Enumerabilidade

A **cardinalidade** de um conjunto é a quantidade de elementos que ele possui.

Muitas vezes o conceito de cardinalidade é confundido com o tamanho de um conjunto. De fato, em conjuntos finitos os conceitos são o mesmo, já que ambos se referem ao número de elementos no conjunto. Porém, quantos elementos há em um conjunto infinito, já que não podemos simplesmente contá-los? Todos os conjuntos infinitos possuem o mesmo 'tamanho'? Em outras palavras, como comparar conjuntos de tamanho infinito?

Denotamos a cardinalidade de um conjunto A por $|A|$. Por exemplo, a cardinalidade de $A = \{1, \quad 2, \quad 3\}$ é $|A| = 3.$

Podemos usar a noção de cardinalidade para dividir todos os conjuntos em classes de equivalência:

- Classe dos conjuntos de tamanho 0
- Classe dos conjuntos de tamanho 1
- …
- Classe dos conjuntos de tamanho k

E quanto aos conjuntos infinitos? Como se dividem/agrupam $\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R}$? Eles são todos do mesmo 'tamanho'?

Como veremos, alguns desses conjuntos possuem, sim, o mesmo número de elementos.

Mas, para ilustrar o quão bizarro (contra-intuitivo) o(s) infinito(s) é(são), vamos ver o exemplo do Hotel de Hilbert que nos ajudará a entender como esses conjuntos se relacionam.

Situação 1: Imagine que um hotel possua infinitos quartos, acomodando infinitos hóspedes. Suponha ainda que um ônibus trazendo um número infinito de hóspedes chega ao hotel procurando por quartos. É possível hospedar os novos hóspedes sem expulsar os anteriores?

Solução:

Sim. Acomode hóspedes antigos em quartos pares. E novos hóspedes em quartos ímpares.

Situação 2: Imagine o mesmo hotel do exemplo anterior. Agora, contudo, imagine que um número infinito de ônibus, cada um com um número infinito de passageiros, chega ao hotel todos ao mesmo tempo, procurando quartos para hospedagem. É possível hospedar todos os novos hóspedes sem expulsar os anteriores?

Solução: Sim. Deslocar hóspedes para quartos pares. Para cada ônibus, alocar passageiros $3^i, 5^i, 7^i$ ... e demais múltiplos de primos.

Note que esses exemplos nos indicam que conjuntos infinitos podem ter a mesma quantidade de elementos. O conceito de cardinalidade mapeia formalmente essa ideia. Nesse sentido, ela é uma medida de tamanho relativo de um conjunto em relação a outro.

Formalmente, dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade se, e somente se, existe uma correspondência um-para-um entre os elementos dos conjuntos.

Assim, chamamos de **enumerável** ou **contável** um conjunto finito ou que possua a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Esse conceito é importante, pois, como veremos mais para o fim do curso, ele determina aquilo que podemos computar.

Exemplo 1:

Teorema: O conjunto dos números pares é enumerável.

Prova:

Exemplo 2:

Teorema: O conjunto dos números inteiros é enumerável.

Prova:

Os conjuntos enumeráveis possuem as seguintes propriedade:

1. A união de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável
2. Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.
3. Todo superconjunto de um conjunto não-enumerável é não-enumerável

Teorema: O conjunto dos números reais não é contável.

Prova: Considere o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \ 0 \leq x < 1\}$. Esse conjunto representa o intervalo aberto [0,1). Claramente, $C \subseteq \mathbb{R}$.

Vamos demonstrar que C não é contável, o que, consequentemente, demonstra que $\mathbb{R}$ também não é enumerável.

A prova será por contradição. Suponha que C enumerável. Logo, podemos listar os elementos de C em ordem como $r_1, \ r_2, \ \ldots, \ r_i, \ \ldots$

Como todos os números do conjunto são da forma $0.r_{i1}r_{i2}\ldots r_{ik}$, podemos dispô-los em uma matriz, cada um em uma linha e as colunas sendo os respectivos dígitos. A ideia é como abaixo

	1º dígito	2º	…	K-ésimo	…
r_1	r_{11}	r_{12}		r_{1k}	
r_2	r_{21}	r_{22}		r_{2k}	
…					
r_i	r_{i1}	r_{i2}		r_{ik}	
…					

Como o conjunto é enumerável, todos os números são listados na matriz e, portanto, não existe um número que seja diferente de todos.

Agora considere o número r_α em que cada dígito é da forma $r_{\alpha k} = (r_{kk} + 5) mod \quad 10$. Esse número difere de cada um dos números r_k exatamente no k-ésimo dígito. Isso contradiz nossa hipótese de que a matriz continha todos os números do intervalo.

Portanto, o conjunto C não é enumerável. Como $C \subseteq \mathbb{R}$, concluimos que $\mathbb{R}$ não é contável. ◻

Esse método de demonstração é conhecido como diagonalização de Cantor. Ele é extremamente útil para demonstrar a enumerabilidade de conjuntos. Cantor ainda mostrou com seu método que existe um número infinito de infinitos diferentes!