KU Leuven

Mechanica 2: Dynamica

Case studie

Team A2 - 4

Pieter Appeltans
Pieterjan Beerden
Brent De Winter
Joren Dhont

24 november 2014

1 Kinematica

1.1 Transformatiematrices

T_1 van x'y'z' (en dus ook van x"y"z") naar xyz:
$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

T_2 van x"'y"'z"' naar x"y"z":
$T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$

1.2 Vraag 1

Bereken de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\vec{\omega}_w$ en rotatieversnellingsvector $\vec{\alpha}_w$ van het wiel.
We bereken $\vec{\omega}_{tot}$ door alle verschillende rotaties om te zetten naar eerst het $x'y'z'$-assenstel en vervolgens naar het xyz-assenstel.

$$
\begin{aligned}
\vec{\omega}_w &= \vec{\omega}_g + \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_w \\
&= \omega_g * \vec{e}_{z'} + \omega_i * \vec{e}_{y''} + (-\omega_w) * \vec{e}_{x'''} \\
&= \omega_g * \vec{e}_{z'} + \omega_i * \vec{e}_{y'} + (-\omega_w) * (\cos\beta * \vec{e'}_x - \sin(\beta) * \vec{e'}_z) \\
&= \left\{ \begin{matrix} \Big(-\omega_w * \cos\beta \Big) * \vec{e}_{x'} \\ \Big(\omega_i \Big) * \vec{e}_{y'} \\ \Big(\omega_g - \omega_w \sin\beta \Big) * \vec{e}_{z'} \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{matrix} \Big(-\omega_w * \cos\beta \Big) * \vec{e}_x \\ \Big(-\omega_g * \sin\alpha + \omega_i * \cos\alpha - \omega_w \sin\alpha \sin\beta \Big) * \vec{e}_y \\ \Big(\omega_g * \cos(\alpha) + \omega_i * \sin(\alpha) + \omega_w * \cos(\alpha) * \sin(\beta) \Big) * \vec{e}_z \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Voor de berekening van $\vec{\alpha}_{tot}$ gebruiken we dezelfde werkwijze.

$$
\begin{aligned}
\vec{\alpha}_w &= \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_w}{dt} \\
&= \alpha_g * \vec{e}_{z'} + \omega_g \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} + \alpha_i \vec{e}_{y''} + \omega_i * \frac{d\vec{e}_{y''}}{dt} + \alpha_w * \vec{e}_{x'''} + (-\omega_w) \frac{d\vec{e}_{x'''}}{dt} \\
&= \left\{ \begin{matrix} \Big(-\omega_g \omega_i + \alpha_w \cos(\beta) + \omega_i \omega_w \sin\beta \Big) * \vec{e}_{x'} \\ \Big(\alpha_i - \omega_g \omega_w \cos(\beta) \Big) * \vec{e}_{y'} \\ \Big(\alpha_g - \alpha_w \sin\beta + \omega_i \omega_w \cos(\beta) \Big) * \vec{e}_{z'} \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{matrix} \Big(-\omega_g \omega_i + \alpha_w \cos\beta + \omega_i \omega_g \sin\beta \Big) * \vec{e}_x \\ \Big((-\alpha_g + \alpha_w \sin\beta - \omega_i \omega_w \cos\beta) \sin\alpha + (\alpha_i - \omega_g \omega_w \cos\beta) \cos\alpha \Big) * \vec{e}_y \\ \Big((\alpha_i - \omega_g \omega_w \cos\beta \sin\alpha + (\alpha_g - \alpha_w * \sin\beta + \omega_i \omega_w \cos\beta) \cos\alpha \Big) * \vec{e}_z \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Voor de transformaties van de verschillende eenheidsvectoren leidden we volgende formules af

$$\vec{e'''}_x = cos(\beta) * \vec{e'}_x - sin(\beta) * \vec{e'}_z$$

$$\vec{e'}_x = \vec{e}_x$$
$$\vec{e''}_y = \vec{e'}_y$$
$$\vec{e'}_y = \cos(\alpha) * \vec{e}_y + \sin(\alpha) * \vec{e}_z$$
$$\vec{e'}_z = -\sin\alpha * \vec{e}_y + \cos\alpha * \vec{e}_z$$
$$\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = \vec{0}$$
$$\omega_i * \frac{d\vec{e}_{y''}}{dt} = \vec{\omega_g} \times \vec{\omega_i} = -\omega_i\omega_g * \vec{e}_{x'} = -\omega_i\omega_g * \vec{e}_x$$
$$-\omega_w * \frac{d\vec{e}_{x'''}}{dt} = (\vec{\omega_i} + \vec{\omega_g}) \times \vec{\omega_w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & \omega_i & \omega_g \\ -\omega_w\cos\beta & 0 & \omega_w\sin\beta \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_i\omega_w\sin(\beta) * \vec{e}_{x'} \\ \omega_g\omega_w\cos(\beta) * \vec{e}_{y'} \\ \omega_i\omega_w\cos(\beta) * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix}$$

1.3 Vraag 2

We berekenen de ogenblikkelijke totaal snelheid $\vec{v}_c$ en de ogenblikkelijke versnelling $\vec{a}_c$ van het punt c.

$$\vec{r}_{A|C} \mapsto \begin{Bmatrix} \Big(l_1 - l_4\cos(\beta) - l_3\sin(\beta)\Big) * \vec{e}_{x'} \\ 0 * \vec{e}_{y'} \\ \Big(l_2 - l_3 * \cos(\beta) + l_4 * \sin(\beta)\Big) * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$\vec{r}_{B|C} \mapsto \begin{Bmatrix} \Big(-l_3 * \sin(\beta) - l_4 * \cos(\beta)\Big) * \vec{e}_{x'} \\ 0 * \vec{e}_{y'} \\ \Big(-l_3 * \cos(\beta) + l_4 * \sin(\beta)\Big) * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

$$\vec{r}_{C|C} = \vec{0} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_g \times \vec{r}_{A|C(t.o.vx'y'z')} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & 0 & \omega_g \\ l_1 - l_3 * \sin\beta - l_4 * \cos\beta & 0 & l_2 - l_3 * \cos\beta + l_4 * \cos\beta \end{vmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_{x'} \\ \Big(\omega_g * (l_1 - l_4 * \cos\beta - l_3 * \sin\beta)\Big) * \vec{e}_{y'} \\ 0 * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

Deze matrix transformeren naar het wereldassenstel:

$$T_1 * \vec{\omega}_g \times \vec{r}_{A|C(t.o.vx'y'z')} \tag{7}$$

$$\begin{Bmatrix} 0\vec{e}_x \\ \Big(l_1 - l_3 * \sin(\beta) - l_4 * \cos(\beta)\Big) * \omega_g * \cos(\alpha)\vec{e}_y \\ \Big(l_1 - l_3 * \sin(\beta) - l_4 * \cos(\beta)\Big) * \omega_g * \sin(\beta)\vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{B|C(t.o.vx'y'z')} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & \omega_i & 0 \\ -l_3 * \sin(\beta) - l_4 * \cos(\beta) & 0 & -l_3 * \sin(\beta) + l_4 * \sin(\beta) \end{vmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \omega_i * \Big(-l_3 * \sin(\beta) + l_4 * \sin(\beta)\Big) * \vec{e}_x \\ 0 * \vec{e}_y \\ \omega_i * \Big(l_3 * \sin(\beta) + l_4 * \cos(\beta)\Big)\vec{e}_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

Deze matrix transformeren naar het wereldassenstel:

$$T_1 * \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{B|C(t.o.vx'y'z')} \tag{10}$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_i * \Big(- l_3 * \cos(\beta) + l_4 * \sin(\beta)\Big)\vec{e}_x \\ \Big(- l_3 * \sin(\beta) - l_4 * \cos(\beta)\Big) * \sin(\alpha) * \omega_i * \vec{e}_y \\ \Big(l_3 * \sin(\beta) + l_4 * \cos(\beta)\Big) * \cos(\alpha) * \omega_i * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$T_1 * \vec{V}_v = \begin{Bmatrix} 0\vec{e}_x \\ \cos(\alpha) * \vec{V}_v * \vec{e}_y \\ \sin(\alpha) * \vec{V}_v * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{12}$$

$$\vec{V}_C = \vec{\omega}_g \times \vec{r}_{A|C} + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{B|C} + T_1 * \vec{V}_v \tag{13}$$

Nu berekenen we $\vec{a}_c$ aan de hand van som van rotaties

$$\vec{a}_c = \vec{a}_v + \vec{\alpha}_g \times \vec{r}_{a|c} + \vec{\alpha}_i \times \vec{r}_{b|c} + \vec{\omega}_g \times (\vec{v}_C - \vec{v}_A) + \vec{\omega}_i \times (\vec{v}_C - \vec{v}_B) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_g \times \vec{r}_{A|C(t.o.vx'y'z')} &= \begin{Vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & 0 & \alpha_g \\ \Big(l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta)\Big) & 0 & \Big(l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)\Big) \end{Vmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_{x'} \\ \alpha_g \Big(l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta)\Big) * \vec{e}_{y'} \\ 0 * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

Omzetten naar het xyz - assenstel via T_1

$$T_1 * \vec{\alpha}_g \times \vec{r}_{A|C(t.o.vx'y'z')} = \begin{Bmatrix} 0\vec{e}_x \\ \cos(\alpha) * \alpha_g \Big(l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta)\Big) * \vec{e}_y \\ \sin(\alpha) * \alpha_g \Big(l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta)\Big) * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_i \times \vec{r}_{B|C(t.o.vx'y'z')} &= \begin{Vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & \alpha_i & 0 \\ \Big(- l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta)\Big) & 0 & \Big(- l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)\Big) \end{Vmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \alpha_i \Big(- l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)\Big) * \vec{e}_{x'} \\ 0 * \vec{e}_{y'} \\ \alpha_i \Big(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)\Big) * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

Omzetten naar het xyz - assenstel via T_1

$$T_1 * \vec{\alpha}_i \times \vec{r}_{B|C(t.o.vx'y'z')} = \begin{Bmatrix} \alpha_i \Big(- l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)\Big) * \vec{e}_x \\ - \sin(\alpha) * \alpha_i \Big(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)\Big) * \vec{e}_y \\ \cos(\alpha) * \alpha_i \Big(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)\Big) * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{18}$$

$$\vec{V}_A = T_1 * \begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_x \\ \vec{V}_v * \vec{e}_y \\ 0 * \vec{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_x \\ V_v * \cos(\alpha) * \vec{e}_y \\ V_v * \sin(\alpha) * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{19}$$

$$\vec{V}_C - \vec{V}_A = \begin{Bmatrix} \omega_i * \Big(- l_3\cos(\beta) + l_4\sin(\beta)\Big)\vec{e}_x \\ \Big(\cos(\alpha) * \omega_g\Big(l_1 - l_3\sin(\beta) - l_4\cos(\beta)\Big) - \sin(\alpha) * \omega_i\Big(l_3\sin(\beta) + l_4\cos(\beta)\Big)\Big) * \vec{e}_y \\ \Big(\sin(\alpha) * \omega_g\Big(l_1 - l_3\sin(\beta) - l_4\cos(\beta)\Big) + \cos(\alpha) * \omega_i\Big(l_3\sin(\beta) + l_4\cos(\beta)\Big)\Big) * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{20}$$

$$\vec{V}_B = T_1 * \Big(\begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_x \\ \vec{V}_v * \vec{e}_y \\ 0 * \vec{e}_z \end{Bmatrix} + \vec{\omega}_g \times \vec{r}_{A|B(t.o.vx'y'z')}\Big) \tag{21}$$

$$\vec{\omega}_g \times \vec{r}_{A|B(t.o.vx'y'z')} = \begin{Vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & 0 & \omega_g \\ l_1 & 0 & l_2 \end{Vmatrix} \tag{22}$$

$$\vec{V}_B = T_1 * \begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_x \\ \cos(\alpha)\Big(\vec{V}_v + l_1 * \omega_g\Big) * \vec{e}_y \\ \sin(\alpha)\Big(\vec{V}_v + l_1 * \omega_g\Big) * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{23}$$

$$\vec{a}_v = T_1 * \begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_x \\ a_v * \vec{e}_y \\ 0 * \vec{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_x \\ a_v * \cos(\alpha) * \vec{e}_y \\ a_v * \sin(\alpha) * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{24}$$

De totale versnelling $\vec{a}_c$ is dan:

$$\begin{Bmatrix} \Big(\alpha_i * \Big(- l_3\cos(\beta) + l_4\sin(\beta)\Big) - \omega_g^2 * \Big(l_1 - l_3\sin(\beta) - l_4\cos(\beta)\Big) + \omega_i^2 * \Big(l_3\sin(\beta) + l_4\cos(\beta)\Big)\Big) * \vec{e}_x \\ \Big(\alpha_g * \cos(\alpha) * \Big(l_1 - l_3\sin(\beta) - l_4\cos(\beta)\Big) - \alpha_i * \sin(\alpha) * \Big(l_3\sin(\beta) + l_4\cos(\beta)\Big) + \vec{a}_v * \cos(\alpha)\Big) * \vec{e}_y \\ \Big(\alpha_g * \sin(\alpha) * \Big(l_1 - l_3\sin(\beta) - l_4\cos(\beta)\Big) + \alpha_i * \cos(\alpha) * \Big(l_3\sin(\beta) + l_4\cos(\beta)\Big) + \vec{a}_v * \sin(\alpha)\Big) * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{25}$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_x \\ \Big(\omega_g * \omega_i * \cos(\alpha) * \Big(- l_3\cos(\beta) + l_4\sin(\beta)\Big) + \omega_i^2 * \sin(\alpha) * \Big(- l_3\cos(\beta) + l_4\sin(\beta)\Big)\Big) * \vec{e}_y \\ \Big(- \omega_g * \omega_i * \sin(\alpha) * \Big(- l_3\cos(\beta) + l_4\sin(\beta)\Big) - \omega_i^2 * \cos(\alpha) * \Big(- l_3\cos(\beta) + l_4\sin(\beta)\Big)\Big) * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{26}$$

1.4 Vraag 3

Wat is de bijdrage van de coriolisversnelling in deze versnelling ac als je het x"y"z"-assenstelsel als hulpassenstelsel gebruikt om de beweging te beschrijven?
De berekening van v_{rel} verloopt analoog als deze in vraag 4. Maar in plaats van $r_{d|b}$ gebruiken we nu $r_{c|b}$. met $\vec{\omega}_{rel} = \vec{\omega}_i$ en $\vec{r}_{c|b} = (-\sin\beta l_3 - \cos\beta l_4)\vec{e}_{x''} + (-\cos\beta l_3 + \sin\beta l_4)\vec{e}_{z''}$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{\omega}_{rel} \times \vec{r}_{c|b} \quad = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x''} & \vec{e}_{y''} & \vec{e}_{z''} \\ 0 & \omega_i & 0 \\ -\sin\beta l_3 - \cos\beta l_4 & 0 & -\cos\beta l_3 + \sin\beta l_4 \end{vmatrix} \tag{27}$$

$$
\begin{aligned}
Coriolisversnelling: 2*(\vec{v}_{rel}\times\vec{\omega}) &= -2*(\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel})\\
&= 2*\begin{vmatrix} \vec{e}_{x''} & \vec{e}_{y''} & \vec{e}_{z''}\\ 0 & 0 & \omega_g \\ \omega_i(l_4\sin\beta - l_3\cos\beta) & 0 & \omega_i l_4\cos\beta + l_3\sin\beta) \end{vmatrix}\\
&= \begin{Bmatrix} 0*\vec{e}_{x'}\\ \Big(2\omega_g\omega_i(l_4\sin\beta - l_3\cos\beta)\Big)*\vec{e}_{y'}\\ 0*\vec{e}_{z'} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

1.5 Vraag 4

Bereken de ogenblikkelijke snelheid $\vec{v}_d$ en de ogenblikkelijke versnelling $\vec{a}_d$ van het punt D.
Positie van D tov B uitgedrukt in het x"y"z"- assenstel

$$
\vec{r}_{d|b} \mapsto \begin{Bmatrix} \Big(-\frac{1}{4}l_4\cos(\beta) - \frac{3}{4}l_3\sin(\beta)\Big)*\vec{e}_{x''}\\ 0*\vec{e}_{y''}\\ \Big(\frac{1}{4}l_4\sin(\beta) - \frac{3}{4}l_3\cos(\beta)\Big)*\vec{e}_{z''} \end{Bmatrix}
\tag{29}
$$

We berekennen $\vec{v}_d$ met mebehulp van samengestelde beweging ten opzichte van het $x''y''z''$.

$$
\vec{v}_d = \vec{v}_b + \vec{\omega}_g \times \vec{r}_{d|b} + \vec{v}_{rel}
\tag{30}
$$

We berekenen eerst de snelheid van de oorsprong van het $x''y''z''$-assenstel (punt B)

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_b &= \vec{v}_a + \vec{\omega}\times\vec{r}_{b|a} + \vec{v}_{rel}\\
&= v_v\vec{e}_{y''} + \vec{0} + \vec{\omega}_g \times *(l)*\vec{e}_{x'}\\
&= (v_v + \omega_g * l_1)*\vec{e}_{y''}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\omega}_g \times \vec{r}_{d|b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_{x''} & \vec{e}_{y''} & \vec{e}_{z''}\\ 0 & 0 & \omega_g\\ \frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta & 0 & \frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta \end{vmatrix}\\
&= \begin{Bmatrix} 0*\vec{e}_{x'}\\ \Big(\omega_g(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta)\Big)*\vec{e}_{y'}\\ 0*\vec{e}_{z'} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Tot slot berekenen we de snelheid van het punt D gezien door een waarnemer die meebeweegt met het bewegend $x''y''z''$-assenstel.

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{rel} &= \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{d|b}\\
&= \begin{vmatrix} \vec{e}_{x''} & \vec{e}_{y''} & \vec{e}_{z''}\\ 0 & \omega_i & 0\\ \frac{-1}{4}*l_4*\cos\beta - \frac{3}{4}*l_3*\sin\beta & 0 & \frac{1}{4}*l_4*\sin\beta - \frac{3}{4}*l_3*\cos\beta \end{vmatrix}\\
&= \begin{Bmatrix} \Big(\omega_i*(\frac{1}{4}*l_4*\sin\beta - \frac{3}{4}*l_3*\cos\beta)\Big)*\vec{e}_{x''}\\ 0*\vec{e}_{y''}\\ \Big(-\omega_i*(\frac{-1}{4}*l_4*\cos\beta - \frac{3}{4}*l_3*\sin\beta)\Big)*\vec{e}_{z''} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Als we 31, 32 en 30 invullen in 30 vinden.

$$\vec{v}_d = \begin{Bmatrix} \Big(\omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_{x''} \\ \Big(v_v + \omega_g l_1 + \omega_g(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta)\Big) * \vec{e}_{y''} \\ \Big(-\omega_i(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta)\Big) * \vec{e}_{z''} \end{Bmatrix} \tag{34}$$

Door dit te transformeren(door te vermenigvuldigen met T_1) naar het xyz-assenstel vinden we:

$$\vec{v}_d = \begin{Bmatrix} \Big(\omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_x \\ \Big(\big(v_v + \omega_g l_1 + \omega_g(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta)\big)\cos\alpha + \sin\alpha\omega_i\big(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta\big)\Big) * \vec{e}_y \\ \Big(\big(v_v + \omega_g l_1 + \omega_g(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta)\big)\sin\alpha + \cos\alpha\omega_i\big(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta\big)\Big) * \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{35}$$

Nu berekennen we $\vec{a}_d$

$$\vec{a}_d = \vec{a}_b + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{d|b} + \omega_g \times (\omega_g \times \vec{r}_{d|b}) + \vec{a}_{rel} + 2 * (\omega_g \times \vec{v}_r) \tag{36}$$

We bereken de versnelling van het punt B door middel van samengestelde beweging door een assenstel dat meebeweegt met de gierbeweging en vast aan het punt A:

$$\begin{aligned} \vec{a}_b &= \vec{a}_a + \vec{\alpha}_g \times \vec{r}_{b|a} + \vec{\omega}_g \times (\vec{\omega}_g \times \vec{r}_{b|a}) + \vec{a}_{rel} + 2(\omega \times \vec{v}_{rel}) \\ &= a_v * \vec{e}_{y'} + (\alpha_g * \vec{e}_{z'} + \omega_g * \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}) \times l_1\vec{e}_{x'} + \omega_g * \vec{e}_{z'} \times (\omega_g * \vec{e}_{z'} \times l_1\vec{e}_{x'}) \\ &= \begin{Bmatrix} -\omega_g^2 l_1 * \vec{e}_{x'} \\ (a_v + \alpha_g * l_1) * \vec{e}_{y'} \\ 0 * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_g \times \vec{r}_{d|b} &= (\alpha_g * \vec{e}_{z'}) \times \begin{Bmatrix} \Big(-\frac{1}{4}l_4\cos(\beta) - \frac{3}{4}l_3\sin(\beta)\Big) * \vec{e}_{x'} \\ 0 * \vec{e}_{y'} \\ \Big(\frac{1}{4}l_4\sin(\beta) - \frac{3}{4}l_3\cos(\beta)\Big) * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 * \vec{e}_{x'} \\ \alpha_g(-\frac{1}{4}l_4\cos(\beta) - \frac{3}{4}l_3\sin(\beta)) * \vec{e}_{y'} \\ 0 * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_g \times (\vec{\omega}_g \times \vec{r}_{d|b}) &= \omega_g\vec{e}_{z'} \times \Big(\omega_g(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta)\vec{e}_{y'}\Big) \\ &= \begin{Bmatrix} \Big(\omega_g^2(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta)\Big) * \vec{e}_{x'} \\ 0 * \vec{e}_{y'} \\ 0 * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{rel} &= \vec{\alpha}_i \times \vec{r}_{d|b} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{d|b}) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ -\omega_g\omega_i & \alpha_i & 0 \\ \frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4} * l_3 * \sin\beta & 0 & \frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3 * \cos\beta \end{vmatrix} + \\
&\begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & \omega_i & 0 \\ \omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta) & 0 & \omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta) \end{vmatrix} \\
&= \left\{ \begin{matrix} \Big(\alpha_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta) + \omega_i^2(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_{x'} \\ \Big(\omega_g\omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_{y'} \\ \Big(\alpha_i(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta) - \omega_i^2(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_{z'} \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{40}$$

En tot slot de complementaire versnelling:

$$\begin{aligned}
2(\vec{\omega}_g \times \vec{v}_{rel}) &= 2 * \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & 0 & \omega_g \\ \omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta) & 0 & -\omega_i(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta) \end{vmatrix} \\
&= \left\{ \begin{matrix} 0 * \vec{e}_{x'} \\ \Big(2\omega_g\omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_{y'} \\ 0 * \vec{e}_{z'} \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{matrix} \Big(- \omega_g^2 l_1 + \omega_g^2(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3 sin\beta) + \alpha_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta) \\ + \omega_i^2(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_{x'} \\ \Big(a_v + \alpha_g l_1 + \alpha_g(-\frac{1}{4}l_4\cos(\beta) - \frac{3}{4}l_3 * \sin(\beta)) + 3\omega_g\omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_{y'} \\ \Big(\alpha_i(\frac{1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta) - \omega_i^2(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_{z'} \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{matrix} \Big(- \omega_g^2 l_1 + \omega_g^2 * (\frac{-1}{4} * l_4 * \cos\beta - \frac{3}{4} * l_3 * \sin\beta) + \alpha_i(\frac{1}{4} * l_4 * \sin\beta - \frac{3}{4} * l_3 * \cos\beta) \\ + \omega_i^2 * (\frac{1}{4} * l_4 * \sin\beta - \frac{3}{4} * l_3 * \cos\beta)\Big) * \vec{e}_x \\ \Bigg(\Big(a_v + \alpha_g l_1 + \alpha_g * (-\frac{1}{4}l_4\cos(\beta) - \frac{3}{4}l_3 * \sin(\beta)) + 3\omega_g\omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big)\cos\alpha \\ + \Big(\alpha_i * (\frac{1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta) - \omega_i^2(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * -\sin\alpha\Bigg) * \vec{e}_y \\ \Bigg(\Big(a_v + \alpha_g l_1 + \alpha_g * (-\frac{1}{4}l_4\cos(\beta) - \frac{3}{4}l_3\sin(\beta)) + 3\omega_g\omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big)\sin\alpha \\ + \Big(\alpha_i(\frac{1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta) - \omega_i^2(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big)\cos\alpha\Bigg) * \vec{e}_z \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{42}$$

2 Dynamica

2.1 Vraag 1

Bereken de ogenblikkelijke impulsvector en de verandering van de impulsvector van het landingsgestel en die van het wiel.

$$\vec{p}_d = m * \vec{v}_d$$

$$= m * \left\{ \begin{matrix} \Big(\omega_i(\frac{1}{4}l_4 \sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * \vec{e}_x \\ \Big(\big(v_v + \omega_g l_1 + \omega_g(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta)\big)\cos\alpha + \sin\alpha\omega_i\big(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta\big)\Big) * \vec{e}_y \\ \Big(\big(v_v + \omega_g l_1 + \omega_g(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta)\big)\sin\alpha + \cos\alpha\omega_i\big(\frac{-1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta\big)\Big) * \vec{e}_z \end{matrix} \right\} \tag{43}$$

$$(\frac{d\vec{p}_d}{dt}) = m * \vec{a}_d$$

$$= m * \left\{ \begin{matrix} \Big(-\omega_g^2 l_1 + \omega_g^2 * (\frac{-1}{4} * l_4 * \cos\beta - \frac{3}{4} * l_3 * \sin\beta) + \alpha_i(\frac{1}{4} * l_4 * \sin\beta - \frac{3}{4} * l_3 * \cos\beta) \\ +\omega_i^2 * (\frac{1}{4} * l_4 * \sin\beta - \frac{3}{4} * l_3 * \cos\beta)\Big) * \vec{e}_x \\ \Bigg(\Big(a_v + \alpha_g l_1 + \alpha_g * (-\frac{1}{4}l_4\cos(\beta) - \frac{3}{4}l_3 * \sin(\beta)) + 3\omega_g\omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big)\cos\alpha \\ +\Big(\alpha_i * (\frac{1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta) - \omega_i^2(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big) * -\sin\alpha\Bigg) * \vec{e}_y \\ \Bigg(\Big(a_v + \alpha_g l_1 + \alpha_g * (-\frac{1}{4}l_4\cos(\beta) - \frac{3}{4}l_3\sin(\beta)) + 3\omega_g\omega_i(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big)\sin\alpha \\ +\Big(\alpha_i(\frac{1}{4}l_4\cos\beta - \frac{3}{4}l_3\sin\beta) - \omega_i^2(\frac{1}{4}l_4\sin\beta - \frac{3}{4}l_3\cos\beta)\Big)\cos\alpha\Bigg) * \vec{e}_z \end{matrix} \right\} \tag{44}$$

2.2 Vraag 2

Bereken de ogenblikkelijke impulsmomentvector en de verandering van de impulsmometvector van het landingsgestel en die van het wiel rond hun respectievelijke massacentra.

$$\vec{L}_0 = I(t)\vec{\omega} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\omega}_w + \vec{\omega}_g + \vec{\omega}_i \\ &= \left\{ \begin{matrix} (-\vec{\omega}_w - \vec{\omega}_g sin(\beta))\vec{e}_{x''''} \\ \vec{\omega}_i * \vec{e}_{y''''} \\ \vec{\omega}_g cos\beta(\beta)\vec{e}_{z''''} \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{matrix} I_{\omega,x'''',x''''}(-\vec{\omega}_w - \vec{\omega}_g sin(\beta))\vec{e}_{x''''} \\ I_{\omega,y'''',y''''}\vec{\omega}_i * \vec{e}_{y''''} \\ I_{\omega,z'''',z''''}\vec{\omega}_g cos\beta(\beta)\vec{e}_{z''''} \end{matrix} \right\} \end{aligned} \tag{46}$$

$$\Big(\frac{d\vec{L}_c}{dt}\Big) = \Big(\frac{d\vec{L}_C}{dt}\Big)_{rel} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_c \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \times \vec{L}_c &= \begin{vmatrix} \vec{e}_{x''''} & \vec{e}_{y''''} & \vec{e}_{z''''} \\ -\omega_w - \omega_g\sin\beta & \omega_i & \omega_g\cos\beta \\ L_{o,x''''} & L_{o,y''''} & L_{o,z''''} \end{vmatrix} \\ &= \left\{ \begin{matrix} \omega_i L_{o,z''''} - \omega_g\cos\beta L_{o,y''''} \\ \omega_g\cos\beta L_{o,x''''} + (\omega_w + \omega_g)L_{o,z''''} \\ -(\omega_w + \omega_g\sin(\beta))L_{o,y''''} + \omega_i L_{o,x''''} \end{matrix} \right\} \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\vec{L}_c}{dt}\Big)_{rel} &= I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \\ &= I\left\{ \begin{matrix} \Big(\alpha_w - \alpha_g\sin\beta + (-\omega_i\omega_g)\cos\beta\Big)\vec{e}_{x''''} \\ \Big(\alpha_i + \omega_g\omega_w\cos\beta\Big)\vec{e}_{y''''} \\ \Big(\alpha_g\cos\beta - \omega_i\omega_g\sin\beta - \omega_i\omega_w\Big)\vec{e}_{z''''} \end{matrix} \right\} \end{aligned} \tag{49}$$

want

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \alpha_g \vec{e}_{z'} + \alpha_i \vec{e}_{y''} + (-\omega_i\omega_g)\vec{e}_{x''} + \alpha_w \vec{e}_{x'''} + \left\{\begin{matrix} -\sin\beta \vec{e}_{x''''}\vec{e}_{x''''} \\ \cos\beta\omega_g\omega_w\vec{e}_{y''''} \\ -\cos\beta\omega_i\omega_w\vec{e}_{z''''} \end{matrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{matrix} \alpha_w - \alpha_g + (-\omega_i\omega_g)\cos\beta\vec{e}_{x''''} \\ \alpha_i + \cos\beta\omega_g\omega_w\vec{e}_{y''''} \\ \alpha_g\cos\beta + (-\omega_i\omega_g)\sin\beta - (\omega_i\omega_g)\vec{e}_{z''''} \end{matrix}\right\}\end{aligned} \tag{50}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_c}{dt}\right) = \left\{\begin{matrix} \omega_i\omega_g\cos\beta(I_{z'''',z''''} - I_{y'''',y''''}) \\ \omega_g\cos\beta(\omega_w + \omega_g\sin\beta)I_{z'''',z''''} - I_{x'''',x''''} \\ (\omega_i + \omega_g\sin\beta)\omega_i I_{x'''',x''''} - I_{y'''',y''''} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} I_{x'''',x''''}(\alpha_w - \alpha_g\sin\beta + (-\omega_i\omega_g))\cos\beta \\ I_{y'''',y''''}(\alpha_i + \omega_g\omega_w\cos\beta) \\ I_{z'''',z''''}(\alpha_g\cos\beta - \omega_i\omega_g\sin\beta - \omega_i\omega_w) \end{matrix}\right\} \tag{51}$$

2.3 Vraag 3

Bereken de kracht $\vec{F}_B$ uitgeoefent door het landingsgestel op het aanhechtingspunt met de vleugel. **Hier moet nog een vrijlichaamdiagram komen**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_W + \vec{G} \tag{52}$$

Voor het wiel geldt dan:

$$\frac{d\vec{p}_W}{dt} = \vec{G}_W - \vec{F}_W \tag{53}$$

$$\vec{F}_W = \vec{G}_W - \frac{d\vec{p}_W}{dt} \tag{54}$$

Voor het landingsgestel in totaal geldt dan:

$$\frac{d\vec{p}_D}{dt} = \vec{F}_B + \vec{F}_W + \vec{G} \tag{55}$$

$$\vec{F}_B = \frac{d\vec{p}_D}{dt} + \frac{d\vec{p}_W}{dt} - \vec{G}_D - \vec{G}_W \tag{56}$$

2.4 Vraag 4

Bereken de moment $\vec{M}_B$ uitgeoefent door het landingsgestel op het aanhechtingspunt met de vleugel.

$$\vec{M}_B = \frac{d\vec{L}_D}{dt} + \vec{r}_{B|D} \times m_{landingsgestel}\vec{a}_D \tag{57}$$

$$\vec{r}_{B|D} = T_2 * T1 * \vec{r''}_{B|D} = \left\{\begin{matrix} \Big(\cos\beta\big(\frac{3}{4}l_3\sin(\beta) - \frac{1}{4}l_4\cos(\beta)\big) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\big(-\frac{3}{4}l_3\cos(\beta) + \frac{1}{4}l_4\sin(\beta)\big)\Big) * \vec{e}_{x''} \\ \Big(-\sin\alpha\big(-\frac{3}{4}l_3\sin(\beta) + \frac{1}{4}l_4\cos(\beta)\big)\Big) * \vec{e}_{y''} \\ \Big(\sin\beta\big(-\frac{3}{4}l_3\sin(\beta) + \frac{1}{4}l_4\cos(\beta)\big) + \cos\alpha\cos\beta\big(-\frac{3}{4}l_3\sin(\beta) + \frac{1}{4}l_4\cos(\beta)\big)\Big) * \vec{e}_{z''} \end{matrix}\right\} \tag{58}$$

Hier moeten dan nog enkele maple berekeningen ingevoerd worden.

2.5 Vraag 5

Het aandrijfmoment dat de actuator in het punt B moet leveren om het landingsgestel in te klappen.

$$\vec{M}_B = \frac{d\vec{L}_B}{dt} + \vec{r}_{B|C} \times m_{wiel}\vec{a}_C + \frac{d\vec{L}_wiel}{dt} \tag{59}$$

$$\vec{r}_{B|C} = T_2 * T_1 * \vec{r''}_{B|C} = \begin{Bmatrix} \Big(\cos\beta\big(l_3\sin(\beta) - l_4\cos(\beta)\big) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\big(-l_3\cos(\beta) + l_4\sin(\beta)\big)\Big) * \vec{e}_{x''} \\ -\sin\alpha\big(-l_3\cos(\beta) + l_4\sin(\beta)\big) * \vec{e}_{y''} \\ \Big(\sin\beta\big(-l_3\sin(\beta) + l_4\cos(\beta)\big) + \cos\alpha\cos\beta\big(-l_3\cos(\beta) + l_4\sin(\beta)\big)\Big) * \vec{e}_{z''} \end{Bmatrix} \tag{60}$$

$$\vec{r}_{B|C} \times m_{wiel}\vec{a}_C \tag{61}$$

Hier moeten nog enkele maple berekeningen volgen