3. Projekt

Penalty-Verfahren & SQP-Verfahren

im Fach

Numerische Optimierung

Juni 2020

Maximilian Gaul

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Implementierung siehe `BFGS_Pen.m` und `ArmijoPen.m`.

Aufgabe 3

Tests siehe `Projekt_3.m`.

Aufgabe 4

Das Problem

$$f(x) = \min x_1$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 - \gamma \leq 0, \gamma \geq -\sqrt{2}$$

lässt sich so graphisch darstellen:

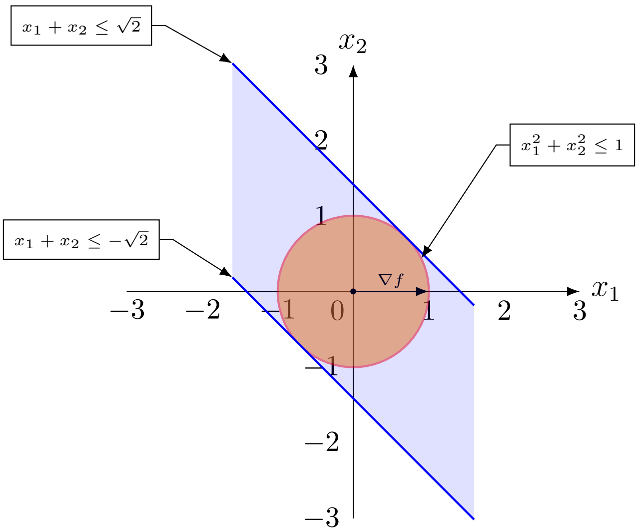

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte müssen in der Schnittmenge aus Blau und Orange liegen

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \lambda) = x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - \gamma)$$

und den Ableitungen:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \text{ (Stationarität)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \lambda_2 \cdot (x_1 + x_2 - \gamma) = 0 \text{ (Komplementarität)}$$

$$g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Um die Komplementarität zu erfüllen kann man nun verschiedene Faktoren gleich Null setzen.

Für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ erhält man einen Widerspruch in der Stationarität, ebenso für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 \neq 0$.

Für $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 = 0$ erhält man:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

mit

$$1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$$

$$2\lambda_1 x_2 = 0 \Rightarrow^{\lambda_1 \neq 0} x_2 = 0$$

Da $\lambda_1 \neq 0$ muss wegen der Komplementarität zwangsläufig gelten $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{1 - x_2^2}$ bzw. $x_1 = \pm 1$. Nun einsetzen

$$1 + 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ (ungültig)}$$

$$1 - 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

Damit erhält man den KKT-Punkt: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

Für $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ erhält man

$$x_1 + x_2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = \gamma - x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\gamma - x_2)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{2(1-\gamma^2)+\gamma^2}{4}} + \frac{1}{2}\gamma$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma \Rightarrow x_1 = \gamma - \left(\pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)$$

Für $x_1 = \gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} - \frac{1}{2}\gamma \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}$ und $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$ erhält man die Stationaritätsgleichung

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2\cdot\left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}\right) \\ 2\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)\end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Mit

$$\lambda_1 \cdot \left(\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)} + \gamma\right) + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 \cdot \left(\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)} + \gamma\right)$$

kann man einsetzen in die 1. Gleichung:

$$1 + \lambda_1 \cdot \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}\right) - \lambda_1 \cdot \left(\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)} + \gamma\right) = 0$$

und erhält

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}}\text{ , }\lambda_2 = -\frac{\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}+\gamma}{2\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}}$$

Für $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$ ist λ_1 immer positiv. Für $-\sqrt{2} < \gamma \leq -1$ ist λ_2 ebenfalls positiv. D.h. $x_1 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}$ und $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2-2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$ ist ein KKT-Punkt.

Weiterhin erhält man für $x_1 = \gamma - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)$ $\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2\cdot\left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}\right) \\ 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)\end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Und

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}}\text{ , }\lambda_2 = \frac{-\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}+\gamma}{2\sqrt{\gamma^2+2(1-\gamma^2)}}$$

Da λ_1 für $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$ immer negativ ist, ist dies kein KKT-Punkt.

Aufgabe 5

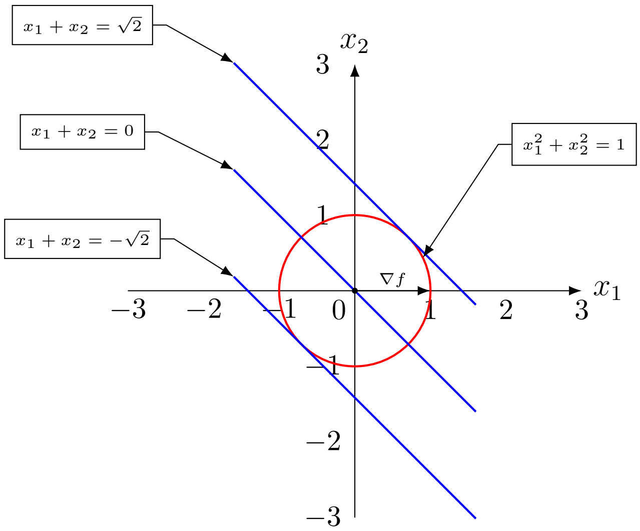

Abbildung 2: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte liegen auf der Schnittmenge zwischen Kreis und blauen Linien

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \mu) = x_1 + \mu_1 \left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) + \mu_2 \left(x_1 + x_2 - \gamma\right)$$

und den Ableitungen

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, h_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (Stationarität)}$$

sowie

$$h_1(x) = 0, h_2(x) = 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Mit

$$x_1 = \frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} \text{ und } x_2 = \frac{-\mu_2}{2\mu_1}$$

kann man in die 2. Nebenbedingung einsetzen

$$\frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} + \frac{-\mu_2}{2\mu_1} = \gamma$$

und erhält

$$\mu_2 = -\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}$$

Was man wiederum in die 1. Nebenbedingung einsetzen kann

$$\left(\frac{-\left(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}\right) - 1}{2\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{-\left(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}\right)}{2\mu_1}\right)^2 = 1$$

Dann erhält man

$$\mu_1 = \pm\frac{1}{2\cdot\sqrt{2-\gamma^2}}, \mu_2 = \mp\frac{\gamma}{2\cdot\sqrt{2-\gamma^2}} - \frac{1}{2}$$

Insgesamt erhält man also die KKT-Punkte:

$$x_1 = \sqrt{2-\gamma^2}\cdot\left(\frac{\gamma}{2\cdot\sqrt{2-\gamma^2}} - \frac{1}{2}\right), x_2 = \sqrt{2-\gamma^2}\cdot\left(\frac{\gamma}{2\cdot\sqrt{2-\gamma^2}} + \frac{1}{2}\right)$$

und

$$x_1 = -\sqrt{2-\gamma^2}\cdot\left(-\frac{\gamma}{2\cdot\sqrt{2-\gamma^2}} - \frac{1}{2}\right), x_2 = -\sqrt{2-\gamma^2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2\cdot\sqrt{2-\gamma^2}}\right)$$

Aufgabe 6

Implementierung siehe `Projekt_3.m`.

Aufgabe 7

Man bringt die Nebenbedingungen zuerst in die Form:

$$g_1(x) = -1 + x_1 + x_2 \leq 0$$
$$g_2(x) = -1 + x_1 - x_2 \leq 0$$
$$g_3(x) = -1 - x_1 + x_2 \leq 0$$
$$g_4(x) = -1 - x_1 - x_2 \leq 0$$

Die Stationaritätsgleichung lässt sich dann wie folgt aufstellen:

$$\nabla f(x) + \lambda_1\nabla g_1(x) + \lambda_2\nabla g_2(x) + \lambda_3\nabla g_3(x) + \lambda_4\nabla g_4(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - t)^3 \end{bmatrix} + \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebenso die Komplementaritätsbedingungen:

$$\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$$
$$\lambda_2 \cdot g_2(x) = 0$$
$$\lambda_3 \cdot g_3(x) = 0$$
$$\lambda_4 \cdot g_4(x) = 0$$
$$\lambda_1 \text{ , } \lambda_2 \text{ , } \lambda_3 \text{ , } \lambda_4 \geq 0$$

Wenn man den Punkt $\hat{x}$ in die Nebenbedingungen einsetzt sieht man, welche aktiv sind:

$$g_1(\hat{x}) = 0$$
$$g_2(\hat{x}) = 0$$
$$g_3(\hat{x}) = -2$$
$$g_4(\hat{x}) = -2$$

Um die Komplementaritätsbedingungen zu erfüllen, muss nun gelten: $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Die Stationaritätsgleichung verkürzt sich daher zu

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4t^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$