Lista 7 - solução

Exercício 1. Descreva em detalhes uma bijeção entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e o conjunto das sequências de 0s e 1s de comprimento infinito.

Feito em sala.

Exercício 2. Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. O objetivo deste exercício é mostrar que $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(a, b) = 2^a(2b - 1)$ é uma bijeção.

1. Para mostrar que é injetiva, suponha que $f(a, b) = f(c, d)$. Escreva a igualdade decorrente desta, usando a expressão da função. Suponha que $a > c$. Ache uma contradição do tipo: par não pode ser igual a ímpar. Conclua que $a < c$ também não pode ocorrer. Logo $a = c$, e agora mostre que $b = d$.

   Suponha que $f(a, b) = f(c, d)$. Se $a \neq c$, e sem perda de generalidade seja $a > c$, teremos
   $$2^{a-c}(2b - 1) = 2d - 1,$$
   ou seja, par igual a ímpar. Contradição. Se $a = c$, teremos
   $$2^a(2b - 1) = 2^c(2d - 1) \Rightarrow 2b - 1 = 2d - 1 \Rightarrow b = d.$$
   Segue então que $f(a, b) = f(c, d)$ implica $(a, b) = (c, d)$.

2. Para mostrar que é sobrejetiva, seja $k \in \mathbb{N}$. Se k for ímpar, mostre que existem a e b tais que $k = 2^a(2b - 1)$. Se k for par, chame de a o maior expoente de 2 que divide k, e conclua que existe um b tal que $k = 2^a(2b - 1)$.

   Se $k \in \mathbb{N}$ for ímpar, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2m - 1$. Daí fazendo $a = 0$ e $b = m$, segue que $f(a, b) = k$. Se k for par, seja 2^a a máxima potência de 2 que divide k. Então $k/2^a$ é ímpar, e existe m tal que $k/2^a = 2m - 1$. Logo $k = 2^a(2m - 1)$, ou seja, $f(a, m) = k$, como queríamos.

Exercício 3. Demonstre que os intervalos $(0, 1)$ e $(0, 1]$ possuem a mesma cardinalidade. Dica: a princípio você teria que achar uma bijeção entre estes invervalos. Não é fácil. Mas aí você pode usar o resultado visto em sala que diz que há uma bijeção entre dois conjuntos A e B se e somente se há uma função injetiva de A para B e uma função injetiva de B para A.

De acordo com a dica, basta acharmos uma função $f : (0, 1) \to (0, 1]$ injetiva e uma função $g : (0, 1] \to (0, 1)$ injetiva. É bem fácil. $f(x) = x$ e $g(x) = x/2$ funcionam.

Exercício 4.

1. Suponha que A é um conjunto não enumerável, e $B \subseteq A$ é finito. Mostre que $A - B$ é não enumerável. (dica: suponha que $|B| = k$. Se $A - B$ é enumerável, mostre que há uma bijeção entre $A - B$ e $\mathbb{N} - \{1, 2, 3, ..., k\}$. Conclua que uma enumeração de $A - B$ implica em uma enumeração de A, levando a uma contradição)

   Suponha que $A - B$ é enumerável. Logo existe uma bijeção f entre $A - B$ e $\mathbb{N}$. Definimos agora a função $g : A \to \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in A - B$, $g(a) = f(a)$, e tal que $g : B \to \{-k, -(k - 1), ..., -1\}$ seja bijeção. Logo g é função injetiva de A para $\mathbb{Z}$, e portanto a cardinalidade de A é menor ou igual que a de $\mathbb{Z}$, uma contradição ao fato que A não é enumerável.

2. E se B for enumerável? Mostre que $A - B$ é não enumerável.

   É quase a mesma coisa. Suponha que $A - B$ é enumerável. Logo existe uma bijeção f entre $A - B$ e $\mathbb{N}$. Definimos agora a função $g : A \to \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in A - B$, $g(a) = f(a)$, e tal que $g : B \to -\mathbb{N}$ seja bijeção, o que é possível uma vez que B é enumerável. Logo g é função injetiva de A para $\mathbb{Z}$, e portanto a cardinalidade de A é menor ou igual que a de $\mathbb{Z}$, uma contradição ao fato que A não é enumerável.

3. Qual a cardinalidade dos números irracionais?

   Não enumerável, uma vez que trata-se de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$ é não-enumerável, enquanto $\mathbb{Q}$ é.