

3. Projekt

***Penalty-Verfahren & SQP-Verfahren***

im Fach

Numerische Optimierung

Juni 2020

Maximilian Gaul

### Aufgabe 1

### Aufgabe 2

Implementierung siehe BFGS\_Pen.m und ArmijoPen.m.

### Aufgabe 3

Tests siehe Projekt\_3.m.

### Aufgabe 4

Das Problem

$$f(x) = \min x_1$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$g_2(x) = x_1 + x_2 - \gamma \leq 0, \gamma \geq -\sqrt{2}$$

lässt sich so graphisch darstellen:

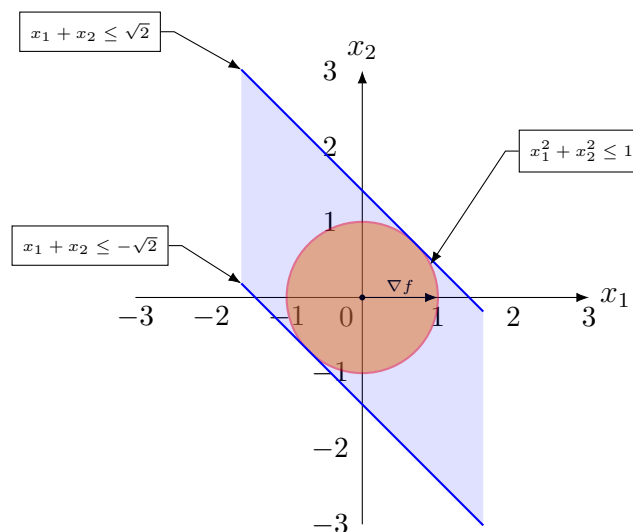


Abbildung 1: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte müssen in der Schnittmenge aus Blau und Orange liegen

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \lambda) = x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - \gamma)$$

und den Ableitungen:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \text{ (Stationarität)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \lambda_2 \cdot (x_1 + x_2 - \gamma) = 0 \text{ (Komplementarität)}$$

$$g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Um die Komplementarität zu erfüllen kann man nun verschiedene Faktoren gleich Null setzen.

Für  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = 0$  erhält man einen Widerspruch in der Stationarität, ebenso für  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 \neq 0$ .

Für  $\lambda_1 \neq 0$  und  $\lambda_2 = 0$  erhält man:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit

$$1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$$

$$2\lambda_1 x_2 = 0 \Rightarrow^{\lambda_1 \neq 0} x_2 = 0$$

Da  $\lambda_1 \neq 0$  muss wegen der Komplementarität zwangsläufig gelten  $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm \sqrt{1 - x_2^2}$  bzw.  $x_1 = \pm 1$ . Nun einsetzen

$$1 + 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ (ungültig)}$$

$$1 - 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

Damit erhält man den KKT-Punkt:  $x_1 = -1, x_2 = 0$ .

Für  $\lambda_1 \neq 0$  und  $\lambda_2 \neq 0$  erhält man

$$x_1 + x_2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = \gamma - x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\gamma - x_2)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \pm \sqrt{\frac{2(1 - \gamma^2) + \gamma^2}{4}} + \frac{1}{2}\gamma$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + 2(1 - \gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma \Rightarrow x_1 = \gamma - \left( \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + 2(1 - \gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma \right)$$

Für  $x_1 = \gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1 - \gamma^2)} - \frac{1}{2}\gamma \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1 - \gamma^2)}$  und  $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1 - \gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$  erhält man die Stationaritätsgleichung

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \left( \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} \right) \\ 2 \cdot \left( \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma \right) \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit

$$\lambda_1 \cdot \left( \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma \right) + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 \cdot \left( \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma \right)$$

kann man einsetzen in die 1. Gleichung:

$$1 + \lambda_1 \cdot \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} \right) - \lambda_1 \cdot \left( \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma \right) = 0$$

und erhält

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}, \lambda_2 = -\frac{\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}$$

Für  $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$  ist  $\lambda_1$  immer positiv. Für  $-\sqrt{2} < \gamma \leq -1$  ist  $\lambda_2$  ebenfalls positiv. D.h.  $x_1 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}$  und  $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$  ist ein KKT-Punkt.

Weiterhin erhält man für  $x_1 = \gamma - \left( -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma \right)$   
 $\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}$  und  $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \left( \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} \right) \\ 2 \cdot \left( -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma \right) \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Und

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}, \lambda_2 = \frac{-\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}$$

Da  $\lambda_1$  für  $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$  immer negativ ist, ist dies kein KKT-Punkt.

## Aufgabe 5

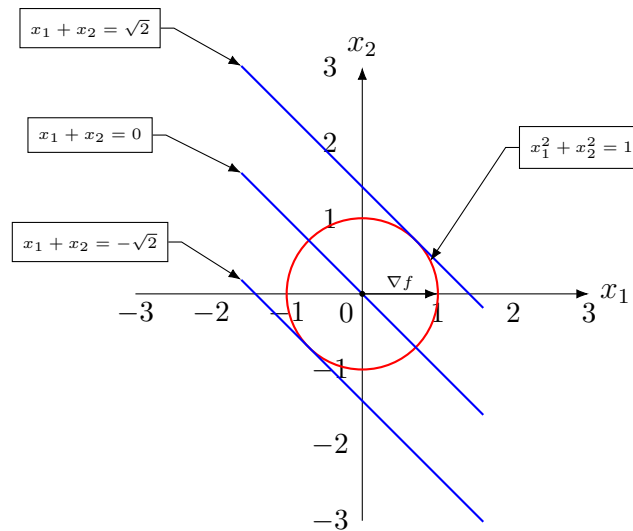


Abbildung 2: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte liegen auf der Schnittmenge zwischen Kreis und blauen Linien

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \mu) = x_1 + \mu_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + \mu_2 (x_1 + x_2 - \gamma)$$

und den Ableitungen

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, h_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Stationarität})$$

sowie

$$h_1(x) = 0, h_2(x) = 0 \quad (\text{Zulässigkeit})$$

Mit

$$x_1 = \frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} \text{ und } x_2 = \frac{-\mu_2}{2\mu_1}$$

kann man in die 2. Nebenbedingung einsetzen

$$\frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} + \frac{-\mu_2}{2\mu_1} = \gamma$$

und erhält

$$\mu_2 = -\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}$$

Was man wiederum in die 1. Nebenbedingung einsetzen kann

$$\left( \frac{-(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}) - 1}{2\mu_1} \right)^2 + \left( \frac{-(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2})}{2\mu_1} \right)^2 = 1$$

Dann erhält man

$$\mu_1 = \pm \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}}, \mu_2 = \mp \frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}} - \frac{1}{2}$$

Insgesamt erhält man also die KKT-Punkte:

$$x_1 = \sqrt{2 - \gamma^2} \cdot \left( \frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}} - \frac{1}{2} \right), x_2 = \sqrt{2 - \gamma^2} \cdot \left( \frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}} + \frac{1}{2} \right)$$

und

$$x_1 = -\sqrt{2 - \gamma^2} \cdot \left( -\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}} - \frac{1}{2} \right), x_2 = -\sqrt{2 - \gamma^2} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}} \right)$$

## Aufgabe 6

Implementierung siehe Projekt\_3.m.

## Aufgabe 7

Man bringt die Nebenbedingungen zuerst in die Form:

$$g_1(x) = -1 + x_1 + x_2 \leq 0$$

$$g_2(x) = -1 + x_1 - x_2 \leq 0$$

$$g_3(x) = -1 - x_1 + x_2 \leq 0$$

$$g_4(x) = -1 - x_1 - x_2 \leq 0$$

Die Stationaritätsgleichung lässt sich dann wie folgt aufstellen:

$$\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) + \lambda_3 \nabla g_3(x) + \lambda_4 \nabla g_4(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - t)^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebenso die Komplementaritätsbedingungen:

$$\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$$

$$\lambda_2 \cdot g_2(x) = 0$$

$$\lambda_3 \cdot g_3(x) = 0$$

$$\lambda_4 \cdot g_4(x) = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

Wenn man den Punkt  $\hat{x}$  in die Nebenbedingungen einsetzt sieht man, welche aktiv sind:

$$g_1(\hat{x}) = 0$$

$$g_2(\hat{x}) = 0$$

$$g_3(\hat{x}) = -2$$

$$g_4(\hat{x}) = -2$$

Um die Komplementaritätsbedingungen zu erfüllen, muss nun gelten:  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Die Stationaritätsgleichung verkürzt sich daher zu

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4t^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\nabla g_1$  und  $\nabla g_2$  sind linear unabhängig (LICQ erfüllt). Man erhält dann

$$\lambda_1 = -\lambda_2 + 1$$

und

$$-4t^3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{4t^3 - 1}{2}$$

Daher

$$\lambda_1 = \frac{4t^3 - 1}{2} + 1$$

Um die Komplementaritätsbedingungen zu erfüllen muss gelten

$$\frac{4t^3 - 1}{2} + 1 \geq 0 \wedge -\frac{4t^3 - 1}{2} \geq 0$$

Für  $t \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$  und  $t \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$  (ungefähr  $t \in [-0.63, 0.63]$ ) ist  $\hat{x}$  ein KKT-Punkt.

## Aufgabe 8

Wenn man die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem zeichnet:

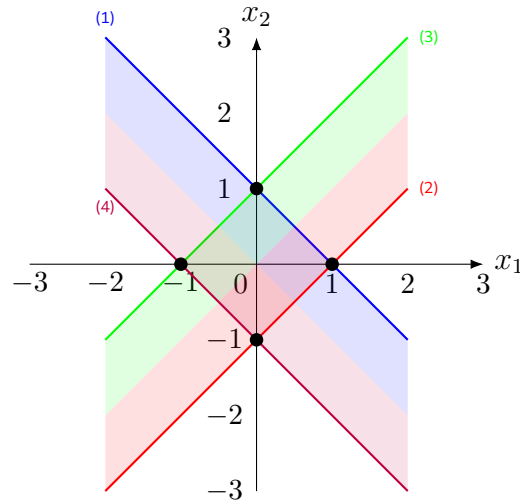


Abbildung 3: Nebenbedingungen von  $f(x_1, x_2)$

erkennt man, dass nur einseitig beschränkte Flächen entstehen, wenn entweder

(1) und (3)

(1) und (2)

(2) und (4)

(3) und (4)

oder nur eine NB gleichzeitig aktiv sind / ist (bzw. nur diese Kombinationen haben linear unabhängige Gradienten nach LICQ).

Ausgehend von der Stationaritätsgleichung:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

probiert man nun diese Möglichkeiten durch d.h. setzt Nebenbedingungen aktiv und formt durch die Komplementaritätsbedingungen um.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$

Aus den Nebenbedingungen (3) und (4) erhält man:

$$-x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 + x_1$$

$$-x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 0$$

Einsetzen in die Stationaritätsgleichung:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



und man erhält  $\lambda_3 = -0.5$ ,  $\lambda_4 = -4.5$ . Das ist also keine gültige Lösung.

- $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$

Man erhält aus den NB (2) und (4):  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$  und nach Einsetzen:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -32 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daraus dann:  $\lambda_2 = -14.5$ ,  $\lambda_4 = -17.5$ , auch keine gültige Lösung.

- $\lambda_2 = \lambda_4 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$

Aus den NB (1) und (3):  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  und

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dann:  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ ,  $\lambda_3 = -\frac{3}{2}$ , auch keine gültige Lösung.

- $\lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$

Aus NB (1) und (2) erhält man  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$  und nach Einsetzen:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

auch  $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ , also auch keine gültige Lösung.

Bisher wurde kein KKT-Punkt gefunden. Nun werden noch alle Nebenbedingungen einzeln getestet:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 \neq 0$

Aus NB (4) erhält man  $x_1 = -1 - x_2$ , Einsetzen in die Stationaritätsgleichung liefert

$$\begin{bmatrix} 2(-1 - x_2) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die 1. Gleichung umformen zu  $\lambda_4 = -2 - 2x_2$  und einsetzen in die

2. Gleichung:  $4(x_2 - 1)^3 + 2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow 4x_2^3 - 12x_2^2 + 14x_2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x_2 \cong 0.16488 \Rightarrow x_1 \cong -1.16488 \Rightarrow \lambda_4 \cong -2.32976$ , keine gültige Lösung

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0, \lambda_3 \neq 0$

Mit NB (3) erhält man  $x_2 = 1 + x_1$ , wiederum Einsetzen:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Umformen:  $\lambda_3 = 2x_1 - 3$  und in die 2. Gleichung einsetzen:

$4(1 + x_1 - 1)^3 + 2x_1 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 \cong 0.72808 \Rightarrow x_2 \cong 1.72808$

$\lambda_3 \cong -1.54384$ , keine Lösung

- $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_2 \neq 0$

Mit NB (2) erhält man  $x_1 = 1 + x_2$ , einsetzen:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Gleichung umformen zu  $\lambda_2 = 1 - 2x_2$  und in 2. Gleichung einsetzen:

$$4(x_2 - 1)^3 - 1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 \cong 0.61454 \Rightarrow x_1 = 1.61454$$

$\lambda_2 = -0.22908$ , keine Lösung

- $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_1 \neq 0$

Mit NB(1) erhält man  $x_1 = 1 - x_2$ , einsetzen in Stationaritätsgleichung

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die 1. Gleichung umformen:  $\lambda_1 = 1 + 2x_2$ , einsetzen in die 2. Gleichung:

$$4(x_2 - 1)^3 + 2x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 \cong 0.27192 \Rightarrow x_1 \cong 0.72808$$

$\lambda_1 = 1.54384$ . Hier also das erste Ergebnis mit  $\lambda \geq 0$ .

Die Lösung des Systems ist demnach  $x_1 \cong 0.72808, x_2 \cong 0.27192$   
mit  $f(x_1, x_2) \cong 0.87687$