4. Projekt

im Fach

Numerische Optimierung

Juli 2020

Maximilian Gaul

Aufgabe 1

Siehe `GlobNewton.m`.

Aufgabe 2

Siehe auch `Projekt_4.m`.

Für die Himmelblau-Funktion

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

gelten folgende Ableitungen

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1^2 + x_2 - 11) \cdot 2x_1 + 2(x_1 + x_2^2 - 7) \\ 2(x_1^2 + x_2 - 11) + 2(x_1 + x_2^2 - 7) \cdot 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4(x_1^2 + x_2 - 11) + 8x_1^2 & 4x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 & 4(x_1 + x_2^2 - 7) + 8x_2^2 \end{bmatrix}$$

Schritt	**x**	**f(x)**
1	$[0.00, 0.00]^T$	170.0
2	$[1.75, 2.75]^T$	32.26
3	$[3.76, 2.22]^T$	31.69
4	$[3.19, 1.96]^T$	1.31
5	$[3.02, 1.99]^T$	0.01
⋮	⋮	⋮
15	$[3.00, 2.00]^T$	$1.10 \cdot 10^{-26}$

Abbildung 1: Verlauf von `GlobNewton` für f bei einer Genauigkeit von 10^{-12}

Schritt	**x**	**f(x)**
1	$[-1.20, 1.00]^T$	125.11
2	$[-2.87, 3.87]^T$	27.30
3	$[-2.80, 3.29]^T$	1.05
4	$[-2.80, 3.14]^T$	0.00
5	$[-2.81, 3.13]^T$	$9.83 \cdot 10^{-7}$
⋮	⋮	⋮
12	$[-2.81, 3.13]^T$	$4.10 \cdot 10^{-29}$

Abbildung 2: Verlauf von `GlobNewton` für f bei einer Genauigkeit von 10^{-12}

Für die 2D Rosenbrock-Funktion

$$g(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

gelten die Ableitungen

$$\nabla g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix}$$

$$H_g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 800x_1^2 - 400(x_2 - x_1^2) + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix}$$

Schritt	x	f(x)
1	$[0.00, 0.00]^T$	1.00
2	$[0.25, 0.00]^T$	0.95
3	$[0.31, 0.09]^T$	0.48
4	$[0.52, 0.22]^T$	0.46
5	$[0.57, 0.32]^T$	0.19
⋮	⋮	⋮
15	$[1.00, 1.00]^T$	$8.21 \cdot 10^{-28}$

Abbildung 3: Verlauf von `GlobNewton` für g bei einer Genauigkeit von 10^{-12}

Schritt	x	f(x)
1	$[-1.20, 1.00]^T$	24.20
2	$[-1.18, 1.38]^T$	4.73
3	$[-0.93, 0.81]^T$	4.09
4	$[-0.78, 0.59]^T$	3.23
5	$[-0.46, 0.11]^T$	3.21
⋮	⋮	⋮
12	$[1.00, 1.00]^T$	$4.93 \cdot 10^{-28}$

Abbildung 4: Verlauf von `GlobNewton` für g bei einer Genauigkeit von 10^{-12}

Aufgabe 3

Die Hesse-Matrizen der beiden Funktionen f und g ist stetig und kontinuierlich, d.h. es kann in beiden Fällen vom Zutreffen der Lipschitz-Bedingung

$$||H(x) - H(y)|| \leq L||x - y|| \, \forall x, y \in R^n$$

ausgegangen werden. Weiterhin enthalten beide Funktionen keine mehrfachen Nullstellen durch die das Newton-Verfahren gebremst werden könnte. Aufgrundessen konvergieren beide Funktionen lokal-quadratisch (sollte die

Hesse-Matrix eine Abstiegsrichtung liefern). Global gesehen konvergiert das Newton-Verfahren je nach Schrittweitenstrategie (ob effizient oder nicht) und Startwert entweder gar nicht aufgrund zu kleiner Schrittweiten (z.B. normales Armijo-Verfahren) oder zumindest nur superlinearer. Die lokale quadratische Konvergenz der Himmelblau-Funktion kann man in (1) und (2) zwischen Schritt 3 und 4 bzw. 2 und 3 gut erkennen. Da beide Funktionen nicht quadratisch sind, konvergiert das Verfahren nicht in einem einzigen Schritt.

Bei Quasi-Newton-Verfahren mit approximierter Hesse-Matrix und effizienter Schrittweitenstrategie kann man global gesehen von einer superlinearen Konvergenz für beide Funktionen f und g ausgehen. Im gegensatz zum reinen Newton-Verfahren kann man die Update-Formeln der Hesse-Matrix so wählen, dass eine Abstiegsrichtung entsteht. Broyden *et al.* haben 1973 in *On the Local and Superlinear Convergence of Quasi-Newton Methods* gezeigt, dass die Fehler in der Approximation von H_k begrenzt sind und sich nicht unbeschränkt erhöhen, woraus daraus die superlineare Konvergenz abgeleitet werden kann.

Weiterhin sind beide Funktionen nicht quadratischer Natur ansonsten könnte die Schrittweite ggf. exakt berechnet werden.

Aufgabe 4

Das Optimierungsproblem

$$\text{min } -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 3x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_3 &\leq 3 \\ x_i \geq 0, i &\in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

hat folgende Normalform

$$\text{min } -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \; (I) \\ 3x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \; (II) \\ x_1 + x_6 &= 2 \; (III) \\ x_3 + x_7 &= 3 \; (IV) \\ x_i \geq 0, i &\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \; (V) \end{aligned}$$

Aufgabe 5

	$\begin{bmatrix}2\\1\\3\\-3\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\\3\\1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\0\\0\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\\2\\0\\2\end{bmatrix}$
(I)	✗	✓	✓	✓	✓
(II)	✓	✗	✓	✓	✓
(III)	✓	✗	✓	✓	✓
(IV)	✓	✓	✓	✓	✓
(V)	✗	✓	✓	✓	✓

Abbildung 5: Auswertung gegebener Vektoren bezüglich Nebenbedingungen

Die Vektoren $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ und $x^{(5)}$ sind gültige Basisvektoren während $x^{(1)}$ einen negativen Eintrag enthält sowie nicht alle Nebenbedingungen erfüllt. $x^{(2)}$ erfüllt ebenfalls nicht alle Nebenbedingungen.

Aufgabe 6

Das Optimierungsproblem lässt sich in Matrixschreibweise als lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ schreiben

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix}4\\6\\2\\3\end{bmatrix}$$

Aus dem angegebenen Basisvektor $x = \begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\\4\\0\\1\end{bmatrix}$ kann man die Indexmengen $B = \{1, 3, 5, 7\}$ und $N = \{2, 4, 6\}$ ablesen. B enthält die Indizes bei denen $x_i \neq 0$ sind während N gerade die Einträge enthält, bei denen $x_i = 0$ sind. Daraus wiederum kann man A_B und A_N bilden

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

die gerade die Spalten aus A enthalten, die in der jeweiligen Indexmenge angegeben sind.

Mit

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

kann man nun Γ berechnen

$$\Gamma = A_B^{-1} \cdot A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

und $\beta_B = A_B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mit zusätzlichem $c = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $c_B = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c_N = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lässt sich $\xi = \Gamma^T c_B - c_N = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ berechnen und das Tableau aufstellen (Pivot-Element farbig hinterlegt):

	x_2	x_4	x_6		
x_1	0	0	1	2	2
x_3	1	1	-1	2	/
x_5	2	-1	1	4	4
x_7	-1	-1	1	1	1
	-1	-4	2	-12	

Abbildung 6: Start Tableau für Simplex

$q = 6, p = 7$, es werden also die Elemente x_7 und x_6 getauscht. Daraus entstehen die neuen Index-Mengen $B = \{1, 3, 5, 6\}$ und $N = \{2, 4, 7\}$

Daraus lässt sich wieder bestimmen

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und draus wiederum

$$\Gamma = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \beta_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mit $c_B = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c_N = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kann man bestimmen $\xi = \Gamma^T c_B - c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

und daraus das neue Tableau aufstellen

	x_2	x_4	x_7		
x_1	1	1	-1	1	
x_3	0	0	1	3	
x_5	3	0	-1	3	
x_6	-1	-1	1	1	
	1	-2	-2	-14	

Abbildung 7: Simplex Tableau nach einem Schritt

Selbiges erhält man durch die Update-Formel:

	x_2	x_4	x_7		
x_1	$0 - \frac{1\cdot(-1)}{1}$	$0 - \frac{1\cdot(-1)}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$2 - \frac{1\cdot 1}{1}$	
x_3	$1 - \frac{-1\cdot(-1)}{1}$	$1 - \frac{-1\cdot(-1)}{1}$	$-1\frac{-1}{1}$	$2 - \frac{-1\cdot 1}{1}$	
x_5	$2 - \frac{1\cdot(-1)}{1}$	$-1 - \frac{1\cdot(-1)}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$4 - \frac{1\cdot 1}{1}$	
x_6	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	
	$-1 - \frac{2\cdot(-1)}{1}$	$-4 - \frac{2\cdot(-1)}{1}$	-$\frac{2}{1}$	$-12 - \frac{2}{1}$	

Abbildung 8: Simplex Update-Formel für das 1. Tableau

Im aktuellen Schritt ist $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit $f(x) = -14$.

Aufgabe 7

Wenn man in Matlab definiert

```
f = [-2, -3, -4];
A = [1, 1, 1; 0, 3, 1; 1, 0, 0; 0, 0, 1];
lower_bound = [0, 0, 0];
b = [4; 5; 2; 3];
```

und `linprog` so aufruft (`primal-simplex` hat in meiner Version 2020a nicht funktioniert, konkrete Implementierung siehe `Projekt_4.m`):

```
options = optimoptions("linprog", "OptimalityTolerance", 1e
   -8, "Algorithm", "dual-simplex");
linprog(f, A, b, [], [], lower_bound, [], options);
```

dann erhält man $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 3 \end{bmatrix}$ mit $f(x) = -\frac{44}{3}$.

Aufgabe 8

Implementierung siehe `ActiveSet.m`.

Bei dem gegebenen Problem

$$\text{min } f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 2x_1x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.5x_2 &\leq 1 \, (I) \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \, (II) \\ x_1 &\geq 0 \, (III) \\ x_2 &\geq 0 \, (IV) \end{aligned}$$

übergibt man an `ActiveSet.m` folgende Parameter

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und erhält man mit dem Startwert $x_0^{(0)} = \begin{bmatrix} -12 \\ 13 \end{bmatrix}$ das Ergebnis:

Schritt	Aktive NB.	x	f(x)
1	$\{\}$	$[-12.00, 13.00]^T$	740.00
2	$\{I\}$	$[-9.88, 11.88]^T$	562.58
3	$\{I\}$	$[0.80, 1.20]^T$	-7.20

Abbildung 9: Verlauf von `ActiveSet.m` für gegebenes Problem mit $x_0^{(0)}$

Das Verfahren konvergiert sogar mit Startwerten, die keine gültige Anfangslösung darstellen (eben $x_0^{(0)}$). Für gültige Startwerte wie $x_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ konvergiert das Verfahren genauso, jedoch in einem Schritt weniger:

Schritt	Aktive NB.	x	f(x)
1	$\{I\}$	$[1.00, 1.00]^T$	-7.0
2	$\{I\}$	$[0.80, 1.20]^T$	-7.2

Abbildung 10: Verlauf von `ActiveSet.m` für gegebenes Problem mit $x_0^{(1)}$

Für `fmincon` kann man das Problem so in Matlab formulieren:

```
x0 = [-12; 13];

g = @(x) x(1).^2 + 2 * x(2).^2 - 2 * x(1) - 6 * x(2) - 2 *
   x(1) * x(2);
g1 = @(x) 0.5 * x(1) + 0.5 * x(2) - 1;
g2 = @(x) -x(1) + 2 * x(2) - 2;

conNeqG = @(x) confunNeqG(g1, g2, x);
ret = fmincon(g, x0, [], [], [], [], [0, 0], [], conNeqG);

% Ungleichungsnebenbedingungen aus Aufgabe 8 für fmincon
function [c,ceq] = confunNeqG(g1, g2, x)
    % Nonlinear inequality constraints
    c = [g1(x), g2(x)];
    % Nonlinear equality constraints
    ceq = [];
end
```

und erhält dann das selbe Ergebnis $x = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 9

Die quadratische Funktion $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 2x_1x_2$ kann man umformulieren zu

$$f(x) = 0.5x^T Qx + q^T x$$

mit $Q = \begin{bmatrix} 2, -2 \\ -2, 4 \end{bmatrix}$ und $q = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$.
Die Ungleichungsnebenbedingungen

$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.5x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

formuliert man um zu (da nach Aufgabenstellung alle aktiv sind)

$$Ux = r$$

mit $U = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $r = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Damit kann man das KKT-System aufstellen

$$\begin{bmatrix} Q & U^T \\ U & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ r \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0.5 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0.5 & 2 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das Schur-Komplement dieser Matrix erhält man durch eine Multiplikation von links mit

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -UQ^{-1} & I \end{bmatrix}$$

Mit $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ und $-UQ^{-1} = \begin{bmatrix} -0.75 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \\ 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.75 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Rechnung ist dann folgende

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.75 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0.5 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0.5 & 2 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0.5 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0.5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0.625 & -0.25 & 0.75 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.25 & -1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Das Schur-Komplement $-UQ^{-1}U^T$ (4×4-Block rechts unten) ist also

$$\begin{bmatrix} -0.625 & -0.25 & 0.75 & 0.5 \\ -0.25 & -1 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & -1 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 10

Die Zielfunktion

$$f(x) = \sum_{j=1}^{4} \left(3000x_j + a_j x_j^2\right) + K \left(4s_0 + \sum_{i=1}^{4} (4-i)(x_i - b_i)\right)$$

kann man ausformulieren

$$3000(x_1+x_2+x_3+x_4)+2x_1^2+1.75x_2^2+0.75x_3^2+500\cdot(2000+3x_1-6000+2x_2-8000+x_3-3000)$$

und anschließend zusammenfassen zu

$$f(x) = 2x_1^2 + 1.75x_2^2 + 0.75x_3^2 + 4500x_1 + 4000x_2 + 3500x_3 + 3000x_4 - 7.5 \cdot 10^6$$

Die erste Reihe an Ungleichungsnebenbedingungen

$$s_0 + \sum_{i=1}^{j} (x_i - b_i) \leq L \text{ , } j = 1, 2, 3$$

kann man ausformulieren zu 3 Bedingungen

$$g_1(x) = s_0 + \sum_{i=1}^{1} (x_i - b_i) \leq L \Leftrightarrow 500 + x_1 - 2000 \leq 2000 \Leftrightarrow x_1 - 3500 \leq 0$$

$$g_2(x) = s_0 + \sum_{i=1}^{2} (x_i - b_i) \leq L \Leftrightarrow 500 + x_1 - 2000 + x_2 - 4000 \leq 2000 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 7500 \leq 0$$

$$g_3(x) = s_0 + \sum_{i=1}^{3} (x_i - b_i) \leq L \Leftrightarrow 500 + x_1 - 2000 + x_2 - 4000 + x_3 - 3000 \leq 2000$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 - 10500 \leq 0$$

Die zweite Reihe an Ungleichungsnebenbedingungen

$$s_0 + \sum_{i=1}^{j} (x_i - b_i) \geq 0 \text{ , } j = 1, 2, 3$$

kann man zu 3 weiteren Bedingungen ausformulieren

$$g_4(x) = s_0 + \sum_{i=1}^{1} (x_i - b_i) \geq 0 \Leftrightarrow 500 + x_1 - 2000 \geq 0 \Leftrightarrow -x_1 + 1500 \leq 0$$

$$g_5(x) = s_0 + \sum_{i=1}^{2} (x_i - b_i) \geq 0 \Leftrightarrow 500 + x_1 - 2000 + x_2 - 4000 \geq 0 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 + 5500 \leq 0$$

$$g_6(x) = s_0 + \sum_{i=1}^{3} (x_i - b_i) \geq 0 \Leftrightarrow 500 + x_1 - 2000 + x_2 - 4000 + x_3 - 3000 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -x_1 - x_2 - x_3 + 8500 \leq 0$$

Die Gleichungsnebenbedingung

$$h_1(x) = s_0 + \sum_{i=1}^{4} (x_i - b_i) = s_1$$

lässt sich umformulieren zu

$$500 + x_1 - 2000 + x_2 - 4000 + x_3 - 3000 + x_4 - 1000 = 500 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10000$$

Mit

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1 + 4500 \\ 3.5x_2 + 4000 \\ 1.5x_3 + 3500 \\ 3000 \end{bmatrix}, \nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \nabla g_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man nun die KKT-Bedingungen aufstellen.
Zuerst die Stationaritätsgleichung

$$\begin{bmatrix} 4x_1 + 4500 \\ 3.5x_2 + 4000 \\ 1.5x_3 + 3500 \\ 3000 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_6 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Komplementaritätsbedingungen

- $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\lambda_1(x_1 - 3500) = 0$
- $\lambda_2(x_1 + x_2 - 7500) = 0$
- $\lambda_3(x_1 + x_2 + x_3 - 10500) = 0$
- $\lambda_4(-x_1 + 1500) = 0$
- $\lambda_5(-x_1 - x_2 + 5500) = 0$
- $\lambda_6(-x_1 - x_2 - x_3 + 8500) = 0$

Zulässigkeit

- $g_1(\hat{x}) \leq 0$
- $g_2(\hat{x}) \leq 0$
- $g_3(\hat{x}) \leq 0$
- $g_4(\hat{x}) \leq 0$
- $g_5(\hat{x}) \leq 0$
- $g_6(\hat{x}) \leq 0$
- $h_1(\hat{x}) = 0$

Weiterhin muss die *Linear Independence Constraint Qualification* (LICQ) für eine optimale Lösung $\hat{x}$ gelten. D.h. die Gradienten der aktiven Ungleichungsnebenbedingungen und die Gradienten der Gleichungsnebenbedingung müssen linear unabhängig sein.

Aufgabe 11

Mit $x_1 = 2500$ und $x_2 = 3000$ ändern sich die Komplementaritätsbedingungen wie folgt:

- $\lambda_1(2500 - 3500) = 0 \Leftrightarrow -1000\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$
- $\lambda_2(2500 + 3000 - 7500) = 0 \Leftrightarrow -2000\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$
- $\lambda_3(2500 + 3000 + x_3 - 10500) = 0 \Leftrightarrow \lambda_3(x_3 - 5000) = 0$
- $\lambda_4(-2500 + 1500) = 0 \Leftrightarrow -1000\lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0$
- $\lambda_5(-2500 - 3000 + 5500) = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot \lambda_5 = 0$
- $\lambda_6(-2500 - 3000 - x_3 + 8500) = 0 \Leftrightarrow \lambda_6(-x_3 + 3000) = 0$

Aus der Gleichungsnebenbedingung wird $h_1(x) = x_3 + x_4 = 4500$.

Damit verkürzt sich die Stationaritätsgleichung zu

$$\begin{bmatrix} 14500 \\ 14500 \\ 1.5x_3 + 3500 \\ 3000 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_6 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da $g_5(x)$ aktiv, d.h. gleich 0 ist, müssen weitere aktive Ungleichungsnebenbedingungen linear unabhängig von ∇g_5 sein (und ebenso von ∇h_1). Wie man sieht dürfen deswegen $g_3(x)$ und $g_6(x)$ nicht gleichzeitig aktiv sein da $\nabla g_3(x) = -\nabla g_6(x)$.

Im ersten Fall setzt man $\lambda_3 = 0, \lambda_6 \neq 0$. Aus $\lambda_6(-x_3 + 3000) = 0$ kann man schlussfolgern dass $x_3 = 3000$ sein muss. Aus $h_1(x) = x_3 + x_4 = 4500$ folgt dann $x_4 = 1500$. Die Stationaritätsgleichung verkürzt sich weiter zu

$$\begin{bmatrix} 14500 \\ 14500 \\ 1.5x_3 + 3500 \\ 3000 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_6 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus $3000 + \mu_1 = 0$ folgt $\mu_1 = -3000$. Aus $1.5 \cdot 3000 + 3500 - \lambda_6 - 3000 = 0$ folgt dann $\lambda_6 = 5000$. Schließlich kann man aus $14500 - \lambda_5 - 5000 - 3000 = 0$ ableiten, dass $\lambda_5 = 6500$ sein muss. Man erhält also den KKT Punkt

$$x = \begin{bmatrix} 2500 \\ 3000 \\ 3000 \\ 1500 \end{bmatrix} \text{ mit } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 6500, \lambda_6 = 5000, \mu_1 = -3000$$

mit $f(x) = 65.75 \cdot 10^6$ der auch zulässig ist.

Im zweiten Fall setzt man $\lambda_6 = 0, \lambda_3 \neq 0$. Durch $\lambda_3(x_3 - 5000) = 0$ erhält man $x_3 = 5000$. Aus der Gleichungsnebenbedingung $x_3 + x_4 = 4500$ erhält man $x_4 = -500$. Da für alle $x_i \geq 0$ gelten muss kann das kein KKT-Punkt sein.

Aufgabe 12

Mit

$$f(x) = 2x_1^2 + 1.75x_2^2 + 0.75x_3^2 + 4500x_1 + 4000x_+3500x_3 + 3000x_4 - 7.5 \cdot 10^6$$

erhält man

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} 4500 \\ 4000 \\ 3500 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

Aus den Nebenbedingungen in Aufgabe 11 erhält man weiterhin

$$U\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\-1&0&0&0\\-1&-1&0&0\\-1&-1&-1&0\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix} r=\begin{bmatrix}3500\\7500\\10500\\-1500\\-5500\\-8500\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

sowie

$$G=\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix} b=\begin{bmatrix}10000\end{bmatrix}$$

Q, q, U, G kann man dann zusammen mit $x_0^{(1)} = \begin{bmatrix}3000\\4000\\2000\\1000\end{bmatrix}$ in `ActiveSet.m` einsetzen und erhält

Schritt	Aktive NB.	x	f(x)
1	$\{\}$	$[3000, 4000, 2000, 1000]^T$	$8.85 \cdot 10^7$
2	$\{VI\}$	$[2831, 3786, 1883, 1500]^T$	$8.27 \cdot 10^7$
3	$\{V, VI\}$	$[2380, 3120, 3000, 1500]^T$	$7.33 \cdot 10^7$
4	$\{V, VI\}$	$[2500, 3000, 3000, 1500]^T$	$6.58 \cdot 10^7$

Abbildung 11: Verlauf von `ActiveSet.m` für gegebenes Problem mit $x_0^{(1)}$ als Startwert

Das Ergebnis ist also $x = \begin{bmatrix}2500\\3000\\3000\\1500\end{bmatrix}$ mit $\lambda_5 = 6500, \lambda_6 = 5000$ und $\mu_1 = -3000$.

Mit $x_0^{(2)} = \begin{bmatrix}2500\\4750\\1425\\1325\end{bmatrix}$ ergibt sich folgender Verlauf

Schritt	Aktive NB.	x	f(x)
1	$\{\}$	$[2500, 4750, 1425, 1325]^T$	$9.27 \cdot 10^7$
2	$\{VI\}$	$[2448, 4659, 1393, 1500]^T$	$9.05 \cdot 10^7$
3	$\{V, VI\}$	$[2062, 3438, 3000, 1500]^T$	$7.40 \cdot 10^7$
4	$\{V, VI\}$	$[2500, 3000, 3000, 1500]^T$	$6.58 \cdot 10^7$

Abbildung 12: Verlauf von `ActiveSet.m` für gegebenes Problem mit $x_0^{(2)}$ als Startwert

und das selbe Ergebnis wie mit $x_0^{(1)}$.

Mit $x_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 6000 \\ 2000 \\ 500 \end{bmatrix}$ erhält man den Verlauf

Schritt	Aktive NB.	x	f(x)
1	$\{II, IV\}$	$[1500, 6000, 2000, 500]^T$	$10.98 \cdot 10^7$
2	$\{II, IV, VI\}$	$[1500, 6000, 1000, 1500]^T$	$10.70 \cdot 10^7$
3	$\{IV, VI\}$	$[1500, 6000, 1000, 1500]^T$	$10.70 \cdot 10^7$
4	$\{IV, V, VI\}$	$[1500, 4000, 3000, 1500]^T$	$7.70 \cdot 10^7$
5	$\{V, VI\}$	$[1500, 4000, 3000, 1500]^T$	$7.70 \cdot 10^7$
6	$\{V, VI\}$	$[2500, 3000, 3000, 1500]^T$	$6.58 \cdot 10^7$

Abbildung 13: Verlauf von `ActiveSet.m` für gegebenes Problem mit anderem Startwert mit $x_0^{(3)}$ als Startwert

und das selbe Ergebnis wie mit den beiden anderen Startwerten.

Bisher wurden Startwerte verwendet, die bereits eine gültige Problemlösung dargestellt haben. Wenn man andere Werte wie $x_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 255 \\ 785 \\ 5000 \\ 10 \end{bmatrix}$ verwendet, konvergiert das Verfahren nicht mehr:

Schritt	Aktive NB.	x	f(x)
1	$\{\}$	$[255, 785, 5000, 10]^T$	$4.18 \cdot 10^7$
2	$\{V\}$	$[1907, 3593, 18986, -18436]^T$	$3.34 \cdot 10^8$
3	$\{V, VI\}$	$[2398, 3102, 3000, -2450]^T$	$6.14 \cdot 10^7$
4	$\{I, V, VI\}$	$[3500, 2000, 3000, -2450]^T$	$6.52 \cdot 10^7$
⋮	⋮	⋮	⋮
1000	$\{V, VI\}$	$[3500, 2000, 3000, -2450]^T$	$6.52 \cdot 10^7$

Abbildung 14: Verlauf von `ActiveSet.m` für gegebenes Problem mit $x_0^{(4)}$ als Startwert

Mit `quadprog` löst man das Problem so

```
options = optimoptions("quadprog", "Algorithm", "active-set
   ", "Display", "iter-detailed");
ret = quadprog(Q, q, U, r, G, b, [], [], x0, options);
```

Für $x_0^{(1)}$ und $x_0^{(2)}$ erhält man die selbe Lösung wie mit `ActiveSet.m`, auch jeweils nach 4 Schritten. Für $x_0^{(3)}$ liefert `quadprog` ebenfalls wie selbe Lösung aber nun nach 6 Schritten. Bei $x_0^{(4)}$ sucht `quadprog` zuerst nach einer gültigen Startlösung und konvergiert dann in insgesamt 7 Schritten:

```
Searching for feasible point:
 Iter     Feasibility         Norm of
                                 step
    0    1.001000e+03    0.000000e+00
    1    1.000000e+03    1.000000e+00
    2    0.000000e+00    6.546537e-01

Searching for optimal solution:
 Iter             Fval     Feasibility     First-order
    Norm of
                                             optimality
                                                          step
    2     7.462500e+07    0.000000e+00    1.583333e+04
       0.000000e+00
    3     7.345753e+07    0.000000e+00    1.544099e+04
       2.582112e+03
    4     7.325000e+07    0.000000e+00    1.450000e+04
       3.326907e+02
    5     7.325000e+07    0.000000e+00    1.818989e-12
       0.000000e+00
```

`quadprog` prüft also zuerst nach einer gültigen Lösung und optimiert dann von dieser ausgehend.

Insgesamt kann man das Ergebnis so beurteilen, dass im 1. Jahr 2500, im 2. Jahr 3000, im 3. Jahr 3000 und im 4. Jahr 1500 Stück produziert werden sollten um die Zielfunktion zu minimieren aber auch die Bedarfe im jeweiligen Jahr zu erfüllen.

Dass die Nebenbedingungen V und VI aktiv sind bedeutet, dass x_1+x_2 sowie $x_1 + x_2 + x_3$ an die untere Gültigkeitsgrenze (5500 bzw. 8500) gestoßen sind. Man kann nun vermuten, wenn der Bedarf in den Jahren 1, 2 und 3 geringer ausfallen würde, dass man die Zielfunktion noch weiter minimieren könnte.

Das Verfahren konvergiert außerdem für die gegebenen Nebenbedingungen eventuell langsamer bzw. gar nicht, da die Zeilen von $\begin{bmatrix} G \\ U \end{bmatrix}$ nicht linear unabhängig sind (Folie 111, Foliensatz 6-11).