3. Projekt

Penalty-Verfahren & SQP-Verfahren

im Fach

Numerische Optimierung

Juni 2020

Maximilian Gaul

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Implementierung siehe `BFGS_Pen.m` und `ArmijoPen.m`.

Aufgabe 3

Tests siehe `Project_3.m`.

Aufgabe 4

Das Problem

$$f(x) = \text{min } x_1$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 - \gamma \leq 0, \gamma \geq -\sqrt{2}$$

lässt sich so graphisch darstellen:

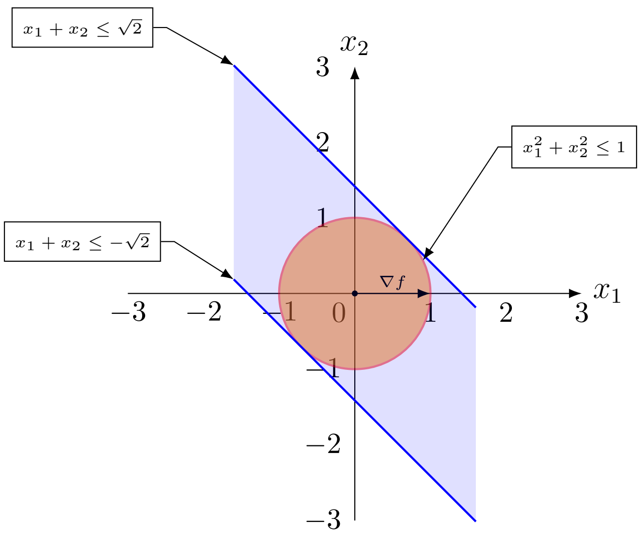

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte müssen in der Schnittmenge aus Blau und Orange liegen

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \lambda) = x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - \gamma)$$

und den Ableitungen:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \text{ (Stationarität)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \lambda_2 \cdot (x_1 + x_2 - \gamma) = 0 \text{ (Komplementarität)}$$

$$g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Um die Komplementarität zu erfüllen kann man einen der beiden Faktoren gleich Null setzen, für $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ erhält man

$$x_1 + x_2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = \gamma - x_2 \Leftrightarrow x_1 = \gamma \mp \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2 - \gamma^2}\right)$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\gamma - x_2)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 \pm \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2 - \gamma^2}\right)$$

Für $x_1 = \gamma - \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2 - \gamma^2}\right)$ und $x_2 = \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2 - \gamma^2}\right)$ erhält man:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \left(\gamma - \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2 - \gamma^2}\right)\right) \\ \gamma - \sqrt{2 - \gamma^2} \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Umformen

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \left(\gamma - \sqrt{2 - \gamma^2}\right)$$

und einsetzen

$$1 + 2\lambda_1 \left(\gamma - \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2 - \gamma^2}\right)\right) - \lambda_1 \left(\gamma - \sqrt{2 - \gamma^2}\right) = 0$$

Dann erhält man

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}}$$

Dieser Pfad funktioniert also nicht, da $\lambda_1 \geq 0$ sein muss.