torno do qual a porta gira é:

$$L = mvr = (0,5 kg)(12,0 m/s)(1,0 m) = 6\ \frac{Kg.m^2}{s}$$

Isso será igual ao momento angular final porta + lama:

$$(I_{lama} + I_{porta})\omega_f = 6 \frac{Kg.m^2}{s}$$

$$(13,5\ Kg.m^2)\omega_f = 6 \frac{Kg.m^2}{s}$$

$$\omega_f = 4,4\ x10^{-2}\ rad/s$$

P12.7)

a) A energia cinética rotacional do pêndulo + bala é $\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{bala} + I_{penmdulo})$. Depois do choque será igual a energia potencial do conjunto bala + pêndulo correspondente a altura h:

$$\frac{1}{2}(I_{bala} + I_{penmdulo})\omega^2 = (M + m)gh$$

$$\frac{1}{2}(mr^2 + I)\omega^2 = (M + m)gh$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2(M + m)gh}{(mr^2 + I)}}$$

b) Se $I = Mr^2$, temos:

$$\omega = \sqrt{\frac{2(M + m)gh}{(mr^2 + Mr^2)}} = \sqrt{\frac{2(M + m)gh}{r^2 (m + M)}} = \frac{\sqrt{2gh}}{r} \Rightarrow \omega\ r = \sqrt{2gh} \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

P12.8)

a) $T = F_{centripeta} = \dfrac{mv^2}{r}$. O momento angular se conserva, pois não há torque externo.

Então: $mv_1 r_1 = mvr \Rightarrow v = \dfrac{v_1 r}{r}$, assim a tensão será:

$$T = \frac{m\left(\dfrac{v_1 r_1}{r}\right)^2}{r} = \frac{mv_1^{\,2} r_1^2}{r^3}$$

b)

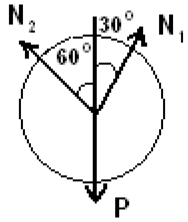
$$W = \int \vec{T}.d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{mv_1^{\,2} r_1^2}{r^3} dr = m\, v_1^2 r_1^2 \left(\frac{-r^{-2}}{2}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{mv_1^{\,2} r_1^2}{2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}$$

$$W = \frac{mv_1^{\,2} r_1^2}{2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}$$

E35.1) Para que a balança fique equilibrada, os torques nos pontos A e B. Assim temos:

$$20cm \cdot 15N = 45cm \cdot P_B \Rightarrow P_B = \frac{20cm \cdot 15N}{45cm} = 6{,}7N$$

E35.2) A figura abaixo mostra do diagrama de corpo livre para o cilindro:



Usando a condição de equilíbrio para o eixo x, temos:

$$F_x = N_1 sen(30°) - N_2 sen(60°) = 0 \quad (1)$$

Para o eixo y:

$$F_y = N_1 \cos(30°) + N_2 \cos(60°) - P = 0 \quad (2)$$

De (1) temos:

$$N_1 = \frac{N_2 sen(60°)}{sen(30°)} \quad (3)$$

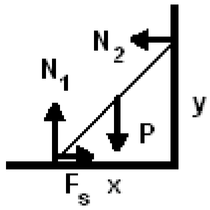
Substituindo (3) em (2), temos:

$$\frac{N_2 sen(60°)}{sen(30°)} \cos(30°) + N_2 sen(30°) = P \Rightarrow N_2 = 0{,}45P$$

Substituindo o resultado de N_2 em (3), encontramos:

$$N_1 = 0{,}78P$$

E35.3) O diagrama de corpo livre para escada é mostrado na figura abaixo:



F_s é a força de atrito, N_1 e N_2 as normais e P o peso da escada.

Equação de equilíbrio para o eixo x:

$$F_s - N_2 = 0 \Rightarrow \mu N_1 = N_2 \quad (1)$$

Quando escrevemos $F_s = \mu N_1$, estamos considerando a força máxima de atrito estático, ou seja, a força que nos dará o menor ângulo que a escada pode fazer com o solo.

Equação de equilíbrio para o eixo y:

$$N_1 - P = 0 \Rightarrow P = N_1 \quad (2)$$

Equação de equilíbrio para rotação, em relação ao ponto no qual F_s e N_1 estão aplicadas:

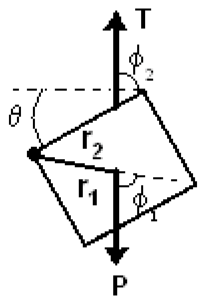
$$P \cdot \frac{x}{2} - N_2 y = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = tg\theta = \frac{1}{2}\frac{P}{N_2} \quad (3)$$

θ é o ângulo entre a escada e o solo.

Substituindo (2) e (1) em (3), encontramos:

$$tg\theta = \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}3} = 1{,}7 \Rightarrow \theta = 59°$$

E35.4) O diagrama de corpo livre para placa é:



Equação de equilíbrio para o eixo y:

$$T - P = 0 \Rightarrow P = T \quad (1)$$

Equação de equilíbrio para rotação, em relação ao ponto assinalado na figura:

$$r_1 P sen\phi_1 - r_2 T sen\phi_2 = 0 \quad (2)$$

θ é o ângulo que procuramos. r_1 é a metade da diagonal do quadrado, ou, $r_1 = 28{,}3cm$ e r_2 é obtido diretamente: $r_2 = 40cm - 10cm = 30cm$. Da figura vemos que $\phi_2 = 90° - \theta$ e $\phi_1 = 45° + \theta$.

Substituindo (1) em (2) e os valores de ϕ_1 e ϕ_2, temos:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{sen(90° - \theta)}{sen(45° + \theta)} = \frac{\cos\theta}{sen(45°)\cos\theta + \cos(45°)sen\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta - \frac{r_1}{r_2} sen(45°)\cos\theta = \frac{r_1}{r_2}\cos(45°)sen\theta \Rightarrow \frac{sen\theta}{\cos\theta} = tg\theta = \frac{1 - \frac{r_1}{r_2} sen(45°)}{\frac{r_1}{r_2}\cos(45°)}$$

$$tg\theta = \frac{0{,}25}{0{,}75} = 0{,}33 \Rightarrow \theta = 18°{,}4$$

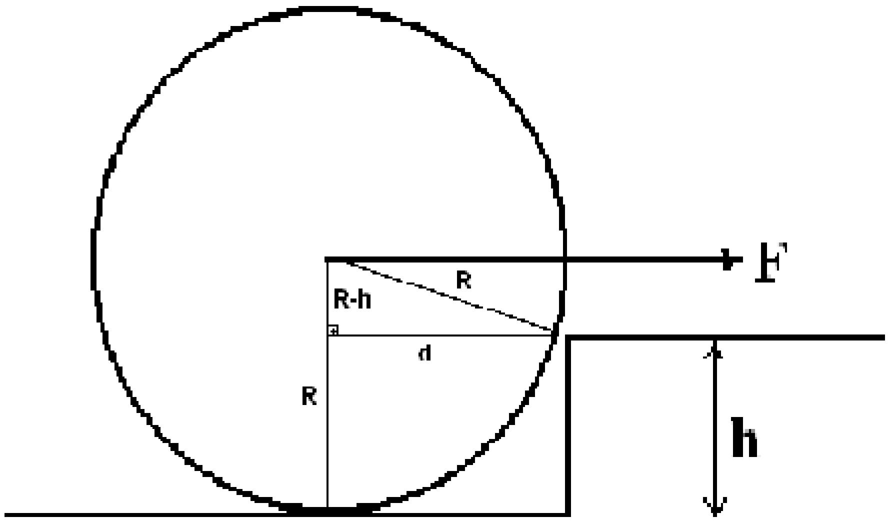
E35.5)
a) Pelo equilíbrio rotacional, os torques devem ser iguais:

$$90cm \cdot 600\,N = 10cm \cdot P \Rightarrow P = \frac{90cm \cdot 600\,N}{10cm} = 5{,}40 \times 10^3\,N$$

b)

$$V = \frac{b_p}{b_r} = \frac{90cm}{10cm} = 9$$

P13.1) Consideremos a figura abaixo:



Calculamos os torques em relação à quina do degrau. O módulo do torque exercido pela força $\vec{F}$ será $F(R-h)$, pois $(R-h)$ é a distância vertical entre a quina e o ponto no qual o força $\vec{F}$ atua. O torque exercido pelo peso será Pd, pois d é a distância vertical entre a quina e o ponto no qual o peso (vetor não representado) atua (centro de massa). Mas $d=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{2Rh-h^2}$ e escrevemos o torque como $P\sqrt{2Rh-h^2}$. A força mínima necessária será encontrada quando esses torques forem iguais. Então:

$$F(R-h)=P\sqrt{2Rh-h^2} \Rightarrow F=\frac{P\sqrt{2Rh-h^2}}{(R-h)}=\frac{mg\sqrt{2Rh-h^2}}{(R-h)}$$

P13.2)
a) Da condição de equilíbrio rotacional, calculando os torques em relação ao ponto A, encontramos:

$$Px-lTsen\theta=0 \Rightarrow T=\frac{Px}{lsen\theta}$$

b) Da condição de equilíbrio translacional, temos

$$(1) \qquad f_h - T\cos\theta = 0 \quad \text{(componente horizontal)}$$

$$(2) \qquad f_v + Tsen\theta - P = 0 \quad \text{(componente vertical)}$$

De (1) encontramos a força horizontal exercida pela barra sobre o pino:

$$f_h = T\cos\theta$$

Substituindo T encontrado no item a temos:

$$f_h = \frac{Px}{ltg\theta}$$

De (2) encontramos a força vertical exercida pela barra sobre o pino:

$$f_v = P - Tsen\theta = P\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

P13.3) Seja T_e a tensão na corda da esquerda e T_d a tensão na corda da direita. Escrevemos as equações de equilíbrio para translação:

$$(1) \qquad T_e \cos\theta + T_d \cos\phi - W = 0 \quad \text{(componente vertical)}$$

$$(2) \qquad -T_e sen\theta + T_d sen\phi = 0 \quad \text{(componente horizontal)}$$

A equação para o equilíbrio rotacional, com os torques calculados em relação à ponta esquerda da barra leva a:

$$(3) \qquad Wx - T_d L \cos\phi = 0$$

De (3), temos que:

$$(4) \qquad x = \frac{T_d L \cos\phi}{W}$$

Para encontrar T_d, isolamos T_e em (2): $T_e = T_d sen\phi / sen\theta$. Substituimos em (1) e chegamos a:

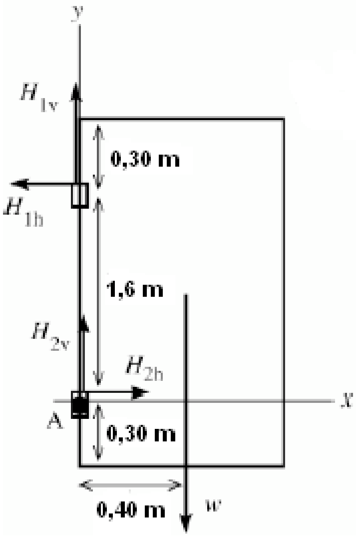
$$T_d \cos\phi = W - \frac{T_d sen\phi}{sen\theta}\cos\theta \Rightarrow T_d \cos\phi + \frac{T_d sen\phi}{tg\theta} = W$$

$$T_d = W \Big/ \left(\cos\phi + \frac{sen\phi}{tg\theta}\right) = P \Big/ \left(\cos(53°,1) + \frac{sen(53°,1)}{tg(36°,9)}\right) = \frac{P}{1,67}$$

Substituindo o valor de T_d em (4), encontramos x:

$$x = \frac{(P/1,67)(6,6m)\cos(53°,1)}{P} = 2,4m$$

P13.4) Seja w o peso da porta, H_{1v} e H_{1h} as componentes vertical e horizontal, respectivamente, da força exercida pela dobradiça superior, H_{2v} e H_{2h} as componentes vertical e horizontal, respectivamente, da força exercida pela dobradiça inferior. Montamos o diagrama para o problema:



Consideramos que cada dobradiça sustenta metade do peso. Assim as forças verticais serão:

$$H_{1v} = H_{2v} = \frac{w}{2}$$

Para o equilíbrio translacional na horizontal escrevemos:

$$(1) \qquad H_{2h} - H_{1h} = 0$$

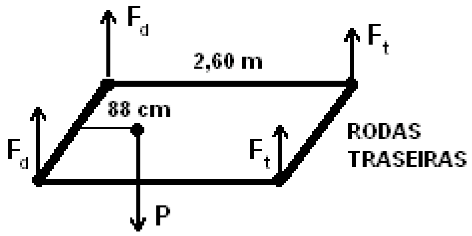
Escrevemos a condição de equilíbrio rotacional, calculando os torques em relação ao ponto A do diagrama:

$$H_{1h}(1,6m) - w(0,40m) = 0 \Rightarrow H_{1h} = \frac{w}{0,25}$$

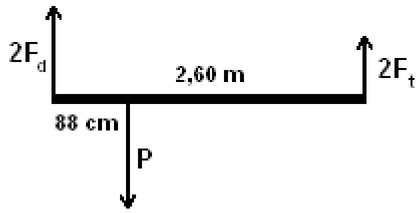
De (1) temos:

$$H_{2h} = H_{1h} = \frac{w}{0,25}$$

P13.5) A figura abaixo representa a situação:



Por simetria, as forças nas rodas traseiras são iguais, assim como as forças nas rodas dianteiras. Assim temos a seguinte visão lateral:



Escrevemos a condição de equilíbrio rotacional, calculando os torques em relação à ponta esquerda da figura acima:

$$(0{,}88\,m)(600\,N) - (2{,}60\,m)(2\,F_t) = 0 \Rightarrow F_t = \frac{(0{,}88\,m)(600\,N)}{5{,}20\,m} = 102\,N$$

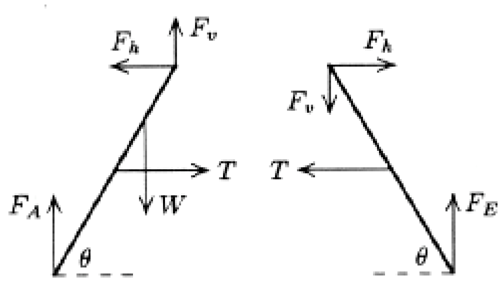
Da condição de equilíbrio para translação escrevemos (só há componente vertical):

$$2\,F_d + 2\,F_t - 600\,N = 0 \Rightarrow F_d = 300\,N - F_t$$

Substituindo F_t encontrado anteriormente temos:

$$F_d = 300\,N - 102\,N = 198\,N$$

P13.6) Montamos o diagrama do problema:



W é o peso, F_A e F_E são as forças que o solo faz em cada lado da escada e estão na vertical pelo fato de não existir atrito. T é a tensão na barra de ligação. F_h e F_v são as forças que são feitas por um lado sobre o outro.

Seja L o tamanho da escada. Escrevemos as equações de equilíbrio para os dois lados da escada. Lado esquerdo, equações de equilíbrio translacional:

$$(1) \qquad F_v + F_A - W = 0 \quad \text{(componente vertical)}$$

$$(2) \qquad T - F_h = 0 \quad \text{(componente horizontal)}$$

Equilíbrio rotacional, lado esquerdo, calculando os torques em relação ao ponto C e notando que o peso está a uma distância $(L/4)$ do referido ponto:

$$(3) \qquad F_A L\cos\theta - W(L/4)\cos\theta - T(L/2)sen\theta = 0$$

Lado direito, equações de equilíbrio translacional:

$$(4) \qquad F_E - F_v = 0 \quad \text{(componente vertical)}$$

$-T + F_h = 0$ (componente horizontal, a mesma equação para o lado esquerdo)

Equilíbrio rotacional, lado direito, calculando os torques também em relação ao ponto C:

$$(5) \qquad F_E L\cos\theta - T(L/2)sen\theta = 0$$

De (1) temos $F_A = W - F_v$. De (4) temos

$$(6) \qquad F_v = F_E.$$

Substituindo em (3) encontramos:

$$(7) \qquad WL\cos\theta - F_E L\cos\theta - W(L/4)\cos\theta - T(L/2)sen\theta = 0$$

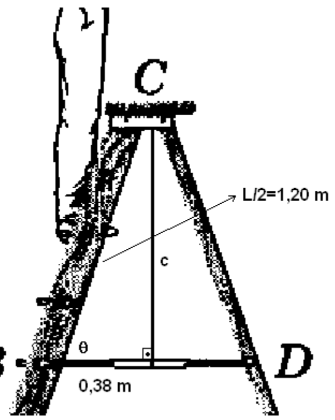
De (5) temos

$$(8) \qquad F_E = \frac{T(L/2)sen\theta}{L\cos\theta} = \frac{Ttg\theta}{2}$$

Substituindo F_E em (7) e resolvendo para T, encontramos

$$T = \frac{3W}{4tg\theta}$$

Para encontrar o ângulo θ consideramos o retângulo formado por B, C e a metade da barra de ligação:



Da figura vemos que $c=\sqrt{(1{,}20m)^2-(0{,}38m)^2}=1{,}1m$. Então:

$$tg\theta=\frac{1{,}1m}{0{,}38m}=2{,}9$$

Logo

$$T=\frac{3W}{4tg\theta}=\frac{3(60{,}0kg\cdot 9{,}80m/s^2)}{4(2{,}9)}=152\,N$$

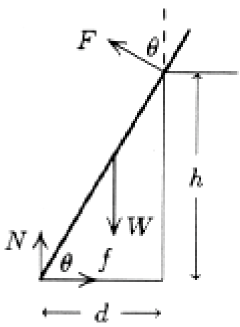
De (8), encontramos

$$F_E=\frac{Ttg\theta}{2}=\frac{152\,N\cdot(2{,}9)}{2}=220\,N$$

Substituindo (6) em (1), encontramos F_A:

$$F_A=W-F_E=(60{,}0)(9{,}80m/s^2)-220\,N=368\,N$$

P13.7)
a)



b) De acordo com as forças indicadas no diagrama, escrevemos as equações de equilíbrio para translação, lembrando que l é o tamanho da tábua:

$$(1) \qquad F sen\theta - f = 0 \quad \text{(componente horizontal)}$$

$$(2) \qquad F\cos\theta - W + N = 0 \quad \text{(componente vertical)}$$

Escrevemos também a equação para o equilíbrio rotacional, calculando o torque em relação ao ponto no qual a tábua está apoiada sobre o solo:

$$(3) \qquad Nd - fh - W\left(d - \frac{l}{2}\cos\theta\right) = 0$$

De (2) temos $F = (W - N)\cos\theta$. Substituindo em (1) chegamos na expressão $f = (W - N)sen\theta/\cos\theta$, ou seja:

$$(4) \qquad f = (W - N)tg\theta .$$

Substituindo (4) em (3), obtemos uma expressão para N:

$$N = \left(\frac{d - (l/2)\cos\theta + htg\theta}{d + htg\theta}\right)W .$$

Seja μ o coeficiente de atrito estático. Sabemos que $f = \mu N$. Substituindo essa expressão em (4), temos:

$$\mu N = Wtg\theta - Ntg\theta \Rightarrow \mu + tg\theta = \frac{Wtg\theta}{N} .$$

Substituindo o valor de N encontrado anteriormente, chegamos em

$$\mu + tg\theta = Wtg\theta \bigg/ \left(\frac{d - (l/2)\cos\theta + htg\theta}{d + htg\theta}\right)W .$$

Mas $d = h/tg\theta$. Portanto obtemos uma expressão para o coeficiente de atrito estático:

$$\mu = \left(tg\theta \bigg/ \left(\frac{(h/tg\theta) - (l/2)\cos\theta + htg\theta}{(h/tg\theta) + htg\theta}\right)\right) - tg\theta$$

Para $\theta = 70°$, temos o coeficiente de atrito estático máximo:

$$\mu_m = \left(tg(70°) \bigg/ \left(\frac{(1,50m/tg(70°)) - (3,0/2)\cos(70°) + (1,50m)tg(70°)}{(1,50m/tg(70°)) + (1,50m)tg(70°)}\right)\right) - tg(70°) = 0,34$$

P13.8) Da condição de equilíbrio rotacional, calculando os torques em relação à extremidade esquerda da estrutura, encontramos:

$$(1) \qquad F_1(c) + F_2(c+b) + F_3(a) - F_V(c+d) = 0$$

Da condição de equilíbrio translacional, temos:

$$(2) \qquad F_1 + F_2 - F_V = 0 \quad \text{(componente vertical)}$$

$$(3) \qquad -F_3 + F_h = 0 \quad \text{(componente horizontal)}$$

De (3) encontramos:

$F_h = F_3 = 1{,}12\,N$.

De (2) encontramos:

$F_V = F_1 + F_2 = 4{,}50\,N + 2{,}25\,N = 6{,}75\,N$.

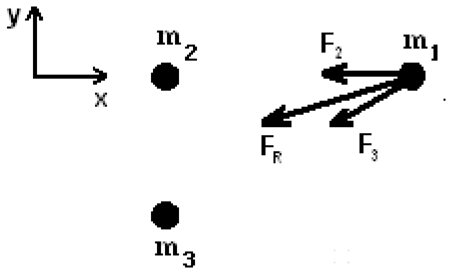
De (1) encontramos, usando F_V calculado anteriormente:

$$d = \left[F_1(c) + F_2(c+b) + F_3(a) - F_V(c)\right] / F_V$$

$$d = \left[(4{,}50\,N)(33{,}0\,cm) + (2{,}25\,N)(33{,}0\,cm + 99\,cm) + (1{,}12\,N)(60{,}0\,cm) - (6{,}75\,N)(33{,}0\,cm)\right] / 6{,}75\,N = 43{,}0\,cm$$

E36.1)

a) A figura abaixo mostra $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, as forças que m_2 e m_3 fazem respectivamente em m_1. A força resultante $\vec{F}_R$ é então mostrada na figura.



b) Para calcular o módulo de $\vec{F}_R$, vamos achar a componente vertical de $\vec{F}_3$. Vamos chamar de θ o ângulo entre $\vec{F}_3$ e o eixo x. Temos que:

$$tg\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 0{,}46\,rad$$

A componente de $\vec{F}_3$ na direção -y será:

$$F_{3-y} = F_3 \cos(\pi/2 - \theta) = 0{,}44\,F_3$$

Logo o módulo da força resultante será:

$$F_R = \sqrt{F_2^2 + (0{,}44\,F_3)^2} = \sqrt{\left(\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2}\right)^2 + \left(0{,}44\frac{Gm_1 m_3}{r_{13}^2}\right)^2} = G\sqrt{\left(\frac{(9kg)(3kg)}{(0{,}02m)^2}\right)^2 + \left(0{,}44\frac{(9kg)(10kg)}{(\sqrt{5}\times10^{-2}\,m)^2}\right)^2}$$

$$= 6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2\cdot\sqrt{\left(6{,}75\times10^4\,kg^2/m^2\right)^2 + \left(7{,}92\times10^4\,kg^2/m^2\right)^2} = 6{,}94\times10^{-6}\,N$$

E36.2) Tanto m_1 como m_2 atraem m_3 para direita, enquanto m_4 a atrai para esquerda. Calculemos o valor de m_4 para que m_3 fique em equilíbrio. Lembrando que estamos interessados nas componentes horizontais das forças que m_1 e m_2 fazem. Pela geometria da configuração, o ângulo entre as forças e suas componentes na horizontal é $45°$. Então na condição de equilíbrio temos:

$$\frac{Gm_3 m_4}{(L/2)^2} = \frac{Gm_1 m_3}{\frac{1}{2}L^2}\cos(45°) + \frac{Gm_2 m_3}{\frac{1}{2}L^2}\cos(45°)$$

$$m_4 = \frac{m_1 \cos(45°)}{2} + \frac{m_2 \cos(45°)}{2} = \frac{2kg\cos(45°)}{2} + \frac{2kg\cos(45°)}{2} = 1{,}4kg$$

Assim se m_4 for menor que $1{,}4kg$ a resultante será para direita.

E36.3) A força resultante centrípeta será a força gravitacional:

$$\frac{mv^2}{H} = G\frac{Mm}{H^2},$$

Sendo H a altura do satélite, m a massa do satélite e M a massa da Terra. Então temos:

$$H = \frac{GM}{v^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \cdot 5{,}98 \times 10^{24}\, kg}{(3056\, m/s)^2} = 4{,}3 \times 10^7\, m$$

E36.4) De acordo com a equação (36.4):

$$\kappa = \frac{4\pi^2 (2md^2)}{T^2}.$$

As unidades serão:

$$\kappa = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = \frac{kg \cdot m \cdot m}{s^2} = \left(kg \cdot \frac{m}{s^2}\right) \cdot m = N \cdot m.$$

Essas são unidades de torque, como deveriam ser quando consideramos a equação (36.3).

E36.5)

a) Como as esferas de massas m e M estão muito próximas, consideramos que a força que a massa M exerce sobre m é perpendicular à barra que une as esferas de massa m. Assim temos:

$$\tau = -rF = -\frac{rGmM}{R^2} = -\frac{0{,}0075\, m \cdot 6{,}67 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \cdot 0{,}001\, kg \cdot 5\, kg}{(0{,}003\, m)^2} = -2{,}8 \times 10^{-10}\, N \cdot m$$

Como temos as duas esferas de massa m, o torque será multiplicado por 2. Então o torque total será:

$$\tau_T = -5{,}6 \times 10^{-10}\, N \cdot m$$

b)

$$\kappa = \frac{4\pi^2(2md^2)}{T^2} = \frac{8\pi^2 \cdot 0{,}001kg \cdot (0{,}015m)^2}{(1s)^2} = 1{,}8 \times 10^{-5}\, N \cdot m$$

Sabemos que $\tau = -\kappa\theta$. Com o valor do torque calculado no item anterior, encontramos:

$$\theta = \frac{\tau}{-\kappa} = \frac{-5{,}6 \times 10^{-10}\, N \cdot m}{-1{,}8 \times 10^{-5}\, N \cdot m} = 3{,}1 \times 10^{-5}\, rad \approx 0{,}0018°$$

E37.1) Sabemos que fora da esfera podemos considerar que toda sua massa está localizada em seu centro. Assim temos:

$$mg = \frac{GMm}{(r+R_i)^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{(r+R_i)^2}$$

O campo não se anula, pois a esfera é homogênea. Para calcular o campo devemos considerar apenas a massa interna ao raio considerado, pois como vimos na Atividade 37.1, a massa externa não contribuirá. Então:

$$mg = \frac{GM_i m}{R_i^2} \Rightarrow g = \frac{GM_i}{R_i^2}.$$

A massa interna M_i será a densidade volumétrica multiplicada pelo volume até o raio considerado:

$$M_i = \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} \right) \left(\frac{4}{3}\pi R_i \right) = \frac{R_i}{r} M.$$

Logo:

$$g = \frac{GM}{R_i r}.$$

E37.2) A gravidade efetiva em um local de latitude fi é dada por:

$$g_e = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R cos\phi.$$

A velocidade angular da Terra é dada por:

$$\omega = \frac{2\pi \ rad}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s} = 2{,}0 \times 10^{-7} \ rad/s.$$

Sabendo que o raio da Terra é $R = 6{,}4 \times 10^6 \ m$ e sua massa é $M = 5{,}98 \times 10^{24} \ kg$, temos:

$$g_e = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \ N.m^2/kg^2 \cdot 5{,}98 \times 10^{24} \ kg}{(6{,}4 \times 10^6 \ m)^2} - \left((2{,}0 \times 10^{-7} \ rad/s)^2 \cdot 6{,}4 \times 10^6 \ m \cdot \cos(-19°{,}9208) \right)$$

$$g_e = 9{,}74 m/s^2 - (2{,}4 \times 10^{-7} \ m/s^2) = 9{,}74 m/s^2.$$

Vemos que a correção causada pela rotação é extremamente pequena, desprezível.

E37.3) A massa de Júpiter é $M_J = 1{,}9 \times 10^{27}\, kg$ e o seu raio é $R_J = 5{,}5 \times 10^{15}\, m$.

a)

$$g = \frac{GM_J}{R_J^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \cdot 1{,}9 \times 10^{27}\, kg}{\left(5{,}5 \times 10^{15}\, m\right)^2} = 22{,}9 m/s^2$$

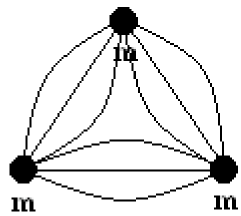
b) $g = \dfrac{GM_J}{(R_J + 2m)^2} = \dfrac{6{,}67 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \cdot 1{,}9 \times 10^{27}\, kg}{\left(5{,}5 \times 10^{15}\, m\right)^2} = 22{,}9 m/s^2$. A diferença é desprezível.

c)

$$g_{pé} = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}77\, m/s^2; \;\; g_{cabeça} = \frac{GM_T}{(R_T + 2m)^2} = 9{,}44 m/s^2$$

d) Vemos que a diferença da gravidade entre a cabeça e os pés de uma pessoa na Terra é muito mais significante que a mesma diferença em Júpiter. Então uma pessoa é mais "esticada" na Terra que em Júpiter, apesar de sofrer uma gravidade muito maior neste.

E37.4) Na figura são apresentadas as linhas mais próximas às cargas. As linhas continuam, ficando mais distantes umas das outras quando se nos afastamos das cargas.



E38.1) A massa do Sol é $M = 2{,}0\times10^{30}\ kg$. Então escrevemos:

$$\frac{GMm}{d^2}=\frac{mv^2}{d}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{d}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\ N.m^2/kg^2\cdot 2{,}0\times10^{30}\ kg}{1{,}5\times10^{11}\ m}}=30\,km/s$$

Falamos em velocidade média pois usamos uma distância média entre Terra e Sol. A distância é media devido à trajetória da Terra em torno do Sol não ser circular.

E38.2) Sabemos que

$$\frac{dA}{dt}=\frac{L}{2m}$$

Integrando essa equação e substituindo a equação do momento angular, considerando uma órbita circular, temos:

$$A=\frac{L}{2m}\Delta t=\frac{mdv}{2m}\Delta t=\frac{dv\Delta t}{2}$$

O intervalo de tempo será $1dia=24\cdot60\cdot60s=86400s$. Calculamos a velocidade no exercício anterior, logo teremos:

$$A=\frac{d\cdot v\cdot\Delta t}{2}=\frac{1{,}5\times10^{11}\ m\cdot 3{,}0\times10^{4}\ m/s\cdot 86400\,s}{2}=2{,}0\times10^{14}\ km^2$$

E38.3) A distância de Marte ao Sol é $R=2{,}3\times10^{11}\ m$. Utilizando a terceira lei de Kepler, temos:

$$P^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3=\frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\ N.m^2/kg^2\cdot 2{,}0\times10^{30}\ kg}\cdot\left(2{,}3\times10^{11}\ m\right)^3$$

$$\Rightarrow P^2=3{,}6\times10^{15}\ s^2\Rightarrow P=6{,}0\times10^{7}\ s\approx 695\,dias$$

E38.4)

a) Considerando a altura calculada no Exemplo 38.2, temos:

$$v=\sqrt{\frac{GM}{H}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\ N.m^2/kg^2\cdot 5{,}98\times10^{24}\ kg}{4{,}22\times10^{7}\ m}}=3{,}0\times10^{3}\ m/s$$

b) Não, pois a sua velocidade é muito maior.

c) Vemos que as alturas são parecidas, mas o fato importante é que um possui velocidade maior que o outro e portanto não é estacionário.

E38.5) A massa da Lua é $M = 7{,}36 \times 10^{22}\, kg$ e o seu raio é $R = 1{,}7 \times 10^{3}\, m$. Como a pedra está a dois metros da superfície, o raio da trajetória será $R_t = R + 2m$, que dá o valor $R_t = 1{,}702 \times 10^{3}\, m$. Então temos:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_t}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \cdot 7{,}36 \times 10^{22}\, kg}{1{,}702 \times 10^{3}\, m}} = 5{,}4 \times 10^{4}\, m/s = 1{,}9 \times 10^{5}\, km/h.$$

O período será:

$$P = \frac{2\pi R_t}{v} = \frac{2\pi \cdot 1{,}702 \times 10^{3}\, m}{5{,}4 \times 10^{4}\, m/s} = 0{,}2 s$$

Um humano não consegue lançar uma pedra com uma velocidade tão alta.

E39.1) Escrevemos a expressão da energia potencial para o sistema e encontramos d:

$$\frac{Gm_1 m_2}{d} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\, N.m^2/kg^2\cdot 5{,}4kg\cdot 2{,}4kg}{d} = 10\,J \Rightarrow d = \frac{6{,}67\times10^{-11}\, N.m^2/kg^2\cdot 5{,}4kg\cdot 2{,}4kg}{10\,J}$$

$$= 8{,}6\times10^{-11}\, m$$

E39.2) A energia potencial do sistema é dada por:

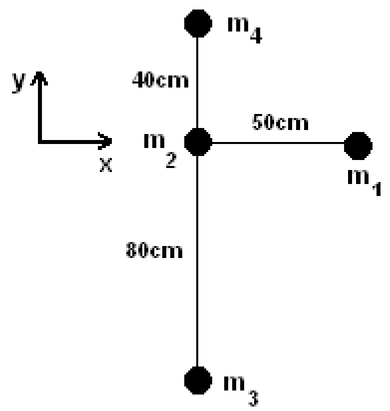
$$U = \frac{G(M-m)m}{d} = G\frac{\left(-m^2 + Mm\right)}{d}$$

Agora temos um problema de maximização. Devemos procurar o ponto no qual a derivada da função U(m) seja nula:

$$\frac{dU}{dm} = G\frac{-2m + M}{d} = 0 \Rightarrow -2m + M = 0 \Rightarrow m = \frac{M}{2}$$

A derivada de U é negativa e o ponto é um máximo.

E39.3) A configuração é mostrada no esquema abaixo:



Logo, temos:

$$V = \frac{Gm_1}{d_1} + \frac{Gm_3}{d_3} + \frac{Gm_4}{d_4} = 6{,}67\times10^{-11}\, N.m^2/kg^2\cdot\left(\frac{400\,kg}{0{,}5m} + \frac{2000\,kg}{0{,}8m} + \frac{500\,kg}{0{,}4}\right)$$

$$= 6{,}67\times10^{-11}\, N.m^2/kg^2\cdot 4550\,kg/s = 3{,}0\times10^{-7}\, J.$$

A força será:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d(Vm_2)}{dx} = -\frac{dV}{dx}m_2\,;\;\; F_x = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d(Vm_2)}{dy} = -\frac{dV}{dy}m_2$$

As componentes serão:

$$F_x = \frac{Gm_1 m_2}{d_1^2}\,;\;\; F_y = \frac{Gm_3 m_2}{d_3^2} + \frac{Gm_4 m_2}{d_4^2}$$

Assim:

$$F_x = \frac{6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2\cdot 400\,kg\cdot 350\,kg}{(0{,}5m)^2} = 3{,}7\times10^{-5}\,N$$

$$F_y = \frac{6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2\cdot 2000\,kg\cdot 350\,kg}{(0{,}8m)^2} + \frac{6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2\cdot 500\,kg\cdot 350\,kg}{(0{,}4m)^2} = 1{,}5\times10^{-4}\,N$$

E39.4) A expressão para o potencial é dada por:

$$V = \frac{-GM}{r}$$

A gravidade será:

$$g = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM}{r^2}.$$

Logo a altura:

$$r = \sqrt{\frac{GM}{g}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2\cdot 5{,}98\times10^{24}\,kg}{4{,}9m/s^2}} = 9{,}0\times10^6\,m$$

E39.5) O projétil alcançará uma altura r tal que sua energia cinética inicial tenha sido completamente transformada em energia potencial gravitacional:

$$\frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow r = \frac{2GM}{v^2}.$$

A altura será então:

$$r = \frac{2\cdot 6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2\cdot 5{,}98\times10^{24}\,kg}{\left(0\times10^4\,m/s\right)^2} = 8{,}0\times10^6\,m$$

P14.1) A situação é quase a mesma do Exemplo 39.4. Mas agora devemos considerar a força e não o potencial. Seja $\lambda = M/L$ a densidade linear da barra. Então temos:

$$dF = \frac{GmdM}{x^2} = \frac{Gm\lambda dx}{x^2}$$

$$F = -Gm\frac{M}{L}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x^2} = -Gm\frac{M}{L}\left[-x^{-1}\right]_d^{d+L} = -Gm\frac{M}{L}\left(-\frac{1}{(d+L)} - \left(-\frac{1}{d}\right)\right) = \frac{GmM}{(d+L)d}$$

P14.2) Da mesma forma como chegamos na Equação (37.10) no texto, escrevemos:

$$\frac{GMm}{r^2} = mg \Rightarrow g = \frac{GM}{r^2},$$

sendo M a massa da estrela e r o seu raio, já que estamos interessados em saber a gravidade em sua superfície. A massa do Sol é $1{,}99\times10^{30}\ Kg$. Então temos:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{(6{,}67\times10^{-11}\ N.m^2/kg^2)(1{,}99\times10^{30}\ kg)}{(10\times10^3\ m)^2} = 1{,}3\times10^{12}\ m/s^2$$

P14.3) Consideramos Marte e Terra como esferas. Então as densidades da Terra e Marte, ρ_T e ρ_M respectivamente, serão:

$$\rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3},\ \rho_M = \frac{M_M}{\frac{4}{3}\pi R_M^3}.$$

a) A razão das densidades será:

$$\frac{\rho_M}{\rho_T} = \frac{M_M}{\frac{4}{3}\pi R_M^3} \Bigg/ \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{M_M R_T^3}{M_T R_M^3} = \left(\frac{M_M}{M_T}\right)\left(\frac{R_T}{R_M}\right)^3 = (0{,}11)\left(\frac{1{,}3\times10^4\ km}{6{,}9\times10^3\ km}\right)^3 = 0{,}74$$

b) Da Equação (37.10) no texto, escrevemos:

$$g = \frac{GM}{r^2},$$

sendo M a massa de Marte e r o seu raio. A massa da Terra é $5{,}98\times10^{24}\ kg$. Encontramos:

$$g=\frac{GM}{r^2}=\frac{\left(6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2\right)\left(0{,}11\times5{,}98\times10^{24}\,kg\right)}{\left(6{,}9\times10^{6}\,m/2\right)^2}=3{,}7\,m/s^2$$

c) Da Equação (39.8) no texto, temos

$$v_e=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Substituindo os valores de M e R para Marte, encontramos:

$$v_e=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{\frac{\left(6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2\right)\left(0{,}11\times5{,}98\times10^{24}\,kg\right)}{\left(6{,}9\times10^{6}\,m\right)/2}}=3{,}6\,km/s$$

P14.4)

a) Seja M a massa da Terra, m a massa dos satélites, R_T o raio da Terra, h_A a altura do satélite A e h_B a altura do satélite B. Temos

$$\frac{U_A}{U_B}=\frac{-GMm}{R_T+h_A}\Big/\frac{-GMm}{R_T+h_B}=\frac{R_T+h_B}{R_T+h_A}=\frac{6400\,km+19200\,km}{6400\,km+6400\,km}=2$$

b) Sabemos que a energia cinética do satélite em órbita circular pode ser escrita como:

$$K=\frac{1}{2}\frac{GMm}{R},$$

sendo R o raio da órbita. Então temos

$$\frac{K_B}{K_A}=\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_T+h_B}\Big/\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_T+h_A}=\left(\frac{R_T+h_A}{R_T+h_B}\right)=\left(\frac{6400\,km+6400\,km}{6400\,km+19200\,km}\right)=0{,}5$$

P14.5) Seja r_M a posição da estrela de massa M e r_m a posição da estrela de massa m. Calculamos a posição do centro de massa r, com a origem na estrela de massa M:

$$r=\frac{Mr_M+mr_m}{M+m}=\frac{md}{2m+m}=\frac{d}{3}$$

a) A força resultante centrípeta $\dfrac{mv^2}{r}$ será $\dfrac{GMm}{d^2}$, pois a distância que separa as estrelas é d. Repare que o raio na expressão para a força resultante centrípeta é a distância da estrela de massa M até o centro de massa. Assim temos:

$$\frac{GMm}{d^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{GMm}{d^2} = \frac{m\left(2\pi r/T\right)^2}{r} = \frac{m4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 d^2 r}{GM}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi^2}{3Gm}}\, d^{3/2}$$

b)

$$\frac{K_M}{K_m} = \frac{\frac{1}{2} M v_M^2}{\frac{1}{2} m v_m^2} = 2\left(\frac{v_M}{v_m}\right)^2$$

$$\frac{K_M}{K_m} = 2\left(\frac{2\pi r_M/T}{2\pi r_m/T}\right)^2 = 2\left(\frac{r_M}{r_m}\right)^2 = 2\left(\frac{d/3}{2d/3}\right) = 1$$

P14.6) Seja M a massa de Júpiter. As quantidades para o satélite Io são indicadas pela letra i e para o satélite Calisto pela letra c. Consideremos a força que atua no satélite Io:

$$F = \frac{GMm_i}{R_i^2} = \frac{m_i v^2}{R_i} \Rightarrow GM = v^2 R_i$$

Mas $v = \dfrac{2\pi R_i}{T_i}$ e então $GM = \dfrac{4\pi^2 R_i^3}{T_i^2}$.

a) Para Calisto temos:

$$F = \frac{GMm_c}{R_c^2} = \frac{m_c v_c^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{GM}{v_c^2} = \frac{T_c^2\, GM}{4\pi^2 R_c^2} \Rightarrow R_c = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)^{1/3} T_c^{2/3}$$

Substituindo GM encontrado anteriormente, temos:

$$R_c = \left(\frac{T_c}{T_i}\right)^{2/3} R_i = \left(\frac{1{,}44\times10^6\, s}{1{,}53\times10^5\, s}\right)^{2/3} \left(4{,}22\times10^8\, m\right) = 1{,}88\times10^9\, m$$

b) Da expressão para GM, obtemos:

$$M = \frac{4\pi^2 R_i^3}{T_i^2 G} = \frac{4\pi^2\left(4{,}22\times10^8\, m\right)^3}{\left(1{,}53\times10^5\, s\right)^2\left(6{,}67\times10^{-11}\, N.m^2/kg^2\right)} = 1{,}90\times10^{27}\, kg$$

P14.7)

a) A energia potencial será a soma das energias para cada massa:

$$E = \frac{GM_{200}m}{d_{200}} + \frac{GM_{800}m}{d_{800}}$$

Então a energia potencial por unidade de massa será:

$$\frac{E}{m} = \frac{GM_{200}}{d_{200}} + \frac{GM_{800}}{d_{800}} = \frac{(6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2)(2\times10^{-1}\,kg)}{4\times10^{-2}\,m} + \frac{(6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2)(8\times10^{-1}\,kg)}{8\times10^{-2}\,m}$$

$$\frac{E}{m} = 3{,}3\times10^{-10}\,J/kg + 6{,}7\times10^{-10}\,J/kg = 1\times10^{-9}\,J/kg$$

b)

$$F = \frac{GM_{200}m}{d_{200}^2} - \frac{GM_{800}m}{d_{800}^2}$$

$$\frac{F}{m} = \frac{GM_{200}}{d_{200}^2} - \frac{GM_{800}}{d_{800}^2} = \frac{(6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2)(2\times10^{-1}\,kg)}{\left(4\times10^{-2}\,m\right)^2} - \frac{(6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2)(8\times10^{-1}\,kg)}{\left(8\times10^{-2}\,m\right)^2}$$

c) O trabalho será a diferença de energia potencial entre o ponto inicial e o ponto considerado neste item. A energia potencial considerada neste item será:

$$\frac{E}{m} = \frac{GM_{200}}{d_{800}} + \frac{GM_{800}}{d_{200}} = \frac{(6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2)(2\times10^{-1}\,kg)}{8\times10^{-2}\,m} + \frac{(6{,}67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2)(8\times10^{-1}\,kg)}{4\times10^{-2}\,m}$$

$$\frac{E}{m} = 1{,}6\times10^{-10}\,J/kg + 1{,}3\times10^{-9}\,J/kg = 1\times10^{-9}\,J/kg = 2\times10^{-9}\,J/kg$$

Reparamos que agora a massa de $800\,g$ está a uma distância que é igual à distância que a massa de $200\,g$ estava no item a e vice-versa. O trabalho será:

$$W = \left(2\times10^{-9}\,J/kg - 1\times10^{-9}\,J/kg\right)\times 1kg = 1\times10^{-9}\,J$$

P14.8)

a)

$$E = E_T + E_L = \frac{GM_tm}{R} + \frac{GM_lm}{r} = \frac{GM_tm}{R} + \frac{G(M_t/81)m}{r} = GM_tm\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{81r}\right)$$