



JK 也能听懂猫论

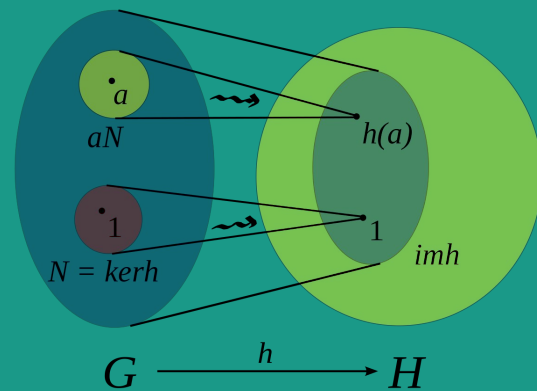
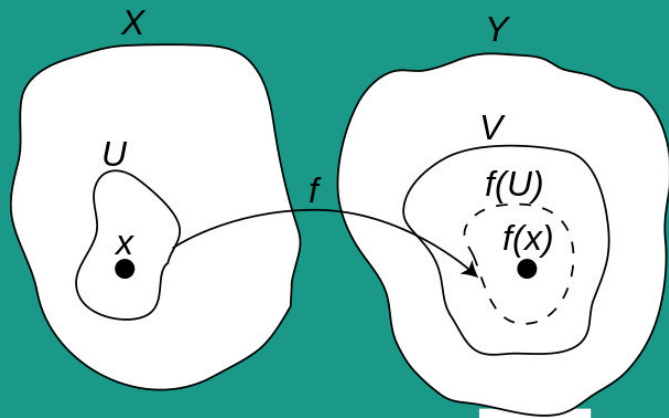
从具体到抽象

To arrive at abstraction, it is always necessary to begin with a concrete reality... You must always start with something. Afterward you can remove all traces of reality.

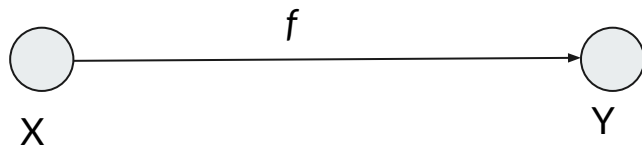
- Pablo Picasso

举个例子

集合的映射, 群的同构, 拓扑空间的连续映射, 他们有什么共同点?



由“此”至“彼”



如果 X 和 Y 都被看做对象, 那么 f 是.....

为什么我们需要猫猫？



Mathematics is the art of giving the same name
to different things.

— Henri Poincaré

一件思考代数拓扑的记号 → 一项发展代数几何的工具 → 一种抽象数学理论的数学



什么是猫？

对象集 $\text{Ob} : X, Y, Z \dots$

态射集 $\text{Mor} : f, g, h \dots$

映射 $s \ \& \ t : \text{Mor} \rightarrow \text{Ob}$

Def:

Hom(o) 集:

$\text{Hom}(X, Y) := s^{-1}(X) \cap t^{-1}(Y)$

Id 态射:

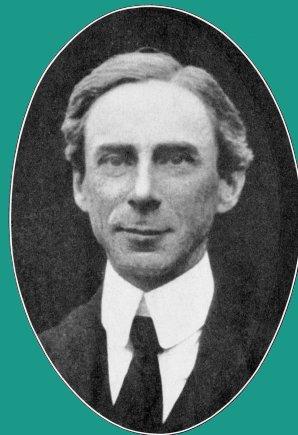
$\text{Id}_x : \text{Hom}(X, X)$

态射的组合:

$\circ : \text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$

Wait, That's illegal!

范畴 Set 的对象集是个集合吗？



回忆一下 ZFC 的公设.....

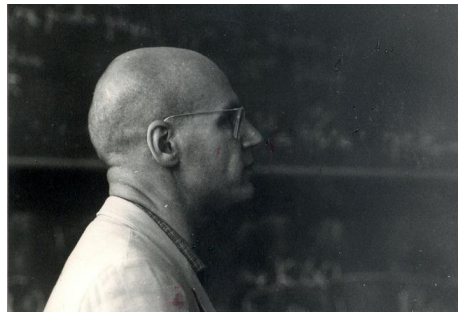
宇宙

宇宙也是一个集合。

Hypothesis(A. Grothendieck)

“对于任何集合，总能找到一个充分大的宇宙来容纳它。”

宇宙是集合论的一个模型。





还有其它方法吗？

Types, but Sets.

Type Universe à la Russell

$$\frac{A:U}{A \text{ type}}$$

Homotopy and $(\infty,1)$ -category



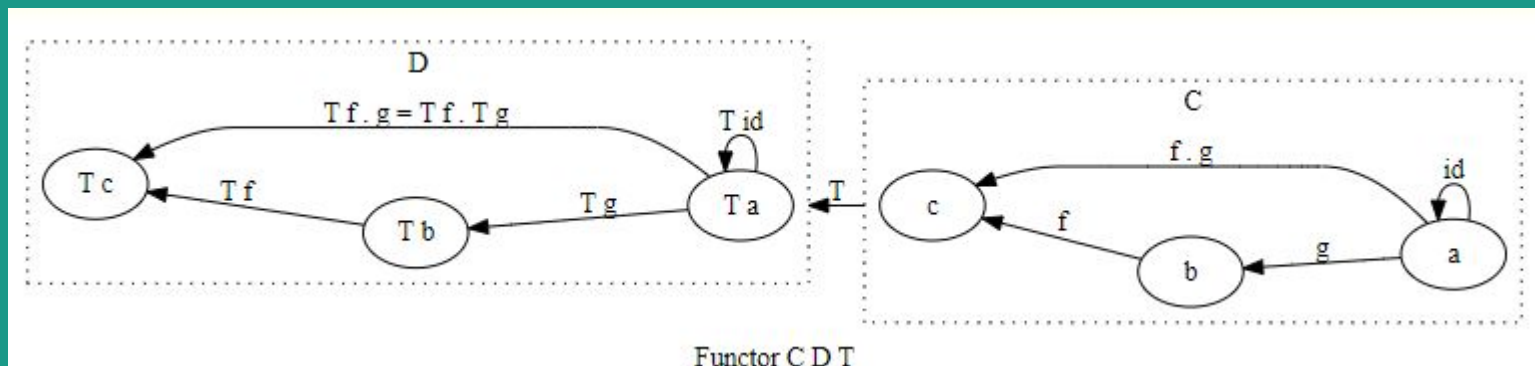
**态射同构，自同态，自同构，单态射，满态射，广群，
子范畴，反范畴.....**

哇！好厉害，但是它们都是什么？

都是些抽象废话而已。

Functor

函子就是范畴和范畴之间的映射。





Hask 范畴和 Functor

$\text{Ob}(\text{Hask}) = \text{Types},$

$\text{Mor}(\text{Hask}) = \text{Functions}$

Functor is a function on function...

```
class Functor t where
```

```
    fmap :: (a -> b) -> (t a -> t b)
```

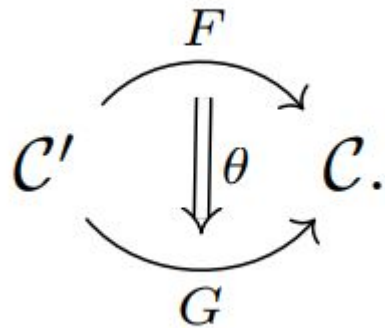
真正的猫？

Cat 范畴

“函子也是态射，范畴也是对象。”

自然变换

函子的函子.....(同伦)



函子范畴(Bicategory)

范畴 Func

“函子是对象，自然变换是态射。”

伴随函子

带有同构的一对函子。

$$C_1 \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} C_2$$

什么是 Monad 啊？

自函子范畴上的幺半群

一个自函子 $T: C \rightarrow C$.

一个自然变换 $\eta: \text{id}_C \rightarrow T$

一个自然变化 $\mu: T \times T \rightarrow T$

$$\begin{array}{ccccc} t & \xrightarrow{\eta t} & tt & \xleftarrow{t\eta} & t \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\ & & t & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} ttt & \xrightarrow{\mu t} & tt \\ t\mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ tt & \xrightarrow{\mu} & t \end{array}$$

$>> = \mu . \text{fmap}$



还有什么？

Co-functor, co-monad.....

Group-oid, mon-oid, monoid-oid...

米田(共)引理and 可表函子

泛性质, 极限

Monad Instances

正确的撸猫姿势

nLab : <https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage>

Mac lane, Baez...

Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone



I hope most mathematicians continue to fear and despise category theory, so I can continue to maintain a certain advantage over them.

—John Baez(@johncarlosbaez)