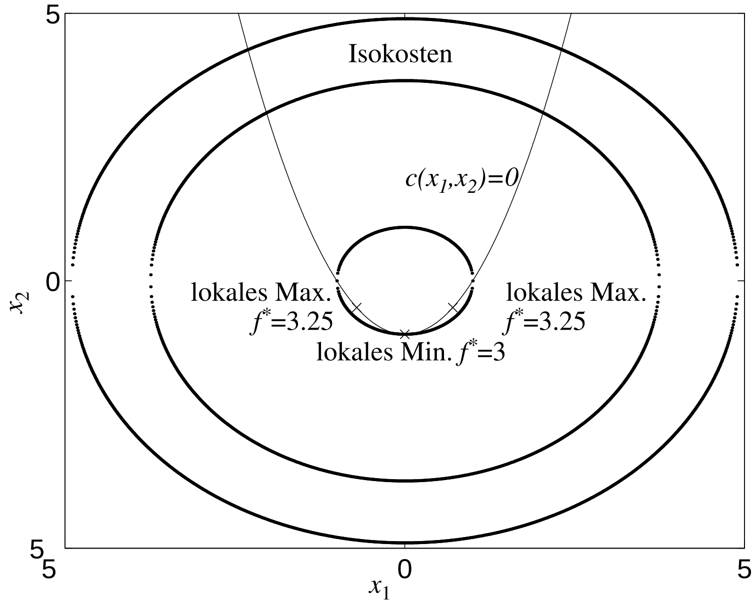
Lehrstuhl für STEUERUNGS- UND REGELUNGSTECHNIK Technische Universität München Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss	**OPTIMIERUNGSVERFAHREN IN DER AUTOMATISIERUNGSTECHNIK** Kurzlösung 2: Minimierung unter GNB

1. Aufgabe

1.1



1.2 Lagrange-Funktion $L(x_1,\ x_2,\ \lambda) = 4 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda(1 - x_1^2 + x_2)$

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= -2x_1(1+\lambda) &\overset{!}{=}\ 0 \\ L_{x_2} &= -2x_2 + \lambda &\overset{!}{=}\ 0 \\ L_{\lambda} &= 1 - x_1^2 + x_2 &\overset{!}{=}\ 0 \end{aligned} \qquad \longrightarrow \text{3 stationäre Punkte}$$

1. $x_1 = 0; \quad x_2 = -1; \quad \lambda = -2$
2. $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad x_2 = -\frac{1}{2}; \quad \lambda = -1$
3. $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}; \quad x_2 = -\frac{1}{2}; \quad \lambda = -1$

$$\nabla^2_{\underline{x}\,\underline{x}} L = \begin{bmatrix} -2(1+\lambda) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} D_1 = D_2 = 0 & \text{für } \lambda = -1 \\ \text{indefinit} & \text{für } \lambda = -2 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{hinreichende Bedingung} \\ \text{nicht erfüllt} \end{array}$$

Nun $\nabla^2_{\underline{x}\,\underline{x}} L$ u.d.R. $\mathcal{Y} = \{\underline{\delta x} \mid \nabla_{\underline{x}} c(\underline{x}^*)^T \underline{\delta x} = \underline{0}\}$ (siehe FS-1)

$$\begin{vmatrix} \Lambda I - \nabla^2_{\underline{x}\,\underline{x}} L & \underline{c}_{\underline{x}}^T \\ \underline{c}_{\underline{x}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Lambda + 2(1+\lambda) & 0 & -2x_1 \\ 0 & \Lambda + 2 & 1 \\ -2x_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \Lambda = \frac{-(2(1+\lambda) + 8x_1^2)}{4x_1^2 + 1}$$

$$\begin{array}{rll} \text{1. Lösung} & \Lambda = 2 > 0 & \longrightarrow \text{lokales Minimum} \\ \text{2./3. Lösung} & \Lambda = -\frac{4}{3} < 0 & \longrightarrow \text{lokales Maximum} \end{array}$$

1.3 aus $c(\underline{x})$ folgt $x_1^2 = 1 + x_2$; eingesetzt in $f(\underline{x}) \longrightarrow \overline{f}(x_2) = 3 - x_2 - x_2^2$

$$\overline{f}_{x_2} = 0 = -2x_2 - 1 = 0 \qquad x_2^* = -\frac{1}{2} \qquad x_1^* = \pm\sqrt{1 + x_2^*} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\overline{f}_{x_2 x_2} = -2 \longrightarrow$ lokales Maximum

Wo ist lokales Minimum aus 1.2?!

Eigentlich korrekt ist die folgende Elimination

$$x_1^2 = 1 + x_2 \ , \quad x_2 \geq -1 \qquad \longrightarrow \min_{x_2 \geq -1} \overline{f}$$

2. Aufgabe

2.1 Einsetzverfahren

$$\underline{x} = -A^{-1}B\underline{u} \qquad \underline{y} = C\underline{x}$$

$$\overline{f}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(CA^{-1}B\underline{u} + \underline{w})^T Q (CA^{-1}B\underline{u} + \underline{w}) + \frac{1}{2}\underline{u}^T R \underline{u} \quad \text{(ohne GNB)}$$

$$\nabla_{\underline{u}} \overline{f}^* \overset{!}{=} 0 \leftrightarrow \underline{u}^* = -[(CA^{-1}B)^T Q (CA^{-1}B) + R]^{-1} (CA^{-1}B)^T Q \underline{w}$$

$$\nabla^2_{\underline{u}\,\underline{u}} \overline{f} = (CA^{-1}B)^T \underbrace{Q}_{>0} (CA^{-1}B) + \underbrace{R}_{>0} > 0 \quad \longrightarrow \text{striktes lokales Minimum}$$

2.2 Lagrange-Multiplikator-Verfahren

$$L(\underline{y}, \underline{u}, \underline{\lambda}) = \frac{1}{2}(\underline{y} - \underline{w})^T Q (\underline{y} - \underline{w}) + \frac{1}{2}\underline{u}^T R \underline{u} + \underline{\lambda}^T (\underline{y} + CA^{-1}B\underline{u})$$

$$\nabla_{\underline{y}} L = Q(\underline{y} - \underline{w}) + \underline{\lambda} \overset{!}{=} \underline{0} \qquad \text{(i)}$$

$$\nabla_{\underline{u}} L = R\underline{u} + (CA^{-1}B)^T \underline{\lambda} \overset{!}{=} \underline{0} \qquad \text{(ii)}$$

$$\nabla_{\underline{\lambda}} L = \underline{y} + CA^{-1}B\underline{u} \overset{!}{=} \underline{0} \qquad \text{(iii)}$$

mit (i) – (iii) folgt $\underline{u}^*$ wie oben

$$\nabla^2_{\underline{x}\,\underline{x}} L = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} > 0 \longrightarrow$$ striktes lokales Minimum
(Achtung! Optimierungsvariablen sind $\underline{x} = [\underline{y}^T \ \underline{u}^T]^T$)

2.3 R groß $\longrightarrow \underline{u}^*$ klein ($R \to 0$ bedeutet keine Aufwandsbewertung)
Q klein $\longrightarrow \underline{u}^*$ klein ($Q \to 0$ bedeutet $\underline{u} \to 0$, technisch sinnlos)

2.4 $\underline{u}^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}^T \ ; \quad y^* = \frac{8}{9}$