Matemática Aplicada

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

Material Teórico

Conjuntos e Intervalos Reais

Responsável pelo Conteúdo:
Profa. Ms. Adriana Domingues Freitas
Profa. Dra. Jussara Maria Marins

Revisão Textual:
Profa. Ms. Luciene Oliveira da Costa Santos

UNIDADE Conjuntos e Intervalos Reais

- Introdução
- Conjuntos
- Representação dos Conjuntos
- Subconjuntos
- Operações entre Conjuntos
- Intersecção de Conjuntos
- Diferença entre Conjuntos
- Produto Cartesiano
- Propriedades das Operações entre Conjuntos
- Propriedades Distributivas
- Intervalos Reais

OBJETIVO DE APRENDIZADO

- Resgatar a compreensão da linguagem matemática a partir da simbologia dos conjuntos.
- Descrever operações e relações.
- Aprimorar os conceitos sobre conjuntos e a relação entre elementos e conjuntos, e a relação entre dois ou mais conjuntos.
- Reconhecer as propriedades das operações entre conjuntos a fim de realizar as principais operações entre conjuntos: união, intersecção, diferença e produto cartesiano.
- Identificar os intervalos reais como subconjuntos do conjunto R que são contínuos.
- Realizar operações entre conjuntos numéricos: união, intersecção e diferença.

Orientações de estudo

Para que o conteúdo desta Disciplina seja bem aproveitado e haja uma maior aplicabilidade na sua formação acadêmica e atuação profissional, siga algumas recomendações básicas:

Assim:

- ✓ Organize seus estudos de maneira que passem a fazer parte da sua rotina. Por exemplo, você poderá determinar um dia e horário fixos como o seu "momento do estudo".
- ✓ Procure se alimentar e se hidratar quando for estudar, lembre-se de que uma alimentação saudável pode proporcionar melhor aproveitamento do estudo.
- ✓ No material de cada Unidade, há leituras indicadas. Entre elas: artigos científicos, livros, vídeos e *sites* para aprofundar os conhecimentos adquiridos ao longo da Unidade. Além disso, você também encontrará sugestões de conteúdo extra no item **Material Complementar**, que ampliarão sua interpretação e auxiliarão no pleno entendimento dos temas abordados.
- ✓ Após o contato com o conteúdo proposto, participe dos debates mediados em fóruns de discussão, pois irão auxiliar a verificar o quanto você absorveu de conhecimento, além de propiciar o contato com seus colegas e tutores, o que se apresenta como rico espaço de troca de ideias e aprendizagem.

Introdução

Olá, aluno(a)!

Muitos dos conceitos que vamos estudar aqui já foram vistos no ensino médio. Porém, agora faremos uma formalização dos conceitos e da linguagem matemática, que possui uma simbologia própria, com o objetivo de lhe proporcionar uma maturidade que será necessária ao longo do curso.

Conjuntos

Na matemática, chamamos de conjunto uma abstração para expressar uma delimitação (ou agrupamento) de objetos ou elementos. Dessa forma, um conjunto pode ser uma coleção de objetos quaisquer, inclusive outros conjuntos.

Exemplos: conjunto das vogais, conjunto dos números pares, conjunto dos nomes dos meses do ano que possuem 31 dias.

Dentre as formas de representação para indicar um conjunto, apresentamos inicialmente um par de chaves { , }. As chaves são indicadas, respectivamente, para iniciar e terminar a delimitação dos elementos de um conjunto e estes são separados por vírgulas.

Por exemplo: temos o conjunto das três primeiras letras do alfabeto latino: {a, b, c} ou ainda {A, B, C}. O conjunto dos algarismos da base decimal: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. O conjunto dos números do CEP 04121-040 será dado por: {0,1,2,4}.

Para deixar clara a ideia de conjunto, usamos as chaves e, normalmente, o nome do conjunto é indicado por uma letra maiúscula.

A = { v, x, z },

B = { 0, 1, 2, 4 }

C = { a, b, c }

D = { janeiro, fevereiro, março}

E = { a, e, i o, u}

F = { azul, amarelo, vermelho}

G = { positivo, negativo }

Mas qual nome utilizar? Os nomes, tanto dos elementos, como dos conjuntos são arbitrários, como quaisquer nomes, alguns deles são muito usados e tornam-se especiais, como os símbolos de trânsito, de propaganda etc.

Também podemos representar um conjunto pela descrição da propriedade que seus elementos possuem em comum, ou ainda por diagramas, conforme veremos nesta unidade.

Um elemento pode ou não "pertencer" a um determinado conjunto, e para a relação de pertencimento utilizamos o símbolo $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence).

Exemplo: a letra u pertence ao conjunto A das vogais, logo escrevemos da seguinte forma: $u \in A$. Já a letra v, não pertence ao conjunto A das vogais, nesse caso $v \notin A$.

Pela notação, temos: A { a, e, i, o , u }

E temos que:

$u \in A$

$v \notin A$

Em outro exemplo, temos que janeiro pertence ao conjunto B dos meses que possuem 31 dias, já o mês de abril não pertence a esses conjuntos. Pela simbologia, podemos descrever:

B = { janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro }

janeiro $\in$ B

abril $\notin$ B

Um conjunto pode ser formado por elementos, mas também tratamos da relação entre dois ou mais conjuntos. E, quando tratamos de um conjunto a respeito de um outro conjunto, dizemos que este está contido (usamos o símbolo $\subset$) ou não está contido (nesse caso o símbolo $\not\subset$).

Exemplo: o conjunto A das vogais A { a, e, i, o , u } está contido no conjunto B das letras do alfabeto B { a, b, c, d, e, f, g, h, ..., z }, então temos que $A \subset B$. Também podemos dizer que o conjunto A é um subconjunto de B.

Outro exemplo de um conjunto que está contido em outro conjunto é o subconjunto dos números positivos ímpares, que chamaremos arbitrariamente de I, que está contido no conjunto B dos números inteiros de 0 a 10.

Logo: B { 0, 1, 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }

e I = { 1, 3, 5, 7, 9 }

Vemos que todos os elementos do conjunto I pertencem ao conjunto B; logo, temos que I está contido em B , ou I é um subconjunto de B.

Então, temos que $I \subset B$.

Dentre os diversos tipos de conjuntos, descreveremos, nesta disciplina, os conjuntos matemáticos mais usados, que são:

- N - Naturais
- Z - Inteiros
- Q - Racionais
- R - Reais
- C - Complexos

O foco desta unidade não são os conjuntos numéricos em si, detalharemos melhor cada um deles em outra unidade, mas aqui descreveremos brevemente cada um deles a fim de explorar as operações entre conjuntos, bem como as propriedades dessas operações, que são o foco da nossa unidade.

N – Conjunto dos Naturais: N = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ... }

Neste conjunto, está intrinsicamente formada a noção de ordem, isto é, 0 é menor que qualquer número natural, 1 é menos que 2, ou seja: $1 < 2$, assim como $2 < 3$, $4 < 5$, . . . , $45 < 67$ etc.

Z - O conjunto dos inteiros: Z = {. . . , –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}

Z se constitui quando acrescentamos os números negativos ao conjunto dos naturais. No conjunto dos inteiros, a relação de ordem é intuitivamente a mesma dos naturais, um número *x* é menor que outro *y* se o primeiro vem antes do segundo e representamos essa ordem por $x < y$.

Q: o conjunto dos números racionais

Para formar o conceito de fração ou parte de algo inteiro, temos o conceito de número racional, que vem de razão ou divisão. O conjunto dos racionais pode ser descrito da seguinte forma:

$$Q = \{\frac{a}{b} | a \in Z \, e \, b \in Z, b \neq 0\}$$

Ou seja: o conjunto Q dos racionais é composto por qualquer número que possa ser escrito como a divisão de dois números inteiros a e b, sendo que b deve, necessariamente, ser diferente de zero.

Logo, as razões: 1/2 , 1/3, 3/4 , 7/9 , 1/10 são números ditos como racionais. Temos ainda que 2 pode ser escrito como um número racional, já que 2 = 4/2 = 8/4 = 20/10.

Vale destacar que todo número racional escrito na forma fracionária a/b possui também sua representação decimal (que é resultante da divisão de a por b) como, por exemplo: 1/2 = 0,5 ou ainda 1/3 = 0,3333333333... que, mesmo sendo um número decimal infinito, por ser escrito na representação fracionária, é um número finito periódico, ou seja, possui um período que se repete.

Porém, existem números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e π dentre outros, que não são possíveis de serem escritos na forma fracionária a/b. Eles possuem infinitos dígitos e não formam períodos, são chamados de números irracionais. Importante destacar que os irracionais não pertencem ao conjunto dos racionais.

R: conjunto dos números reais

R é formado a partir do conjunto de todos os números racionais e do conjunto dos irracionais. Nesse caso, temos, por exemplo:

$$\sqrt{2} \in R \ , \pi \in R, \frac{1}{4} \in R, \ 2 \in R, \ 0 \in R \ , -4 \in R$$

Mas todos os números pertencem ao conjunto dos números reais? A resposta é não, pois nos números reais não temos as raízes pares de números negativos.

Por exemplo: $\sqrt{5} \in R$ porém $\sqrt{-5} \notin R$

C : conjunto dos números complexos

C é formado a partir a unidade imaginária i, a qual, por definição, temos que $\sqrt{-1} = i$, logo, a partir dessa definição, temos o complexo que pode ser escrito como a + bi.

$$C = \{ a + bi \mid a \in R , b \in R \text{ e } i = -1\}$$

Representação dos Conjuntos

Existem vários modos de indicar conjuntos, o primeiro é explicando quem são os seus elementos, ou seja, pela citação de cada um dos seus elementos, e o segundo é pela citação de uma propriedade comum a todos seus elementos. Podemos ter também o modo pela representação por Diagramas.

Exemplo: Consideremos que A e o conjunto dos números naturais pares entre 2 e 12, inclusive B e o conjunto dos números naturais maiores ou iguais a 1 e menores do que 6.

Representação pela citação:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}; B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \},$$

Representação por uma propriedade comum:

$$A = \{x \in N \mid 2 \leq x \leq 12 \text{ e x é par}\}; B = \{x \in N \mid 1 \leq x < 6\}$$

Representação por diagramas:

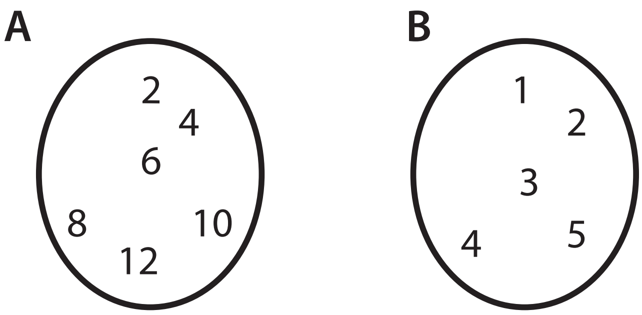

Figura 1

Subconjuntos

Como vimos, no exemplo das vogais para exemplificar, um conjunto pode, ou não, estar contido em outro conjunto. Na teoria dos conjuntos, temos que para cada conjunto existe uma coleção de conjuntos que contém entre seus elementos todos os subconjuntos do conjunto dado.

Temos, então, que dado um conjunto A dizemos que ele é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B.

$$A \subset B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Importante!

O símbolo $\forall$ representa qualquer, ou seja: qualquer que seja o elemento x em A, quando falamos qualquer estamos considerando qualquer elemento, ou seja: todos os elementos.

Os subconjuntos podem ser compreendidos como conjuntos que estão, na totalidade, em outros conjuntos, como podemos observar na ilustração abaixo:

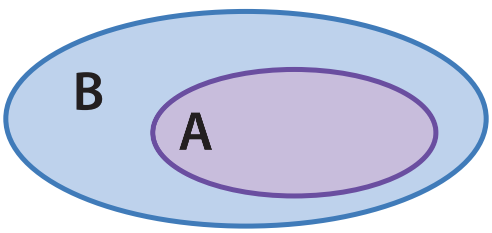

Figura 2

Com isso, temos uma nova relação, agora não mais entre elemento e conjunto, mas entre conjuntos, a chamada de Relação de Inclusão.

No início desta unidade, demos o exemplo de um conjunto que está contido em outro, lembra? Trata-se do conjunto os números positivos ímpares, que chamaremos arbitrariamente de I, que está contido no conjunto B dos números inteiros de 0 a 10.

Temos então: B { 0, 1, 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 } e I = { 1, 3, 5, 7, 9 }

Claramente, vemos que todos os elementos de I pertencem a B e então $I \subset B$. No diagrama, podemos ver essa relação:

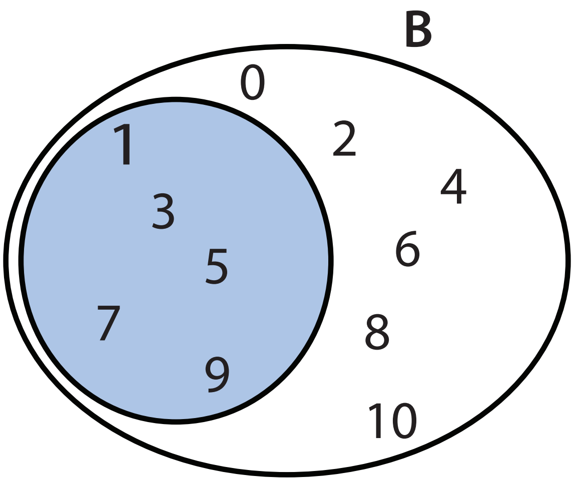

Figura 3

> A relação de inclusão é verificada entre conjuntos. Ou seja, dados dois conjuntos, temos que um conjunto está contido ($\subset$) em outro ou não está contido ($\not\subset$) em outro. Quanto se trata da relação de pertinência (de elementos para um conjunto), temos que um determinado elemento pertence ($\in$) a um conjunto ou não pertence ($\notin$).

Cardinalidade:

Considerando um conjunto qualquer A, temos que o número de elementos de A, que chamamos de cardinalidade, é representada por #A ou n(A) ou ainda $|A|$.

Exemplo: O conjunto D dos números primos entre 6 e 20 tem sua cardinalidade igual a 5, representada por #D ou n (D) ou $|D|$ = 4, já que o conjunto em questão é formado por D = {7, 11, 13, 17 e 19}

Exemplo: O conjunto B das raízes reais da equação $x^2 - 8x + 15 = 0$, nesse caso, como B= { 3, 5 }, tem dois elementos, logo: n (B) = 2 ou: #D = 2 ou $|D|$ = 2

Exemplo: O conjunto D das raízes reais de $\sqrt{-9}$. Nesse caso, como não temos raízes reais, somente complexas, visto que se trata de uma raiz par de um número negativo, então temos como resposta o conjunto vazio, representado por { } ou $\varnothing$.

Importante destacar que a cardinalidade do conjunto vazio { } é 1, ou seja, # { } = 1, pois consideramos que dentro de qualquer conjunto vazio existe um outro conjunto vazio, ou seja, o conjunto vazio { } é um subconjunto de qualquer outro conjunto.

Já a cardinalidade dos conjuntos numéricos N, Z, Q, R e C é infinita, logo: #N = #Z = #Q = #R = #C = ∞

Temos ainda que: se o conjunto tem um só elemento, ele é chamado de **unitário**, se tem dois elementos, é **binário** etc. Se um conjunto é a referência para a formação dos demais, ele é chamado de conjunto **Universo**.

Operações entre Conjuntos

Igualdade: Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Em símbolos:

$$A=B \leftrightarrow (x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Exemplos:

{ a, b, c, d } = { b, c, a, d }

{ 1, 3, 5, 7, 9 } = { x | x é inteiro, positivo, ímpar e menor do que 10}

{ x | 2x + 1 = 5 } = { 2 }

União: A União de dois conjuntos A e B é dada por: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$, podemos utilizar a letra v no lugar de ou assim temos $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Quando temos a expressão $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$, temos que A união com B é o conjunto formado por elementos que ou pertencem a A ou pertencem a B, ou seja, a união entre dois conjuntos quaisquer A e B resultará em um outro conjunto que será formado por elementos que compõem os conjuntos originais, como vemos na figura abaixo:

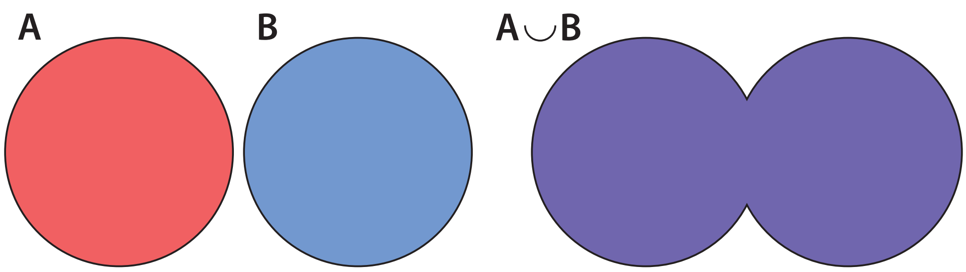

Figura 4

Veremos, agora, alguns exemplos. Considere os conjuntos:

$A = \{10, 11, 13, 17, 19, 20\}$; $B = \{11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23\}$ $C = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B = \{10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23\}$

$A \cup C = \{ 1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 17, 19, 20\}$

$B \cup C = \{ 1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23\}$

Importante destacar que: $A \cup A = A$ e $A \cup \varnothing = A$

Ou seja: a união de qualquer conjunto com ele mesmo é o próprio conjunto e a união de qualquer conjunto com o conjunto vazio também é o próprio conjunto.

Intersecção de Conjuntos

A intersecção entre os conjuntos A e B será um novo conjunto dado pelos elementos que existem concomitantemente nestes dois conjuntos, isto é, que estão nos dois conjuntos ao mesmo tempo.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ ou (trocando e por $\wedge$) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Na figura abaixo, temos uma ilustração em diagramas do conceito de intersecção, que é fazer parte dos dois conjuntos ao mesmo tempo.

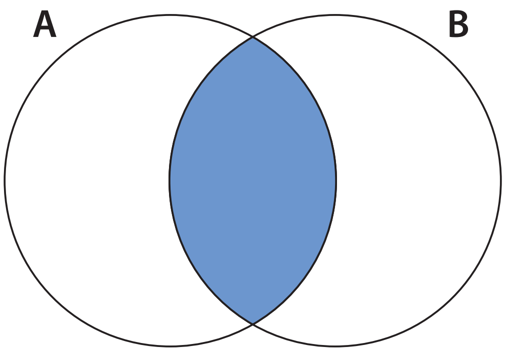

Figura 5

Veremos exemplos considerando os conjuntos A, B e C:

$A = \{10, 11, 13, 17, 19, 20\}$; $B = \{11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23\}$; $C = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{11, 13, 17, 19, 20\}$ veja que esses são os elementos que estão em ambos os conjuntos.

$A \cap C = \{\ \}$ ou $\varnothing$

$B \cap C = \{\ \}$ ou $\varnothing$

Tanto em A ∩ C como em B ∩ C não temos nenhum elemento que seja concomitante, ou seja, que estão em ambos os conjuntos ao mesmo tempo.

Diferença entre Conjuntos

A diferença entre os conjuntos A e B será um novo conjunto formado pelos elementos que existem no conjunto A, mas não estão no conjunto B, como ilustramos na figura abaixo:

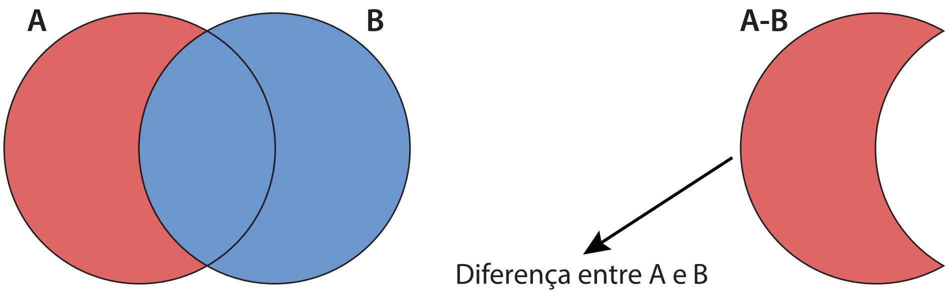

Figura 6

Também podemos pensar que A – B será o que sobra em A retirado o que tem em comum com B.

Veremos exemplos considerando os conjuntos A, B e C:

A = {10, 11, 13, 17, 19, 20}, B = {11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23}; C = {1, 2, 3, 4}

A – B = [10] veja que dos elementos de A, foram retirados os elementos que também pertenciam a B , resultando apenas em A – B = [10]

Importante notar que A – B ≠ B – A, ou seja, a diferença entre conjuntos não é comutativa.

B – A = [12, 15, 18, 21, 23]

No caso de A – C, como não temos nenhum elemento de A que também está em B, então A – C será o próprio A , ou seja: A – C = A.

Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos A e B, o Produto Cartesiano é formado por todos os pares ordenados (x,y) formados com um primeiro elemento de A e com o segundo elemento de B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo: considere os seguintes conjuntos: $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b\}$. O produto cartesiano entre eles é dado por:

$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ e $Y \times X = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

$X \times \varnothing = \varnothing$

$Y \times \varnothing = \varnothing$

Explore o link e leia um pouco mais sobre que discutimos até então: https://bit.ly/3lUcp91

Para facilitar as operações, destacaremos algumas propriedades:

Propriedades das Operações entre Conjuntos

União

1. $A \cup \varnothing = A$, ou seja, a união de qualquer conjunto com o conjunto vazio será o próprio conjunto.
2. Comutatividade de $A \cup B = B \cup A$, a união é comutativa, ou seja, $A \cup B$ é igual a $B \cup A$.
3. Independência de $A \cup A = A$, a união de um conjunto com ele próprio resulta no próprio conjunto.
4. Associatividade de $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, ao realizar a união entre mais de dois conjuntos, podemos associá-los de diferentes formas que o resultado será o mesmo.
5. $A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$, neste caso, A somente pode estar contido em B se a união entre eles é o próprio B.

Intersecção

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$, a intersecção entre um conjunto qualquer com o conjunto vazio será o conjunto vazio.

O vazio é um subconjunto de qualquer outro conjunto.

2. Comutatividade $A \cap B = B \cap A$, a intersecção é comutativa, ou seja, a ordem dos conjuntos para a realização da intersecção não altera o resultado da mesma.

3. Independência $A \cap A = A$, a intersecção de um conjunto com ele mesmo resulta no próprio conjunto.
4. Associatividade $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, ao realizar a intersecção entre mais de dois conjuntos, podemos associá-los de diferentes formas que o resultado será o mesmo.
5. $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$, neste caso, se o conjunto A está contido no conjunto B , então a intersecção de A com B será o conjunto A.

A propriedade comutativa vale tanto para a União como para a Intersecção, mas não vale para a Diferença entre dois conjuntos e para o produto cartesiano, assim como a propriedade de Associatividade não se aplica para a Diferença e o Produto Cartesiano.

Propriedades Distributivas

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer.

1. Distributiva da União perante a Intersecção

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

2. Distributiva da Intersecção perante a União

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Explore mais sobre o assunto nesse link: https://goo.gl/A8X1qk você encontrará outros exemplos e exercícios resolvidos.

Vamos para um exemplo que envolve a operação entre conjuntos, trata-se da resolução de uma situação problema:

Uma pesquisa sobre a atividade extra que seria realizada no decorrer do semestre foi realizada com 50 alunos. Cada aluno poderia citar até duas opções de atividades. As opções mais citadas foram música e teatro. Do total de alunos, tivemos 30 citações para música, 10 citações para música e teatro, 22 citações para teatro. Com base nesses dados, determine:

1. Quantos alunos citaram música e teatro ao mesmo tempo?
2. Quantos alunos citaram apenas música?
3. Quantos alunos citaram apenas teatro?
4. Quantos alunos deixaram de citar música e teatro e preferiram outras opções?

Resolução:

Primeiro, temos que realizar uma leitura cuidadosa do enunciado, e dele extrair informações que são fornecidas. Vamos lá?

Seguem as informações que temos, a partir do enunciado:

Total de alunos: 50
30 escolhas para música
10 escolhas para música e teatro
22 escolhas para teatro

Se você observar, ao somarmos todas as escolhas, temos (30+10+22) 62 escolhas, mas só temos 50 alunos, o que indica que alguns alunos citaram mais de uma opção ao mesmo tempo e os próprios números dizem isso: 10 escolhas para música e teatro, o que, na teoria dos conjuntos, indica uma intersecção de respostas...

A partir dessa análise, vamos pensar nas respostas?

1) Quantos alunos citaram música e teatro ao mesmo tempo?

Sejam **M** o conjunto dos alunos que escolheram **música** e **T** o dos que escolheram **teatro**. Podemos identificar, no enunciado do problema, que 10 alunos optaram por música e teatro.

Logo, 10 alunos estão na intersecção $M \cap T$, ou seja: $\#(M \cap T) = 10$

Por diagramas, temos:

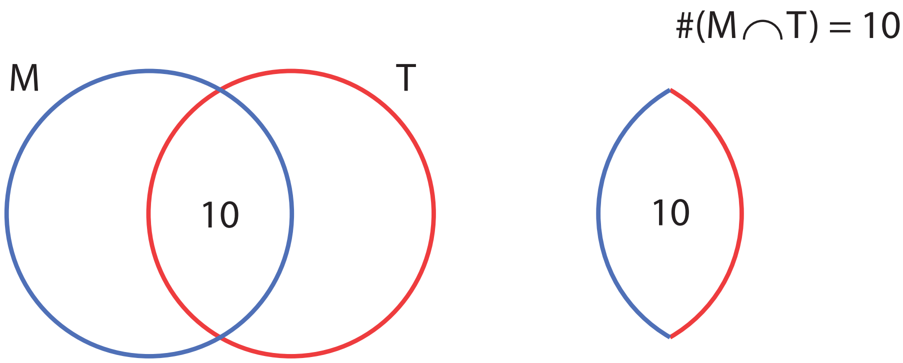

Figura 7

2) Quantos alunos citaram apenas música?

Como música recebeu 30 opções, mas tivemos também algumas citações de música e teatro juntas, temos que o número dos alunos que citaram **apenas** música será igual ao número de alunos que citaram música menos o número de alunos que citaram música e teatro. Pela simbologia matemática, temos:

$\#M - \#(M \cap T)$ ou ainda $n(M) - n(M \cap T)$

$\#(M - (M \cap T)) = 30 - 10 = 20$

Logo, 20 alunos citaram apenas música.

Por diagramas, temos:

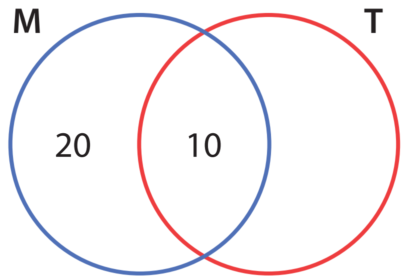

Figura 8

Importante notar que M possui 30 elementos, mas 10 destes também pertencem a T, pois são elementos de M e T, o que vemos claramente no diagrama acima.

3) Quantos alunos citaram apenas teatro?

Como 22 citaram teatro, incluindo a música, e sabemos que 10 citaram música e teatro:

$\#(T - (M \cap T)) = 22 - 10 = 12$

Por diagramas, temos:

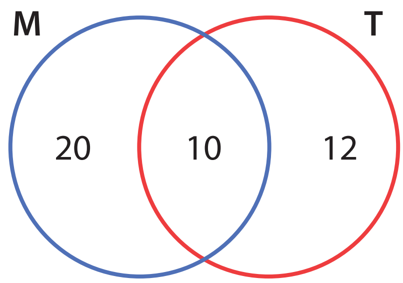

Figura 8

Importante!

Importante notar que T possui 22 elementos, mas 10 destes também pertencem a M, pois são elementos de M e T o que fica claro no diagrama acima e os 10 como intersecção entre os dois conjuntos.

4) Quantos alunos deixaram de citar música e teatro e preferiram outras opções?

Importante lembrar que, no total, temos 50 alunos que são todos os alunos que contemplam a pesquisa e que, matematicamente, chamamos de conjunto universo.

$\#(M \cup T) = n(M - (M \cap T)) + n(M \cap T) + n(T - (M \cap T)) =$

$20 + 10 + 12 = 42$

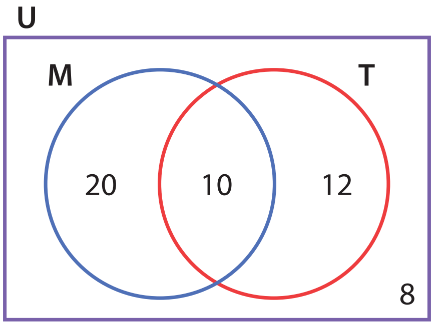

Figura 10

Como em U temos 50, logo:

50 – 42 = 8 que não estão na $M \cup T$.

Que tal praticar um pouco a respeito do que aprendemos? No link https://goo.gl/Yu567m você encontrará exercícios resolvidos.

Intervalos Reais

O conjunto dos números reais é um conjunto contínuo que pode ser abstraído como uma reta na qual estão os conjuntos: naturais, inteiros, racionais também os números irracionais.

Veremos os subconjuntos dos números reais que são chamados de Intervalos Reais. Os intervalos reais podem ser fechados, abertos ou mistos. Nesta unidade, veremos a composição de cada um dos tipos desses intervalores e as principais operações entre intervalos.

Intervalo Fechado

O intervalo fechado [a, b] com extremidades a e b é aquele que possui todos os elementos entre as extremidades e inclusive elas. É indicado pelos colchetes: [para iniciar e] para fechar.

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$

Exemplo: A = [2, 5]

Estão nesse intervalo todos os números reais compreendidos, e inclusive, entre 2 e 5.

Pode ser representado como conjunto A = { $x \in R \mid 2 \leq x \leq 5$ }.

Na figura abaixo, temos a representação gráfica desse intervalo.

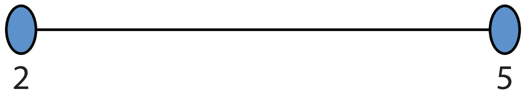

Figura 11

Intervalo Aberto

O intervalo aberto (a, b) com extremidades a e b e aquele que possui todos os elementos entre as extremidades, **exceto** elas próprias. E indicado pelos parênteses: (para iniciar e) para fechar. Ou ainda os colchetes em ordem inversa.

$$(a, b) = \{x \in |R| \ a < x < b\}$$

> Importante notar que um intervalo aberto em ambas as extremidades é composto por todos os números reais que estão dentre as extremidades, mas sem considerá-las, ou seja, será composto por todos os números x que são maiores do que a extremidade a e menores do que a extremidade b.

Exemplo: B = (2, 5) também pode ser descrito como B =] 2, 5 [

Estão nesse intervalo todos os números reais compreendidos que são maiores do que 2 e menores do que 5, ou seja, todos os que estão compreendidos entre 2 e 5, exceto os próprios 2 e 5. Isso significa que , por exemplo, 4,99999999.... pertence ao intervalo, mas o 5 não.

Pode ser representado como conjunto B = { $x \in R \mid 2 < x < 5$ }.

Na figura abaixo, temos a representação gráfica desse intervalo.

Figura 12

Intervalo Misto

São intervalos que possuem uma das extremidades aberta e a outra fechada. Lembrando que quando está aberta a extremidade não pertence ao intervalo, somente delimita o intervalo, e quando está fechada pertence.

Exemplos:

C = (2, 5] ou ainda C =] 2, 5]

Neste caso dizemos que o intervalo está aberto (parênteses ou colchete ao contrário) em 2 e fechado em 5, ou seja: o 2 não pertence ao intervalo, mas o 5 sim.

Pode ser representado como conjunto $C = \{ x \in R \mid 2 < x \leq 5\}$.

D = [2, 5) ou ainda D = [2, 5 [

Neste caso dizemos que o intervalo está fechado em 2 e aberto (parênteses ou colchete ao contrário, em 5, ou seja: o 2 pertence ao intervalo, mas o 5 não.

Pode ser representado como conjunto $D = \{ x \in R \mid 2 \leq x < 5\}$.

As desigualdades $<$ e $\leq$ estão diretamente ligadas ao fato de o intervalo ser aberto ou fechado, pois $\leq$ inclui a extremidade, já $<$ não inclui a extremidade.

Temos também intervalos nos quais definimos apenas uma das extremidades:

$(a,+ \infty) = \{x \in R \mid x > a\}$

Neste caso, o intervalo é aberto em a, ou seja, não inclui o número a.

Por exemplo: $(2, + \infty)$, neste caso são todos os números reais maiores do que 2.

$(-\infty,a) = \{x \in R \mid x < a\}$

Neste caso, o intervalo é aberto em a, ou seja, não inclui o número a.

Por exemplo: $(-\infty, 2)$, neste caso, são todos os números reais menores do que 2.

$[a,+ \infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$

Neste caso, o intervalo é fechado em a, ou seja, inclui o número a.

Por exemplo: $[2,+ \infty)$, neste caso, são todos os números reais maiores ou iguais a 2.

$(-\infty, a]= \{x \in R \mid x \leq a\}$

Neste caso, o intervalo é fechado em a, ou seja, inclui o número a.

Por exemplo: $(-\infty, a\,]$, neste caso, são todos os números reais menores ou iguais a 2.

Operações entre Invervalos Reais

As operações entre os intervalos reais seguem da mesma forma que realizamos com os conjuntos.

Dessa forma, apresentaremos a seguir exemplos das principais operações: união, intersecção e diferença entre intervalos.

União de Intervalos

Exemplo: $[4, 9] \cup [6, 12] = [4, 12]$

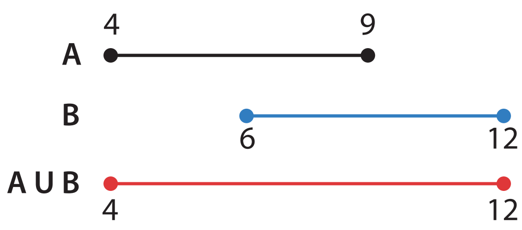

Figura 13

O intervalo A = [4,9] em união com o intervalo B = [6, 12] resulta em um outro intervalo que agrupa elementos de ambos, portanto:
A U B= [4, 12] ou ainda: $A \cup B = \{x \in R \mid 4 \leq x \leq 12\}$

Intersecção entre Intervalos

Exemplo: $[4, 9] \cap [6, 12] = [6, 9]$

Na intersecção, devemos lembrar que o resultado deve ser o que é comum (mesmos elementos) aos dois intervalos. Na figura abaixo, ao representar graficamente os intervalos A e B, e posteriormente traçar um segmento vertical pontilhado nas partes que são comuns à ambos, temos a visualização, em vermelho, ao final do intervalo resultante da intersecção entre ambos.

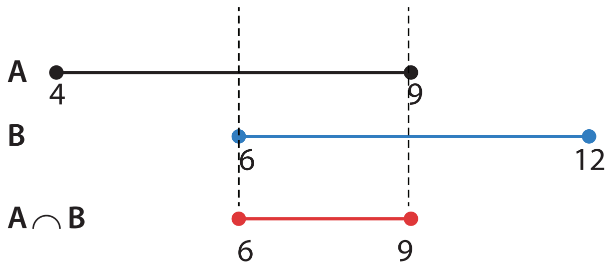

Figura 14

$A - B = [6 , 9]$ ou ainda $\{ x \in R \mid 6 \leq x \leq 9$

Diferença entre Intervalos

Exemplo: $[4, 9] - [6, 12] = [4, 6)$

Do intervalo A [4, 9] deveremos retirar o que também é comum ao intervalo B. Ou seja: de A retiramos o intervalo B.

Na figura abaixo, temos ambos os intervalos com suas representações gráficas e novamente traçamos um segmento vertical evidenciando as extremidades do intervalo B.

Vemos que A é comum a B a partir do número 6, inclusive o próprio 6. Dessa forma, deveremos então remover do intervalo A os números reais a partir de 6, incluindo o próprio 6, como verificamos na representação gráfica em vermelho abaixo:

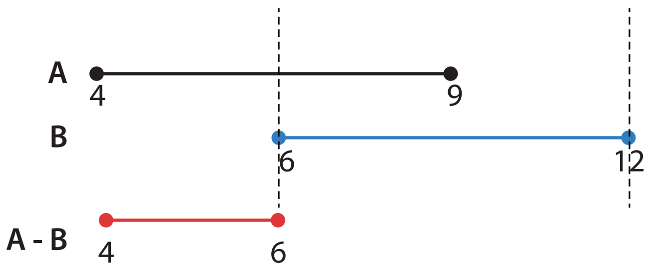

Figura 15

Como resultado, temos $[4, 6)$ ou ainda $\{x \in R \mid 4 \leq x < 6\}$, ou seja, do intervalo A $[4, 9]$ foi removida a parte que era comum de A com o intervalo B $[6, 12]$.

Vimos, nesta unidade, a definição de conjuntos, suas principais operações e propriedades e destacamos, dentre os conjuntos, os conjuntos numéricos. A seguir, propomos uma lista de exercícios comentada para reforçar a sua reflexão e aprendizagem sobre o tema estudado.

Explore mais sobre o tema no link https://goo.gl/XJkkmL. Você encontrará outros exemplos sobre intervalos reais e operações entre intervalos.

Agora é com você, a partir do que vimos em nossa unidade de aprendizagem, vamos exercitar? Abaixo, segue uma lista de exercícios e, logo após, há as respostas para você conferir.

1. Considere os conjuntos:

A = {5, 10, 20, 25, 30, 35, 40}, B = {8, 10, 12, 18, 20, 22, 30, 35}, C = {10, 18, 20, 40, 45, 50, 60}

Faça as seguintes operações:

a) $A \cup B$
b) $B \cup C$
c) $B \cup A$
d) $C \cup A$
e) $A \cup A$
f) $B \cup \varnothing$
g) $A \cap B$
h) $A \cap C$
i) $B \cap C$
j) $C \cap \varnothing$
k) $(A \cup B) \cup C$

l) $(A \cap B) \cap C$
m) $A \cap (B \cap C)$
n) $(A \cup B) \cap C$
o) $A \cup (B \cap C)$
p) $A - B$
q) $A - C$
r) $B - C$
s) $B - A$
t) $B - B$
u) $C - \varnothing$

2. Sejam $D = \{1, 2, 4\}$ e $E = \{5, 25\}$
a) D x E
b) E x D
c) E x E
d) E x $\varnothing$

3. Considere os intervalos reais A [-2, 6 [B = [0, 7] e C [3 , 10 [Efetue as seguintes operações:
a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $A - C$
d) $B - A$
e) $C - B$
f) $A \cap B$
g) $B \cap C$

Respostas

1. Considere os conjuntos:

$A = \{5, 10, 20, 25, 30, 35, 40\}$, $B = \{8, 10, 12, 18, 20, 22, 30, 35\}$, $C = \{10, 18, 20, 40, 45, 50, 60\}$

a) $A \cup B = \{5, 8, 10, 12, 18, 20, 22, 25, 30, 35, 40\}$
b) $B \cup C = \{8, 10, 12, 18, 20, 22, 30, 35, 40, 45, 50, 60\}$
c) $B \cup A = \{5, 8, 10, 12, 18, 20, 22, 25, 30, 35, 40\}$
d) $C \cup A = \{5, 10, 18, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 60\}$,
e) $A \cup A = \{5, 10, 20, 25, 30, 35, 40\}$
f) $B \cup \emptyset = \{8, 10, 12, 18, 20, 22, 30, 35\}$,
g) $A \cap B = \{10, 20, 30, 35\}$
h) $A \cap C = \{10, 20, 40\}$
i) $B \cap C = \{10, 18, 20\}$
j) $C \cap \varnothing = \varnothing$
k) $(A \cup B) \cup C = (\{5, 8, 10, 12, 18, 20, 22, 25, 30, 35, 40\}) \cup \{10, 18, 20, 40, 45, 50, 60\} = \{5, 8, 10, 12, 18, 20, 22, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 60\}$

l) $A \cap (B \cap C) = \{5, 10, 20, 25, 30, 35, 40\} \cap \{10, 18, 20\} = \{10, 20\}$
m) $(A \cap B) \cap C = \{10, 20, 30, 35\}) \cap \{10, 18, 20, 40, 45, 50, 60\} = \{10, 20\}$
n) $(A \cup B) \cap C = \{5, 8, 10, 12, 18, 20, 22, 25, 30, 35, 40\} \cap C = \{10, 18, 20, 40\}$
o) $A \cup (B \cap C) = A \cup \{10, 18, 20\} = \{5, 10, 18, 20, 25, 30, 35, 40\}$
p) $A - B = \{5, 25, 40\}$
q) $A - C = \{5, 25, 30, 35\}$
r) $B - C = \{8, 12, 22, 30, 35\}$
s) $B - A = \{8, 12, 18, 22\}$
t) $B - B = \varnothing$
u) $C - \varnothing = C$

2. Sejam $D = \{1, 2, 4\}$ e $E = \{5, 25\}$
a) $D \times E = \{(1, 5), (1, 25), (2, 5), (2, 25), (4, 5), (4, 25)\}$
b) $E \times D = \{(5, 1), (5, 2), (5, 4), (25, 1), (25, 2), (25, 4)\}$
c) $E \times E = \{(5, 5), (5, 25), (25, 5), (25, 25),\}$
d) $E \times \emptyset = \emptyset$

3. Considere os intervalos reais A [-2, 6 [B = [0, 7] e C [3 , 10 [Efetue as seguintes operações:
a) $A \cup B = [-2, 7]$
b) $A \cup C = [-2, 10[$
c) $A - C = [-2, 3[$
d) $B - A = [6, 7]$
e) $C - B =]7, 10[$
f) $A \cap B = [0, 6[$
g) $B \cap C = [3, 7]$

Material Complementar

Indicações para saber mais sobre os assuntos abordados nesta Unidade:

Sites

Intervalos Reais

Para saber mais sobre intervalos reais:

https://goo.gl/eb9nK9

Livros

Trama Matemática: Princípios e Novas Práticas no Ensino Médio

No primeiro capítulo do livro Trama matemática: Princípios e novas práticas no ensino médio, do autor Márcio Barreto, você poderá aprofundar o que estudamos sobre conjuntos. O livro está disponível na Biblioteca Virtual Universitária.

Vídeos

Intervalos Reais

Vídeo do Khan Academy sobre intervalos reais:

https://goo.gl/jBy7ms

Leitura

Teoria dos Conjuntos

Link sobre a teoria dos conjuntos, neste material da Universidade Federal de Minas Gerais, você poderá aprofundar o que estudamos em nossa unidade:

https://goo.gl/W25TzI

Conjuntos Numéricos

https://bit.ly/3N0EwQ1

Referências

BARRETO, M. **Trama matemática:** Princípios e novas práticas no ensino médio. Campinas, SP: Papirus, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 1. Conjuntos – Funções. São Paulo: Atual, 2013.

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo - SP - Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Cruzeiro do Sul
Educacional