1. Aufgabe

1.1 $n = 2$: $\quad y_j = (1 \;\; z_j)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + w_j \quad \Rightarrow \quad \underline{y} = C\underline{x} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_N \end{pmatrix} \underline{x} + \underline{w}$

$N = 4$: $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1.2 $f(\hat{\underline{x}}) = \frac{1}{2}(\hat{\underline{x}}^T C^T C \hat{\underline{x}} - 2\underline{y}^T C \hat{\underline{x}} + \underline{y}^T \underline{y})$
OB1: $\nabla_{\hat{\underline{x}}} f(\underline{x}^*) = \underline{0}$
$\nabla_{\hat{\underline{x}}} f(\underline{x}^*) = C^T C \underline{x}^* - (\underline{y}^T C)^T$
$\Rightarrow \underline{x}^* = C^+ \underline{y}$ mit $C^+ = (C^T C)^{-1} C^T$
Pseudoinverse C^+ minimiert quadratischen Fehler!

1.3 $\nabla^2_{\hat{\underline{x}}\hat{\underline{x}}} f(\hat{\underline{x}}) = C^T C > 0 \Rightarrow$ Minimum

1.4 Durch Einsetzen von C in das Ergebnis von 1.2:
$\underline{x}^* = \begin{pmatrix} 99 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

1.5 $L(\hat{\underline{x}}, \underline{\lambda}) = \frac{1}{2}(\hat{\underline{x}}^T C^T C \hat{\underline{x}} - 2\underline{y}^T C \hat{\underline{x}} + \underline{y}^T \underline{y}) + \underline{\lambda}^T (A\hat{\underline{x}} - \underline{b})$
(1) $\nabla_{\hat{\underline{x}}} L(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) = C^T C \underline{x}^* - C^T \underline{y} + A^T \underline{\lambda}^* = \underline{0}$
(2) $\nabla_{\underline{\lambda}} L(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) = A\underline{x}^* - \underline{b} = \underline{0}$
(1) nach $\underline{x}^*$ auflösen und in (2) einsetzen $\Rightarrow$ $\underline{\lambda}^*$
$\underline{\lambda}^*$ in (1) einsetzen und nach $\underline{x}^*$ auflösen
$\Rightarrow \underline{x}^* = (C^T C)^{-1} C^T \underline{y} + \underline{d}$
$\underline{d} = (C^T C)^{-1} A^T \left[A (C^T C)^{-1} A^T\right]^{-1} \left[\underline{b} - A (C^T C)^{-1} C^T \underline{y}\right]$

1.6 $\nabla^2_{\hat{\underline{x}}\hat{\underline{x}}} L(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) = C^T C > 0 \Rightarrow$ isoliertes lokales Minimum

1.7 $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2,0 \\ -0{,}8 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{x}^* = \begin{pmatrix} 99 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,0 \\ -0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101,0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Kandidat für das Extremum $\underline{x}^*$ setzt sich zusammen aus der unbeschränkten Lösung + einem Korrekturterm $\underline{d}$ zur strikten Einhaltung der GNB. Dabei wird x_1 nach oben korrigiert, um den Wegfall von x_2 zu kompensieren. Die Verteilung der Messpaare wird durch eine waagrechte Gerade approximiert. Diese ist um den Mittelwert, gebildet aus den y_j, in Richtung der y-Achse verschoben.

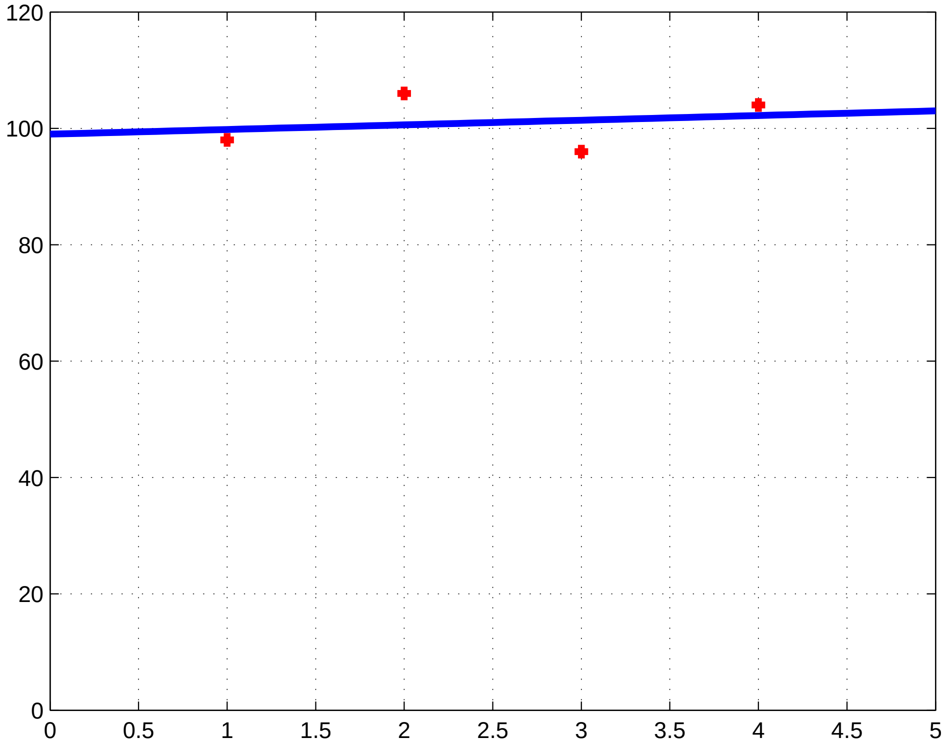

Abbildung 1: Lösung zu 1.4

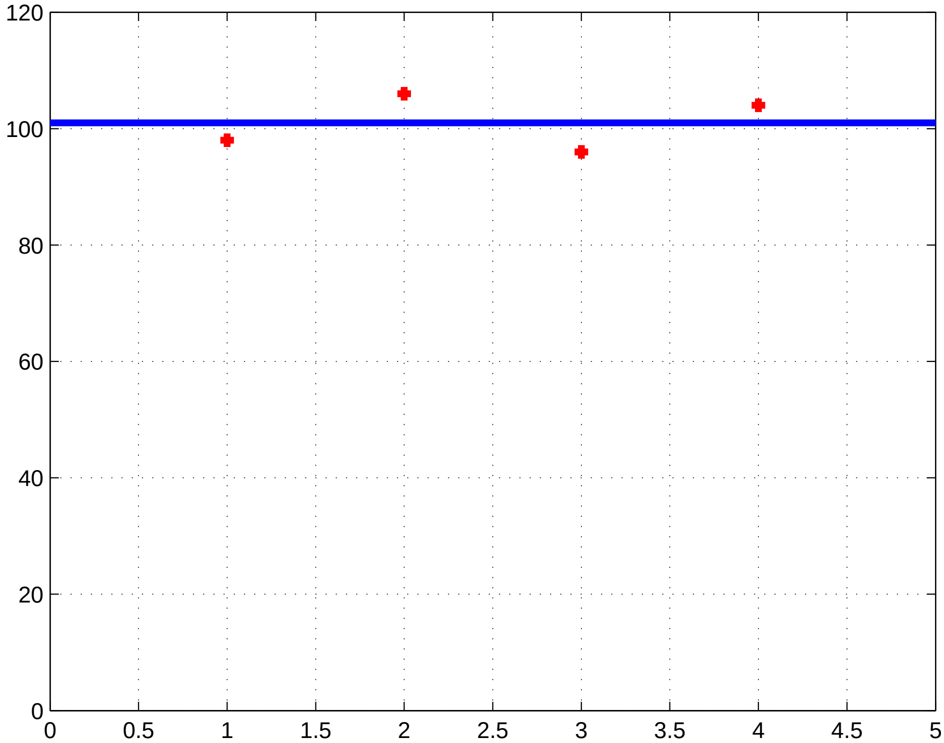

Abbildung 2: Lösung zu 1.7