1. Aufgabe

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem

$$\min \frac{1}{2} ||\underline{y} - C\underline{x}||^2 = \min \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} (y_j - p(z_j, \underline{x}))^2$$

Dabei seien x_i ($i = 1, \ldots, n$) Parameter einer Funktion $p(z_j, \underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i z_j^{i-1}$ und (z_j, y_j) ($j = 1, \ldots, N$) sind Messpaare.

1.1 Geben Sie eine Matrix C an für $p(z_j, \underline{x}) = x_1 + x_2 z_j,\ N = 4$ und

z_j	y_j
1	98
2	106
3	96
4	104

Interpretieren Sie das Optimierungsproblem.

1.2 Stellen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung auf.

1.3 Zeigen Sie, dass die einzige Lösung der Optimalitätsbedingung $\underline{x}^*$ ein Minimum ist.

1.4 Berechnen Sie die Parameter x_1 und x_2 für das Problem aus 1.1 und zeichnen Sie die Lösung.

1.5 Zusätzlich gelte nun für die Parameter $\underline{x}$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \text{mit } A \in \mathrm{I\!R}^{M\times n},\ \underline{b} \in \mathrm{I\!R}^{M},\ \mathrm{rg}(A) = M$$

Berechnen Sie unter Berücksichtigung der GNB einen Ausdruck für das Extremum $\underline{x}^*$.

1.6 Zeigen Sie, dass der Kandidat $\underline{x}^*$ aus 1.5 ein Minimum ist.
Was können Sie über die Art des Minimums aussagen?

1.7 Betrachten Sie in 1.1 die GNB $A\underline{x} = \underline{b}$ mit $A = (0\ 1)$ und $b = 0$.
Berechnen Sie erneut x_1 und x_2.