1. Aufgabe

1.1 $H = \frac{1}{2}||\underline{x}||_Q^2 + \frac{1}{2}||\underline{u}||_R^2 + \underline{\lambda}^T(A\underline{x} + B\underline{u} + \underline{z})$

notwendige Bedingungen:

$H_{\underline{u}} \stackrel{!}{=} \underline{0} = R\underline{u} + B^T\underline{\lambda} \longrightarrow \underline{u} = -R^{-1}B^T\underline{\lambda}$

$\dot{\underline{x}} = H_{\underline{\lambda}} = A\underline{x} + B\underline{u} + \underline{z} = A\underline{x} - BR^{-1}B^T\underline{\lambda} + \underline{z}$ (i)

$\dot{\underline{\lambda}} = H_{\underline{x}} = -Q\underline{x} - A^T\underline{\lambda}$ (ii)

Ansatz: $\underline{\lambda} = P\underline{x} + \underline{p} \longrightarrow \dot{\underline{\lambda}} = \dot{P}\underline{x} + P\dot{\underline{x}} + \dot{\underline{p}}$ und (i), (ii)

$$\longrightarrow \underbrace{(\dot{P} + PA - PBR^{-1}B^TP + Q + A^TP)}_{\text{Riccati-Dgl.}}\underline{x} + \underbrace{\dot{\underline{p}} + (A - BR^{-1}B^TP)^T\underline{p} + P\underline{z}}_{\stackrel{!}{=} 0 \longrightarrow \underline{p}(t) \text{ (vgl. AB-11)}} = 0$$

Endbedingung $\underline{\lambda}(T) = S\underline{x}(T) = P(T)\underline{x}(T) + \underline{p}(T) \longrightarrow P(T) = S\ ; \quad \underline{p}(T) = \underline{0}$

$\longrightarrow u^*$ wie in Aufgabenstellung

$$u^* = \underbrace{-R^{-1}B^TP(t)\underline{x}}_{\text{Regelung}} - \underbrace{R^{-1}B^T\underline{p}(t)}_{\text{Störgrößenaufschaltung}} \qquad \blacksquare$$

Bemerkung: $\underline{z} = \underline{0} \longrightarrow \underline{p} = \underline{0} \longrightarrow$ Standard LQ.

1.2 Störgrößenmodell bekannt

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & F \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \underline{u}\ ;\ \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0\ ;\ \tilde{R} = R > 0\ ;\ \tilde{S} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$\longrightarrow$ Standard LQ-Problem mit $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\underline{x}}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$, $\tilde{S}$

$$\longrightarrow \text{optimales Regelgesetz: } \tilde{\underline{u}}^*(t) = -\tilde{K}(t)\tilde{\underline{x}}(t) = \underbrace{-\tilde{K}_1\underline{x}(t)}_{\text{Regelung}} - \underbrace{\tilde{K}_2\underline{z}(t)}_{\text{Störgrößenaufschaltung}}$$

1.3 Transformation $\Delta\underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}_s(t)$

$$\longrightarrow J = \frac{1}{2}||\Delta\underline{x}(T)||_S^2 + \frac{1}{2}\int_0^T (||\Delta\underline{x}(t)||_Q^2 + ||\underline{u}(t)||_R^2)\, dt \to \min$$

$$\Delta\dot{\underline{x}} = A\Delta\underline{x} + B\underline{u} \underbrace{- \dot{\underline{x}}_s(t) + A\underline{x}_s(t)}_{\hat{=}\underline{z}(t)} \longrightarrow \text{Lösung wie 1.1}$$

$\longrightarrow \underline{u}^*(t) = -K(t)[\underline{x}(t) - \underline{x}_s(t)] - \underline{k}(t)$

Zusatzaufgabe 1

Z.1 Transformation $\underline{x}_\alpha(t) = \underline{x}(t)e^{\alpha t}$; $\quad \underline{u}_\alpha(t) = \underline{u}(t)e^{\alpha t}$

$\dot{\underline{x}}_\alpha(t) = \dot{\underline{x}}(t)e^{\alpha t} + \underline{x}(t)\alpha e^{\alpha t} = \underbrace{(A + \alpha E)}_{A_\alpha}\underline{x}_\alpha + B\underline{u}_\alpha$

$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty [||\underline{x}_\alpha||_Q^2 + ||\underline{u}_\alpha||_R^2)\, dt \longrightarrow$ Standard LQ-Problem mit $A = A_\alpha$

optimales Regelgesetz: $\underline{u}_\alpha(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}_\alpha\underline{x}_\alpha(t)$ mit $\bar{P}_\alpha$ aus Lösung der stationären Riccati-Gleichung mit A_α, dann Rücktransformation $\longrightarrow \underline{u}(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}_\alpha\underline{x}(t)$

Z.2 $[A + \alpha E,\ B]$ vollständig steuerbar $\longrightarrow Rk_\alpha$ stabil $\longrightarrow$ Re $\{\Lambda_{\alpha,\ i}\} < 0 \quad \forall i$ ($\Lambda_{\alpha,\ i}$ sind die Pole des α-Regelkreises)

$\underline{x}(t) = e^{-\alpha t}\underline{x}_\alpha(t) \longrightarrow$ Re $\{\Lambda_i\} < -\alpha \quad \forall i$ (Λ_i sind die Pole des Regelkreises)

Z.3 Riccati-Gleichung $\bar{P}_\alpha^2 - 2(2+\alpha)\bar{P}_\alpha - q = 0 \longrightarrow \bar{P}_\alpha = 2 + \alpha + \sqrt{(2+\alpha)^2 + q}$

(vollständig steuerbar und beobachtbar!)

$u = -\bar{P}_\alpha x \longrightarrow$ Regelkreis $\dot{x} = -\underbrace{\left(\alpha + \sqrt{\underbrace{(2+\alpha)^2 + q}_{\geq 0}}\right)}_{\geq \alpha} x$