

4. Projekt

im Fach

Numerische Optimierung

Juli 2020

Maximilian Gaul

## Aufgabe 1

Siehe GlobNewton.m.

## Aufgabe 2

Siehe auch Projekt\_4.m.

Für die Himmelblau-Funktion

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

gelten folgende Ableitungen

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1^2 + x_2 - 11) \cdot 2x_1 + 2(x_1 + x_2^2 - 7) \\ 2(x_1^2 + x_2 - 11) + 2(x_1 + x_2^2 - 7) \cdot 2x_2 \end{bmatrix}$$
$$H_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4(x_1^2 + x_2 - 11) + 8x_1^2 & 4x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 & 4(x_1 + x_2^2 - 7) + 8x_2^2 \end{bmatrix}$$

Schritt	$\mathbf{x}$	$f(x)$
1	$[0.00, 0.00]^T$	170.0
2	$[1.75, 2.75]^T$	32.26
3	$[3.76, 2.22]^T$	31.69
4	$[3.19, 1.96]^T$	1.31
5	$[3.02, 1.99]^T$	0.01
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$[3.00, 2.00]^T$	$1.10 \cdot 10^{-26}$

Abbildung 1: Verlauf von GlobNewton für  $f$  bei einer Genauigkeit von  $10^{-12}$

Schritt	$\mathbf{x}$	$f(x)$
1	$[-1.20, 1.00]^T$	125.11
2	$[-2.87, 3.87]^T$	27.30
3	$[-2.80, 3.29]^T$	1.05
4	$[-2.80, 3.14]^T$	0.00
5	$[-2.81, 3.13]^T$	$9.83 \cdot 10^{-7}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	$[-2.81, 3.13]^T$	$4.10 \cdot 10^{-29}$

Abbildung 2: Verlauf von GlobNewton für  $f$  bei einer Genauigkeit von  $10^{-12}$

Für die 2D Rosenbrock-Funktion

$$g(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

gelten die Ableitungen

$$\nabla g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix}$$

$$H_g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 800x_1^2 - 400(x_2 - x_1^2) + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix}$$

Schritt	$\mathbf{x}$	$g(\mathbf{x})$
1	$[0.00, 0.00]^T$	1.00
2	$[0.25, 0.00]^T$	0.95
3	$[0.31, 0.09]^T$	0.48
4	$[0.52, 0.22]^T$	0.46
5	$[0.57, 0.32]^T$	0.19
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$[1.00, 1.00]^T$	$8.21 \cdot 10^{-28}$

Abbildung 3: Verlauf von GlobNewton für  $g$  bei einer Genauigkeit von  $10^{-12}$

Schritt	$\mathbf{x}$	$g(\mathbf{x})$
1	$[-1.20, 1.00]^T$	24.20
2	$[-1.18, 1.38]^T$	4.73
3	$[-0.93, 0.81]^T$	4.09
4	$[-0.78, 0.59]^T$	3.23
5	$[-0.46, 0.11]^T$	3.21
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	$[1.00, 1.00]^T$	$4.93 \cdot 10^{-28}$

Abbildung 4: Verlauf von GlobNewton für  $g$  bei einer Genauigkeit von  $10^{-12}$

### Aufgabe 3

Die Hesse-Matrizen der beiden Funktionen  $f$  und  $g$  ist stetig und kontinuierlich, d.h. es kann in beiden Fällen vom Zutreffen der Lipschitz-Bedingung

$$\|H(x) - H(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

ausgegangen werden. Weiterhin enthalten beide Funktionen keine mehrfachen Nullstellen durch die das Newton-Verfahren gebremst werden könnte. Aufgrunddessen konvergieren beide Funktionen lokal-quadratisch (sollte die

Hesse-Matrix eine Abstiegsrichtung liefern). Global gesehen konvergiert das Newton-Verfahren je nach Schrittweitenstrategie (ob effizient oder nicht) und Startwert entweder gar nicht aufgrund zu kleiner Schrittweiten (z.B. normales Armijo-Verfahren) oder zumindest nur superlinearer. Die lokale quadratische Konvergenz der Himmelblau-Funktion kann man in (1) und (2) zwischen Schritt 3 und 4 bzw. 2 und 3 gut erkennen. Da beide Funktionen nicht quadratisch sind, konvergiert das Verfahren nicht in einem einzigen Schritt.

Bei Quasi-Newton-Verfahren mit approximierter Hesse-Matrix und effizienter Schrittweitenstrategie kann man global gesehen von einer superlinearen Konvergenz für beide Funktionen  $f$  und  $g$  ausgehen. Im Gegensatz zum reinen Newton-Verfahren kann man die Update-Formeln der Hesse-Matrix so wählen, dass eine Abstiegsrichtung entsteht. Broyden et al. haben 1973 in *On the Local and Superlinear Convergence of Quasi-Newton Methods* gezeigt, dass die Fehler in der Approximation von  $H_k$  begrenzt sind und sich nicht unbeschränkt erhöhen und daraus die superlineare Konvergenz abgeleitet werden kann.

Weiterhin sind beide Funktionen nicht quadratischer Natur ansonsten könnte die Schrittweite ggf. exakt berechnet werden.

#### Aufgabe 4

Das Optimierungsproblem

$$\min -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$3x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_3 \leq 3$$

$$x_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3\}$$

hat folgende Normalform

$$\min -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \text{ (I)}$$

$$3x_2 + x_3 + x_5 = 6 \text{ (II)}$$

$$x_1 + x_6 = 2 \text{ (III)}$$

$$x_3 + x_7 = 3 \text{ (IV)}$$

$$x_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

## Aufgabe 5

	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
<i>I</i>	<b>✗</b>				
<i>II</i>	<b>✓</b>				
<i>III</i>	<b>✓</b>				
<i>IV</i>	<b>✓</b>				