KU Leuven

Mechanica 2: Dynamica

Case studie

# Team A2 - 4

Pieter Appeltans
Pieterjan Beerden
Brent De Winter
Joren Dhont

24 november 2014

# 1 Kinematica

## 1.1 Transformatiematrices

$T_1$ van x'y'z' (en dus ook van x"y"z") naar xyz:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$T_2$ van x"'y"'z"' naar x"y"z":

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

## 1.2 Vraag 1

**Bereken de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\vec{\omega}_w$ en rotatieversnellingsvector $\vec{\alpha}_w$ van het wiel.**

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_w &= \vec{\omega}_g + \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_w \\
&= \omega_g * \vec{e}_{z'} + \omega_i * \vec{e}_{y''} + (-\omega_w) * \vec{e}_{x'''} \\
&= \omega_g * \vec{e}_{z'} + \omega_i * \vec{e}_{y'} + (-\omega_w) * (\cos(\beta) * \vec{e'}_x - \sin(\beta) * \vec{e'}_z) \\
&= \begin{Bmatrix} \Big( -\omega_w * \cos(\beta) \Big) * \vec{e}_{x'} \\ \Big( \omega_i \Big) * \vec{e}_{y'} \\ \Big( \omega_g - \omega_w * \sin(\beta) \Big) * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} -\omega_w * \cos(\beta) \\ -\omega_g * \sin(\alpha) + \omega_i * \cos(\alpha) - \omega_w * \sin(\alpha) * \sin(\beta) \\ \omega_g * \cos(\alpha) + \omega_i * \sin(\alpha) + \omega_w * \cos(\alpha) * \sin(\beta) \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}_w &= \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_w}{dt} \\
&= \alpha_g * \vec{e}_{z'} + \omega_g * \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} + \alpha_i * \vec{e}_{y''} + \omega_i * \frac{d\vec{e}_{y''}}{dt} + \alpha_w * \vec{e}_{x'''} + (-\omega_w) * \frac{d\vec{e}_{x'''}}{dt} \\
&= \begin{Bmatrix} [-\omega_g * \omega_i + \alpha_w * \cos(\beta) + \omega_i * \omega_w * \sin(\beta)]\vec{e}_{x'} \\ [\alpha_i - \omega_g * \omega_w * \cos(\beta)]\vec{e}_{y'} \\ [\alpha_g - \alpha_w * \sin(\beta) + \omega_i * \omega_w * \cos(\beta)]\vec{e}_{z'} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} [-\omega_g * \omega_i + \alpha_w * \cos(\beta) + \omega_i * \omega_g * \sin(\beta)] * \vec{e}_x \\ [(-\alpha_g + \alpha_w * \sin(\beta) - \omega_i * \omega_w * \cos(\beta)) * \sin(\alpha) + (\alpha_i - \omega_g * \omega_w * \cos(\beta)) * \cos(\alpha)] * \vec{e}_y \\ [(\alpha_i - \omega_g * \omega_w * \cos(\beta) * \sin(\alpha) + (\alpha_g - \alpha_w * \sin(\beta) + \omega_i * \omega_w * \cos(\beta)) * \cos(\alpha)] * \vec{e}_z \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2}$$

met

$\vec{e'''}_x = cos(\beta) * \vec{e'}_x - sin(\beta) * \vec{e'}_z$

$\vec{e'}_x = \vec{e}_x$

$\vec{e''}_y = \vec{e'}_y$

$\vec{e'}_y = \cos(\alpha) * \vec{e}_y + \sin(\alpha) * \vec{e}_z$

$\vec{e'}_z = -\sin(\alpha) * \vec{e}_y + \cos(\alpha) * \vec{e}_z$

$\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = \vec{0}$

$\omega_i * \frac{d\vec{e}_{y''}}{dt} = \vec{\omega_g} \times \vec{\omega_i} = -\omega_i * \omega_g * \vec{e}_{x'} = -\omega_i * \omega_g * \vec{e}_x$

$$-\omega_w * \frac{d\vec{e}_{x'''}}{dt} = (\vec{\omega_i} + \vec{\omega_g}) \times \vec{\omega_w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & \omega_i & \omega_g \\ -\omega_w * \cos(\beta) & 0 & \omega_w * \sin(\beta) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_i * \omega_w * \sin(\beta) * \vec{e}_{x'} \\ \omega_g * \omega_w * \cos(\beta) * \vec{e}_{y'} \\ \omega_i * \omega_w * \cos(\beta) * \vec{e}_{z'} \end{Bmatrix}$$

### 1.3 Vraag 2

### 1.4 Vraag 3

### 1.5 Vraag 4

**Bereken de ogenblikkelijke snelheid $\vec{v}_d$ en de ogenblikkelijke versnelling $\vec{a}_d$ van het punt D.**
Positie van D tov B uitgedrukt in het x"y"z"- assenstel

$$\vec{r}_{d|b} \mapsto \begin{Bmatrix} \left(-\frac{1}{4} * l_4 \cos(\beta) - \frac{3}{4} * l_3 * \sin(\beta)\right) * \vec{e}_{x''} \\ 0 * \vec{e}_{y''} \\ \left(\frac{1}{4} * l_4 * \sin(\beta) - \frac{3}{4} * l_3 * \cos(\beta)\right) * \vec{e}_{z''} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

We berekennen $\vec{v}_d$ met mebehulp van samengestelde beweging.

$$\vec{v}_d = \vec{v}_b + \vec{\omega}_g \times \vec{r}_{d|b} + \vec{v}_{rel} \tag{4}$$

$$\vec{v}_b = \tag{5}$$

# 2 Kinematica