Álgebra A

Folha 3 de exercícios

csaba@mat.ufmg.br

1. Seja $n = (a_k \cdots a_0)_{10}$ um número escrito na base 10. Demonstre as seguintes afirmações.

(1) $2 \mid n$ se e somente se $2 \mid a_0$;
(2) $3 \mid n$ se e somente se $3 \mid (a_k + \cdots + a_0)$;
(3) $4 \mid n$ se e somente se $4 \mid (a_1 a_0)_{10}$;
(4) $5 \mid n$ se e somente se $5 \mid a_0$;
(5) $7 \mid n$ se e somente se $7 \mid [(a_k \cdots a_2 a_1)_{10} - 2a_0]$;
(6) $8 \mid n$ se e somente se $8 \mid (a_2 a_1 a_0)_{10}$;
(7) $9 \mid n$ se e somente se $9 \mid (a_k + \cdots + a_0)$;
(8) $11 \mid n$ se e somente se $11 \mid ((-1)^k a_k + \cdots - a_1 + a_0)$.

2. Seja $b \geq 2$ e assuma que o número n está escrito como $(a_k \cdots a_0)_b$ na base b. Mostre que $(b-1) \mid n$ se e somente se $(b-1) \mid (a_k + \cdots + a_0)$.

3. Utilize o algoritmo de Euclides para calcular $d = \mathrm{mdc}(a, b)$ e inteiros $u,\ v$ tais que $ua + vb = d$, sendo

(1) $a = 232$, $b = 136$;
(2) $a = 187$, $b = 221$;
(3) $a = -25$, $b = 5$;
(4) $a = -39$, $b = 17$.

4. Mostre para todo $k \in \mathbb{Z}$ que $\mathrm{mdc}(4k+3, 5k+4) = 1$.

5. Seja F_n a sequência de Fibonacci definida como $F_0 = F_1 = 1$, e depois $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ para $n \geq 2$. Mostre, para $n \geq 0$, que $F_n \geq \varphi^{n-1}$ onde $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$.

6. Sejam a e b números com três algarismos na base decimal tal que $a > b$.

(1) No máximo, quantos passos o algoritmo de Euclídes vai precisar para terminar se for executado para os números a e b?
(2) Ache dois números a e b com três algarismos na base decimal tais que a computação de $\mathrm{mdc}(a, b)$ precisa do número maximal dos passos entre todos os números com três algarismos.