1.1 Zeitoptimalität: $J = \int_0^{t_e} 1\,dt = t_e$

Prozess: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u) = A\underline{x} + Bu = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}$

Hamilton Funktion: $H(\underline{x}, u, \underline{\lambda}) = \phi + \underline{\lambda}^T \underline{f} = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

Minimum Prinzip: $H(\underline{x}^*, u^*, \underline{\lambda}^*, t) \leq H(\underline{x}^*, u, \underline{\lambda}^*, t)$

$$\longrightarrow \quad u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad \lambda_2(t) > 0 \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad \lambda_2(t) < 0 \end{cases}$$

Optimalitätsbedingungen:

$$\dot{\underline{\lambda}} = -\nabla_{\underline{x}} H = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_2 = -d_1 t + d_2 \quad \longrightarrow \quad \text{einmal umschalten}$$

$$\dot{\underline{x}} = -\nabla_{\underline{\lambda}} H = \underline{f} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_2(t) &= ut + c_1 \\ x_1(t) &= \frac{u}{2}t^2 + c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad \longrightarrow \quad c_1 = x_{20}, c_2 = x_{10}$$

$$\underline{x}(t_e) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_{20} &= -ut_e \\ x_{10} &= \tfrac{1}{2u} x_{20}^2 \end{aligned}$$

$$x_2(t) = ut + x_{20} \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{1}{u} x_2(t) - x_{20}$$
$$x_1(t) = \tfrac{x_2^2}{2u} - \tfrac{x_{20}^2}{2u} + x_{10} = \text{sgn}(u)\tfrac{x_2(t)^2}{2} + k \quad \text{mit} \quad k = -\,\text{sgn}(u)\tfrac{x_{20}^2}{2} + x_{10}$$

Die zwei Phasen-Diagramme für Bremsen $(u = -1)$ und Beschleunigen $(u = +1)$ sind in Abb. 1 skizziert. Es folgt für die Schaltkurve $S = \{\underline{x} | x_1 = -\text{sgn}(x_2)\frac{x_2(t)^2}{2}\}$.

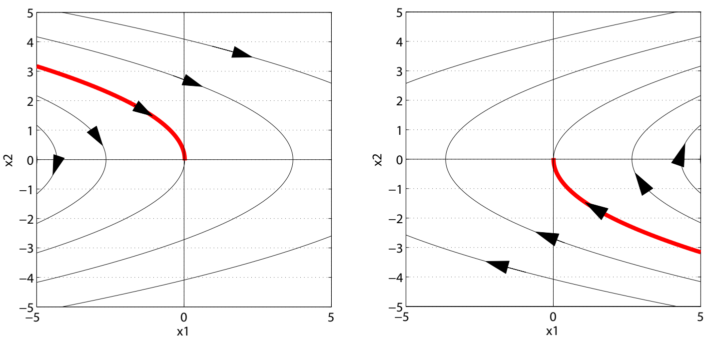


Abbildung 1: Phasenportrait für Bremsen (links) und Beschleunigen (rechts)

Fallunterscheidung für verschiedene Anfangszustände:

1. $u = -1$: $\quad x_1 + \mathsf{sgn}(x_2)\frac{x_2(t)^2}{2} > 0$
2. $u = +1$: $\quad x_1 + \mathsf{sgn}(x_2)\frac{x_2(t)^2}{2} < 0$

$\Rightarrow$ opt. Steuergesetz: $u^*(t) = -\mathsf{sgn}(x_1 + \mathsf{sgn}(x_2)\frac{x_2(t)^2}{2})$

1.2 Schaltkurve S: rot in Abb. 2

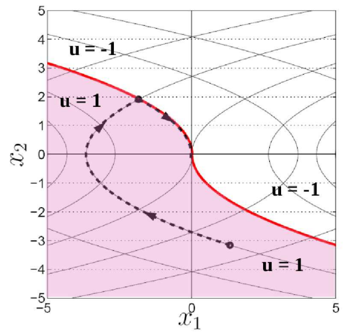


Abbildung 2: Schaltkurve und Trajektorie für Anfangszustand unterhalb der Kurve

1.3 a) $\underline{x}_0$ unterhalb S: $u^* = \begin{cases} 1 & t \le t_s \\ -1 & t > t_s \end{cases}$

$0 \le t \le t_s \; : \quad \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \underline{x}(0) = \underline{x}_0$

$$\begin{matrix} x_2 = t + k_1 \\ x_1 = \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + k_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} k_1 = x_{20} \\ k_2 = x_{10} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \\ t + x_{20} \end{pmatrix}$$

$t_s \le t \le t_e \; : \quad \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \quad \underline{x}(t_e) = \underline{0}$

$$\begin{matrix} x_2 = -t + k_1 \\ x_1 = -\frac{1}{2}t^2 + t_e t + k_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} k_1 = t_e \\ k_2 = -\frac{1}{2}t_e^2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^- \\ x_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + t_e t - \frac{1}{2}t_e^2 \\ -t + t_e \end{pmatrix}$$

$\underline{x}(t)$ stetig in $t_s \;\longrightarrow \underline{x}^+(t_s) = \underline{x}^-(t_s)$, also:

$$x_{10} + x_{20}t_s + \tfrac{1}{2}t_s^2 = -\tfrac{1}{2}t_e^2 + t_e t_s - \tfrac{1}{2}t_s^2$$
$$x_{20} + t_s = -t_s + t_e$$

$$\longrightarrow t_s = -x_{20} + \sqrt{\tfrac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}}, \; t_e = -x_{20} + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}}$$

b) $\underline{x}_0$ oberhalb S: $u^* = \begin{cases} -1 & t \le t_s \\ +1 & t > t_s \end{cases}$

analog zu a): $t_s = x_{20} + \sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}, \; t_e = x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}$

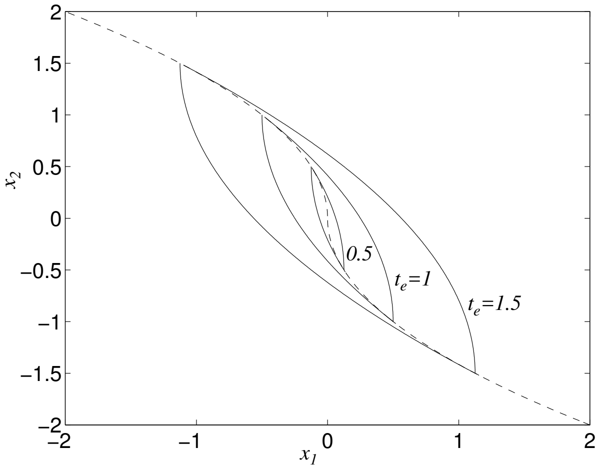
1.4 $t_e =$ konst. $\longrightarrow$ Auflösen von $t_e(x_{10}, x_{20})$ nach x_{10}:

a) $x_{10} = -\frac{1}{4}(t_e + x_{20})^2 + \frac{1}{2}x_{20}^2$

Parabel mit Scheitelpunkt $(-\frac{t_e^2}{2},\ t_e)$

b) $x_{10} = +\frac{1}{4}(t_e - x_{20})^2 - \frac{1}{2}x_{20}^2$

Parabel mit Scheitelpunkt $(\frac{t_e^2}{2},\ -t_e)$



Die Isochronen können sich nie schneiden, da die Isochronen für kleineres t_e innerhalb der Isochronen mit größerem t_e liegen.
Hinweis: Da das Kostenfunktional J linear von der Zeit abhängt, sind die Isokosten in diesem Fall gleich den Isochronen.