Lehrstuhl für STEUERUNGS-**UND REGELUNGSTECHNIK**

Technische Universität München Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss

OPTIMIERUNGSVERFAHREN IN DER AUTOMATISIERUNGSTECHNIK

Kurzlösung 11

1. Aufgabe

1.1
$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^2 + u_k^2)$$

u.B.v.
$$x_{k+1} = x_k + u_k$$
; $x_0 = 2$; $x_N = x_4 = 0$

Stufe N=4:

$$J_4^* = 0$$

Stufe
$$N - 1 = 3$$
:

$$\frac{\text{Stufe }N-1=3\text{:}}{J_3^*=\min\limits_{u_3}\left\{\frac{1}{2}(x_3^2+u_3^2)\right\}}\\ \longrightarrow u_3^*=-x_3$$

u.B.v.
$$x_4 = x_3 + u_3 = 0$$

$$J_3^* = x_3^2$$

$$\begin{aligned} & \underline{\text{Stufe } N-2=2:} \\ & J_2^* = \min_{u_2} \left\{ x_3^2 + \frac{1}{2} (x_2^2 + u_2^2) \right\} \\ & \longrightarrow u_2^* = -\frac{2}{3} x_2 \end{aligned}$$

u.B.v.
$$x_3 = x_2 + u_2$$

$$J_2^* = \frac{5}{6}x_2^2$$

$$J_1^* = \min_{u_1} \left\{ \frac{5}{6} x_2^2 + \frac{1}{2} (x_1^2 + u_1^2) \right\} \qquad \text{u.B.v.} \quad x_2 = x_1 + u_1$$

$$\longrightarrow u_1^* = -\frac{5}{8} x_1 \qquad \qquad J_1^* = \frac{13}{16} x_1^2$$

u.B.v.
$$x_2 = x_1 + u_1$$

$$J_1^* = \frac{13}{16}x_1^2$$

Stufe 0:

$$J_0^* = \min_{u_0} \left\{ \frac{13}{16} x_1^2 + \frac{1}{2} (x_0^2 + u_0^2) \right\} \quad \text{u.B.v.} \quad x_1 = x_0 + u_0$$
$$\longrightarrow u_0^* = -\frac{13}{21} x_0 \qquad \qquad J_0^* = \frac{17}{21} x_0^2$$

u.B.v.
$$x_1 = x_0 + u_0$$

$$J_0^* = \frac{17}{21}x_0^2$$

1.2
$$u_0^* = -\frac{13}{21}x_0 = -\frac{26}{21} \approx -1.24$$

$$x_1^* = x_0 + u_0^* = 0.76$$

$$u_1^* = -\frac{5}{8}x_1^* = -0.475$$

$$x_2^* = x_1^* + u_1^* = 0.285$$

$$u_2^* = -\frac{2}{3} \cdot 0.285 = -0.19$$

$$x_3^* = 0.285 - 0.19 = 0.095$$

$$u_3^* = -0.095$$

$$x_4^* = 0$$

1.3 Stufe 3:

$$u_3^* = -x_3$$
 $\mathcal{X}_3 = \{x_3 \mid 0 \le x_3 \le 2\}$
 $x_4 = x_3 + u_3^* = 0 \in \mathcal{X}_4$

Stufe 2:

$$u_2^* = -\frac{2}{3}x_2$$
 $\mathcal{X}_2 = \{x_2 \mid 0, 4 \le x_2 \le 2\}$
 $x_3 = x_2 - \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{3}x_2 \longrightarrow \frac{4}{30} \le x_3 \le \frac{2}{3} \subset \mathcal{X}_3$

Stufe 1:

$$J_1^* = \min_{u_1} \left\{ \frac{5}{6} x_2^2 + \frac{1}{2} (x_1^2 + u_1^2) \right\} \qquad \text{ u.B.v.} \quad x_2 = x_1 + u_1 \ ; \quad 0.4 \le x_2 \le 2$$

Einsetzverfahren liefert Problem mit UNB \longrightarrow Lagrange-Funktion mit Kuhn-Tucker-Bedingungen; Fallunterscheidung für $\mu_1>0$, $\mu_1=0$!

$$\rightarrow u_1^* = \begin{cases} \frac{2}{5} - x_1 & \text{für } \frac{4}{5} \le x_1 \le \frac{16}{15} \\ -\frac{5}{8}x_1 & \text{für } \frac{16}{15} \le x_1 \le 2 \end{cases}$$

$$J_1^* = \begin{cases} x_1^2 - \frac{2}{5}x_1 + \frac{16}{75} & \text{für } \frac{4}{5} \le x_1 \le \frac{16}{15} \\ \frac{13}{16}x_1^2 & \text{für } \frac{16}{15} \le x_1 \le 2 \end{cases}$$

Stufe 0:

$$\begin{split} J_0^* &= \min_{u_0} \left\{ J_1^* + \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{2} u_0^2 \right\} & \text{u.B.v. } x_1 = x_0 + u_0 \ ; \qquad \frac{4}{5} \leq x_1 \leq 2 \ ; \qquad x_0 = 2 \end{split}$$

$$\text{Fall 1:} \quad \frac{4}{5} \leq x_1 \leq \frac{16}{15} \qquad \longrightarrow -\frac{6}{5} \leq u_0 \leq -\frac{14}{15} \\ J_{01}^* &= (u_0^* + 2)^2 - \frac{2}{5} (u_0^* + 2) + 0,213 + \frac{1}{2} u_0^{*2} + 2 \\ \text{u.B.v.} \quad -\frac{6}{5} \leq u_0 \leq -\frac{14}{15} \\ \text{Fall 1.a: } u_{01a}^* = -\frac{6}{5} \qquad \longrightarrow J_{01a}^* = 3,25 \\ \text{Fall 1.b: } u_{01b}^* = -\frac{14}{15} \qquad \longrightarrow J_{01b}^* = 3,36 \end{split}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall 2:} \quad & \frac{16}{15} \leq x_1 \leq 2 \\ & J_{02}^* = \frac{13}{16} (u_0^* + 2)^2 + \frac{1}{2} u_0^{*2} + 2 \quad \text{u.B.v.} - \frac{14}{15} \leq u_0 \leq 0 \\ & \text{Fall 2:} \ & u_2 = -\frac{14}{15} \\ & \longrightarrow \quad & u_0^* = -\frac{6}{5} \\ & J_0^* = 3.25 \end{aligned}$$