Zusammenfassung

Maschinelles Lernen

WS 19/20

November 26, 2019

Mathematische Grundlagen

1.1 Lineare Algebra

1.1.1 Skalarprodukt

- Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$: $x \circ y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x^T y$
- $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$

1.1.2 Vektornorm

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

- $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ (*Dreiecksgleichung*)
- $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$

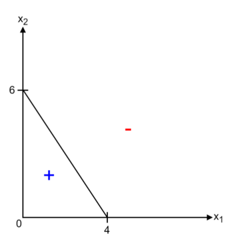
- L_1-Norm: $||x||_1 = \sum_i |x_i|$
- L_2-Norm: $||x||_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ (*euklidische Norm*)

1.1.3 Matrizen

- m Zeilen und n *Spalten* A $= \begin{bmatrix} A_{11} & ... & A_{1n} \\ A_{m1} & ... & A_{mn} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ag + bi + ck & ah + bj + cl \\ dg + ei + fk & dh + ej + fl \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $A^{-1}A = I$ (Matrizen mit linear abhängigen Zeilen oder Spalten (niedriger Rang) sind nicht invertierbar)

1.1.4 Hyperebene

- x $\in \mathbb{R}^d$ erfüllen Gleichung $w_0 + w_1 x_1 + w2_x 2 + ... + w_d x_d = 0$ ($w_0 + w^T x = 0$)
- $d = 1$: Skalar ($w_0 + w_1 x_1$), $d = 2$: Gerade ($w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2$), $d = 3$: Ebene
- Für einen Punkt x entscheidet das Vorzeichen $sgn(w_0 + w^T x) \in \{-1, 0, 1\}$ auf welcher Seite der Hyperebene er liegt (bzw. ob er auf ihr liegt)



$1 - \frac{1}{4} x_1 - \frac{1}{6} x_2 = 0$

1.2 Analysis

1.2.1 Kettenregel

- Wenn z von y und y von x abhängt, dann gilt: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$
- $f(x) = g(h(x)) = \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2)^2 \rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $h(x) = x_1 - x_2$
- $\frac{df}{dx_2} = \frac{dg}{dh}\frac{dh}{d_x 2} = h(x)(-1) = -(x_1 - x_2) = x_2 - x_1$

1.2.2 Partielle Ableitung

$f(x) = 2x_1^3 - 5x_2^2 + 3,\ \frac{df}{dx_1} = 6x_1^2,\ \frac{df}{dx_2} = -10x_2$

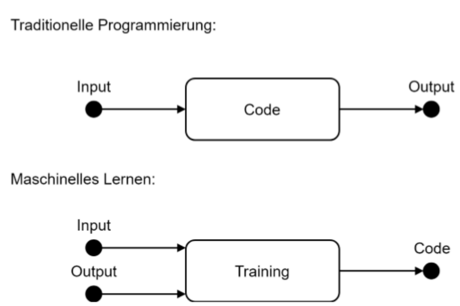
1.2.3 Gradient

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx_1} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{df}{dx_n} \end{bmatrix}, f(x) = 2x_1^3 - 5x_2^2 + 3, \nabla f = \begin{bmatrix} 6x_1^2 \\ -10x_2 \end{bmatrix}$$

1.3 Was ist maschinelles Lernen

1.3.1 Paradigmenwechsel

Es ist schwierig, den entsprechenden Programmcode manuell zu schreiben, daher wird ein anderes Paradigma verwendet:



Drei verschiedene Lernmethoden

- Überwachtes Lernen (*Supervised Learning*)
- Unüberwachtes Lernen (*Unsupervised Learning*)
- Bestärkendes Lernen (*Reinforcement Learning*)

1.3.2 Überwachtes Lernen

- Ziel: finden einer Funktion $f : X \rightarrow Y$ wobei X auch *Features* und Y auch *Responses* genannt werden
- Eine perfekte Abbildung ist nicht möglich, es treten *reduzierbare* Fehler (z.B. durch eine bessere Funktion f) und *nicht reduzierbare* Fehler auf (z.B. Messfehler in Eingabedaten)