

1. Projekt

Ableitungsfreie Methoden

im Fach

Numerische Optimierung

Mai 2020

Maximilian Gaul

Aufgabe 1

Teilintervalle und Funktionswerte des Bisektionsverfahrens aus `Bisektion.m` für das Minimum von

$$h(x) = e^{-x} + 0.5x^2$$

mit dem Startintervall $[0, 1]$ nach 10 Schritten:

| Schritt | Intervall | Funktionswert |
|---------|--------------|------------------|
| 1 | [0.00, 1.00] | $h(0.50)=0.7315$ |
| 2 | [0.50, 1.00] | $h(0.75)=0.7536$ |
| 3 | [0.50, 0.75] | $h(0.63)=0.7306$ |
| 4 | [0.50, 0.63] | $h(0.56)=0.7280$ |
| 5 | [0.56, 0.63] | $h(0.59)=0.7285$ |
| 6 | [0.56, 0.59] | $h(0.58)=0.7281$ |
| 7 | [0.56, 0.58] | $h(0.57)=0.7280$ |
| 8 | [0.56, 0.57] | $h(0.57)=0.7280$ |
| 9 | [0.57, 0.57] | $h(0.57)=0.7280$ |
| 10 | [0.57, 0.57] | $h(0.57)=0.7280$ |

Abbildung 1: Die ersten 10 Schritte des Bisektionsverfahrens mit Startintervall $[0, 1]$ für $h(x)$

Die Intervallgrenzen und Funktionsauswertungen sind wie folgt verteilt:

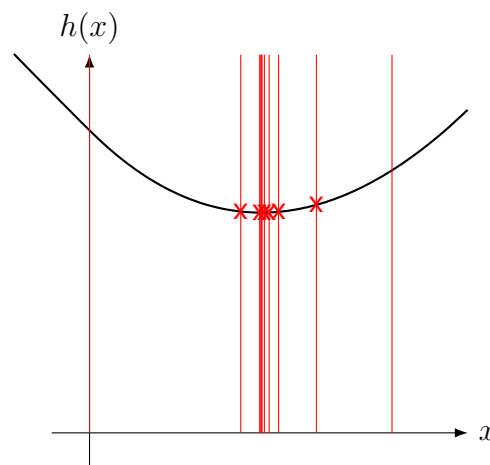


Abbildung 2: $h(x)$ mit Intervallgrenzen und Auswertungspunkten des Bisektionsverfahrens

Aufgabe 2

Siehe `Mutation.m`.

Aufgabe 3

Nachfolgende Erläuterungen beziehen sich auf

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \text{ mit Startwert } f_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$g(x_1, x_2) = 100 \cdot (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \text{ mit Startwert } g_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Eine Möglichkeit für ein Abbruchkriterium ist die Anzahl an Iterationen, d.h. der Algorithmus stoppt nach einer bestimmten Anzahl an Durchläufen und gibt den bis dahin berechneten Wert aus. Je nach Funktion und Zufallsvektoren kann die Genauigkeit des Ergebnisses stark schwanken. Während für eine festgelegte obere Grenze an Durchläufen für eine simple Funktion ein Minimum bereits ausreichend genau bestimmt werden kann, benötigt eine komplexere Funktion ggf. weitaus mehr Durchläufe. Die Anzahl an Iterationen ist also kein adaptives Kriterium.

Weiterhin könnte auch der Betrag aus der Differenz des aktuellen Funktionswertes und des letzten Funktionswertes als Abbruchkriterium funktionieren. Dabei aktualisiert man die zu überprüfenden Werte nur, sofern eine Verbesserung eingetreten ist (ansonsten wären letzter und aktueller Funktionswert eventuell gleich). Ist der Differenzbetrag kleiner als eine festgelegte Toleranz, endet der Algorithmus. Typische Werte sind hier z.B. 10^{-4} oder 10^{-8} .

| Kriterium | Funktion | Genauigkeit | Anzahl Schritte |
|-----------------|----------|-------------|-----------------|
| Differenzbetrag | f | 10^{-6} | 4.924.700 |
| Differenzbetrag | f | 10^{-6} | 282.179 |
| Differenzbetrag | f | 10^{-6} | 24.907 |
| Differenzbetrag | g | 10^{-6} | 36.655 |
| Differenzbetrag | g | 10^{-6} | 9.758 |
| Differenzbetrag | g | 10^{-6} | 882 |

Abbildung 3: Einfluss des Zuals auf die Anzahl an Durchläufen für eine Genauigkeit von 10^{-6} bei festem α

Durch die Wahl des Differenzbetrages kann man vom Zufall profitieren und mit verhältnismäßig wenigen Schritten zu einer guten Genauigkeit kommen. Wählt man dagegen die Anzahl der Iterationen, muss man ggf. neu rechnen wenn das Ergebnis noch zu ungenau ist:

| Abbruchkriterium | Funktion | Genauigkeit | Anzahl Schritte |
|--------------------|----------|-------------------|-----------------|
| Anzahl Iterationen | f | $1 \cdot 10^{-5}$ | 225.000 |
| Anzahl Iterationen | f | $7 \cdot 10^{-6}$ | 225.000 |
| Anzahl Iterationen | f | $2 \cdot 10^{-8}$ | 225.000 |
| Anzahl Iterationen | g | $2 \cdot 10^{-6}$ | 15.000 |
| Anzahl Iterationen | g | $6 \cdot 10^{-7}$ | 15.000 |
| Anzahl Iterationen | g | $1 \cdot 10^{-8}$ | 15.000 |

Abbildung 4: Einfluss des Zufalls auf die Genauigkeit bei einer gegebenen Anzahl an Durchläufen bei festem α

Der Parameter α bestimmt den Anteil des Zufallsvektors für den Wert von \hat{x} . Kleine Werte von α bedeuten eine höhere Wahrscheinlichkeit, dass sich der Funktionswert verbessert (die Verbesserung fällt aber möglicherweise kleiner aus) da sich besonders in der Nähe eines Minimums, bei quadratischen oder Funktionen 4. Grades der Funktionswert stark ändern und man leicht über das Ziel hinaus schießen kann wenn man zu große Schritte geht (ähnlich wie bei einem Abstiegsverfahren). Falls die Ableitung der Funktion zur Verfügung steht (tut sie hier wahrscheinlich nicht da das Projekt *Ableitungsfreie Methoden* heißt), könnte man ein Verfahren zur Schrittweitensteuerung implementieren (z.B. nach Armijo $\varphi(\alpha) := f(x + \alpha r)$).

| Abbruchkriterium | Funktion | Genauigkeit | Anzahl Schritte ₂₀₀ | α |
|------------------|----------|-------------|--------------------------------|----------|
| Differenzbetrag | f | 10^{-4} | 238.992 | 1 |
| Differenzbetrag | f | 10^{-4} | 190.980 | 0.5 |
| Differenzbetrag | f | 10^{-4} | 19.557 | 0.25 |
| Differenzbetrag | f | 10^{-4} | 9.025 | 0.125 |
| Differenzbetrag | g | 10^{-4} | 41.688 | 1 |
| Differenzbetrag | g | 10^{-4} | 1.878 | 0.5 |
| Differenzbetrag | g | 10^{-4} | 1.101 | 0.25 |
| Differenzbetrag | g | 10^{-4} | 383 | 0.125 |

Abbildung 5: Einfluss von α auf den Durchschnitt von 200 Durchläufen für eine Genauigkeit von 10^{-4}

Zu Beginn von sind die Sprünge der Funktionswerte relativ groß, werden dann aber immer kleiner:

| Funktion | x | Funktionswert |
|----------|-------------|---------------|
| f | [2.10 3.82] | 101.61 |
| f | [1.85 3.60] | 76.25 |
| f | [2.11 3.55] | 68.41 |
| f | [2.29 3.37] | 50.06 |
| f | [2.02 3.03] | 32.96 |
| f | [2.39 2.68] | 13.39 |
| f | [2.41 2.24] | 9.01 |
| f | [2.42 2.39] | 8.99 |
| f | [2.71 2.37] | 3.44 |
| f | [2.81 2.32] | 2.03 |
| f | [3.20 1.88] | 1.35 |
| f | [3.09 2.12] | 0.80 |
| f | [2.98 1.79] | 0.77 |

Abbildung 6: Die ersten Schritte von Mutation mit $\alpha = 1$

Eine Strategie könnte daher sein, α erst klein zu wählen (z.B. 0.125) und dann mit jeder Iteration zu vergrößern dabei aber nicht über eine obere Schranke zu kommen (z.B. 0.5). Dies geschieht unter der Annahme, dass der Algorithmus zuerst die richtige Richtung finden muss, durch zu große Sprünge verpasst er es im ungünstigen Fall.

| Funktion | Genauigkeit | Anzahl Schritte ₆₀₀ | α | Verstärkungsfaktor |
|----------|-------------|--------------------------------|----------|--------------------|
| f | 10^{-4} | 5.062 | 0.1250 | 1.1000 |
| f | 10^{-4} | 3.660 | 0.1250 | 1.0500 |
| f | 10^{-4} | 3.850 | 0.1250 | 1.0250 |
| f | 10^{-4} | 6.639 | 0.1250 | 1.0125 |
| g | 10^{-4} | 438 | 0.1250 | 1.1000 |
| g | 10^{-4} | 386 | 0.1250 | 1.0500 |
| g | 10^{-4} | 368 | 0.1250 | 1.0250 |
| g | 10^{-4} | 771 | 0.1250 | 1.0125 |

Abbildung 7: Einfluss von α und einem Verstärkungsfaktor auf den Durchschnitt an Iterationen für eine Genauigkeit von 10^{-4}

Aufgabe 4

Vergleich der Rechenzeit für die Funktionen f , g , h mit dem Bisektions- und Mutation-Selektion-Verfahren sowie `fminsearch`. Da das Bisektionsverfahren nur im ein-dimensionalen Fall funktioniert wird es nur auf h angewendet.

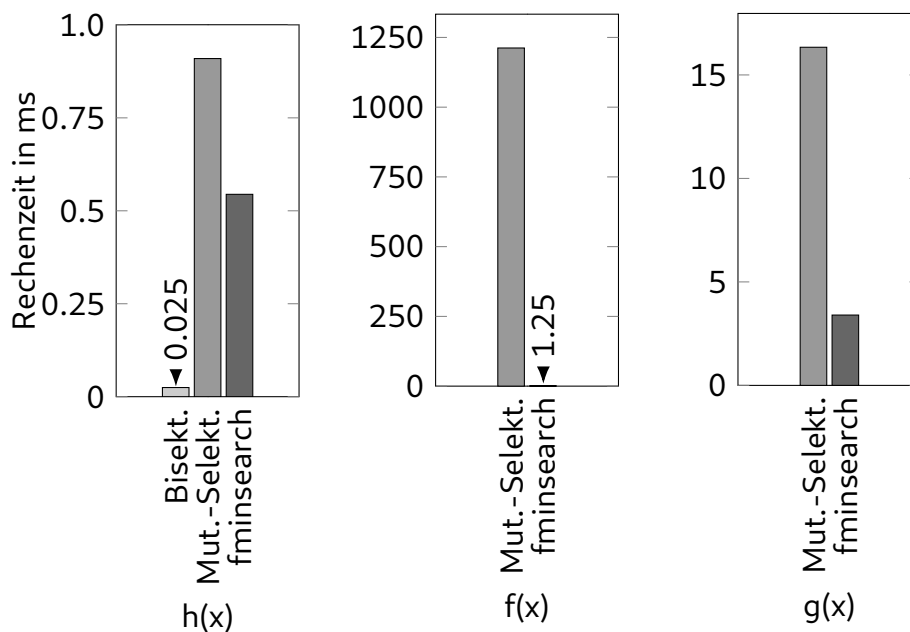


Abbildung 8: Vergleich der Rechenzeit für eine Genauigkeit von 10^{-6} (Durchschnitt aus 1000 Durchläufen)

Aufgabe 5

Die Bedingung der `while`-Schleife bezüglich der Anzahl an Iterationen bleibt erhalten. Direkt danach wird nun aber die Standardabweichung der Funktionswerte an den Ecken berechnet und mit der Toleranz `options.TolX` verglichen (siehe `fminsearch2.m` Zeile 328ff). Dieses Abbruchkriterium ist ungeeignet für Funktionen, die über einen größeren Wertebereich sehr ähnliche Funktionswerte haben (d.h. sehr flach sind). Daraus folgt, dass der Mittelwert \bar{f} sehr ähnlich zu den einzelnen Funktionswerten ist, die Standardabweichung ist also niedrig obwohl die Eckpunkte des Simplex weit auseinander liegen können.

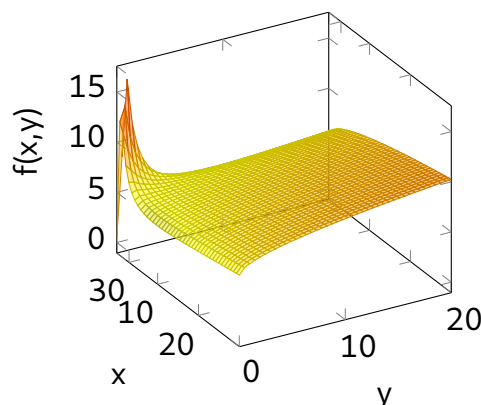


Abbildung 9: Beispiel für eine Funktion, bei der das Standardabweichungskriterium problematisch sein könnte: $f(x, y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 15 \cdot e^{-\sqrt{\ln(x+y)^2}}$

Aufgabe 6

Berechnet werden die ersten vier Iterationen des Nelder-Mead-Algorithmus von

$$g(x_1, x_2) = 100 \cdot (x_2 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$$

mit den Parametern $n = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$ und $\gamma = 1$.

$$x^{(0,0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Damit erhält man die Punkte $x^{(0,1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x^{(0,2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ und den Startsimplex

$$S_0 = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

k = 0

$$\max\{f(x^{(0,0)}) = 1600, f(x^{(0,1)}) = 8101, f(x^{(0,2)}) = 1604\} = f(x^{(0,1)})$$

$$s_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \text{ und } x_0 = x^{(0,1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Reflexion: $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + 1 \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ mit $f(\hat{x}_0) = 25$
- Expansion: $\hat{x}_0^* = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ mit $f(\hat{x}_0^*) = 25$

Nach dem 1. Schritt erhält man den Simplex

$$S_1 = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

k = 1

$$\max\{f(x^{(1,0)}) = 1600, f(x^{(1,1)}) = 25, f(x^{(1,2)}) = 1604\} = f(x^{(1,2)})$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix} \text{ und } x_1 = x^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Reflexion: $\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix} + 1 \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ mit $f(\hat{x}_1) = 9$
- Expansion: $\hat{x}_1^* = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$ mit $f(\hat{x}_1^*) = 112.25$

Nach dem 2. Schritt erhält man den Simplex

$$S_2 = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right)$$

k = 2

$$\max\{f(x^{(2,0)}) = 1600, f(x^{(2,1)}) = 25, f(x^{(2,2)}) = 9\} = f(x^{(2,0)})$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ und } x_2 = x^{(2,0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Reflexion: $\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ mit $f(\hat{x}_2) = 1664$
- Innere Kontraktion: $\hat{x}_2^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ mit $f(\hat{x}_2^*) = 104$

Nach dem 3. Schritt erhält man den Simplex

$$S_3 = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right)$$

k = 3

$$\max\{f(x^{(3,0)}) = 104, f(x^{(3,1)}) = 25, f(x^{(3,2)}) = 9\} = f(x^{(3,0)})$$

$$s_3 = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ und } x_3 = x^{(3,0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

- Reflexion: $\hat{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ mit $f(\hat{x}_3) = 136$
- Innere Kontraktion: $\hat{x}_3^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}$ mit $f(\hat{x}_3^*) = 15.25$

Nach dem 4. Schritt erhält man den Simplex

$$S_4 = \left(\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right)$$

Aufgabe 7

Diskussion: Zuverlässigkeit und Rechenaufwand von *Mutation-Selektion* und *Nelder-Mead*