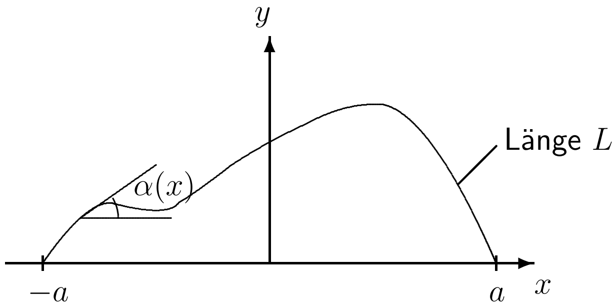
Auf einer Ebene soll ein Seil der Länge $2a < L \leq \pi a$ die beiden Eckpunkte einer Strecke der Länge $2a$ miteinander verbinden (siehe Skizze). Die Fläche zwischen Seil und Strecke soll maximiert werden.



1. Wie sieht das Gütefunktional $F[y(x)] = \int_{x_a}^{x_e} \phi(y(x), y_x(x))\mathrm{d}x$ aus, das die Fläche unter dem Seil in Abhängigkeit von der Form des Seils $y(x)$ berechnet.
2. In diesem Optimierungsproblem muss die Nebenbedingung berücksichtigt werden, dass die Seillänge L konstant ist. Dafür werden zwei Hilfsfunktionen eingeführt: Die Funktion $\alpha(x)$ beschreibt den Winkel, den die Tangente im Punkt x mit der Horizontalen einschließt. Die Funktion $l(x)$ beschreibt die bisherige Seillänge am Punkt x.

   Geben Sie eine Gleichungsnebenbedingung an, die $l(x)$ und $\alpha(x)$ verknüpft.

   Geben Sie zudem eine Gleichungsnebenbedingung an, die $y(x)$ und $\alpha(x)$ verknüpft.
3. Neue Optimierungsvariablen sind jetzt $y(x), \alpha(x)$ und $l(x)$. Geben Sie Anfangs- und Endbedingungen an.
4. Geben Sie die notwendigen Bedingungen für ein Minimum des um die Gleichungsnebenbedingungen erweiterten Gütefunktionals $\tilde{F}[\tilde{y}(x)] = \int_{x_a}^{x_e} \underbrace{\left\{\phi[\tilde{y}(x), \tilde{y}_x(x)] + \underline{\lambda}(x)^T \underline{f}[\tilde{y}(x),\ \tilde{y}_x(x)]\right\}}_{\Phi[\tilde{y}(x), \tilde{y}_x(x),\ \lambda(x),\ x]} \mathrm{d}x$ mit erweiterter Optimierungsvariable $\tilde{y}(x) = (y(x), \alpha(x), l(x))$ an.
5. Werten Sie die notwendigen Bedingungen aus. Welche Kurvenform führt zu einer maximalen Fläche zwischen Seil und Strecke? Wie groß ist diese Fläche?

   Hinweis:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}$$