

Cálculo Diferencial e Integral



Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material Teórico



O estudo das Funções

Responsável pelo Conteúdo:

Prof. Esp. Clovis Jose Serra Damiano

Revisão Textual:

Profa. Esp. Vera Lídia de Sá Cicarone

UNIDADE

O estudo das Funções



- Introdução
- Conceito de Função
- Funções: tabelas, gráficos e equações
- Função Afim
- Função Linear
- Função Identidade
- Função Constante
- Função Quadrática
- Função Exponencial
- Função Logarítmica
- Função definida por várias sentenças
- Funções Inversas e Logaritmos



O objetivo dessa unidade será rever o conceito matemático de função e suas propriedades. Vamos iniciar definindo funções e sua notação, domínio e imagem, crescimento e decrescimento de uma função. Em seguida faremos um estudo das funções elementares: afim, quadrática, exponencial, logarítmica, função definida por várias sentenças e funções inversas.

Vamos iniciar os nossos estudos aprendendo o conceito matemático de função. A proposta é abordar o conceito de função, apresentando-o, inicialmente, de modo informal, para que haja o entendimento da ideia, e, em seguida, apresentando-o na linguagem matemática formal.

Contextualização

O entendimento do conceito de função é fundamental para o estudo do cálculo. Há uma grande dificuldade em entender esse conceito quanto ele está expresso na linguagem matemática formal. Para que você consiga assimilar definitivamente essa ideia, vou descrever uma situação do nosso cotidiano que pode ser modelada através de uma função matemática.

Em seguida peço que você, segundo seu próprio critério, escolha duas situações em que o conceito de função possa ser utilizado.

Exemplo:

Uma garrafa de 500 ml de suco concentrado pode ser dissolvida em 2 litros de água para que obtenhamos o suco reconstituído. Assim, cada garrafa de suco concentrado corresponde a 2 litros e meio de suco reconstituído. Essa situação permite-nos estabelecer uma relação entre o número de garrafas de suco concentrado e a quantidade, em litros, de suco pronto. Note que a quantidade de suco pronto depende do número de garrafas que eu terei à disposição para diluir. Podemos estabelecer essa relação através de uma tabela numérica, de uma sentença matemática ou de um gráfico.

Observe o fenômeno expresso através de uma expressão algébrica:

S = Número de litros de suco pronto.

g = Número de garrafas de suco concentrado.

S = (2 litros de água + 0,5 de suco concentrado)

Então: $S = 2,5 \times g$

O número de litros depende da quantidade de garrafas de suco concentrado. Observe essa mesma informação na tabela abaixo:

Número de garrafas de suco concentrado	Quantidade em litros de suco reconstituído
0	0
1	2,5
2	5
3	7,5
4	10
...	...
100	250
1000	2500
...	...

Compare as informações da tabela com aquelas que você extraiu da sentença matemática acima. Quantos litros de suco reconstituído eu obterei se tiver 4 garrafas de suco concentrado?

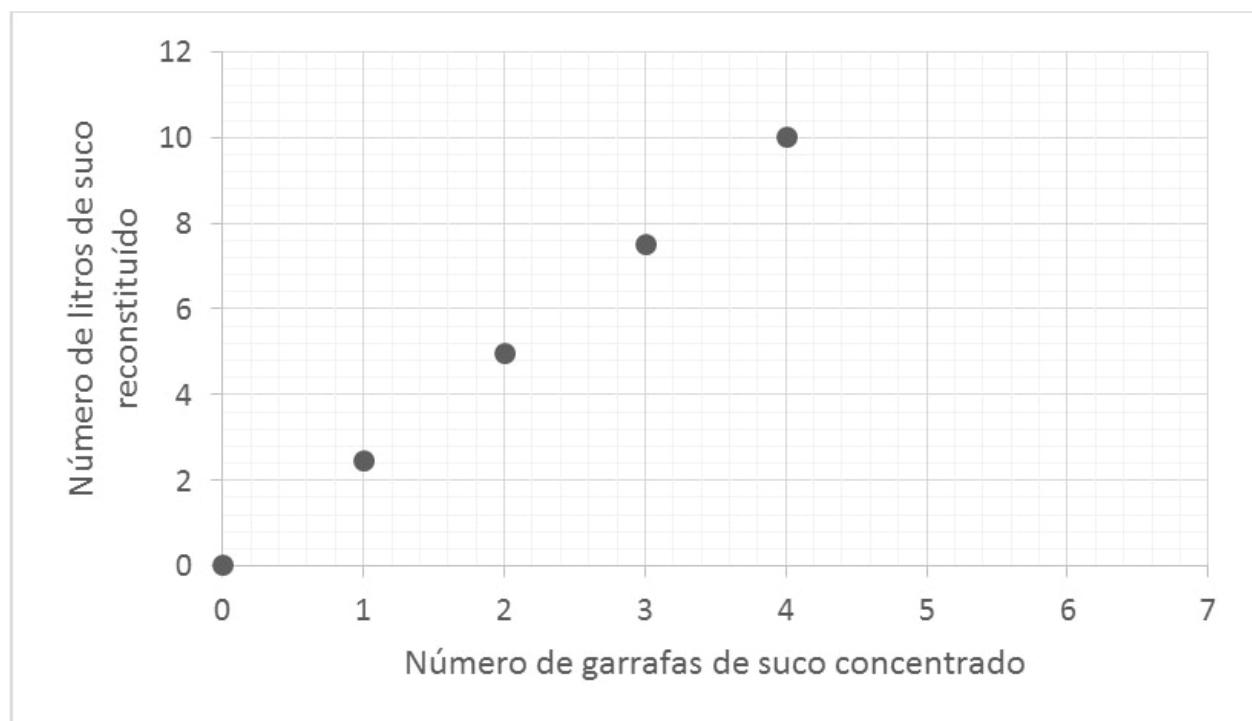
É possível resolver esse problema usando a sentença algébrica:

$$S = 4 \times 2,5$$

$$S = 10 \text{ litros}$$

Essa mesma informação eu posso obter olhando na tabela acima. Observe que, na linha em que está inserido o número 4, o valor correspondente é o número 10.

Existe, ainda, uma outra forma muito comum de representar as funções, ou seja, utilizando os gráficos.



Se você consultar o gráfico, verá que o valor que está associado ao número 4 (número de garrafas de suco concentrado) é exatamente o número 10, que representa o número de litros de suco pronto.

Como exercício de aplicação, você deve encontrar uma situação em que duas grandezas se relacionem de forma semelhante. Procure estabelecer uma sentença algébrica que explique a relação. Outra maneira interessante de identificar funções é através de gráficos. Observe um gráfico de jornal ou revista e tente identificar, nele, quais grandezas se relacionam e se existe um relação de dependência entre elas.

Introdução



O objetivo dessa unidade será rever o conceito matemático de função e suas propriedades. Vamos iniciar definindo funções e sua notação, domínio e imagem, crescimento e decrescimento de uma função. Em seguida faremos um estudo das funções elementares: afim, quadrática, exponencial, logarítmica, função definida por várias sentenças e funções inversas.



Função é uma relação especial entre duas ou mais grandezas. A cada elemento de um conjunto corresponde um único elemento de outro conjunto e existe uma relação de dependência entre essas grandezas, ou seja, uma determina o valor da outra através de uma “lei”. Antes de iniciar o conceito de função, vamos recordar como fazemos para localizar pontos no plano através de um sistema de coordenadas cartesianas.

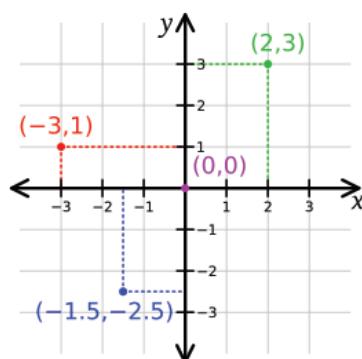
Para construir um referencial cartesiano, devemos desenhar duas retas perpendiculares e de mesma origem chamadas eixos. O eixo da posição horizontal (eixo dos x) é chamado eixo das abscissas e o eixo vertical (eixo dos y) é chamado eixo das ordenadas. Um par ordenado (x, y) , que nos dá a localização de um ponto no plano, é chamado de coordenadas do ponto.



Explore

Acesse o site: <http://www.matematicadidatica.com.br/PlanoCartesiano.aspx>

Sistema cartesiano de coordenadas ortogonais. – René Descartes.



Conceito de Função



Pegue uma folha de papel. Vamos fazer dobras nessa folha e ver em quantas partes ela ficará dividida. Anote cada passo:

- 1** - Se eu não fizer nenhuma dobra, em quantas partes ficará a folha de papel?
- 2** - Dobre a folha ao meio, verifique e anote o número de partes em que a folha ficou dividida. Dobre novamente, a partir da última dobra feita, e continue dobrando sucessivamente e anotando os resultados.

Número de dobras	Número de partes
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
...	...
x	y

O conceito de função é amplamente utilizado em nosso cotidiano, estando associado à relação de dependência entre duas quantidades.

Observe o nosso exemplo.

- Quais grandezas estão relacionadas?

O número de dobras e o número de partes.

- Uma grandeza depende da outra?

Sim, o número de partes em que o papel ficará dividido dependerá do número de dobras feitas no papel.

- Em linguagem matemática, como chamamos essas grandezas?

Chamamos de variáveis, pois ambos os valores estão mudando. Para visualizar melhor, podemos “batizar” essas grandezas como x e y . Geralmente chamamos a variável dependente de y e a variável independente de x .

As funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois objetos x e y . No caso do nosso exemplo, vamos chamar de “ x ” o número de dobras que fazemos no papel e de “ y ” o número de partes em que o papel fica dividido após ser dobrado.

$x \rightarrow$ argumento ou domínio da função.

$y \rightarrow$ depende de x e é chamado imagem de x pela f .

Intuitivamente: uma função é uma maneira de associar cada valor do argumento x com um único valor de $f(x) = y$.

Isso é feito através de uma regra de associação. É um conceito determinístico, ou seja, sempre produz o mesmo resultado a partir de uma entrada. No nosso exemplo, como eu faço para calcular o número de partes? O número de partes da próxima dobra é sempre o dobro do número de partes obtido na dobra anterior. Olhe na tabela: 1, 2, 4, 8, 16, 32... e assim por diante. Para descobrirmos qual é essa lei que permite que eu calcule o número de dobradas a partir de uma sentença matemática, é preciso descobrir se há alguma coisa que se repete, que é comum em cada passo que damos para achar o número de partes em que a função ficará dividida. No caso do nosso exemplo, o papel sempre é dobrado em duas partes a partir da última dobra. Podemos dizer que o número 2 aparece em todos os passos. Veja a notação abaixo:

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$\dots = \dots$$

$$2^x = y$$

O tipo mais comum de função é aquele em que o argumento e o valor da função são ambos numéricos. O relacionamento entre os dois (argumento e imagem) é expresso por uma fórmula, e o valor da função é obtido através da substituição direta dos argumentos.

Exemplo: $f(x) = x^2$, portanto, $f(2) = 4$; $f(5) = 25$.

Quando trabalhamos com função, é preciso observar que existe:

- padrão de regularidade (a lei que determina a função);
- interdependência entre as grandezas;
- “máquina de entrada e saída” (calcula o valor que se quer encontrar).

Funções: tabelas, gráficos e equações



Basicamente há três formas de representar uma função:

- Numericamente → por tabelas.
- Geometricamente → por gráficos.
- Algebricamente → por fórmulas.

Esses três métodos permitem uma análise de como uma quantidade depende da outra. Usando um exemplo prático do nosso cotidiano a respeito do uso do conceito de funções, pensemos em um carro que faça 9 Km com um litro de combustível. Que distância é possível percorrer com esse carro?

Para responder a essa questão, vamos:

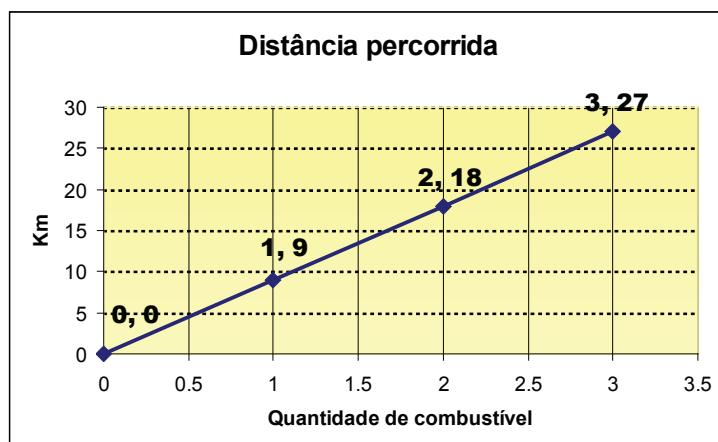
- criar uma tabela para relacionar esses dados;
- criar a sentença matemática que representa essa função;
- criar um gráfico dessa função.

Quantidade de combustível (C) Variável independente	Distância percorrida (D) Variável dependente
0	0
1	9
2	18
3	27
x	y

Sentença matemática

$D = \text{Quantidade de combustível} \times \text{distância percorrida}$

$$y = 9x$$



Entendendo o conceito de função

Numa loja, o salário fixo de um vendedor é R\$ 500,00. Além disso, ele recebe uma comissão de 50 reais por unidade de produto vendido.

Salário = Salário Fixo + Comissão.

Vamos representar as variáveis por letras:

S = Salário

SF = Salário Fixo

C = Comissão.

- Qual a variável independente? Por quê?

A comissão, porque o número de unidades vendidas é que vai compor o salário final.

- Qual a variável dependente? Por quê?

O Salário, pois ele depende da quantidade de unidades vendidas.

Substituindo pelos valores conhecidos, podemos montar uma equação:

$$S = SF + C$$

$$S = 500 + 50 \cdot x$$

- Se forem vendidas 4 unidades, qual será o Salário do vendedor?

Vamos substituir na equação:

$$S = 500 + 50 \cdot 4$$

$$S = 500 + 200$$

$S = 700 \rightarrow$ O salário do vendedor será de R\$ 700,00.

Se, no final do mês, o vendedor receber R\$ 1.000,00, quantas unidades ele vendeu?

$$S = 500 + 50 x$$

$$1.000 = 500 + 50 x$$

$$1.000 - 500 = 50 x$$

$$500 = 50 x$$

$x = 500 \div 50 \rightarrow x = 10$, portanto, ele vendeu 10 unidades.

Domínio de Imagem de uma Função

Glossário

Domínio: todos os valores que o x pode assumir.

Imagem: são os valores assumidos por y pela função f.



Exemplo:

$$y = x^2$$

Domínio = R, pois x pode assumir qualquer valor.

Imagem = R , pois um número negativo elevado ao quadrado fica positivo.

$$y = \frac{1}{x}$$

Domínio: R*

Imagem: R*

Notação:

Quando y é uma função de x, escrevemos $y = f(x)$

Determinando o valor da imagem:

Se $f(x) = 2x + 5$, as imagens de $x = 5$ e $x = 3$ são:

$$f(5) = 2.5 + 5 = 15$$

$$f(3) = 2.3 + 5 = 11$$

Função Afim



As funções afim ou polinomiais de 1º grau correspondem a relações entre a variável dependente e a variável independente expressas por polinômios do 1º grau.

A lei de uma função afim é dada por: $y = ax + b$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

A lei da função afim apresenta dois coeficientes: a e b.

O coeficiente **a** é chamado de coeficiente angular. Ele é numericamente igual à tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x.

O coeficiente **b** é chamado coeficiente linear e indica a intersecção da reta com o eixo y.

O gráfico de uma função afim é uma reta, portanto, para determiná-lo, bastam 2 pontos.

Exemplo:

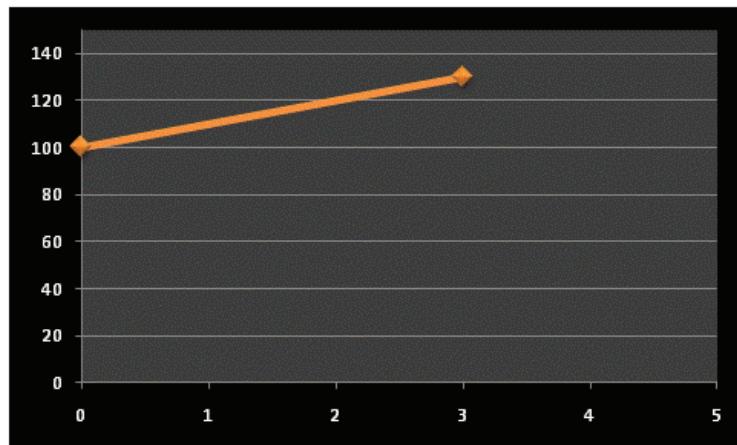
$$f(x) = 10x + 100$$

x (variável independente)	f(x) (variável dependente)
0	100
3	130

Escolher dois pontos aleatoriamente. No caso 0 e 3. Achar as imagens desses pontos e registrar na tabela.

$$f(0) = 10 \cdot 0 + 100 = 100$$

$$f(3) = 10 \cdot 3 + 100 = 130$$



Função Linear



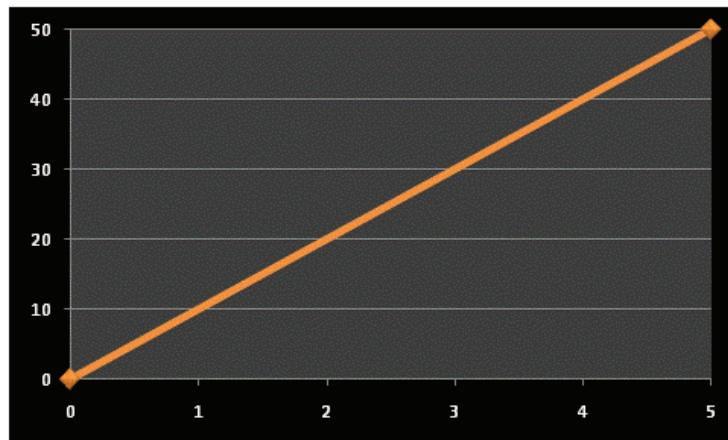
Se uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b=0$, ou seja $f(x) = ax$, ela é denominada função linear. O gráfico da função linear sempre intercepta a origem, o ponto $(0,0)$.

Exemplo:

x (variável independente)	f(x) (variável dependente)
0	0
5	50

$$f(0) = 10 \cdot 0 = 0$$

$$f(5) = 10.5 + 50$$



Função Identidade



A função afim com $a = 1$ e $b = 0$ fica reduzida a $f(x) = x$, ou seja, a cada valor de x , ela associa um número igual a x . O valor de y é idêntico ao de x .

O gráfico da função identidade é uma reta particular. Ela é a bissetriz (divide um ângulo em duas partes iguais) do I e III quadrantes do referencial cartesiano.

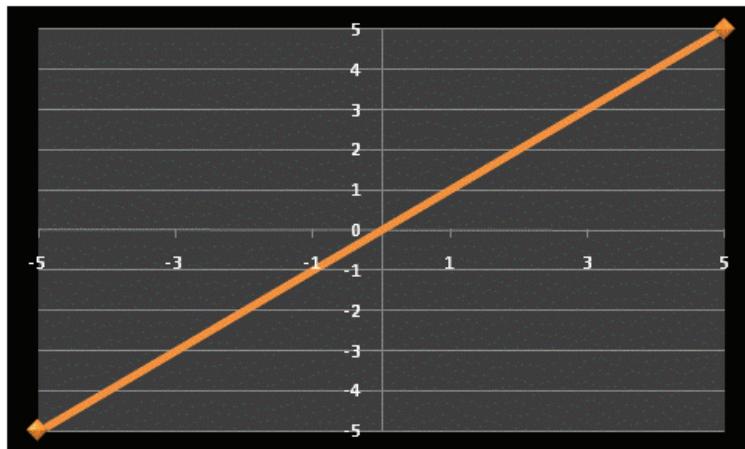
Exemplo:

$$f(x) = x$$

x (variável independente)	f(x) (variável dependente)
-5	-5
5	5

$$f(-5) = -5$$

$$f(5) = 5$$



Função Constante

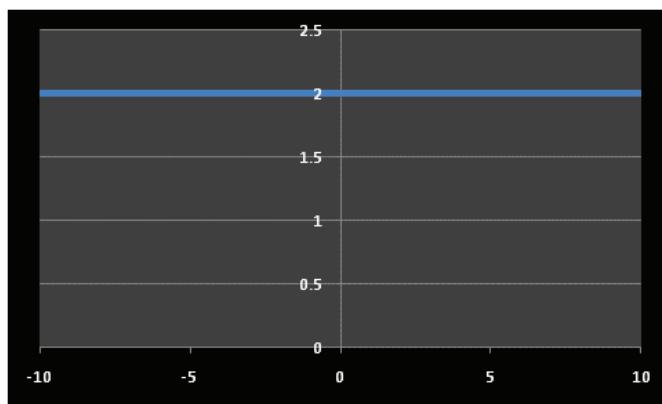


Outra função que pode ser obtida a partir da função afim é a função constante.

Temos $f(x) = ax + b$, fazendo $a = 0$, obtemos $f(x) = 0x + b$, ou $f(x) = b$.

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo x.

Exemplo: $y = 2$ (para qualquer valor de x, $y = 2$).



Intersecção da reta com o eixo x

Todos os pontos do eixo x têm como ordenada o ponto 0. Sendo assim, para achar o ponto de intersecção de uma reta $y = ax + b (a \neq 0)$ com o eixo x, basta fazer $y = 0$ e calcular o valor do x correspondente.

$$y = ax + b$$

$$0 = ax + b$$

$$x = -b/a$$

O valor $-\frac{b}{a}$ é chamado raiz ou zero da função. Podemos deduzir, então, que a intersecção de uma reta $y = ax + b$ com o eixo y é dada pelo par ordenado $(-\frac{b}{a}, 0)$. Podemos pensar, também, que a raiz de uma função é o valor de x, que torna a função nula, quer dizer, $y = 0$.

Exemplo:

Determinar a raiz da função $y = 2x + 5$ e o ponto de intersecção com o eixo x da reta que a representa.

Solução:

Fazendo $y = 0$ na função, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x + 5 \\ -5 &= 2x \\ x &= -5/2 \end{aligned}$$

O ponto de intersecção com o eixo x é $(-5/2, 0)$.

Equação da reta

Determinar a equação da reta que passa pelos pontos:

A (2, 1) e B (3, 4)

Vamos em busca do coeficiente angular da reta (m) e, para isso, vamos verificar quanto y variou e dividir pela variação de x.

Ponto	x	y
A	2	1
B	3	4

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{3-2} = 3$$

$$y = ax + b$$

$y = 3x + b$ (substituir x e y por um ponto conhecido)

$$1 = 3 \cdot 2 + b$$

$$1 - 6 = b$$

$$b = -5$$

$$y = 3x - 5$$

Função Quadrática



A lei de uma função afim é dada por: $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos de funções quadráticas:

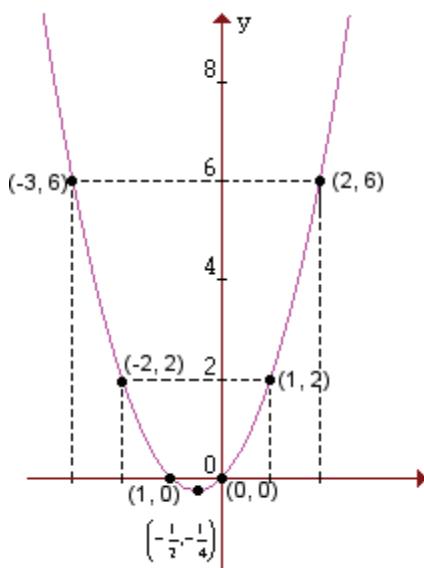
$y = 3x^2 + 6x - 5$	
a	3
b	6
c	-5
$y = 3x^2 + 6x$	
a	3
b	6
c	0
$y = 3x^2 - 5$	
a	3
b	0
	-5
$y = 3x^2$	
a	3
b	0
c	0

Gráfico de uma função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com o eixo de simetria paralelo ao eixo y. Para desenhar o gráfico, é necessário determinar alguns pontos da parábola, atribuindo valores a x e achando suas respectivas imagens.

Exemplo: $y = x^2 + x$

x	y
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
2	6



Pontos notáveis de uma parábola

Facilitam a construção do gráfico e a análise da função.

Ponto de intersecção com eixo y (eixo das ordenadas)

Esse ponto pode ser obtido ao igualar o x a zero. Observe a função:

$$y = x^2 - 6x + 5$$

Se atribuirmos o valor zero a x

$y = 0 \times 2 - 6 \times 0 + 5$, portanto $y = 5$ (que é o coeficiente c ou o termo independente da função quadrática).

Vértice

Esse ponto é muito importante por 3 motivos especialmente.

- 1 - Conhecida a abscissa x_v (x do vértice), encontraremos a reta que constitui o eixo e a simetria.
- 2 - O V (vértice) é o ponto em que a função f assume o seu maior ou seu menor valor de acordo com a concavidade da parábola.
- 3 - A função muda de comportamento ao passar pelo vértice.

Determinando o vértice de uma parábola

Os pontos que determinam o V são dados por:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Exemplo:

Achar o V da função: $y = x^2 - 6x + 5$

$$\text{Ponto } x = -\frac{-6}{2} = 3$$

Se $x = 3$ achar y substituindo direto na função:

$$y = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = -4$$

O par ordenado que determina o vértice da parábola é dado por $V = (3, -4)$.

Outra maneira de achar o y_v seria aplicando a fórmula acima. $(-\frac{\Delta}{4a})$

Pontos de interseção da parábola com o eixo x (eixo das abscissas)

Um ponto que pertence ao eixo x tem como ordenada y igual a zero. Assim como na função afim, para descobrir onde a parábola intercepta o eixo x, basta substituir y por zero, obtendo, assim, a equação quadrática: $ax^2 + bx + c = 0$. As soluções encontradas são as raízes ou zeros da equação.

A fórmula resolutiva da equação é conhecida por fórmula de Básbara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow$ é o discriminante da equação.

Há três possibilidades de resolução:

Para $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais diferentes.

$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$\Delta = 36 - 20$$

$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}, \text{ portanto } x_1 = 5 \text{ e } x_2 = 1 = S = \{5, 1\}$$

Para $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.

$$y = -x^2 + 2x - 1$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2}, \text{ portanto } x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 1 = S = \{1\}$$

Para $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

$$y = -x^2 + x - 2$$

$\Delta = -7$ (não há raiz real, ou seja, a parábola não intercepta o eixo do x)

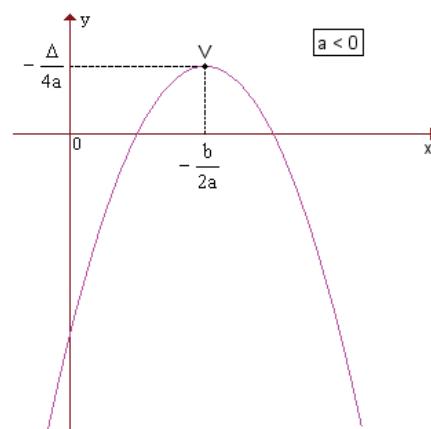
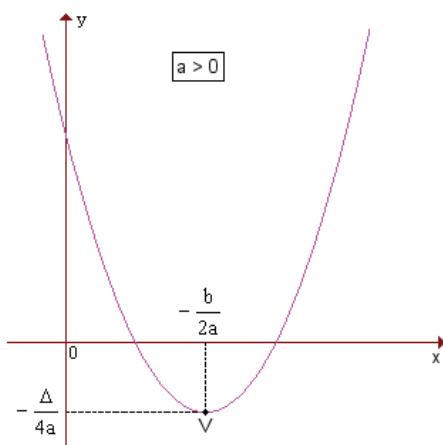
Coordenadas do vértice da parábola

Quando $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo V.

Quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo V.

Em qualquer caso, as coordenadas de V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

Veja os gráficos:



Função Exponencial



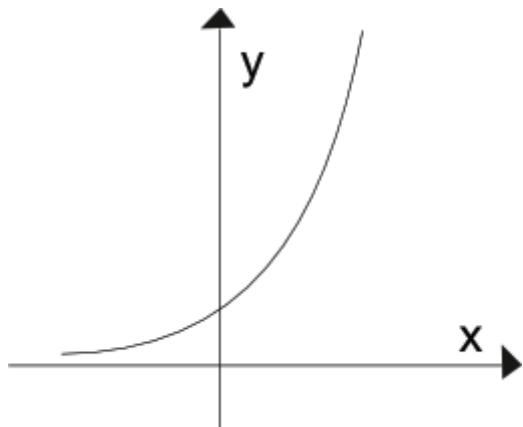
É toda função cuja lei é dada por $f(x) = a^x$, sendo a um número real positivo e diferente de 1.

O a tem que ser maior do que zero, para garantir que a função tenha uma solução real, e diferente de 1, para ser exponencial, pois o 1 elevado a qualquer número é ele mesmo, o que caracterizaria uma função constante e não uma função exponencial.

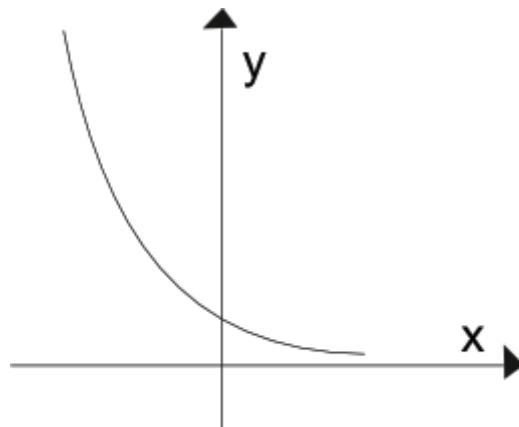
Gráfico da Função Exponencial

O gráfico é uma figura chamada curva exponencial, que passa por $(0, 1)$.

Para $a > 1$; a função é crescente.



Para $0 < a < 1$; a função é decrescente.



A curva nunca irá interceptar o eixo x e não tem pontos nos quadrantes 3 e 4.

A curva sempre cortará o eixo y no ponto 1. Os valores de y sempre serão positivos.

Exercício de Aplicação

A produção de uma indústria vem caindo mês a mês. Em um determinado mês, ela produzia 100 unidades de seu principal produto. A partir de então, a sua produção mensal passou a ser dada pela lei $y = 100 \cdot (0,4)^x$.

- Quantas unidades foram produzidas no terceiro mês desse período recessivo?
- Esboce o gráfico da função.

Resolução:

O primeiro passo é entender o problema e identificar as variáveis envolvidas. Temos uma função que nos informa a produção de uma fábrica em função do tempo, portanto y representa a produção e x o tempo.

O problema pede qual é a produção no terceiro mês, portanto basta substituir x por 3 e efetuar as operações matemáticas para resolver o problema.

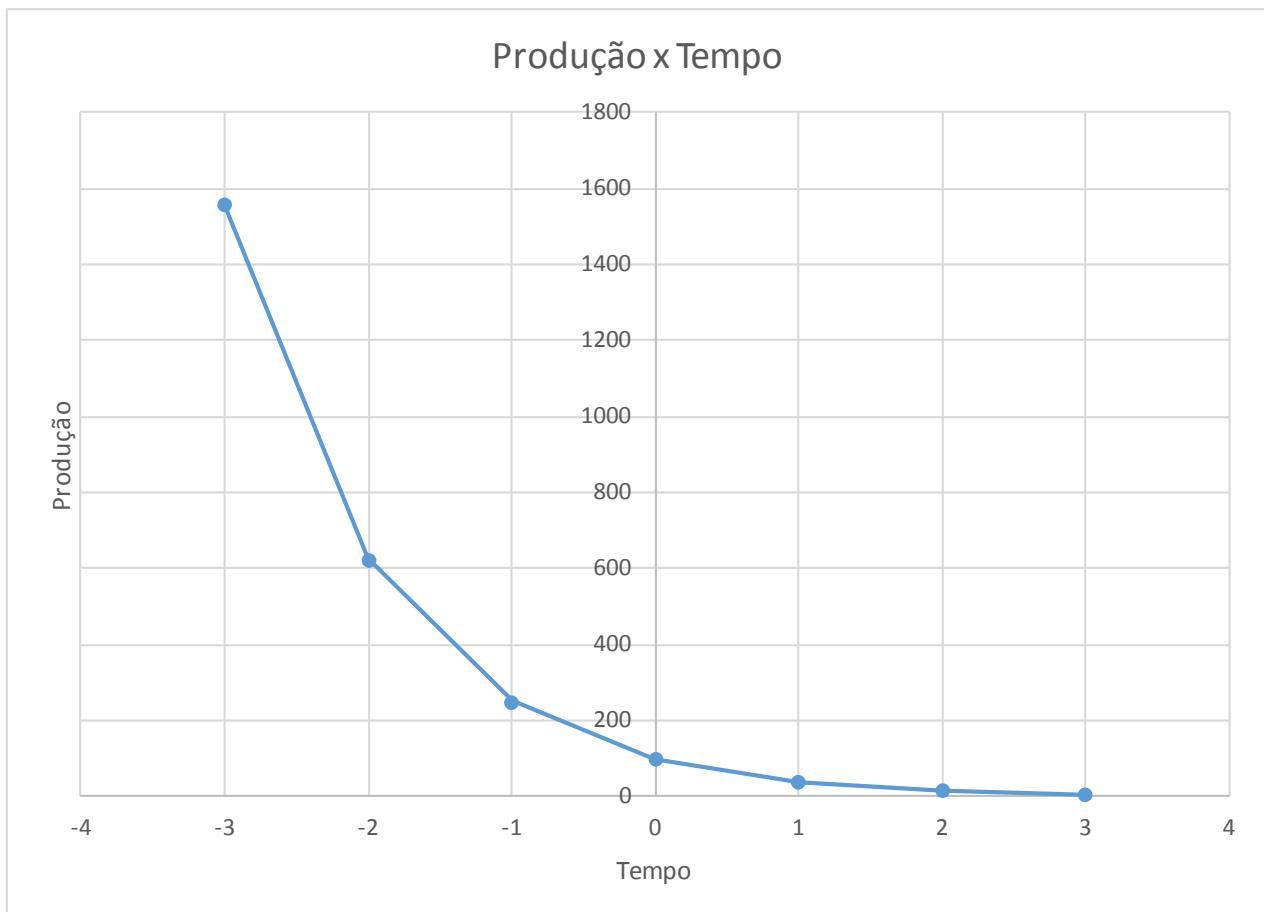
$$y = 100 \times (0,4)^3$$

$$y = 100 \times 0,064$$

$$y \approx 6,4$$

A produção no terceiro mês recessivo foi de aproximadamente 6,4 unidades.

Representação gráfica:



Função Logarítmica



Função logarítmica de base a é toda função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.

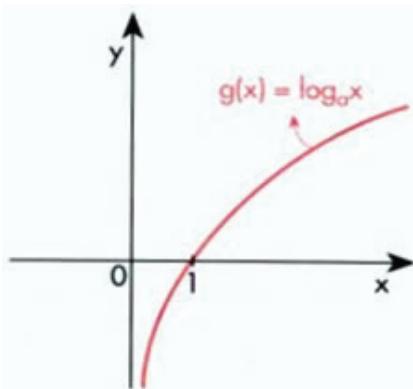
Condição de existência:

- a base a deve ser um número real e positivo e diferente de 1.
- a variável x deve ser maior que zero, logo o seu domínio é o conjunto dos números reais positivos.

Construção do gráfico

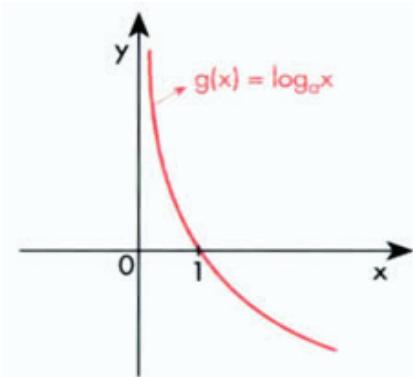
Para $a > 1$, temos o gráfico da seguinte forma:

Função crescente



Para $0 < a < 1$, temos o gráfico da seguinte forma:

Função decrescente

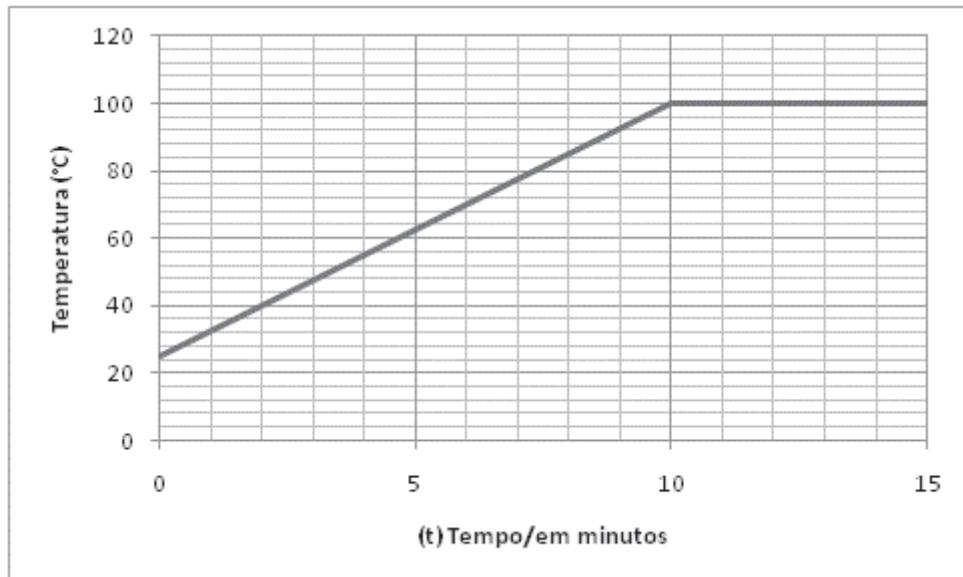


Função definida por várias sentenças



Até agora estudamos funções definidas por uma única sentença matemática. Vamos estudar, agora, funções que são definidas por mais de uma sentença.

Exemplo: Um físico aquece certa quantidade de água até ela começar a ferver. Seu objetivo é estudar a variação de temperatura desse líquido em função do tempo de aquecimento. Para tanto, a cada minuto, ele mergulha um termômetro na água e lê a temperatura. Procedendo dessa maneira, ele construiu o gráfico a seguir, que relaciona a temperatura T (em graus Celsius) com o tempo t (em minutos).



Observe que a função se comporta de forma diferente em diferentes partes do domínio.

No intervalo de 0 a 10 segundos, o gráfico mostra uma função linear crescente e no intervalo de 10 a 15 temos uma função constante.

Qual a equação da reta que está representada no intervalo [0 e 10]?

Qual é a equação da reta representada no intervalo [10, 15]?

Podemos, então, escrever que a função $T(t)$ é dada por duas sentenças:

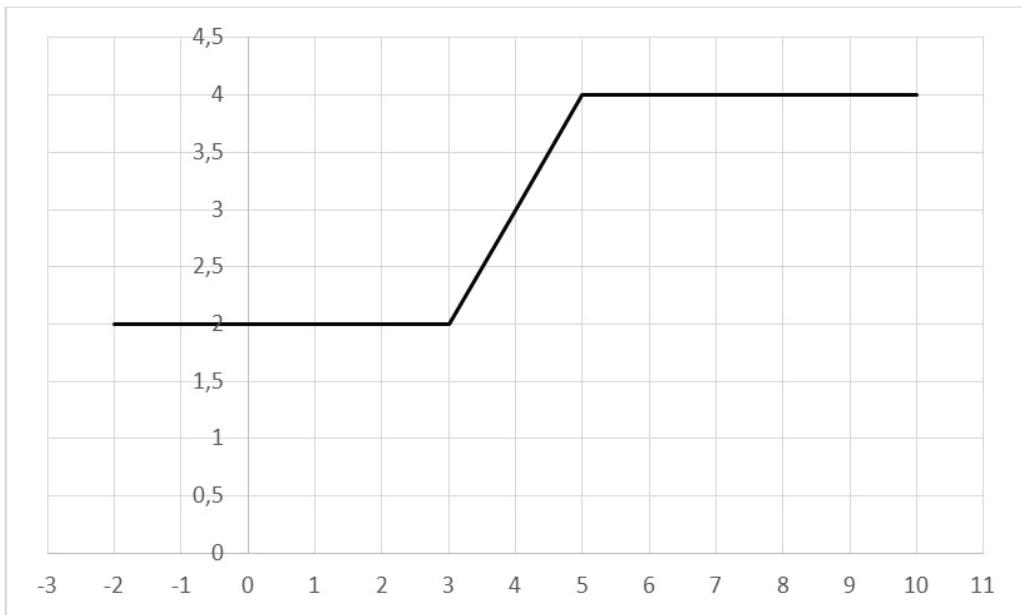
$$T(t) = \begin{cases} 7,5t + 25, & \text{se } 0 \leq t \leq 10 \\ 100, & \text{se } 10 < t \leq 15 \end{cases}$$

Exercício de Aplicação

Esboçar o gráfico e determinar o conjunto imagem da função:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 3 \\ x - 1, & \text{se } 3 \leq x < 5 \\ 4, & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Note que a função tem comportamentos diferentes em diferentes partes do domínio. Se o argumento (x) for menor do que 3 ou maior ou igual a 5, o comportamento da função é constante, valendo 2, se o x for menor do que 3, ou 4, se x for igual ou maior a cinco. Se formos analisar o comportamento da função no intervalo compreendido entre 3 e 5, note que vamos determinar o valor da função (y) através da sentença , que é uma função afim, cujo gráfico é definido por uma reta.



A base da função dada pelo número “e”

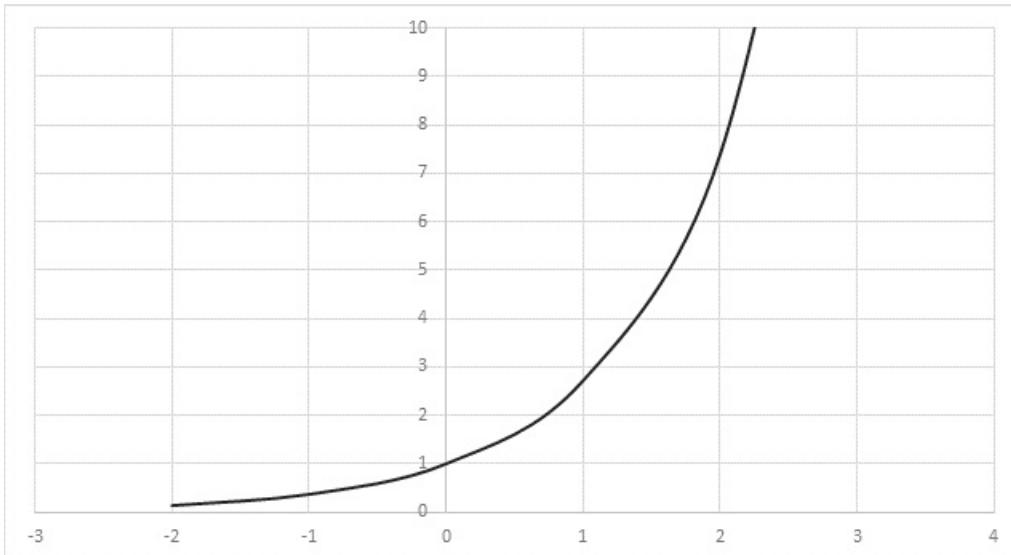
A função $f(x) = e^x$ é uma função de crescimento exponencial.

Observe alguns dados relativos a essa função:

Domínio: é o conjunto de todos os números reais.

Imagem: $]0, +\infty$).

É contínua e crescente para todo valor do domínio.



Qualquer função exponencial pode ser expressa em termos da base natural “e”. A letra “e” é a inicial do sobrenome do matemático Leonhard Euler, que foi quem introduziu essa notação. A função $f(x)=e^x$ tem propriedades especiais que simplificam vários cálculos e é conhecida como a base natural da função exponencial. É considerada uma das funções mais importantes para a modelagem de fenômenos físicos, naturais e econômicos.

É possível reescrever qualquer função exponencial do tipo $f(x)= a.b^x$ como:

$$f(x)=a \cdot e^{kx}$$

Sendo que “k” é uma constante e número real apropriadamente escolhido. Se k for maior que zero, trata-se de uma função de crescimento exponencial, e se k for menor que zero, teremos uma função de decrescimento exponencial.

Podemos citar, como exemplo de crescimento exponencial, os juros compostos continuamente, que usam o modelo $y=I \cdot e^{rt}$. Temos que I é o valor do investimento inicial, r é a taxa de juros na sua forma decimal e t o tempo em anos.

Como exemplo de decaimento exponencial, utilizaremos o modelo dado por $y = Ae^{-1.2 \times 10^{-4} t}$, que modela a maneira como o elemento radioativo carbono 14 decai ao longo do tempo. Nesse exemplo, A é a quantidade inicial de carbono 14 e t é o tempo em anos.



Explore

Atenção, para você que tem dificuldade com os conceitos envolvendo exponenciais e logaritmos, eu sugiro fazer uma revisão desses conceitos, acessando:

<http://www.vestibulandia.com.br/>

Funções Inversas e Logaritmos



Quando nos deparamos com uma função que inverte ou que desfaz o efeito de uma função f , estamos diante de uma função inversa. Uma função nada mais é do que uma regra que associa a cada valor de sua imagem um único elemento de seu domínio. Uma função que tem valores distintos para valores distintos de seu domínio é chamada de função injetora. Nas funções injetoras, cada ponto da imagem assume dado valor apenas uma vez. Podemos definir uma função injetora sempre que, no domínio D , se $f(x_1) \neq f(x_2)$ então $x_1 \neq x_2$.

Observe as representações numéricas das funções abaixo:

x	$f(x) = x^2$	x	$g(x) = x + 2$
-2	4	-2	0
-1	1	-1	1
0	0	0	2
1	1	1	3
2	4	2	4
...			...

Note que, na função $f(x)$, os valores -2 e 2 bem como -1 e 1 têm a mesma imagem, portanto $f(x)$ não é injetora. O mesmo não acontece com a função $g(x)$, pois, para cada valor do domínio, existe apenas uma imagem distinta.

Estando cada ponto da imagem de uma função injetora associado a apenas um ponto de seu domínio, o seu efeito pode ser invertido.

Observe a tabela: o domínio de $f(x) =$ imagem $g(x)$

x	$f(x) = 3x - 1$	x	$g(x) = \frac{x+1}{3}$
-1	-4	-4	-1
0	-1	-1	0
1	2	2	1
2	5	5	2

Definição: chama-se função inversa de f , que se indica por f^{-1} , a função com domínio B e imagem A definida por $f^{-1}(b) = a$, se e somente se $f(a) = b$. Quando se associa o -1 pela função $f(x)$, acha-se a imagem -4. Quando se tem uma função (no caso do exemplo da tabela $g(x)$), que associa o elemento -4 do domínio ao número 1 (sua imagem), dizemos que essa função é inversa de $f(x)$ e se indica por $f^{-1}(x)$

Para achar a inversa de uma função bijetora $y=f(x)$, troca-se x por y e isola-se o novo y.

Exemplo: a inversa de $y = 2x + 3$, é:

Troca-se x por y:

$$x = 2y + 3$$

Isola-se o y:

$$y = \frac{x-3}{2}$$

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ é a inversa de $f(x) = 2x + 3$

Material Complementar



Explore

Para aprofundar seus estudos sobre o estudo das Funções, consulte os sites a seguir;

<<http://magiadamatematica.com/uerj/cap/01-introfuncao.pdf>>;

<<http://www.brasilescola.com/matematica/introducao-funcao.htm>>;

<<http://www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u366327.shtml>>.

Outras indicações:

Leia também o capítulo 1 do livro: THOMAS JR., George B Et Al. Cálculo (de) george b. thomas jr. 12 ed. São Paulo: Addison-Wesley, 2003. (Páginas 2 à 60)

Sobre o desenvolvimento histórico do Conceito de Função, leia “Educação Matemática” em Revista SBEM, ano 8, nº 9/10, abr.2001, p.10.



Referências

- DEMANA, Franklin D.; WAITS, Bert K.; FOLEY, Gregory D.; KENNEDY, Daniel. **Pré-Cálculo.** 2 ed. São Paulo: Pearson, 2013.
- BOULOS, **Pré-Cálculo.** São Paulo: Makron Books, 1999/2001.
- FLEMMING, Diva Marília; GONCALVES, Miriam Buss. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.
- STEWART, James. **Cálculo 6.** Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- THOMAS JR., George B Et Al. **Cálculo (de) george b. thomas jr.** 12 ed. São Paulo: Addison-Wesley, 2003.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Em curso de cálculo.** 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001-2002.

Anotações





Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000



Universidade
Cruzeiro do Sul



UNICID
Universidade
Cidade de S. Paulo



UNIFRAN
Universidade
de Franca



UDF
Centro
Universitário



Módulo
Centro
Universitário