

Teoria dos Grafos



Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a distância

Material Teórico



Conceitos e Propriedades de Grafos

Responsável pelo Conteúdo:

Prof. Dr. Cleber Silva Ferreira da Luz

Revisão Textual:

Prof.^a Me. Sandra Regina Fonseca Moreira

UNIDADE

Conceitos e Propriedades de Grafos



- Introdução;
- Conceitos Básicos;
- Propriedades Fundamentais de Grafos.



OBJETIVO DE APRENDIZADO

- Apresentar os principais conceitos e propriedades da teoria dos grafos.



Orientações de estudo

Para que o conteúdo desta Disciplina seja bem aproveitado e haja maior aplicabilidade na sua formação acadêmica e atuação profissional, siga algumas recomendações básicas:

Determine um horário fixo para estudar.

Mantenha o foco! Evite se distrair com as redes sociais.

Procure manter contato com seus colegas e tutores para trocar ideias! Isso amplia a aprendizagem.

Seja original! Nunca plagie trabalhos.

Aproveite as indicações de Material Complementar.

Conserve seu material e local de estudos sempre organizados.

Assim:

- ✓ Organize seus estudos de maneira que passem a fazer parte da sua rotina. Por exemplo, você poderá determinar um dia e horário fixos como seu “momento do estudo”;
- ✓ Procure se alimentar e se hidratar quando for estudar; lembre-se de que uma alimentação saudável pode proporcionar melhor aproveitamento do estudo;
- ✓ No material de cada Unidade, há leituras indicadas e, entre elas, artigos científicos, livros, vídeos e sites para aprofundar os conhecimentos adquiridos ao longo da Unidade. Além disso, você também encontrará sugestões de conteúdo extra no item **Material Complementar**, que ampliarão sua interpretação e auxiliarão no pleno entendimento dos temas abordados;
- ✓ Após o contato com o conteúdo proposto, participe dos debates mediados em fóruns de discussão, pois irão auxiliar a verificar o quanto você absorveu de conhecimento, além de propiciar o contato com seus colegas e tutores, o que se apresenta como rico espaço de troca de ideias e de aprendizagem.

Introdução

Proposto em 1736 pelo matemático suíço **Leonhard Euler**, grafos são essenciais para solucionar problemas de matemática. Como já visto anteriormente, um **grafo** é uma **estrutura** abstrata, cujo objetivo principal é estudar o **relacionamento** entre **objetos** (BOAVENTURA; Paulo, 2017). Um Grafo é composto por **vértices** (objetos) e **arestas** (ligações entre os objetos). Matematicamente, um grafo G é dado por $G(V,A)$, onde V é um conjunto não vazio de objetos, e A é um conjunto de arestas (CORMEN; LEISERSON; CHARLES; RIVEST; STEIN, 2002). A Figura 1 apresenta um grafo $G(6,8)$.

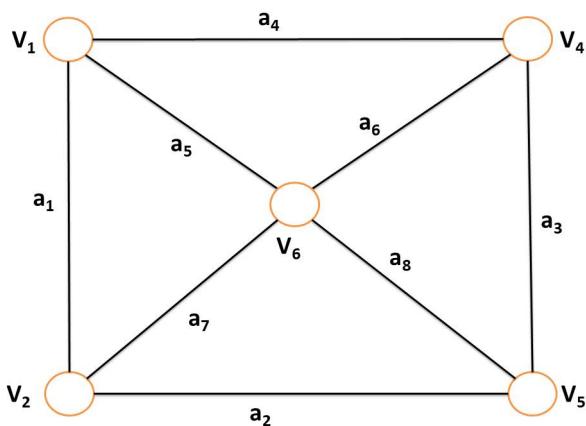


Figura 1 – Exemplo de grafo

Fonte: Acervo do conteudista

A teoria dos grafos está repleta de nomenclaturas, termos técnicos, propriedades e definições que são empregadas nos grafos. O objetivo desta unidade é apresentar os principais conceitos e propriedades presentes na teoria dos grafos, conforme veremos nas seções seguintes.

Conceitos Básicos

Vamos estudar um pouco sobre os conceitos básicos na teoria dos grafos.

Um grafo é composto por vértices e arestas, certo? Os vértices são os objetos e as arestas são as ligações entre os objetos. Todavia, um grafo pode conter **arestas paralelas**. Observe as arestas a_5 e a_6 do grafo apresentado na Figura 2. Essas arestas representam ligações diferentes entre vértices idênticos, com isso, são denominadas **arestas paralelas** (NICOLETTI; MARIA; HRUSCHKA; ESTEVAM, 2006).

Agora, uma **aresta** pode **ligar** um **vértice a ele mesmo**. Observe a aresta a_3 do grafo apresentado na Figura 2. Esta aresta liga o vértice V_3 a **ele mesmo**, formando um **laço**. Aresta com essa característica é denominada de **laço** (FEOFILLOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, 2011).

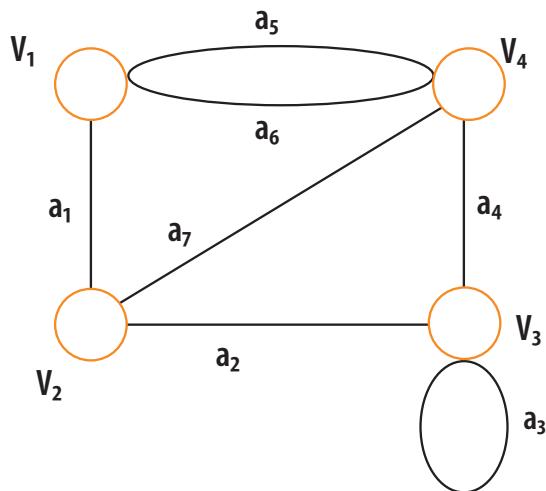


Figura 2 – Arestas paralelas e laços

Um grafo que **não** contém **arestas paralelas** e não contém arestas em forma de **laços** é denominado de **grafo simples** (BOAVENTURA; PAULO, 2017).

Já um grafo que contém no **mínimo um laço** é chamado de **pseudografo** (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E., 2012). A Figura 3 ilustra um **pseudografo**.

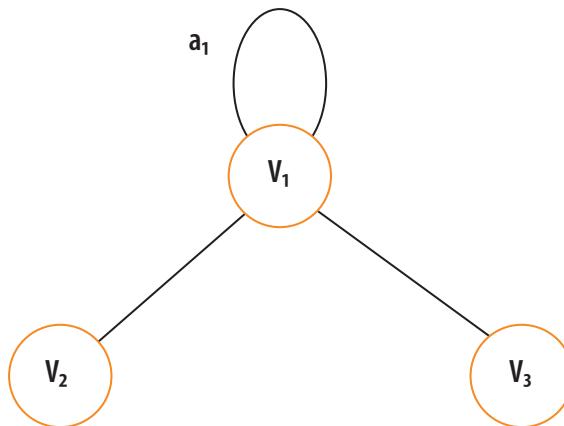


Figura 3 – Pseudografo

Um **pseudografo** onde todos os **vértices** possuem um **laço associado** é denominado como **grafo reflexivo** (SIMÕES; 2013). A Figura 4 ilustra um exemplo de grafo reflexivo.

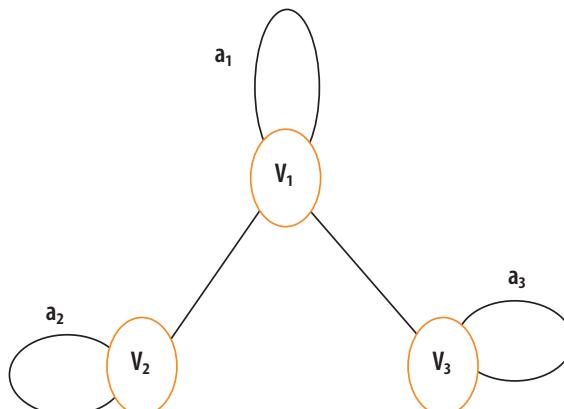


Figura 4 – Grafo reflexivo

Um grafo **não direcional**, que contém no **mínimo duas arestas paralelas**, é chamado de **multigrafo** (SZWARCFITER;2018). A Figura 5 ilustra um exemplo de **multigrafo**.

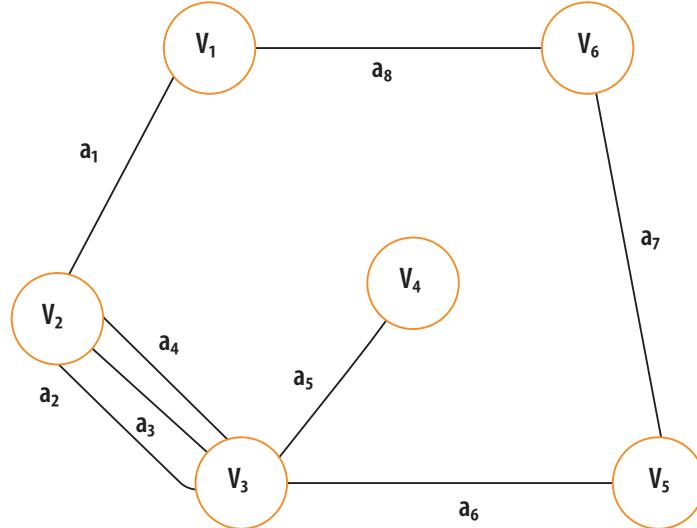


Figura 5 – Multigrafo

Um grafo **direcional**, que possui no **mínimo dois ou mais arcos** de mesma direção ligando um mesmo par de vértices, é denominado **multigrafo direcional** (FURTADO, 1973).

Já um **grafo vazio** é aquele que contém somente vértices (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012). A Figura 6 ilustra um exemplo de grafo vazio.

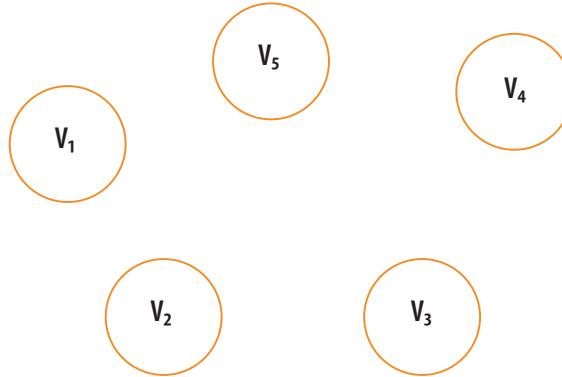


Figura 6 – Grafo vazio

Um grafo é denominado como **trivial** quando possui apenas um vértice. A Figura 7 ilustra um exemplo de grafo trivial (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012).

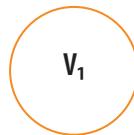


Figura 7 – Grafo trivial

Um grafo é denominado como **nulo** quando não existem vértices (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012).

Já um grafo que contém apenas **um vértice** e **n** arestas é denominado de **grafo Buquê** (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012). A Figura 8 ilustra um grafo buquê.

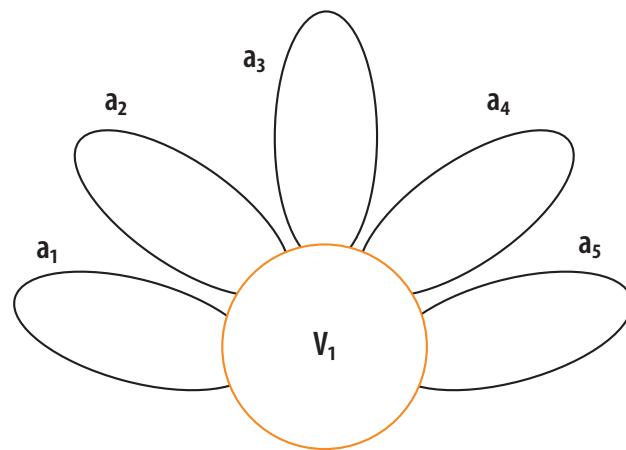


Figura 8 – Grafo Buquê

Um grafo pode ser generalizado para o caso em que a relação entre os vértices permite a consideração de mais de um par de nós ou vértices. “Quando um grafo possui uma ou mais arestas que correspondam a relações que envolvam mais de dois vértices, esse grafo é denominado **hipergrafo**” (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012). A Figura 9 ilustra um hipergrafo.

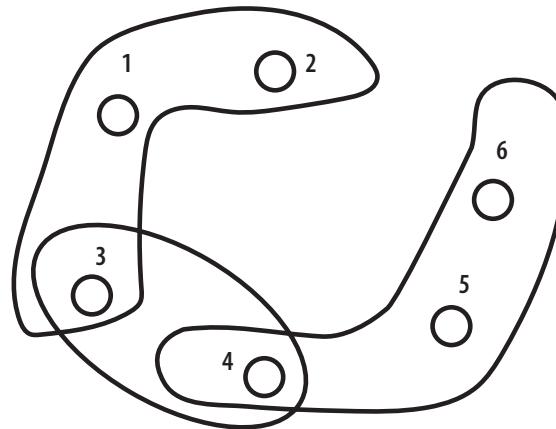


Figura 9 – Hipergrafo

Fonte: Adaptada de GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012

Propriedades Fundamentais de Grafos

Grafos Rotulados

Um grafo pode possuir atribuições (informações) associadas tanto em suas arestas como em seus vértices. Habitualmente, essas atribuições são descritas junto aos seus elementos. As anotações que permitem distinguir vértices e arestas são chamadas de **rótulos** (NETTO; JURKIEWICZ, 2017).

Um grafo que possui atribuição em seus vértices ou arestas é denominado como **grafo rotulado** (NETTO; JURKIEWICZ, 2017). Na Figura 10, o grafo 1 não é rotulado, o grafo 2 possui rótulos nas arestas e o grafo 3 possui rótulos nos vértices. É importante ressaltar que os rótulos podem ser letras, números, palavras, ou até mesmo letras com números, ou palavras com números. Em palavras bem simples, rótulo é um nome dado aos vértices e arestas.

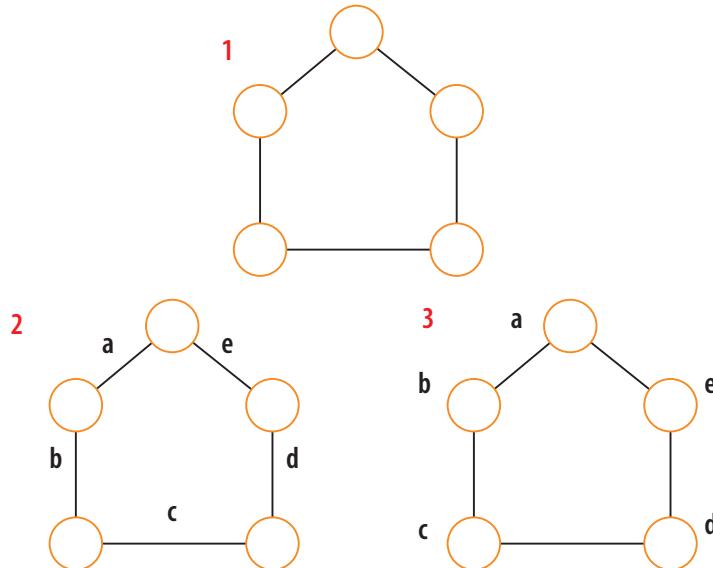


Figura 10 – Exemplo de grafo rotulado

Fonte: Adaptado de GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012

Grafos Ponderados

Outro tipo de grafo muito comum é o **grafo ponderado** (BOAVENTURA; PAULO, 2017). Um grafo é definido como **ponderado** se existem pesos associados as suas arestas ou vértices. A Figura 11 apresenta dois grafos, o grafo 1 e o grafo 2. O grafo 1 possui pesos associados em suas arestas, já o grafo 2 possui pesos associados em seus vértices.

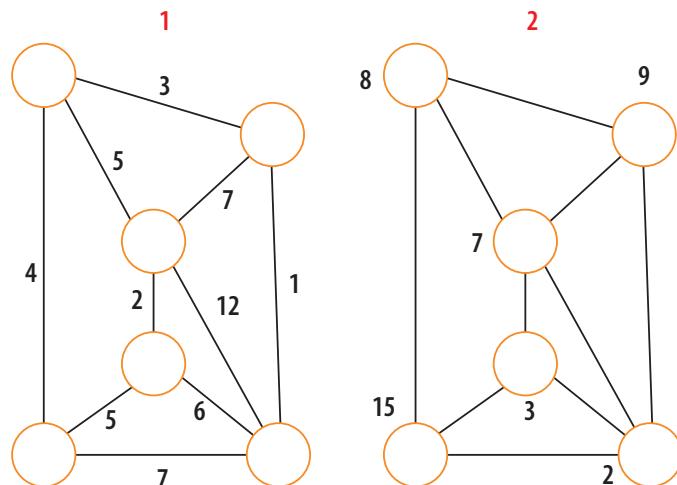


Figura 11 – Exemplos de grafos ponderados

Um grafo pode possuir rótulos e pesos ao mesmo tempo. Observe a Figura 12. Esta figura apresenta dois grafos. O grafo 1 possui vértices rotulados e arestas com pesos. O grafo 2 possui seus vértices com rótulos e pesos ao mesmo tempo.

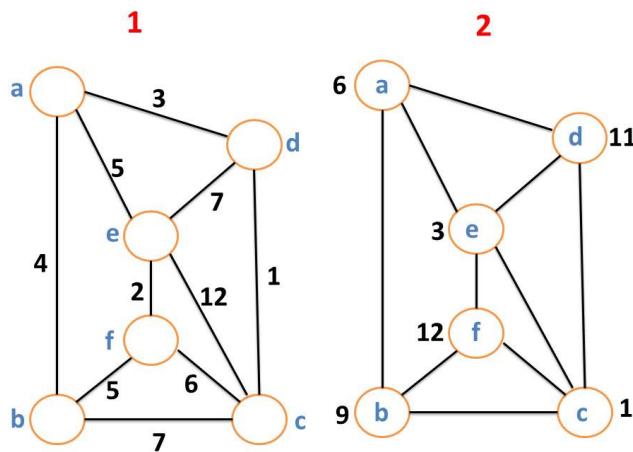


Figura 12 – Exemplos de grafos ponderados

Grafos Orientados e Não Orientados

Como mencionado anteriormente, o principal objetivo da teoria de grafos é estudar a relação dos objetos, certo? Os objetos são representados pelos vértices, e as arestas representam a relação entre os objetos. Todavia, em determinadas circunstâncias, pode ser importante analisar o sentido desta relação. Por exemplo, imagine um grafo no qual seus vértices representem pessoas, e uma aresta $i-j$ existe se a pessoa i conhece a pessoa j ; isto não implica que j conhece i . Neste caso, a aresta $i-j$ é denominada **arco**, e é representada graficamente como uma flecha. A flecha determina o sentido da relação (BOAVENTURA; PAULO, 2017).

Quando em um grafo as direções das arestas são importantes, o grafo é definido como **direcionado**, **orientado** ou **dígrafo** (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012). A Figura 13 apresenta dois grafos. O grafo 1 é não direcionado, já o grafo 2 é direcionado.

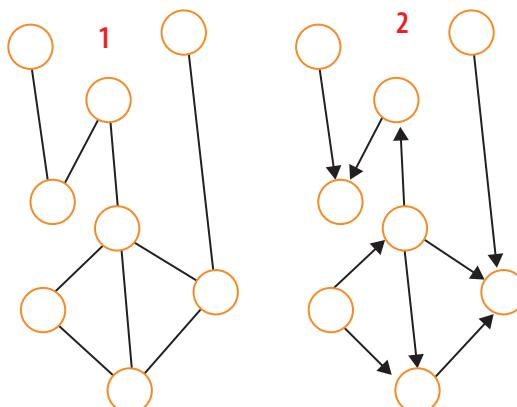


Figura 13 – Grafo não direcionado e grafo direcionado

Fonte: Adaptado de GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012

Um grafo também pode conter **arestas e arcos** ao mesmo tempo. Um grafo com esta característica é denominado de **misto** (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012). A Figura 14 ilustra um exemplo de grafo misto.

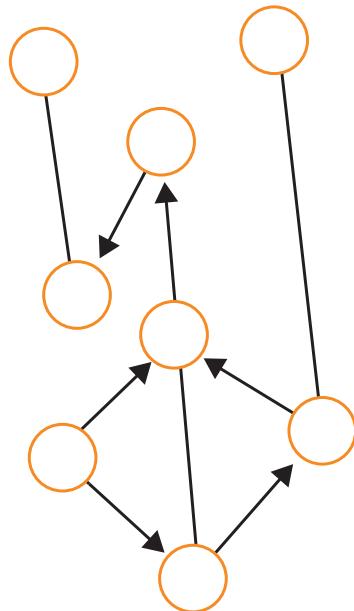


Figura 14 – Grafo misto

Fonte: Adaptado de GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012

Tamanho e Ordem de Grafos

A quantidade de vértices de um grafo define a sua **ordem** – $|N|$ (FEOFILLOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, 2011). Já o número de arestas que um grafo possui define o seu **tamanho** – $|M|$ (FEOFILLOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, 2011). O grafo 1 apresentado na Figura 15 é de ordem 6 e tamanho 9. Já o grafo 2 é de ordem 3 e tamanho 3.

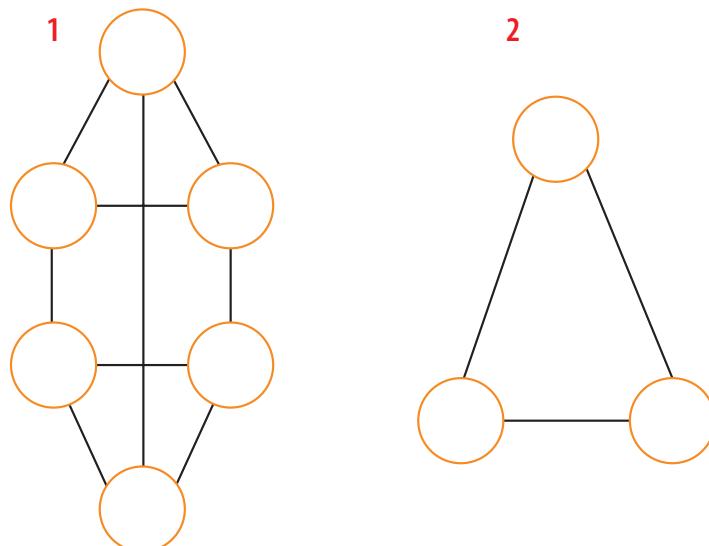


Figura 15 – Ordem e tamanho de grafos

Adjacência de Vértices

Outra propriedade muito importante na teoria dos grafos é a **adjacência de vértices** (SIMÕES; 2013). Um grafo é uma estrutura abstrata indicada para a representação topológica de formas de conexão. Há duas formas para entender vizinhança entre vértices e arestas. A primeira é para o caso dos grafos direcionados e a outra para os não direcionados.

Dois vértices *i* e *j* são **vizinhos** ou **adjacentes** quando existe uma aresta que **liga** *i* a *j* ou vice-versa. O conjunto de vértices vizinhos do vértice *i* é denominado $\Gamma(i)$ ou $N(i)$.

Por exemplo, considere o grafo 1 apresentado na Figura 16. Queremos saber quais são os vértices adjacentes ao vértice 6. Para isso, basta olhar os vértices que estão conectados ao vértice 6. O grafo 2 da Figura 16 mostra os vértices adjacentes ao vértice 6.

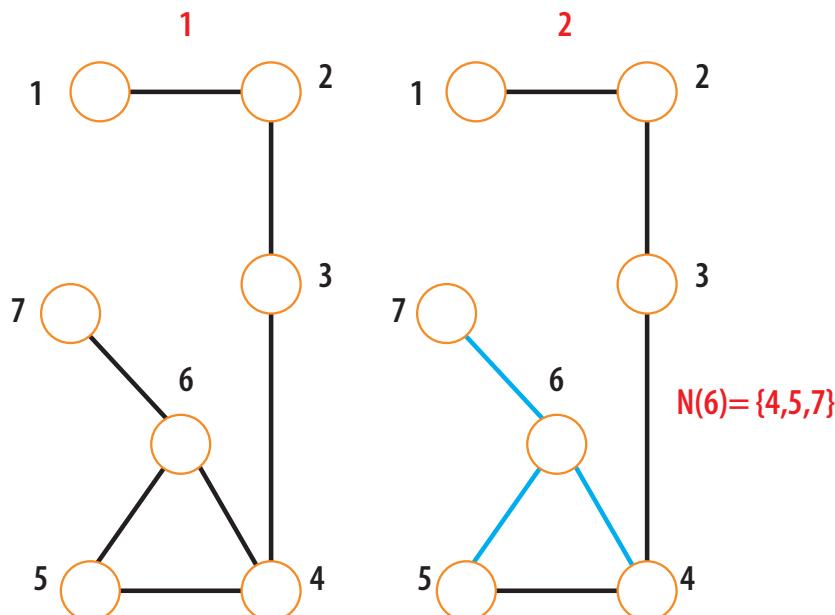


Figura 16 – Adjacência de vértices

Sucessores e Antecessores

Quando o grafo é direcionado, em determinadas circunstâncias, pode ser importante saber quais são os **vértices sucessores** e **antecessores** a um **determinado vértice**. Certo, mas como é possível descobrir os sucessores e antecessores a determinado vértice? Um vértice *j* é **sucessor** de *i* se existe pelo menos um **arco ligando** *i* a *j*. Os **sucessores** do vértice *i* são $\Gamma+(i)$. No caso da ocorrência inversa, diz-se que o vértice *j* é antecessor de *i*. Os antecessores do vértice *i* são $\Gamma - (i)$ (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012). O grafo apresentado na Figura 17 ilustra exemplos de **antecessores** e **sucessores**. Neste grafo, o antecessor do vértice 6 é o vértice 1. Já os sucessores são os vértices 2 e 3.

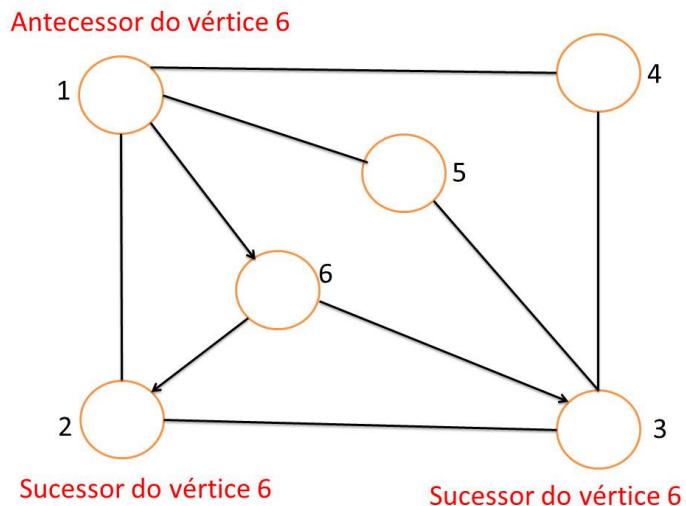


Figura 17 – Antecessor e sucessor de vértice

Adjacência de Arestas

Duas arestas ai e aj são **adjacentes** se estiverem **conectadas** ao **mesmo vértice**, ou seja, **compartilham** o mesmo vértice (SIMÕES; 2013). A Figura 18 apresenta um grafo que exemplifica o conceito de arestas adjacentes. Neste exemplo, são evidenciadas as arestas adjacentes ao vértice 3.

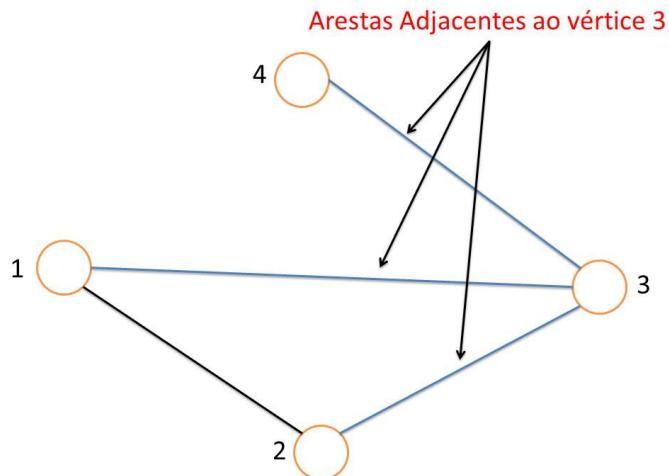


Figura 18 – Arestas adjacentes

Grau de Vértice

Em determinadas circunstâncias, pode ser interessante, ou até mesmo necessário, calcular o **grau (ou valência)** de um vértice de um determinado grafo (SZWARCFITER;2018). O grau de um vértice é calculado pelo número de arestas incidentes a ele. Dessa forma, o grau $d(x_i)$ de um vértice x_i , em um grafo não direcionado é igual ao **número das arestas incidentes no vértice**. Caso o vértice contenha laços, é contado duas vezes. A Figura 19

ilustra um exemplo para grafos não direcionados. Neste exemplo, é calculado o grau dos vértices 2 e 7. No vértice 7 há duas arestas incidindo a ele, dessa forma, o seu grau é $d(x_7) = 2$. No vértice 2 há apenas uma aresta incidindo a ele, com isso, o seu grau é $d(x_2) = 1$.

Caso todos os vértices do grafo possuam grau finito, o grafo é denominado como **localmente finito** (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012). Quando o vértice possui grau zero, ele é denominado **vértice isolado** (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012).

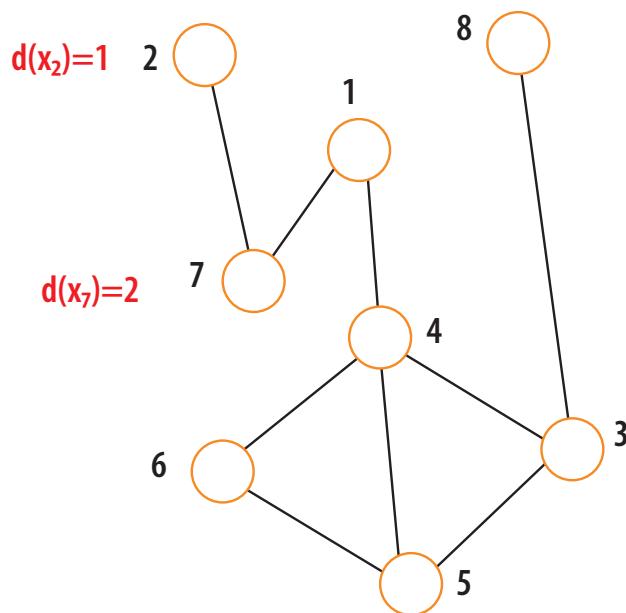


Figura 19 – Exemplo de grau de vértice em grafo não direcionado
 Fonte: Adaptado de GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012

O grafo apresentado na Figura 19 exemplifica o cálculo do grau para um grafo não direcionado. Todavia, e se o grafo for direcionado? Caso o grafo seja direcionado, o grau de um vértice xj é composto por um **valor interno** e um **valor externo**.

O **grau interno** de um vértice xj de um grafo direcionado é **igual** ao **número de arcos incidentes** ao vértice (que apontam para o vértice). Já o **grau externo** de um vértice xj de um grafo direcionado é **igual** ao **número de arcos emergentes** ao **vértice** (que deixam o vértice considerado) (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012) Habitualmente, os graus **internos** e **externos** de um grafo direcionado são representados por $d-(xj)$ e $d+(xj)$ respectivamente.

O cálculo do grau interno e externo de um vértice xj em grafo **direcionado** é exemplificado na Figura 20. Neste exemplo, é calculado o grau **interno** e **externo** dos **vértices** 2, 6 e 7. É possível observar que, o grau interno do vértice 2 é $d-(x_2) = 0$, porque não há nenhuma aresta incidente a ele. Já o seu grau **externo** é $d^2(x_2) = 1$, pois há uma única aresta emergendo dele. O grau interno do vértice 6 é dado por $d-(x_6) = -1$ e o **grau externo** é dado por $d+(x_6) = +1$. Para o vértice 5, o grau **interno** é $d-(x_5) = -2$ e o grau **externo** é $d+(x_5) = +1$.

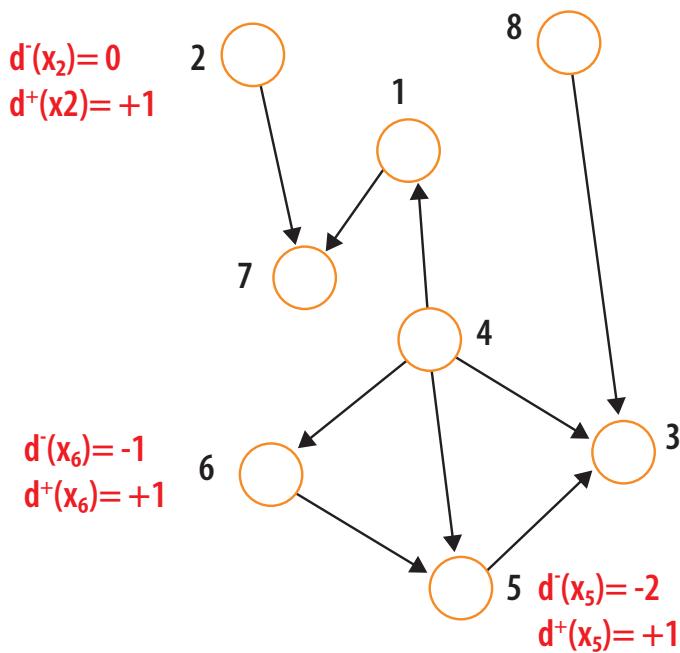


Figura 20 – Exemplo de grau de vértice em grafo não direcionado

Fonte: Adaptado de GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012

Quando o grafo é direcionado, as **parcelas do grau** (grau externo e grau interno) do vértice que também podem ser denominadas como **semigraus** são **denotadas** com valores **positivos** e **negativos**. O **valor final do grau** do vértice é dado pela **soma** do valor **absoluto** do **semigrau interior** $d^-(x_i)$ e **exterior** $d^+(x_i)$ (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012). Dessa forma, o valor final do grau do vértice é obtido pela expressão $d(x_i) = |d^+(x_i)| + |d^-(x_i)|$.

Por exemplo, o cálculo do grau dos vértices 3 e 4 seria da seguinte maneira.

$$d(3) = |d^-(3)| + |d^+(3)| = |+3| + |0| = 3$$

$$d(4) = |d^-(4)| + |d^+(4)| = |0| + |-4| = 4$$

Grafos Regulares

Um grafo é denotado como **regular** quando todos os seus **vértices** possuem o **mesmo grau** [4]. Um **grafo regular** com **vértices** de **graus k** é denominado de **grafo regular-k**. A Figura 21 apresenta o grafo 1 e o grafo 2. O grafo 1 é um **grafo regular-2**, porque todos os vértices desse grafo possuem 2 graus. Já o grafo 2 é um **grafo regular-3**, pois todos os vértices possuem 3 graus cada.

Quando um grafo possui somente vértices, ele é denominado **grafo regular-0**.

Quando, em um grafo, cada par de vértices adjacentes tem o mesmo número ***i*** de vizinhos em comum, e cada par de vértices não adjacentes tem o mesmo número ***n*** de vizinhos em comum, o grafo é denotado como **fortemente regular** (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012).

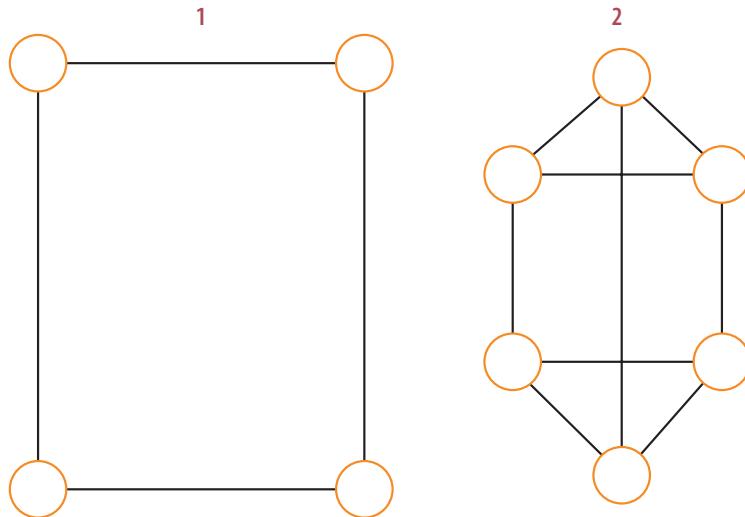


Figura 21 – Grafos regulares

Fonte: Adaptado de GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012

Grafo Completo e Subgrafos

Um **grafo completo** é um grafo **simples**, onde todo **vértice** é **adjacente a todos os outros vértices** (BOAVENTURA; PAULO, 2017) Habitualmente um grafo completo de ***n*** vértices é denotado por **K_n** .

No começo do estudo da teoria de grafos, foi dito que grafos representam a relação entre objetos e que diversos problemas são modelados através de grafo. É possível afirmar que em certas situações seja necessário **distinguir partes específicas de um grafo** para solucionar um problema, obtendo, assim, um **subgrafo**.

Dado um grafo $G = (N, M)$, um **subgrafo** $G_s = (N_s, M_s)$ é obtido se $N_s \subseteq N$ e $M_s \subseteq M$, e uma aresta (i, j) existir em M_s , somente se i, j existir em N_s .

Um subgrafo pode ser classificado em subgrafo **próprio** ou **parcial**.

Um **subgrafo próprio** $G_s = (N_s, M_s)$ é obtido de $G = (N, M)$ se $N_s \subseteq N$ e $M_s \subsetneq M$, ou $N_s \subset N$ e $M_s \subset M$, e uma aresta (i, j) existe em M_s , somente se i, j existir em N_s .

Já um **subgrafo parcial** $G_s = (N_s, M_s)$ é obtido de $G = (N, M)$ se $N_s = N$ e $M_s \subseteq M$, e uma aresta (i, j) existe em M_s , somente se i, j existir em N_s .

Para ilustrar um subgrafo, considere o grafo apresentado na Figura 22.

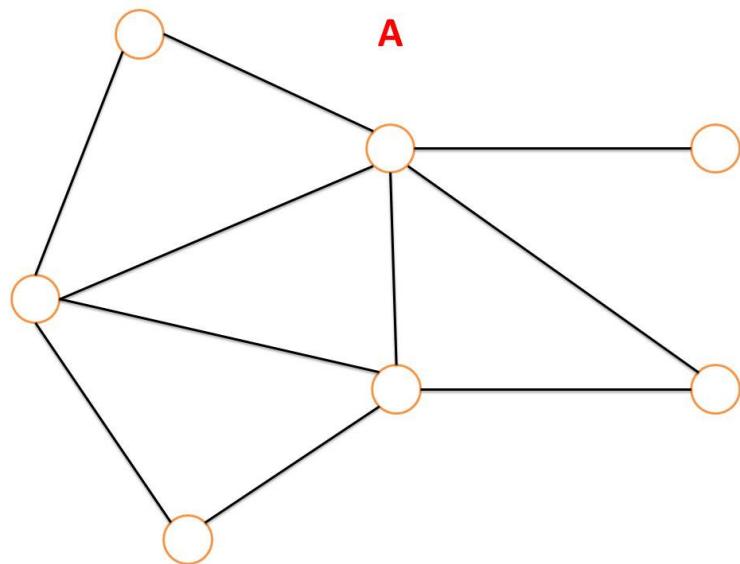


Figura 22 – Grafo exemplo

Fonte: Adaptado de GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012

A Figura 23 apresenta os subgrafos extraídos do grafo A. O grafo 1 é um **subgrafo parcial** de A, onde $N_s = N$ e $M_s = M$. O grafo 2 é um **subgrafo próprio** de A, onde $N_s \subset N$ e $M_s \subset M$. O grafo 3 é um **subgrafo parcial próprio** de A, onde $N_s = N$ e $M_s \subset M$. Por fim, o grafo 4 é um **subgrafo parcial** de A, onde $N_s = N$ e $M_s \subset M$ (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012).

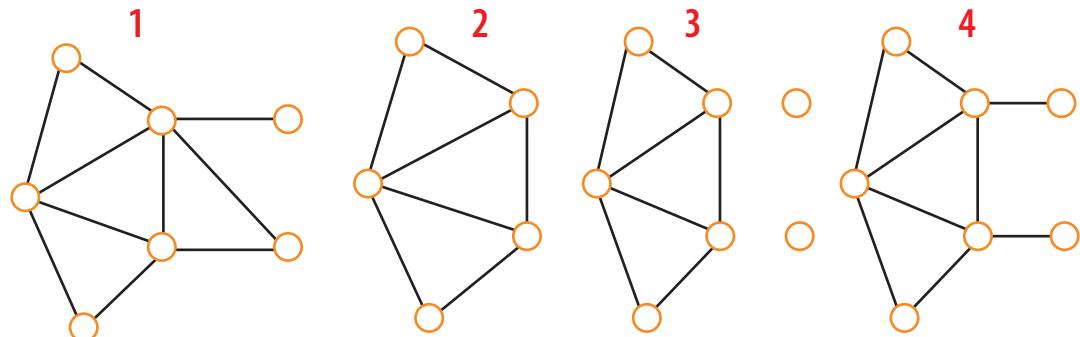


Figura 23 – Exemplo de subgrafos

Fonte: Adaptado de GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012

Grafos Bipartidos

Um grafo bipartido é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos diferentes X e Y. A Figura 24 ilustra um grafo bipartido (GOLDBAR, M.; GOLDBARG, E, 2012).

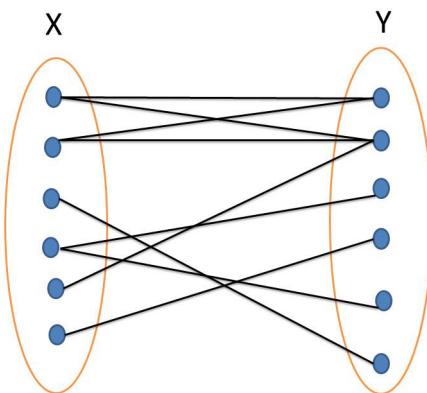


Figura 24 – Exemplo de grafo bipartido



Em Síntese

A teoria dos grafos é um ramo da matemática que estuda o relacionamento entre os objetos. Um Grafo é composto por **vértices** (objetos) e **arestas** (ligações entre os objetos). Matematicamente, um grafo G é dado por $G(V,A)$, onde V é um conjunto não vazio de objetos e A é um conjunto de arestas.

Grafos são essenciais para a resolução de diversos problemas matemáticos. A teoria dos grafos está repleta de nomenclaturas, termos técnicos, propriedades e definições que são empregadas nos grafos.

Nesta unidade foram apresentados conceitos básicos sobre a teoria dos grafos, conforme resumimos a seguir: quando um par de vértices é ligado por mais de uma aresta, dizemos que as arestas são **arestas paralelas**. Um **laço** é uma aresta que liga o vértice a ele mesmo. **Grafo simples** é um grafo que não contém laço e nem arestas paralelas.

Quando um grafo contém no mínimo um laço, é chamado de **pseudografo**. Um pseudografo onde todos os vértices possuem um laço associado é denominado como **grafo reflexivo**. Um grafo é denominado como **nulo** quando não existem vértices. Quando um grafo possui uma ou mais arestas que correspondam a relações que envolvam mais de dois vértices é denominado **hipergrafo**.

Também foram apresentadas propriedades fundamentais, como **grafos rotulados**. Um grafo rotulado é um grafo que contém rótulo (nome) nos vértices ou arestas. Um grafo **ponderado** é um grafo que contém pesos nas arestas ou nos vértices. Grafos **orientados** são grafos cujas arestas contêm direção. As arestas são chamadas de **arcos**. A quantidade de vértices de um grafo define a sua **ordem** - $|N|$. Já o número de arestas que um grafo possui define o seu **tamanho** - $|M|$.

Um vértice x é **adjacente** a um vértice y se houver uma aresta que os ligue direto. Duas **arestas** ai e aj são adjacentes se estiverem conectadas ao mesmo vértice, ou seja, compartilhem o mesmo vértice. **Grau** de um vértice é o número das arestas incidentes no vértice. Um grafo é denotado como **regular** quando todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Um grafo **completo** é um grafo simples, onde todo vértice é adjacente a todos os outros vértices. Um grafo **bipartido** é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos diferentes X e Y .

Material Complementar

Indicações para saber mais sobre os assuntos abordados nesta Unidade:

▶ Vídeos

Estrutura de Dados – Aula 23 – Grafos - Conceitos básicos

<https://youtu.be/MC0u4f334ml>

Pesquisa Operacional II – Aula 25 – Introdução à Teoria dos Grafos

<https://youtu.be/pbDHIMFGgLk>

Estrutura de Dados – Aula 23 – Grafos - Conceitos Básicos

<https://youtu.be/MC0u4f334ml>

Introdução à Teoria dos Grafos – Aula 5 – Grau de um vértice e o problema das Pontes de Königsberg

<https://youtu.be/125pPCIRjZ8>

Referências

- BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. **Grafos:** teoria, modelos, algoritmos. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, CHARLES E.; RIVEST, R.; STEIN, C. **Algoritmos teoria e prática.** 2. ed., Campus, 2002.
- FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. **Uma Introdução Síncia à Teoria dos Grafos**, 2011, Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>>. Acessado em: 24/11/2018.
- FURTADO, A. L. **Teoria dos grafos algoritmos, Livros Técnicos e científicos.** Rio de Janeiro: Editora S.A, 1973.
- GOLDBARG, M.; GOLDBARG, E. **Grafos conceitos, algoritmos e aplicações.** São Paulo: Campus, 2012.
- HOLANDA, B. **Teoria dos Grafos.** Relatório técnico. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/Nivel1_grafos_bruno.pdf>. Acesso em: 28/11/2018.
- NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. **Grafos:** Introdução e Prática. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2017.
- NICOLETTI, M. do C.; HRUSCHKA JÚNIOR, Estevam Rafael. **Fundamentos da teoria dos grafos para computação.** São Carlos, SP: EdUFSCar, 2006.
- SIMÕES, J. M. S. **Grafos e Redes:** Teoria e Algoritmos Básicos. Rio de Janeiro: Interciênciac, 2013.
- SZWARCFITER, J. L. **Teoria computacional de grafos.** 1. ed. São Paulo: Elsevier. (8 de março de 2018).



Cruzeiro do Sul
Educacional