

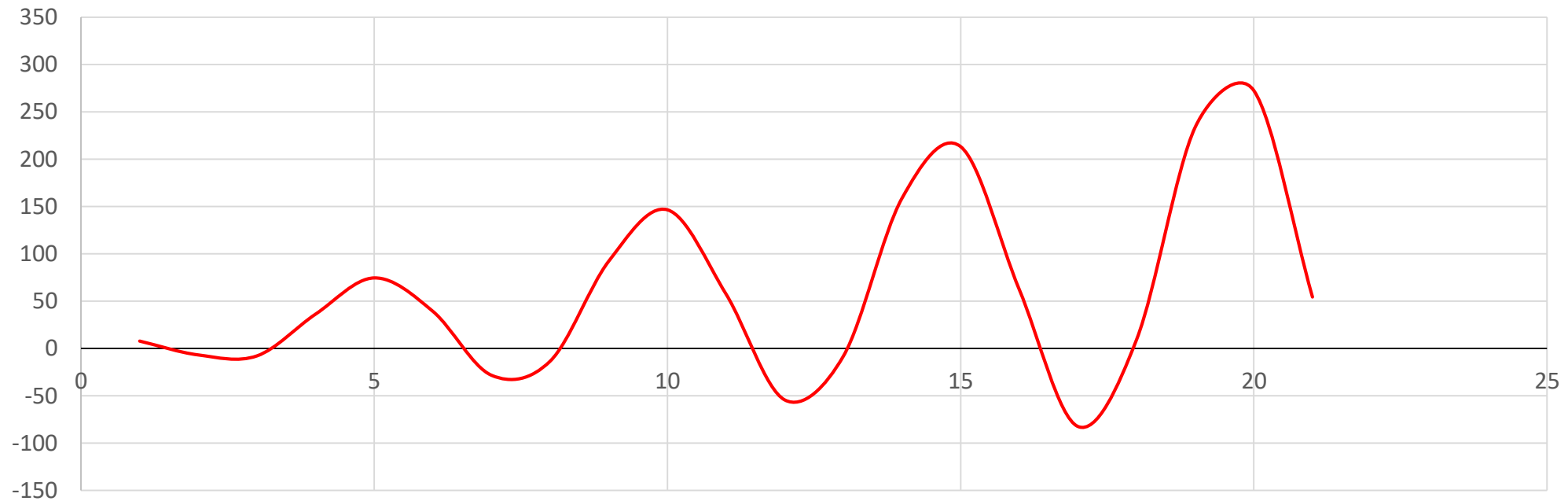
# Optimización

# ¿Qué es un problema de optimización?

- Es maximizar o minimizar una función  $F$  cualquiera sobre un rango de valores  $X$ .
- Puede o no interesar sobre que valores de  $X$  se alcanza el máximo o mínimo.
- Ejemplos de problemas:
  - Dada una red logística, minimizar el costo de envíos de producto a clientes decidiendo desde donde, cuando, cuanto y a quien enviar (ruteo de vehículos).
  - Decidir donde conviene colocar almacenes o plantas de producción para minimizar costos (problema de locación).
  - Decidir que empleado toma que tareas de modo de minimizar las horas de trabajo o maximizar la cantidad producida (programación de tareas).

# ¿Y qué forma puede tener la función?

$F(x)$  para los  $x$  que cumplen:  $2 \leq x$  y  $x \leq 22$



# ¿Qué cosas nos interesa de esta función?

- ¿Es lineal?  $\Rightarrow$  el óptimo “está en un límite” de  $X$
- ¿Las restricciones que deben cumplir los  $x$  son lineales?  $\Rightarrow$  El conjunto de valores de  $X$  es convexo
- Si no son lineales, ¿La función y el espacio de  $X$  son convexos?  $\Rightarrow$  un mínimo/máximo local es también global

# ¿Que significa que una función sea lineal en base a los parámetros?

- Sean las variables  $x, y$  pertenecientes a los reales

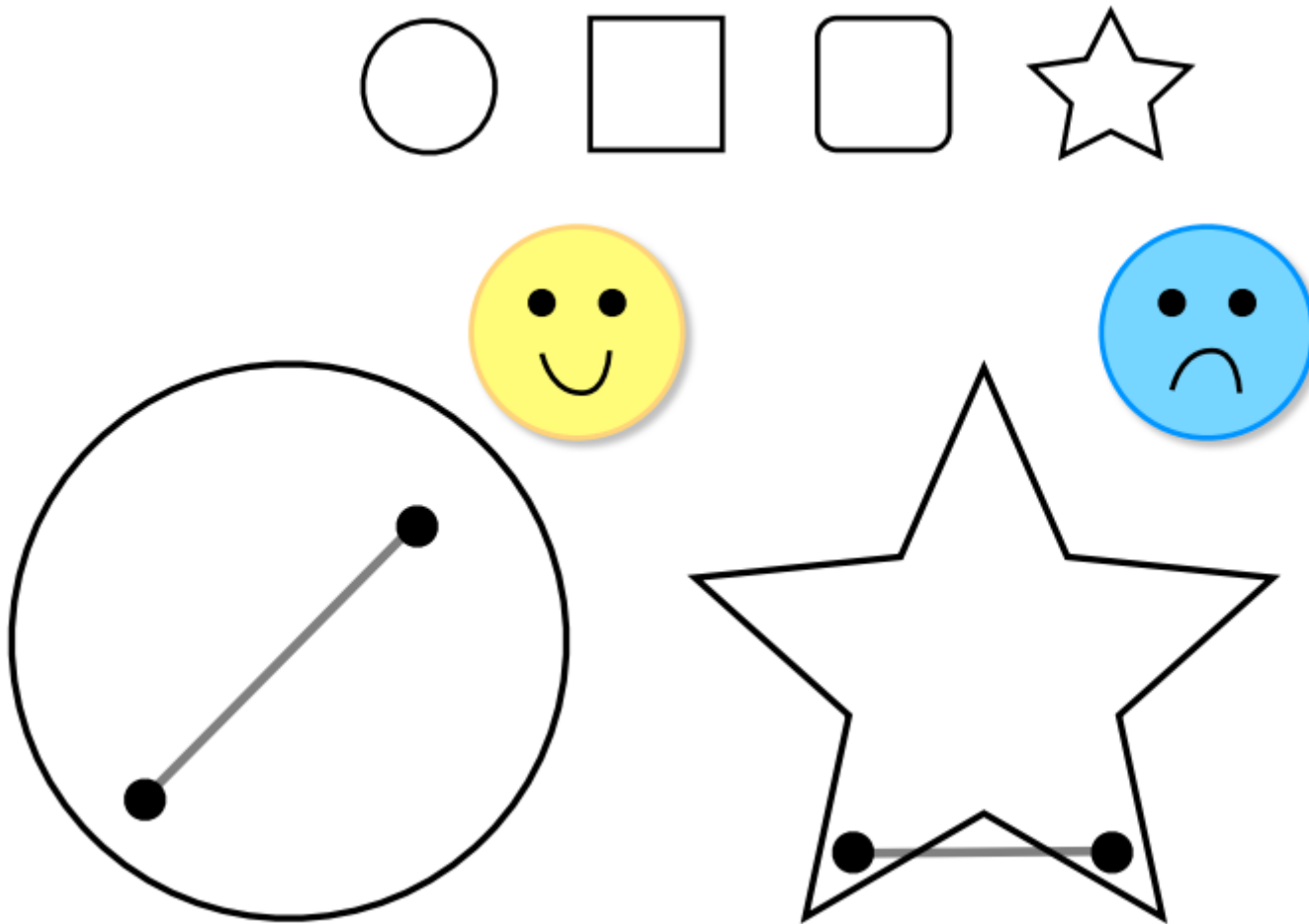
- ✓  $F(x, y) = a * x + b * y$  con  $a, b$  constantes

- ×  $F(x, y) = a * x^c + b * y^d$  con  $a, b, c, d$  constantes

- ×  $F(x, y) = a * x^y + b * y^x$  con  $a, b$  constantes

- ×  $F(x, y) = a * x^x + b * y^y$  con  $a, b$  constantes

¿Qué significa que un espacio es convexo?



# ¿Qué implica que las restricciones sean lineales?

Sean  $x$ ,  $y$  variables reales positivas.

- ¿Qué área cumple  $2 \leq x$ ?
- ¿Y con  $y \leq 5$ ?
- ¿Y con  $2 \geq x - y$ ?
- ¿Y la **intersección** de las 3?

Cada inecuación lineal define un **semiplano**.

Los **semiplanos** son **convexos**.

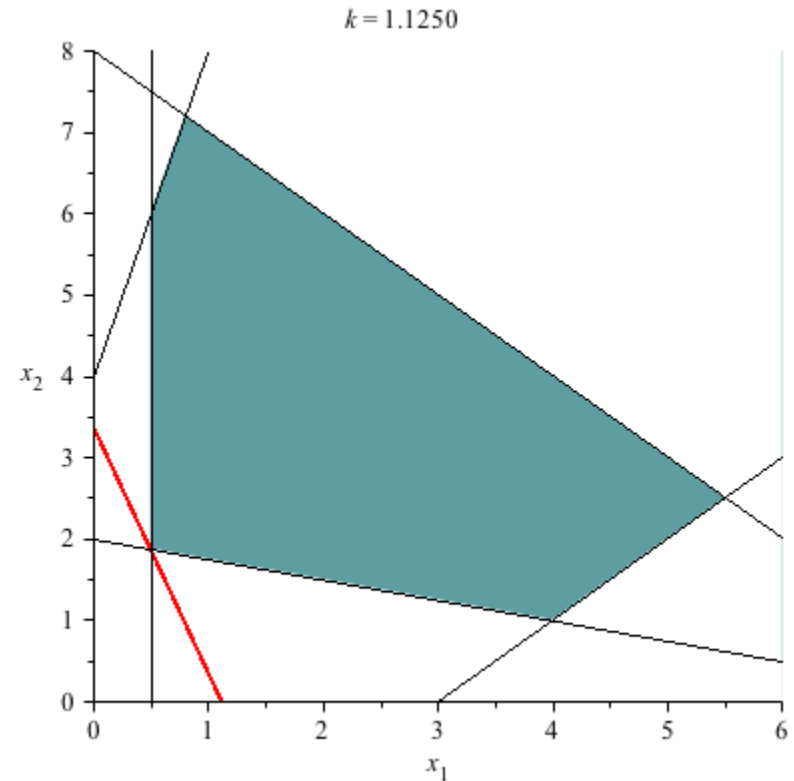
La **intersección** de semiplanos es un **semiplano**.

Entonces si mis restricciones son lineales, el dominio de mi función es un espacio convexo.

# ¿Cómo se comporta una función lineal en un espacio convexo?

Dada la función  $F(x,y) = x + y$

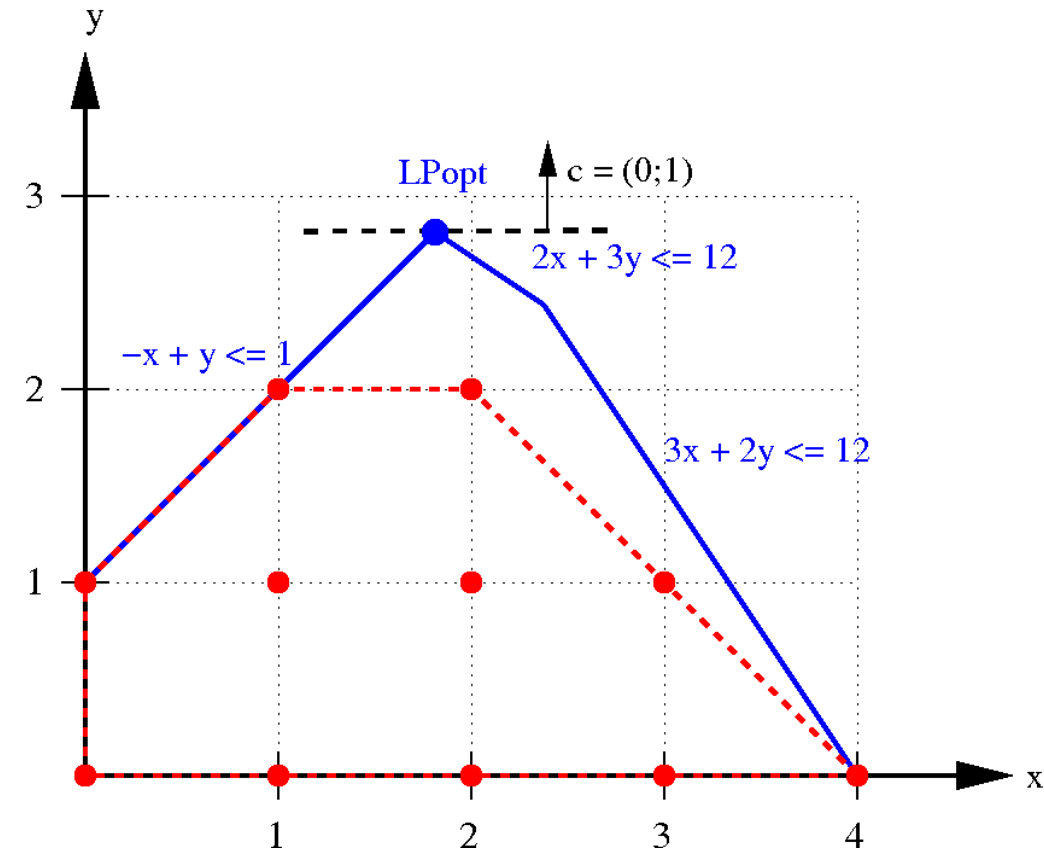
- ¿Cuál es la curva de nivel 0?
- ¿Cuál es la curva de nivel 1?
- ¿Cuál es la curva de nivel 5?
- ¿Qué son estas?





# ¿Qué pasa cuando pido que los argumentos sean enteros?

- El óptimo puede no estar en un vértice
- No necesariamente el punto entero más cercano al vértice óptimo del problema con reales es el óptimo entre los puntos enteros
- Nos vemos obligados a enumerar todos los puntos ¿Cuántos hay?



# ¿Cuál es la complejidad de un problema?

- Se dice que un problema es fácil cuando termina “rápido”, o en una cantidad polinomial de pasos respecto al tamaño del input.

# ¿Cuál es el tamaño input de un problema?

- Si el problema es encontrar el camino mínimo en un mapa. El tamaño del input es la cantidad de puntos y conexiones entre puntos.
- Si el problema es de envíos de pedidos desde almacenes a clientes, el tamaño es la cantidad de almacenes y pedidos.

# Ejemplos de problemas fáciles

- Encontrar el camino mínimo entre dos puntos en un mapa
- Encontrar la distribución de material de costo mínimo en una red logística (con costos unitarios)

# Ejemplos de problemas difíciles

- Encontrar un camino que pase por todos los puntos elegidos de un mapa una sola vez (camino hamiltoniano)
- Asumiendo que cada ruta entre puntos tiene costos, encontrar el camino hamiltoniano con menor costo asociado

¿Son igual de difíciles?

# Ejemplo de resolución de un problema con programación lineal

Tenemos una fábrica que vende arena de colores pintadas a mano para fiestas electrónicas.

- Las arena azul se venden a 10 \$ el kg y requiere 8 horas hombre.
- Las arena amarilla se venden a 5 \$ y requieren 3 horas hombre.
- Se asume que todo lo fabricado se puede vender.
- La cantidad de horas disponibles a la semana es 100.

¿Cuál es la estrategia de fabricación que nos conviene tomar?

# ¿Qué es lo que queremos decidir?

- ¿Cuánto queremos vender o cuánto queremos fabricar?
- ¿En qué unidades está “cuanto”?
- ¿Estas variables son reales o naturales?

Respuesta: (una posibilidad)

X: cantidad en kg producidos de arena azul

Y: cantidad en kg producidos de arena amarilla

# ¿Cuál es nuestro objetivo?

- ¿Maximizar o minimizar?
- ¿Cómo es la función?

Respuesta:

Maximizar

$$10 * X + 5 * Y$$

# ¿Cuáles son los posibles valores de X e Y?

- ¿Pueden ser reales o son enteros?
- ¿Pueden tomar cualquier valor o algo los acota?
- ¿Cómo podemos escribir esto?

Respuesta:

- $0 \leq X, 0 \leq Y$  (no puedo producir cantidades negativas)
- $8X + 3Y \leq 100$  (horas hombre disponible)



# Solución completa

Maximizar

$$10 X + 5 Y$$

Sujeto a:

$$8 X + 3 Y \leq 100$$

$$0 \leq X$$

$$0 \leq Y$$

$$X, Y \in \text{Reales}$$

Código en:

# Cosas interesantes que no vamos a demostrar

- Si nuestro problema podía ser modelado utilizando sólo programación lineal, entonces era un problema fácil.
- Aunque programación lineal sea sencillo de modelar y parezca más robusto, este tipo de problemas suele tener o permitir desarrollar algoritmos que explotan la estructura del problema y consiguen mejor performance (bien implementados).
  - Ejemplo: El algoritmo de Ford-Fulkerson para flujo mínimo/máximo vs simplex resolviendo un modelo de programación lineal.
- El algoritmo que se utiliza para resolver modelos de programación lineal se llama Simplex. Se basa en que podemos encontrar el óptimo en un vértice y “camina” entre ellos buscando mejorar la función objetivo.

# Resolvamos otro problema de ejemplo

Tenemos una empresa que reparte arena de sólo un tipo desde distintos almacenes a clientes. Se conocen las distancias de todos los almacenes a todos los clientes. No se interesa modelar capacidades de envío. El costo es unitario.

# Extensión

- Hay un stock disponible en cada almacén de arena
- Puede que la suma de los pedidos sobrepase la suma de los stocks

¿Qué pasa con nuestro problema?

¿Hay nuevas variables?

¿Hay nuevas restricciones?

# Extensión

- Si no atendemos el pedido de un cliente, tenemos riesgo de perderlo. Pero el cliente no acepta envíos parciales para abastecer la orden, recibe todo o nada. Por lo que de no poder abastecer a un cliente, no nos interesa enviarle material alguno. El costo por quebrar ahora es fijo.
- ¿Qué pasa con el problema ahora?
- ¿Hay nuevas variables?
- ¿Hay nuevas restricciones?
- ¿Seguimos con números reales?