1. Aufgabe

1.1 $\mathcal{N}_k = \{\underline{x}(t) | 0 < t < \infty$, mit $f(\underline{x}(t)) = k\}$

$\rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\underline{x}(t)) = \nabla f(\underline{x}(t))^T \underline{\dot{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} k = 0$

$\rightarrow$ Gradienten stehen senkrecht auf Niveaulinien

Beispiel: $f(\underline{x}(t)) = {x_1}^2 + {x_2}^2$:

$\rightarrow$ Niveaulinien: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \sqrt{k} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Tangenten an Niveaulinien: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \sqrt{k} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$

$\rightarrow \nabla f(\underline{x}(t))^T \cdot (\underline{\dot{x}}(t)) = \begin{bmatrix} 2x_1(t) \\ 2x_2(t) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = 2 \cdot \sqrt{k} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}^T \sqrt{k} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} = 0$

1.2 Taylor-Entwicklung:

$$f(\underline{x}^{neu}) = f(\underline{x}^{alt} + \sigma \underline{d}) = f(\underline{x}^{alt}) + \nabla \underbrace{f(\underline{x}^{alt})^T \sigma \underline{d}}_{<0} + \underbrace{R((\sigma \underline{d})^2)}_{\text{wenn } \sigma \to 0\text{: } \to 0}$$

$\rightarrow f(\underline{x}^{alt} + \sigma \underline{d}) < f(\underline{x}^{alt})$, wenn σ klein

2. Aufgabe

2.1 Exakte Liniensuche:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} f(\underline{x}^{(k)} - \sigma \nabla f(\underline{x}^{(k)})) = 0$

$\Leftrightarrow \nabla f(\underline{x}^{(k)} - \sigma \nabla f(\underline{x}^{(k)}))^T \nabla f(\underline{x}^{(k)}) = 0$

$\Leftrightarrow \nabla f(\underline{x}^{(k+1)})^T \nabla f(\underline{x}^{(k)}) = 0$

2.2 Initiale Suchrichtung: $\underline{d}^{(0)} = -\nabla f^{(0)} = -\begin{bmatrix} 4x_1 - 4 \\ 2x_2 - 2 \end{bmatrix}_{x^{(0)}} = \begin{bmatrix} -16 \\ 12 \end{bmatrix}$

Bestimmung der Schrittweite über exakte Liniensuche:

$\sigma^{(0)} = \arg\min f(x^{(0)} + \sigma \underline{d}^{(0)}) = \arg\min f\left(\begin{bmatrix} 5 - 16\sigma \\ -5 + 12\sigma \end{bmatrix}\right)$

$\rightarrow \min(2(5 - 16\sigma)^2 + (-5 + 12\sigma)^2 - 4(5 - 16\sigma) - 2(-5 + 12\sigma) + 3) = \min(656\sigma^2 - 400\sigma + 68)$

$\rightarrow 1312\sigma - 400 = 0 \rightarrow \sigma = \frac{400}{1312} = 0{,}305$

Bestimmung des ersten Schätzwerts:

$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \sigma \underline{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 - 0{,}305 \cdot 16 \\ -5 + 0{,}305 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ -1{,}34 \end{bmatrix}$

Ist Minimum hinreichend angenähert?

$$|\nabla f(\underline{x}^{(1)})| = \left|\left|\begin{bmatrix} 4\cdot 0{,}12 - 4 \\ 2\cdot(-1{,}34) - 2 \end{bmatrix}\right|\right| = \left|\left|\begin{bmatrix} -3{,}52 \\ -4{,}68 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{3.52^2 + 4.68^2} = 5.856 >> \epsilon$$

Bestimmung der Suchrichtung über Verfahren von Fletcher und Reeves:

$$\beta^{(1)} = \frac{(\nabla f^T \nabla f)^{(1)}}{(\nabla f^T \nabla f)^{(0)}} = \frac{3{,}52^2 + 4{,}68^2}{16^2 + 12^2} = 0{,}0857$$

$$\underline{d}^{(1)} = -\nabla f^{(1)} + \beta^{(1)}\underline{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3{,}52 - 0{,}0857\cdot 16 \\ 4{,}68 + 0{,}0857\cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}15 \\ 5{,}71 \end{bmatrix}$$

Wiederum Bestimmung der Schrittweite über Exakte Liniensuche:

$$\sigma^{(1)} = \arg\min f(x^{(1)} + \sigma\underline{d}^{(1)}) = \arg\min f\begin{pmatrix} 0{,}12 + 2{,}15\sigma \\ -1{,}34 + 5{,}71\sigma \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 83.7\sigma + 34.29 = 0 \rightarrow \sigma = 0.41$$

Bestimmung des zweiten Schätzwerts:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \sigma\underline{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}12 + 0{,}46\cdot 2{,}15 \\ -1{,}34 + 0{,}46\cdot 5{,}71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$$

→ Minimum erreicht

Alternativ: Bestimmung der Suchrichtung über Verfahren von Polak und Ribiere:

$$\beta^{(1)} = \frac{(\nabla f^{(1)} - \nabla f^{(0)})^T \nabla f^{(1)}}{(\nabla f^T \nabla f)^{(0)}} = \frac{\begin{bmatrix} -3{,}52 - 16 \\ -4{,}68 + 12 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -3{,}52 \\ -4{,}68 \end{bmatrix}}{(16^2 + 12^2)} = 0{,}086$$

$$\underline{d}^{(1)} = -\nabla f^{(1)} + \beta^{(1)}\underline{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3{,}52 - 0{,}086\cdot 16 \\ 4{,}68 + 0{,}086\cdot 12\cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}14 \\ 5{,}71 \end{bmatrix}$$

→ Hier: praktisch identische Suchrichtung