Cheat Sheet: Comp Sc BSc, Analysis II - Brian Funk, 21.04.2001 - **22-918-18-957**

Differentialgleichungen

- $y'(x) = \frac{1}{a(y)} \cdot b(x) \longrightarrow$ LGSM 1
- $G(y, y', \ldots, y^{(k)}, x)$ mit $k > 1 \longrightarrow$ LGSM 2
- $y' + ay = b \longrightarrow$ LGSM 3
- $y'' + a_1 y' + a_2 y = b \longrightarrow$ LGSM 4
- $y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + a_0 y = b(x)$ mit Konstanten $a_i \longrightarrow$ LGSM 5

LGSM 1: Separation der Variabeln

RC Separation der Variabeln:
Sei eine ODE in der Form

$$y'(x) = \frac{1}{a(y)} \cdot b(x)$$

mit a, b stetig und $a(y) \neq 0$. Dann ist die Lösung der ODE gegeben durch

$$y = A^{-1}(B(x) + c)$$

wobei A, B Stammfunktionen von a, b sind.

Note Beweis:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow y' &= \frac{1}{a(y)} \cdot b(x) \\
\Leftrightarrow a(y) \cdot y' &= b(x) \\
\Leftrightarrow \int a(y) \cdot y'(x) dx &= \int b(x) dx + c \\
\Leftrightarrow A(y) &= B(x) + c \\
\Leftrightarrow y &= A^{-1}(B(x) + c)
\end{aligned}$$

Ex Separation der Variabeln:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -2 \cdot \cos(x) \cdot y(x) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2 \cdot \cos(x) \cdot y \\
\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y &= \int -2 \cdot \cos(x) \mathrm{d}x \\
\ln(|y|) &= -2 \cdot \sin(x) + c_1 \\
|y| &= e^{-2 \cdot \sin(x) + c_1} = c_2 \cdot e^{-2 \cdot \sin(x)} \\
y(x) &= c \cdot e^{-2 \cdot \sin(x)}
\end{aligned}$$

LGSM 2: Systemisierung

RC ODE mit $k \geq 2$:
Eine ODE von Ordnung $k \geq 2$ lässt sich als System von k ODEs von Ordnung 1 in unbekannten Funktionen $z_0, \ldots, z_{k-1}$ umschreiben. Dafür setzt man $z_i = y^{(i)} \forall i [0, k]$ und erhält die Bedingungen $z_i' = z_{i+1}$

Ex ODE mit $k \geq 2$: **Die ODE**

$$\exp(y'' \cdot y' + \sin(y^{x+1})) = 3$$

kann umgeformt werden zu

$$\left\{ \begin{aligned} & \exp\left(z_1' z_1 + \sin\left(z_0^{x+1}\right)\right) = 3 \\ & z_0' = z_1 \end{aligned} \right\}$$

LGSM 3: Variation der Konstanten

RC Variation der Konstanten:
Sei $y' + ay = b$.

- **Falls $b = 0$: Die Lösungen von der homogenen Gleichungen**

$$y' + ay = 0$$

sind genau

$$f(x) = z \cdot e^{-A(x)}$$

, für A eine Stammfunktion von a. $z \in \mathbb{C}$.

- **Falls $b \neq 0$:**
  1. **finde f_h durch Fall $b = 0$**
  2. **Finde $f_p = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x)$**
  3. **Die Lösung ist gegeben durch $F = \lambda f_h + f_p$**

Ex Variation der Konstanten: **Sei $y' = y + x^2$ gegeben.**

1. **Homogene ODE $y' = y$ hat e^x als Lösungsbasis.**
2. **Mit $a(x) = -1, b(x) = x^2$ ergibt $f_p = e^x \int e^{-x} x^2 = e^x e^{-x} \left(-x^2 - 2x - 2\right) = -x^2 - 2x - 2$**
3. $f(x) = -x^2 - 2x - 2 + \lambda \cdot e^x$

LGSM 4: Variation der Konstanten II

Gegeben sei $y'' + a_1 y' + a_{0y} = b$ Nehme an, dass die homogene Lösung ist $f = z_1 f_1 + z_2 f_2$. Löse dafür $f_p = z_1(x) f_1 + z_2(x) f_2$, was ergibt

$$\begin{aligned}
z_1'(x) f_1 + z_2'(x) f_2 &= 0 \\
z_1'(x) f_1' + z_2'(x) f_2' &= b
\end{aligned}$$

LGSM 5: Charakterisches Polynom

RC Charakterisches Polynom:
$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + a_0 y = b(x)$ **mit Konstanten a_i.**
Falls $b = 0$:

1. **Setze $e^{\lambda x}$ in die Gleichung ein ergibt $P(t)$**
2. **Suche die Nullstellen λ_i von $P(t)$ Nutze Formel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$**
3. **Sei k_i die Vielfachheit von λ_i und $l = \deg(P(t))$. Die Basis ist gegeben durch:$\left\{ x^j e^{\lambda_i x} \mid i \in [0, l], j \in [0, k_i - 1] \right\}$**
4. **Falls Reelle Lösungen gesucht und $a_i \in \mathbb{R}$ und sei $(l \pm mi)$ eine Nullstelle des char. Polynom. Dann gilt $e^{lt}\left[c_1 \cos(mt) + c_2 \sin(mt)\right]$**

Falls $b = \sum c_i(x) \neq 0$:

1. **Berechne f_h**
2. **Nutze Superpositionsprinzip und löse $y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + a_0 y = c_i(x)$. Benutze dafür Educated Guess**
3. **Setze Guess in Gleichung ein machen den Koeffizientenvergleich und löse das SLE. Die Lösung für den Guess ist f_i**
4. **Die Gesamtlösung ist $f = f_h + \sum f_i$ für alle Summanden von $b(x)$**

Für eine Basis $\mathcal{S}$ ist die Lösung gegeben durch $\sum_{\mathcal{S}} c_i s_i$ wobei s_i Elemente aus $\mathcal{S}$ sind.

Educated Guess

Falls der educated guess die gleiche Lösung ergibt wie die homogene, dann multipliziere mit x^m wobei m die Vielfacheit der Nullstelle ist.

- $a \cdot e^{\alpha x} \longrightarrow b \cdot e^{\alpha x}$
- $a^\star \sin(\beta x) + b^\star \cos(\beta x) \longrightarrow c \sin(\beta x) + d \cos(\beta x)$
- $P_n(x) \longrightarrow R_{n+k}(x)$ **(insbesondere auch $P(x) = c$)**
- $a e^{\alpha x} \sin(\beta x) \longrightarrow e^{\alpha x}(c \sin(\beta x) + d \cos(\beta x))$
- $P_n(x) e^{\alpha x} \longrightarrow R_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
- $P_n(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x) \longrightarrow e^{\alpha x}\left(R_n(x) \sin(\beta x) + S_n(x) \cos(\beta x)\right)$

P_n **sind** R_n **sind Polynome abh. von x und k ist die Ordnung der kleinsten Ableitung im homogenen Teil (LHS). Gilt auch für $a^\star = 0$ oder $b^\star = 0$.**

Theoreme und Definitionen

Def Gewöhnliche Differentialgleichung: **Eine Gleichung der Form**

$$G(y, y', \ldots, y^{(k)}, x) = 0$$

heisst gewöhnliche Differentialgleichung und $k \geq 1$ heisst Ordnung der ODE. Ist zusätzlich $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \ldots, y^{(k)}(x_0) = y_{k-1}$ mit $x_0, y_0, \ldots y_{k-1} \in \mathbb{R}$ gegeben spricht man von einem Anfangswertproblem .

Note : **Lineare DFG erkennen:**

- **keine Koeffizienten vor der höchsten Ableitung**
- **alle Koeffizienten sind stetige Funktionen**
- **keine Produkte von y oder deren Ableitungen**
- **keine Potenzen von y oder deren Ableitungen**
- **keine Funktionen von y oder deren Ableitungen**

S 2.16: Existenz- Eindeutigkeitssatz (kurz):
Ein Anfangswertproblem $y' = F(y, x)$, $y(x_0) = y_0$ mit F stetig differenzierbar hat genau eine maximale Lösung

S 2.16: Existenz- Eindeutigkeitssatz:
Angenommen, $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ist eine stetig differenzierbare Funktion von zwei Variablen (siehe Kapitel 3). Sei $x_0 \in \mathbf{R}$ und $y_0 \in \mathbf{R}$. Dann hat die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = F(x, y)$$

eine eindeutige Lösung f, die auf einem "größten" offenen Intervall I definiert ist, das x_0 enthält und $f(x_0) = y_0$ erfüllt. Mit anderen Worten, es existiert ein Intervall I und eine Funktion $f : I \to \mathbf{R}$, so dass für alle $x \in I$ gilt: $f'(x) = F(x, f(x))$, und man kann kein größeres Intervall finden, das I mit einer solchen Lösung enthält.

Def 2.2.1: Lineare ODE: **Eine Lineare ODE von Ordnung $k \geq 1$ ist eine Gleichung**

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + a_0 y = b$$

wobei die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{k-1}$ und die Homogenität b Funktionen $I \to \mathbb{C}$ sind. Wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Eine Lösung ist eine k-mal differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ mit $y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + a_0 y = b$ für alle $x \in I$. Falls $b = 0$, heisst die Gleichung homogen und sonst inhomogen. Die Gleichung

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + a_0 y = 0$$

heisst zugehörige homogene lineare ODE

Note Lösungsraum: **Sind f_1 und f_2 Lösungen einer homogenen linearen ODE, so sind auch Linearkombinationen $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ Lösungen.**

S 2.23:: **Annahme: $a_0, \ldots, a_{k-1}$ stetig. Dann gilt:**

- **Die Lösungen der homogenen linearen ODE bilden einen komplexen Vektorraum S mit $\dim_{\mathbb{C}} S = k$**
- **Die inhomogene ODE hat eine Lösung f_0. Die Menge aller Lösungen ist genau der affine Raum $f_0 + S$**
- **Falls $y_0, \ldots, y_{k-1} \in \mathbb{C}$: Für beliebige $x_0 \in I$, hat das Anfangswertproblem und $y(x_0) = y_0$, $y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1}$ genau eine Lösung**

- Falls $y_0, \ldots, y_{k-1} \in \mathbb{R}$: $\dim_{\mathbb{R}}\{$ reellwertige $f \in S\} = k$, die homogene Gleichung hat eine reellwertige Lösung f_0
- Die inhomegene hat die Lösung $\{$reellwertige Lösungen$\} = f_0 + \{$reellwertige $f \in S\}$
- Für $x_0 \in I, y_0, \ldots, y_{k-1} \in \mathbb{R}$ hat das entsprechende Anfangswertproblem genau eine Lösung.

RC Lineare ODE:

1. Finde Basis $f_1, \ldots, f_n$ von S der homogenen ODE
2. Finde die partikuläre Lösung von der inhomogenen ODE. Die allgemeine Lösung ist dann $f_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
3. Falls Anfangswertproblem: Einsetzen der Anfangswerte in die allgemeine Lösung. Das LGS für $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ hat eine eindeutige Lösung

Def Lineare ODE mit $k = 1$: $y' + ay = b$ mit gegebenen stetigen $a, b : I \to \mathbb{C}$

Note Linearität:

$$D = \frac{d^{(k)}}{dx^k} + a_{k-1}\frac{d^{(k-1)}}{dx^{k-1}} + \cdots + a_0$$

$$D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$$

$$Df_1 = b_1, Df_2 = b_2 \Rightarrow D(f_1 + f_2) = b_1 + b_2$$

S Superpositionsprinzip: Löst f_0 die ODE mit inhomogenität b und g_0 die ODE mit inhomogenität c Dann löst $\lambda f_0 + \mu g_0$ die ODE mit inhomogenität $\lambda b + \mu c$

Differenzialrechnung

Stetigkeit

Note MC:

- f ist differenzierbar $\Rightarrow$ f ist stetig
- f ist differenzierbar und die Einträge der Jacobimatrix von f sind stetig $\Rightarrow$ f ist stetig differenzierbar
- Alle Richtungsableitungen von f existieren. $\Rightarrow$ impliziert gar nichts
- Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine $m \times n$ Matrix A, sodass $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$. $\Leftrightarrow$ Definition von Differenzierbareit

RC Stetigkeit:

1. Falls $f = g \star h$ mit $\star \in \{\circ, \cdot, \pm, \div : h \neq 0\}$ und g, h sind stetig dann ist f stetig. Gilt auch wenn $f = (x, y) = g(x) \star h(y)$
2. Stetigkeit widerlegen: Setze alle Variabeln konstant und zeige Analog zu $\mathbb{R}$ unstetigkeit.
3. Falls f eine piecewise Funktion ist, Übergänge überprüfen mit Limes der Funktion. Benutze **Prop 3.2.4** und finde zwei Folgen die nicht denselben Grenzwert haben oder zeige, dass alle Folgen den gleichen Grenzwert haben.

Note Funktionen:

- Injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Surjektiv: $\forall y \exists x \quad f(x) = y$

Sei $f(x) = (f_i(x), \ldots f_m(x))$ mit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ und $\forall 0 \leq i \leq m f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ gilt

- alle f_i sind injektiv $\Rightarrow$ f ist injektiv
- f ist surjektiv $\Rightarrow$ alle f_i sind surjektiv

Def Norm: Die Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Def 3.2.8: Stetigkeit : $U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m$ heisst stetig bei $x_0 \in U$ falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\lambda > 0$ existiert, sodass gilt:

$$x \in U \quad \|x - x_0\| < \lambda \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$$

Die Funktion f heisst stetig, wenn es bei allen $x_0 \in U$ stetig ist

Def 3.2.1: Konvergenz einer Folge: Eine Folge $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}^n$ konvergent gegen $y \in \mathbb{R}^n$ falls für alle $\epsilon > 0$ ein N existiert, sodass für alle

$$k \leq N \quad \|x_k - y\| < \epsilon$$

Lem 3.2.2 : (Die letzen zwei limes in $\mathbb{R}$ der erste in $\mathbb{R}^n$)

$$\lim_{k\to\infty} x_k = y$$
$$\iff \lim_{k\to\infty} ||x_k - y|| = 0$$
$$\iff \lim_{k\to\infty} x_{k,l} = y_l \qquad \text{(für alle } 1 \leq l \leq n)$$

Prop 3.2.4: $U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m$ heisst stetig bei $x_0 \in U$ $\Leftrightarrow$ Für alle Folgen $x_1, x_2 \ldots \in U$ mit $\lim_{k\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Prop 3.2.9: f, g stetig $\Rightarrow$ $g \circ f$ stetig

Def 3.2.5: Grenzwert : Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m$. Der Grenzwert von f bei $x_0 \in U$, geschrieben $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x)$, ist gleich y, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\lambda > 0$ existiert, sodass gilt

$$x \in U, \quad \|x - x_0\| < \lambda, x \neq x_0 \Rightarrow \|f(x) - y\| < \epsilon$$

Prop 3.2.7: $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = y \Leftrightarrow$ Für jede Folge $x_1, \ldots \in U$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ und $x_k \neq x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$

Prop 3.2.8: $U \subseteq \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann bei $x_0 \in U$ stetig, wenn $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = f(x_0)$

Limits

RC :

1. Ausklammern und Brüche kürzen
2. Mit Polarkoordinaten ersetzen: $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$ und $x^2 + y^2 = r^2$. Falls ein Term abhängig von ϕ übrig bleibt $\Rightarrow$ limit undefiniert.
3. definiere g so dass $|f| \leq g$ (für limits nach 0) oder $f > / < g$ (für limits nach $\pm\infty$) und berechne $\lim g$

Sets

Def 3.2.11:

1. Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ ist **beschränkt** , wenn die Menge der $\|x\|$ für $x \in X$ in $\mathbf{R}$ beschränkt ist.
2. Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ ist **geschlossen** , wenn für jede Folge (x_k) in X, die in $\mathbf{R}^n$ gegen einen Vektor $y \in \mathbf{R}^n$ konvergiert, gilt: $y \in X$.
3. Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ ist **kompakt** , wenn sie beschränkt und geschlossen ist.
4. Vorlesung: Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ ist **offen** , wenn für alle $x \in U$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\{y \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - y_i| < \delta$ für alle $i\}$.

Note :

- **beschränkt** : Wenn man die Menge "überdecken" kann mit einer endlichen Form.
- **abgeschlossen** : Wenn der Rand eingeschlossen ist. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
- **nicht abgeschlossen** : Wenn der Rand nicht eingeschlossen ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. $\sin(\phi)$ mit $\phi \in \mathbb{Q}$ ist auch nicht abgeschlossen.
- **offen** : Wenn das Komplementär abgeschlossen ist und man somit immer einen "Ball" um jeden Punkt legen kann und auch dieser in der Menge ist.

Es gilt folgendes:

- abgeschlossene und offene Menge sind komplemente, jedoch sind $\varnothing, \mathbb{R}^n$ beides.
- Vereinigungen $\cup$ beliebig vieler offener Mengen sind offen.
- Durchschnitte $\cap$ beliebig vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
- Der Durchschnitt $\cap$ endlich vieler offener Mengen ist offen.
- Die Vereinigung $\cup$ endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Prop 3.3.2: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus U$ offen

Prop 3.2.13: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, dann:

- $U \in \mathbb{R}^m$ offen $\implies$ $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen
- $U \in \mathbb{R}^m$ abgeschlossen $\implies$ $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen

Trm 3.2.15: Sei $X \subset \mathbf{R}^n$ eine nicht-leere kompakte Menge und $f : X \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt und erreicht ihr Maximum und Minimum. Anders ausgedrückt existieren x_+ und x_- in X, so dass

$$f(x_+) = \sup_{x\in X} f(x), \quad f(x_-) = \inf_{x\in X} f(x).$$

Ableitung

RC Hessische: Gegeben sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. Berechne $\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{pmatrix}$
2. Die Hessische ist gegeben durch $\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \nabla f \mid & \ldots & \mid \partial_{x_n} \nabla f \end{pmatrix}$

RC Dreigliedentwicklung: Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ und die Entwicklungsstelle $p_0 = (x_1, \ldots, x_n)$

1. Berechne $f(p_0)$
2. Berechen $\mathcal{J}_f(p_0)$
3. Die Dreigliedentwicklung ist dann $f(p) = f(p_0) + \mathcal{J}_f(p_0)(p - p_0) + \sigma \|p - p_0\|$

RC Tangentialebene: Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ und den Punkt $p_0 = (x, y)$, an welcher die Tangentialebene anliegt.

1. Berechne die Dreigliedentwicklung von $f(p) = C + (ax + by) + \sigma \|p - p_0\|$. Alternativ kann man auch das TP ersten Grades berechnen.
2. Ebene ist gegeben durch: $\{(x, y, z) \mid x, y \in \mathbb{R}, z = C + ax + by\}$

Analog kann der **Tangentialraum** für $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ berechnet werden

RC Beweise Differenzierbarkeit: Sei zu beweisen dass f differenzierbar ist.

1. Verwende **Prop 3.4.6** um zu zeigen, dss multiplikationen und additionen von differenzierbaren Funktionen differenzierbar sind.
2. Berechne alle partiellen Ableitungen, falls diese stetig sind folgt mit **Prop 3.4.7** , dass die f differenzierbar ist.

Falls f gewisse Punkte aus dem Definitionsbereich exkludiert, können diese einfach ignoriert werden. Z.b ist $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ differenzierbar. Obwohl das Limit zu $(0, 0)$ divergiert.

RC Beweise Existenz von Richtungsableitungen:

Sei f gegeben die Stückweise definiert ist:

$$f(x,y)=\begin{cases} f_1 & \text{falls } (x,y)\neq(a,b)\\ C & \text{falls } (x,y)=(a,b)\end{cases}$$

1. Für $(x,y)\neq(a,b)$ und alle normalen Funktionen, reicht es zu zeigen, dass alle Richtungsableitungen existieren. Mit **Prop 3.4.15** folgt dann, dass alle Richtungsableitungen existieren.

2. Für $(x,y)=(a,b)$: Benutze Definition des Limits und berechne $\lim_{t\to 0}\frac{f((a,b)+t(u,v))}{t}$

Note Kettenregel: $J_{g\circ f}(x_0)=J_g(f(x_0))\,J_f(x_0)$ Insbesondere gilt $g\circ f=g(f(x))$

Def 3.3.5: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f:U\to\mathbb{R}$ Die i-te partielle Ableitung von f an einem Punkt $x_0\in U$ ist $\partial_{x_i}f(x_0):=g'(x_{0,i})\in\mathbb{R}$, wobei $g(t)=f(x_{0,1},\dots,x_{0,i-1},t,x_{0,i+1},\dots,x_{0,n})$ mit $g:\{t\in\mathbb{R}\mid(x_{0,1},\dots,t,\dots x_{0,n})\in U\}\to\mathbb{R}$ falls g bei t differenzierbar ist.

Def 3.3.9: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f:U\to\mathbb{R}^m$ $f=(f_1,\dots,f_m)$ mit $f_i:U\to\mathbb{R}$ Die $m\times n$ Matrix:

$$J_f(x)=(\partial x_i,f_i(x))_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$$

Def 3.3.11: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen:
Der **Gradient**
von $f:U\to\mathbb{R}$ ist:

$$\text{grad } f(x)=\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\partial_{x_1}f(x)\\ \vdots\\ \partial_{x_n}f(x)\end{pmatrix}$$

Die **Divergenz**
von $f:U\to\mathbb{R}^n$ ist:

$$\text{div } f(x)=\partial x_1f_1(x)+\dots+\partial x_nf_n(x)=\text{spur}(J_f(x))$$

Note : $df(x_0)\,A\Leftrightarrow f$ hat die sogenannte **Dreigliedentwicklung**
.

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+\text{Fehler}(x-x_0)$$

wobei

$$\text{Fehler}(x-x_0)=\sigma(||x-x_0||)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{\text{Fehler}(x-x_0)}{||x-x_0||}=0$$

Def 3.4.2: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen $f:U\to\mathbb{R}^m$ heisst **differenzierbar**
bei $x_0\in U$ falls es eine lineare Abbildung $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sodass:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{||x-x_0||}=0$$

Prop 3.4.4: Wir betrachten $U\subseteq\mathbb{R}^n,f:U\to\mathbb{R}^m$ es folgt aus f ist differenzierbar dass

1. f ist stetig

2. $\partial_{x_j}f_i$ existieren für alle i,j

3. Die Matrix von $\mathrm{df}(x_0)$ bezüglich den Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ist gleich der Jakobimatrix

$$\mathcal{J}_f(x_0)=\begin{pmatrix}\partial_{x_1}f_1(x_0)&\dots&\partial_{x_n}f_1(x_0)\\ \vdots&&\vdots\\ \partial_{x_1}f_m(x_0)&\dots&\partial_{x_n}f_m(x_0)\end{pmatrix}$$

Prop 3.4.6: Sei $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f,g:U\longrightarrow\mathbb{R}^m$ differenzierbar. Dann gilt

1. $f+g$ differenzierbar und $\mathrm{d}(f+g)(x_0)=\mathrm{d}f(x_0)+\mathrm{d}\,g(x_0)$

2. $m=1\Rightarrow f\cdot g$ differenzierbar

3. $m=1,g\neq0\ \frac{f}{g}$ differenzierbar

Prop 3.4.7: Wir betrachten $U\subseteq\mathbb{R}^n,f:U\to\mathbb{R}^m$ Falls $\partial_{x_j}f_i$ für alle $1\leq j\leq n$, $1\leq i\leq m$ existiert und stetig ist, dann ist f differenzierbar. (Man sagt f ist stetig differenzierbar)

Prop 3.4.9: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $V\subseteq\mathbb{R}^m$ offen $f:U\longrightarrow V,g:V\longrightarrow\mathbb{R}^p$ differenzierbar. Dann ist $g\circ f$ differenzierbar und

$$d(g\circ f)(x_0)=dg(f(x_0))\circ df(x_0)$$

Insbesondere erfüllen die Jacobimatrizen:

$$\mathcal{J}_{g\circ f}(x_0)=\mathcal{J}_g(f(x_0))\cdot\mathcal{J}_f(x_0)$$

Def 3.4.11: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f:U\to\mathbb{R}^m$ differenzierbar. $x_0\in U$, $A=df(x_0)$. Der **Tangentialraum**
des Graphen von f bei x_0 ist der Graph von $g(x)=f(x_0)+A(x-x_0)$, also

$$\{(y,g(x))\mid x\in\mathbb{R}^m\}\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$$

Def 3.4.13: Sei $U\subseteq\mathbb{R}^m$ offen und $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^m,v\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\},x_0\in U$. Die Richtungsableitung von f in Richtung v bei x_0:

$$D_vf(x_0):=\mathcal{J}_g(0)\in\mathbb{R}^m$$

wobei $g:\{t\in\mathbb{R}\mid x_0+tv\in U\}\subseteq\mathbb{R}$

$$g(t)=f(x_0+tv)$$

Es gilt

$$\mathcal{J}_g=\begin{pmatrix}\partial_xg_1(0)\\ \vdots\\ \partial_xg_m(0)\end{pmatrix}$$

Prop 3.4.15: $u\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f:u\to\mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar $\Rightarrow$ Für alle $x_0\in u,v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ gilt $\mathrm{D}_vf(x_0)=df(x_0)(v)$ Insbesondere

$$D_{\lambda_1v_1+\lambda_2V_2}f(x_0)=\lambda_1D_{V_1}f(x_0)+\lambda_2D_{V_2}f(x_0)$$

Def 2.5.1: Sei $u\subseteq\mathbb{R}^n$ offen

- $C^0(u,\mathbb{R}^m):=$ stetige Funktionen
- $C^k(u,\mathbb{R}^m):=$ alle k-ten partiellen Ableitung existieren und sind stetig
- $C^\infty(u,\mathbb{R}^m):=\bigcap_{k=0}^\infty C^k(u,\mathbb{R}^m)$ (glatte Funktionen)

Insbesondere ist C^k ein Vektorraum, ein Homomorphismus und abgeschlossen unter Addition, Multiplication und Verknüpfung

Def 3.5.9: $u\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f:u\to\mathbb{R}c^2,x_0\in u$ Die **Hessische**
von f bei x_0 ist die $n\times m$-Matrix

$$H_f(x_0)=\left(\partial_{x_i}\partial_{x_j}f(x_0)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$$

Prop 3.5.4: $u\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f\in C^2(u,\mathbb{R}^m)$. Dann gilt

$$\partial_{x_j}\partial_{x_k}f=\partial_{x_k}\partial_{x_j}f$$

$H_f(x_0)$ ist symmetrisch
Ist f C^k, so lassen sich $\partial_{x_{j_1}},\dots,\partial_{x_{j_k}}$ beliebig vertauschen

Taylorpolynome

RC Mehrdimensionale TP:

1. Berechne den Gradient ∇f $(k=1)$ oder die Hessische $\mathcal{H}_f$ $(k=2)$

2. Setze in **Def 3.7.1** ein

Alternativ kann man auch schrittweise die Taylorpolynome berechnen und dann einsetzen.

Ex : Berechne das TP von $f(x,y)=\arctan(\sin(x\cdot y))$. Es gilt $T_2(\arctan(x))=x$ und $T_2(\sin(x))=x$. Somit folgt dann $T_2(xy)=xy\Rightarrow T_2(\sin(xy))=xy\Rightarrow T_2(\arctan(\sin(xy)))=xy$. Oder $f(x)=\log(\frac{1}{1+x^2})$.
Es gilt $T_2(\log(1-x))=-x$ und $T_2(\frac{1}{1+x^2})=1-x^2$, was $T_2(f(x)=-x^2$ ergibt.

Def 3.7.1: $f\in C^k(U,\mathbb{R})$. Dann ist das k-te Taylorpolynom$T_kf(x)=$

$$\sum_{\substack{m_1,\cdots,m_n\geqslant0\\m_1+\ldots+m_n\leqslant k}}\underbrace{\frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\cdot\partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}f(x_0)}_{\text{Konstante}}\cdot y_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{m_n}$$

Note $k=1$:

$$f(x)=f(x_0)+\langle\nabla_f(x_0),\quad y\rangle+\sigma(\|y\|)$$
$$=\underbrace{f(x_0)+\sum_{i=1}^n\partial_if(x_0)\cdot y_i}_{T_K(1)=\text{Polynom Grad}\leq1}+\sigma(\|y\|)$$

Note $k=2$: Für das zweite Taylorpolynom ergibt dass

$$T_2f(x)=\underbrace{f(x_0)}_{\text{Fall 1}}+\underbrace{\langle\nabla_f(x_0,x)\rangle}_{\text{Fall 2}}+\underbrace{\sum_{i=0}^n\frac{1}{2}\partial_i^2f(x_0)y_i^2}_{\text{Fall 3}}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\partial_i\partial_jf(x_0)\cdot y_jy_i}_{\text{Fall 4}}=\tfrac{1}{2}y^TH_f(x_0)\cdot y$$

Man berechnet alle Fälle, so dass der Grad kleiner gleich 2 ist und somit gilt

- Fall 1: Alle $m_1\dots m_n=0$ (Gesamtgrad 0)
- Fall 2: Alle $m_1\dots m_n=0$ ausser ein i wo gilt $m_i=1$ (Gesamtgrad 1)
- Fall 3: Alle $m_1\dots m_n=0$ ausser ein i wo gilt $m_i=2$ (Gesamtgrad 2)
- Fall 4: Alle $m_1\dots m_n=0$ ausser zwei i,j wo gilt $m_j=m_i=1$ (Gesamtgrad 2)

S 3.7.3: $f\in C^k(u,\mathbb{R})$. Dann

$$f(x)=T_kf(x;x_0)+\sigma\left(\|y\|^k\right).$$

Kritische Punkte

RC Kritische Punkte finden:
Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

1. Falls $i\in[0,n]\lim_{x_i\to\pm\infty}f(x_0,x_1,\dots)=\pm\infty$ hat es entweder kein minimum $(-\infty)$ oder kein maximum $(+\infty)$. Gemäss **TRM 3.2.15**
gibt es für die anderen Fälle ein Extrempunkt.

2. Berechne Grad $\nabla_f(x_i)=0$ und finde potentielle Kandidaten für x_i.
Alle Kombinationen aus x_i

3. Berechne Hessische $\mathcal{H}_f$ und bestimme Definitheit von $\mathcal{H}_f(x_i)$

4. Falls Funktion beschränkt: Überprüfe Ränder durch berechnen der Limites!

RC Eigenwerte Finden:
1 finde char. Polynom $\mathcal{X}_A(\lambda)=det(A-\lambda I)$
2 Finde Nullstellen $\mathcal{X}_A$

Note Definitheit mit Eigenwerte: Aus Hermitische $\mathcal{H}_f$ folgt:

- alle Eigenwerte sind positiv [negativ] $\Leftrightarrow$ Matrix ist positiv [negativ] definit.
- Falls positive und negative Eigenwerte $\Leftrightarrow$ Matrix ist indefinit
- Für Diagonalmatrizen sind Eigenwerte die Diagonaleinträge!

Note Definitheit mit Sylvester: Alle determinanten von oberen linken submatrizen sind strikt positiv $\Leftrightarrow$ Matrix ist positiv definit. Falls Theorem stimmt mit $-A$ dann ist A negativ Definit. Wichtig: Für $A\in\mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$\mathrm{Det}(-A)=(-1)^n\,\mathrm{Det}(A)$$

Def : $U\subseteq\mathbb{R}^M,f:U\to\mathbb{R}$. Dann heisst $x_0\in U\dots$

- **lokales Minimum**
: Falls es in $\varepsilon>0$ gibt mit $\|x-x_0\|<\varepsilon,x\in U\Rightarrow f(x_0)\leqslant f(x)$
- **lokales Maximum**
: Falls es in $\varepsilon>0$ gibt mit $\|x-x_0\|<\varepsilon,x\in U\Rightarrow f(x_0)\geqslant f(x)$
- **lokales Extremum**
: falls es ein lokales Minimum oder Maximum gibt
- **globaler Extrempunkt**
: falls die Bedingung für alle $x\in U$ gelten

Def 3.8.2: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : u \to \mathbb{R}$ differenzierbar. $x_0 \in U$ heisst kritischer Punkt falls $\nabla f(x_0) = 0$.
Prop 3.8.1: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. $x_0 \in U$ lokales Extremum $\Rightarrow x_0$ kritischer Punkt
Def : Def Eine $n \times m$ Matrix A heisst...
- positiv definit $\Leftrightarrow$ für alle $y \neq 0$ gilt: $y^\top Ay > 0$
- negativ definit $\Leftrightarrow$für alle $y \neq 0$ gilt: $y^\top Ay < 0$
- indefinit falls es y, z gibt mit $y^\top Ay < 0, z^\top Az > 0$.

S 3.8.7: $u \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : u \to \mathbb{R}C^2$, x_0 Kritischer Punkt. Dann:
- $H_f(x_0)$ positiv definit $\Rightarrow x_0$ lokales Minimum.
- $H_f(x_0)$ negativ definit $\Rightarrow x_0$ lokales Maximum
- $H_f(x_0)$ indefinit $\Rightarrow x_0$ kein lokales Extremum

Def : Ein kritischer Punkt x_0 von f heisst degeneriert falls $\det H_f(x_0) = 0$
Note : Eigenwerte von M kann man bestimmen in dem man die Gleichung $\det(M - I\lambda)$ löst.
Note : Es gilt für alle Punkte x_0.
- $H_f(x_0)$ hat positive Eigenwerte $\Rightarrow f$ hat kein lokales Maxima bei x_0
- $H_f(x_0)$ hat negative Eigenwerte $\Rightarrow f$ hat kein lokales Minima bei x_0

Note Min-Max Satz: Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{X} \neq \varnothing$ eine kompakte Menge und $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt und ein Maximum (x^+) /Minimum (x^-)existieren, so dass

$$f\left(x^+\right) = \sup_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad f\left(x^-\right) = \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

Lagrange Multiplikatoren

RC Lagrange Multiplikatoren:
Sei $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei g die Nebenbedingung ist.

1. Bestimme alle potentiellen Punkte $\nabla g(x_i) = 0$ und überprüfe ob die Punkte x_i in g liegen. Falls ja x_i in die Liste der potentiellen Punkte aufnehmen.
2. Stelle Gleichungssystem auf für $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla_g(x_0)$. Es ergibt sich
   - Eine Gleichung $\forall j \in [0, n] : \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j}$
   - Eine Gleichung für die Nebenbedingung $g(x) = 0$
3. Nehme alle Lösungen des Gleichungssystems als potentielle Punkte auf.
4. Potentielle Werte überprüfen durch einsetzen.

Prop 3.9.2: $u \leq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C^1(u, \mathbb{R})$. Falls x_0 lok. Extremum von $f \mid g^{-1}(0)$, dann $\nabla g(x_0) = 0$ oder es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla_g(x_0)$$

Wobei $f \mid g^{-1}(0)$ bedeutet, dass f eingeschränkt ist auf $\{x \in U \mid g(x) = 0\}$

Umkehrabbildung

Def 3.10.1: Sei $u \leq \mathbb{R}^n$ offen, $f : u \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. f heisst lokal invertierbar bei $x_0 \in U$ falls eine offene Menge B mit $x_0 \in B$ existiert, für die gilt: $f(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen, und es gibt ein diffbares $g : f(B) \to B$ Sodass

$$f \circ g = id_{f(B)}, \quad g \circ f = id_B$$

S 3.10.2: Von der Umkehrabbildung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Falls $\det(J_f(x_0)) \neq 0$, dann ist f lokal invertierbar bei x_0. Sei g die lokale Umkehrfunktion. Dann ist

$$J_g(f(x_0)) = J_f(x_0)^{-1}$$

Falls $f \in C^k$ ist, ist auch $g \in C^k$.

Integralrechnung

Wegintegrale

RC Wegintegrale:
Gegeben sei ein Vektorfeld $V(x, y)$ und ein Weg $\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t))$ im Interval $t \in [a, b]$

1. Berechne $\gamma\prime = (\gamma\prime_x(t), \gamma\prime_y(t))^\top$
2. $$\int_a^b \left[V(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \cdot (\gamma\prime_x(t), \gamma\prime_y(t))^\top\right] dt$$

RC Umparametrisierung:

RC Konservativität widerlegen:
- Kontraposition Prop 4.1.13 : $\mathcal{H}_f$ nicht symmetrisch $\Rightarrow f$ nicht konservativ
- Zwei Parametrisierungen mit gleichen Start- Endpunkt mit unterschiedlichen Ergebnissen finden.

RC Potential:
Gegeben sei ein konservatives Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f = (f_1, f_2, f_3)$ Gesucht: $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla g = f$.

1. Definiere $g(x, y, z) = \int f_1 dx + a(y, z)$
2. Löse nach $a(y, z)$ in $\frac{\partial g}{\partial y} = f_2$ und integriere $a(y, z) = \int a(y, z) dy + b(z)$
3. Löse nach $b(z)$ in $\frac{\partial g}{\partial z} = f_3$ und integriere $b(z) = \int b(z)$

Ex :
Sei

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 9x^2 \cos(yz) + z \sin(y) \\ -3x^3 z \sin(yz) + xz \cos(y) + 2y \\ -3x^3 y \sin(yz) + x \sin(y) + 2z \end{pmatrix}$$

1. $g_1(x, y, z) = \int f_1 = 3x^3 \cos(yz) + xz \sin(y)$
2. $g_2(y, z) = \int (f_2 - \partial_y g_1(x, y, z)) = \int 2y = y^2$
3. $g_3(z) = \int (f_3 - \partial_z g_1(x, y, z) - \partial_z g_2(x, y)) = \int 2z = z^2$

Was dann $g = g_1 + g_2 + g_3 = 3x^3 \cos(yz) + xz \sin(y) + y^2 + z^2 + c$ ergibt
Def 4.1.1 (1): $[a, b] \subseteq \mathbb{R}, f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann

$$\int_a^b f(t) dt := \left(\int_a^b f_1(t) dt, \ldots, \int_a^b f_n(t) dt\right) \in \mathbb{R}^n$$

Def 4.1.1 (2): Ein Weg ist ein stetiges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Wir betrachten nur stückweise C^1 Wege, d.h. es gist $k \geqslant 1$ and $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ Sodass $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$ C^1 für alle $1 \leq i \leq h$. Wir sagen γ ist eir Weg von $\gamma(a)$ mach $\gamma(b)$.
Def 4.1.1 (3): Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ in weg, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sodass $\mathrm{Bild}(\gamma) \subseteq u$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist das Wegintegral von f entlang γ, geschrieben $\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s}$, definiert als

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Skalarprodukt. Alternative Scheibweise:

$$\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Def 4.1.4: Eine orientierte Umparametrisierung eines Wegs $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^u$ mit $\sigma = \gamma \circ \varphi$, wobei $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ stetig ist, differenzierbar auf (c, d), streng monoton wachsend mit $\varphi(c) = a$ and $\varphi(d) = b$ (insbesondere bijektiv).
Prop 4.1.5: γ ein Weg in $\mathbb{R}^n$ mit einer orientierten Umparametrisierung σ von γ Sei weiter das Bild $\gamma \subseteq u \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann:

$$\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = \int_\sigma f(s) \cdot d\vec{s}$$

Def 4.1.8: $u \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : u \to \mathbb{R}^n$ stetig. Falls für alle $x_1, x_2 \in U$ das Integral

$$\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s}$$

unabhängig des Wahl des Weges γ von x_1 mach x_2 mit Bild $(\gamma) \subseteq U$ ist, dann ist f konservativ.
Def : U heisst wegzusammenhängend falls für alle $x, y \in U$ in Weg γ von x mach y existiert mit $\mathrm{Bild}(\gamma) \subseteq U$.
S 4.1.10: $u \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : u \to \mathbb{R}^n$ konservativ. Dann gibt es $\sin g \in C^1(u, \mathbb{R})$ mit $f = \nabla g$. Ein solches g heisst Potential von f Falls U wegzusammenhängend ist, dann is g eindeutig bis auf Addition einer Konstanten.
Prop 4.1.13: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : u \to \mathbb{R}^n C^1$. f konservativ $\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ für $i, j = 1, \ldots, n$. $\Leftrightarrow J_f(x)$ symmetrisch für alle $x \in U$

S : $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, $f : U \to \mathbb{R}^n C^1$ mit $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n \Rightarrow f$ konservativ
Def : $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst sternförmig falls es ein $x_0 \in U$ gibt sodass für alle $x \in C$ die Strecke zwischen x_0 und x in A enthalten ist.
Note : Es gilt Konvex $\Rightarrow$ Sternförmig $\Rightarrow$ wegzusammenhängend , da man zuerst immer zu x_0 gehen kann und dann zu einem beliebigen Punkt in U.
Def 4.1.20: $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^3 C^1$. Dann ist die Rotation das C^0 vektorfeld $u \to \mathbb{R}^3$ gegeben als

$$\mathrm{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $J_f(x)$ symmetrisch $\Leftrightarrow \mathrm{rot}(f)(x) = 0$
Note : Falls Domäne sternförmig ist gilt: Feld ist konservativ$\Leftrightarrow J_f(x)$ symmetrisch $\Leftrightarrow \mathrm{rot}(f)(x) = 0$ Zusammenfassend gilt:

$$f \in C^0(U, \mathbb{R}^n) \text{ konservativ mit } U \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$\Updownarrow$$
$$f = \nabla g \text{ für } g \in C^1(U, \mathbb{R})$$
$$\Downarrow \quad (\Uparrow \quad U \text{ sternförmig})$$
$$J_f(x) \text{ symmetrisch}$$

Riemannintegral

Def : Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig kann man das (Riemannintegral von f auf $u \int_u f(x_1, \ldots, x_n) dx$ definieren, mit folgenden Eigenschaften:

1. Kompabilität
   $n = 1, U = [a, b] \Rightarrow \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
2. Linearität
   $\int_u af(x) + bg(x) dx = a \int_u f(x) dx + b \int_u g(x) dx$ für $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Positivität
   $f \leqslant g \Rightarrow \int_u f(x) dx \leq \int_u g(x) dx$ und $f \geqslant 0, V \leq U$ kompakt $\Rightarrow \int_V f(x) dx \leq \int_U f(x) dx$
4. Dreiecksungleichung
   $\left|\int_u f(x) + g(x) dx\right| \leq \int_u |f(x)| dx + \int_u |g(x)| dx$ und $\int_u f(x) dx \leqslant \int_u |f(x)| dx$
5. Volumen
   $\int_u 1 dx =$ Volumen von U
6. Satz von Fubini
   $n_1, n_2 \geqslant 1$ mit $n_1 + n_2 = n$. Sei

   $$V(x_1) = \left\{x_2 \in \mathbb{R}^{n2} \mid (x_1, x_2) \in U\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n2}$$
   $$U_1 = \left\{x_1 \in \mathbb{R}^{n1} \mid V(x_1) \neq \phi\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n1}$$

   Falls $g : U_1 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1) = \int_{V(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2$ stetig ist, dann:

   $$\int_u f(x) dx = \int_{u_1} \int_{V(x_1)} f(x) dx_2 dx_1$$

7. **Additivität bezüglich Integrationsbereichs**: $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: U_1 \cup U_2 \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \int_{u_1\cup u_2} f(x)dx = \int_{u_1} f(x)dx + \int_{u_2} f(x)dx - \int_{u_1\cap u_2} f(x)dx$

Def 4.2.3:

1. Für $1 \leqslant m \leqslant n$ ist eine parametrisierte m-Menge in $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion

$$f:[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_m,b_m]\to\mathbb{R}^n$$

die C^1 auf $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_m,b_m)$ ist.

2. $B\subseteq\mathbb{R}^n$ heisst vernachlässigbar falls $B \subseteq B_i/d(f_1)\cup\cdots\cup$ Bild (f_k) für m_i-Mengen f_i mit $m_i < n$.

Note Def 4.2.3 Informell: Wir können die ganze Menge mit einer endlichen Menge an Rechtecken beliebiger Grösse überdecken.)
Prop 4.2.5: Ist $U\subseteq\mathbb{R}^n$ kompakt und vernachlässigbar, dann $\int_u f(x)dx = 0$ für alle $f\in C^0(u,\mathbb{R})$.

Uneigentliche Integrale

Def : $I\subseteq\mathbb{R}$ kompaktes Intervall, $a\in\mathbb{R}, f:[a,\infty)\times I\to\mathbb{R}$ stetig. Dann

$$\int_{[a,\infty)\times I} f(x,y)dxdy := \lim_{b\to\infty}\int_{[a,b]\times I} f(x,y)dxdy$$

Das Integral Konvergiert aber nicht, je nachdem ob der lim es tut.

Transformationsformel

RC Transformation:
- Definiere die Transformation $\begin{bmatrix}\phi_u(x,y)\\ \phi_v(x,y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$
- Benutze die Transformation um die Ränder des Integrals anzupassen
- Berechne die Inverse der Transformation $\begin{bmatrix}\phi_x(u,v)\\ \phi_y(u,v)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$
- Berechne $Det = \det J_{\phi(u,v)^{-1}} = \det\begin{bmatrix}\partial x\phi_x & \partial y\phi_x\\ \partial x\phi_y & \partial y \phi_y\end{bmatrix}$
- Benutze die Transformationsformel mit den angepassten Rändern. Det nicht vergessen

RC Inverse Transformation:
Gegeben sei die Transformationsfunktion $\phi(x,y) = ... = (\phi_u(x,y),\phi_v(x,y)) = (u,v)^T$ Wir bekommen die Gleichungen $\phi_u(x,y)=u(I)$ und $\phi_v(x,y)=v(II)$.
Löse (I) nach y auf und Setze in (II) ein $\Rightarrow$ inverse $x = ..$
Löse (II) nach x auf und Setze in (I) ein $\Rightarrow$ inverse $y = ..$

RC Determinante:
Für 2×2 Matrizen gilt

$$\det\begin{vmatrix}a&c\\ b&d\end{vmatrix} = ad-bc$$

Für 3×3 Matrizen nach Zeile/Reihe entwickeln und abweichslungsweise addieren/subtrahieren. (Man started bei $+$)

RC Standard Transformationen:
Schreibe das Integral um entsprechend der Transformationsformel.
- Polar: $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi)$ mit $0\le r<\infty, 0\le\phi<2\pi$ und $\det = r$
- Elliptisch: $x = ar\cos(\phi), y = br\sin(\phi)$ mit $0\le r<\infty,0\le\phi<2\pi$ und $\det = abr$
- Zylinder: $x=r\cos(\phi), y=r\sin(\phi), z=z$ mit $0\le r,z<\infty, 0\le\phi<2\pi$ und $\det = r$
- Kugel: $x = r\sin(\phi)\cos(\theta), y = r\sin(\phi)\sin(\theta), z = r\cos(\phi)$ mit $0\le r<\infty, 0\le\phi<\pi, 0\le\theta<2\pi$ und $\det = r^2\sin(\phi)$

Def :

$$\int_{\bar u} f(\varphi(x))\,|\det f_\varphi(x)|\,dx = \int_{\bar V} f(y)dy$$

wobei:
- $\bar u$ kompakt, $\bar u = U\cup B$ für U offen, B vernachlässigbar
- $\bar V$ kompakt, $\bar V = V\cup C$ für V offen, C vernachlässigbar
- $\varphi:\bar u\to\bar v$ stetig, und C^1 auf U
- $\varphi(u) = V$ and φ/u bijektiv
- Es gibt eine stetige Funktion $\bar u\to\mathbb{R}$, deren Einschränkung an U gleich $|\det J_\varphi(x)|$ ist.
- $f:\bar V\to\mathbb{R}$ stetig

Schwerpunktberechnung

Def : Der Schwerpunkt $\bar x\in\mathbb{R}^n$ einer kompakten Menge $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\bar{x_i} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(U)} = \int_U x_i dx$$

Kochrezepte Integral

Def (Akkumulationsfunktion): Eine Akkumulationsfunktion ist eine Funktion in der Form:

$$A(x) = \int_c^x f(z)dz$$

Solange $f(z)dz$ stetig in $[c,x]$ ist gilt generell:

$$A'(x) = f(x)$$

Kombiniert mit der Kettenregel folgt für eine allgemeinere Form der Funktion:

$$\frac{d}{dx}\int_c^{h(x)} f(z)dz = f(h(x))\cdot h'(x) = F(g(x))'$$

Ein Beispiel:

$$f(z) = \int_0^{x^2}\frac{1}{z^2+4}$$

hier ist $h(x)=x^2$. Somit folgt

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(x^2)^2+4}\cdot(x^2)' = \frac{2x}{x^4+4}$$

Wichtig ist anzumerken, dass die Funktion nur in der oberen Grenze eine Variabel haben kann. Falls man Funktionen in der Form $\int_{p(x)}^{h(x)} f(z)dz$ antrifft kann man sie lösen indem man das Integral teilt:

$$\int_{p(x)}^{h(x)} f(z)dz = \int_0^{h(x)} f(z)dz - \int_0^{p(x)} f(z)dz$$

RC Unbestimmtes Integral mit Substitution:
Man folge einfach den folgenden Schritten:

1. Bestimme $u := f(x)$
2. Berechne du und löse für dx: $du = f'(x)\Rightarrow dx = \frac{du}{f'(x)}$
3. Substituiere u und du in die ursprüngliche Gleichung
4. Wenn sich nicht alle x herauskürzen; löse für x in der Gleichung des ersten Schrittes
5. Setze Schritt 4 ein.
6. Löse das Integral
7. Rücksubstituiere x

Beispiel:
Gegeben sei

$$\int x\sqrt{3x+2}dx$$

1. $u=3x+2$
2. $du = 3\Rightarrow dx=\frac{du}{3}$
3. $\int x\sqrt{u}\frac{du}{3}$
4. $u=3x+2\Rightarrow x=\frac{u-2}{3}$
5. $\int\frac{u-2}{3}\sqrt{u}\frac{du}{3}$
6. Die letzte Gleichung kann man relativ einfach lösen:

$$\int\frac{u-2}{3}\sqrt u\frac{du}{3} = \frac19\int(u-2)\,u^{\frac12}du$$

$$=\frac19\int u^{\frac32}-2u^{\frac12} = \frac19\left[\frac{2u^{\frac52}}{5}-\frac{2\cdot 2u^{\frac32}}{3}\right]$$

$$=\frac{2}{45}u^{\frac52}-\frac{4}{27}u^{\frac32}$$

7.

$$\frac{2}{45}u^{\frac52}-\frac{4}{27}u^{\frac32} = \frac{2}{45}\,[3x+2]^{\frac52}-\frac{4}{27}\,[3x+2]^{\frac32}$$

RC Partielle Integration: DI-Methode:
Gegeben sein die zu integrierenden Funktion

$$\int fg$$

1. Wähle die zu integrierende Funktion f und die zu differenzierende g aus.
2. Fülle die Tabelle aus, bis:
   (a) man eine 0 in der differenzierenden Spalte erhält
   (b) Eine Reihe integrierbar wird
   (c) Eine Reihe kommt ein zweites mal vor

	D	I
$+$	f	g
$-$	f'	$\int g = g^{(-1)}$
$+$	f''	$g^{(-2)}$
$\dots$		
$\pm$	$f^{(n)}=0$	$g^{(-n)}$

3. (a) Das Ergebnis lässt sich nun von der Tabelle ablesen, indem man die diagonalen produkte (von oben nach unten) aufsummiert. Es ergibt sich also:

$$f\cdot g^{(-1)} - f'\cdot g^{(-2)} + \ldots \pm f^{(n-1)}\cdot g^{(-n)}$$

   (b) Das Ergebnis lässt sich nun ebenfalls ablesen in dem man zuerst die diagonalen Produkte aufsummiert. Dies tut man so lange bis man zur Reihe kommt, in der das Produkt integriert werden kann. Man nehme an $f^{(n)}\cdot g^{(-n)}$ ist einfach integrierbar, dann ergibt sich:

$$f\cdot g^{(-1)} - f'\cdot g^{(-2)} + \ldots \pm \int f^{(n)}\cdot g^{(-n)}$$

   (c) Das Ergebnis wird nun gleich berechnet wie bei (b), jedoch erhählt man eine Gleichung die man nach $\int fg$ auflösen kann.

RC Partialbruchzerlegung:

Seien P, Q Polynome mit $grad(P) < grad(Q)$ und Q mit der Produktzerlegung $Q(x) = \prod_{j=1}^{l}\left((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right)^{m_j}\prod_{i=1}^{k}(x-\gamma_i)^{n_i}$. Dann gibt es A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} reelle Zahlen mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{(A_{ij}+B_{ij}x)}{\left((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2\right)^j}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$$

Bei einer Partialbruchzerlegung geht man folgendermassen vor:

1. **Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Falls $grad(P) \geq grad(Q)$ wenden wir Polynomdivision an.**
2. **Q lässt sich nun als $Q(x) = \prod_{j=1}^{l}\left((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right)^{m_j}\prod_{i=1}^{k}(x-\gamma_i)^{n_i}$ zerlegen. Das sind die Komplexen und reelen Nullstellen mit ihrer vielfachheit.**
3. **Wir bilden nun die "hässliche" Summe von oben**
4. **Wir bestimmen mithilfe von Koeffizientenvergleich (Nennerpolynom Multiplizieren) die unbekannten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}.**

Hier ein einfaches Beispiel:

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

$\Rightarrow$ **Löse** $5x+1 = A(x+2)+B(x-1)$

$\Rightarrow$ **Setze** $x = -2,\ 1$

Mit mehreren Linearen Faktoren:

$$\frac{-2x^2+x+8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$\Rightarrow$ **Löse** $-2x^2+x+8 = A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$

Ohne reelle Nullstellen:

$$\frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$\Rightarrow$ **Löse** $2x^2-3x+3 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$

$\Rightarrow$ **Setze** $x = 0,\ 1,\ 2$

RC Rationale Funktionen Integrieren:

Wir betrachten einen Spezialfall der Partialbruchzerlegung. Gegeben sei eine rationale Funktion $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Wir nehmen an das $deg(Q(x)) = 1$ und sich damit $Q(x)$ schreiben lässt als $(x-\alpha)$. Wir wollen $\int\frac{P(x)}{Q(x)}$ berechnen

1. **Führe Polynomdivision $\frac{P(x)}{(x-\alpha)}$ aus. Wir nennen den Quotienten q und den Rest r wobei $deg(r) = 0$**
2. **Schreibe um zu:**
$$\int\frac{P(x)}{Q(x)} = \int\frac{q(x-\alpha)}{(x-\alpha)}+\int\frac{r}{(x-\alpha)}$$
3. **Kürze und Integriere Separat:**
$$\int\frac{q(x-\alpha)}{(x-\alpha)}+\int\frac{r}{(x-\alpha)} = \int q+r\int\frac{1}{(x-\alpha)}$$
4. **Es gelten generell:**
$$\int\frac{a}{x+b}dx = a\cdot\ln|x+b|$$
$$\int(ax+b)dx = \frac{ax^2}{2}+bx$$

Hier ein Beispiel:

$$\int\frac{x^2-6x+8}{x+1}$$

1.
$$(x^2-6x+8)x+1 = (x-7), r = -15$$

2.
$$\ldots = \int\frac{(x+1)(x-7)}{(x+1)}+\int\frac{-15}{(x-1)}$$

3.
$$\ldots = \int(x-7)-\int\frac{1}{(x+1)}$$

Anhang

Trigonometrie

Periodizität

- $\sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha)$ $\quad\cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha+\pi) = \tan(\alpha)$ $\quad\cot(\alpha+\pi) = \cot(\alpha)$

Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\quad\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\quad\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

Ergänzung

- $\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$ $\quad\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\quad\cot(\pi-\alpha) = -\cot(\alpha)$

Komplemente

- $\sin(\pi/2-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\quad\cos(\pi/2-\alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\quad\cot(\pi/2-\alpha) = -\cot(\alpha)$

Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) = 1-2\sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

Addition

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Subtraktion

- $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Multiplikation

- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

Reduktion

- $\sin^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
- $\cos^2(u) = \frac{1+\cos(2u)}{2}$
- $\tan^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{1+\cos(2u)}$
- $\cos^3(u) = \frac{3\sin(u)-\sin(3u)}{4}$
- $\sin^3(u) = \frac{3\sin(u)+\sin(3u)}{4}$
- $\tan^3(u) = \frac{3\sin(u)-\sin(3u)}{3\sin(u)+\sin(3u)}$
- $\cos^4(u) = \frac{3-4\cos(2u)+\cos(4u)}{8}$
- $\sin^4(u) = \frac{3+4\cos(2u)+\cos(4u)}{8}$
- $\tan^4(u) = \frac{3-4\cos(2u)+\cos(4u)}{3+4\cos(2u)+\cos(4u)}$
- $\cos^5(u) = \frac{10\sin(u)-5\sin(3u)+\sin(5u)}{16}$
- $\sin^5(u) = \frac{10\sin(u)+5\sin(3u)+\sin(5u)}{16}$
- $\tan^5(u) = \frac{10\sin(u)-5\sin(3u)+\sin(5u)}{10\sin(u)+5\sin(3u)+\sin(5u)}$

Diverse

- $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$
- $\cosh^2(\alpha)-\sinh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ **und** $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
- $\exp(iz) = \cos(z)+i\sin(z)$
- $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ $\quad\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$
- $sin(x) \leq x$

Werte

deg	0	30	45	60	90	180
rad	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**-1**
sin	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**
tan	**0**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	$+\infty$	**0**

Domain

$$\sin : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$\tan : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow [1, \infty[$$

$$\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

Grenzwerte

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$	$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x+k})^x = e^{-k}$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a), \forall a > 0$	$\lim_{x\to\infty} x^a q^x = 0, \forall 0 \leq q < 1$
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+na}{na}\right)^n = \sqrt[a]{e}$	$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x = \frac{b}{2\sqrt{a}}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = k$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$	$\lim_{x\to 0} x \log x = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$

Reihen

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$	$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$

Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a \ (a \neq -1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k\ln(a)} a^{kx}$	a^{kx}	$ka^{kx}\ln(a)$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
$-\ln\|\cos(x)\|$	$\tan(x) = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1+\tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln\|\sin(x)\|$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln\|x\| - 1)$	$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\|x\| - 1)$	$\log_a\|x\|$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

Besonders hässliche Ableitungen

- $(x^x)' = x^x \cdot (1 + \ln x) \quad x > 0$
- $((x^x)^x)' = (x^x)^x \, (x + 2x\ln(x)) \quad x > 0$
- $\left(x^{\left(x^x\right)}\right)' = x^{\left(x^x\right)} \left(x^{x-1} + \ln x \cdot x^x(1+\ln x)\right)$

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$
$\frac{1}{a\cdot(n+1)}(ax+b)^{n+1}$	$(ax+b)^n$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbf{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathbf{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathbf{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$x^x \ (x > 0)$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$
$\log_a\|x\|$	$\frac{1}{x\ln a} = \log_a(e)\frac{1}{x}$

Integrale

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
$\int f'(x)f(x) \ \mathbf{d}x$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \ \mathbf{d}x$	$\ln\|f(x)\|$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ \mathbf{d}x$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n \ \mathbf{d}x$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n \ \mathbf{d}x$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1} \ \mathbf{d}x$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1} \ \mathbf{d}x$	$\frac{1}{ap}\ln\|ax^p+b\|$
$\int \frac{ax+b}{cx+d} \ \mathbf{d}x$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\|cx+d\|$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \ \mathbf{d}x$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} \ \mathbf{d}x$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$
$\int \sqrt{a^2+x^2} \ \mathbf{d}x$	$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$
$\int \frac{1}{(x+a)^2}dx$	$-\frac{1}{a+x}$
$\int \frac{1}{(x+a)^3}dx$	$-\frac{1}{2(a+x)^2}$
$\int \frac{1}{(x+a)^t}dx$	$\frac{1}{(1-t)(x+a)^{t+1}}$
$\int \frac{x}{(x+a)^2}dx$	$\frac{a}{a+x} + \log\|a+x\|$
$\int \frac{x}{(x+a)^3}dx$	$-\frac{a+2x}{2(a+x)^2}$
$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$	$\frac{2\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{4ac-b^2}}$
$\int \sin(kx)\cdot\cos(kx)dx$	$-\frac{1}{4k}\cos(2kx) = \frac{-(\cos(x))^2}{2}$
$\int \cos^n(x)dx$	$\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}(x)dx + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$
$\int \sin^n(x)dx$	$\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}(x)dx - \frac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n}$
$\int \sin\cos dx$	$\frac{-1}{2}\cos^2$
$\int \frac{\cos}{\sin}dx$	$\log(\cos(x))$

Integration durch Substitution

Beispiel 1:Berechne

$$\int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln(x)}$$

Integration durch Substitution, wobei gilt

- $f(x) = x$
- $g(x) = \ln(\ln(x))$
- $g'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

und somit gilt

$$\int_{g(0)}^{g(1)} f(y)dy = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

Beispiel 2:
Gegeben sei

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$$

Wir formen um zu $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ **und somit haben wir** $u=(e^x+1)$ **und** $du=e^x$**. Wir integrieren**

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{e^x+1}$$

Beispiel 3:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

. Wir substituieren $u=\sqrt{x}$ **und** $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ **und somit ist** $c=\frac{1}{2} \Rightarrow c^{-1}=2$**. Es folgt**

$$\int \frac{1}{1+u^2}du = 2\arctan(u) = 2\arctan(\sqrt{x})$$

Beispiel 4:

$$\int_0^1 x\arcsin(x)dx$$

Wir substituieren:
- $u\arcsin(x), x=\sin(u)$
- $dx=\cos(u)du$

und erhalten:

$$\int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sin(u)\arcsin(\sin(u))\cos(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\cdot u\cdot\cos(u)du$$

Wir versuchen nun mit partielle Integration zwei Funktionen zu finden, die das Integral vereinfachen. Wir bemerken, dass die Funktion u **abgeleitet** 1 **ergibt und wir somit nur noch** $\sin\cos$ **"integrieren müssen". Denn wenn** $g(u)=u$ **und somit** $g'(u)=1$ **gilt ergibt das:**

$$\int u\sin(u)\cos(u) = fg - \int 1\cdot f$$

Da gilt $g=u$ **bleibt noch** $f=\sin\cos$**. Somit ergibt sich:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{u}_{g}\underbrace{\sin(u)\cos(u)}_{f'} = fg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\frac{\sin^2(u)}{2}}_{f}$$

Numerisch ergibt das folglich $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

Partielle Integration: DI-Methode

Fall (a):

$$I=\int x^2\sin(3x)dx$$

1. **integrierende:** $f=\sin(3x)$ **und differenzierende:** $g=x^2$
2.

	D	I
+	x^2	$\sin(3x)$
−	$2x$	$\frac{-1}{3}\cos(3x)$
+	2	$\frac{-1}{9}\sin(3x)$
−	0	$\frac{1}{27}\cos(3x)$

3.

$$I=\frac{-x^2}{3}\cos(3x)+\frac{2x}{9}\sin(3x)+\frac{2}{27}\cos(3x)+C$$

Fall (b):

$$I=\int x^4\ln(x)dx$$

1. **integrierende:** $f=\ln(x)$ **und differenzierende:** $g=x^4$
2.

	D	I
+	$\ln(x)$	x^4
−	$\frac{1}{x}x$	$\frac{1}{5}x^5$

3.

$$I=\ln(x)\cdot\frac{1}{5}x^5-\int\frac{1}{x}\frac{1}{5}x^5dx=\ldots=\frac{\ln(x)x^5}{5}-\frac{1}{25}x^5+C$$

Fall (c):

$$I=\int e^x\sin(x)$$

1. **integrierende:** $f=\sin(x)$ **und differenzierende:** $g=e^x$
2.

	D	I
+	e^x	$\sin(x)$
−	e^x	$-\cos(x)$
+	e^x	$-\sin(x)$

3.

$$\begin{aligned} I &= -e^x\cos(x)+e^x\sin(x)-I \\ 2I &= -e^x\cos(x)+e^x\sin(x) \\ I &= \frac{1}{2}\left[-e^x\cos(x)+e^x\sin(x)\right] \end{aligned}$$

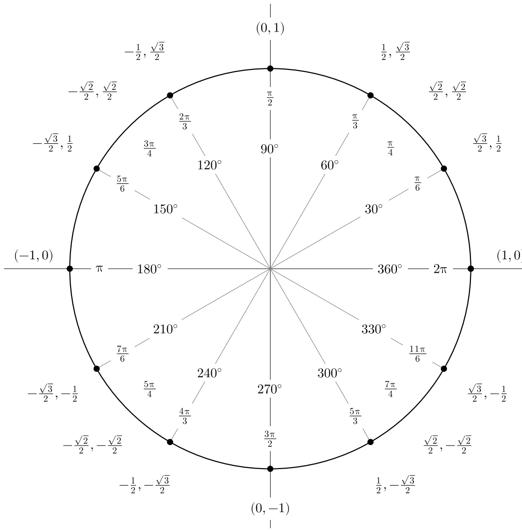
Limits

Zeigen Sie, dass für alle $t\in\mathbb{R}$ **gilt**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Da $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}\left(x^4\right)$ **und** $\log(1+x)=x+\mathcal{O}\left(x^2\right)$ **gilt für alle** $t\in\mathbb{R}$ **wenn** $n\to\infty$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n &= \exp\left(n\log\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\log\left(1-\frac{t^2}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(-\frac{t^2}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \end{aligned}$$



Function	x_0	T_∞	Constraints	First Terms
$\sin(x)$	0	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$		$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}\ldots$
$\cos(x)$	0	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$		$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}\ldots$
$\tan(x)$	0	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}$		$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}\ldots$
$\arccos(x)$	0	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$	$\lvert x\rvert<1$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\ldots$
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{2}-\arccos(x)$	$\lvert x\rvert\le1$	$\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\right)\ldots$
$\arctan(x)$	0	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$	$\lvert x\rvert\le1$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\ldots$
e^{x+c}	0	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^n}{n!}$		$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\ldots$
$\ln(x)$	1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$	$0<x\le2$	$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}\ldots$
$\ln(1+x)$	0	$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$		$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots$
$\sqrt{x+1}$	0	$-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$		$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}\ldots$
$\frac{ax}{(b-x)^2}$	0	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{b^{n+1}}$		$\frac{ax}{b^2}+\frac{2ax^2}{b^3}+\frac{3ax^3}{b^4}+\frac{4ax^4}{b^5}+\frac{5ax^5}{b^6}\ldots$