3. Projekt

Penalty-Verfahren & SQP-Verfahren

im Fach

Numerische Optimierung

Juni 2020

Maximilian Gaul

Aufgabe 1

Für das Problem

$$\text{min } f(x) = 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0$$
$$h_2(x) = 8x_1 + 14x_2 - 7x_3 - 56 = 0$$

kann man die Lagrange-Funktion aufstellen

$$L(x, \mu) = 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25) + \mu_2(8x_1 + 14x_2 - 7x_3 - 56)$$

sowie deren Ableitung bestimmen

$$\nabla L = \nabla f(x) + \mu_1 \nabla h_1(x) + \mu_2 \nabla h_2(x)$$

mit

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 - x_3 \\ -4x_2 - x_1 \\ -2x_3 - x_1 \end{bmatrix} \; \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 2_x1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} \; \nabla h_2(x) = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Stationaritätsgleichung

$$\begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 - x_3 \\ -4x_2 - x_1 \\ -2x_3 - x_1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zudem müssen folgende Zulässigkeiten gelten: $h_1(\hat{x}) = 0, h_2(\hat{x}) = 0$.
Außerdem muss *LICQ* gelten: $\nabla h_1(\hat{x}) + k \cdot \nabla h_2(\hat{x}) = 0$ nur dann wenn $k = 0$ ($\Rightarrow$ linear unabhängig).

Aufgabe 2

Implementierung siehe `BFGS_Pen.m` und `ArmijoPen.m`.

Aufgabe 3

Tests siehe `Projekt_3.m`.

Aufgabe 4

Das Problem

$$f(x) = \text{min } x_1$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 - \gamma \leq 0, \gamma \geq -\sqrt{2}$$

lässt sich so graphisch darstellen:

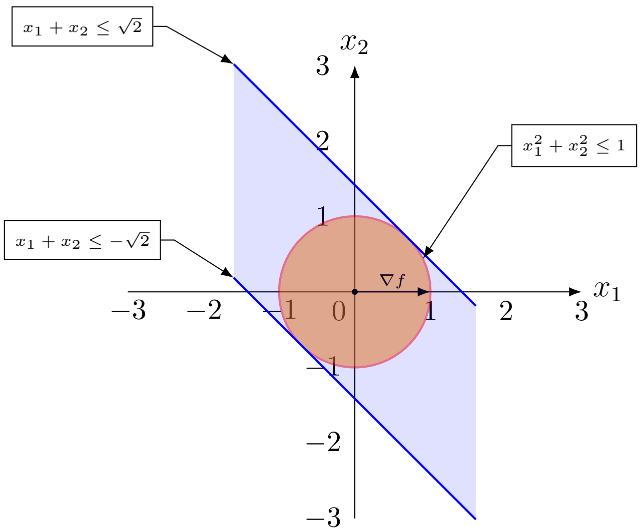

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte müssen in der Schnittmenge aus Blau und Orange liegen

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \lambda) = x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - \gamma)$$

und den Ableitungen:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \text{ (Stationarität)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \lambda_2 \cdot (x_1 + x_2 - \gamma) = 0 \text{ (Komplementarität)}$$

$$g_1(x) \leq 0,\ g_2(x) \leq 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Um die Komplementarität zu erfüllen kann man nun verschiedene Faktoren gleich Null setzen.

Für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ erhält man einen Widerspruch in der Stationarität, ebenso für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 \neq 0$.

Für $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 = 0$ erhält man:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit

$$1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$$

$$2\lambda_1 x_2 = 0 \Rightarrow^{\lambda_1 \neq 0} x_2 = 0$$

Da $\lambda_1 \neq 0$ muss wegen der Komplementarität zwangsläufig gelten $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{1 - x_2^2}$ bzw. $x_1 = \pm 1$. Nun einsetzen

$$1 + 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ (ungültig)}$$

$$1 - 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

Damit erhält man den KKT-Punkt: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

Für $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ erhält man

$$x_1 + x_2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = \gamma - x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\gamma - x_2)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{2(1-\gamma^2) + \gamma^2}{4}} + \frac{1}{2}\gamma$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma \Rightarrow x_1 = \gamma - \left(\pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)$$

Für $x_1 = \gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} - \frac{1}{2}\gamma \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}$ und $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$ erhält man die Stationaritätsgleichung

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}\right) \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right) \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit

$$\lambda_1 \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma\right) + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma\right)$$

kann man einsetzen in die 1. Gleichung:

$$1 + \lambda_1 \cdot \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}\right) - \lambda_1 \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma\right) = 0$$

und erhält

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}, \lambda_2 = -\frac{\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}$$

Für $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$ ist λ_1 immer positiv. Für $-\sqrt{2} < \gamma \leq -1$ ist λ_2 ebenfalls positiv. D.h. $x_1 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}$ und $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$ ist ein KKT-Punkt.

Weiterhin erhält man für $x_1 = \gamma - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)$
$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}\right) \\ 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right) \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Und

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}, \lambda_2 = \frac{-\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}$$

Da λ_1 für $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$ immer negativ ist, ist dies kein KKT-Punkt.

Aufgabe 5

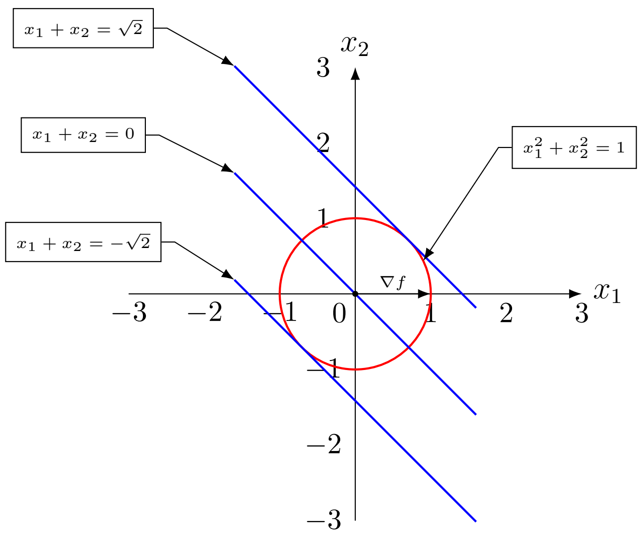

Abbildung 2: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte liegen auf der Schnittmenge zwischen Kreis und blauen Linien

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x,\mu) = x_1 + \mu_1 \left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) + \mu_2 \left(x_1 + x_2 - \gamma\right)$$

und den Ableitungen

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, h_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (Stationarität)}$$

sowie

$$h_1(x) = 0, h_2(x) = 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Mit

$$x_1 = \frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} \text{ und } x_2 = \frac{-\mu_2}{2\mu_1}$$

kann man in die 2. Nebenbedingung einsetzen

$$\frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} + \frac{-\mu_2}{2\mu_1} = \gamma$$

und erhält

$$\mu_2 = -\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}$$

Was man wiederum in die 1. Nebenbedingung einsetzen kann

$$\left(\frac{-\left(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}\right) - 1}{2\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{-\left(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}\right)}{2\mu_1}\right)^2 = 1$$

Dann erhält man

$$\mu_1 = \pm\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}}, \mu_2 = \mp\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}} - \frac{1}{2}$$

Insgesamt erhält man also die KKT-Punkte:

$$x_1 = \sqrt{2-\gamma^2} \cdot \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}} - \frac{1}{2}\right), x_2 = \sqrt{2-\gamma^2} \cdot \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}} + \frac{1}{2}\right)$$

und

$$x_1 = -\sqrt{2-\gamma^2} \cdot \left(-\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}} - \frac{1}{2}\right), x_2 = -\sqrt{2-\gamma^2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}}\right)$$

Aufgabe 6

Man löst das Problem

$$\text{min } x_1$$

mit den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 \leq 1$$

mit dem Matlab-Befehl `fmincon` indem man die Ungleichungsnebenbedingungen in einer separaten Funktion definiert:

```
% Ungleichheitsbedingungen aus Aufgabe 4 für fmincon
function [c,ceq] = confunNeqG(g1, g2, x)
    % Nonlinear inequality constraints
    c = [g1(x), g2(x)];
    % Nonlinear equality constraints
    ceq = [];
end
```

und dann `fmincon(g, x0, [], [], [], [], [], [], confunNeqG)` aufruft. Das Ergebnis ist $x_1 = -1, x_2 = 0$.

Ähnlich verhält es sich mit dem Problem

$$\text{min } x_1$$

und den Nebenbedingungen

$$h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 = 1$$
$$h_2(x) = x_1 + x_2 = 1$$

Hier wird folgende Matlab-Funktion verwendet:

```
% Gleichheitsbedingungen aus Aufgabe 5 für fmincon
function [c,ceq] = confuneqG(h1, h2, x)
    % Nonlinear inequality constraints
    c = [];
    % Nonlinear equality constraints
    ceq = [h1(x), h2(x)];
end
```

Das Ergebnis ist $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Konkrete Implementierung siehe `Projekt_3.m`.

Aufgabe 7

Man bringt die Nebenbedingungen zuerst in die Form:

$$g_1(x) = -1 + x_1 + x_2 \leq 0$$
$$g_2(x) = -1 + x_1 - x_2 \leq 0$$
$$g_3(x) = -1 - x_1 + x_2 \leq 0$$

$$g_4(x) = -1 - x_1 - x_2 \leq 0$$

Die Stationaritätsgleichung lässt sich dann wie folgt aufstellen:

$$\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) + \lambda_3 \nabla g_3(x) + \lambda_4 \nabla g_4(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - t)^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebenso die Komplementaritätsbedingungen:

$$\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$$
$$\lambda_2 \cdot g_2(x) = 0$$
$$\lambda_3 \cdot g_3(x) = 0$$
$$\lambda_4 \cdot g_4(x) = 0$$
$$\lambda_1 \, , \lambda_2 \, , \lambda_3 \, , \lambda_4 \geq 0$$

Wenn man den Punkt $\hat{x}$ in die Nebenbedingungen einsetzt sieht man, welche aktiv sind:

$$g_1(\hat{x}) = 0$$
$$g_2(\hat{x}) = 0$$
$$g_3(\hat{x}) = -2$$
$$g_4(\hat{x}) = -2$$

Um die Komplementaritätsbedingungen zu erfüllen, muss nun gelten: $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Die Stationaritätsgleichung verkürzt sich daher zu

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4t^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

∇g_1 und ∇g_2 sind linear unabhängig (*LICQ* erfüllt). Man erhält dann

$$\lambda_1 = -\lambda_2 + 1$$

und

$$-4t^3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{4t^3 - 1}{2}$$

Daher

$$\lambda_1 = \frac{4t^3 - 1}{2} + 1$$

Um die Komplementaritätsbedingungen zu erfüllen muss gelten

$$\frac{4t^3-1}{2}+1 \geq 0 \wedge -\frac{4t^3-1}{2} \geq 0$$

Für $t \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$ und $t \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$ (ungefähr $t \in [-0.63, 0.63]$) ist $\hat{x}$ ein KKT-Punkt.

Aufgabe 8

Wenn man die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem zeichnet:

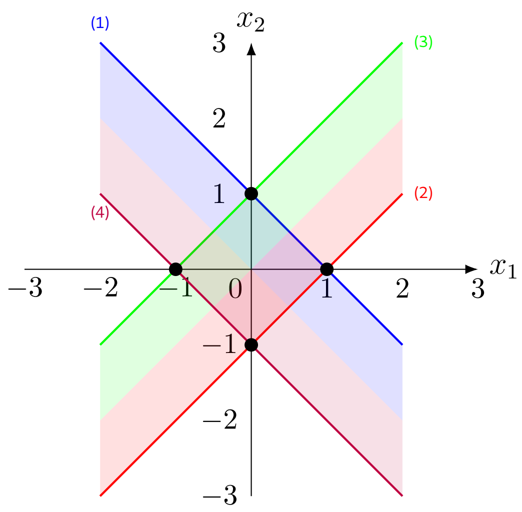

Abbildung 3: Nebenbedingungen von $f(x_1, x_2)$

erkennt man, das nur einseitig beschränkte Flächen entstehen, wenn entweder

(1) und (3)

(1) und (2)

(2) und (4)

(3) und (4)

oder nur eine NB gleichzeitig aktiv sind / ist (bzw. nur diese Kombinationen haben linear unabhängige Gradienten nach *LICQ*).

Ausgehend von der Stationaritätsgleichung:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1-1.5) \\ 4(x_2-1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

probiert man nun diese Möglichkeiten durch d.h. setzt Nebenbedingungen aktiv und formt durch die Komplementaritätsbedingungen um.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$
  Aus den Nebenbedingungen (3) und (4) erhält man:

  $$-x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 + x_1$$
  $$-x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 0$$

  Einsetzen in die Stationaritätsgleichung:

  $$\begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  und man erhält $\lambda_3 = -0.5$, $\lambda_4 = -4.5$. Das ist also keine gültige Lösung.

- $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$
  Man erhält aus den NB (2) und (4): $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und nach Einsetzen:

  $$\begin{bmatrix} -3 \\ -32 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Daraus dann: $\lambda_2 = -14.5$, $\lambda_4 = -17.5$, auch keine gültige Lösung.

- $\lambda_2 = \lambda_4 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$
  Aus den NB (1) und (3): $x_1 = 0, x_2 = 1$ und

  $$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  dann: $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = -\frac{3}{2}$, auch keine gültige Lösung.

- $\lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$
  Aus NB (1) und (2) erhält man $x_1 = 1, x_2 = 0$ und nach Einsetzen:

  $$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  auch $\lambda_1 = \frac{5}{2}, \lambda_2 = -\frac{3}{2}$, also auch keine gültige Lösung.

Bisher wurde kein KKT-Punkt gefunden. Nun werden noch alle Nebenbedingungen einzeln getestet:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 \neq 0$
  Aus NB (4) erhält man $x_1 = -1 - x_2$, Einsetzen in die Stationaritätsgleichung liefert

  $$\begin{bmatrix} 2(-1 - x_2) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Die 1. Gleichung umformen zu $\lambda_4 = -2 - 2x_2$ und einsetzen in die
  2. Gleichung: $4(x_2 - 1)^3 + 2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow 4x_2^3 - 12x_2^2 + 14x_2 - 2 = 0$
  $\Leftrightarrow x_2 \cong 0.16488 \Rightarrow x_1 \cong -1.16488 \Rightarrow \lambda_4 \cong -2.32976$, keine gültige Lösung

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0, \lambda_3 \neq 0$
  Mit NB (3) erhält man $x_2 = 1 + x_1$, wiederum Einsetzen:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Umformen: $\lambda_3 = 2x_1 - 3$ und in die 2. Gleichung einsetzen:
  $4(1 + x_1 - 1)^3 + 2x_1 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 \cong 0.72808 \Rightarrow x_2 \cong 1.72808$
  $\lambda_3 \cong -1.54384$, keine Lösung

- $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_2 \neq 0$
  Mit NB (2) erhält man $x_1 = 1 + x_2$, einsetzen:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  1. Gleichung umformen zu $\lambda_2 = 1 - 2x_2$ und in 2. Gleichung einsetzen:
  $4(x_2 - 1)^3 - 1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 \cong 0.61454 \Rightarrow x_1 = 1.61454$
  $\lambda_2 = -0.22908$, keine Lösung

- $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_1 \neq 0$
  Mit NB(1) erhält man $x_1 = 1 - x_2$, einsetzen in Stationaritätsgleichung

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Die 1. Gleichung umformen: $\lambda_1 = 1 + 2x_2$, einsetzen in die 2. Gleichung:
  $4(x_2 - 1)^3 + 2x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 \cong 0.27192 \Rightarrow x_1 \cong 0.72808$
  $\lambda_1 = 1.54384$. Hier also das erste Ergebnis mit $\lambda \geq 0$.

Die Lösung des Systems ist demnach $x_1 \cong 0.72808, x_2 \cong 0.27192$
mit $f(x_1, x_2) \cong 0.87687$

Aufgabe 9

Betrachtet wird das Problem

$$\text{min } g(x) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 0.75)^4$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1 + x_1 \leq 1$$
$$g_2(x) = x_1 - x_1 \leq 1$$
$$g_3(x) = -x_1 + x_1 \leq 1$$
$$g_4(x) = -x_1 - x_1 \leq 1$$

mit der Lagrange-Funktion

$$L(x) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 0.75)^4$$

$$+\lambda_1(-1 + x_1 + x_2)$$
$$+\lambda_2(-1 + x_1 - x_2)$$
$$+\lambda_3(-1 - x_1 + x_2)$$
$$+\lambda_4(-1 - x_1 - x_2)$$

Für das SQP-Verfahren benötigt man sowohl den Gradienten der Zielfunktion als auch den der Lagrange-Funktion:

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - 0.75)^3 \end{bmatrix} \; \nabla L = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \\ 4(x_2 - 0.75)^3 + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \end{bmatrix}$$

und weiterhin auch die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12(x_2 - 0.75)^2 \end{bmatrix}$$

Weiterhin benötigt man die Gradienten der Nebenbedingungen:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \; \nabla g_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \; \nabla g_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Mit $B = \nabla^2 L$ kann man das quadratische Hilfsproblem aufstellen:

$$\text{min } \nabla g(x)^T d + \frac{1}{2} d^T B d$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) + \nabla g_1(x)^T d \leq 0 \Leftrightarrow \nabla g_1(x)^T d \leq -g_1(x)$$
$$g_2(x) + \nabla g_2(x)^T d \leq 0 \Leftrightarrow \nabla g_2(x)^T d \leq -g_2(x)$$
$$g_3(x) + \nabla g_3(x)^T d \leq 0 \Leftrightarrow \nabla g_3(x)^T d \leq -g_3(x)$$
$$g_4(x) + \nabla g_4(x)^T d \leq 0 \Leftrightarrow \nabla g_4(x)^T d \leq -g_4(x)$$

In Matrixschreibweise $A \cdot d = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot d \leq - \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \\ g_4(x) \end{bmatrix}$$

Das Problem wird mit `quadprog` wie folgt gelöst (konkrete Implementierung `Projekt_3.m`)

```
g1 = @(x) -1 + x(1) + x(2);
g2 = @(x) -1 + x(1) - x(2);
g3 = @(x) -1 - x(1) + x(2);
g4 = @(x) -1 - x(1) - x(2);

g_deriv = @(x) [2 * ( x(1) - 1.5 ); 4 * ( x(2) - 0.75).^3];
g_hessian = @(x) [ 2, 0; 0, 12 * ( x(2) - 0.75).^2 ];
```

```
x0 = [0; 0];
n = x0;

b = -[g1(n), g2(n), g3(n), g4(n)];
A = [1, 1; 1, -1; -1, 1; -1, -1];

ret = quadprog(g_hessian(n), g_deriv(n), A, b);

n = n + ret;
```

Nach dem 1. Schritt erhält man $n = \begin{bmatrix} 0.9214 \\ 0.0786 \end{bmatrix}$ mit $g(n) = 0.5380$.

Aufgabe 10

Für die Ungleichungsnebenbedingungen benötigt man eine weitere Funktion in Matlab:

```
% Ungleichheitsbedingungen aus Aufgabe 8 für fmincon
function [c,ceq] = confunNeqG(g1, g2, g3, g4, x)
    % Nonlinear inequality constraints
    c = [g1(x), g2(x), g3(x), g4(x)];
    % Nonlinear equality constraints
    ceq = [];
end
```

So dass man das Problem mit Startwert $x^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ wie folgt lösen kann (konkrete Implementierung siehe `Projekt_3.m`)

```
t = 0.75;
g = @(x) ( x(1) - 1.5 ).^2 + ( x(2) - t ).^4;

options = optimoptions("fmincon", "Algorithm", "sqp");
ret = fmincon(g, [2; 3], [], [], [], [], [], [], confunNeqG, options);
```

Man erhält $x = \begin{bmatrix} 0.9141 \\ 0.0859 \end{bmatrix}$ mit $g(x) = 0.5378$.