Aulas 21 e 22

1 Modelando problemas de contagem

Exemplo 1 (Coelhos e Fibonacci)**.** Um casal de coelhos jovens é colocado em um ilha. Após completar dois meses, os coelhos tem um casal de filhos por mês. O mesmo é válido para todos os novos casais de coelhos desta ilha. Por fim, coelhos não morrem nesta ilha. No mês N, quantos coelhos há na ilha?

Neste exemplo, se f_n é o número de coelhos no mês n, note que f_n pode ser expressado em termos da quantidade de coelhos dos meses anteriores. Como os coelhos não morrem,

$$f_n = f_{n-1} + \text{novos coelhos que nascem.}$$

Os novos coelhos são casais de coelhos filhos dos coelhos que possuem ao menos dois meses de vida. Ou seja, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Exemplo 2. Lembre-se do jogo Torre de Hanoi. Quando discutimos este jogo há algumas aulas, notamos que para mover uma pilha de n discos, precisávamos mover $n-1$ peças para a pilha do meio, a grande para a terceira pilha, e depois as $n-1$ peças para sobre a pilha grande. Assim o número mínimo h_n de movimentos necessários para mover as n peças satisfaz a equação

$$h_n = 2h_{n-1} + 1.$$

A maneira como estamos abordando esses problemas de contagem é estabelecendo que uma sequência que é definida recursivamente, ou seja, sequências $a_1, a_2, a_3, ...$ onde o n-ésimo termo é uma função de um ou mais termos anteriores. Relações dessa forma são chamadas de *relações de recorrência.*

Exercício 1. A relação de recorrência que conta o número de sequências de N 0s e 1s que não possuem dois ou mais 0s consecutivos é

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Por que? Encontre a relação de recorrência que conta o número de sequências de N 0s e 1s que não possuem três ou mais 0s consecutivos.

Exercício 2. Encontre uma relação de recorrência que conte o número de sequências de N dígitos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ que possuem um número par de 0s.

Exercício 3 (Extra 1)**.** Você se lembra do problema de contar partições de $\{1, 2, ..., n\}$? Suponha que este conjunto tem B_n partições distintas. Encontre uma relação de recorrência para B_n. Dica: separe as maneiras de formar um subconjunto que contenha n, e reduza o problema para casos menores.

Exercício 4 (Extra 2)**.** Um desarranjo de N números é uma permutação de 1 2 ... N em que nenhum número fica na sua posição "certa". Por exemplo 312 e 231 são desarranjos de 3 números, e não há nenhum outro.

(a) Quantos desarranjos de 4 ou 5 números há?

(b) Ache uma relação de recorrência para d_N, a quantidade de desarranjos de N números. Dica: Ou um desarranjo troca o n e um i de lugar, ou ele coloca um n na posição i e desarranja os demais, "tratando" i como n. Lembre-se que há $n-1$ escolhas para o i....

(c) Uma fórmula para d_n é

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Verifique a relação de recorrência que você encontrou está correta. Este número é, surpreendentemente, o inteiro mais próximo de $n!/\mathrm{e}$, onde e é a base do logaritmo natural. Esta fórmula também pode ser deduzida usando uma generalização para n conjuntos da fórmula

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

definindo cada A_i como o conjunto das permutações que fixam o número i na sua posição inicial.

2 Números de Catalan

Exemplo 3. Considere a seguinte soma

$$A + B + C + D.$$

Para realizar esta soma, precisamos escolher quais dois termos vamos somar. Isto equivale a colocar parenteses na soma que tornem esta escolha inambígua. Por exemplo

$$(A + B) + (C + D) \quad \text{ou} \quad (A + B) + C) + D.$$

Por outro lado, assim não funcionaria

$$A + (B + C) + D.$$

Se há uma soma com n sinais de $+$, de quantas maneiras podemos colocar parenteses válidos na soma?!!

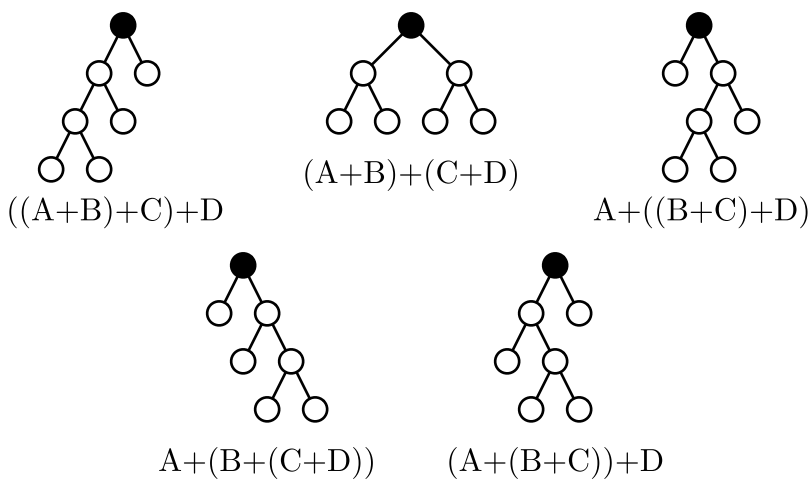
- Seja C_n esta quantidade. Há precisamente um sinal de $+$ que fica fora de todos os parênteses. Suponha que a esquerda deste sinal há m sinais de soma, e portanto a direita há $n - m - 1$ sinais. De cada maneira que podemos colocar parenteses em cada lado, temos uma solução para os n sinais. Ou seja, $C_m \cdot C_{n-m-1}$ maneiras. Como o sinal de $+$ divisor pode ficar em qualquer posição, segue que

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + ... + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0.$$

Vamos ver agora que esta relação de recorrência conta outras coisas também.

Exemplo 4. Uma árvore com raiz é um conjunto de vértices em que cada vértice possui 1 pai e 0 ou mais filhos, com a propriedade que quaisquer dois vértices possuem pelo menos um ancestral comum. O ancestral comum a todos os vértices é chamado de raiz da árvore, e um vértice sem filhos é chamado de folha. Uma árvore é chamada de binária se todo vértice possui no máximo dois filhos. Uma árvore binária é completa se cada vértice possui 0 ou 2 filhos.

Note que cada maneira de colocar parênteses na soma de quatro termos corresponde a uma árvore binária completa com 4 folhas:



Note que a relação de recorrência apresentada consiste basicamente em observar que cada lado da raiz é uma árvore binária completa com menos folhas.

Exemplo 5. Uma palavra de Xs e Ys é uma sequência com n Xs e n Ys e que a cada ponto da sequência, o número de Xs que já foram usados é maior ou igual que o número de Ys usados. Por exemplo, com $n = 3$, temos

$$\text{XXXYYY , XXYXYY , XXYYXY , XYXXYY , XYXYXY}$$

Você seria capaz de encontrar uma relação de recorrência que conte estas palavras? Dica: Considere o Y que fecha o primeiro X, e divida a palavra entre eles e o que resta.

Talvez um pouco mais fácil... Você seria capaz de associar cada uma dessas palavras a uma das árvores acima?

Finalmente, vamos achar uma "fórmula". Há precisamente $\binom{2n}{n}$ sequências de Xs Ys possíveis. Note que uma sequência de n Xs e n Ys que viole a regra possui um primeiro Y problemático. Imagine que, a partir deste Y, você inverta as letras seguintes. Terminaremos com uma sequência que possui $n+1$ Ys e $n-1$ Xs. Por outro lado, qualquer sequência de $n+1$ Ys e $n-1$ Xs possui um primeiro Y problemático, e se a partir dele invertermos as letras seguintes, teremos uma sequência n Xs e Ys problemática. Ou seja, há uma correspondência entre as sequências de n Xs e Ys problemáticas e todas as sequências de $n+1$ Ys e $n-1$ Xs. Logo a resposta será

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Cheque

`https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number`

para mais informações, e

`https://www.hackerrank.com/challenges/balanced-brackets/problem`

para uma excelente exercício de programação associado aos números de Catalan.

3 Relações de recorrências lineares

Dada uma sequência

$$a_0, a_1, a_2, ...,$$

uma relação de recorrência linear e homogênea de grau k e coeficientes constantes é uma relação de recorrência da forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}.$$

Exemplo 6. A sequência de Fibonacci é determinada por uma relação de recorrência linear e homogênea de grau 2, cujos coeficientes são $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$.

Exemplo 7. A relação $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ não é linear, a relação $h_n = 2h_{n-1} + 1$ não é homogênea, e a relação $b_n = nb_{n-1}$ não possui coeficientes constantes.

Para resolver uma relação de recorrência da forma

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},$$

começamos "chutando" que existe um número $x \neq 0$ tal que $a_n = x^n$. Logo

$$x^n - 5x^{n-1} + 6x^{n-2} = 0,$$

e portanto, dividindo por x^{n-2}, segue que x é raiz da equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Logo $x = 2$ e $x = 3$ são possíveis soluções. Mais do que isso, note que para quaisquer número α e β, teremos que, se $a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$, então

$$\begin{aligned} 5a_{n-1} - 6a_{n-2} &= 5(\alpha 2^{n-1} + \beta 3^{n-1}) - 6(\alpha 2^{n-2} + \beta 3^{n-2}) \\ &= \alpha 2^{n-2}(10 - 6) + \beta 3^{n-2}(15 - 6) \\ &= \alpha 2^n + \beta 3^n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Uma vez que os dois primeiros termos da sequência sejam anunciados, por exemplo, $a_0 = 3$ e $a_1 = 8$, podemos calcular os únicos valores possíveis para α e β. Neste exemplo, $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

Exercício 5. Encontre uma fórmula para a_n que não dependa de termos anteriores, sabendo que $a_0 = 5$, $a_1 = 7$, e que

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}.$$

Exercício 6. Se $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, e $a_0 = 2$ e $a_1 = 1$, qual a fórmula pra a_n?

Exercício 7. Encontre uma fórmula para os números da sequência de Fibonacci.

Exemplo 8. Suponha que temos a recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$. Neste caso, o polinômio

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

tem duas raízes iguais.. $x = 3$. Então $a_n = 3^n$ será sempre solução, mas também teremos o caso $a_n = n3^n$. De fato:

$$6(n-1)3^{n-1} - 9(n-2)3^{n-2} = 3^{n-2}(18n - 18 - 9n + 18) = 9n3^{n-2} = n3^n = a_n.$$

Portanto a solução geral será da forma $a_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n$. Neste exemplo, supondo que $a_0 = 1$ e $a_1 = 6$, ache α e β.

A seção anterior mostra como usar a idéia de diagonalização de matrizes para resolver recorrências. O processo um pouco longo, talvez, envolve o cálculo de autovalores, autovetores, e a inversa de uma matriz. Mostraremos aqui como fazer um atalho.

O ponto principal acima é o cálculo dos autovalores, que essencialmente codificam como a repetição iterada da recorrência se comporta como um produto. Veremos no exemplo abaixo que os autovalores são essencialmente a única coisa que precisamos calcular.

Exemplo 9. Se $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, e $a_0 = 2$ e $a_1 = 1$, qual a fórmula pra a_n?

Ora, ao escrevermos a matriz e o polinômio característico, veremos que os autovalores são

$$-2 \text{ e } 3.$$

Sabemos que $a_n = \alpha(-2)^n + \beta 3^n$. Temos que achar α e β. Mas esta fórmula, para $n = 0$, deve dar 2, e para $n = 1$ deve dar 1. Daí teremos

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{e} \quad -2\alpha + 3\beta = 1.$$

Logo $\alpha = \beta = 1$. Portanto

$$a_n = (-2)^n + 3^n.$$

Formalizamos como um teorema.

Teorema 1. *Considere a relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$. O polinômio característico é*

$$p(x) = x^2 - c_1 x - c_2.$$

Sejam θ_1 e θ_2 as raízes deste polinômio. Então existem α e β (calculáveis usando os casos iniciais) tais que:

(i) Se $\theta_1 \neq \theta_2$, então $a_n = \alpha\theta_1^n + \beta\theta_2^n$.

(ii) Se $\theta_1 = \theta_2$, então $a_n = \alpha\theta_1^n + \beta n\theta_1^n$.

Recorrências podem ter mais termos. Neste caso, escrevemos o polinômio característico, achamos todas as suas raízes, e agimos de forma análoga. Se houver raízes repetidas, digamos k vezes, simplesmente multiplicamos a segunda por n, a terceira por n^2, e assim até n^{k-1}.

Exercício 8. Resolva $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, com $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ e $a_2 = 15$.

Exercício 9. Resolva $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$, com $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.

Exercício 10. Resolva $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, com $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ e $a_2 = -1$.

Teorema 2. *Considere a relação de recorrência $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}$. O polinômio característico é*

$$p(x) = x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - ... - c_k.$$

Sejam $\theta_1, ..., \theta_t$ as raízes deste polinômio, com multiplicidades $m_1, ..., m_t$. Então existem coeficientes $\alpha_{i,j}$ (calculáveis usando os casos iniciais) tais que:

$$\begin{aligned} a_n = &(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}n + ... + \alpha_{1,m_1}n^{m_1-1})\theta_1^n \\ &+ (\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2}n + ... + \alpha_{2,m_2}n^{m_2-1})\theta_2^n \\ &+ ... + (\alpha_{t,1} + \alpha_{t,2}n + ... + \alpha_{t,m_t}n^{m_t-1})\theta_t^n \end{aligned}$$

é a solução da relação.

Exercício 11. Suponha que as raízes do polinômio característico de uma relação de recorrência linear e homogênea são $2, 2, 2, 5, 5$ e 9. Qual a forma geral da solução? Quantos casos base precisamos para que a solução seja única?

Exercício 12. Mensagens são transmitidas em um canal usando dois sinais. A transmissão do primeiro sinal requer 1 micro-segundo, e a do segunda sinal requer 2 micro-segundos.

(a) Em n micro-segundos, quantas mensagens diferentes podem ser transmitidas? Ache uma relação de recorrência.

(b) Ache os casos iniciais.

(c) Quantas mensagens diferentes podem ser transmitidas em 10 segundos?

(d) Ache uma fórmula fechada.

Exercício 13. No exercício acima, e se há 3 sinais possíveis, onde um deles dura 1 microseg e os outros dois duram 2 microsegs cada ?

Exercício 14. De quantas maneiras diferentes um retângulo $2 \times n$ pode ser preenchido usando peças 1×2 e 2×2 ?

4 Leitura opcional: Relações de recorrência e álgebra linear

Suponha que uma sequência $a_0, a_1, a_2, ...$ é definida por $a_0 = 2$ e

$$a_n = 3a_{n-1}.$$

Esta é uma relação de recorrência. É possível achar uma fórmula fechada para a_n ? Note que

$$a_n = 3a_{n-1} = 9a_{n-2} = 27a_{n-3} = ... = 3^n a_0 = 2 \cdot 3^n.$$

Ou seja: como a_n era linearmente expresso em termos de a_{n-1} foi possível resolver o problema.

O problema que estaremos interessados é o de achar, digamos, “fórmulas fechadas” para problemas do tipo:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

dadas condições $a_0 = 2$ e $a_1 = 7$. Como usar a idéia da solução acima? Ora, isso nada mais é do que a_n expresso como um certo produto dos termos anteriores... Qual produto é este?

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Ou seja:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, precisamos de uma fórmula para

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Autovalores e autovetores...

Seja M uma matriz quadrada. Se existe um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ e um número real θ tais que

$$M\mathbf{v} = \theta\mathbf{v},$$

então $\mathbf{v}$ é um autovetor de M e θ é um autovalor.

Apresentamos a seguir uma maneira de calcular autovalores e autovetores.

Note que se $M\mathbf{v} = \theta\mathbf{v}$, então $(M - \theta I)\mathbf{v} = 0$, e portanto as colunas de $(M - \theta I)$ são linearmente dependentes, o que é equivalente à dizer que $\det(M - \theta I) = 0$. Para acharmos um valor de θ que seja autovalor, basta portanto resolver a equação dada por

$$\det(M - \theta I) = 0.$$

Exercício 15. Ache os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

No caso, queremos resolver

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = (1-x)(-x) - 2 = x^2 - x - 2 = 0$$

As soluções são $x = -1$ e $x = 2$. $\square$

Uma vez que os autovalores são calculados, podemos achar os autovetores correspondentes.

Exercício 16. Ache os autovetores da matriz do Exercício 15.

Ou seja, substituimos os autovalores achados e resolvemos o sistema linear. Para $\theta = -1$, teremos

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As únicas soluções possíveis são com $a = -b$, portanto $(a, b) = (1, -1)$ (e qualquer múltiplo) é um autovetor. Com $\theta = 2$, teremos

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b \\ a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí $a = 2b$. Então $(a, b) = (2, 1)$ é autovetor.

O exercício acima implica que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Exercício 17. Calcule

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{10}.$$

Basta notar que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{10} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{10} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

pois as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ se cancelam quando expandimos a potência.

Exercício 18. Ache uma fórmula para

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Usaremos então a diagonalização da matriz:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right] \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 2 \cdot 2^{n-1} \\ -(-1)^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \right] \left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 2 \cdot 2^{n-1} \\ -(-1)^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

Ou seja, como

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

teremos

$$a_n = (-1)^{n-1} + 3 \cdot 2^n.$$

Aula 23, 24 e 25

5 Relações binárias

Muitas vezes podemos estar interessados em expressar como elementos de dois conjuntos diferentes se relacionam. Por exemplo, imagine que A é um conjunto de estudantes, e B é um conjunto de cursos em uma universidade. Queremos expressar os cursos nos quais cada estudante está matriculado. Como fazer isso?

Por exemplo, se $A = \{a, b, c, d, e\}$, e $B = \{U, V, W\}$, então usaremos

$$\{(a, U), (a, W), (b, W), (c, U), (c, V), (d, W)\}$$

para indicar que o aluno a está matriculado em U e W, b em W, c em U e V, d em W e e em nenhum.

- Uma relação binária entre conjuntos A e B é um subconjunto de $A \times B$.

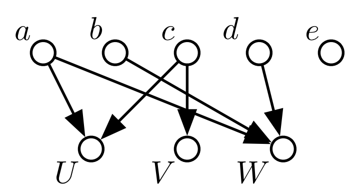
Relações podem ser representadas de várias maneiras distintas. Por exemplo, a relação dada por

$$\{(a, U), (a, W), (b, W), (c, U), (c, V), (d, W)\}$$

pode ser representada como:

(i) Subconjunto de $A \times B$, assim como fizemos acima.

(ii) Pontos no plano, e setas entre eles:



(iii) Matrizes - linhas indexadas por elementos de um conjunto, colunas por elementos de outro, e 1 caso o par esteja na relação, 0 caso contrário:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Notação R: faremos $a \mathrel{\mathtt{R}} U$, $a \mathrel{\mathtt{R}} W$, $b \mathrel{\mathtt{R}} W$, $c \mathrel{\mathtt{R}} U$, $c \mathrel{\mathtt{R}} V$ e $d \mathrel{\mathtt{R}} W$.

Exercício 19. Considere a relação entre os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$ abaixo:

$$\{(1, a),\ (2, b),\ (3, c),\ (4, d),\ (5, a),\ (5, b),\ (5, d)\}.$$

Expresse-a de todas as maneiras descritas acima.

6 Funções são relações

Já vimos um exemplo de relação antes. Todas as funções são relações, com propriedades adicionais exigidas. Mais especificamente, se $f : A \to B$, então f define um subconjunto S de $A \times B$ onde cada elemento de A aparece em exatamente um par ordenado.

- Por exemplo, se $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ dada por $f(1) = a$, $f(2) = a$ e $f(3) = b$, temos que f define a relação
$$\{(1, a),\ (2, a),\ (3, b)\}.$$

Exercício 20. Considere a função $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dada por $f(x) = x^2$. Expresse todos os pares ordenados da relação determinada por f.

7 Relações de um conjunto em si próprio

Em muitos casos, estaremos interessados em relacionar elementos de um conjunto A com outro elementos de A. Neste caso, cada relação estará definindo um subconjunto de $A \times A$.

Exercício 21. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Expresse a relação que contém todos os pares do tipo (a, b) onde a divide b.

Relações podem ser definidas naturalmente em conjuntos infinitos.

Exercício 22. Considere as relações abaixo definidas para o conjunto dos números inteiros.

$R_1 = \{(a, b) : a \leq b\}$.

$R_2 = \{(a, b) : a > b\}$.

$R_3 = \{(a, b) : a = b \text{ ou } a = -b\}$.

$R_4 = \{(a, b) : a = b\}$.

$R_5 = \{(a, b) : a = b + 1\}$.

$R_6 = \{(a, b) : a + b \leq 3\}$.

Determine em quais das relações acima pertencem os pares abaixo:

$$(1, 1)\ ,\quad (1, 2)\ ,\quad (2, 1)\ ,\quad (1, -1)\ ,\quad (2, 2)$$

Exercício 23. Quantas relações binárias distintas podem existir em um conjunto com n elementos?

8 Propriedades de relações

Introduzimos quatro tipos de propriedades distintas que uma relação R de um conjunto A pode satisfazer:

(i) R é reflexiva se, para todo $a \in A$, $(a,a) \in R$.

(ii) R é simétrica se, para todos $a,b \in A$ tais que $(a,b) \in R$, então $(b,a) \in R$.

(iii) R é anti-simétrica se, para todos $a,b \in A$ tais que tanto (a,b) como (b,a) estão $\in R$, teremos que $a = b$.

(iv) R é transitiva se, para todos $a,b,c \in A$ tais que $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, então $(a,c) \in R$.

Exercício 24. Considere as relações abaixo.

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\},\\
R_2 &= \{(1,1),(1,2),(2,1)\},\\
R_3 &= \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\},\\
R_4 &= \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\},\\
R_5 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\},\\
R_6 &= \{(3,4)\}.
\end{aligned}
$$

Determine quais propriedades acima são satisfeitas por cada uma delas.

Exercício 25. Interprete o que significa uma relação ser reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva no contexto da representação como matrizes e no contexto da representação gráfica com pontos e setas.

Exercício 26. Determine quais das propriedades acima são ou não satisfeitas pelas relações dos $\mathbb{Z}$ descritas no Exercício 22.

Exercício 27. Quantas relações reflexivas existem em um conjunto com n elementos?

Exercício 28. Quantas relações simétricas existem em um conjunto com n elementos?

Exercício 29. Quantas relações anti-simétricas existem em um conjunto com n elementos?

Exercício 30 (Desafio !!). Quantas relações transitivas existem em um conjunto com n elementos?

9 Composição de relações

Como relações são conjuntos, podemos fazer operações de $\cup$, $\cap$, e $-$ entre duas relações quaisquer.

Exercício 31. Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $R_1 = \{(1,1),\ (2,2,),\ (3,3)\}$ e $R_2 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4)\}$. Determine:

- $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ e $R_2 - R_1$.

Exercício 32. Sejam R_1 e R_2 relações de $\mathbb{R}$ dadas por

$$R_1 = \{(a,b) : a < b\} \text{ e } R_2 = \{(a,b) : b < a\}.$$

Determine $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ e $R_2 - R_1$.

Por fim, definimos a composição de duas relações. Se R_1 é relação de A e B, e R_2 é relação de B e C, então definimos

$$R_3 = R_2 \circ R_1$$

como uma relação de A e C tal que

$$(a,c) \in R_3 \iff \exists b \in B : (a,b) \in R_1 \text{ e } (b,c) \in R_2.$$

Exercício 33. Seja

$$R = \{(1,a),(1,d),(2,c),(3,a),(3,d)\} \text{ e } S = \{(a,0),(b,0),(c,1),(c,2),(d,1).\}$$

Determine $S \circ R$.

Exercício 34. Seja $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encontre $R \circ R$. Encontre $R \circ R \circ R$. Encontre $R^{\circ n}$ para todo n.

Exercício 35. No exercício anterior, expresse a matriz de R. Calcule potências dessa matriz.

Exercício 36. Mostre que se $R \circ R \subseteq R$, então R é transitiva.

10 Fecho

O fecho reflexivo de uma relação R é a menor relação R' tal que $R \subseteq R'$ e R' é reflexiva.

Exercício 37. Ache o fecho reflexivo de $\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$.

Exercício 38. Ache o fecho reflexivo da relação em $\mathbb{Z}$ dada por $\{(a,b) : a < b\}$.

O fecho simétrico de uma relação R é a menor relação R' tal que $R \subseteq R'$ e R' é simétrica.

Exercício 39. Ache o fecho simétrico de $\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$.

Exercício 40. Ache o fecho simétrico da relação em $\mathbb{Z}$ dada por $\{(a,b) : a < b\}$.

Exercício 41. Interprete o que significa construir o fecho no contexto de matrizes e do gráfico com pontos e setas.

O fecho transitivo de uma relação R é a menor relação R' tal que $R \subseteq R'$ e R' é transitiva.

Exercício 42. Ache o fecho transitivo da relação dada pelos gráficos abaixo.

(i) Caminho direcionado.

(ii) Ciclo direcionado.

11 Relações de equivalência

Uma relação é chamada de *equivalência* se ela for reflexiva, simétrica e transitiva.

Exercício 43. Considere a relação de $\mathbb{R}$ dada por $R = \{(a, b) : a = b\}$. É de equivalência?

Exercício 44. Mostre que a relação em $\mathbb{Z}$ dada por $\{(a, b) : a = b \text{ ou } a = -b\}$ é de equivalência.

Exercício 45. Mostre que a relação em $\mathbb{Z}$ dada por $\{(a, b) : 4|a - b\}$ é de equivalência.

Seja A um conjunto, e R uma relação de equivalência em A. Para cada $a \in A$, seja

$$[a]_R = \{x \in A : (a, x) \in R\}.$$

Isto é definido como a classe de equivalência de a em R. Note que:

(i) Para todo $x \in A$, $x \in [x]$.

A relação é de equivalência, e portanto reflexiva. Logo $(x, x) \in R$ para todo $x \in A$. Logo $x \in [x]$.

(ii) Se $(a, b) \in R$, então $[a] = [b]$.

Para mostrar este fato, vamos verificar que $[b] \subseteq [a]$ e que $[a] \subseteq [b]$. Daí seguirá a igualdade. Seja $c \in [b]$. Por definição de $[b]$, isso significa que $(b, c) \in R$. Como R é transitiva, e temos $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, segue que $(a, c) \in R$. Portanto $c \in [a]$, e isso prova que $[b] \subseteq [a]$. Seja agora $c \in [a]$. Temos que $(a, c) \in R$, e $(a, b) \in R$. Mas como é R é simétrica, isso implica que $(c, a) \in R$. Logo, por transitividade, $(c, b) \in R$, e por simetria, $(b, c) \in R$. Portanto $c \in [b]$, e logo $[a] \subseteq [b]$.

(iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ implica $[a] = [b]$.

Se $c \in [a]$ e $c \in [b]$, temos $(a, c) \in R$ e $(b, c) \in R$. Pelo item anterior, $[a] = [c]$ e $[b] = [c]$. Logo $[a] = [b]$.

(iv) A pode ser particionado em conjuntos do tipo $[x]$ para alguns elementos x de A.

Os itens anteriores demonstram que todo elemento $x \in A$ pertence a $[x]$, e que nenhum elemento x de A pertence a dois conjuntos da forma $[x]$ e $[y]$, a não ser que $[x] = [y]$. Portanto A é particionado em classes de equivalência.

Exercício 46. Descreva as partições obtidas em cada exercício acima.

Exercício 47. Dada uma partição de um conjunto, é possível definir uma relação de equivalência cujas classes correspondem às partes da partição. Descreva os pares (ou a matriz) que correspondem à partição $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$.

Exercício 48. Descreva como será a matriz de uma relação de equivalência qualquer.

Exercício 49. Quantas relações de equivalência existem em um conjunto com 5 elementos?

12 Posets ou ordens parciais

Dado um conjunto S, uma relação binária R em S é uma *ordem parcial* se R for reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Na presença da relação R, o conjunto S é chamado de um *conjunto parcialmente ordenado*, ou um POSET.

Exemplo 10. Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são parcialmente ordenados, de acordo com a relação definida por $\leq$.

Exercício 50. Mostre que a relação de $\mathbb{Z}$ definida por $\{(a, b) : a|b\}$ é uma ordem parcial.

Exercício 51. Seja A um conjunto qualquer. A relação de $\mathcal{P}(A)$ definida por $\{(S, T) : S \subseteq T\}$ é uma ordem parcial?

Muitas vezes, quando a ordem parcial estiver explícita no contexto, podemos representar que (a, b) pertence à relação escrevendo $a \preccurlyeq b$

Dada uma ordem parcial R de um conjunto A, dizemos que os elementos x e y de A são comparáveis se $x \preccurlyeq y$ ou se $y \preccurlyeq x$. Se todos os pares de elementos são comparáveis, então R é chamada de *ordem total*.

Exercício 52. Quais das ordens parciais descritas nos exemplos acima são totais?

13 Diagramas de Hasse

Suponha que temos o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a ordem parcial $\leq$.

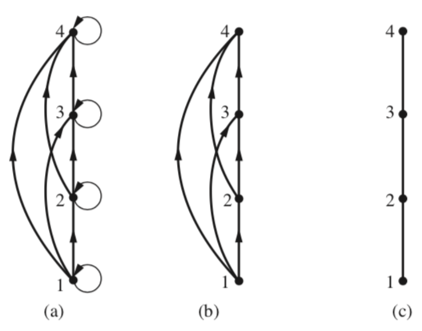
Exercício 53.

(a) Desenhe o gráfico de $\leq$ em A, com o entendimento que todas as setas (com exceção dos loops) apontam para cima.

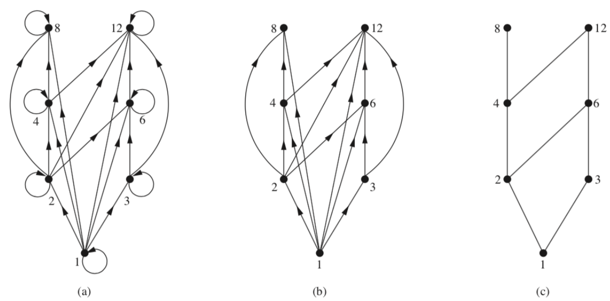
(b) Apague tudo que for consequência da reflexividade.

(c) Apague tudo que for consequência da transitividade, e apague as direções do que restar.

O que restou foi o diagrama de Hasse de $\leq$ em A.



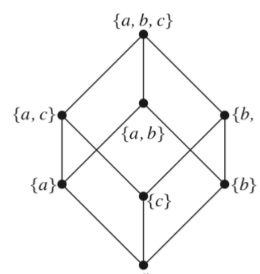
Exercício 54. Considere o poset de $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ cuja ordem $a \preccurlyeq b$ se e somente se $a|b$. Desenhe o seu diagrama de Hasse.



Em um poset, um elemento a é *maximal* se não existe qualquer outro elemento que seja maior ou igual que ele, e *minimal* se não existir qualquer outro elemento menor ou igual que ele. No diagrama de Hasse, esses são os elemento que, respectivamente, não possuem aresta saindo para cima, ou chegando de baixo.

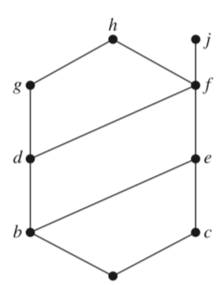
Exercício 55. Quais os elementos minimais e maximais do exemplo acima? E se retirarmos o 1 do conjunto A, o que muda?

Exercício 56. Construa o diagrama de Hasse do poset $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ com a ordem $\subseteq$. Quais os elementos maximais e minimais?



Dados dois elementos a e b de um conjunto A parcialmente ordenado, uma quota superior é um elemento x tal que $a \preccurlyeq x$ e $b \preccurlyeq y$. Se $X \subseteq A$, uma quota superior de X é elemento y tal que, para todo $x \in X$, $x \preccurlyeq y$. Considerações semelhantes valem para quotas inferiores.

Exercício 57. Para os conjuntos $\{a, b, c\}$, $\{j, h\}$, $\{a, c, d, f\}$, encontre as quotas inferiores e superiores no diagrama de Hasse abaixo.

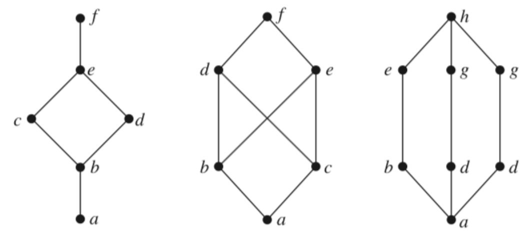


Se dentre todas as quotas superiores de um conjunto, uma delas for menor que todas as outras, ela é chamada de menor quota superior. Se dentre todas as quotas inferiores de um conjunto, uma delas for maior que todas as outras, ela é chamada de maior quota inferior.

Exercício 58. No exercício acima, ache a menor quota superior e a maior quota inferior do conjunto $\{b, d, g\}$.

Um *reticulado* é um poset em que quaisquer dois elementos possuem uma menor quota superior e uma maior quota inferior.

Exercício 59. Nos posets abaixo, decida quais são reticulados.



(a) (b) (c)

Exercício 60. Considere o poset $\mathbb{Z}^+$ de acordo com a ordem dada por divisibilidade. É um reticulado? Dado dois elementos a e b, quais são a menor quota superior e a maior quota inferior?

Exercício 61. Seja A um conjunto qualquer. Considere o poset $\mathcal{P}(A)$ de acordo com a ordem dada por $\subseteq$. É um reticulado? Dado dois elementos S e T, quais são a menor quota superior e a maior quota inferior?

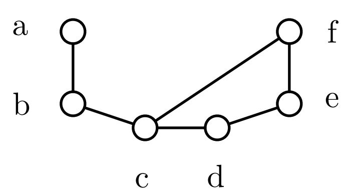
Aulas 26, 27, 28 e 29

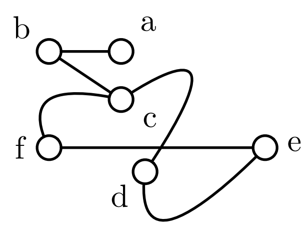
14 Grafos

Formalmente, um grafo G é um par de dois conjuntos, V e E, em que E é uma coleção de subconjuntos de V com dois elementos. Por exemplo, $G = (V, E)$, tal que

$$V = \{a, b, c, d, e, f\} \quad \text{e} \quad E = \{\{a, b\},\ \{b, c\},\ \{c, d\},\ \{d, e\},\ \{e, f\},\ \{f, c\}\}$$

é um grafo. O conjunto V é chamado de conjunto de vértices, o conjunto E, de arestas. Intuitivamente, você pode pensar em um grafo como um conjunto de pontos onde alguns deles são ligados por um traço. Nem a posição dos pontos nem a forma do traço são relevantes: a única coisa que importa é quais pontos estão ligados a quais outros pontos:





Pensando no tópico da semana passada, um grafo como definimos acima está naturalmente associado a:

- Relações simétricas e irreflexivas (onde nenhum elemento se relaciona consigo próprio); e equivalentemente
- Matrizes simétricas de 0s e 1s com 0s na diagonal principal.

Há definições mais abrangentes do conceito de grafo, que permitem coisas como arestas com direção (arcos), arestas ou vértices com peso, número infinito de vértices ou arestas, mais que uma aresta entre dois vértices (arestas em paralelo), uma aresta ligada somente a um único vértice (loops), etc.

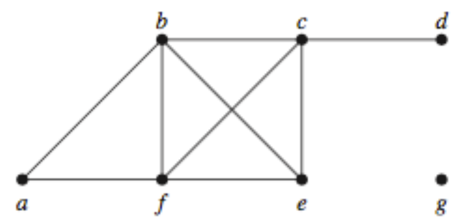
Grafos modelam, naturalmente, uma infinidade de estruturas do mundo real. Cidades e estradas entre elas, pessoas e amizades em redes sociais, computadores e cabos conectando eles, páginas da internet e links entre elas, aeroportos e rotas de aviões entre eles, etc. No que segue, entretanto, estaremos interessados em introduzir conceitos e propriedades teóricas introdutórias.

15 Nomenclatura

- Dados dois vértices u e v, se há uma aresta entre eles $e = \{u, v\}$, diremos que u e v são adjacentes ou vizinhos, e que e é incidente a u ou a v. Uma aresta é sempre incidente a dois vértices, mas um vértice pode ser incidente a um número arbitrário de arestas (inclusive nenhuma).

- O conjunto de todos os vértices do grafo que são vizinhos de u é chamado de "a vizinhança de u". Em geral é denotada por $N(u)$ ou $\Gamma(u)$.
- O grau de um vértice é o número de vizinhos que ele possui. Em geral é denotado por $d(u)$ ou $\deg(u)$.
- Um vértice de grau 0 é um vértice que não possui vizinhos. Vértices desse tipo são chamados de vértice isolados.

Exercício 62. No grafo abaixo, determine:



(i) Apresente dois pares de vértices que sejam adjacentes, e dois que não sejam.

(ii) Descreva $N(a)$ e $N(e)$.

(iii) Quanto é $\deg(d)$?

(iv) Qual o maior grau deste grafo? E o menor?

(v) Há algum vértice isolado? Qual?

16 Primeiros resultados

Teorema 3. *Seja G um grafo com m arestas. Então*

$$2m = \sum_{v \in V(G)} deg(v).$$

□

Exercício 63. Seja G um grafo com 10 vértices, onde todos os vértices tem grau 6. Qual a quantidade de arestas deste grafo?

Exercício 64. Mostre que, para qualquer grafo, o quantidade de vértices de grau ímpar é um número par.

Exercício 65. Mostre que em qualquer grafo há pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

17 Mais estruturas e nomes, e grafos especiais

(i) Um *passeio* é uma sequência de vértices $v_0v_1v_2...v_m$ tal que v_i é vizinho de v_{i-1} e v_{i+1}.

(ii) Uma *trilha* é um passeio que não repete arestas (ainda que possa repetir vértices).

(iii) Um *circuito* é uma trilha em que o primeiro e o último vértices são os mesmo, ou seja, uma trilha fechada.

(iv) Um *caminho* é um passeio que não repete vértices.

(v) Um ciclo é um caminho fechado.

Exercício 66. Construa um grafo em que a maior trilha possível tenha 5 vértices (contando as repetições), mas o maior caminho possível tenha 4 vértices.

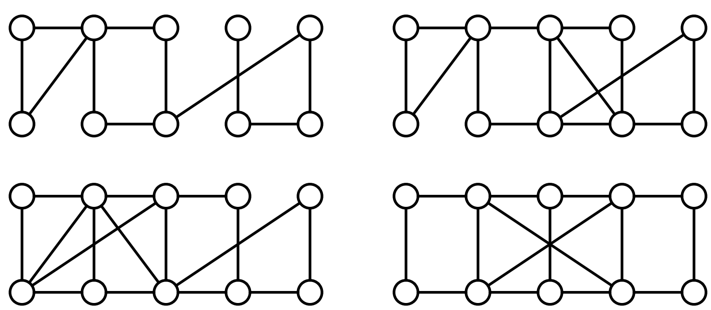
Exercício 67. Construa, no grafo do exercício 62, uma trilha envolvendo os vértices $a - f$ que use todas as arestas. É possível achar um circuito passando por todas as arestas?

(vi) Uma trilha ou circuito que usem todas as arestas são chamados de Eulerianos.

Exercício 68. Mostre que se um grafo possui um circuito Euleriano, então o grau de todos os vértices precisa ser par.

Exercício 69. Mostre que se um grafo possui uma trilha Euleriana, então o grau de todos os vértices precisa ser par, com exceção de no máximo dois vértices, que neste caso seriam necessariamente o ponto de partida e de chegada da trilha.

Exercício 70. Decida quais grafos abaixo possuem trilhas ou circuitos Eulerianos.



(vii) Dado um grafo G, o complemento de G, denotado por $\overline{G}$ é o grafo no mesmo conjunto de vértices, e tal que as arestas de $\overline{G}$ são precisamente os pares de vértices de G que não são arestas.

(viii) Um grafo tal que entre quaisquer par de vértices exista pelo menos 1 caminho é um grafo *conexo*.

Exercício 71. Desenhe os grafos complementares do grafo do exercício 62 e do primeiro grafo do exercício acima.

Exercício 72. Mostre que se um grafo não é conexo, então o seu complementar é necessariamente conexo.

(ix) Um grafo é uma *árvore* se ele for conexo e não possuir ciclos.

Exercício 73. Mostre que uma árvore possui pelo menos dois vértices de grau 1.

Exercício 74. Desenhe uma árvore com 6 vértices. Quantas arestas ela possui? Desenhe outra. Quantas arestas ela possui?

Teorema 4. *Uma árvore com n vértices possui precisamente $n-1$ arestas.*

Demonstração. Mostramos por indução. Existe uma única árvore com dois vértices, e ela tem 1 aresta. Seja agora T uma árvore com n vértices. Seja u um vértice de grau 1, que existe, de acordo com o exercício 86. Remova este vértice, juntamente com a aresta que o conecta ao resto do grafo. Nenhum ciclo foi criado, como u não era vértice do meio de qualquer caminho, o grafo restante, digamos T' permanece conexo. Ele é, portanto, uma árvore, com $n-1$ vértices, e como tal, por indução, possui $n-2$ arestas. Agora olhamos para T novamente: é obtida a partir de T' adicionando um vértice e uma aresta. Logo T tem $n-1$ arestas. □

- Indução em teoria de grafos sempre funciona assim: você começa de um grafo arbitrário. Diminui ele de algum jeito, mas de modo que a hipótese em questão permaneça verdadeira. No caso acima, removemos um vértice de grau 1, e desta forma o grafo restante ainda era uma árvore. Note que a remoção de um vértice de grau maior que 1 não teria resultado em uma árvore, e portanto não poderíamos aplicar indução! Daí, aplicamos indução no grafo menor. E por fim, reconstruímos o grafo original, verificando que a propriedade permanece válida.
- A seguinte "prova" do teorema acima estaria incorreta: Por indução, toda árvore de tamanho $n-1$ possui $n-2$ arestas. Adicione um vértice e uma aresta ela. O grafo resultante é uma árvore com n vértices e $n-1$ arestas.
- Estaria incorreta porque ela mostra que existe uma árvore com n vértices e com $n-1$ arestas, mas não que TODA árvore é assim....

(x) Um grafo é *regular* se todos os vértices tem o mesmo grau.

Exercício 75. Desenhe um grafo regular de grau 3 com 7 vértices. Desenhe um com 8 vértices.

(xi) Grafos completos são aqueles em que quaisquer par de vértices são adjacentes. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n.

(xii) Grafos ciclos são grafos conexos em que todo vértice tem grau 2. São denotados por C_n.

(xiii) Grafos caminho são grafos conexos que representam um caminho entre dois vértices extremos. Um grafo caminho com n vértices é denotado por P_n.

Exercício 76. Desenhe K_3, K_5, C_6 e P_8.

(xiv) Um grafo é *bipartido* se é possível particionar o conjunto de vértices em dois subconjuntos, e dentro de cada subconjunto não há qualquer aresta.

Exercício 77. Construa grafos bipartidos conexos com 10 vértices.

Exercício 78. Mostre que toda árvore é um grafo bipartido.

Exercício 79. Qual o número máximo de arestas em um grafo bipartido que tenha a vértices de um lado e b do outro?

Exercício 80. Qual o número máximo de arestas em um grafo bipartido com n vértices?

Exercício 81. Quais grafos ciclo são bipartidos? Ou seja, para quais valores de n os grafos C_n são bipartidos?

(xv) A distância entre dois vértices u e v de um grafo G é o comprimento do menor caminho entre u e v. Denota-se usualmente por $D(u, v)$ ou $\text{dist}(u, v)$. O diâmetro de G é a maior distância entre quaisquer par de vértices de G.

Exercício 82. Qual o diâmetro de C_n se n é par? E se n é ímpar?

Exercício 83. Qual a distância entre a e d no grafo do exercício 62?

Teorema 5. *Um grafo é bipartido se, e somente se, ele não possui qualquer ciclo ímpar.*

Demonstração. Seja G um grafo. Se existe um ciclo ímpar em G, então, pelo exercício acima, não é possível achar uma bipartição dos vértices do ciclo. Logo G não pode ser bipartido.

A conversa é mais sofisticada. Queremos mostrar que se não houver ciclos ímpares em G, então é possível achar uma bipartição de G sem que haja arestas em cada parte. Seja u um vértice de G. Particione $V(G)$ em dois conjuntos A e B de acordo com a seguinte regra:

- $v \in A$ se, e somente se, $D(v, u)$ for par. Note que $u \in A$.
- $v \in B$ se, e somente se, $D(v, u)$ for ímpar.

Agora ficou fácil. Basta concluir que não há qualquer aresta entre dois vértices de A ou entre dois vértices de B. Suponha que $v, w \in A$, e que $vw \in E(G)$. Existe um caminho de comprimento par de u pra v, uma aresta de v pra w, e um caminho de comprimento par de w para u. Isso leva a um passeio de comprimento ímpar que começa e terminar em u. Todo passeio fechado de comprimento ímpar possui um ciclo ímpar. Contradição a hipótese que não há ciclos ímpares. Argumento semelhante valeria para dois vértices em B. Concluímos portanto que se o grafo não possui ciclos ímpares, ele é bipartido. $\square$

18 Uma propriedade extremal, raio e diâmetro

Uma classe de perguntas muito comum em teoria de grafos é: quão grande (ou quão pequeno) um grafo pode ser sem que ele satisfaça uma certa propriedade? Problemas desse tipo são chamados de problemas extremais e motivam boa parte do desenvolvimento da teoria de grafos. Vamos abaixo ver um exemplo clássico. A intuição é a seguinte: a medida que você adiciona arestas, o grafo vai se tornando mais e mais denso. A medidade que a densidade aumenta, é natural que apareçam triângulos, até que finalmente o grafo se torne o grafo completo. Então a pergunta é: qual o número máximo de arestas que um grafo pode ter para que ainda não possua triângulos?

Teorema 6 (Mantel). *Se um grafo possui n vértices e não tem triângulos, então a quantidade m de arestas é menor ou igual do que $n^2/4$.*

Demonstração. Sejam u e v vértices do grafo, e suponha que uv é aresta. Como não há triângulos, segue que $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, ou seja, u e v não tem vizinhos em comum. Daí teremos que todo vértice do grafo é vizinho ou u, ou de v, ou de nenhum deles, e portanto

$$d(u) + d(v) \leq n.$$

Agora, para cada aresta do grafo, vamos somar as desigualdades. Do lado esquerdo, estaremos somando, para cada aresta, o grau dos vértices a ela incidentes. Ou seja, para cada vértice u, estaremos somando o seu grau $d(u)$ por $d(u)$ vezes! Logo

$$\sum_{uv \in E} d(u) + d(v) = \sum_{u \in V} d(u)^2.$$

Por outro lado,

$$\sum_{uv \in E} n = m \cdot n.$$

Portanto

$$\sum_{u \in V} d(u)^2 \leq mn.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, teremos

$$\sum_{u \in V} d(u)^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{u \in V} d(u) \right)^2 = \frac{1}{n}(2m)^2.$$

Levando a

$$mn \geq \frac{1}{n}(2m)^2 \Rightarrow m \leq \frac{n^2}{4}.$$

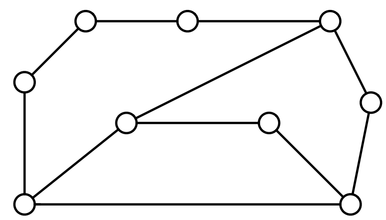
Exercício 84. Ache uma família infinita de grafos com n vértices, sem triângulos, que possuam exatamente $n^2/4$ arestas.

(xvi) Dado um grafo G, denotamos por $\delta(G)$ o grau mínimo que aparece dentre os vértices de G.

Exercício 85. Mostre que todo grafo contém um caminho de comprimento $\delta(G)$. Mostre que se $\delta(G) \geq 2$, então todo grafo contém um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G) + 1$.

(xvii) A *cintura* de um grafo G é o comprimento do menor ciclo contido no grafo, usualmente denotada por $g(G)$.

Exercício 86. Qual a cintura do grafo abaixo?



Exercício 87. Suponha que G não é uma árvore, e portanto $g(G) \geq 3$. Mostre que

$$g(G) \leq 2 \operatorname{diam}(G) + 1.$$

(xviii) Um vértice a em G é chamado de *central* se a maior distância de a para qualquer outro vértice é a menor possível. O raio de G é precisamente essa distância, denotada por $\operatorname{rad}(G)$. Note que o vértice central não é necessariamente único, e que o raio não é em geral metade do diâmetro!

Exercício 88. Aponte um vértice central no exemplo do Exercício 86, e diga qual o raio do grafo.

Exercício 89. Qual o diâmetro de P_n? Aponte um vértice central. Qual o raio de P_n?

Exercício 90. Qual o diâmetro de C_n? Aponte um vértice central. Qual o raio de C_n?

Exercício 91. Qual o diâmetro de K_n? Aponte um vértice central. Qual o raio de K_n?

Exercício 92. Argumente em detalhes por que, para qualquer grafo G, valem as desigualdades

$$\operatorname{rad}(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2 \operatorname{rad}(G).$$

Teorema 7. *Um grafo G de raio k e grau máximo $d \geq 3$ tem, necessariamente, menos do que*

$$\frac{d}{d-2}(d-1)^k$$

vértices.

Demonstração. Seja z um vértice central. Vamos particionar os demais vértices de G de acordo com a distância deles para z, ou seja, defina

$$D_i = \{a \in V(G) : \operatorname{dist}(a, z) = i\}.$$

Em sendo uma partição, $D_i \cap D_j = \emptyset$, e

$$V(G) = \bigcup_{i=0}^{k} D_i.$$

Claramente $|D_0| = 1$, e $|D_1| \leq d$, já que d é o grau máximo do grafo. Para $i \geq 1$, vale que

$$|D_{i+1}| \leq (d-1)|D_i|,$$

pois todo vértice em D_{i+1} é vizinho de um vértice em D_i, e todo vértice em D_i tem no máximo $(d-1)$ vizinhos em D_{i+1}.

Exercício 93. Por que?

Continuando: por indução, para todo $1 \geq i < k$, valerá que

$$|D_{i+1}| \leq d(d-1)^i.$$

Portanto

$$|G| \leq 1 + d + \sum_{i=1}^{k-1} d(d-1)^i \leq 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^k - 1) < \frac{d}{d-2}(d-1)^k.$$

□

Comentário: grafos podem ser usados para modelar redes sociais. Por exemplo, o grafo de pessoas e relações de amizades no facebook. Dê uma olhada em

`https://research.fb.com/three-and-a-half-degrees-of-separation/`

Nesse artigo, eles falam que a distância média entre quaisquer duas pessoas no facebook tá na faixa de 4 a 5 - ou seja, com uma média de 3,5 apertos de mão, você conseguiria chegar a qualquer pessoa do mundo! Para calcular isso, eles usaram poderosas ferramentas estatísticas: o grafo é muito grande!!

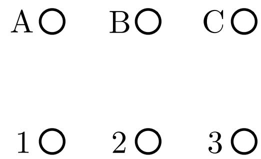
Mas, com o teorema acima, podemos argumentar que, supondo que ninguém tenha mais do que 1000 amigos no facebook (ou que a média esteja bem abaixo disso) então não existe qualquer pessoa do mundo(!!) que esteja a uma distância 3 de qualquer outra, pois:

$$\frac{1000}{998} 999^3 \approx 1 \text{ bilhão},$$

e há mais pessoas no facebook do que isso!

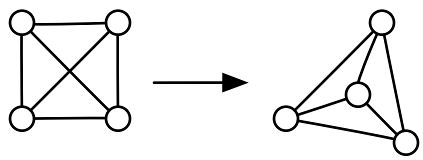
19 Planaridade e cores

Um quebra cabeça famoso pede para ligar cada um dos pontos A, B e C aos pontos 1, 2 e 3 sem que duas linhas se cruzem.

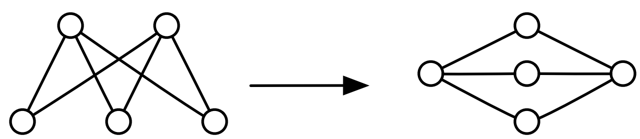


Você pode tentar o quanto quiser, mas não vai conseguir. A pergunta que queremos responder aqui é: por que?

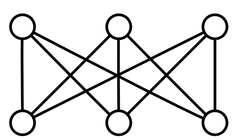
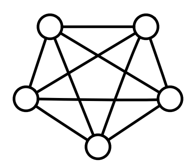
Um grafo é *planar* se ele puder ser desenhado no plano sem que duas arestas se cruzem. Por exemplo, o grafo completo K_4 é planar:



O grafo bipartido completo $K_{2,3}$ também é planar.



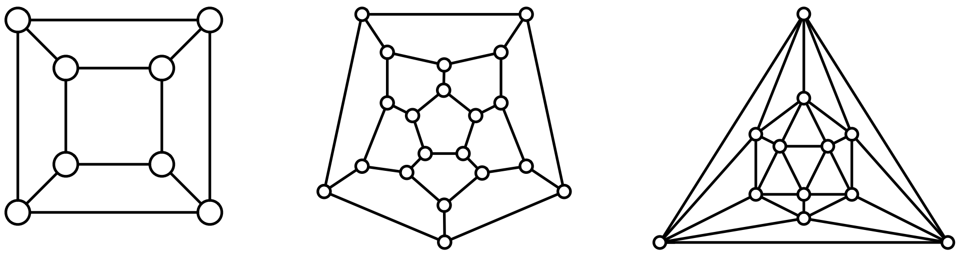
Mas o grafo K_5 não é, assim como grafo bipartido completo $K_{3,3}$. Você pode tentar o quanto quiser, e verá que não dá...

Exercício 94. Mostre que se removermos qualquer aresta de $K_{3,3}$ ou de K_5, então os grafos resultantes são planares.

- Ao se planejar um circuito eletrônico em uma placa, podemos representar o circuito como um grafo. Cada parte é um vértice, cada conexão entre eles uma aresta. É possível colocar um circuito em uma única placa se e somente se o grafo que representa o circuito é planar.

Ao desenharmos um grafo planar, cada região do plano separada pelas arestas é chamada de uma face, da mesma forma que fazemos com sólidos tridimensionais. Pense no cubo, icosaedro ou dodecaedro, que podemos representar no plano:



Exercício 95. Quantos vértices n, arestas m e faces f cada grafo acima possui? Calcule $n - e + f$.

Teorema 8. *Seja G um grafo planar conexo com n vértices, m arestas e f faces. Então*

$$n - m + f = 2.$$

Exercício 96. Um grafo regular de grau 3, planar, com 20 vértices, divide o plano em quantas faces?

Exercício 97. Mostre que se G é conexo, planar, tem n vértices e m arestas, com $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$.

Exercício 98. Use o exercício acima para mostrar que K_5 não é planar.

Exercício 99. Mostre que se G é conexo e planar, então G tem um vértice de grau menor ou igual a 5.

Exercício 100. Mostre que se G é conexo, planar, tem n vértices e m arestas, com $n \geq 3$, e não tem triângulos, então $m \leq 2n - 4$.

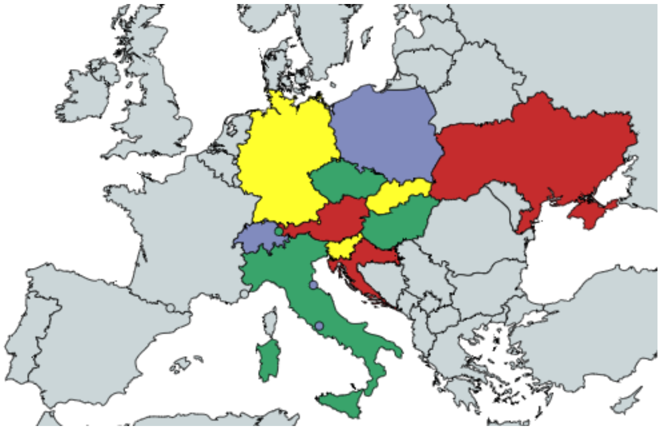
Exercício 101. Use o exercício acima para mostrar que $K_{3,3}$ não é planar.

Uma *coloração* de um grafo G é uma atribuição de cores aos vértices de G de modo que vértices vizinhos recebem cores distintas. O número $\chi(G)$ é o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de G.

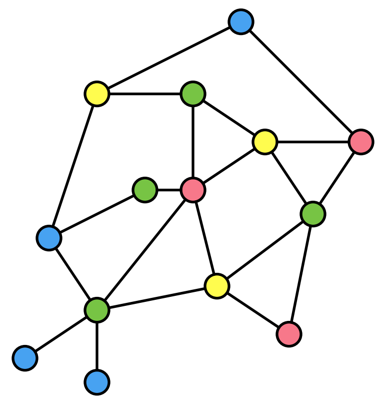
Exercício 102. Determine $\chi(K_n)$, $\chi(C_n)$, $\chi(K_{n,m})$.

Um famoso problema pergunta qual o menor número de cores necessárias para colorir os países de um mapa de modo que países que compartilham uma fronteira recebam cores diferentes...

`https://mapchart.net/europe.html`



Podemos transformar cada país em um vértice, e conectar dois vértices se e somente se os dois países compartilham uma fronteira. No caso acima, teremos:



Ou seja, todo mapa corresponde a um grafo planar. O menor número de cores necessárias para colorir o mapa corresponde a $\chi(G)$, onde G é o grafo planar correspondente.

Teorema 9. *Todo grafo planar pode ser colorido com* 4 *cores.*

Este resultado esteve aberto por mais 100 anos, e sua demonstração exigiu o auxílio de um computador para testar vários casos particulares. Só foi demonstrado em 1976 por Appel e Haken. O resultado para 5 cores já era conhecido desde o século XIX.

Exercício 103. Mostre que todo grafo planar pode ser colorido com 6 cores. Dica: use indução, e o fato que todo grafo planar possui um vértice com no máximo 5 vizinhos.

Exercício 104. Seja $\Delta(G)$ o maior grau de G. Ache um algoritmo que colore G com $\Delta(G)+1$ cores. Dica: ordene os vértices, as cores, e vá colorindo, sempre usando a menor cor possível. Explique por que isso usa no máximo $\Delta(G)+1$ cores. Dê exemplo de um grafo onde este algoritmo, dada uma ordenação ruim dos vértices, usa (muito) mais cores do que o necessário.

Exercício 105. Exiba um grafo em que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Exiba mais 4 exemplos. Agora ache um grafo G em que todos os vértices tem ao menos 10 vizinhos, mas $\chi(G) = 2$.

Exercício 106. Seja G um grafo planar conexo com ao menos 3 vértices, e sequência de graus $(d_1, d_2, ..., d_n)$. Mostre que

$$\sum_{d_i \leq 6} (6 - d_i) \geq \sum_{i=1}^{n} (6 - d_i) \geq 12.$$

Conclua que se $\delta(G) \geq 5$, então G tem ao menos 12 vértices de grau 5, e que se $\delta(G) \geq 4$, G tem ao menos 6 vértices de grau no máximo 5.

Exercício 107. Seja $\alpha(G)$ o tamanho do maior conjunto de vértices em G que não contém qualquer aresta entre eles. Seja $\omega(G)$ o tamanho do maior conjunto de vértices em G em que todos são vizinhos de todos. Mostre que:

(a) $\chi(G) \geq \omega(G)$.

(b) $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$.