3. Projekt

Penalty-Verfahren & SQP-Verfahren

im Fach

Numerische Optimierung

Juni 2020

Maximilian Gaul

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Implementierung siehe `BFGS_Pen.m` und `ArmijoPen.m`.

Aufgabe 3

Tests siehe `Projekt_3.m`.

Aufgabe 4

Das Problem

$$f(x) = \text{min}\ x_1$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 - \gamma \leq 0, \gamma \geq -\sqrt{2}$$

lässt sich so graphisch darstellen:

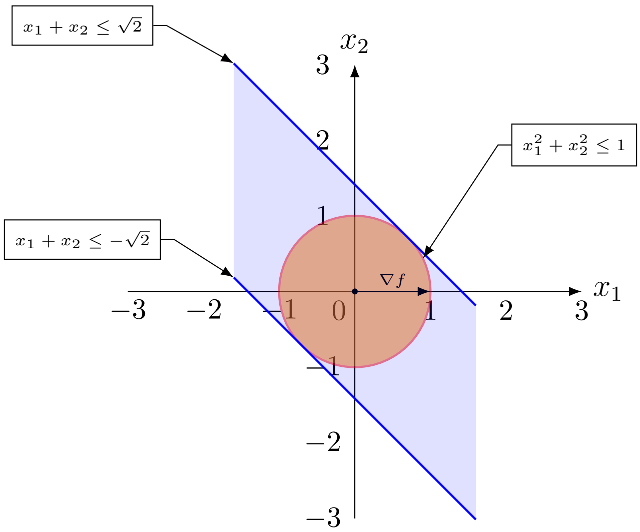

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte müssen in der Schnittmenge aus Blau und Orange liegen

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \lambda) = x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - \gamma)$$

und den Ableitungen:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \text{ (Stationarität)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0,\ \lambda_2 \cdot (x_1 + x_2 - \gamma) = 0 \text{ (Komplementarität)}$$

$$g_1(x) \leq 0,\ g_2(x) \leq 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Um die Komplementarität zu erfüllen kann man nun verschiedene Faktoren gleich Null setzen.

Für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ erhält man einen Widerspruch in der Stationarität, ebenso für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 \neq 0$.

Für $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 = 0$ erhält man:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

mit

$$1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$$

$$2\lambda_1 x_2 = 0 \Rightarrow^{\lambda_1 \neq 0} x_2 = 0$$

Da $\lambda_1 \neq 0$ muss wegen der Komplementarität zwangsläufig gelten $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{1 - x_2^2}$ bzw. $x_1 = \pm 1$. Nun einsetzen

$$1 + 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ (ungültig)}$$

$$1 - 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

Damit erhält man den KKT-Punkt: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

Für $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ erhält man

$$x_1 + x_2 - \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = \gamma - x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\gamma - x_2)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{2(1-\gamma^2) + \gamma^2}{4}} + \frac{1}{2}\gamma$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma \Rightarrow x_1 = \gamma - \left(\pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)$$

Für $x_1 = \gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} - \frac{1}{2}\gamma \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}$ und $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$ erhält man die Stationaritätsgleichung

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix}2 \cdot \left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}\right)\\ 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)\end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Mit

$$\lambda_1 \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma\right) + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma\right)$$

kann man einsetzen in die 1. Gleichung:

$$1 + \lambda_1 \cdot \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}\right) - \lambda_1 \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma\right) = 0$$

und erhält

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}\text{ , }\lambda_2 = -\frac{\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}$$

Für $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$ ist λ_1 immer positiv. Für $-\sqrt{2} < \gamma \leq -1$ ist λ_2 ebenfalls positiv. D.h. $x_1 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}$ und $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$ ist ein KKT-Punkt.

Weiterhin erhält man für $x_1 = \gamma - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)$ $\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix}2 \cdot \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}\right)\\ 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \frac{1}{2}\gamma\right)\end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Und

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}\text{ , }\lambda_2 = \frac{-\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 2(1-\gamma^2)}}$$

Da λ_1 für $\gamma \neq \pm\sqrt{2}$ immer negativ ist, ist dies kein KKT-Punkt.

Aufgabe 5

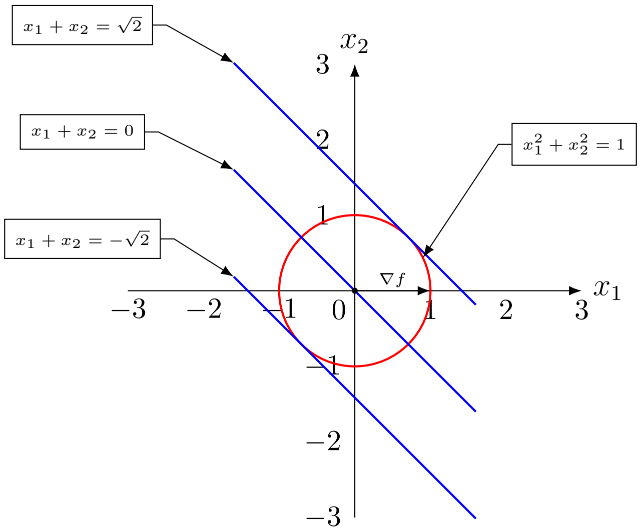

Abbildung 2: Graphische Darstellung der Zielfunktion und Nebenbedingungen, gültige Punkte liegen auf der Schnittmenge zwischen Kreis und blauen Linien

Anhand der Lagrange-Funktion:

$$L(x, \mu) = x_1 + \mu_1 \left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) + \mu_2 \left(x_1 + x_2 - \gamma\right)$$

und den Ableitungen

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix}, h_2(x) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

kann man die KKT-Bedingungen aufstellen:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ (Stationarität)}$$

sowie

$$h_1(x) = 0, h_2(x) = 0 \text{ (Zulässigkeit)}$$

Mit

$$x_1 = \frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} \text{ und } x_2 = \frac{-\mu_2}{2\mu_1}$$

kann man in die 2. Nebenbedingung einsetzen

$$\frac{-\mu_2 - 1}{2\mu_1} + \frac{-\mu_2}{2\mu_1} = \gamma$$

und erhält

$$\mu_2 = -\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}$$

Was man wiederum in die 1. Nebenbedingung einsetzen kann

$$\left(\frac{-\left(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}\right) - 1}{2\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{-\left(-\gamma\mu_1 - \frac{1}{2}\right)}{2\mu_1}\right)^2 = 1$$

Dann erhält man

$$\mu_1 = \pm\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}}, \mu_2 = \mp\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}} - \frac{1}{2}$$

Insgesamt erhält man also die KKT-Punkte:

$$x_1 = \sqrt{2-\gamma^2} \cdot \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}} - \frac{1}{2}\right), x_2 = \sqrt{2-\gamma^2} \cdot \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}} + \frac{1}{2}\right)$$

und

$$x_1 = -\sqrt{2-\gamma^2} \cdot \left(-\frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}} - \frac{1}{2}\right), x_2 = -\sqrt{2-\gamma^2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2 \cdot \sqrt{2-\gamma^2}}\right)$$

Aufgabe 6

Implementierung siehe `Projekt_3.m`.

Aufgabe 7

Man bringt die Nebenbedingungen zuerst in die Form:

$$g_1(x) = -1 + x_1 + x_2 \leq 0$$
$$g_2(x) = -1 + x_1 - x_2 \leq 0$$
$$g_3(x) = -1 - x_1 + x_2 \leq 0$$
$$g_4(x) = -1 - x_1 - x_2 \leq 0$$

Die Stationaritätsgleichung lässt sich dann wie folgt aufstellen:

$$\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) + \lambda_3 \nabla g_3(x) + \lambda_4 \nabla g_4(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - t)^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebenso die Komplementaritätsbedingungen:

$$\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$$
$$\lambda_2 \cdot g_2(x) = 0$$
$$\lambda_3 \cdot g_3(x) = 0$$
$$\lambda_4 \cdot g_4(x) = 0$$
$$\lambda_1 \text{ , } \lambda_2 \text{ , } \lambda_3 \text{ , } \lambda_4 \geq 0$$

Wenn man den Punkt $\hat{x}$ in die Nebenbedingungen einsetzt sieht man, welche aktiv sind:

$$g_1(\hat{x}) = 0$$
$$g_2(\hat{x}) = 0$$
$$g_3(\hat{x}) = -2$$
$$g_4(\hat{x}) = -2$$

Um die Komplementaritätsbedingungen zu erfüllen, muss nun gelten: $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Die Stationaritätsgleichung verkürzt sich daher zu

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4t^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

∇g_1 und ∇g_2 sind linear unabhängig (*LICQ* erfüllt). Man erhält dann

$$\lambda_1 = -\lambda_2 + 1$$

und

$$-4t^3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{4t^3 - 1}{2}$$

Daher

$$\lambda_1 = \frac{4t^3 - 1}{2} + 1$$

Um die Komplementaritätsbedingungen zu erfüllen muss gelten

$$\frac{4t^3 - 1}{2} + 1 \geq 0 \wedge -\frac{4t^3 - 1}{2} \geq 0$$

Für $t \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$ und $t \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$ (ungefähr $t \in [-0.63, 0.63]$) ist $\hat{x}$ ein KKT-Punkt.

Aufgabe 8

Wenn man die Nebenbedingungen in ein Koordinatensystem zeichnet:

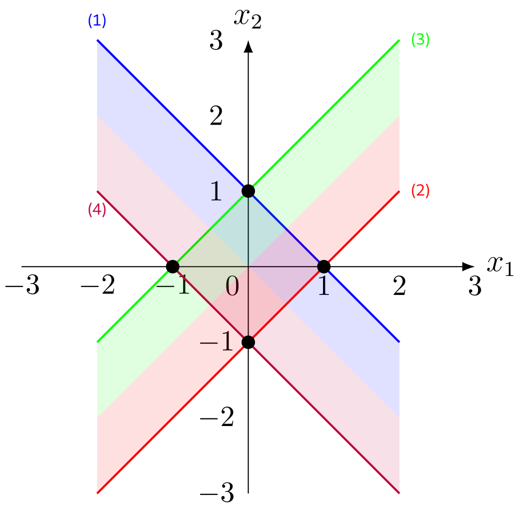

Abbildung 3: Nebenbedingungen von $f(x_1, x_2)$

erkennt man, das nur einseitig beschränkte Flächen entstehen, wenn entweder

(1) und (3)
(1) und (2)
(2) und (4)
(3) und (4)

aktiv sind (bzw. nur diese Kombinationen haben linear unabhängige Gradienten nach *LICQ*).

Ausgehend von der Stationaritätsgleichung:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 4(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

probiert man nun diese Möglichkeiten durch.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$
  Aus den Nebenbedingungen (3) und (4) erhält man:

  $$-x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 + x_1$$
  $$-x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 0$$

  Einsetzen in die Stationaritätsgleichung:

  $$\begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  und man erhält $\lambda_3 = -0.5$, $\lambda_4 = -4.5$. Das ist also keine gültige Lösung.

- $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$
  Man erhält aus den NB (2) und (4): $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und nach Einsetzen:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -32 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Daraus dann: $\lambda_2 = -14.5$, $\lambda_4 = -17.5$, auch keine gültige Lösung.