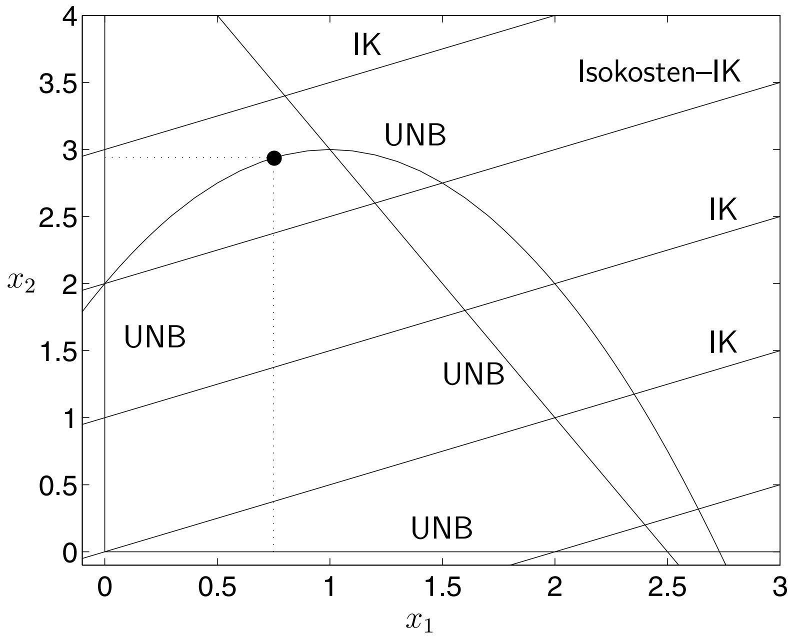
1. Aufgabe

1.1 $x_3 = x_1/2 \longrightarrow \tilde{f}(x_1,\ x_2) = \dfrac{1}{2}x_1 - x_2$

UNB: $2x_1 + x_2 - 5 \leq 0$ ; $\quad (x_1-1)^2 + x_2 - 3 \leq 0$ ; $\quad -x_1 \leq 0$ ; $\quad -x_2 \leq 0$

1.2




1.3 Parabel-UNB aktiv

$\longrightarrow$ Lagrange-Funktion

$L = 0{,}5x_1 - x_2 + \mu[(x_1-1)^2 + x_2 - 3]$

$\nabla_{\underline{x}} L = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu^* \begin{bmatrix} 2(x_1^*-1) \\ 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underline{0}$

$-1 + \mu^* = 0 \longrightarrow \mu^* = 1 > 0$

$0{,}5 + 2(x_1^* - 1) = 0 \longrightarrow x_1^* = 0{,}75$

$h'(\underline{x}^*)\mu^* \overset{!}{=} 0 = (x_1^*-1)^2 + x_2^* - 3 \longrightarrow x_2^* = 2{,}94$

$\longrightarrow$ Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt

$\nabla^2_{\underline{x}\,\underline{x}} L(\underline{x}^*, \mu^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$

$\longrightarrow$ notwendige Bedingung 2. Ordnung erfüllt; hinreichende Bedingung 2. Ordnung <u>nicht</u> erfüllt

$\nabla^2_{\underline{x}\,\underline{x}} L^*$ unter der Restriktion $\mathcal{Y} = \{\underline{\delta x} \mid h'^*_{\underline{x}}\underline{\delta x} = 0\}$

1 aktive UNB $\longrightarrow c_{x_1}(x_1^*) = 2(x_1^*-1) = -0{,}5$ ; $c_{x_2}(x_2^*) = 1$

$\begin{vmatrix} \Lambda - 2 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & \Lambda & 1 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \Lambda = 1{,}6 > 0 \longrightarrow$ Min

2. Aufgabe

2.1 $\tilde{T} := T \cdot d$

$$\min \tilde{T}(d_1,\ d_2) = d_1\left(1 + \frac{d_1^2}{3}\right) + d_2\left(2 + \frac{d_2^2}{3}\right)$$

u.B.v. $d_1 + d_2 = d\ ;\quad d_1 \geq 0\ ;\quad d_2 \geq 0$

2.2 Lagrange-Funktion

$$L = d_1\left(1 + \frac{d_1^2}{3}\right) + d_2\left(2 + \frac{d_2^2}{3}\right) + \lambda(d - d_1 - d_2) - \mu_1 d_1 - \mu_2 d_2$$

$$\nabla_{d_1} L = 1 + d_1^2 - \lambda - \mu_1 \overset{!}{=} 0 \tag{1}$$

$$\nabla_{d_2} L = 2 + d_2^2 - \lambda - \mu_2 \overset{!}{=} 0 \tag{2}$$

$$\nabla_{\lambda} L = d - d_1 - d_2 \overset{!}{=} 0 \tag{3}$$

$$\mu_1,\ \mu_2 \geq 0 \tag{4}$$

$$\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 = 0 \tag{5}$$

$$d_1,\ d_2 \geq 0 \tag{6}$$

2.3 Fall 1: $d_1^*,\ d_2^* > 0$

aus (5) folgt $\mu_1^* = \mu_2^* = 0$

aus (1), (2), (3) $\longrightarrow d_1^* = \dfrac{d^2+1}{2d} > 0 \quad \forall d > 0$

in (3) eingesetzt $\longrightarrow d_2^* = \dfrac{d^2-1}{2d} > 0 \quad \leftrightarrow d > 1$

Fall 2: $d_1^* = 0,\ d_2^* > 0 \longrightarrow \mu_2^* = 0$

aus (1), (2), (3) $\longrightarrow \mu_1^* = -1 - d^2 < 0$ geht nicht!

Fall 3: $d_1^* > 0,\ d_2^* = 0 \longrightarrow \mu_1^* = 0$

aus (1), (2), (3) $\longrightarrow \mu_2^* = 2 - \lambda = 1 - d^2 \geq 0 \leftrightarrow d \leq 1$

<u>Lösung</u>: $$\begin{bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} & \text{für } d \leq 1 \\ \dfrac{1}{2d}\begin{bmatrix} d^2+1 \\ d^2-1 \end{bmatrix} & \text{für } d > 1 \end{cases}$$

Hinreichende Bedingungen:

Fall 1: $\nabla_{\underline{x}\underline{x}} L = \begin{bmatrix} 2d_1 & 0 \\ 0 & 2d_2 \end{bmatrix} > 0$ weil $d_1,\ d_2 > 0 \longrightarrow$ Min

(wieder sind $\underline{x} = [d_1\ d_2]^T$ Optimierungsvariablen)

Fall 3: $\nabla_{\underline{x}\underline{x}} L$ u.d.R. $d - d_1 - d_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} \Lambda - 2d_1 & 0 & -1 \\ 0 & \Lambda - 2d_2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \Lambda = d_1 > 0 \quad \longrightarrow \text{Min}$$

2.4 $d = 0{,}5\ :\ \ d_1 = 0{,}5\ ;\ \ d_2 = 0\ ;\ \ t_1 = 1{,}08\ ;\ \ t_2 = 0\ ;\ \ T = 1{,}08$

$d = 2\ :\ \ d_1 = 1{,}25\ ;\ \ d_2 = 0{,}75\ ;\ \ t_1 = 1{,}52\ ;\ \ t_2 = 2{,}19\ ;\ \ T = 1{,}77$