# Lista 10

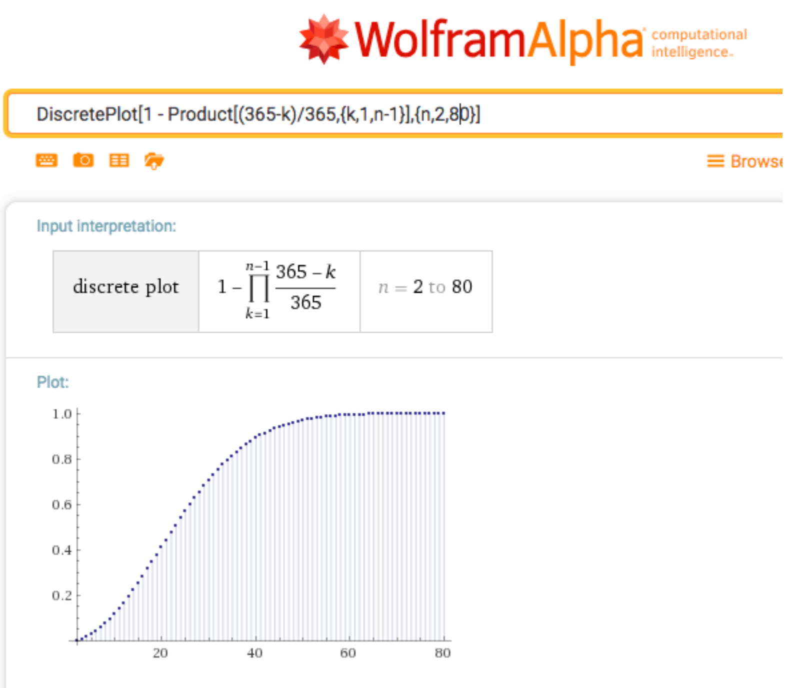
**Exercício 1.** Ao lançarmos uma moeda 4 vezes, qual a probabilidade de que haja mais caras do que coroas? E se soubermos que o primeiro lançamento deu cara, o que muda?

5/16 para a primeira pergunta, correspondente aos eventos AAAO, AAOA, AOAA, OAAA, AAAA, de um total de 16 possibilidades.. E 1/2 para a segunda, correspondente a AAAO, AAOA, AOAA, AAAA, de um total de 8 possibilidades.

**Exercício 2.** Numa sala com 10 pessoas, qual a probabilidade que pelo menos duas delas façam aniversário no mesmo dia do ano? E se forem 30 pessoas? Para $n$ pessoas, teremos

$$1 - \prod_{k=1}^{n-1} \frac{365-k}{365}.$$

Além de responder a estas perguntas, plote um gráfico em que no eixo $X$ tenhamos o número de pessoas e no eixo $Y$ a probabilidade, para $X$ de 0 a 100. Você pode usar o `http://www.wolframalpha.com/` ou qualquer software a sua escolha.




**Exercício 3.** Suponha que 1 em cada 10000 pessoas tenha uma doença rara. Há um teste que afirma corretamente que 99,9% das pessoas com a doença de fato a tem, mas que aponta que 0,02% sem a doença também a possuem.

(a) Qual a probabilidade de que uma pessoa que testou positivo de fato tenha a doença?

(b) Qual a probabilidade de que uma pessoa que testou negativo não tenha a doença?

Em sala foi feito um muito similar.

**Exercício 4.** Lembre-se do jogo discutido em sala. Lança-se uma moeda repetidas vezes. A cada CARA repetida, o jogador A ganha 2. A cada COROA, o jogador A paga 1. Qual a esperança desse jogo para A se lançarmos a moeda 4 vezes?

E 10? Será que você consegue escrever um código para responder esta pergunta? (basta gerar todas as sequências e contar os pontos...)

Se sim, e para 100, será que é possível usar o seu código?

Como resolver este problema analiticamente? (Dica, reduza o caso de $n$ lançamentos para o de $n-1$ lançamentos...)

Seja $e_{n-1}$ o valor da esperança do jogo para $n-1$ lançamentos. No jogo com $n$ lançamentos, há quatro possibilidades para os dois últimos lançamentos, e elas são igualmente igualmente prováveis. CC, CK, KC e KK. Na primeira o valor recebido no $n$-ésimo lançamento será 2. Nas segunda e quarta será $-1$, e na terceira será 0. Segue que

$$e_n = e_{n-1} + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}(-1),$$

ou seja, $e_n = e_{n-1}$ para todo $n$, e portanto o valor esperado deste jogo é constante para qualquer número de lançamentos. Como $e_1 = -1/2$, temos $e_n = -1/2$ para todo $n$.

**Exercício 5.** Se quiser praticar mais, olhe os exercícios das páginas 26-44 em `https://www.ime.usp.br/~fmachado/MAE221/LivroElcio.pdf`