

4. Projekt

im Fach

Numerische Optimierung

Juli 2020

Maximilian Gaul

## Aufgabe 1

Siehe GlobNewton.m.

## Aufgabe 2

Siehe auch Projekt\_4.m.

Für die Himmelblau-Funktion

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

gelten folgende Ableitungen

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1^2 + x_2 - 11) \cdot 2x_1 + 2(x_1 + x_2^2 - 7) \\ 2(x_1^2 + x_2 - 11) + 2(x_1 + x_2^2 - 7) \cdot 2x_2 \end{bmatrix}$$
$$H_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4(x_1^2 + x_2 - 11) + 8x_1^2 & 4x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 & 4(x_1 + x_2^2 - 7) + 8x_2^2 \end{bmatrix}$$

Schritt	<b>x</b>	<b>f(x)</b>
1	$[0.00, 0.00]^T$	170.0
2	$[1.75, 2.75]^T$	32.26
3	$[3.76, 2.22]^T$	31.69
4	$[3.19, 1.96]^T$	1.31
5	$[3.02, 1.99]^T$	0.01
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$[3.00, 2.00]^T$	$1.10 \cdot 10^{-26}$

Abbildung 1: Verlauf von GlobNewton für  $f$  bei einer Genauigkeit von  $10^{-12}$

Schritt	<b>x</b>	<b>f(x)</b>
1	$[-1.20, 1.00]^T$	125.11
2	$[-2.87, 3.87]^T$	27.30
3	$[-2.80, 3.29]^T$	1.05
4	$[-2.80, 3.14]^T$	0.00
5	$[-2.81, 3.13]^T$	$9.83 \cdot 10^{-7}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	$[-2.81, 3.13]^T$	$4.10 \cdot 10^{-29}$

Abbildung 2: Verlauf von GlobNewton für  $f$  bei einer Genauigkeit von  $10^{-12}$

Für die 2D Rosenbrock-Funktion

$$g(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

gelten die Ableitungen

$$\nabla g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix}$$

$$H_g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 800x_1^2 - 400(x_2 - x_1^2) + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix}$$

Schritt	<b>x</b>	<b>f(x)</b>
1	$[0.00, 0.00]^T$	1.00
2	$[0.25, 0.00]^T$	0.95
3	$[0.31, 0.09]^T$	0.48
4	$[0.52, 0.22]^T$	0.46
5	$[0.57, 0.32]^T$	0.19
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$[1.00, 1.00]^T$	$8.21 \cdot 10^{-28}$

Abbildung 3: Verlauf von GlobNewton für  $g$  bei einer Genauigkeit von  $10^{-12}$

Schritt	<b>x</b>	<b>f(x)</b>
1	$[-1.20, 1.00]^T$	24.20
2	$[-1.18, 1.38]^T$	4.73
3	$[-0.93, 0.81]^T$	4.09
4	$[-0.78, 0.59]^T$	3.23
5	$[-0.46, 0.11]^T$	3.21
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	$[1.00, 1.00]^T$	$4.93 \cdot 10^{-28}$

Abbildung 4: Verlauf von GlobNewton für  $g$  bei einer Genauigkeit von  $10^{-12}$

### Aufgabe 3

Die Hesse-Matrizen der beiden Funktionen  $f$  und  $g$  ist stetig und kontinuierlich, d.h. es kann in beiden Fällen vom Zutreffen der Lipschitz-Bedingung

$$\|H(x) - H(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n$$

ausgegangen werden. Weiterhin enthalten beide Funktionen keine mehrfachen Nullstellen durch die das Newton-Verfahren gebremst werden könnte. Aufgrunddessen konvergieren beide Funktionen lokal-quadratisch (sollte die

Hesse-Matrix eine Abstiegsrichtung liefern). Global gesehen konvergiert das Newton-Verfahren je nach Schrittweitenstrategie (ob effizient oder nicht) und Startwert entweder gar nicht aufgrund zu kleiner Schrittweiten (z.B. normales Armijo-Verfahren) oder zumindest nur superlinearer. Die lokale quadratische Konvergenz der Himmelblau-Funktion kann man in (1) und (2) zwischen Schritt 3 und 4 bzw. 2 und 3 gut erkennen. Da beide Funktionen nicht quadratisch sind, konvergiert das Verfahren nicht in einem einzigen Schritt.

Bei Quasi-Newton-Verfahren mit approximierter Hesse-Matrix und effizienter Schrittweitenstrategie kann man global gesehen von einer superlinearen Konvergenz für beide Funktionen  $f$  und  $g$  ausgehen. Im Gegensatz zum reinen Newton-Verfahren kann man die Update-Formeln der Hesse-Matrix so wählen, dass eine Abstiegsrichtung entsteht. Broyden et al. haben 1973 in *On the Local and Superlinear Convergence of Quasi-Newton Methods* gezeigt, dass die Fehler in der Approximation von  $H_k$  begrenzt sind und sich nicht unbeschränkt erhöhen und daraus die superlineare Konvergenz abgeleitet werden kann.

Weiterhin sind beide Funktionen nicht quadratischer Natur ansonsten könnte die Schrittweite ggf. exakt berechnet werden.

#### Aufgabe 4

Das Optimierungsproblem

$$\min -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$3x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_3 \leq 3$$

$$x_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3\}$$

hat folgende Normalform

$$\min -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \text{ (I)}$$

$$3x_2 + x_3 + x_5 = 6 \text{ (II)}$$

$$x_1 + x_6 = 2 \text{ (III)}$$

$$x_3 + x_7 = 3 \text{ (IV)}$$

$$x_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ (V)}$$

## Aufgabe 5

	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
(I)	✗	✓	✓	✓	✓
(II)	✓	✗	✓	✓	✓
(III)	✓	✗	✓	✓	✓
(IV)	✓	✓	✓	✓	✓
(V)	✗	✓	✓	✓	✓

Abbildung 5: Auswertung gegebener Vektoren bezüglich Nebenbedingungen

Die Vektoren  $x^{(3)}$ ,  $x^{(4)}$  und  $x^{(5)}$  sind gültige Basisvektoren während  $x^{(1)}$  einen negativen Eintrag enthält sowie nicht alle Nebenbedingungen erfüllt.  $x^{(2)}$  erfüllt ebenfalls nicht alle Nebenbedingungen.

## Aufgabe 6

Das Optimierungsproblem lässt sich in Matrixschreibweise als lineares Gleichungssystem der Form  $Ax = b$  schreiben

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aus dem angegebenen Basisvektor  $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  kann man die Indexmengen

$B = \{1, 3, 5, 7\}$  und  $N = \{2, 4, 6\}$  ablesen.  $B$  enthält die Indizes bei denen  $x_i \neq 0$  sind während  $N$  gerade die Einträge enthält, bei denen  $x_i = 0$  sind. Daraus wiederum kann man  $A_B$  und  $A_N$  bilden

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

die gerade die Spalten aus  $A$  enthalten, die in der jeweiligen Indexmenge angegeben sind.

Mit

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

kann man nun  $\Gamma$  berechnen

$$\Gamma = A_B^{-1} \cdot A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

und  $\beta_B = A_B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Mit zusätzlichem  $c = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  und  $c_B = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$c_N = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  lässt sich  $\xi = \Gamma^T c_B - c_N = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$  berechnen und das Tableau aufstellen (Pivot-Element farbig hinterlegt):

	$x_2$	$x_4$	$x_6$		
$x_1$	0	0	1	2	2
$x_3$	1	1	-1	2	/
$x_5$	2	-1	1	4	4
$x_7$	-1	-1	1	1	1
	-1	-4	2	-12	

Abbildung 6: Start Tableau für Simplex

$q = 6, p = 7$ , es werden also die Elemente  $x_7$  und  $x_6$  getauscht. Daraus entstehen die neuen Index-Mengen  $B = \{1, 3, 5, 6\}$  und  $N = \{2, 4, 7\}$

Daraus lässt sich wieder bestimmen

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und draus wiederum

$$\Gamma = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mit  $c_B = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $c_N = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  kann man bestimmen  $\xi = \Gamma^T c_B - c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

und daraus das neue Tableau aufstellen

	$x_2$	$x_4$	$x_7$	
$x_1$	1	1	-1	1
$x_3$	0	0	1	3
$x_5$	3	0	-1	3
$x_6$	-1	-1	1	1
	1	-2	-2	-14

Abbildung 7: Simplex Tableau nach einem Schritt

Selbiges erhält man durch die Update-Formel:

	$x_2$	$x_4$	$x_7$	
$x_1$	$0 - \frac{1 \cdot (-1)}{1}$	$0 - \frac{1 \cdot (-1)}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$2 - \frac{1 \cdot 1}{1}$
$x_3$	$1 - \frac{-1 \cdot (-1)}{1}$	$1 - \frac{-1 \cdot (-1)}{1}$	$-1 \frac{-1}{1}$	$2 - \frac{-1 \cdot 1}{1}$
$x_5$	$2 - \frac{1 \cdot (-1)}{1}$	$-1 - \frac{1 \cdot (-1)}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$4 - \frac{1 \cdot 1}{1}$
$x_6$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
	$-1 - \frac{2 \cdot (-1)}{1}$	$-4 - \frac{2 \cdot (-1)}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$-12 - \frac{2}{1}$

Abbildung 8: Simplex Update-Formel für das 1. Tableau

Aktuell ist  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  mit  $f(x) = -14$ .

## Aufgabe 7

Wenn man in Matlab definiert

```
f = [-2, -3, -4];  
A = [1, 1, 1; 0, 3, 1; 1, 0, 0; 0, 0, 1];  
lower_bound = [0, 0, 0];  
b = [4; 5; 2; 3];
```

und `linprog` so aufruft (primal-simplex hat in meiner Version 2020a nicht funktioniert, konkrete Implementierung siehe `Projekt_4.m`):

```
options = optimoptions("linprog", "OptimalityTolerance", 1e  
-8, "Algorithm", "dual-simplex");  
linprog(f, A, b, [], [], lower_bound, [], options);
```

dann erhält man  $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 3 \end{bmatrix}$  mit  $f(x) = -\frac{44}{3}$ .

## Aufgabe 8

Implementierung siehe `ActiveSet.m`.

Bei dem gegebenen Problem

$$\min f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 2x_1x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 1 \text{ (I)}$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2 \text{ (II)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

erhält man mit dem Startwert  $x^{(0)} = \begin{bmatrix} -12 \\ 13 \end{bmatrix}$  folgendes Ergebnis:

Schritt	Aktive NB.	<b>x</b>	<b>f(x)</b>
1	{}	$[-12.00, 13.00]^T$	740.00
2	{I}	$[-9.88, 11.88]^T$	562.58
3	{I, II}	$[0.80, 1.20]^T$	-7.20

Abbildung 9: Verlauf von `ActiveSet.m` für gegebenes Problem

Für `fmincon` muss man das Problem so in Matlab formulieren:



```

x0 = [-12; 13];

g = @(x) x(1).^2 + 2 * x(2).^2 - 2 * x(1) - 6 * x(2) - 2 *
      x(1) * x(2);
g1 = @(x) 0.5 * x(1) + 0.5 * x(2) - 1;
g2 = @(x) -x(1) + 2 * x(2) - 2;

conNeqG = @(x) confunNeqG(g1, g2, x);
ret = fmincon(g, x0, [], [], [], [], [0, 0], [], conNeqG);

% Ungleichungsnebenbedingungen aus Aufgabe 8 für fmincon
function [c,ceq] = confunNeqG(g1, g2, x)
    % Nonlinear inequality constraints
    c = [g1(x), g2(x)];
    % Nonlinear equality constraints
    ceq = [];
end

```

und erhält dann das selbe Ergebnis  $x = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$ .

## Aufgabe 9

Die quadratische Funktion  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 - 2x_1x_2$  kann man umformulieren zu

$$f(x) = 0.5x^T Qx + q^T x$$

mit  $Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$  und  $q = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$ .

Die Ungleichungsnebenbedingungen

$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.5x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

formuliert man um zu (da nach Aufgabenstellung alle aktiv sind)

$$Ux = r$$

mit  $U = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  und  $r = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Damit kann man das KKT-System aufstellen

$$\begin{bmatrix} Q & U^T \\ U & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ r \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0.5 & -1 \\ -2 & 4 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Das Schur-Komplement dieser Matrix erhält man durch eine Multiplikation von links mit

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -UQ^{-1} & I \end{bmatrix}$$

Mit  $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$  ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.75 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Rechnung ist dann folgende

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.75 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0.5 & -1 \\ -2 & 4 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0.5 & -1 \\ -2 & 4 & 0.5 & 2 \\ 0 & 0 & -0.625 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & -1 \end{bmatrix}$$

Das Schur-Komplement  $-UQ^{-1}U^T$  (rechts unten) ist also

$$\begin{bmatrix} -0.625 & -0.25 \\ -0.25 & -1 \end{bmatrix}$$