3. Projekt

Penalty-Verfahren & SQP-Verfahren

im Fach

Numerische Optimierung

Juni 2020

Maximilian Gaul

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Implementierung siehe `BFGS_Pen.m` und `ArmijoPen.m`.

Aufgabe 3

Tests siehe `Projekt_3.m`.

Aufgabe 4

Das Problem

$$f(x) = \text{min}\ x_1$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 - \gamma \leq 0, \gamma \geq -\sqrt{2}$$

lässt sich so graphisch darstellen:

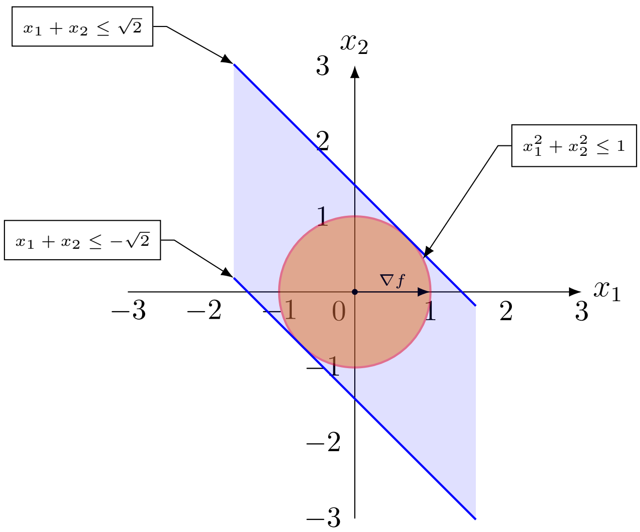

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte müssen in der Schnittmenge aus Blau und Orange liegen

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \lambda) = x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - \gamma)$$

und den Ableitungen:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \text{ (Stationarität)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

λ_1, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$, $\lambda_2 \cdot (x_1 + x_2 - \gamma) = 0$ (Komplementarität)

$g_1(x) \leq 0$, $g_2(x) \leq 0$ (Zulässigkeit)

Um die Komplementarität zu erfüllen kann man einen der beiden Faktoren gleich Null setzen, für $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ erhält man

$$x_1 + x_2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = \gamma - x_2 \Leftrightarrow x_1 = \gamma \mp \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\gamma - x_2)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 \pm \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$$

Für $x_1 = \gamma - \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$ und $x_2 = \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$ erhält man:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \left(\gamma - \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)\right) \\ \gamma - \sqrt{2-\gamma^2} \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Umformen

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$$

und einsetzen

$$1 + 2\lambda_1 \left(\gamma - \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)\right) - \lambda_1 \left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right) = 0$$

Dann erhält man

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}}$$

Dieser Pfad funktioniert also nicht, da $\lambda_1 \geq 0$ sein muss.
Für $x_1 = \gamma + \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$ und $x_2 = -\frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$ erhält man:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2\left(\gamma + \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)\right) \\ -\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right) \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Umformen:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$$

und einsetzen

$$1 + 2\lambda_1 \left(\gamma + \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)\right) + \lambda_1 \left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right) = 0$$

Dann erhält man

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2-\gamma^2}+2\gamma}{4-10\gamma^2} \text{ bzw. } \lambda_2 = \left(\frac{\sqrt{2-\gamma^2}+2\gamma}{4-10\gamma^2}\right) \cdot \left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$$

Die KKT-Punkte in Abhängigkeit von γ sind also: $x_1 = \gamma + \frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$ und $x_2 = -\frac{1}{2}\left(\gamma - \sqrt{2-\gamma^2}\right)$

Aufgabe 5

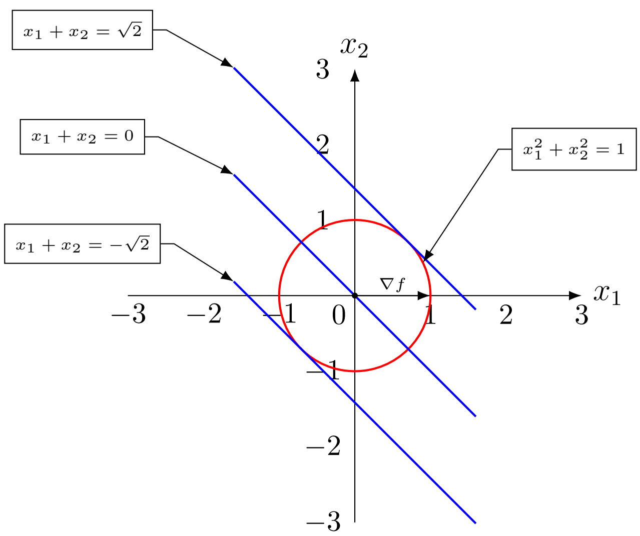

Abbildung 2: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte liegen auf der Schnittmenge zwischen Kreis und blauen Linien

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x,\mu) = x_1 + \mu_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) + \mu_2\left(x_1 + x_2 - \gamma\right)$$

und den Ableitungen

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix}, h_2(x) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ (Stationarität)}$$

sowie

$$h_1(x) = 0,\ h_2(x) = 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Mit

$$x_1 = \frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} \text{ und } x_2 = \frac{-\mu_2}{2\mu_1}$$

kann man in die 2. Nebenbedingung einsetzen

$$\frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} + \frac{-\mu_2}{2\mu_1} = \gamma$$

und erhält

$$\mu_2 = -\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}$$

Was man wiederum in die 1. Nebenbedingung einsetzen kann

$$\left(\frac{-\left(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}\right) - 1}{2\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{-\left(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}\right)}{2\mu_1}\right)^2 = 1$$

Dann erhält man

$$\mu_1 = \pm\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}},\ \mu_2 = \mp\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}} - \frac{1}{2}$$

Insgesamt erhält man also die KKT-Punkte:

$$x_1 = \sqrt{2 - \gamma^2} \cdot \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}} - \frac{1}{2}\right),\ x_2 = \sqrt{2 - \gamma^2} \cdot \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}} + \frac{1}{2}\right)$$

und

$$x_1 = -\sqrt{2 - \gamma^2} \cdot \left(-\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}} - \frac{1}{2}\right),\ x_2 = -\sqrt{2 - \gamma^2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2 - \gamma^2}}\right)$$

Aufgabe 6

Implementierung siehe `Projekt_3.m`.