EI 11: Übungsserie Komplexität

Aufgabe 1

Komplexitätsfunktionen werden oft mit Hilfe der O-Notation angegeben. Hierdurch ist es möglich, sich auf die wesentlichen Charakteristika einer Funktion zu beschränken. Genauer: Unter Ignorieren konstanter Faktoren wird eine asymptotische obere Schranke angegeben. Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden nur Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Für Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ schreiben wir $f = O(g)$, falls es eine Konstante c und eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass gilt: $f(n) \leq cg(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Beispiel: Sei $f(n) = 3n^2 + 7n + 11$. Dann ist f von der Ordnung $g(n) = n^2$, $f = O(n^2)$:

$$f(n) \leq 3n^2 + 7n^2 + 11n^2 \leq 11n^2 + 11n^2 + 11n^2 \leq 33n^2 = 33g(n).$$

Wir haben also für $c = 33$ und $n_0 = 0$ gefunden, dass $f(n) \leq cg(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $p_k(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ ein Polynom vom Grad k. Zeigen Sie in Anlehnung an das obige Beispiel, dass $p_k = O(n^k)$ gilt.

Aufgabe 2

Wir betrachten das folgende algorithmische Entscheidungsproblem *Bin Packing (BP)*:

Gegeben: Eine “Behältergrösse” $b \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Behälter $k \in \mathbb{N}$, “Objekte” $a_1, a_2, \ldots, a_n \leq b$ ($a_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, n$).

Gefragt: Können die Objekte so auf k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überläuft? (D.h.: gibt es eine Abbildung $f : \{1, \ldots n\} \to \{1, \ldots, k\}$, so dass für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt: $\sum_{f(i)=j} a_i \leq b$, d.h. die Summe der a_i, die im Behälter j landen ist $\leq b$).

Skizzieren Sie einen naiven Algorithmus, welcher BP entscheidet. Begründen Sie ferner, dass BP zur Komplexitätsklasse NP gehört.

Aufgabe 3

Eine aussagenlogische Formel (Boolescher Ausdruck) ist in disjunktiver Normalform (DNF), falls sie eine Disjunktion von Konjunktionstermen ist. Ein Konjunktionsterm wird ausschliesslich durch die konjunktive Verknüpfung von Literalen gebildet. Literale sind dabei nichtnegierte oder negierte Variablen. Eine Formel in DNF hat also die Form

$$\bigvee_i \bigwedge_j (\neg) x_{ij}$$

Beispiel: Die Formel auf Folie 14 im Skript ist in DNF.

Skizzieren Sie einen *effizienten* Algorithmus, welcher die Erfüllbarkeit einer Formel in DNF testet. *Hinweis:* Eine Disjunktion ist erfüllbar genau dann, wenn eines der Disjunktionsglieder erfüllbar ist …