Lehrstuhl für STEUERUNGS-UND REGELUNGSTECHNIK

Technische Universität München Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss

OPTIMIERUNGSVERFAHREN IN DER AUTOMATISIERUNGSTECHNIK

Kurzlösung 5: Lineare Regression, Kleinste Quadrate

1. Aufgabe

1.1
$$n = 2$$
: $y_j = \begin{pmatrix} 1 & z_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + w_j \Rightarrow \underline{y} = C\underline{x} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_N \end{pmatrix} \underline{x} + \underline{w}$

$$N = 4: \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1.2 \ f(\hat{\underline{x}}) &= \frac{1}{2} (\hat{\underline{x}}^T C^T C \hat{\underline{x}} - 2 \underline{y}^T C \hat{\underline{x}} + \underline{y}^T \underline{y}) \\ \text{OB1: } \nabla_{\hat{\underline{x}}} f(\underline{x}^*) &= \underline{0} \\ \nabla_{\hat{\underline{x}}} f(\underline{x}^*) &= C^T C \underline{x}^* - (\underline{y}^T C)^T \\ \Rightarrow x^* &= C^+ y \text{ mit } C^+ = (C^T C)^{-1} C^T \end{aligned}$$

Pseudoinverse C^+ minimiert quadratischen Fehler!

1.3
$$\nabla^2_{\hat{x}\,\hat{x}}f(\hat{\underline{x}})=C^TC>0\Rightarrow {\sf Minimum}$$

1.4 Durch Einsetzen von C in das Ergebnis von 1.2:

$$\underline{x}^* = \begin{pmatrix} 99 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

1.5
$$L(\underline{\hat{x}}, \underline{\lambda}) = \frac{1}{2}(\underline{\hat{x}}^T C^T C \underline{\hat{x}} - 2y^T C \underline{\hat{x}} + y^T y) + \underline{\lambda}^T (A \underline{\hat{x}} - \underline{b})$$

(1)
$$\nabla_{\hat{x}}L(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*) = C^TC\underline{x}^* - C^Ty + A^T\underline{\lambda}^* = \underline{0}$$

(2)
$$\nabla_{\underline{\lambda}}L(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*) = A\underline{x}^* - \underline{b} = \underline{0}$$

(1) nach \underline{x}^* auflösen und in (2) einsetzen $\Rightarrow \underline{\lambda}^*$

 $\underline{\lambda}^*$ in (1) einsetzen und nach \underline{x}^* auflösen

$$\Rightarrow \underline{x}^* = (C^T C)^{-1} C^T y + \underline{d}$$

$$\underline{d} = (C^T C)^{-1} A^T \left[A (C^T C)^{-1} A^T \right]^{-1} \left[\underline{b} - A (C^T C)^{-1} C^T y \right]$$

1.6 $\nabla^2_{\hat{x}\hat{x}}L(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*)=C^TC>0\Rightarrow$ isoliertes lokales Minimum

$$1.7 \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 2,0\\ -0,8 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \underline{x}^* = \begin{pmatrix} 99\\ 0,8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,0\\ -0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101,0\\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Kandidat für das Extremum \underline{x}^* setzt sich zusammen aus der unbeschränkten Lösung + einem Korrekturterm \underline{d} zur strikten Einhaltung der GNB. Dabei wird x_1 nach oben korrigiert, um den Wegfall von x_2 zu kompensieren. Die Verteilung der Messpaare wird durch eine waagrechte Gerade approximiert. Diese ist um den Mittelwert, gebildet aus den y_j , in Richtung der y-Achse verschoben.

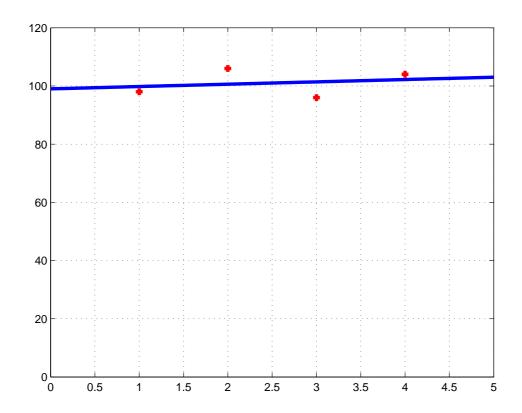


Abbildung 1: Lösung zu 1.4

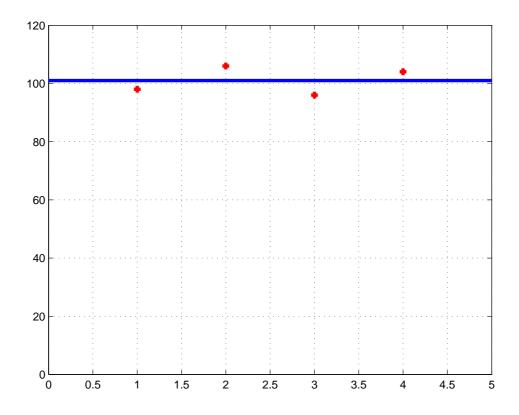


Abbildung 2: Lösung zu 1.7