

Teoria dos Grafos



Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a distância

Material Teórico



Algoritmos de Busca em Grafos

Responsável pelo Conteúdo:

Prof. Dr. Cleber Silva Ferreira da Luz

Revisão Textual:

Prof. Me. Luciano Vieira Francisco

UNIDADE

Algoritmos de Busca em Grafos



- Introdução;
- Busca em Grafos.



OBJETIVO DE APRENDIZADO

- Conhecer todos os principais conceitos de busca em grafos.



Orientações de estudo

Para que o conteúdo desta Disciplina seja bem aproveitado e haja maior aplicabilidade na sua formação acadêmica e atuação profissional, siga algumas recomendações básicas:

Determine um horário fixo para estudar.

Mantenha o foco! Evite se distrair com as redes sociais.

Procure manter contato com seus colegas e tutores para trocar ideias! Isso amplia a aprendizagem.

Seja original! Nunca plágie trabalhos.

Aproveite as indicações de Material Complementar.

Conserve seu material e local de estudos sempre organizados.

Não se esqueça de se alimentar e de se manter hidratado.

Assim:

- ✓ Organize seus estudos de maneira que passem a fazer parte da sua rotina. Por exemplo, você poderá determinar um dia e horário fixos como seu “momento do estudo”;
- ✓ Procure se alimentar e se hidratar quando for estudar; lembre-se de que uma alimentação saudável pode proporcionar melhor aproveitamento do estudo;
- ✓ No material de cada Unidade, há leituras indicadas e, entre elas, artigos científicos, livros, vídeos e sites para aprofundar os conhecimentos adquiridos ao longo da Unidade. Além disso, você também encontrará sugestões de conteúdo extra no item **Material Complementar**, que ampliarão sua interpretação e auxiliarão no pleno entendimento dos temas abordados;
- ✓ Após o contato com o conteúdo proposto, participe dos debates mediados em fóruns de discussão, pois irão auxiliar a verificar o quanto você absorveu de conhecimento, além de propiciar o contato com seus colegas e tutores, o que se apresenta como rico espaço de troca de ideias e de aprendizagem.

Introdução

Técnicas de busca em grafos são utilizadas em diversas modelagens utilizando grafos. Em inúmeros problemas há necessidade de visitar os vértices do grafo. Diferentes algoritmos de busca em grafos foram propostos ao longo dos anos, de modo que nesta Unidade estudaremos os principais algoritmos de busca em grafos, a saber; busca em profundidade e busca em largura.

O algoritmo de busca em profundidade realiza a procura em grafo G ; começa no vértice raiz e explora tanto quanto possível cada um de seus ramos. Já o algoritmo de busca em largura também começa a procura por um vértice raiz e explora todos os seus vizinhos. Assim, começaremos a estudar um algoritmo genérico de busca.

Busca em Grafos

Algoritmos de busca em grafos são utilizados para solucionar diversos problemas. O seguinte Quadro apresenta um algoritmo para uma busca genérica:

Quadro 1

```
Ler  $G = (N, M)$ 
Escolher e marcar um vértice i
Enquanto existir  $j \in N$  marcado com uma aresta  $(j, k)$  não explorado Fazer
    Escolher o vértice j e explorar a aresta  $(j, k)$ 
    // condição variável em conformidade com o tipo de busca //
    Se k é não marcado então marcar k
Fim do Enquanto
```

Fonte: Acervo do conteudista

Um exemplo de aplicação que utiliza busca em grafos é dado no **problema de encontrar a saída em um labirinto**. Observe, na Figura 1a, um simples labirinto. O problema consiste em encontrar uma saída para o qual. É possível modelar este problema com grafos e encontrar uma saída utilizando busca em grafo (GOLDBARG; GOLDBARG, 2012).

Já a Figura 1b ilustra o começo do processo de modelagem. Primeiro, são colocados círculos margeando todas as paredes do labirinto. Estes círculos representam vértices dos grafos e são pontos de mudanças de direção no caminho do labirinto.

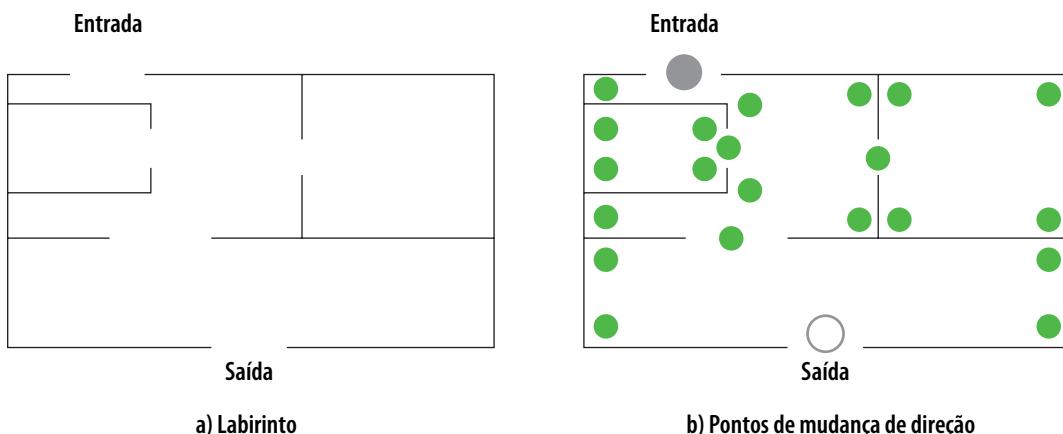


Figura 1 – Transformação de um labirinto em um grafo

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

Nesta modelagem, as arestas mostram a possibilidade de movimento no labirinto. A Figura 2a ilustra as arestas e os vértices representados dentro do labirinto; já a Figura 2b apresenta o grafo modelado no labirinto:

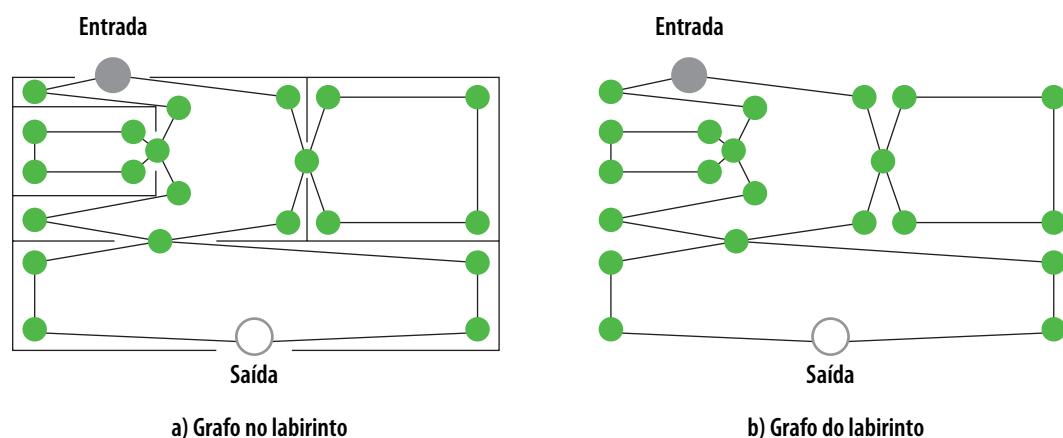


Figura 2 – Grafo do labirinto

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

Para encontrar a saída do labirinto é necessário percorrer os diversos caminhos possíveis. A forma mais simples de encontrar a saída do labirinto sem nunca percorrer mais de uma vez uma mesma parede consiste em rotular as arestas percorridas na busca, de modo a nunca transitar uma aresta anteriormente rotulada. A busca começa pela entrada do labirinto, isto é, pelo vértice que representa a entrada no labirinto, continuando até que o vértice que representa a saída seja alcançado.

As figuras 3a e 3b ilustram duas possíveis sequências de visita no grafo quando aplicado o algoritmo da **busca genérica**: o caminho exemplificado na Figura 3a consiste na visita ao vértice 1, caminhando depois pelas arestas (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), neste momento, o ciclo se fecha sobre o vértice 4 e pela aresta (8,4), continuando, são percorridas as arestas (4,9), (9,10), (10,11), (11, 12),

(12,13) e, por fim, pela aresta (13,14). A Figura 3b apresenta uma busca mais eficiente, inicialmente visitando o vértice 1 e percorrendo as arestas (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), chegando ao vértice 8, ou seja, à saída do labirinto.

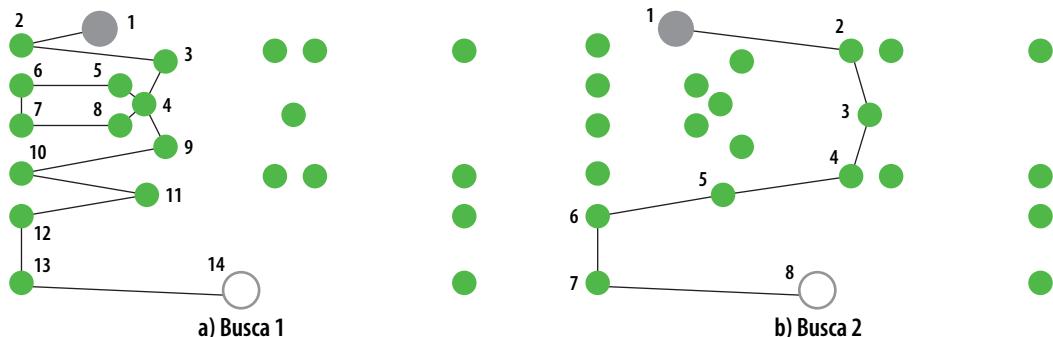


Figura 3 – Busca no grafo do labirinto

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

Diversos algoritmos são construídos com base no algoritmo genérico. Esses algoritmos variam o critério de avaliação dos vértices e das arestas. Assim, um algoritmo muito eficiente e elegante é conhecido como **algoritmo de busca em profundidade** – sobre o qual estudaremos na próxima seção.

Busca em Profundidade

A técnica de busca em profundidade tem se mostrado útil no desenvolvimento de algoritmos eficientes que resolvem problemas, tal como encontrar componentes fortemente conexos de um grafo (CORMEN *et al.*, 2002).

O algoritmo conhecido como **Busca em Profundidade** (BP) é desenvolvido sobre um algoritmo genérico; todavia, a seleção de vértice é realizada sobre o vértice não marcado mais recentemente alcançado na busca – os passos que a BP realiza são apresentados a seguir:

Quadro 2

```

Procedimento BP(v)
    marcar v
    Enquanto existir w ∈ Γ(V) fazer
        Se w é não marcado
            explorar (v, w)
            marca w
            BP(w)
        Senão
            Se (v,w) não explorada
                explorar(v,w)
    Fim _Enquanto
  
```

Fonte: Acervo do conteudista



Importante!

Note que esse procedimento é recursivo, considerando um grafo conexo e não direcional (GOLDBARG; GOLDBARG, 2012).

Aplicando o procedimento de busca em profundidade em um grafo **G** a partir de um vértice **v** qualquer, os vértices marcados e as arestas exploradas em consequência da satisfação da condição do primeiro “**se**” compõem uma subárvore de **G**, denominada **árvore de profundidade de G** – as demais são denominadas **arestas de retorno**.

Analisaremos a busca em profundidade por meio de um exemplo; para isso, considere o grafo apresentado na Figura 4:

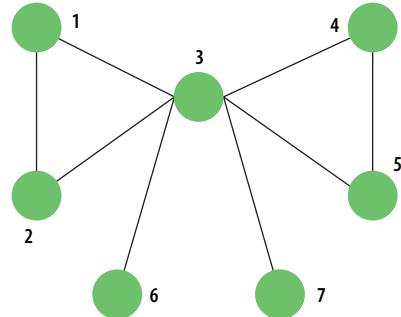


Figura 4 – Exemplo de grafo para a busca em profundidade

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

Aplicaremos o algoritmo da busca em profundidade no grafo apresentado (Figura 4), partindo do vértice 1. As figuras 5a a 5f ilustram a aplicação do procedimento da busca em profundidade:

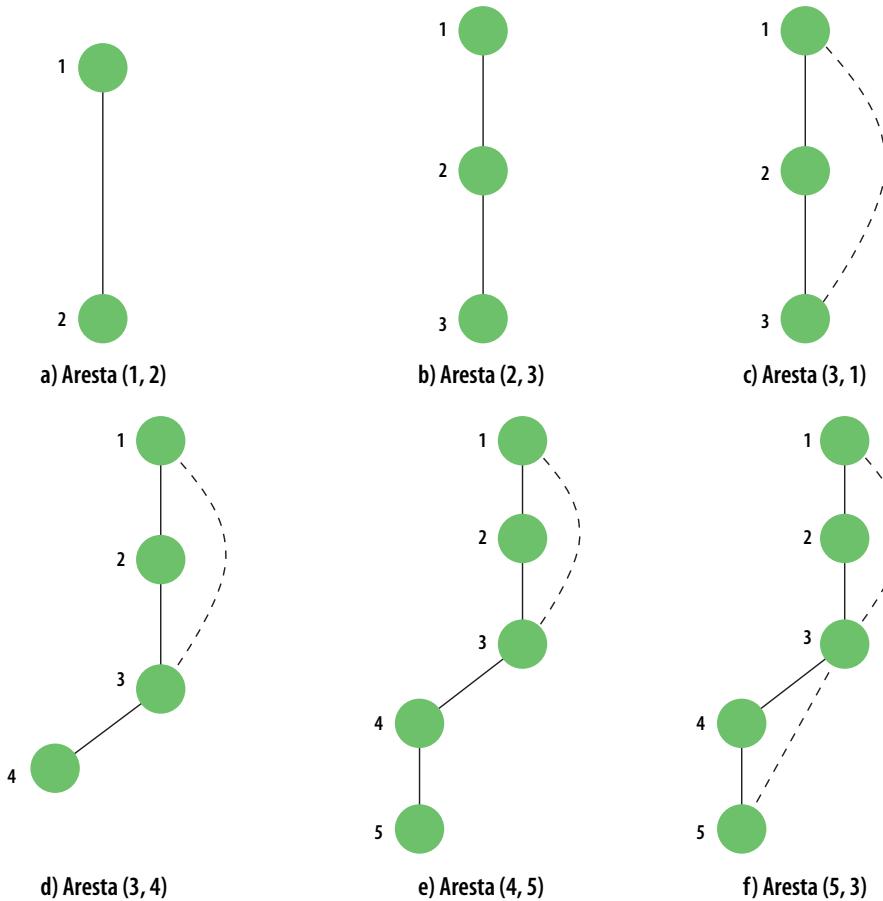


Figura 5 – Busca em profundidade

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

Considere que o grafo da Figura 4 está representado na forma de uma lista de adjacências, onde os vértices de cada lista encadeada estão ordenados. O inicial (Vértice 1) é a raiz da árvore de profundidade.

A busca começa no Vértice 1, logo após é verificado o Vértice 2. Como o Vértice 2 é não marcado, então é realizada uma chamada recursiva do procedimento BP, passando esse vértice como parâmetro de entrada. Neste momento, a chamada do procedimento BP(1) fica interrompida, esperando a volta da chamada BP(2) para ser completada. Durante o processamento de BP(2) é verificado que no Vértice 1 é marcado e que a aresta (1, 2) já foi explorada. Portanto, prossegue-se para o segundo vizinho do Vértice 2, o nó 3. Assim, a aresta (2, 3) é incluída na árvore, tal como exemplificado na Figura 5b e o procedimento BP(3) é, então, iniciado. A lista de adjacências do Vértice 3 é composta pelos vértices 1, 2, 4, 5, 6 e 7. A aresta (3, 1), ou (1, 3), é não explorada, entretanto, o Vértice 1 é marcado. A aresta (3, 1) não é incluída na árvore de profundidade, uma vez que é uma aresta de retorno, conforme ilustrado na Figura 5c – em que a aresta de retorno é representada por uma linha pontilhada.

Já a aresta (3, 2) é explorada e a (3, 4) é incluída na árvore, conforme ilustrado na Figura 5d. Assim, uma chamada ao procedimento BP(4) e a aresta (4, 5) é incluída na árvore, condição ilustrada na Figura 5e.

O procedimento BP(5) é iniciado. O Vértice 3 é marcado, mas a aresta (3, 5) ainda não é explorada. Dessa forma, a aresta de retorno (5, 3) ou (3, 5) é explorada, conforme ilustrado na Figura 5f. A verificação do Vértice 5 termina e o procedimento BP(5) é encerrado. No processamento do Vértice 4 também não existem outros adjacentes ao vértice, terminando, também, o procedimento BP(4).

Assim, retorna-se ao procedimento BP(3). A aresta (3, 5) já está explorada. Logo, o próximo vizinho do Vértice 3 a ser examinado é o Vértice 6. A aresta (3, 6) é incluída na árvore e uma chamada para BP(6) é realizada. O Vértice 6 não tem outros vizinhos além do Vértice 3, o procedimento BP(6) é finalizado – isso também ocorre na verificação do Vértice 7.

As figuras 6a e 6b ilustram as inclusões das arestas (3, 6) e (3, 7), respectivamente, durante a verificação do Vértice 3; já a Figura 6c apresenta a árvore de profundidade construída pelo algoritmo de busca de profundidade para o grafo apresentado na Figura 4, iniciando pelo Vértice 1.

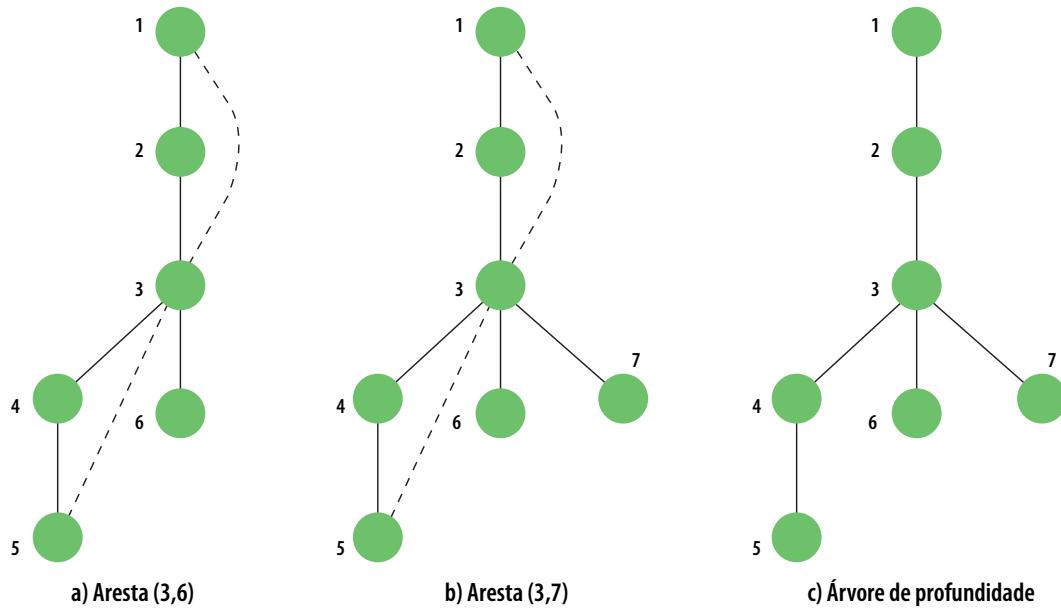


Figura 6 – Busca em profundidade em grafo não direcionado

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

No caso do grafo desconexo, o procedimento BP deve ser chamado novamente enquanto existir vértice não marcado no grafo. Dessa forma, em vez de uma árvore de profundidade, o algoritmo construirá uma floresta de profundidade.

O algoritmo de profundidade possui complexidade de $O(n+m)$.

Algoritmo de Busca em Profundidade em Grafos Orientados

Analisaremos o algoritmo de busca em profundidade em grafos orientados, sendo essencialmente o mesmo para grafos não orientados; contudo, uma diferença é que mesmo se o grafo for conexo, o algoritmo de busca pode gerar uma floresta de profundidade. Em grafos orientados, o algoritmo de busca é chamado enquanto ainda existir algum vértice não marcado. A seguir, veremos como a busca é realizada para grafos orientados (GOLDBARG; GOLDBARG, 2012):

Ouadro 3

```

Procedimento BP Dir
  Ler G = (N, M)
  Enquanto existir v ∈ N, v não marcado Fazer
    BP(v)
  Fim_Equantos

```

Fonte: Acervo do conteudista

Em grafos orientados, as arestas são particionadas em quatro conjuntos, em vez de dois – como acontece nos grafos não orientados. O primeiro conjunto contém as arestas onde o vértice destino ainda não foi marcado. Tais arestas participam da árvore de profundidade que será construída pelo algoritmo. Considere o Vértice w e que o destino da aresta seja marcado, então, com uma das três situações a seguir, denotando o conjunto do qual a aresta participa:

1. Caso w seja descendente de v na floresta, então a aresta será denominada **avanço**;
2. Caso v seja descendente de w na floresta, então a aresta será denominada **retorno**;
3. Caso v não seja descendente de w e nem w seja descendente de v na floresta, então a aresta será denominada **cruzamento**.

Aplicaremos o algoritmo de busca em profundidade em um grafo orientado; para isto, considere o grafo apresentado na Figura 7:

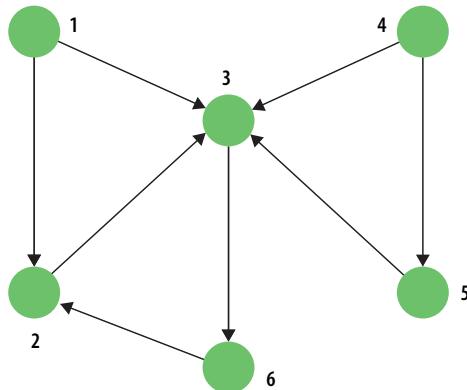
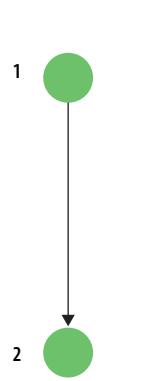


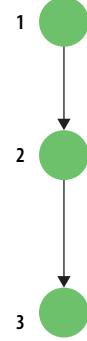
Figura 7 – Busca em profundidade em grafo direcionado (1)

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

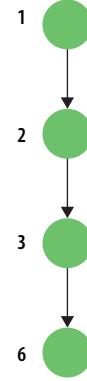
As figuras 8a a 8f mostram a aplicação do algoritmo de busca em profundidade em um grafo orientado:



a) Arco (1, 2)



b) Arco (2, 3)



c) Arco (3, 6)

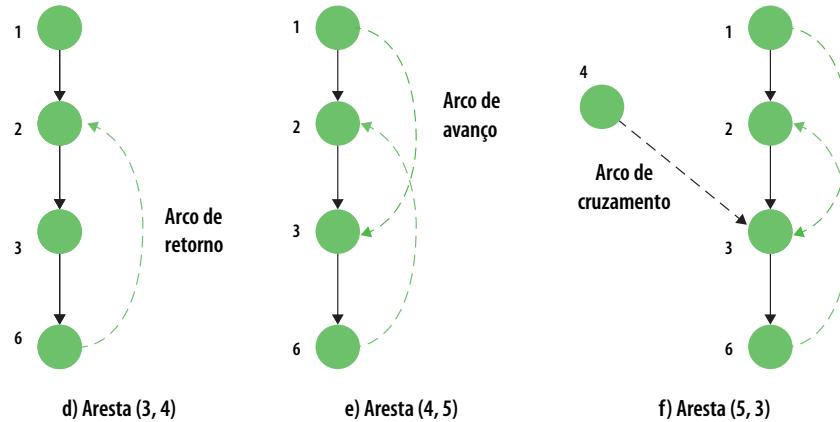


Figura 8 – Busca em profundidade em grafo direcionado (2)

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

Note que a busca começa pelo Vértice 1. Conforme ilustrado nas Figuras 8a a 8c, o algoritmo procede incluindo os arcos $(1, 2)$, $(2, 3)$ e $(3, 6)$, respectivamente.

Na verificação do Vértice 6 encontra-se o arco $(6, 2)$. É verificado que o Vértice 2 já é marcado e o Vértice 6 é o seu descendente na árvore. Dessa forma, o arco $(6, 2)$ é classificado como de **retorno**, conforme ilustrado na Figura 8d. Os procedimentos para os vértices 6, 3 e 2 são encerrados e a busca volta ao Vértice 1.

Agora, o arco $(1, 3)$ é explorado. Devido ao fato de o Vértice 3 já estar na árvore e ser descendente de 1, então, o arco $(1, 3)$ será reconhecido como de **avanço**, conforme ilustrado na Figura 8e. Assim, a chamada do procedimento de busca ao Vértice 1 se encerra, tendo construído uma primeira árvore – composta pelos arcos $(1, 2)$, $(2, 3)$ e $(3, 6)$.

Todavia, os vértices 4 e 5 permanecem não marcados. Assim, uma nova chamada de procedimento de busca em profundidade é realizada ao Vértice 4. O primeiro arco explorado é o (4, 3). O Vértice 3 já está marcado. Como nem o Vértice 3 desce de 4, como também 4 não desce de 3, então o arco (4, 3) é classificado como de **cruzamento** (GOLDBARG; GOLDBARG, 2012).

Agora, os arcos $(4, 5)$ e $(5, 3)$ são considerados pela busca, procedimento ilustrado nas figuras 9a e 9b; já a Figura 9c apresenta a floresta de profundidade do grafo:

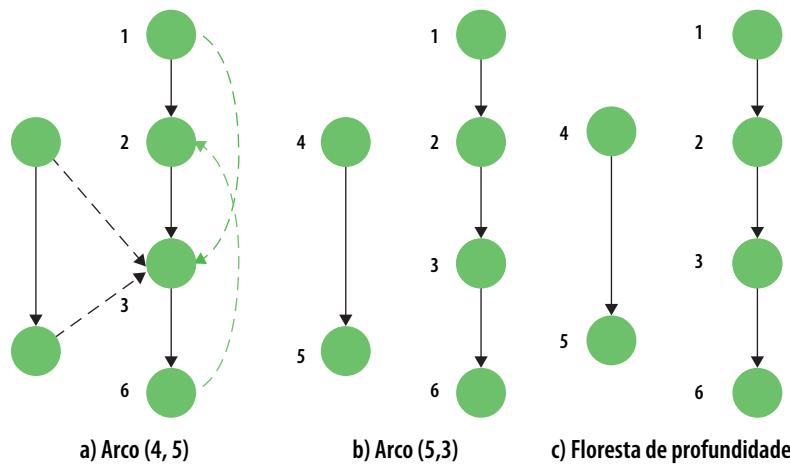


Figura 9 – Busca em profundidade em grafo direcionado (3)

Fonte: Adaptada de Goldbarg e Goldbarg, 2012

A complexidade do algoritmo de busca em profundidade é de $O(n+m)$.

Busca em Largura

Busca em largura é outro algoritmo baseado no de busca genérico. Neste algoritmo de busca, a seleção do vértice é realizada sobre os vértices não marcados menos recentemente alcançados na busca. A seguir é apresentado o pseudocódigo da busca em largura (GOLDBARG; GOLDBARG, 2012).

Quadro 4

```

Procedimento BL(G=(N,M))
  definir uma fila Q vazia
  escolher um vértice inicial v
  marcar v
  insere v em Q
  Enquanto Q ≠ Ø Fazer
    v ← remove elemento de Q
    Para todo w ∈ Γ(v) Fazer
      Se w é não marcado
        explorar (v, w)
        insere w em Q
        marcar w
      Senão
        Se (v, w) não explorada
          explorar (v, w)
      Fim_Se
    Fim_para
  Fim_enquanto

```

Fonte: Acervo do conteudista

Aplicaremos o algoritmo da busca em largura no grafo apresentado na Figura 10 e que é o mesmo grafo utilizado em exemplos anteriores. Consideraremos novamente que o grafo está representado através de uma lista de adjacência cujos nós – de cada lista encadeada – estão ordenados. A busca é iniciada por meio do Vértice 1, enquanto que o vértice inicial é a raiz da árvore de profundidade.

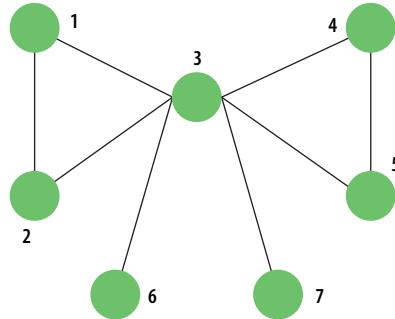
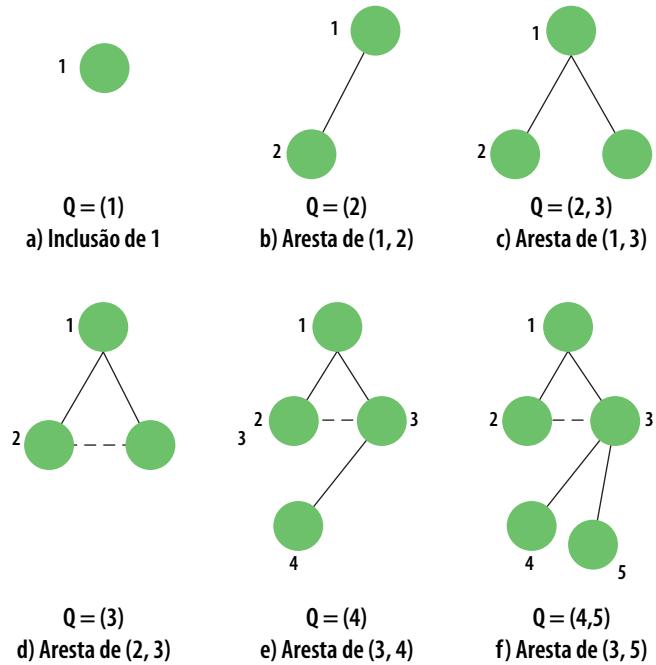
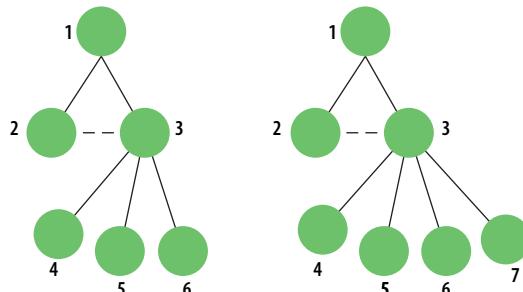


Figura 10 – Busca em largura em grafo não direcionado (1)

Fonte: Adaptado de Goldbarg e Goldbarg, 2012

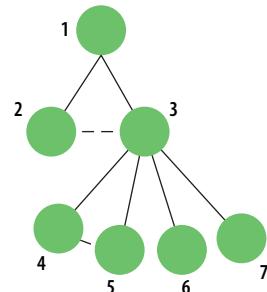
A aplicação do algoritmo de busca em largura é ilustrada nas figuras 11a a 11h. Como a busca começa pelo Vértice 1, este é marcado e colocado em Q e logo em seguida removido de Q. O Vértice 1 possui como vértices adjacentes os de números 2 e 3. O Vértice 2 não é marcado, assim, a aresta (1, 2) é incluída na árvore, o Vértice é marcado e incluído em Q, conforme ilustrado na Figura 11b; o mesmo ocorre com o Vértice 3, ilustrado na Figura 11c. O Vértice 2, na frente da fila Q, é removido e a aresta (2, 3) é explorada, assim como na Figura 11d. Já as figuras 11e a 11h ilustram as inclusões dos vértices 4, 5 e 7, respectivamente, na árvore de busca em largura e na fila Q. Depois que o Vértice 4 é removido da fila, a aresta (4, 5) é explorada, conforme ilustrado na Figura 11i. A execução do algoritmo continua e os vértices restantes são retidos da fila até que Q esteja vazia.





$Q = (4, 5, 6)$
g) Aresta de (3, 6)

$Q = (4, 5, 6, 7)$
h) Aresta de (3, 7)



$Q = (5, 6, 7)$
i) Aresta de (4, 5)

Figura 11 – Busca em largura em grafo não direcionado
Fonte: Adaptada de Goldbarg e Goldbarg, 2012

A busca em largura possui complexidade de $O(n+m)$



Em Síntese

Algoritmos de busca em grafos são utilizados para solucionar diversos problemas modelados por grafos.

Existem diversos algoritmos de busca em grafos, entre os quais o de busca em profundidade e de busca em largura, sendo ambos simples e eficientes.

A busca em profundidade é um algoritmo que percorre os vértices do grafo com o objetivo de chegar a um determinado vértice. A principal característica desse algoritmo é percorrer todos os nós filhos de um nó pai.

A busca em largura também percorre os vértices do grafo, objetivando chegar a um vértice específico. Todavia, a técnica implementada na busca em largura é diferente da operada em profundidade, afinal, a busca em largura visita todos os vértices vizinhos.

Material Complementar

Indicações para saber mais sobre os assuntos abordados nesta Unidade:

Livros

Introdução à Teoria dos Grafos

CLÁUDIO, L. L. **Introdução à teoria dos grafos.** [S.l.]: Impar, 2016.

Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação

NICOLETTI, A. M.; HRUSCHKA JR, E. R. **Fundamentos da teoria dos grafos para computação.** São Carlos, SP: Edufscar, 2006.

Grafos e Redes: Teoria e algoritmos básicos

SIMÕES, J. M. S. **Grafos e redes:** teoria e algoritmos básicos. [S.l.]: Interciênciac, 2013.

Leitura

Matemática Discreta: Combinatória, teoria dos grafos e algoritmos

CARDOSO, M.; SZYMANSKI, J.; ROSTAMI, M. Matemática discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos. [S.l.]: Escolar, 2009.

<https://tinyurl.com/y6oek99n>

Referências

- BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos**: teoria, modelos, algoritmos. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2001.
- _____.; JURKIEWICZ, S. **Grafos**: introdução e prática. 2. ed. [S.l.]: Blucher, 2017.
- CORMEN, T. *et al.* **Algoritmos** – teoria e prática. 2. ed. [S.l.]: Campus, 2002.
- FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. **Uma introdução sucinta à teoria dos grafos**. 2011. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos>>. Acesso em: 24 nov. 2018.
- FURTADO, A. L. **Teoria dos grafos algoritmos**. Rio de Janeiro: LTC, 1973.
- GOLDBARG, M.; GOLDBARG, E. **Grafos** – conceitos, algoritmos e aplicações. [S.l.]: Campus, 2012.
- NICOLETTI, A. M.; HRUSCHKA JR, E. R. **Fundamentos da teoria dos grafos para computação**. São Carlos, SP: Edufscar, 2006.
- SIMÕES, J. M. S. **Grafos e redes**: teoria e algoritmos básicos. [S.l.]: Interciência, 2013.
- SZWARCFITER, J. L. **Teoria computacional de grafos**. [S.l.]: Elsevier, 2018.



Cruzeiro do Sul
Educacional