

3. Projekt

***Penalty-Verfahren & SQP-Verfahren***

im Fach

Numerische Optimierung

Juni 2020

Maximilian Gaul

### Aufgabe 1

### Aufgabe 2

Implementierung siehe BFGS\_Pen.m und ArmijoPen.m.

### Aufgabe 3

Tests siehe Project\_3.m.

### Aufgabe 4

Das Problem

$$f(x) = \min x_1$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$g_2(x) = x_1 + x_2 - \gamma \leq 0, \gamma \geq -\sqrt{2}$$

lässt sich so graphisch darstellen:

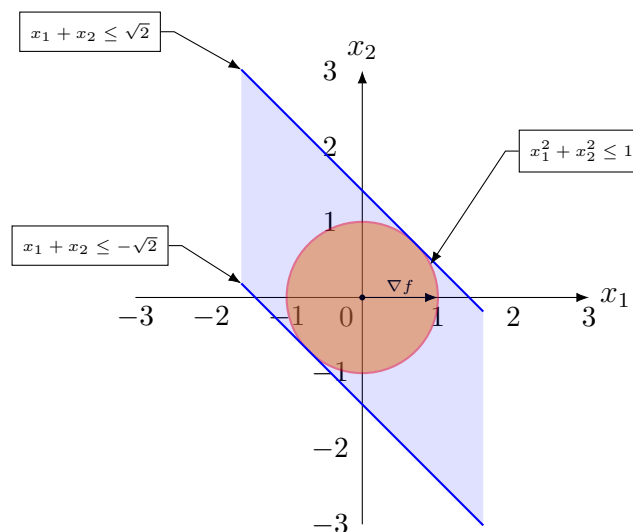


Abbildung 1: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte müssen in der Schnittmenge aus Blau und Orange liegen

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \lambda) = x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - \gamma)$$

und den Ableitungen:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \text{ (Stationarität)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \lambda_2 \cdot (x_1 + x_2 - \gamma) = 0 \text{ (Komplementarität)}$$

$$g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Um die Komplementarität zu erfüllen kann man einen der beiden Faktoren gleich Null setzen, für  $\lambda_1 \neq 0$  und  $\lambda_2 \neq 0$  erhält man

$$x_1 + x_2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = \gamma - x_2 \Leftrightarrow x_1 = \gamma \mp \frac{1}{2} \left( \gamma - \sqrt{2 - \gamma^2} \right)$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\gamma - x_2)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 \pm \frac{1}{2} \left( \gamma - \sqrt{2 - \gamma^2} \right)$$

Für  $x_1 = \gamma - \frac{1}{2} \left( \gamma - \sqrt{2 - \gamma^2} \right)$  und  $x_2 = \frac{1}{2} \left( \gamma - \sqrt{2 - \gamma^2} \right)$  erhält man:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \left( \gamma - \frac{1}{2} \left( \gamma - \sqrt{2 - \gamma^2} \right) \right) \\ \gamma - \sqrt{2 - \gamma^2} \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$