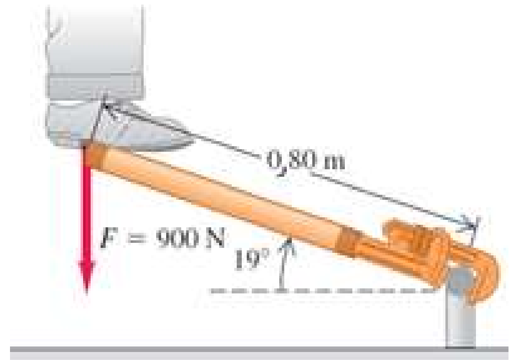
Guía 7: dinámica del movimiento rotacional

Ejercicio 1: Un plomero aficionado, que no puede aflojar una junta, encastra un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose sobre él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0,80 m, y el mango y el tubo forman un ángulo de 19° con la horizontal. Calcule la magnitud y la dirección del torque que el plomero aplica en torno al centro de la junta.

Datos:



$F := 900\ \mathrm{N}$

$r := 0.80\ \mathrm{m}$

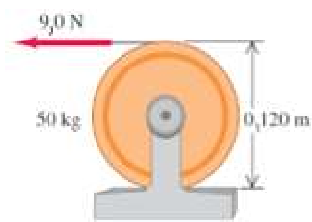
$\theta := 19\ °$

$$\tau := r \cdot F \cdot \sin(109\ °) = 681\ \mathrm{N\ m}$$

La dirección del torque es hacia afuera, según la regla de la mano derecha

Ejercicio 2: La figura muestra la situación que analizamos anteriormente usando métodos de energía. Se enrolla un cable varias veces en un cilindro sólido uniforme de 50 kg con diámetro de 0,120 m, que puede girar sobre su eje. Se tira del cable con una fuerza de 9,0 N. Suponiendo que el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, ¿qué aceleración tiene?

Datos:



$m := 50\ \mathrm{kg}$

$D := 0.120\ \mathrm{m}$ $\qquad R := \dfrac{D}{2} = 0.06\ \mathrm{m}$

$F := 9.0\ \mathrm{N}$

$$\tau = \alpha \cdot I$$

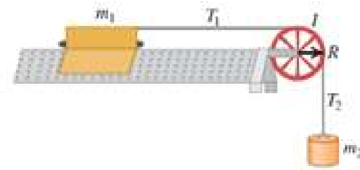
$$\alpha = \frac{\tau}{I}$$

$$\alpha := \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2} = 6\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_t := \alpha \cdot R = 0.36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

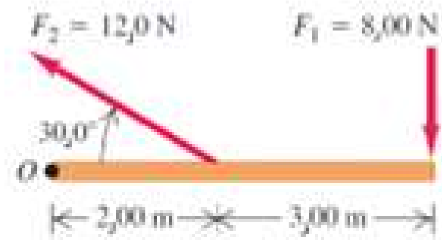
Ejercicio 3: La figura muestra un deslizador de masa m1 que se mueve sin fricción sobre un riel de aire horizontal, sujeto a un objeto de masa m2 con un cordón sin masa. La polea tiene radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. Cuando se suelta, el objeto colgante acelera hacia abajo, el deslizador acelera a la derecha y el cordón gira la polea deslizarse ni estirarse. Ordene, de mayor a menor, las magnitudes de las siguientes fuerzas que actúan durante el movimiento. i) la fuerza de tensión (magnitud T1) en la parte horizontal del cordón; ii) la fuerza de tensión (magnitud T2) en la parte vertical del cordón; iii) el peso m2 g del objeto colgante

Respuesta: iii), ii), i) Para que el objeto colgante de masa m2 acelere hacia abajo, la fuerza neta sobre él debe ser hacia abajo. Por lo tanto, la magnitud m2g de la fuerza del peso hacia abajo debe ser mayor que la magnitud T2 de la fuerza de tensión hacia arriba. Para que la polea tenga aceleración angular en sentido horario, la torca neta sobre la polea debe ser en sentido horario. La tensión T2 tiende a girar la polea en sentido horario, en tanto que la tensión T1 tiende a girar la polea en sentido antihorario. Ambas fuerzas de tensión tienen el mismo brazo de palanca R, de manera que hay una torca T2R en sentido horario y una torca T1R en sentido antihorario. Para que la torca neta sea en sentido horario, T2 debe ser mayor que T1. Por consiguiente, m2g > T2 > T1.



Ejercicio 4: Calcule el momento neto alrededor del punto O para las dos fuerzas aplicadas como en la figura. La varilla y las dos fuerzas están en el plano de la página.

Datos:



$F_1 := 8.00\ \mathrm{N}$

$F_2 := 12.0\ \mathrm{N}$

$\alpha_2 := 30.0\ °$

$l_1 := 5.00\ \mathrm{m}$

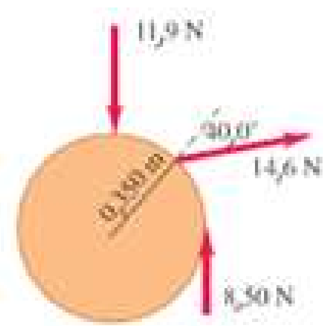
$l_2 := 2.00\ \mathrm{m}$

$$\tau := F_2 \cdot \sin\left(\alpha_2\right) \cdot l_2 - F_1 \cdot l_1 = -28\ \mathrm{N\ m}$$

Sentido horario

Ejercicio 5: Se aplican tres fuerzas a una rueda con radio de 0,350 m, como se indica en la figura. Una fuerza es perpendicular al borde, otra es tangente a éste y la otra forma un ángulo de 40,0° con el radio. ¿Cuál es el torque neto sobre la rueda debido a estas tres fuerzas para un eje perpendicular a la rueda y que pasa por su centro?

Datos:



$F_1 := 11.9\ \mathrm{N}$

$F_2 := 14.6\ \mathrm{N}$ $\quad \alpha_2 := 40.0\ °$

$F_3 := 8.50\ \mathrm{N}$

$r := 0.350\ \mathrm{m}$

$$\tau := F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot r \cdot \sin\left(40\ °\right) + F_3 \cdot r = -0.31\ \mathrm{N\ m}$$

Ejercicio 6: El volante de un motor tiene momento de inercia de 2,50 kg · m2 alrededor de su eje de rotación. ¿Qué torque constante se requiere para que alcance una rapidez angular de 400 rpm (rev/min) en 8,00 s, partiendo del reposo?

Datos:

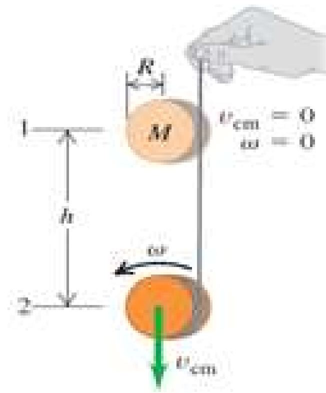
$I := 2.50\ \mathrm{kg\ m}^2$ $\qquad n_2 := 400\ \mathrm{rpm}$ $\qquad t := 8.00\ \mathrm{s}$

$\omega_2 := n_2 = 41.9\ \dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

$$\alpha := \frac{\omega_2 - 0}{t} = 5.24\ \frac{rad}{s^2}$$

$$\tau := I \cdot \alpha = 13.1\ N\ m$$

Ejercicio 6 bis: Se hace un yoyo burdo enrollando un hilo varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R. Se sostiene el extremo del hilo fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El hilo se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez vcm del centro de masa del cilindro sólido después de caer una distancia h. Además, calcule la aceleración y la tensión de la soga usando las consideraciones dinámicas del movimiento.



Datos:

$M \quad R \quad h$

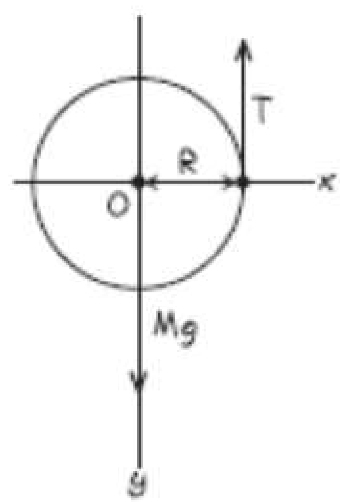
Como el cilindro rueda sin resbalar ni estirarse, no hay pérdida de energía mecánica
Por lo tanto se puede usar conservación de la energía mecánica.

$$M\, g_e \cdot h = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

$$M\, g_e \cdot h = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2\right) \cdot \left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2$$

$$M\, g_e \cdot h = \frac{3}{4} \cdot M \cdot v_{CM}^2$$

$$v_{CM} := \sqrt{\frac{4\, g_e \cdot h}{3}}$$



Para la segunda parte

$$\Sigma F_y = m \cdot a_y$$

$$M\, g_e - T = M \cdot a_y \qquad (1)$$

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha$$

$$T \cdot R = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \frac{a_y}{R} \qquad (2)$$

Despejando T de (1) y reemplazando en (2) $\quad T = M\, g_e - M \cdot a_y \quad (3)$

$$\left(M\, g_e - M \cdot a_y\right) \cdot R = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \frac{a_y}{R}$$

$$M \cdot \left(g_e - a_y\right) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot a_y$$

$$g_e - a_y = \frac{1}{2} \cdot a_y$$

$$a_y := \frac{2}{3} g_e$$

Reemplazando en (3)

$$T := \frac{1}{3} \cdot M\, g_e$$

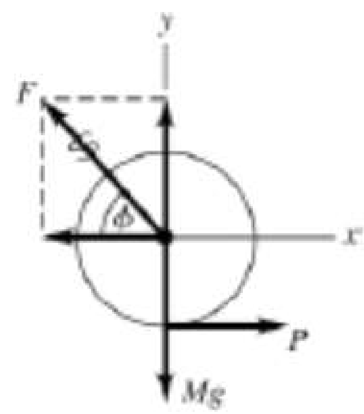
Ejercicio 7: Un cordón se enrolla en el borde de una rueda sólida uniforme de 0,250 m de radio y masa de 9,20 kg. Se tira del cordón con una fuerza horizontal constante de 40,0 N hacia la derecha, sacando el cordón tangencialmente de la rueda, la cual está montada con cojinetes sin fricción en un eje horizontal que pasa por su centro. a) Calcule la aceleración angular de la rueda y la aceleración de la parte del cordón que ya se haya retirado de la rueda. b) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza que el eje ejerce sobre la rueda. c) ¿Por qué las respuestas a los incisos a) y b) cambiarían si el tirón fuera hacia arriba en vez de horizontal?

Datos:

$R := 0.250\ \mathrm{m}$

$M := 9.20\ \mathrm{kg}$

$P := 40.0\ \mathrm{N}$



$$\alpha = \frac{\tau}{I}$$

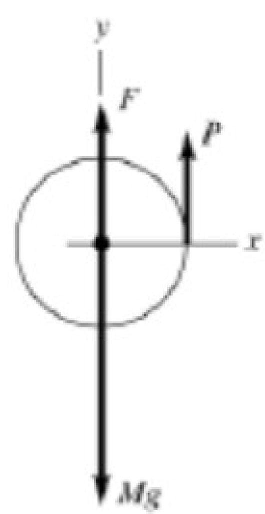
$$\alpha := \frac{P \cdot R}{\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2} = 34.8\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a := \alpha \cdot R = 8.7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$F_{Resultante} := \sqrt{P^2 + \left(M\, g_e\right)^2} = 98.7\ \mathrm{N}$$

$$\theta_{Resultante} := \mathrm{atan}\left(\frac{M\, g_e}{P}\right) = 66.1\ \mathrm{deg}$$

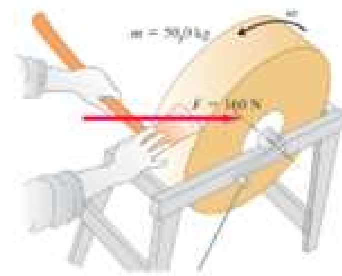
En el caso de que la fuerza se ejerza hacia arriba, el torque no cambia, así que la respuesta al punto a no cambia. En cuanto al punto c, el diagrama de fuerzas es el de la figura.



$$F := -P + M\, g_e = 50.2\ \mathrm{N}$$

Ejercicio 8: Una piedra de afilar en forma de disco sólido con 0,520 m de diámetro y masa de 50,0 kg gira a 850 rpm. Usted presiona un hacha contra el borde de la piedra con una fuerza normal de 160 N, y la piedra se detiene en 7,50 s. Calcule el coeficiente de fricción entre el hacha y la piedra. Ignore la fricción de los cojinetes.

Datos:



$D := 0.520\ \mathrm{m}$ $\qquad R := \dfrac{D}{2} = 0.26\ \mathrm{m}$

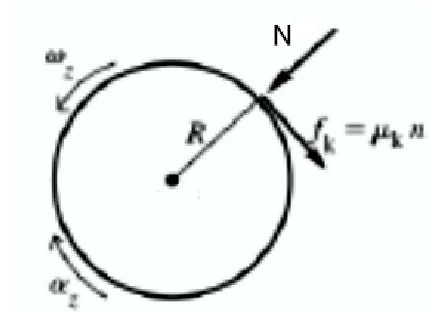
$M := 50.0\ \mathrm{kg}$

$n := 850\ \mathrm{rpm}$ $\qquad \omega := n = 89\ \dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

$N := 160\ \mathrm{N}$

$t := 7.50\ \mathrm{s}$

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha$$



El torque es provocado por la fuerza de fricción y sería negativo de acuerdo a la convención adoptada (positivo en sentido antihorario)

$$\alpha := \frac{0 - \omega}{t} = -11.9\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

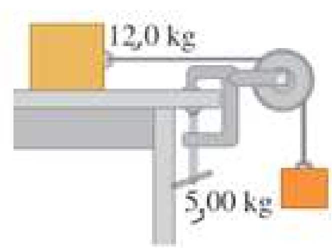
$$-\left(F_r \cdot R\right) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha$$

$$-\left(\mu \cdot N \cdot R\right) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha$$

$$\mu := \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha}{-N \cdot R} = 0.482$$

Ejercicio 9: Una caja de 12,0 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unida a otra de 5,00 kg de masa con un alambre delgado y ligero que pasa por una polea sin fricción. La polea tiene la forma de un disco sólido uniforme con masa de 2,00 kg y diámetro de 0,500 m. Después de que el sistema se libera, calcule a) la tensión en el alambre en ambos lados de la polea, b) la aceleración de la caja, y c) las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el eje ejerce sobre la polea.

Datos:



$m_1 := 12.0\ \mathrm{kg}$

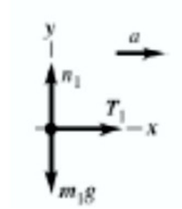
$m_2 := 5.00\ \mathrm{kg}$

$M := 2.00\ \mathrm{kg}$

$D := 0.500\ \mathrm{m}$

Realizamos el diagrama del cuerpo libre para cada cuerpo y aplicamos la segunda ley de Newton en cada caso. Tomamos signo positivo en sentido horario.

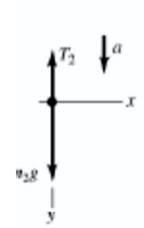
Caja 1:



$$\Sigma F = m_1 \cdot a$$

$$T_1 = m_1 \cdot a \qquad (1)$$

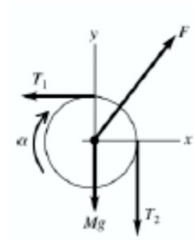
Caja 2:



$$\Sigma F = m_2 \cdot a$$

$$m_2\, g_e - T_2 = m_2 \cdot a \qquad (2)$$

Polea: $$\Sigma \tau = I \cdot \alpha$$



$$\left(T_2 - T_1\right) \cdot R = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \frac{a}{R}$$

$$\left(T_2 - T_1\right) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot a \qquad (3)$$

Con (1), (2) y (3) formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{bmatrix} T_1 = m_1 \cdot a \\ m_2\, g_e - T_2 = m_2 \cdot a \\ \left(T_2 - T_1\right) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot a \end{bmatrix}$$

Si sumamos las tres ecuaciones:

$$m_2\, g_e = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} \cdot M\right) \cdot a$$

$$a := \frac{m_2\, g_e}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} \cdot M} = 2.72\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$T_1 := m_1 \cdot a = 32.7\ \mathrm{N}$$

$$T_2 := m_2 \cdot \left(g_e - a\right) = 35.4\ \mathrm{N}$$

Las componentes x e y de la reacción del eje son:

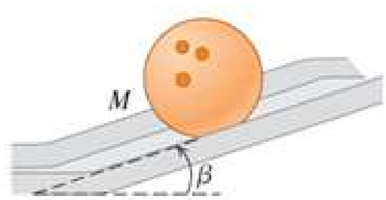
$$\Sigma F_x = m \cdot a_x$$

$$F_x := T_1 = 32.7\ \mathrm{N}$$

$$\Sigma F_y = m \cdot a_y$$

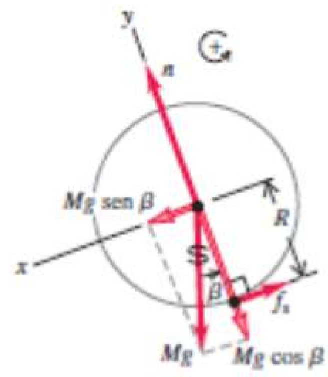
$$F_y := M\, g_e + T_2 = 55\ \mathrm{N}$$

Ejercicio 10: Una bola de bolos de masa M, sólida, rueda sin resbalar por la rampa de retorno junto a la mesa de boliche. La rampa forma un ángulo β con la horizontal. ¿Qué aceleración tiene la bola y cuál es la magnitud de la fuerza de fricción sobre ésta? Trate la bola como esfera sólida uniforme, despreciando los agujeros.



Datos:

$M \quad \beta$



$$\Sigma F_x = M \cdot a_{cmx}$$

$$M \cdot g \cdot \sin(\beta) - f = M \cdot a_{cmx} \qquad (1)$$

$$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot \alpha$$

Momento de inercia de una esfera sólida, respecto de su centro de masa:

$$I_{cm} = \left(\frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2\right)$$

$$f \cdot R = \left(\frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2\right) \cdot \alpha \qquad (2)$$

Armamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, reemplazando α por $\alpha = \frac{a_{cmx}}{R}$

$$\left[\begin{array}{c} M \cdot g \cdot \sin(\beta) - f = M \cdot a_{cmx} \\ f \cdot R = \left(\frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2\right) \cdot \frac{a_{cmx}}{R} \end{array}\right]$$

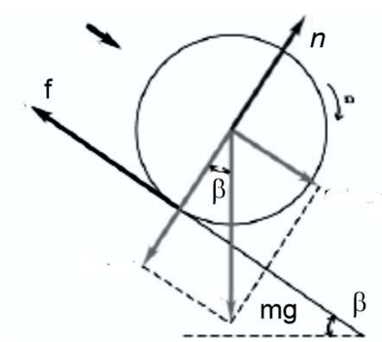
Despejamos f de la primera y reemplazamos en la segunda dando

$$a_{cmx} = \frac{5}{7} g_e \cdot \sin(\beta)$$

Sustituyendo este valor en la primera:

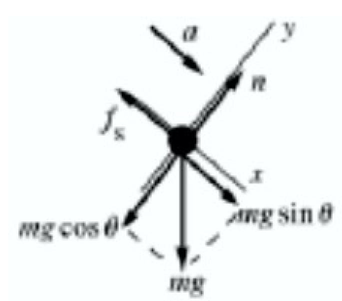
$$f = \frac{2}{7} \cdot M\, g_e \cdot \sin(\beta)$$

Ejercicio 11: Una esfera sólida se suelta del reposo y baja por una ladera que forma un ángulo de 65,0° abajo de la horizontal. a) ¿Qué valor mínimo debe tener el coeficiente de fricción estática entre la ladera y la esfera para que no haya deslizamiento? b) ¿El coeficiente de fricción calculado en el inciso a) bastaría para evitar que una esfera hueca (como un balón de fútbol) resbale? Justifique su respuesta. c) En el inciso a), ¿por qué usamos el coeficiente de fricción estática y no el coeficiente de fricción cinética?



Datos:

$\theta := 65\,°$

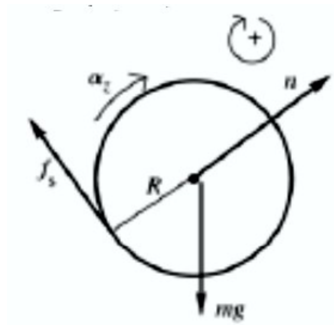


$$\Sigma F_x = m \cdot a_x$$

$$m\, g_e \cdot \sin(\theta) - \mu \cdot m\, g_e \cdot \cos(\theta) = m \cdot a$$

$$g_e \cdot (\sin(\theta) - \mu \cdot \cos(\theta)) = a \qquad (1)$$

$$\Sigma\tau = I_{cm} \cdot \alpha$$



Momento de inercia de una esfera sólida, respecto de su centro de masa:

$$I_{cm} = \left(\frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2\right)$$

$$\mu \cdot m\ g_e \cdot \cos(\theta) \cdot R = \left(\frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2\right) \cdot \alpha$$

Si no hay deslizamiento $\alpha = \frac{a}{R}$

$$\mu \cdot m\ g_e \cdot \cos(\theta) \cdot R = \left(\frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2\right) \cdot \frac{a}{R}$$

$$\mu\ g_e \cdot \cos(\theta) = \frac{2}{5} \cdot a \qquad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) armamos un sistema de dos ecuaciones con incógnitas a y μ

$$\begin{bmatrix} g_e \cdot (\sin(\theta) - \mu \cdot \cos(\theta)) = a \\ \mu\ g_e \cdot \cos(\theta) = \frac{2}{5} \cdot a \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{5}{7}\ g_e \cdot \sin(\theta)$$

$$\mu := \frac{2}{7} \cdot \tan(\theta) = 0.613$$

Para el ítem b se repite el cálculo con el momento de inercia que corresponde a una esfera hueca

Momento de inercia de una esfera hueca, respecto de su centro de masa:

$$I_{cm} = \left(\frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2\right)$$

$$\mu \cdot m\ g_e \cdot \cos(\theta) \cdot R = \left(\frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2\right) \cdot \alpha$$

$$\mu \cdot m\ g_e \cdot \cos(\theta) \cdot R = \left(\frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2\right) \cdot \frac{a}{R}$$

$$\mu\ g_e \cdot \cos(\theta) = \frac{2}{3} \cdot a \qquad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) armamos un sistema de dos ecuaciones con incógnitas a y μ

$$\begin{bmatrix} g_e \cdot (\sin(\theta) - \mu \cdot \cos(\theta)) = a \\ \mu\ g_e \cdot \cos(\theta) = \frac{2}{3} \cdot a \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{3}{5} g_e \cdot \sin(\theta)$$

$$\mu := \frac{2}{5} \cdot \tan(\theta) = 0.858$$

Por lo tanto el coeficiente de fricción calculado en el inciso a no es suficiente para evitar el resbalamiento

Se usa el coeficiente de fricción estática porque se considera que la bola gira respecto del punto de apoyo en cada instante sin deslizarse. Ese punto permanecería estático en ese instante.

Ejercicio 12: La potencia desarrollada por el motor de un automóvil se anuncia como 200 hp a 6000 rpm. Calcule la torca correspondiente.

Datos:

$$P := 200\ \text{hp} = 1.49 \cdot 10^{5}\ \text{W}$$

$$n := 6000\ \text{rpm} \qquad \omega := n = 628\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\tau := \frac{P}{\omega} = 237\ \text{N m}$$

Ejercicio 13: Un motor eléctrico ejerce una torca constante de 10 N · m sobre una piedra de amolar montada en un eje. El momento de inercia de la piedra es de 2,0 kg · m2 y el sistema parte del reposo. Calcule el trabajo efectuado por el motor en 8,0 segundos y la energía cinética al final de este lapso. ¿Qué potencia media desarrolló el motor?

Ejemplo 10.9 Cálculo de potencia a partir de la torca

Un motor eléctrico ejerce una torca constante de 10 N · m sobre una piedra de amolar montada en un eje. El momento de inercia de la piedra es de 2.0 kg · m² y el sistema parte del reposo. Calcule el trabajo efectuado por el motor en 8.0 segundos y la energía cinética al final de este lapso. ¿Qué potencia media desarrolló el motor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que la torca es constante, la piedra de amolar tiene una aceleración angular constante α_z. Si podemos calcular el valor de α_z, obtendremos el ángulo $\Delta\theta$ que la piedra gira en 8 s [lo cual, por la ecuación (10.21), nos da el trabajo efectuado W] y la velocidad angular ω_z en ese momento (que nos da la energía cinética K). Podemos obtener la potencia media P_{med} dividiendo el trabajo efectuado entre el tiempo.

PLANTEAR: Usamos la versión rotacional de la segunda ley de Newton, $\sum\tau_z = I\alpha_z$, para obtener la aceleración angular α_z. Entonces usamos las ecuaciones de cinemática de la sección 9.2 para calcular $\Delta\theta$ y ω_z y a partir de estos valores calcular W, K y P_{med}.

EJECUTAR: Tenemos $\sum\tau_z = 10$ N · m (la única torca que actúa se debe al motor) e $I = 2.0$ kg · m², así que, por $\sum\tau_z = I\alpha_z$, la aceleración angular es de 5.0 rad/s². Por la ecuación (9.11), el ángulo total que el sistema gira en 8.0 s es

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 = \frac{1}{2}(5.0\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s})^2 = 160\ \text{rad}$$

y el trabajo total efectuado por la torca es

$$W = \tau_z \Delta\theta = (10\ \text{N}\cdot\text{m})(160\ \text{rad}) = 1600\ \text{J}$$

Por las ecuaciones (9.7) y (9.17), la velocidad angular y la energía cinética en $t = 8.0$ s son

$$\omega_z = \alpha_z t = (5.0\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s}) = 40\ \text{rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega_z^2 = \frac{1}{2}(2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{rad/s})^2 = 1600\ \text{J}$$

La energía cinética inicial era cero, de manera que el trabajo efectuado es igual al incremento en la energía cinética [véase la ecuación (10.22)].

La potencia media es

$$P_{med} = \frac{1600\ \text{J}}{8.0\ \text{s}} = 200\ \text{J/s} = 200\ \text{W}$$

EVALUAR: Podemos comprobar el valor que obtuvimos para la potencia *media* considerando la potencia *instantánea*, $P = \tau_z\omega_z$. Observe que, dado que ω_z aumenta continuamente, P también aumenta continuamente; su valor es cero en $t = 0$ y aumenta a (10 N · m) (40 rad/s) = 400 W en $t = 8.0$ s. La velocidad angular y la potencia aumentan uniformemente con el tiempo, así que la potencia *media* es la mitad de este valor máximo, es decir, 200 W.

Ejercicio 14: La hélice de un avión tiene longitud de 2,08 m (de punta a punta) y masa de 117 kg. Al arrancarse, el motor del avión aplica una torca constante de 1 950 N · m a la hélice, que parte del reposo. a) Calcule la aceleración angular de la hélice, tratándola como varilla delgada. b) Calcule la rapidez angular de la hélice después de 5,00 revoluciones. c) ¿Cuánto trabajo efectúa el motor durante las primeras 5,00 revoluciones? d) ¿Qué potencia media desarrolla el motor durante las primeras 5,00 revoluciones? e) ¿Qué potencia instantánea desarrolla el motor en el instante en que la hélice ha girado 5,00 revoluciones?

Datos:

$L := 2.08\ \mathrm{m}$

$m := 117\ \mathrm{kg}$

$\tau := 1950\ \mathrm{N\ m}$

$n := 5\ \mathrm{rev}$ $\qquad \theta := n = 31.4\ \mathrm{rad}$

Momento de inercia de la varilla:

$$I := \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 = 42.2\ \mathrm{kg\ m}^2$$

$$\alpha := \frac{\tau}{I} = 46.2\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \left(\theta - \theta_0\right)$$

$$\omega := \sqrt{2 \cdot \alpha \cdot \theta} = 53.9\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$W := \tau \cdot \theta = 61300\ \mathrm{J}$$

$$t := \frac{\omega}{\alpha} = 1.17\ \mathrm{s}$$

$$P := \frac{W}{t} = 52500\ \mathrm{W}$$

Ejercicio 15: Una hélice de turbina del motor a reacción de un avión tiene un momento de inercia de 2,5 kg · m2 alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina, su velocidad angular en función del tiempo es: z = (40 rad/s3) t2. a) Calcule el momento angular de la hélice en función del tiempo y su valor en t = 3,0 s. b) Determine la torca neta que actúa sobre la hélice en función del tiempo, y su valor en t = 3,0 s.

Ejemplo 10.10 Momento angular y torca

Una hélice de turbina del motor a reacción de un avión tiene un momento de inercia de $2.5\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina, su velocidad angular en función del tiempo es

$$\omega_z = (40\ \mathrm{rad/s^3})t^2$$

a) Calcule el momento angular de la hélice en función del tiempo y su valor en $t = 3.0$ s. *b)* Determine la torca neta que actúa sobre la hélice en función del tiempo, y su valor en $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que un ventilador, la hélice de una turbina gira alrededor de un eje de simetría (el eje z). Por lo tanto, el vector de momento angular tiene sólo una componente z (L_z), que podemos determinar a partir de la velocidad angular ω_z. Puesto que la dirección del momento angular es constante, la torca neta también tiene sólo una componente τ_z a lo largo del eje de rotación; esto es igual a la derivada de L_z con respecto al tiempo.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (10.28) para obtener L_z a partir de ω_z, y la ecuación (10.29) para calcular τ_z a partir de la derivada de L_z con respecto al tiempo.

EJECUTAR: *a)* La componente del momento angular está sobre el eje de rotación (z):

$$L_z = I\omega_z = (2.5\ \mathrm{kg \cdot m^2})(40\ \mathrm{rad/s^3})t^2 = (100\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^3})t^2$$

(Omitimos "rad" de la respuesta porque el radián es una cantidad adimensional.) En $t = 3.0$ s, $L_z = 900\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$.

b) Por la ecuación (10.29), la componente de la torca neta en el eje de rotación es

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^3})(2t) = (200\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^3})t$$

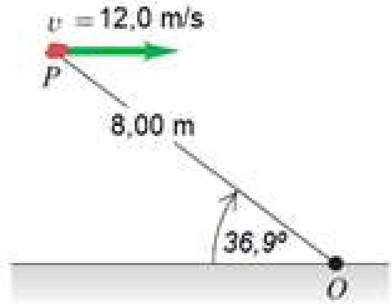
En el instante $t = 3.0$ s,

$$\tau_z = (200\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^3})(3.0\ \mathrm{s}) = 600\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^2} = 600\ \mathrm{N \cdot m}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado, vemos que la aceleración angular de la hélice es $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40\ \mathrm{rad/s^3})(2t) = (80\ \mathrm{rad/s^3})t$. Por el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton, la torca que actúa sobre la hélice es $\tau_z = I\alpha_z = (2.5\ \mathrm{kg \cdot m^2})(80\ \mathrm{rad/s^3})t = (200\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^3})t$, lo que coincide con nuestro cálculo anterior.

Ejercicio 16: Una piedra de 2,00 kg tiene una velocidad horizontal con magnitud de 12,0 m/s cuando está en el punto P de la figura. a) ¿Qué momento angular (magnitud y dirección) tiene con respecto a O en ese instante? b) Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre la piedra es su peso, calcule la rapidez del cambio (magnitud y dirección) de su momento angular en ese instante.

Datos:



$m := 2\ \text{kg}$

$v := 12.0\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$r := 8.00\ \text{m}$

$\theta := 36.9\ °$

$$L := m \cdot v \cdot r \cdot \sin(143.1\ °) = 115\ \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

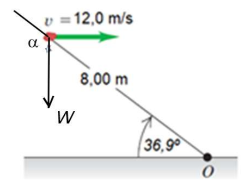
dirección hacia adentro

La rapidez de cambio del momento angular $\dfrac{\Delta L}{\Delta t}$ es igual al torque

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$90\ ° - 36.9\ ° = 53.1\ °$

$\alpha := 180\ ° - 53.1\ ° = 127\ °$



El torque es provocado por la fuerza peso, que es la única que actúa

$$\tau := r \cdot m\ g_e \cdot \sin(\alpha) = 125\ \text{N m}$$

Ejercicio 17: Calcule la magnitud del momento angular del segundero de un reloj alrededor de un eje que pasa por el centro de la carátula, si tal manecilla tiene una longitud de 15,0 cm y masa de 6,00 g. Trate la manecilla como una varilla delgada que gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo.

Datos:

$L := 15.0\ \text{cm}$

$m := 6.00\ \text{g}$

$$L = I \cdot \omega$$

$$I := \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 = 4.5 \cdot 10^{-5}\ \text{kg m}^2$$

El segundero da una vuelta en un min

$$\omega := 1\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} = 0.105\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$L := I \cdot \omega = 4.71 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

Ejercicio 18: Un ágil profesor de física se para en el centro de una mesita giratoria con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5,0 kg en cada mano. Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2,0 s. Calcule la nueva velocidad angular del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen. Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de 3,0 kg · m2 con los brazos estirados, y baja a 2,2 kg · m2 si pone las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1,0 m del eje al principio y a 0,20 m al final; trátelas como partículas

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Si despreciamos la fricción en la mesita giratoria, ninguna torca externa actuará alrededor del eje vertical (z) así que el momento angular con respecto a ese eje será constante.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (10.30) para calcular la incógnita (la velocidad angular final ω_{2z}).

EJECUTAR: El momento de inercia del sistema es $I = I_{prof} + I_{manc}$. Cada mancuerna de masa m aporta mr^2 a I_{manc}, donde r es la distancia perpendicular del eje de rotación a la mancuerna. Inicialmente, tenemos

$$I_1 = 3.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\ \text{kg})(1.0\ \text{m})^2 = 13\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1\ \text{rev}}{2.0\ \text{s}} = 0.50\ \text{rev/s}$$

El momento de inercia final es

$$I_2 = 2.2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\ \text{kg})(0.20\ \text{m})^2 = 2.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Por la ecuación (10.30), la velocidad angular final es

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{1z} = \frac{13\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}{2.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}(0.50\ \text{rev/s}) = 2.5\ \text{rev/s}$$

Es decir, la velocidad angular aumenta en un factor de 5, en tanto que el momento angular se mantiene constante. Observe que no tuvimos que cambiar "revoluciones" a "radianes" en este cálculo. ¿Por qué?

EVALUAR: Es útil examinar la manera en que cambia la energía cinética en este proceso. Para calcular la energía cinética, debemos expresar ω_1 y ω_2 en rad/s. (¿Por qué?) Tenemos $\omega_{1z} = (0.50\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 3.14\ \text{rad/s}$ y $\omega_{2z} = (2.5\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 15.7\ \text{rad/s}$. La energía cinética inicial es

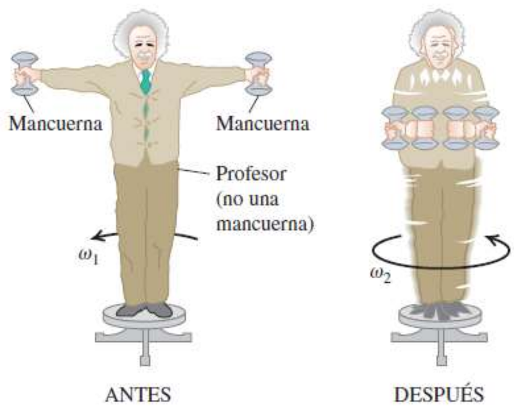
$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_{1z}^2 = \frac{1}{2}(13\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(3.14\ \text{rad/s})^2 = 64\ \text{J}$$

y la energía cinética final es

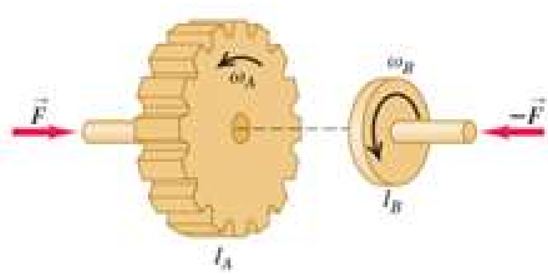
$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 = \frac{1}{2}(2.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(15.7\ \text{rad/s})^2 = 320\ \text{J}$$

La energía cinética adicional proviene del trabajo que el profesor realizó para pegar sus brazos y las mancuernas al abdomen.

10.29 Diversión con la conservación del momento angular.



Ejercicio 19: La figura muestra dos discos. Uno (A) es un volante de motor; el otro (B), una placa de embrague sujeta a un eje de transmisión. Sus momentos de inercia son IA e IB. Inicialmente, los discos están girando con rapideces angulares constantes ωA y ωB, respectivamente. Luego, juntamos los discos con fuerzas que actúan sobre el eje, con la finalidad de no aplicar una torca a ningún disco. Los discos se frotan entre sí y finalmente alcanzan una rapidez angular final común ω. Deduzca una expresión para ω.
Suponga que el volante A tiene masa de 2,0 kg, radio de 0,20 m y rapidez angular inicial de 50 rad/s (unos 500 rpm), y que la placa de embrague B tiene masa de 4,0 kg, radio de 0,10 m y rapidez angular inicial de 200 rad/s. Calcule la rapidez angular final común ω después de juntarse los discos. ¿Qué sucede con la energía cinética durante este proceso?



Ejemplo 10.12 Un "choque" rotacional I

La figura 10.30 muestra dos discos. Uno (A) es un volante de motor; el otro (B), una placa de embrague sujeta a un eje de transmisión. Sus momentos de inercia son I_A e I_B. Inicialmente, los discos están girando con rapideces angulares constantes ω_A y ω_B, respectivamente. Luego, juntamos los discos con fuerzas que actúan sobre el eje, con la finalidad de no aplicar una torca a ningún disco. Los discos se frotan entre sí y finalmente alcanzan una rapidez angular final común ω. Deduzca una expresión para ω.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La única torca que actúa sobre cualquiera de los discos es el aplicado por el otro disco; no hay torcas externas. Así, el momento angular total del sistema es la misma antes y después de juntarse los discos. Al final, giran como un solo cuerpo con momento de inercia total $I = I_A + I_B$ y rapidez angular ω, que es nuestra incógnita.

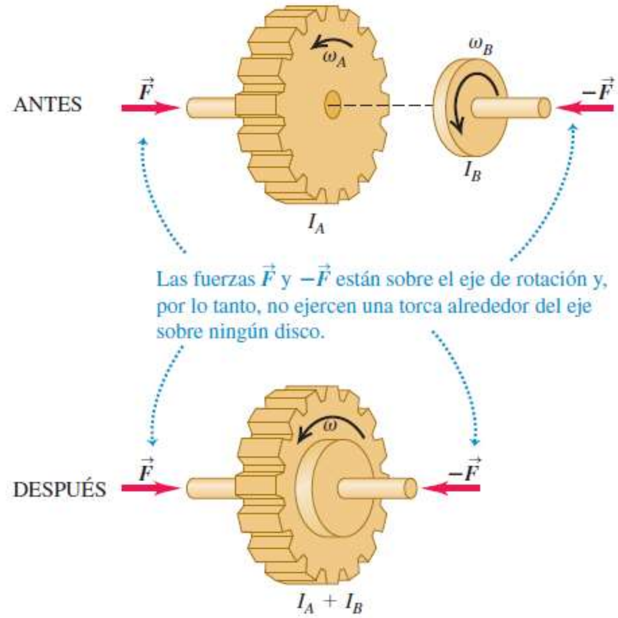
PLANTEAR: La figura 10.30 muestra que todas las velocidades angulares tienen la misma dirección, así que podemos considerar que ω_A, ω_B y ω son componentes de velocidad angular a lo largo del eje de rotación.

EJECUTAR: La conservación del momento angular da

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

10.30 Si la torca externa neta es cero, se conserva el momento angular.



continúa

Ejemplo 10.13 Un "choque" rotacional II

En el ejemplo 10.12, suponga que el volante A tiene masa de 2.0 kg, radio de 0.20 m y rapidez angular inicial de 50 rad/s (unas 500 rpm), y que la placa de embrague B tiene masa de 4.0 kg, radio de 0.10 m y rapidez angular inicial de 200 rad/s. Calcule la rapidez angular final común ω después de juntarse los discos. ¿Qué sucede con la energía cinética durante este proceso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Necesitamos calcular la energía cinética rotacional de cada disco antes del choque y su energía cinética combinada después del choque.

PLANTEAR: Usaremos el resultado del ejemplo 10.12 y la expresión $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ para la energía cinética rotacional.

EJECUTAR: Los momentos de inercia de los dos discos son

$$I_A = \frac{1}{2}m_A r_A^2 = \frac{1}{2}(2.0\ \text{kg})(0.20\ \text{m})^2 = 0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}m_B r_B^2 = \frac{1}{2}(4.0\ \text{kg})(0.10\ \text{m})^2 = 0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Del ejemplo 10.12, la rapidez angular final es

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}\\ &= \frac{(0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(50\ \text{rad/s}) + (0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(200\ \text{rad/s})}{0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}\\ &= 100\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

La energía cinética antes del choque es

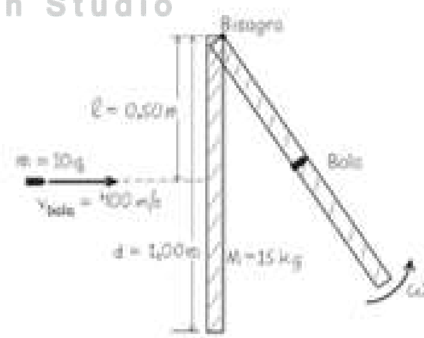
$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2\\ &= \frac{1}{2}(0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(50\ \text{rad/s})^2\\ &\quad+\frac{1}{2}(0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(200\ \text{rad/s})^2\\ &= 450\ \text{J}\end{aligned}$$

La energía cinética después del choque es

$$\begin{aligned}K_2 &= \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2\\ &= \frac{1}{2}(0.040\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0.020\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(100\ \text{rad/s})^2 = 300\ \text{J}\end{aligned}$$

EVALUAR: Se perdió un tercio de la energía cinética inicial durante este "choque angular", el análogo rotacional de un choque totalmente inelástico. No deberíamos esperar que se conserve la energía cinética, aunque la fuerza externa neta y la torca sean cero, porque actúan fuerzas internas no conservadoras (de fricción) al frotarse los discos y acercarse gradualmente a una velocidad angular común.

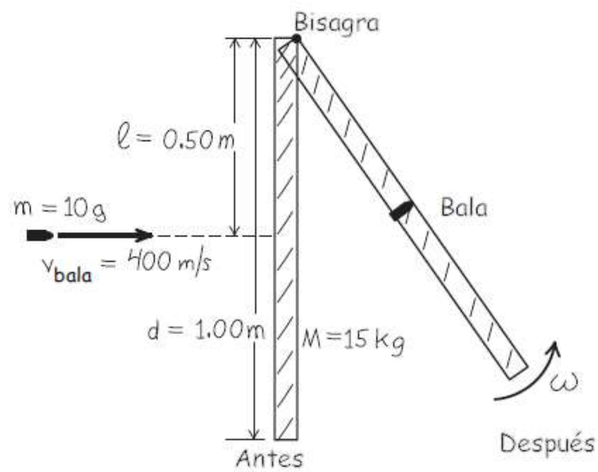
Ejercicio 20: Una puerta de 1,00 m de ancho y masa de 15 kg tiene bisagras en un costado, de modo que puede girar sin fricción sobre un eje vertical. La puerta no está asegurada. Un policía dispara una bala de 10 g de masa con rapidez de 400 m/s al centro exacto de la puerta, en dirección perpendicular al plano de la puerta. Calcule la rapidez angular de la puerta justo después de que la bala se incrusta en la puerta. ¿Se conserva la energía cinética?



Ejemplo 10.14 Momento angular en una acción policiaca

Una puerta de 1.00 m de ancho y masa de 15 kg tiene bisagras en un costado, de modo que puede girar sin fricción sobre un eje vertical. La puerta no está asegurada. Un policía dispara una bala de 10 g de masa con rapidez de 400 m/s al centro exacto de la puerta, en dirección perpendicular al plano de la puerta (figura 10.32). Calcule la rapidez angular de la puerta justo después de que la bala se incrusta en la puerta. ¿Se conserva la energía cinética?

10.31 Nuestro esquema para este problema.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Consideramos la puerta y la bala como un sistema. No hay torca externa alrededor del eje definido por las bisagras, así que se conserva el momento angular con respecto a este eje.

PLANTEAR: La figura 10.31 muestra nuestro esquema. El momento angular inicial está totalmente en la bala y está dada por la ecuación (10.25). El momento angular final es la de un cuerpo rígido formado por la puerta y la bala incrustada. Igualaremos estas dos cantidades y despejaremos la rapidez angular ω de la puerta y la bala inmediatamente después del choque.

EJECUTAR: El momento angular inicial de la bala es:

$$L = mvl = (0.010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})(0.50\ \text{m}) = 2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

El momento angular final es $I\omega$, donde $I = I_{\text{puerta}} + I_{\text{bala}}$. De la tabla 9.2, para una puerta de anchura d,

$$I_{\text{puerta}} = \frac{Md^2}{3} = \frac{(15\ \text{kg})(1.0\ \text{m})^2}{3} = 5.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia de la bala (con respecto al eje que pasa por las bisagras) es

$$I_{\text{bala}} = ml^2 = (0.010\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 = 0.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

La conservación del momento angular requiere que $mvl = I\omega$, es decir,

$$\omega = \frac{mvl}{I} = \frac{2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{5.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 0.40\ \text{rad/s}$$

El choque de la bala con la puerta es inelástico porque durante el impacto actúan fuerzas de fricción no conservadoras. Por lo tanto, no esperamos que se conserve la energía cinética. Comprobamos esto calculando las energías cinéticas inicial y final:

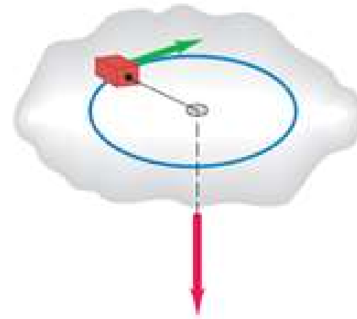
$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})^2 = 800\ \text{J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(5.0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(0.40\ \text{rad/s})^2 = 0.40\ \text{J}$$

¡La energía cinética final es sólo 1/2000 del valor inicial!

EVALUAR: La rapidez angular final de la puerta es muy baja: a 0.40 rad/s, la puerta tardará 3.9 s en oscilar 90° ($\pi/2$ radianes). ¿Le queda claro al lector que la rapidez aumentaría al doble, si la bala se disparara contra el borde de la puerta cerca de la perilla?

Ejercicio 21: Un bloque pequeño de 0,0250 kg en una superficie horizontal sin fricción está atado a un cordón sin masa que pasa por un agujero en la superficie. El bloque inicialmente está girando a una distancia de 0,300 m del agujero, con rapidez angular de 1,75 rad/s. Ahora se tira del cordón desde abajo, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0,150 m. El bloque puede tratarse como partícula. a) ¿Se conserva el momento angular del bloque? ¿Por qué? b) ¿Qué valor tiene ahora la rapidez angular? c) Calcule el cambio de energía cinética del bloque. d) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar del cordón?



Datos:

$m := 0.0250\ \mathrm{kg}$

$d_1 := 0.300\ \mathrm{m}$

$\omega_1 := 1.75\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

$d_2 := 0.150\ \mathrm{m}$

El momento angular se conserva si no hay torques externos al sistema. La tensión de la cuerda no provoca torque ya que su brazo de palanca es cero. Por lo tanto se conserva el momento angular.

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

$$I_1 := \frac{1}{2} \cdot m \cdot d_1^{\,2} = 0.00112\ \mathrm{kg\ m^2}$$

$$I_2 := \frac{1}{2} \cdot m \cdot d_2^{\,2} = 0.000281\ \mathrm{kg\ m^2}$$

$$\omega_2 := \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1 = 7\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$v_1 := \omega_1 \cdot d_1 = 0.525\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_2 := \omega_2 \cdot d_2 = 1.05\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$K_1 := \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^{\,2} = 0.00345\ \mathrm{J}$$

$$K_2 := \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^{\,2} = 0.0138\ \mathrm{J}$$

$$\Delta K := K_2 - K_1 = 0.0103\ \mathrm{J}$$

El trabajo es igual a la variación de la energía cinética

Ejercicio 22: Un disco giratorio de madera de 120 kg con forma de disco plano tiene 2,00 m de radio y gira inicialmente alrededor de un eje vertical, que pasa por su centro, a 3,00 rad/s. De repente, un paracaidista de 70,0 kg se posa suavemente sobre el disco en un punto cerca del borde. a) Calcule la rapidez angular del disco después de que el paracaidista se posa en él. (Suponga que puede tratarse al paracaidista como partícula.) b) Calcule la energía cinética del sistema antes y después de la llegada del paracaidista. ¿Por qué no son iguales estas energías?

Datos:

$m_d := 120\ \mathrm{kg}$

$R := 2.00\ \mathrm{m}$

$\omega_1 := 3.00\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

$m_p := 70.0\ \mathrm{kg}$

No hay torques externos, por lo tanto se conserva el momento angular

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

$$I_1 := \frac{1}{2} \cdot m_d \cdot R^2 = 240\ \mathrm{kg\ m}^2$$

$$I_2 := \frac{1}{2} \cdot m_d \cdot R^2 + m_p \cdot R^2 = 520\ \mathrm{kg\ m}^2$$

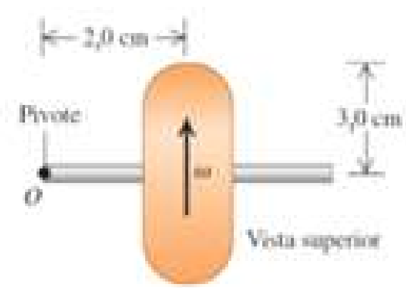
$$\omega_2 := \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1 = 1.38\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$K_1 := \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \omega_1^2 = 1080\ \mathrm{J}$$

$$K_2 := \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \omega_2^2 = 498\ \mathrm{J}$$

La energía cinética disminuye debido a que cuando se posa el paracaidista, aparece una fuerza de fricción entre él y el disco que realiza trabajo negativo

Ejercicio 23: La figura es una vista superior de una rueda de giróscopo cilíndrica que un motor eléctrico puso a girar. El pivote está en O y la masa del eje es insignificante. a) Vista de arriba, ¿la precesión es en sentido horario o antihorario? b) Si una revolución de precesión tarda 4,0 s, ¿qué rapidez angular tiene la rueda?



Ejemplo 10.15 Giróscopo en precesión

La figura 10.36a es una vista superior de una rueda de giróscopo cilíndrica que un motor eléctrico puso a girar. El pivote está en O y la masa del eje es insignificante. *a*) Vista de arriba, ¿la precesión es en sentido horario o antihorario? *b*) Si una revolución de precesión tarda 4.0 s, ¿qué rapidez angular tiene la rueda?

SOLUCIÓN

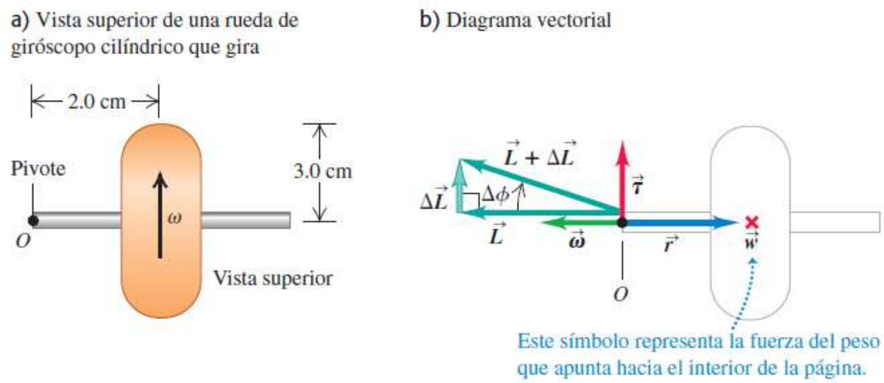
IDENTIFICAR: Esta situación es similar al volante de precesión que se muestra en la figura 10.34.

PLANTEAR: Determinaremos la dirección de precesión empleando la regla de la mano derecha como en la figura 10.34, que muestra el mismo tipo de giróscopo que la figura 10.36. Utilizaremos la relación entre rapidez angular de precesión Ω y la rapidez angular de giro ω, ecuación (10.33), para obtener el valor de ω.

EJECUTAR: *a*) La regla de la mano derecha indica que $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ son a la izquierda (figura 10.36b). El peso $\vec{w}$ apunta hacia adentro de la página en esta vista superior y actúa en el centro de masa (denotado con $\times$); la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ es hacia arriba de la página, lo mismo que $d\vec{L}/dt$. La adición de un pequeño $d\vec{L}$ al $\vec{L}$ que tenemos inicialmente altera la dirección de $\vec{L}$ como se muestra, así que la precesión es en sentido horario cuando se ve desde arriba.

b) ¡Tenga cuidado de no confundir ω y Ω! Tenemos que $\Omega = (1\ \text{rev})/(4.0\ \text{s}) = (2\pi\ \text{rad})/(4.0\ \text{s}) = 1.57\ \text{rad/s}$. El peso es mg, y el

10.36 ¿Qué dirección y qué rapidez tiene la precesión del giróscopo?



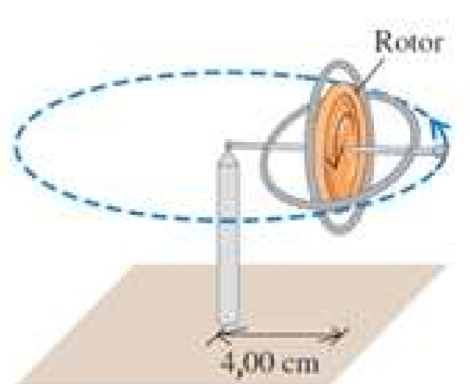
continúa

momento de inercia alrededor del eje de simetría de un cilindro sólido de radio R es $I = \frac{1}{2}mR^2$. Despejando ω en la ecuación (10.33):

$$\omega = \frac{wr}{I\Omega} = \frac{mgr}{(mR^2/2)\Omega} = \frac{2gr}{R^2\Omega}$$
$$= \frac{2(9.8\ \text{m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m})}{(3.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2(1.57\ \text{rad/s})} = 280\ \text{rad/s} = 2600\ \text{rev/min}$$

EVALUAR: La rapidez angular de precesión Ω es mucho menor que la rapidez angular de rotación ω, así que tenemos un ejemplo de precesión lenta.

Ejercicio 24: El rotor (volante) de un giróscopo de juguete tiene una masa de 0,140 kg. Su momento de inercia alrededor de su eje es 1,20 x 10-4 kg· m2. La masa del marco es de 0,0250 kg. El giróscopo se apoya en un solo pivote con su centro de masa a una distancia horizontal de 4,00 cm del pivote. El giróscopo precesa en un plano horizontal a razón de una revolución cada 2,20 s. a) Calcule la fuerza hacia arriba ejercida por el pivote. b) Calcule la rapidez angular en rpm con que el rotor gira sobre su eje. c) Copie el diagrama e indique con vectores el momento angular del rotor y la torca que actúa sobre él



Datos:

$m_g := 0.140\ \text{kg}$

$I := 1.20 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg\ m}^2$

$m_m := 0.0250\ \mathrm{kg}$

$h := 4.00\ \mathrm{cm}$

$T := 2.20\ \mathrm{s}$

La masa total del disco más su marco es:

$$M := m_g + m_m = 0.165\ \mathrm{kg}$$

La velocidad angular de precesión será, dado que tenemos el período:

$$\omega_{precesión} := \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2.86\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Despejando de:

$$\omega_{precesión} = \frac{M\ g_e \cdot h}{I \cdot \omega_{rotación}}$$

$$\omega_{rotación} := \frac{M\ g_e \cdot h}{I \cdot \omega_{precesión}} = 189\ \mathrm{Hz}$$

$$\omega_{rotación} = 1800\ \mathrm{rpm}$$