

Lema do bombeamento para LLCs

Da mesma forma que usamos o lema do bombeamento para demonstrar que linguagens não eram regulares, vamos apresentar sua versão para LLCs que nos permitirá verificar se uma linguagem não é LLC.

Nesse caso, vamos usar a estrutura das árvores de derivação para identificar uma propriedade presente em todas as LLCs.

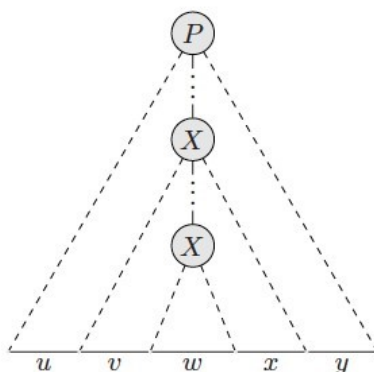
Lema (do bombeamento para LLCs): Seja L uma LLC. Então existe uma constante $k > 0$ tal que para qualquer palavra $z \in L$ com $|z| \geq k$ existem subpalavras u , v , w , x e y que satisfazem:

- $z = uvwxy$
- $|uwx| \leq k$
- $vx \neq \lambda$
- $uv^iwx^iy \in L$ para todo $i \geq 0$

Prova (intuição):

Para LLCs finitas, o lema é válido por vacuidade, bastando escolher um k suficientemente grande.

Para o caso de um LLC L infinita arbitrária, considere uma GLC G na FNC que a gere. Como L é infinita, ela possui palavras de vários tamanhos, inclusive maior que a quantidade de variáveis e regras de G . Então, podemos deduzir que existe um $k > 0$, por exemplo $k = 2^{|V|+1}$, tal que qualquer palavra z com $|z| \geq k$ terá a repetição de alguma variável em sua árvore de derivação. Ou seja, teremos uma situação como a seguir:



Isto é, teremos a seguinte derivação para z , $P \Rightarrow^* uXy \Rightarrow^* uvXxy \Rightarrow^* uvwxy$.

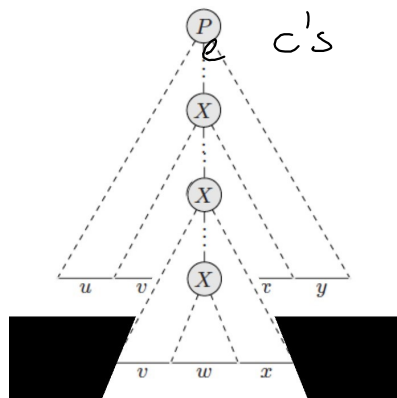
Como G não possui regras unitárias, concluímos que $vx \neq \lambda$.

Suponha que a segunda ocorrência de X na figura acima seja a mais profunda na árvore de derivação. Então a altura dessa última ocorrência de X na árvore será no máximo $|V|+1$. Como a AD de uma gramática na FNC é uma árvore binária, tem-se que $|vwx| \leq k$ (número de nós folha na árvore binária de altura h).

A última condição diz respeito às sub-árvores geradas por X . Poderíamos substituir, por exemplo, a segunda ocorrência de X pela primeira sub-árvore (mais acima). Essa repetição poderia ser feita quantas vezes quiséssemos, inclusive zero vezes.

Suponha que L seja LLC. Seja k a constante do lema. Seja $z = \underline{a^k b^k c^k}$.

- vw inclui a 's, conseqüentemente não inclui c 's. $uv^0wx^0y \in L$
- vw não inclui a 's, conseqüentemente contém só b 's ou b 's c 's



Dessa forma, podemos usar o lema tal como fizemos com as LR para demonstrar que determinada linguagem não é uma LLC. Isto é, supomos que a linguagem seja LLC e mostramos que existe uma palavra que invalida o lema.

Segue um exemplo.

▶ Exemplo: A linguagem $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ não é LLC.

Prova: