Lehrstuhl für STEUERUNGS- UND REGELUNGSTECHNIK	OPTIMIERUNGSVERFAHREN IN DER AUTOMATISIERUNGSTECHNIK
Technische Universität München	Übung 10: LQ-Regelung 2
Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss	

1. Aufgabe

Gegeben ist die lineare Strecke

$\underline{\dot{x}}(t) = A(t)\,\underline{x}(t) + B(t)\,\underline{u}(t) + \underline{z}(t)$

wobei $\underline{z}(t)\ ,\quad 0 \leq t \leq t_e$ eine bekannte Zeitfunktion (Störung) darstellt. Das zu minimierende Gütefunktional beträgt

$$J = \frac{1}{2}||\underline{x}(T)||_S^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^T (||\underline{x}||_Q^2 + ||\underline{u}||_R^2)\,dt\ ; \qquad S \geq 0\ , \quad Q \geq 0\ , \quad R > 0$$

1.1 Beweisen Sie, daß der optimale Steuergrößenvektor gegeben ist durch

$\underline{u}^*(t) = -R^{-1}B^TP(t)\underline{x}(t) - R^{-1}B^T\underline{p}(t)$

wobei $P(t)$ der Riccati-Matrix der LQ-Problemstellung ohne Störung entspricht! Leiten Sie das Bestimmungsgesetz für die Vektorfunktion $\underline{p}(t)$ ab. (Hinweis: Stellen Sie die notwendigen Bedingungen auf und machen Sie den Lösungsansatz $\underline{\lambda} = P(t)\underline{x} + \underline{p}(t)$.) Handelt es sich um eine Steuerung oder Regelung?

1.2 Nun sei ein Störgrößenmodell bekannt

$\underline{\dot{z}}(t) = F(t)\,\underline{z}(t)\ ; \quad \underline{z}$ meßbar.

Geben Sie die erweiterten Matrizen der neuen Problemstellung und die Struktur des optimalen Regelgesetzes an!

1.3 Nun sei $\underline{z}(t) \equiv \underline{0}$, aber das Gütefunktional sei gegeben durch

$$J = \frac{1}{2}||\underline{x}(T) - \underline{x}_s(T)||_S^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^T (||\underline{x}(t) - \underline{x}_s(t)||_Q^2 + ||\underline{u}(t)||_R^2)\,dt$$

wobei $\underline{x}_s(t)$ eine gegebene Sollwerttrajektorie ist (Folgeregelung). Zeigen Sie, daß das Problem mit Hilfe der Ergebnisse von 1.1 lösbar ist (Hinweis: Führen Sie die Transformation $\Delta\underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}_s(t)$ ein!). Geben Sie das optimale Regelgesetz an und besprechen Sie den Fall $\underline{x}_s \equiv \underline{\bar{x}}_s = konst.$

Zusatzaufgabe 1

Gegeben ist die Optimierungsaufgabe

$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{2\alpha t}(||\underline{x}||_Q^2 + ||\underline{u}||_R^2)\,dt$$

mit $\alpha \geq 0$, $\quad Q \geq 0$, $\quad R > 0$,

$[A,\ B]$ vollständig steuerbar

$[A,\ C]$ vollständig beobachtbar, $CC^T = Q$

Z.1 Überführen Sie die Aufgabenstellung in eine ordinäre LQ-Aufgabe durch die Transformation

$\underline{x}_\alpha(t) = \underline{x}(t)e^{\alpha t}$; $\quad \underline{u}_\alpha(t) = \underline{u}(t)e^{\alpha t}$

und geben Sie das optimale Regelgesetz an!

Z.2 Zeigen Sie, daß der optimale Regelkreis eine Stabilitätsreserve von mindestens $-\alpha$ aufweist!

Z.3 Nun sei $A = 2$, $B = 1$, $R = 1$, $Q = q$ ($n = 1$: eindimensionaler Fall). Bestimmen Sie das optimale Regelgesetz im Sinne des obigen Gütefunktionals. Bestimmen Sie den Pol des Regelkreises in Abhängigkeit von q und α.

Skizzieren Sie für $q = 1$ die Wurzelortskurve mit α als Parameter.

Zusatzaufgabe 2

Beweisen Sie, daß bei Problemen der Linearen-Quadratischen Optimierung der minimale Wert des Gütefunktionals durch $J^* = \dfrac{1}{2}(\underline{x}^0)^T P(0)\underline{x}^0$ gegeben ist.