UNIDAD TEMÁTICA I: Conjuntos. Números Reales. Recta real

Conceptos importantes

Llamamos conjunto a toda pluralidad, cada uno de cuyos objetos es un elemento del conjunto, y diremos que un **conjunto** está **definido** o determinado cuando establecido un convenio cualquiera no contradictorio, podemos saber si un elemento dado pertenece o no al conjunto, el cual está formado por todos los objetos que cumplan el convenio.

Un **conjunto** es **finito** si se puede ordenar de manera tal que tenga un primer elemento al que no preceda ninguno, y un último elemento al que no siga ninguno.

Los **conjuntos** que carecen de primer y/o último elemento se llaman **infinitos.**

En este curso trabajaremos con el conjunto de números reales R.

Presentando a los números reales

Los números reales (denotados por R) son el conjunto de números creados por el hombre para poder transmitir mediante un lenguaje unificado distintas cantidades, expresadas por una serie de símbolos y 10 dígitos, lo que ha otorgado a la sociedad la capacidad de medición y exactitud con que cuenta y se rige hoy en día.

Veamos de qué manera se conforman los **números reales (R):**

Los números 1, 2, 3, etc, se denominan **números naturales (N).** Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre es un número natural, como podemos ver en los ejemplos:

$2+4=6 \quad y \quad 2.4=8$ en ambos casos los resultados son números naturales.

En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no siempre es un número natural.

Por ejemplo, $6-2=4$ es natural pero $2-6$ no es natural,

Al igual que en $12:3=4$ es natural pero $3:12$ no lo es.

Así, dentro del conjunto de números naturales, siempre podemos sumar y multiplicar, pero no siempre podemos restar o dividir.

Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales, por lo que se dice que N es un conjunto **discreto**

Con la finalidad de superar la limitación de la sustracción, extendemos el conjunto de los números naturales al conjunto de los **números enteros (Z).** Los enteros incluyen los números naturales, los negativos de cada número natural y el número cero (0). De este modo, podemos representar el conjunto de los enteros mediante

$$\ldots -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, \ldots$$

Es claro que los números naturales también son enteros. Si sumamos, multiplicamos o restamos dos enteros cualesquiera, el resultado también es un entero.

Autora: Prof. Mariela R. Amarilla

Por ejemplo: $-3+8=5$, $(-3).(5)=15$ y $3-8=-5$ en todos los casos sus resultados son enteros.

Pero aún no podemos dividir un entero entre otro y obtener un entero como resultado.

Por ejemplo, vemos que: 8:4=2 es un entero, pero $8:3$ no lo es.

Por tanto, dentro del conjunto de los enteros, podemos sumar, multiplicar y restar pero no siempre podemos dividir.

Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros, por lo que se dice que Z es un conjunto **discreto**

Para superar la limitación de la división, extendemos el conjunto de los enteros al conjunto de los **números racionales (Q).** Este conjunto consiste de todas las fracciones $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros con $b \neq 0$.

Un número es racional si podemos expresarlo como la razón de dos enteros con denominador distinto de cero. $-\frac{8}{3}, \frac{5}{7}, \frac{0}{3}, \frac{6}{1}=6$ son ejemplos de números racionales.

Podemos sumar, multiplicar, restar y dividir cualesquiera dos números racionales (exceptuando la división por cero) y el resultado siempre es un número racional. De esta manera las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: adición, multiplicación, sustracción y división son posibles dentro del sistema de los números racionales.

Cuando un número racional se expresa como un decimal, los decimales terminan o presentan un patrón que se repite indefinidamente.

Por ejemplo: $\frac{1}{4}=0{,}25$ y $\frac{93}{80}=1{,}1625$. tienen una cantidad finita de cifras decimales.

Mientras que $\frac{1}{6}=0{,}16666\ldots$ o $\frac{4}{7}=0{,}5714285714285\ldots$, corresponden a decimales en que alguna cifra de la parte decimal se repite periódicamente.

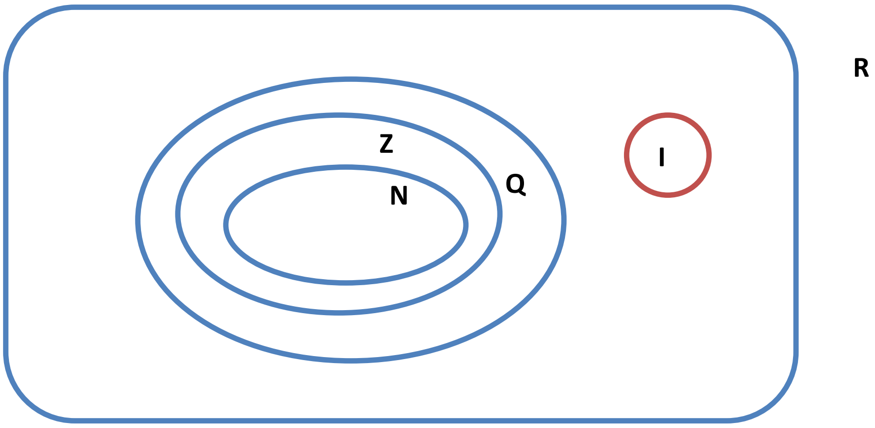
De esta manera podemos afirmar que todos los números racionales, son aquellos que pueden expresarse como la razón entre dos números enteros.

También existen algunos números de uso común que no son racionales (es decir, que no pueden expresarse como la razón de dos enteros). Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ y no son números racionales.

Tales números se denominan **números irracionales (I).** La diferencia esencial entre los números racionales y los irracionales se advierte en sus expresiones decimales. Cuando un número irracional se presenta por medio de decimales, los decimales continúan indefinidamente sin presentar ninguna cifra repetitiva. Por ejemplo, con diez cifras decimales $\sqrt{2}$ =1.4142135623… No importa con cuántos decimales expresemos estos números, nunca presentarán un patrón repetitivo, en contraste con los patrones que ocurren en el caso de los números racionales.

El término **número real (R)** se utiliza para indicar un número que es racional o irracional. El conjunto de los números reales consta de todas las posibles expresiones decimales. Aquellos decimales que terminan o se repiten corresponden a los números racionales, mientras que los restantes corresponden a los números irracionales.

El siguiente esquema muestra de qué manera se conforma el conjunto de los números reales:



Propiedades de los números reales

A continuación enumeraremos las propiedades básicas de dos operaciones definidas en R, como son la suma y el producto, y partimos de ellas ya que será sencillo deducir las propiedades de otras operaciones, a partir de ellas.

Si $x, y \in R$, indicaremos la suma con $x + y$ y el producto con $x.y$ .Estas operaciones son cerradas, es decir, el resultado pertenece a ***R.***

- ***Propiedades algebraicas***
  1. Propiedad Asociativa:
  $$x + (y + z) = (x + y) + z \quad , \quad x.(y.z) = (x.y).z \qquad \forall x, y, z \in R$$
  2. Propiedad Conmutativa:
  $$x + y = y + x \quad , \quad x.y = y.x \qquad \forall x, y \in R$$
  3. Existencia del elemento neutro:
  en la suma: $\exists 0 \in R / 0 + x = x$ en el producto: $\exists 1 \neq 0 \in R / 1 . x = x, \quad \forall x \in R$
  4. Existencia del opuesto para la suma: $\forall x \in R: \exists (-x) \in R / \ x + (-x) = 0$
  5. Existencia del recíproco para el producto: $\forall x \neq 0 \in R: \exists x^{-1} \in R / \ x.x^{-1} = 1$
  6. Distributiva del producto respecto de la suma: $x.(y + z) = x.y + x.z, \forall x, y, z \in R$

Puntos y números

Existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta. Esta correspondencia nos autoriza a considerar como sinónimos las palabras punto y número, y podemos hablar de distancia entre dos números y las relaciones aritméticas se podrán expresar en lenguaje geométrico y viceversa.

Representación en la recta numérica

Autora: Prof. Mariela R. Amarilla

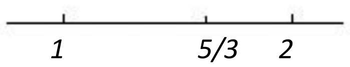
Sobre una recta elegimos un punto para representar el cero (0) y otro punto a la derecha para representar el uno (1) con lo que se considera determinada la escala (segmento unidad). Los números positivos (R^+) están a la derecha del cero y los negativos (R^-) la izquierda.

A cada número real corresponde un solo punto de la recta y a cada punto de la recta un solo número real. Designaremos a esta recta: **recta real o eje real.** Decimos simplemente "el punto x_0" en lugar de "el punto correspondiente al n° real x_0".

Interpretación geométrica: Según el lugar que un n° ocupa en la recta numérica, podemos establecer una relación de orden. Si el punto *a* esta a la izquierda del punto *b*, decimos que *a* es meor que *b* y se simboliza $a < b$.

Con $a < b$, un punto satisface las desigualdades $a < x < b$ si y solo si x está entre *a* y *b.*

- ***Propiedades* de densidad:** Entre dos números reales existe siempre un número racional, lo que se expresa diciendo que ***Q es denso en R.***



A cada número racional le corresponde uno y solo un punto de la recta y podemos observar que entre dos racionales existen infinitos números racionales.

Sin embargo no todos los puntos de las rectas están relacionados con un n° racional, es el conjunto de los irracionales quien completa la relación biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales. Decimos entonces que el conjunto R es ***continuo.*** Para todo $a < b$, si y solo si existe un punto x que satisface las desigualdades $a < x < b$, es decir x está entre *a* y *b.*

En R se establece una relación de orden $x \leq y$ (se lee x es menor o igual que y) o $x \geq y$ (se lee x es mayor o igual que y)

- ***Propiedades* de orden** : $sean\ a, b, c\ \in R$

1. *Ley de tricotomía:* $a < b \quad o \quad a = b \quad o \quad a > b$*, se verifica exactamente uno y solo uno de ellos.*
2. Propiedad transitiva: $Si\ \ a < b\ e\ b < c, entonces\ \ a < c$
3. $x \leq y\ e\ y \leq x, equivale\ a\ decir\ x = y$
4. $Si\ es\ x \leq y\ entonces\ x + z \leq y + z$
5. $Si\ x < y\ \ ,\ \ z > 0\ entonces\ x.z < y.z$
6. $Si\ x < y\ \ ,\ \ z < 0\ entonces\ x.z > y.z$

Actividad: Aplicando las propiedades verifica la ley de tricotomía en las siguientes desigualdades:

$$a) \ -2x + 7 > 3x + 5$$

$$b) -2x + 7 = 3x + 5$$

$$c) - 2x + 7 < 3x + 5$$

Resumiendo…

Los números reales es un campo, donde la suma y la multiplicación entre ellos tienen propiedades algebraicas, como las tienen la suma y la multiplicación de los racionales. Cuando se dice que el campo de los reales es ordenado, lo que quiere decir que en este existe el concepto de desigualdad con todas las propiedades antes expuestas. Sin embargo, los reales tienen la ventaja sobre los racionales de que son suficientes para asignarlos a todos los puntos de la recta infinita. A cada punto de la recta infinita, le queda asignado un número real y no hay reales que no sean asignados; en esta asignación se agotan, simultáneamente, puntos y reales. La recta interpretada así, la llamaremos ***recta real****. Entonces, la recta real es una recta física ideal que tiene asignado un número real a cada uno de sus puntos. Los reales "cubren" toda la recta. Debido a que esta es un objeto físico idealmente continuo, diremos que los reales son un sistema continuo de números. Por lo que se define, finalmente a los n° Reales como:*

El sistema de los números reales es un campo ordenado continuo.

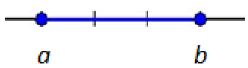
INTERVALOS

Intervalos limitados: Si a y b son números reales, tal que $a < b$, podemos definir los siguientes subconjuntos de R:

- **Intervalo cerrado: es el conjunto de números reales x tales que $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, y se indica:**

$$[a, b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$$

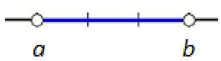
Su representación grafica en un eje sería:



- **Intervalo abierto: es el conjunto de números reales x tales que $\boldsymbol{a} < x < b$, y se indica:**

$$(a, b) = \{x \in R /\ a < x < b\}$$

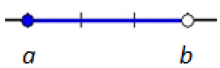
Su representación grafica en un eje sería:



- **Intervalo semiabierto o semicerrado:**

Semicerrado a izquierda o semiabierto a derecha: es el conjunto de números reales x tales que $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < b$, y se indica: $[a, b) = \{x \in R /\ a \leq x < b\}$

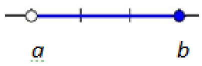
Su representación gráfica en un eje sería:



Semicerrado a derecha o semiabierto a izquierda: es el conjunto de números reales x tales que $a < x \leq b$, y se indica:

$$(a, b] = \{x \in R /\ a < x \leq b\}$$

Su representación grafica en un eje sería:



Los números reales a y b se denominan extremos, a (inferior) y b (superior). Dependerá de que pertenezcan o no al conjunto para que el intervalo sea cerrado o abierto respectivamente.

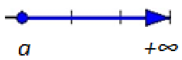
<u>Amplitud:</u> se denomina al número positivo que resulta de hacer $b - a$.
<u>Punto medio:</u> es el número que resulta de hacer $\frac{a+b}{2}$

<u>Intervalos no limitados:</u> Si a y b son números reales, podemos definir los siguientes subconjuntos de R:

- **Intervalo cerrado en *a*: es el conjunto de números reales x tales que $a \leq x$, y se indica:**

$$[a, +\infty) = \{x \in R / x \geq a\}$$

Su representación gráfica es una semirrecta de origen *a*, formada por todos los valores mayores o iguales que *a*:



Aclaración: los símbolos +∞ (infinito positivo) o -∞ (infinito negativo) no son números reales y en el extremo en los que aparecen deben ser siempre abiertos.

- **Intervalo abierto en *a*: es el conjunto de números reales x tales que $a < x$, y se indica:**

$$(a, +\infty) = \{x \in R /\ x > a\}$$

Su representación gráfica es una semirrecta de origen *a*, formada por todos los valores mayores que *a y no contiene al origen*:

- **Intervalo cerrado en *b*: es el conjunto de números reales x tales que $x \leq b$, y se indica:**

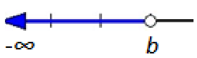
$$(-\infty, b] = \{x \in R / x \leq b\}$$

Su representación gráfica es una semirrecta de origen *b*, formada por todos los valores menores o iguales que *b*:

- **Intervalo abierto en *b*: es el conjunto de números reales x tales que $x < b$, y se indica:**

$$(-\infty, b) = \{x \in R /\ x < b\}$$

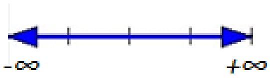
Su representación gráfica es una semirrecta de origen *b*, formada por todos los valores menores que *b y no contiene al origen*:



- **Intervalo infinito: es el conjunto de números reales x tales que $-\infty < x < \infty$, y se indica:**

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in R / -\infty < x < \infty\}$$

Su representación grafica es toda la recta numérica:



Cotas, Extremos y Elementos

- Sea *A* un subconjunto no vacío de *R* y *k* un número real que puede o no pertenecer a A. D*ecimos que k* es una ***cota superior*** si no es superado por ningún elemento del conjunto A.
  Simbólicamente: $k\ es\ cota\ superior\ de\ A\ \leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \leq k.$

  Un conjunto que admite cota superior se dice ***acotado superiormente***.

  Por ejemplo: el conjunto R^- está acotado superiormente por R^+

  Un conjunto que tiene una cota superior, tiene infinitas cotas superiores. A la menor de las cotas superiores se la denomina ***extremo superior o supremo*** de A.

  Definición: ***s*** es *extremo superior o supremo* de un conjunto A si y solo si:
  s es una cota superior de A y ***k*** es cualquier cota superior de A, entonces $\boldsymbol{s \leq k}$

  Si **s** pertenece al conjunto A recibe el nombre de ***máximo*** del conjunto. Por ejemplo, 0 es el supremo de los R^- y el máximo de R_0^-.

- Sea *A* un subconjunto no vacío de *R* y *h* un número real que puede o no pertenecer a A. D*ecimos que h* es una ***cota inferior*** de A si y solo no supera a ningún elemento de A.

  Simbólicamente: $h\ es\ cota\ inferior\ de\ A\ \leftrightarrow \forall x: x \in A \rightarrow x \geq h.$

  Un conjunto que admite cota inferior se dice ***acotado inferiormente***.

  Por ejemplo: el conjunto R^+ está acotado superiormente por R^-

  Un conjunto que tiene una cota inferior, tiene infinitas cotas inferiores. A la mayor de las cotas inferiores se la denomina ***extremo inferior o ínfimo*** de A.

  Definición: ***i*** es *extremo inferior o ínfimo* de un conjunto A si y solo si:
  i es una cota inferior de A y ***h*** es cualquier cota inferior de A, entonces $\boldsymbol{i \geq h}$

  Si ***i*** pertenece al conjunto A recibe el nombre de ***mínimo*** del conjunto. Por ejemplo, 0 es el ínfimo de los R^+ y el mínimo de R_0^+.

Axioma de completitud

- *Todo subconjunto A no vacio de R, acotado superiormente, posee extremo superior o supremo.*
- *Todo subconjunto A no vacio de R, acotado inferiormente, posee extremo inferior o ínfimo.*

VALOR ABSOLUTO

El **valor absoluto** desempeña un papel muy importante en el cálculo diferencial; por ejemplo, nos permite cuantificar la proximidad que pueden tener dos números, la cual llamaremos distancia entre los números.

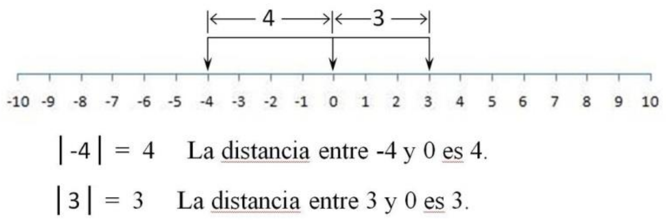
La noción de distancia entre números es la base para hablar de límites, lo cual, a su vez, es fundamental para el importantísimo concepto de derivada.
El valor absoluto de un número real *x*, positivo o negativo, es el número desprovisto de su signo; en términos precisos, lo definimos como sigue.

Definición
Se llama valor absoluto o módulo de un número real, al mismo número si es positivo o cero, y a su opuesto si es negativo. Por lo tanto el módulo de un n° real es siempre un n° no negativo.

Es decir: $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

Por ejemplo: $|5| = 5 \qquad |-3{,}1| = 3{,}1$

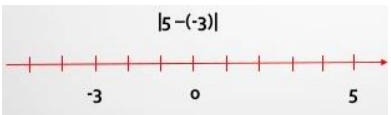
La distancia (no negativa) en la recta real entre el cero y el número real *a es el valor absoluto de a,* se escribe $|a|$



Definición: Se llama **distancia** entre los reales ***x*** e ***y*** al número real no negativo:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Ejemplo: la distancia entre 5 y -3 es: $|5 - (-3)| = |-3 - 5| = 8$



Propiedades:

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades:

1. Para todo real *x* se tiene $|x| \geq 0$. Además, $|0| = 0$ y *x* = 0 es el único real *x* que cumple $|x| = 0$, es decir $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. Para todo real *x*, se tiene $|x| = |-x|$
3. Para cualesquiera reales *x*, *y*, se tiene $|x.y| = |x|.|y|$
4. Para cualesquiera reales *x*, *y*, se tiene $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, con $y \neq 0$
5. Para cualesquiera reales *x*, *y*, se cumple la desigualdad $|x + y| \leq |x| + |y|$, conocida como **desigualdad triangular**.
6. Para todo real *x*, se cumple la desigualdad $|x| < k \leftrightarrow -k < x < k, \forall k > 0$
7. Para todo real *x*, se cumple la desigualdad $|x| > k \leftrightarrow x > k \;\text{ v }\; x < -k, \forall k > 0$

Observación:

Existen tres propiedades de los números reales que son de mucha utilidad al momento de resolver inecuaciones:

- $\sqrt[n]{x^n} = x, si\ x\ es\ un\ n°\ natural$. Pero ¿qué pasa cuando $\sqrt{(-2)^2}$? Entonces se considera que $\sqrt[n]{x^n} = |x|, \forall x \in R$
- $como \begin{cases} a^2 = |a|^2 \\ b^2 = |b|^2 \end{cases}$ entonces $|a|^2 < |b|^2 \rightarrow a^2 < b^2, \forall a, b \in R$
- $como \begin{cases} a^2 = |a|^2 \\ b^2 = |b|^2 \end{cases}$ entonces $|a|^2 > |b|^2 \rightarrow a^2 > b^2, \forall a, b \in R$

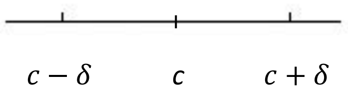
<u>ENTORNO. ENTORNO REDUCIDO</u>

Reiteradamente hablaremos de intervalo de centro *c* y radio δ o *entorno de c* para indicar los x que se encuentran a una distancia de *c* menos que δ , esto resulta ser un intervalo $(c - \delta; c + \delta)$ y de *entorno reducido de c* cuando se desee excluir el punto *c del intervalo, es decir, cuando se trate de la unión de dos intervalos* $(c - \delta; c)U(c; c + \delta)$

<u>Definición:</u>

Dado un punto *c* interior del intervalo abierto (a, b), se llama ***entorno*** del punto c de semiamplitud δ , se lo expresa $E(c, \delta)$, al conjunto de puntos que verifican la siguiente desigualdad:

$c - \delta < x < c + \delta$, donde δ es un número positivo arbitrariamente pequeño.



Dado un entorno en que el centro no pertenece al conjunto se denomina ***entorno reducido*** del punto c de semiamplitud δ , se lo expresa $E´(c, \delta)$, al conjunto de puntos que verifican:

$E'(c, \delta) = \{x \in R / c - \delta < x < c + \delta \ y \ x \neq c\}$, donde δ es un número positivo arbitrariamente pequeño.

Otra manera de definir, mediante el uso de valor absoluto, aplicando la definición de distancia.

Podemos entonces expresar el entorno del punto ***c*** como $|x - c| < \delta$ y el entorno reducido como $0 < |x - c| < \delta$

En símbolos:

Entorno: $E(c, \delta) = \{x \in R / |x - c| < \delta\}$

Entorno reducido: $E'(c, \delta) = \{x \in R / 0 < |x - c| < \delta\}$

DEFINICIONES IMPORTANTES:

Punto interior de un conjunto:

Definición: Sean A $\subseteq$ R y $a \in A$, al punto *a* lo llamaremos punto interior del conjunto A sí y sólo sí, existe al menos un intervalo abierto de centro *a* incluido en el conjunto A. (existe al menos un entorno de *a* en el conjunto A)

Simbólicamente: $a \ es \ un \ punto \ interior \ de \ A \ \leftrightarrow a \in R \ y \ \exists \ E(a) \subseteq A.$

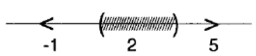
Por ejemplo: Sea $A\left(-2, \frac{1}{2}\right]$ el punto $a = \frac{1}{2}$ no es punto interior porque no existe un $\delta > 0 \ , donde \ el \ E(\frac{1}{2}, \delta)$ esté totalmente incluido en el conjunto A.

Punto de Acumulación:

Definición: Sean A $\subseteq$ R y $a \in A$, al punto *a* lo llamaremos punto de acumulación del conjunto A sí y sólo sí, todo intervalo abierto de centro *a* contiene por lo menos un elemento $x \neq a$ en el conjunto A.

Simbólicamente: $a \ es \ un \ punto \ de \ acumulación \ de \ A \ \leftrightarrow \forall E'(a) \colon \exists x \in A \ y \ \ x \in E'(a)$

Ejemplo.- Si A = [-1,5] entonces 2 es un punto de acumulación de A, es decir: existe un entorno de 2 que tienen puntos de intersección con A.



Observación: El punto de acumulación *a* del conjunto A no es necesario que dicho punto sea elemento del conjunto A.

UNIDAD TEMÁTICA I: FUNCIONES

Uno de los conceptos más importante de la matemática, es sin duda el de *función*. En este curso nos limitaremos al estudio *funciones de una variable real*.
En términos poco formales podemos decir que una *función* es una regla u operación, que asigna a cada número real de un conjunto, un único número real.
Por ejemplo:
La razón entre cierto número y el doble de su siguiente: $\frac{x}{2(x+1)}$
El doble de la raíz cuadrada de la longitud del hilo de un péndulo: $2\sqrt{l}$
El producto de la masa por la aceleración de la gravedad: *m.g*
Como podemos observar en estas *expresiones algebraicas*, las letras representan *variables* y tomarán valores pertenecientes al conjunto de números reales. Pero como vemos en estos ejemplos, no siempre la regla es aplicable a todo número real. El conjunto de los números a los cuales podemos aplicar la regla lo denominaremos Dominio.
Por ejemplo:
En $\frac{x}{2(x+1)}$, deberá ser $2(x+1) \neq 0$, es decir $x \neq -1$, por lo que x podrá tomar valores reales distintos de -1. Simbólicamente seria $\forall x \in R - \{-1\}$

En $2\sqrt{l}$, *l* deberá ser mayor o igual a cero. Simbólicamente seria $\forall\ l \in R_0^+$

Resulta conveniente introducir una notación adecuada, que facilite la escritura y permita referirnos a las funciones en forma general. Para ello es habitual asignar a la *variable* con la letra ***x*** y designar a las *expresiones algebraicas* con las letras *f, g, h.* Escribiendo *f(x)* para simbolizar el conjunto de reglas u operaciones a realizar sobre el número ***x*** para obtener el numero ***y***, que asocia ***f*** con ***x*** y que simbolizamos con ***y = f(x),*** que solo tiene sentido con *x* que pertenece al *Dominio de f*.
Por lo tanto, nuestros ejemplos anteriores quedarían expresados así:

- $f(x) = \frac{x}{2(x+1)} \quad \forall x \in R - \{-1\}$
- $g(x) = 2\sqrt{x} \quad \forall x \in R_0^+$

En general, el Dominio se deberá restringir, para que la función tenga sentido al momento de reemplazar x, por un número.
Una vez definida la función y establecido el conjunto de valores que puede tomar x (Dominio); podemos establecer que la función quedará formada por todos los pares ordenados ***(x, y)***, donde el valor de x es el primer elemento y el segundo elemento es el valor ***f*** aplicada a ***x.***
Como sucede en cada uno de los ejemplos a cada valor que se le asigna a ***x***, por ***f*** se obtendrá un ***único*** valor de ***y***, es decir existe una relación de dependencia de ***y*** con respecto a ***x***. Por lo que a ***x*** se la llama *variable independiente*; y a ***y*** se la llama *variable dependiente.*

DEFINICIÓN:

Dados los conjuntos A y B con $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$

***f* es una función de A en B si y solo si *f* es un relación de A en B tal que todo elemento de A tiene un único correspondiente en B.**

-Simbolizaremos así:

$f \subset$ A x B (se lee A producto cartesiano B)

$$\boldsymbol{f\ es\ función\ de\ A\ en\ B} \leftrightarrow \{\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \exists!\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}/(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}$$

Otra manera de definirlo:

$\boldsymbol{f\ es\ función\ de\ A\ en\ B} \leftrightarrow \{\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \forall\ \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in \boldsymbol{B}: (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_1}) \in \boldsymbol{f}\text{^}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_2}) \in \boldsymbol{f} \rightarrow \boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_2}$

- Se denotará:

$\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *(a x se le asigna f(x))*

Y deberá tenerse en cuenta que:

1) Los elementos de f son pares ordenados de la forma *(x, f(x*))
2) *f* no es lo mismo que *f(x), f(x*) es la imagen de *x* por *f.*
3) con Dom. o D_f se denotará al Dominio de la función *f,* siendo *A* = D_f
4) el conjunto de los valores que toma y se llama ***Imagen de la función***, se denota Im_f, siendo $Im_f \subset$ B

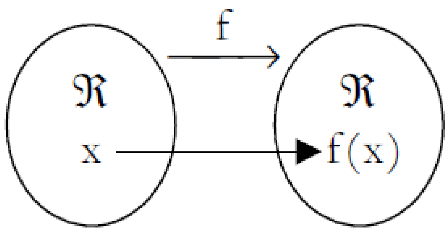
Hasta acá se introdujo de manera general los conceptos de relación, dominio y codominio, ya que se definió a la función como un caso particular de relación.
Desde este momento trabajaremos exclusivamente con las llamadas funciones reales de variable real, por lo que resulta esta nueva definición:

DEFINICIÓN:

Sean A y B dos subconjuntos no vacios de R

A toda función f: $A \rightarrow B$ se dirá que* es una *función real de variable real

Por lo que la frase " función real" indica que la variable independiente solo toma valores reales, denominádose "variable real" y resultando el conjunto dominio y codominio subconjuntos de R.



<u>Dominio de definición o Máximo dominio</u>

Como vimos en la definición, una función es una regla que permite asociar a cada elemento del dominio un único elemento del codominio. Por lo tanto, expresiones (reglas de cálculo) como:

$f(x) = x^2 - 5x + 4$ $\quad g(x) = 10^x$ $\quad h(x) = senx$ $\quad m(x) = \frac{3}{x-1}$

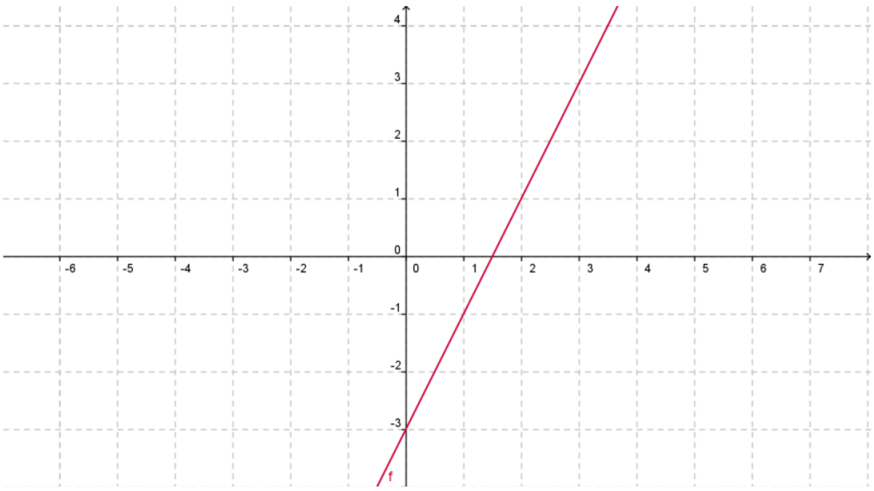
No son funciones, porque no se prescribe los correspondientes dominios y codominios.

Definición:
Sea $f(x)$ una regla de cálculo. Se define el **Dominio de Definición** (o Máximo Dominio) de f como el más grande subconjunto de R donde la regla tiene sentido, esto es, donde se respetan las propiedades de los números reales y donde *f(x)* transforma reales en reales.

Como trabajaremos con funciones cuyo dominio y recorrido son conjuntos de números reales (funciones de una variable real o bien funciones reales de una variable real), se las puede representar gráficamente en un sistema de ejes cartesianos ortogonales. Donde en el eje de las abscisas se ubican los valores del Dominio, y como los elementos de f, esta dado por pares ordenados *(x, f(x))* donde *y = f(x),* cada uno de los pares representa un punto, cuya unión resulta la gráfica de la función.

Por ejemplo:

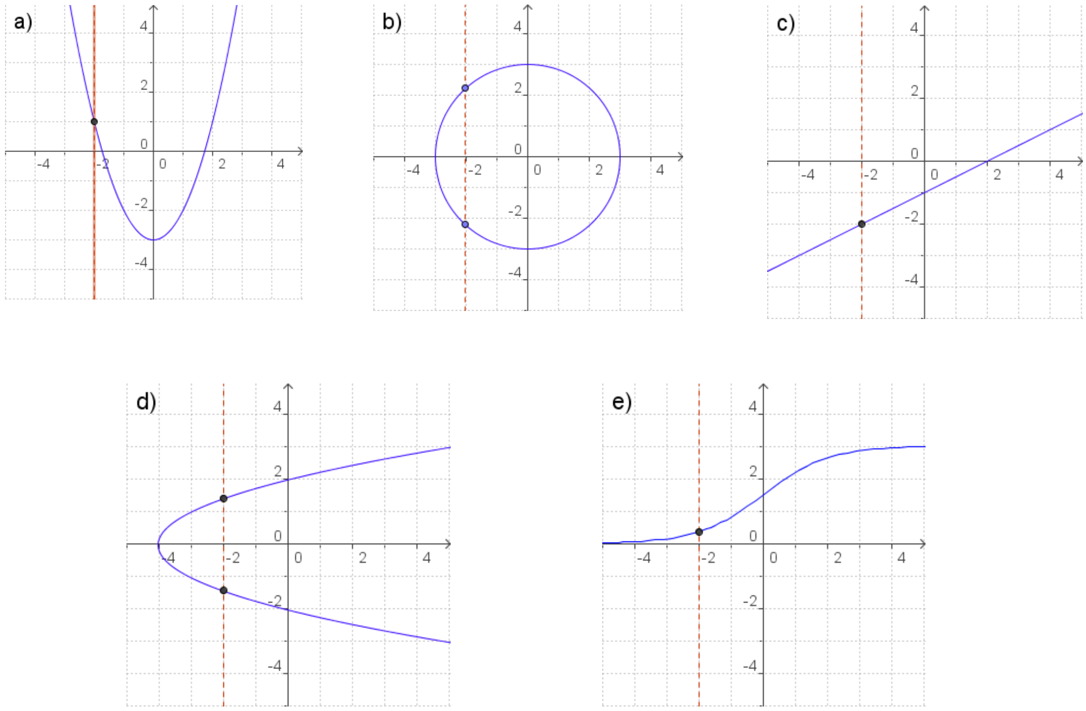
Sea $f: R \to R / f(x) = 2x - 3$



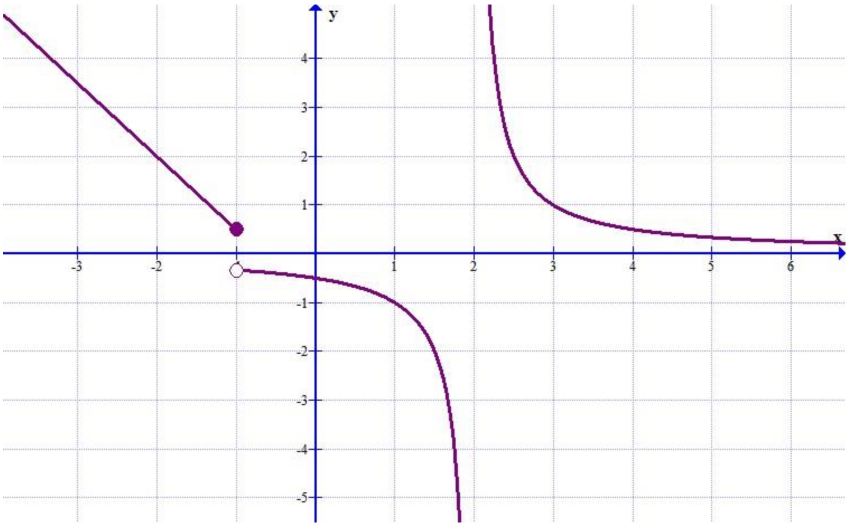
x	f(x)
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1
3	3

Para pensar y aplicar lo leído:

De las siguientes gráficas, señala cuáles corresponden a una función y cuáles no. Justifica.



Para pensar y aplicar lo leído: Dada la siguiente función $y = f(x)$



a) Determina el valor aproximado de $f(4), f(-2), f(-1), f(0), f(f(3))$
b) ¿En qué punto(s) f no está definida?
c) Determina el Dominio de f
d) Preimagen(es) de -0,1
e) Determina el recorrido o imagen de f
f) *Determina el valor x_a, tal que:*
   $f(x_a) = 0$, $\quad f(x_a) = -2$, $\quad f(x_a) = 1/2$, $\quad f(x_a) = 2$
g) *Por simple observación de una gráfica es posible resolver inecuaciones. ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $f(x) \leq 0{,}5$?*
h) *Cuando se consideran valores de x suficientemente grandes ¿cuál es el comportamiento de f?*
i) ¿Cuáles son los ceros de la función?
j) Indique los intervalos de positividad y negatividad.

OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas dos funciones *u* y *v tales que* $u(x): R \to R$ y $v(x): R \to R$ *, se definen:*

Suma y resta: $f(x) = (u \pm v)(x) = u(x) \pm v(x) \quad \forall x \in Dm(u) \cap Dm(v)$

Producto: $f(x) = (u.v)(x) = u(x).v(x) \quad \forall x \in Dm(u) \cap Dm(v)$

Cociente: $f(x) = \left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \forall x \in Dm(u) \cap Dm(v) \; y \; v(x) \neq 0$

Potencia: $f(x) = u^v(x) = u(x)^{v(x)} \ \forall x \in \ Dm(u) \cap Dm(v)$

Raíz: $f(x) = \sqrt[k]{u} = \sqrt[k]{u(x)} \quad , con\ k > 0 \quad y\ u(x) \geq 0$

Logaritmo: $f(x) = log_k u = log_k u(x) \quad , con\ k > 0, k \neq 1 \quad y\ u(x) > 0$

Por ejemplo, si $u: \Re \mapsto \Re$ y $v: \Re \mapsto \Re$ son tales que $u(x) = x^2$ y $v(x) = 1/(1+x)$, entonces:

1) $f = u + v$ es la función tal que $f(x) = x^2 + (1/(1+x))$
2) $f = u.v$ es la función tal que $f(x) = x^2/(1+x)$
3) $f = u/v$ es la función tal que $f(x) = x^2.(1+x)$
4) $f = u^v$ es la función tal que $f(x) = (x^2)^{1/(1+x)}$
5) $f = \sqrt[7]{u}$ es la función tal que $f(x) = \sqrt[7]{x^2}$
6) $f = \log_5 u$ es la función tal que $f(x) = \log_5 x^2$

¿Existirá otra forma de combinar funciones, que permita obtener una nueva función o si es posible definir una nueva función que saliendo del codominio nos permita llegar al dominio? La respuesta es afirmativa en ambos casos y da lugar a lo que se denomina función compuesta y función inversa, respectivamente.

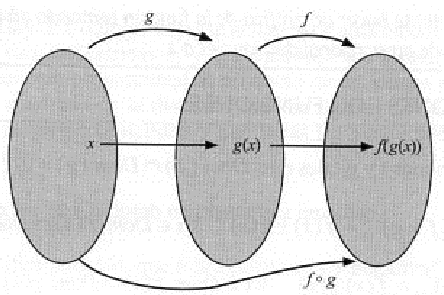
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Existe otra forma de combinar las funciones para obtener otra función. Por ejemplo, si se supone que $y = f(u) = 7u \quad y \quad u = g(x) = 5x - 4$. Dado que *y* es una función de *u* y *u* es una función de *x*, se deduce por sustitución que *y* es función de *x*, obteniendo $y = 7(5x - 4) = f(g(x))$. Este procedimiento es llamado ***composición de funciones***, porque la nueva función está compuesta de las dos funciones *f* y *g*.

En general, dadas dos funciones *f* y *g,* si se comienza con un elemento x en el dominio de *g*, para obtener *g(x)* y este elemento se encuentra en el dominio de *f*, es posible aplicar *f* a *g(x)* y obtener el elemento f(g(x)).

DEFINICIÓN:
Dadas dos funciones *f* y *g*, se llama función compuesta *f o g* (se lee *g* compuesta con *f*) a la función definida por $(f o g)(x) = f\big(g(x)\big)$ y existe siempre que *Im g(x)* ⊆ *Dom f(x)*

En el siguiente diagrama visualizamos como se da la composición de funciones:



Imagina que una máquina toma una botella de gaseosa, la llena y luego la tapa. El llenado de la botella será la primera función que se aplica, y taparla sería la segunda función que se aplica. Por lo que la máquina estaría haciendo una composición de funciones $f\ o\ g$ (x). En este caso, podemos ver que no es posible invertir el orden de las tareas, de modo que puede no existir *g o f*, o bien, o a pesar de existir, puede no cumplirse que *f o g* (x)= *g o f*(x).

<u>Actividad N° 4</u>: Dadas las siguientes funciones $f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g(x) = x + 5$.

a) Determina el Dominio y codominio de cada una de ellas.
b) Determina: *f o g* (x) y *g o f*(x).
c) Analiza y compara el Dominio de cada una de las funciones compuestas.
d) ¿Se cumple *f o g* (x)= *g o f*(x)?

<u>FUNCIÓN INVERSA</u>

Recordemos que una función es un modelo matemático que puede expresar, por ejemplo el proceso en el cual el plástico se transforma en bolsas. ¿Bajo qué circunstancias es posible recuperar la materia prima (plástico) a partir del producto (bolsas)?
Es intuitivo el hecho de que no siempre es posible encontrar un proceso inverso.
Matemáticamente, buscamos condiciones sobre la función f de manera que tenga una función inversa. Siguiendo nuestro ejemplo del plástico, se hace claro que buscamos la función tal que:

$$g[f(x)] = x, \forall x \in Dom(f)$$
$$f[g(y)] = y, \forall y \in Dom(g)$$

Las condiciones de las que hablamos son los conceptos de inyectividad y sobreyectividad, que desarrollaremos a continuación:

<u>CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES</u>

Una FUNCIÓN ES <u>INYECTIVA</u> cuando para todo par de elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas. Simbólicamente si:

$$\forall a, \forall b \in D_f \ / \ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Es decir: a cada elemento del Rango le corresponde un único elemento del dominio,

*Una FUNCIÓN ES <u>SOBREYECTIVA</u> si para todo **y** perteneciente al conjunto de llegada existe un x perteneciente al dominio tal que y=f(x). Simbólicamente si:*

$$\forall y_0 \in \mathrm{Im}(f), \exists x_0 \in Dom(f) \ / \ f(x_0) = y_0$$

Es decir*: f es sobreyectiva si el rango coincide con el conjunto imagen,* $Im_f = B$

Una FUNCIÓN ES <u>BIYECTIVA</u> si es inyectiva y sobreyectiva.

Por lo tanto, si f es una función biyectiva entonces *a cada elemento* $y \in Im(f) = Rg(f) le\ corresponde\ un\ único\ x \in Dom(f)$ y entonces podemos definir la función:
$f^{-1}: Rg(f) \to Dom(f) / f^{-1}(y) = x$, que llamaremos función inversa.

Teorema:

La función $f: A \to B$ admite inversa si y solo si es biyectiva

FUNCIÓN INVERSA

Se llama FUNCIÓN INVERSA de una función biyectiva a $f: A \to B$ a la función $f^{-1}: B \to A / f^{-1}(y) = x$ si y solo si $f(x) = y$.
Por ejemplo, la función $f: R \to R / f(x) = x^3$ es biyectiva y es invertible ya que posee función inversa $f^{-1}: R \to R / f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

ANÁLISIS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Recordemos que una función es el modelo más aproximado de un fenómeno real: físico, financiero, biológico, etc.es importante extraer y utilizar el máximo de información sobre el fenómeno a partir el análisis de su gráfica.
Como ya definimos anteriormente el par $(x; f(x))$ con $x \in Domf$, conforma un subconjunto del plano lo que determina la representación gráfica de la función *f.*
En cada grafica de una función se podrá visualizar y conjeturar propiedades y y características inherentes a la función y predecir resultados, esto es importante porque permiten tomar decisiones de manera inmediata.
Dichas características las trabajaremos en los siguientes conceptos: paridad, periodicidad, monotonía, invertibilidad.

Por ejemplo:

- si una función es par o impar, basta con manejar la mitad derecha o izquierda de la función
- si una función es periódica, basta con manejar la función en una región mucho más pequeña que el dominio
- si una función es invertible, entonces existe un proceso (función inversa) por el cual los productos pueden reconvertirse en materia prima
- si una función es monótona, entonces las imágenes sólo crecen o decrecen cuando nos desplazamos.

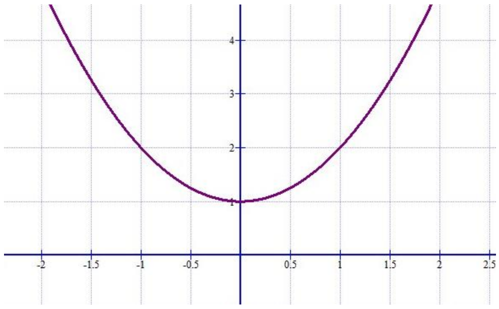
A continuación desarrollaremos cada una de las condiciones mencionadas:

➢ **Paridad**

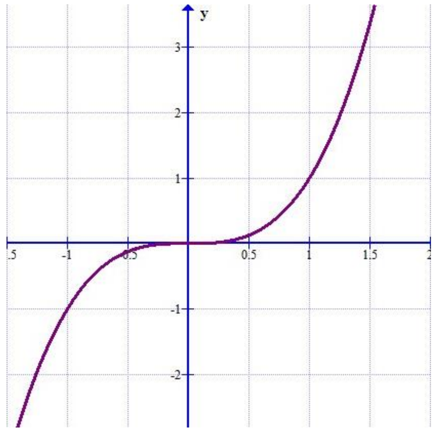
Sea f una función real:

- Se dice que f es una función par si $f(x) = f(-x), \forall x \in Dom(f)$
- Se dice que f es una función impar si $f(x) = -f(-x), \forall x \in Dom(f)$

Como podemos observar en el siguiente ejemplo: $f(x) = x^2$, es una función par y su grafica es simétrica con respecto al eje de las ordenadas



Como podemos observar en el siguiente ejemplo: $f(x) = x^3$, es una función impar y su grafica es simétrica con respecto al origen del sistema de ejes cartesianos. Es importante tener en cuenta que en la función impar, siempre $f(0) = 0$



➢ **Periodicidad**

En la naturaleza hay muchos fenómenos que presentan un comportamiento cíclico o periódico, por ejemplo las ondas de radio.

El modelo matemático, más simple, que permite modelar un fenómeno periódico se presenta de la siguiente manera:

> Definición:
> Se dice que una función $f: R \to R$ es periódica si existe un número $p > 0$ tal que:
> $$f(x + p) = f(x) , \forall x \in R$$

El ejemplo más importante en este tipo de funciones son las *funciones trigonométricas* que desarrollaremos próximamente.

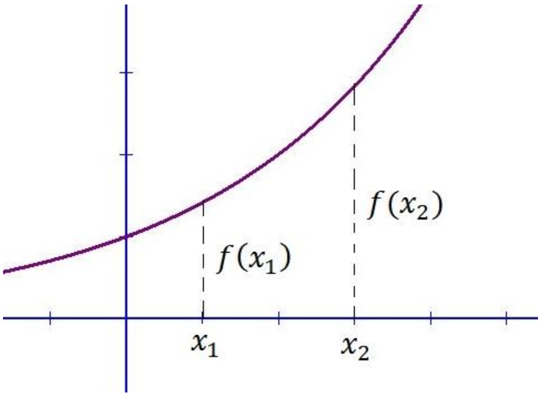
Monotonía

Cuando el dominio de una función no es finito, lo que la confección de una tabla solo permitirá conocer algunas imágenes del dominio, es útil poder establecer el comportamiento de la grafica de la función para una mejor representación.

Definición:
Se dice que una función $f: R \rightarrow R$ es:

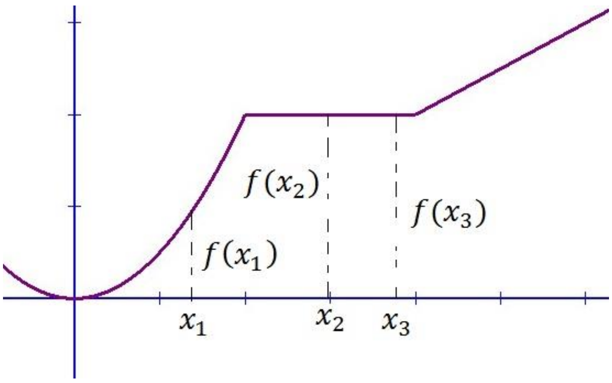
- **monótona creciente** si dados cualesquiera de $x_1, x_2 \in Dom\, f\ con\ x_1 < x_2$, es $f(x_1) \leq f(x_2)$
- **monótona estrictamente creciente** si dados cualesquiera de $x_1, x_2 \in Dom\, f\ con\ x_1 < x_2$, es $f(x_1) < f(x_2)$
- **monótona decreciente** si dados cualesquiera de $x_1, x_2 \in Dom\, f\ con\ x_1 < x_2$, es $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **monótona estrictamente decreciente** si dados cualesquiera de $x_1, x_2 \in Dom\, f\ con\ x_1 < x_2$, es $f(x_1) > f(x_2)$

Por ejemplo:



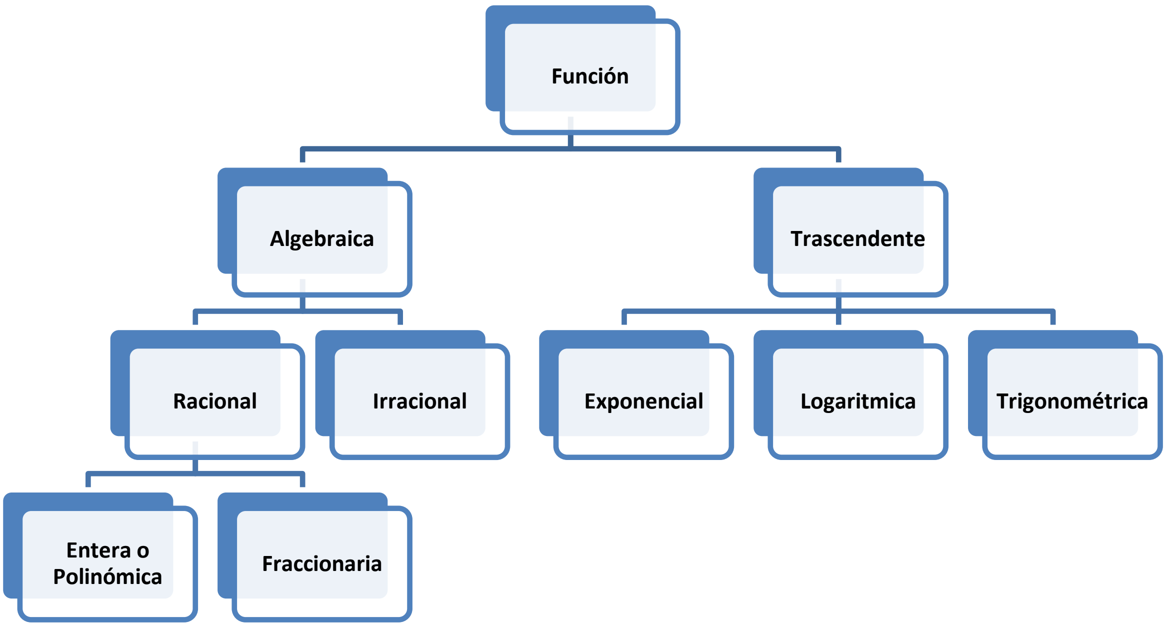
Función estrictamente creciente

Función creciente



$x_1 < x_2 < x_3 \quad resulta\ f(x_1) < f(x_2) \leq f(x_3)$

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES, SEGÚN SU EXPRESIÓN ALGEBRAICA



FUNCIONES ALGEBRAICAS

Son aquellas en las que las variables se relaciones por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación y radicación.

Por ejemplo: $f(x) = 3x - 5x^5$ $\quad g(x) = \frac{3x}{4x-4} + 3x$ $\quad h(x) = \sqrt{3x-5}$

Son aquellas en las que las variables se relaciones por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación Son aquellas en las que las variables se relaciones por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente y potenciación. Entre ellas se encuentran las polinómicas o enteras y las Fraccionarias, las que desarrollaremos a continuación:

- **FUNCIÓN ENTERA O POLINÓMICA**

DEFINICIÓN: La **Función Polinómica** es toda expresión de la forma:
$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \cdots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$, donde $a_n$es diferente de cero.
En esta definición se dice que es una ***función polinómica de n-ésimo grado.***
$\boldsymbol{a_n};\ \boldsymbol{a_{n-1}}; \ldots; \boldsymbol{a_2};\ \boldsymbol{a_1};\ \boldsymbol{a_0}$ Son números Reales y se denominan ***coeficientes de la función***; $\boldsymbol{a_n}$ es el coeficiente principal, $\boldsymbol{a_0}$ es el coeficiente del término independiente; $\boldsymbol{n}$ es el grado de la función.

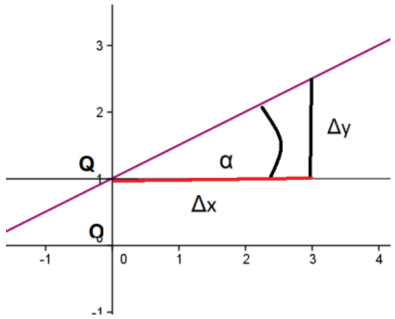
Nota: una función constante, diferente de cero, es un polinomio de grado cero, una función lineal es un polinomio de primer grado, una función cuadrática es un polinomio de segundo grado.

FUNCIÓN LINEAL

Llamamos **función lineal** a toda función de la forma:

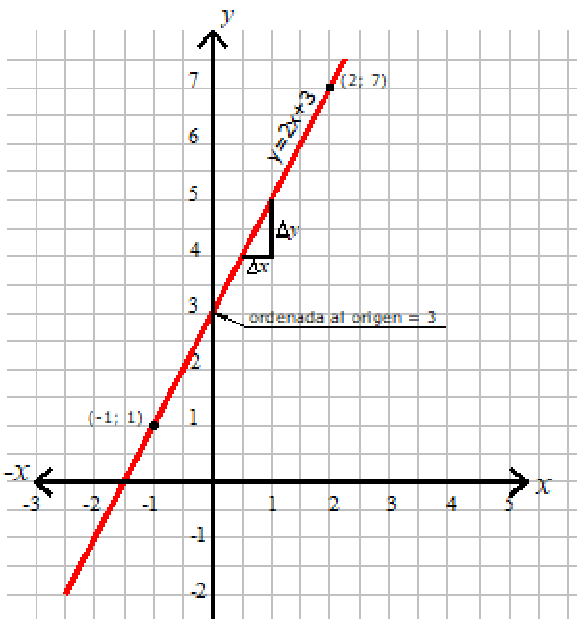
$L = \{I\ C\ R \rightarrow R : x \in I / y = L(x) = mx + b\}$, donde m y b son constantes reales.

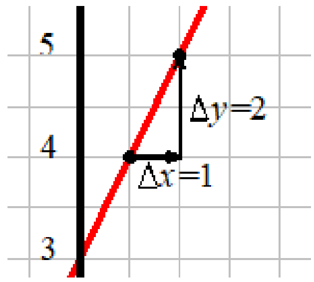
El gráfico de L cruza al eje de las ordenadas (Y) en (0;b). Si $m \neq 0$, el gráfico de L cruza el eje de las abscisas(X) en (-b/m;0). Si $m = 0$, la gráfica de L es una recta paralela al eje de las X y se la denomina *función constante.*



En la expresión ***m =tg α*** es el coeficiente angular o pendiente de la recta (parámetro d dirección); $\overline{\boldsymbol{OQ}} = \boldsymbol{b}$ es la ordenada al origen (parámetro de posición). Si b = 0 la recta pasa por el origen. Si a = 0, es decir la ecuación de la recta es y = cte., es una recta paralela al eje x.
La pendiente (inclinación) de una función lineal "m" es la variación de la variable dependiente dividido por el respectivo cambio variable independiente. $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ejemplo: $f(x) = 2x + 3$





$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$$

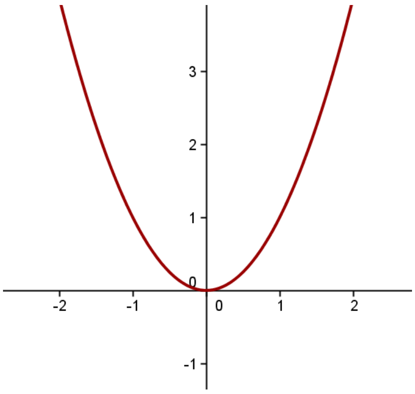
- Vemos en este ejemplo la pendiente m = **2.**
- La ordenada al origen, b = **3**, que es donde corta al eje y.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

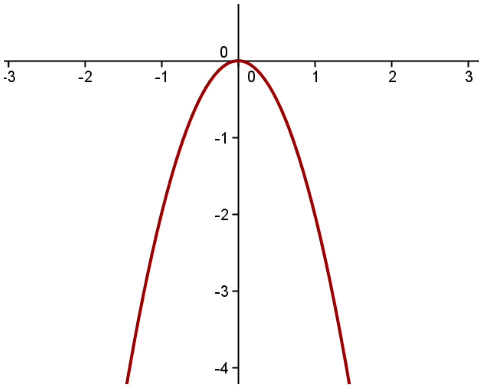
Es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. L a grafica de esta función es una parábola vertical abierta hacia arriba o hacia abajo según sea el valor de "***a***" positivo o negativo.

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado foco (Vértice) y de una recta llamada directriz (Eje de simetría).

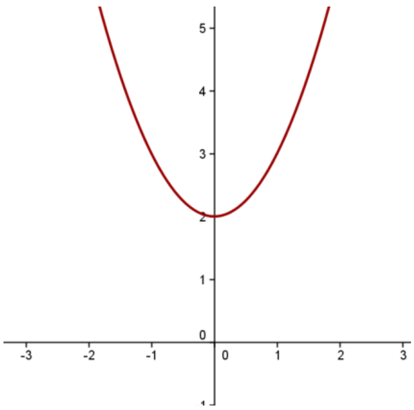
$y = ax^2, con\ a > 0$



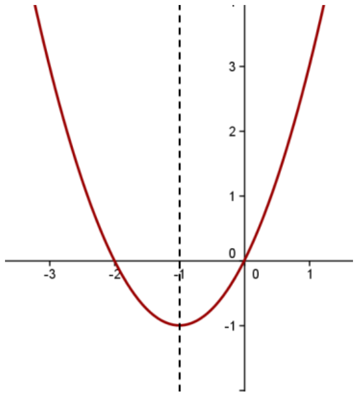
$y = ax^2, con\ a < 0$



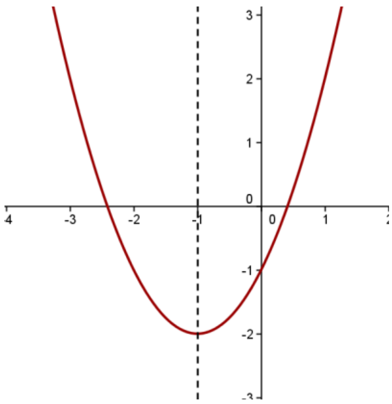
$y = ax^2 + c$



$y = ax^2 + bx$

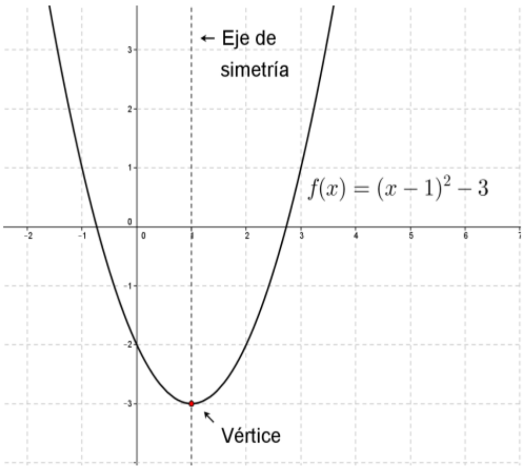


$y = ax^2 + bx + c$

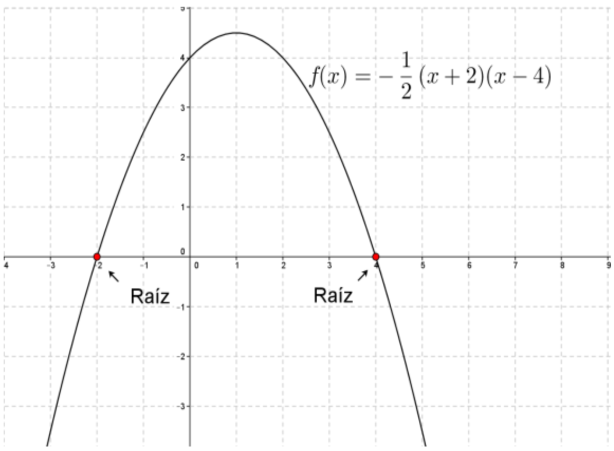


A continuación presentaremos ejemplos de funciones polinómicas:

1. El siguiente grafico corresponde a la función $y = (x-1)^2 - 3$, la cual esta expresada en forma canónica y corresponde a una parábola cóncava.



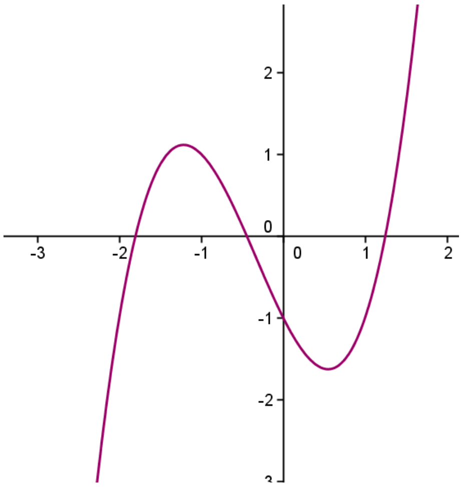
2. El siguiente grafico corresponde a la función $y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$, la cual esta expresada en forma factorizada y corresponde a una parábola convexa.



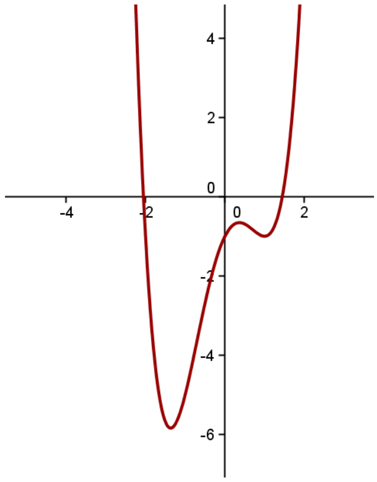
FUNCIÓN POLINÓMICA

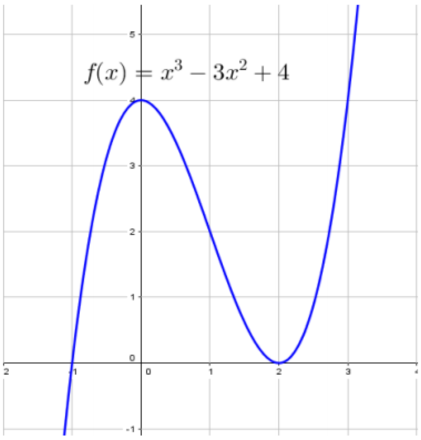
Decimos que es una función polinómica de grado n, cuando su expresión es un polinomio de grado n. y su gráfica recibe el nombre de parábola de grado n. Por ejemplo:

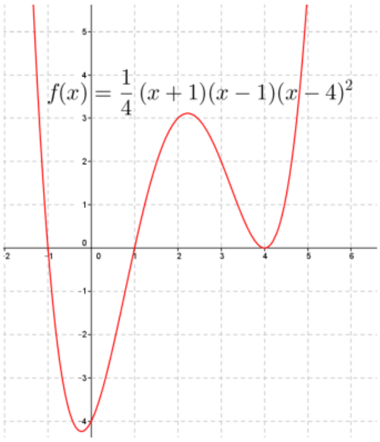
$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$



$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$







- **<u>FUNCION RACIONAL FRACCIONARIA:</u>**

  Es el cociente de dos polinomios y tiene la forma:

  $$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

  Los valores de x que anulan el denominador y no anulan al numerador se llaman polos o infinitos de la función.

  Los valores de x que anulan al numerador y no anulan al denominador se llaman raíces o ceros de la función.

<u>FUNCIÓN HOMOGRÁFICA o BILINEAL:</u>

Es el cociente entre dos funciones lineales del tipo: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Los coeficientes numéricos cumplen con las siguientes condiciones:

$a)\ c \neq 0$, porque si lo fuera la función se reduciriá a una función lineal del tipo: $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$

$b)\ el\ denominador\ debe\ ser\ distinto\ de\ cero, por\ lo\ que\ resulta: x \neq -\frac{d}{c}$

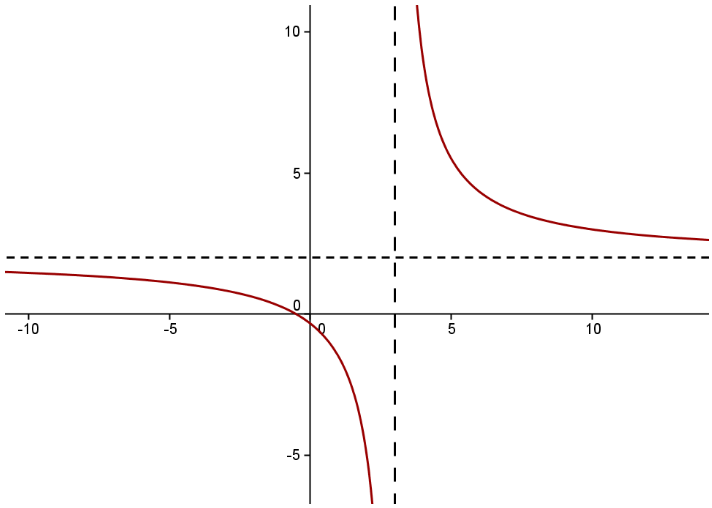
$c)\ bc - ad \neq 0$, ya que de serlo significaría que el resto del cociente seria cero, es decir exacta. Lo que significaría que se podría expresar a la función como $y = cte$.

Podemos observar que cuando x se aproxima al valor $-\frac{d}{c}$ la función y, toma valores muy grandes, lo que expresamos como que y tiende a infinito ($y \to \infty$), este valor que anula el denominador se llama infinito o polo de la función. La recta de ecuación $x = -\frac{d}{c}$, es paralela al eje ***y*** y se llama asíntota vertical de la función homográfica.

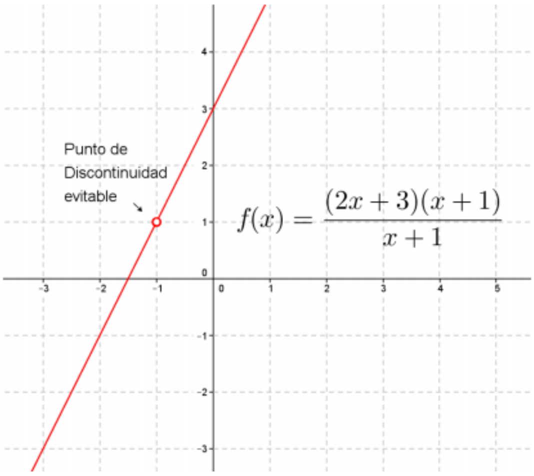
Cuando x toma valores muy grandes, decimos que x tiende a infinito ($x \to \infty$) , la función toma valores próximos a $\frac{a}{c}$, decimos que la recta $y = \frac{a}{c}$ es una recta llamada asíntota horizontal a la función homográfica.

Ejemplo: $y = \frac{2x+1}{x-3}$

con asíntota vertical en x = 3 y asíntota horizontal en y = 2.



Otro ejemplo:

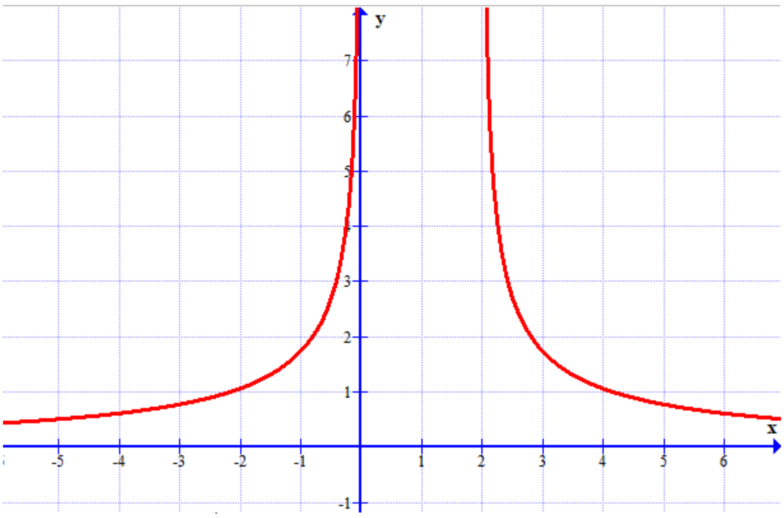


II. **FUNCIÓN IRRACIONAL:**

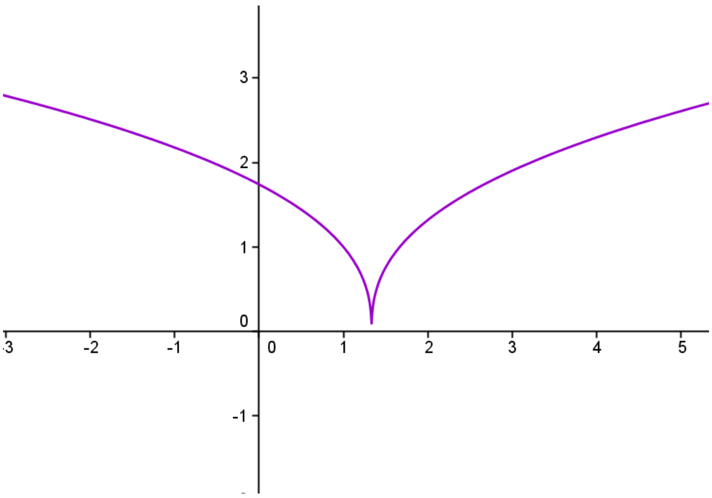
Son aquellas en las que las variables, además de relacionarse por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación, aparecen también las de radicación o exponentes racionales no enteros.

Por ejemplo:

$$y = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$



$$y = (3x - 4)^{\frac{2}{5}}$$



FUNCIONES TRASCENDENTES

Se llaman Funciones Trascendentes porque su expresión trasciende el campo del algebra.

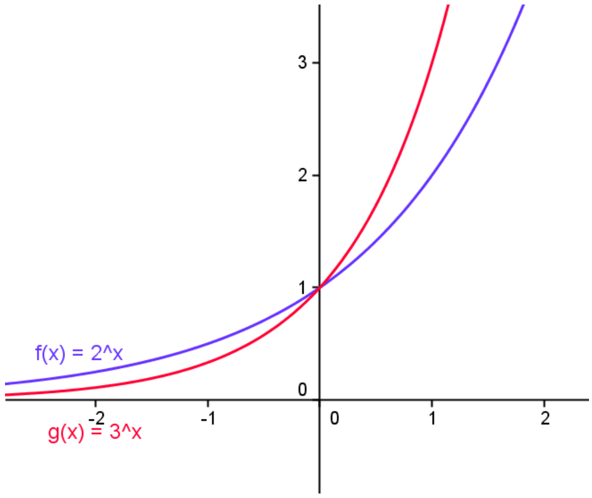
Entre ellas se encuentran:

I. FUNCIÓN EXPONENCIAL

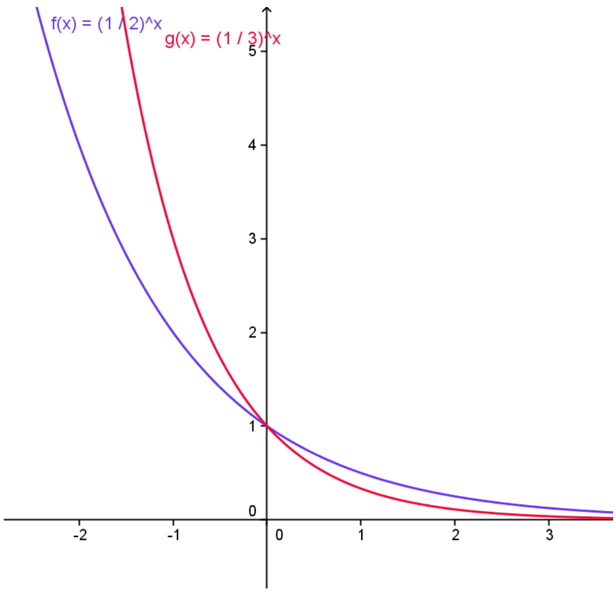
La función exponencial es una función de la forma $f_{(x)} = a^x$, donde ***a*** es un número real mayor que **cero** y distinto de 1, $(a \neq 1 \ \ y \ \ a > 0)$.

Desde el punto de vista grafico resulta:

Si $a > 1$



Si $0 < a < 1$



Se cumple:

a) Dominio de la función: los números reales, $D(f) = R$

b) Si a> 1 la función es creciente

c) Si 0 < a < 1 la función es decreciente

d) La función es positiva para cualquier valor de x, $f(x) > 0$

e) Posee una asíntota horizontal en y=0

Observación:
Es de mucha importancia el caso particular en que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$ donde el número irracional

$$\boldsymbol{e} = \mathbf{2,718281828459} \ldots$$

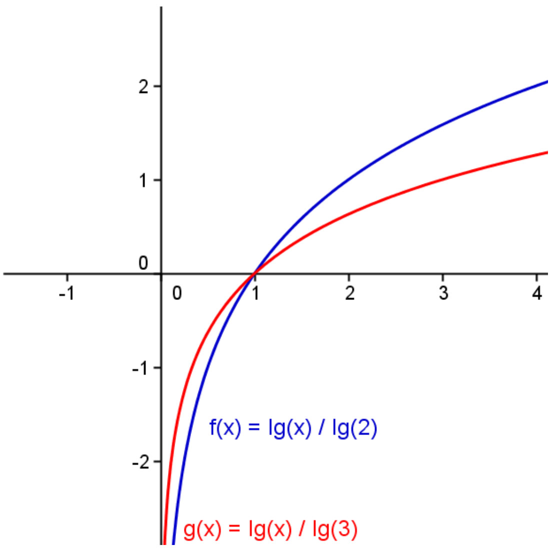
es conocido como número de Neper (número e) . Se la expresa como $\boldsymbol{e^x}$ (función exponencial natural), forma parte de las funciones exponenciales.

II. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

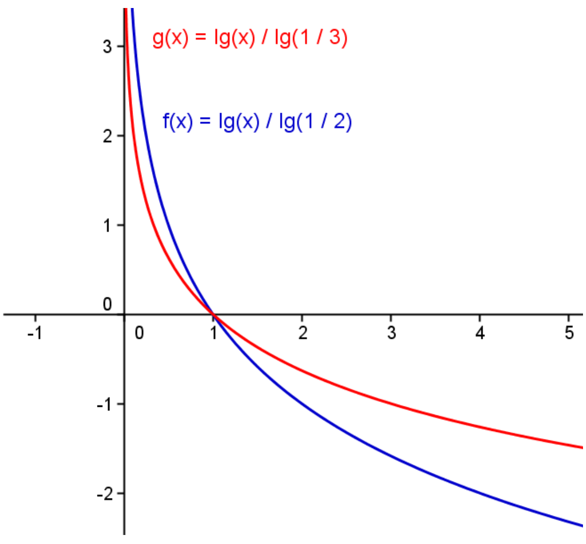
La función logarítmica es una función de la forma $f_{(x)} = \log_a x$, donde *a* es un número real mayor que cero y distinto de 1 $(a \neq 1 \;\; y \;\; a > 0)$.

Desde el punto de vista grafico resulta:

Si $\boldsymbol{a} > 1$



Si $0 < \boldsymbol{a} < 1$



Se cumple:

a) Dominio de la función: los números reales, excluido el cero, $D(f) = R^+ - \{0\}$

b) Su función inversa es la función $f(x) = a^x$

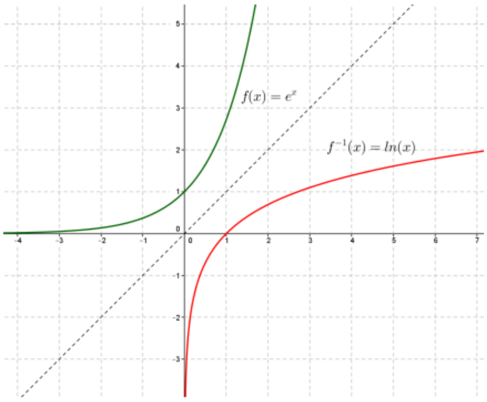
c) Si a > 1 la función es creciente
d) Si 0 < a < 1 la función es decreciente
e) posee una asíntota vertical en x = 0

Observación:
Es de mucha importancia el caso particular en que $a = e$. En caso se denota $log_e = ln$ y se refiere como logaritmo natural o logaritmo neperiano.

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

La función $f: R \to (0,\infty)/f(x) = e^x$ es biyectiva por lo que tiene inversa:

$$f^{-1}: (0,\infty) \to R/f^{-1}(x) = \ln(x)$$

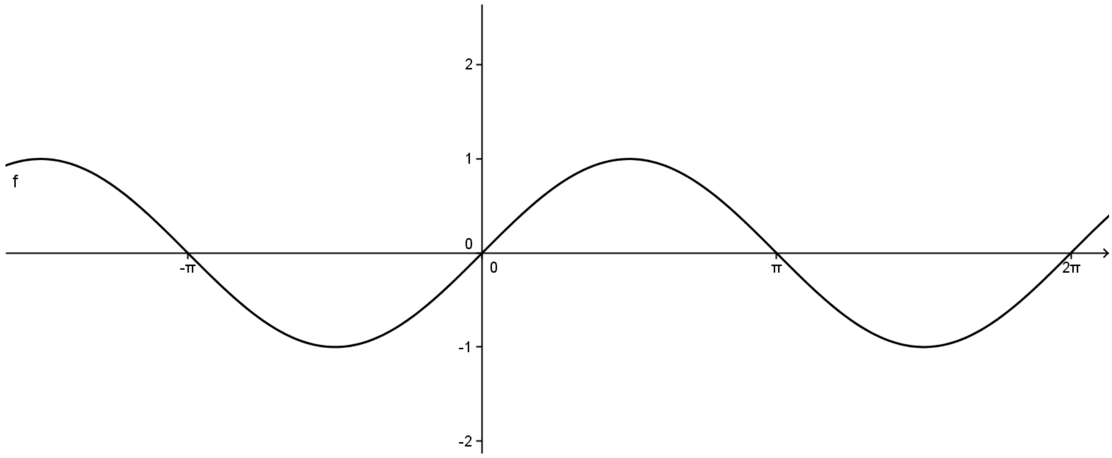


III. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las tres funciones trigonométricas más importantes son el seno, coseno y tangente. Las funciones trigonométricas son funciones **periódicas.**

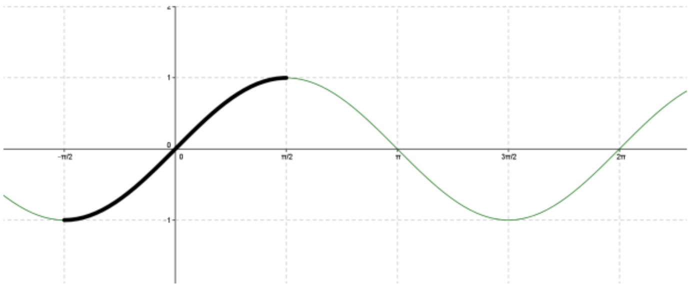
Observación: En las funciones trigonométricas calcularemos $senx$, $cosx$ o tgx en los cuales el argumento (ángulo) se describe en radianes y no en grados sexagesimales. Por lo que: $180° = \pi\, rad = \pi$

- **FUNCIÓN SENO**
  Es la función definida por $f: R \to R\ /\ f(x) = senx$, los valores de x deberán estar dadas en radianes.



Este grafico se denomina **sinusoide**, su período es 2π. Su imagen varía entre [-1,1]. Es una función impar.

Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por lo que no tendrá función inversa.

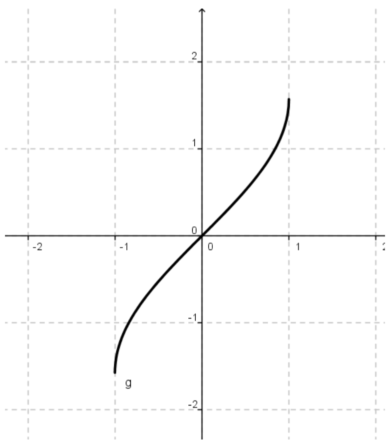


Sin embargo podemos redefinirla para que sea biyectiva y tenga función inversa.

$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \ / \ f(x) = senx$$

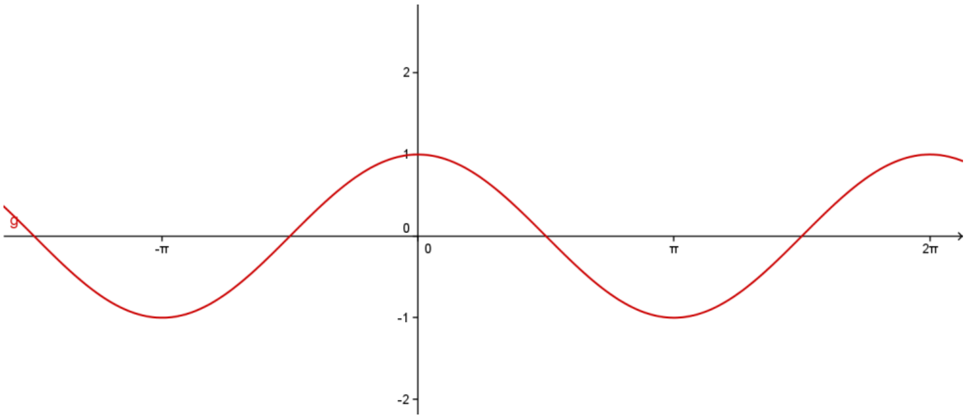
La función inversa es

$$f^{-1}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ / \ f^{-1}(x) = arcsenx$$



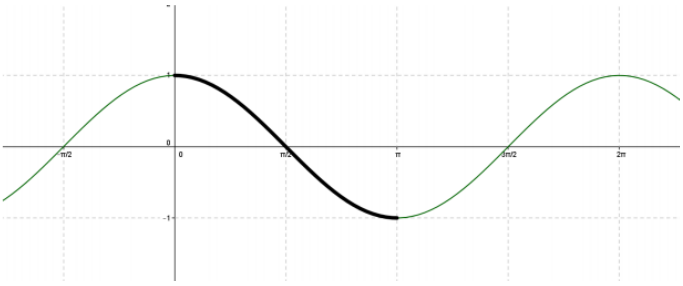
- **FUNCIÓN COSENO**

Es la función definida por $f: R \to R \,/\, f(x) = cosx$



Este grafico se denomina **cosenoide**, su período es 2π. Su imagen varía entre [-1,1]. Es una función par.

Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por lo que no tendrá función inversa.

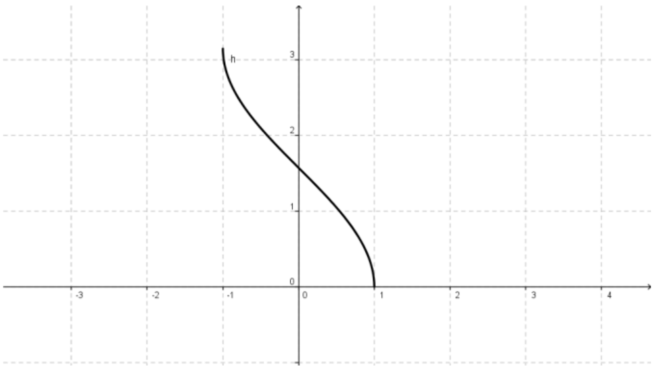


Sin embargo podemos redefinirla para que sea biyectiva y tenga función inversa.

$$f: [0, \pi] \to [-1,1] \,/\, f(x) = cosx$$

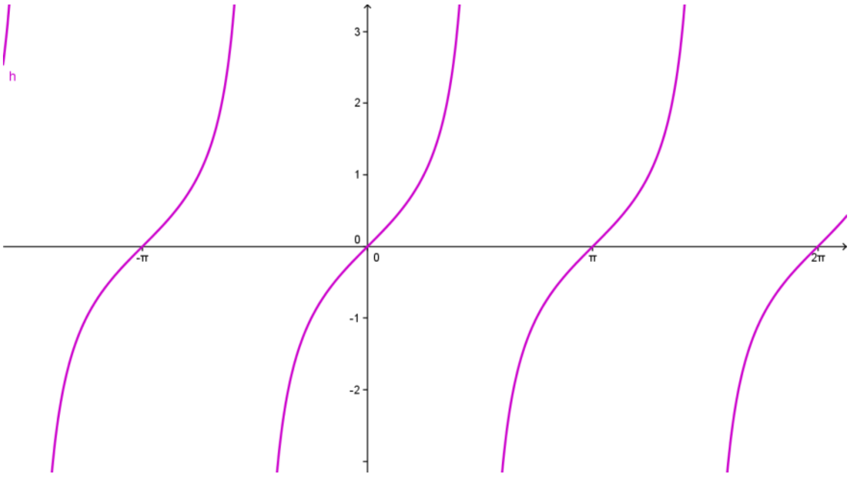
La función inversa es

$$f^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi] \,/\, f^{-1}(x) = arccosx$$



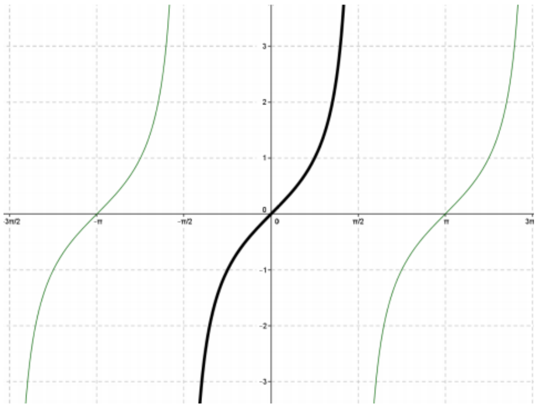
- **FUNCIÓN TANGENTE**

Es la función definida por $f: R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z\right\} \to R \;/\; f(x) = tgx$



Su período es π. Su imagen son los Reales. Como la tangente es el cociente entre seno y coseno, el Dominio serán los números reales que no anulan la función coseno. Es una función impar.

Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por lo que no tendrá función inversa.

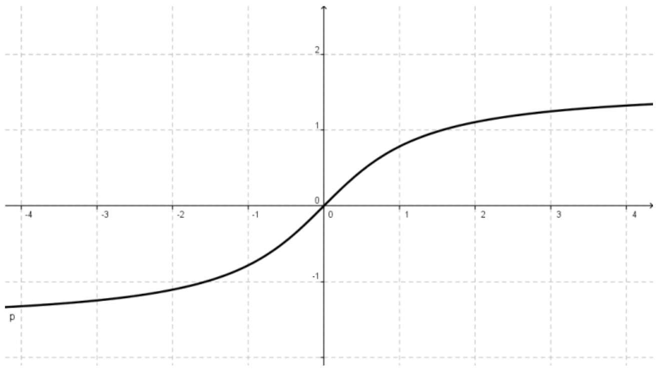


Sin embargo podemos redefinirla para que sea biyectiva y tenga función inversa.

Es la función definida por $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R \;/\; f(x) = tgx$

La función inversa es

$$f^{-1}: R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \;/\; f^{-1}(x) = arctgx$$

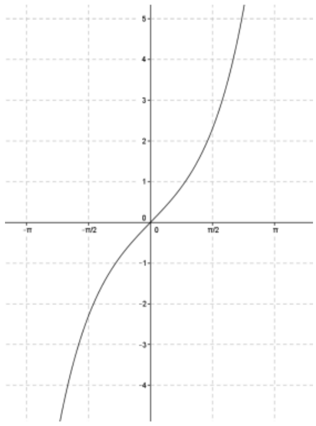


IV. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

A continuación presentaremos tres funciones hiperbólicas. Sus definiciones se basan en la función exponencial $y = e^x$

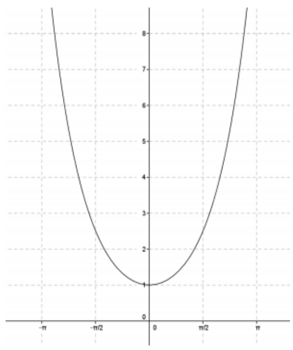
1. Función Seno Hiperbólico: Se define como:

$$f: R \rightarrow R / f(x) = senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



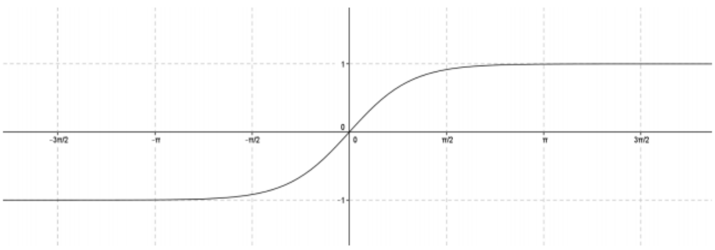
2. Función Coseno Hiperbólico: Se define como:

$$f: R \rightarrow R / f(x) = cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



3. Función Tangente Hiperbólico: Se define como:

$$f: R \rightarrow R / f(x) = tgh(x) = \frac{senh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



FUNCIONES PARTIDAS O POR TRAMO O POR INTERVALOS

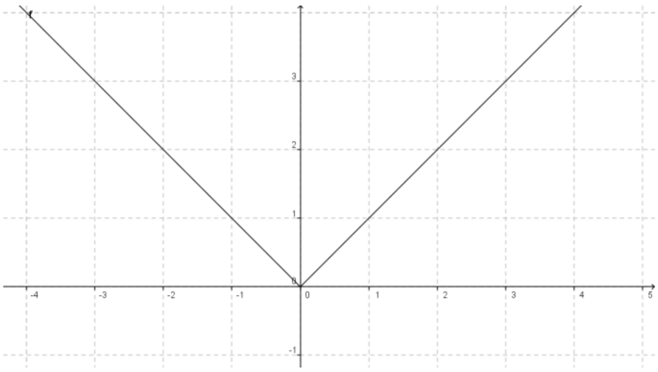
Una **función partida** es aquella que para definirla se necesitan distintas reglas de asignación para distintos subconjuntos del Dominio

Por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x - 2 \; si \; x \leq 1 \\ x^2 - 2 \; si \; x > 1 \end{cases}$.
*Representarla gráficamente, determ*inar Dominio e Imagen.

A continuación presentamos cuatro funciones definidas por tramos, que utilizaremos en diferentes ocasiones a lo largo del proceso de estudio.

I. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

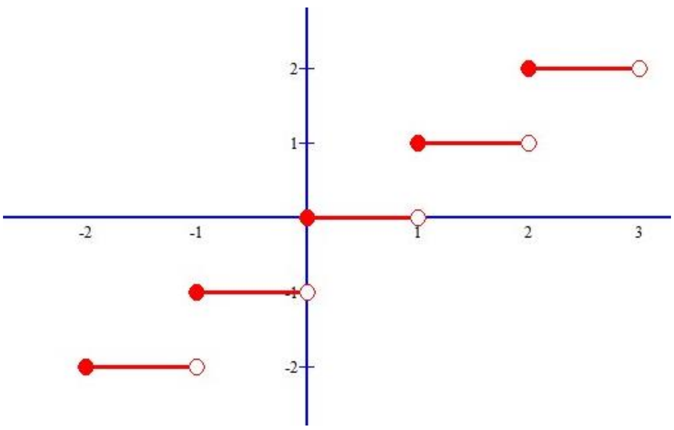
La función definida como $f(x) = |x|$, $\forall x \in \Re$ llamada valor absoluto.
La cual si se aplica la definición de valor absoluto resulta*:* $f(x) = \begin{cases} x \;\; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$.
Su grafica resulta:



Resulta: $Df = R \;\; y \;\; If = R_0^+$

II. FUNCIÓN PARTE ENTERA

Se llama *parte entera de un número real x* al mayor número entero que es menor o igual que x. Se designa: $[x]$ $o \; ENT(x)$*.*
Se define como ***función parte entera*** *:* $f: R \rightarrow R / f(x) = [x]$
La representación gráfica de la función parte entera es escalonada, como se muestra a continuación:

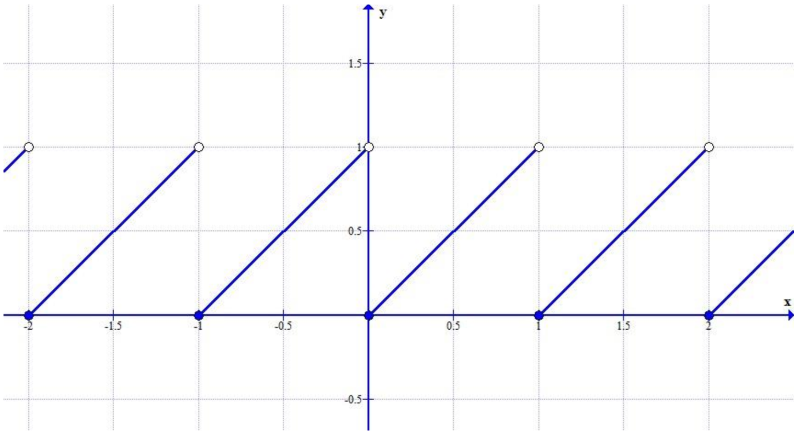


Como se puede observar, resulta:
$Dm = R \;\; y Im = Z$

III. FUNCIÓN MANTISA

Se llama ***función mantisa o parte decimal de x***, a la función definida:

$$f: R \to R / f(x) = x - [x]$$

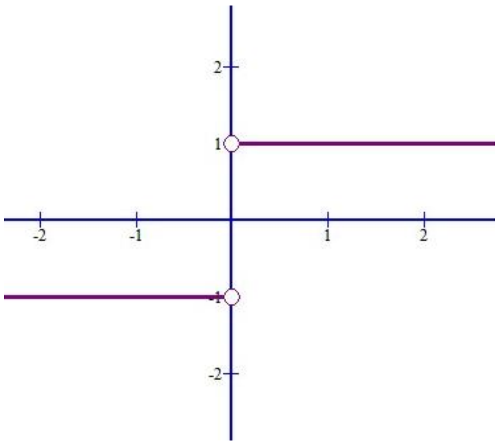


Se la suela llamar diente de sierra por su representación gráfica.
Resulta su dominio $Dm = R \ y \ Im = [0,1)$

IV. FUNCIÓN SIGNO

Se llama *función signo de x*, se indica ***sgn x,*** se define:

$$sgn\ x = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \qquad o \qquad sgn\ x = \begin{cases} -1 \ si x < 0 \\ 1 \ \ si x > 0 \end{cases}$$



$Dom(sgn) = R - \{0\} \ \ y \ Im(sgn) = \{-1; 1\}$

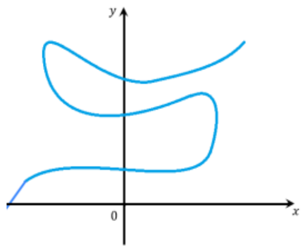
FUNCIÓN IMPLICITA

Se llama *función implícita* a aquella en la que **y** no se encuentra sola en uno de los miembros. La que tendrá forma de ecuación de dos variables.
Por ejemplo: $y + x - 3 = 2x^2$, como ocurre en este ejemplo, a veces es posible despejar la variable dependiente y expresarla como *función explicita,* la que resultaría: $y = 2x^2 - x + 3$

Pero puede ocurrir que sea difícil o imposible despejar la variable **y**, como se ve en el siguiente ejemplo: $2xy + 3y + x + \log(x + y) = 1$.
Aclaremos que los nombres explicitas o implícitas indican la forma de expresar una función.

FUNCIONES DADAS PARAMETRICAMENTE

Algunas curvas se describen mejor cuando las coordenadas x e y están dadas en términos de una tercera variable ***t*** llamada ***parámetro***, es decir $x = f(t)$ e $y = g(t)$.
Imaginemos un objeto que se mueve en un plano y a medida que transcurre el tiempo, describe un camino como el representado por la siguiente curva:



Ella puede ser descripta por una ecuación de la forma $y = F(x)$, donde sabemos que las coordenadas *x* e *y* de la posición de la partícula dependen del instante de tiempo t.
Por lo que existirán funciones f y g de la variable (o parámetro) t, tales que $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Este par de ecuaciones, que muchas veces se utilizan para describir una curva, se llaman ecuaciones paramétricas de la curva en el plano:

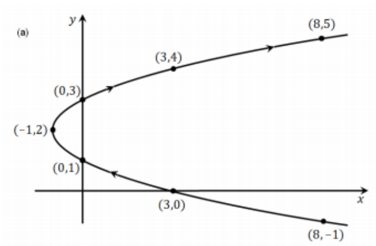
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Cada valor de t determina un punto (x,y) en el plano. Cuando t varía (en un intervalo de n° reales), el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ se mueve generando una curva en el plano.

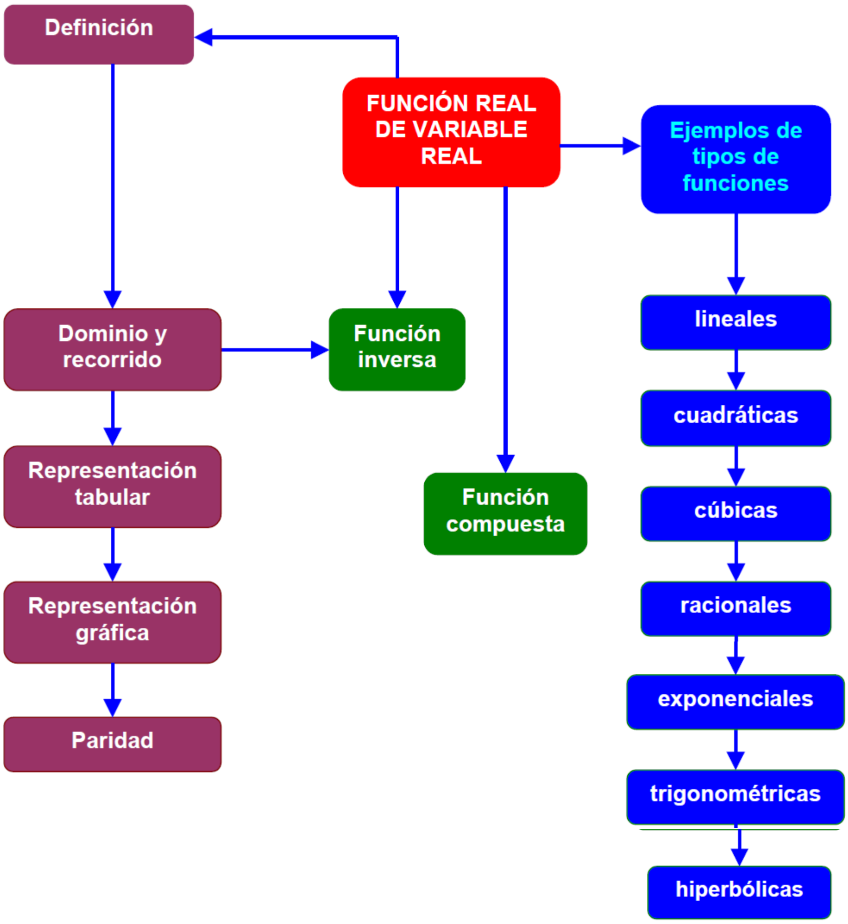
Por ejemplo: $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \end{cases}$

si damos valores a t, iremos obteniendo los valor se x e y que forman las coordenadas de los puntos que forman la curva:

t	*x*	*y*
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4



Esquema de Contenidos



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis Matemático I

MATERIAL DIDÁCTICO

Límites y Continuidad

REEDICIÓN AÑO 2020

Profesor: ***Edgardo Alberto Arriola***

Unidad Temática II: *Límites y Continuidad*

La idea de límite: La idea de límite, aparece intuitivamente en muchas situaciones.
En **geometría elemental**, se define la **longitud de una circunferencia** como el límite a que tiende una sucesión de perímetros de polígonos inscriptos o circunscriptos a ella, cuando la longitud de cada lado tiende a cero. Esto ocurre cuando el número de lados crece indefinidamente. La misma idea se utiliza para definir el **área de un círculo** mediante áreas de polígonos inscriptos o circunscriptos.

$P_{i3} < P_{circuito} = L_c$

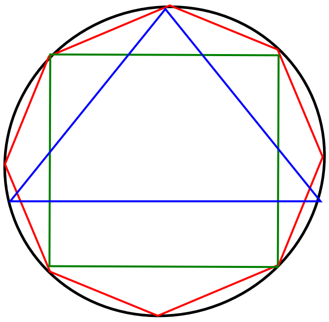
$P_{i4} < P_c = L_c$

$P_{i8} < P_c = L_c$

$- - - - - - - - - - -$

$P_{in} < P_c < L_{cn}$

$\underset{n\to\infty}{P_{in}} = l_c = \underset{n\to\infty}{P_{cn}}$



En **Física**, para definir la velocidad instantánea se recurre al límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo es cada vez menor.
En la **vida diaria** podríamos pensar a que temperatura tiende un líquido caliente al dejarlo fuera del fuego, o un líquido frío si lo dejamos afuera de la heladera, si en el ambiente hacen 25° C.

Propuesta: leer del capítulo 1, pág. 48-50, del libro digital:

CALCULO%20DE%20DIFERENCIAL%20E%20INTEGRAL/calculo%201%20de%20una%20variable,%209na%20edición%20-%20ron%20larson.pdf

En el cual se propone como objetivos:

- Estimar un límite utilizando los métodos numéricos y gráficos.
- Aprender diferentes formas en las que un límite puede no existir.
- Estudiar y utilizar la definición formal de límite.

Introducción a los limites

Se pide dibujar la gráfica de la función: $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}, \quad x \neq 1$

Para todos los valores distintos de $x = 1$, es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en *x=1* no está claro que se puede hacer. Para analizar el comportamiento de la función cuando *x* se acerca a 1, por derecha y por izquierda realizamos la siguiente tabla:

x se aproxima a 1 por la izquierda. → ← x se aproxima a 1 por la derecha.

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

$f(x)$ se aproxima a 3. → ← $f(x)$ se aproxima a 3.

Como se muestra en la figura 1.5, la gráfica de f es una parábola con un hueco en el punto (1, 3). A pesar de que x no puede ser igual a 1, se puede acercar arbitrariamente a 1 y, en consecuencia, $f(x)$ se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites, se podría escribir

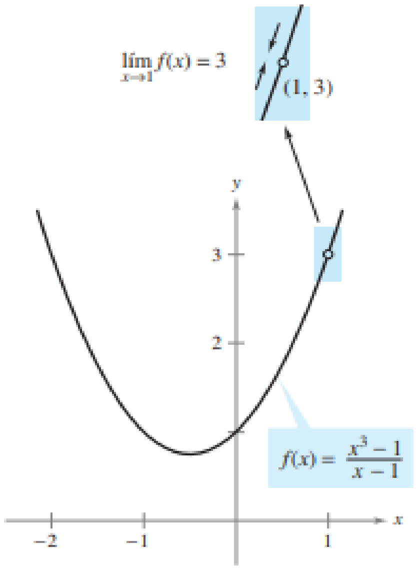
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

Esto se lee "el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3".

Este análisis conduce a una descripción informal de límite. Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a c por cualquiera de los dos lados, entonces el **límite** de $f(x)$, cuando x se aproxima a c, es L. Esto se escribe

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Su gráfica es:



EXPLORACIÓN

El análisis anterior proporciona un ejemplo de cómo estimar un límite de *manera numérica* mediante la construcción de una tabla, o de *manera gráfica*, al dibujar un esquema. Calcular el siguiente límite de forma numérica al completar la tabla.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Luego utilizar una herramienta de graficación para estimar el límite.

Analiza los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1 Estimación numérica de un límite

Evaluar la función $f(x) = x/(\sqrt{x+1} - 1)$ en varios puntos cercanos a $x = 0$ y usar el resultado para estimar el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

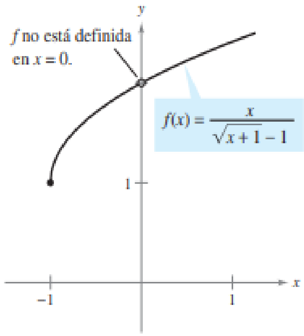
Solución En la siguiente tabla se registran los valores de $f(x)$ para diversos valores de x cercanos a 0.

x se aproxima a 0 por la izquierda. → ← x se aproxima a 0 por la derecha.

x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

$f(x)$ se aproxima a 2. → ← $f(x)$ se aproxima a 2.

De los datos mostrados en la tabla, se puede estimar que el límite es 2. Dicho resultado se confirma por la gráfica de f (ver la figura 1.6).



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 2

Figura 1.6

Observar que en el ejemplo 1, la función no está definida en $x = 0$ y aún así $f(x)$ parece aproximarse a un límite a medida que x se aproxima a 0. Esto ocurre con frecuencia, y es importante percatarse de que la *existencia o inexistencia de $f(x)$ en $x = c$ no guarda relación con la existencia del límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.*

EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2, donde f se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

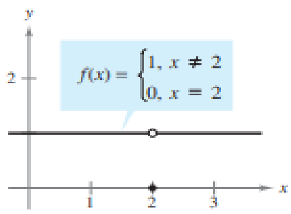
Solución Puesto que $f(x) = 1$ para todos los x distintos de $x = 2$, se puede concluir que el límite es 1, como se muestra en la figura 1.7. Por tanto, se puede escribir

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1.$$

El hecho de que $f(2) = 0$ no influye en la existencia ni en el valor del límite cuando x se aproxima a 2. Por ejemplo, si se hubiera definido la función como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

el límite sería el mismo.



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 1

Figura 1.7

Hasta aquí se puede decir que se hallaron límites de manera numérica y gráfica. Cada uno de estos métodos genera una estimación del límite. Más adelante se estudiarán técnicas analíticas para evaluarlos. A lo largo de este curso, se trata de desarrollar el hábito de utilizar este método de árbol para resolver problemas.

1. Método numérico — Construir una tabla de valores.
2. Método gráfico — Elaborar una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico.
3. Método analítico — Utilizar álgebra o cálculo.

<u>Definición</u> : $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

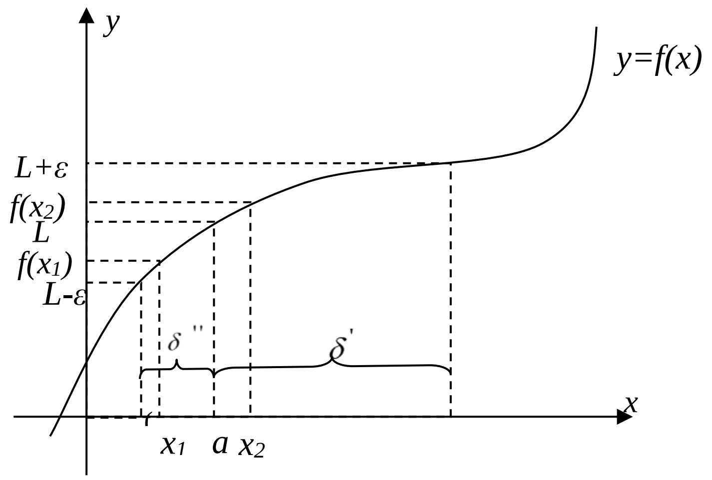
En general el número δ depende de ε Hallado un número δ que satisfaga la condición, cualquier número $\delta' < \delta$ también la satisface. Además, un número δ que sirve para un cierto ε servirá también para cualquier número mayor que ε pero nada se podrá asegurar respecto de uno menor.

a debe ser punto de acumulación del Dominio de la función para evitar que la definición se satisfaga trivialmente en puntos aislados.

Interpreta: *En la definición*: $0<|x-a|<\delta \Rightarrow x\in E'_{(a;\delta)} \wedge |f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow f(x)\in E_{(L;\varepsilon)}$

<u>Representación e interpretación gráfica del límite</u>

Gráficamente, trazamos paralelas al eje x por $L+\varepsilon$ y $L-\varepsilon$ hasta interceptar al gráfico de la función. Proyectamos esas intersecciones sobre el eje x. Así quedan determinados dos δ: δ' y δ'', que los podemos pensar como radio del $E'_{(a)}$. Si analizamos el gráfico, vemos que $\forall x \in E'_{(a;\,\delta'')}: f(x) \in E_{(L;\,\varepsilon)}$. Luego, el δ que debemos tomar es el menor de los dos en este caso, para que satisfaga la definición.



Ejemplo: Sea $f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ x\neq 3\\ 4 & si\ x=3\end{cases}$

Nos interesa ver en que condiciones los valores de una función escalar se aproximan a un número real determinado cuando los puntos del dominio se acercan a un punto a que puede pertenecer o no a dicho dominio.

Calculemos algunos valores de la función en un $E'_{(3)}$, es decir sin preocuparnos por lo que sucede en dicho punto.

x	*f(x)*
2,8	4,6
2,9	4,8
2,99	4,98
2,999	4,998
3,2	5,4
3,1	5,2
3,01	5,02
3,001	5,002

Vemos que los valores de la función se acercan al número 5 cuando los valores de x se acercan al número 3. Aún más, la función puede alcanzar cualquier valor próximo a 5 con tal de considerar a x suficientemente próximo a 3.

Si se desea, por ejemplo, que el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y 5 sea menor que un centésimo, podemos considerar las siguientes proposiciones:

$|f(x)-5|<0{,}01 \Leftrightarrow |(2x-1)-5|<0{,}01 \Leftrightarrow |2x-6|<0{,}01 \Leftrightarrow 2|x-3|<0{,}01 \Leftrightarrow |x-3| < \frac{0{,}01}{2} \Leftrightarrow$

$|x-3|<0{,}005 \quad \therefore \quad 0<|x-3|<0{,}005 \;\Rightarrow\; |f(x)-5|<0{,}01$

Para los valores de x en el $E'_{(3;0{,}005)}$ los valores correspondientes a $f(x)$ se encuentran en el $E_{(5;0{,}01)}$

Obsérvese que se eligió primero 0,01 y en base a ese número se obtuvo el 0,005.

En general para cualquier número $\varepsilon>0$, basta considerar: $\delta = {}^{\varepsilon}/_{2}$, pues:

$0<|x-3|<{}^{\varepsilon}/_{2} \Rightarrow 2|x-3|<\varepsilon \Rightarrow |2x-6|<\varepsilon \Rightarrow |(2x-1)-5|<\varepsilon.$

Luego: $\underset{x\to 3}{2x-1\to 5}$

Dos propiedades de los LÍMITES:

1. Para $\boldsymbol{x}$ suficientemente próximo a a, la función tiene el mismo signo que su límite.
2. Si dos funciones tienen límites distintos para $x\to a$, la de mayor límite supera a la otra, $\forall x\to a$

***Cálculo de algunos límites*:**

1)._ Límite de la función constante: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k \;;\; \forall k\in\mathbb{R}$

Para probar que el número k es el límite buscado, significa encontrar, para cualquier número $\varepsilon>0$, un número $\delta>0$, que satisfaga la condición exigida por la definición. En este caso δ es cualquier número positivo, pues para cualquier $\varepsilon>0$ y para cualquier $\delta>0$, resulta:

$$\lim_{x\to a} f(x)=k \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta_{(\varepsilon)}>0 \,/\, \forall x: \left(x\in Df \wedge 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |k-k|=0<\varepsilon\right)$$

2)._ Límite de la función identidad: $\lim\limits_{x\to a} x = a \;;\; \forall x\in\mathbb{R}$

En efecto, consideraremos un número positivo $\delta\le\varepsilon$; resulta:

$$\forall\varepsilon>0;\ \exists\delta\le\varepsilon \ / \ \forall x: (x\in Df \ \wedge\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|=|x-a|<\delta\le\varepsilon)$$

3)._ Límite de la función lineal: $f(x)=px+q;\ p\neq 0 \quad ; \ \lim\limits_{x\to a}(px+q)=p.a+q;\ \forall a\in\mathbb{R}$

Con la intención de encontrar el número $\delta>0$ correspondiente a la definición de límite, hacemos el siguiente planteo auxiliar:

$$|f(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow |(p.x+q)-(p.a+q)|<\varepsilon \Leftrightarrow |p.(x-a)|<\varepsilon \Leftrightarrow |p|.|x-a|<\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-a|<{}^{\varepsilon}/_{|p|}$$

Luego, para cada $\varepsilon>0$, es posible determinar el número $\delta/\delta\le{}^{\varepsilon}/_{|p|}$, y se verifica:

$$0<|x-a|<{}^{\varepsilon}/_{|p|} \Rightarrow |f(x)-(p.a+q)|<\varepsilon$$

4)._ Límite de una función cuadrática: $f(x)=(x-a)^2;\ \lim\limits_{x\to a}(x-a)^2=0;\ \forall a\in\mathbb{R}$

Tengamos en cuenta que:

$$|(x-a)^2-0|<\varepsilon \Leftrightarrow |(x-a)^2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-a|^2<\varepsilon \Leftrightarrow |x-a|<\sqrt{\varepsilon}$$

Luego, en este caso, δ es cualquier número positivo $\le\sqrt{\varepsilon}$: $\delta\le\sqrt{\varepsilon}$

En efecto, $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\sqrt{\varepsilon}\ /\ \forall x: \left(x\in Df \wedge 0<|x-a|<\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |(x-a)^2|<\varepsilon\right)$

Teoremas sobre límites:

Sería muy dificultoso si todo problema de límite tuviera que resolverse a partir de la definición misma, o sea buscando el número δ que corresponde a cualquier ε dado y satisfacer las desigualdades exigidas en la definición. Vamos a dar algunos Teoremas generales sobre límites que permiten resolver problemas de manera más rápida y cómoda.

Los enunciados y demostraciones de estos Teoremas son los mismos para límites de funciones tomadas para$x \to \infty$ que para límites de funciones definidas sobre ciertos intervalos, tomados cuando $x \to \pm a$, o bien cuando$x \to \pm\infty$; por consiguiente los vamos a demostrar solamente para el caso de $x \to a$.

a).- El **límite del producto de una constante k, por una función $f(x)$**, es igual al producto de la constante por el límite L de la función, o sea:

$$\lim_{x\to a}[k \,.\, f(x)] = k. \lim_{x\to a} f(x) = k\,.\,L$$

b).- El **límite de una suma de funciones**, es igual a la suma de los límites de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan: $\lim_{x\to a}\big(f_1(x) + f_2(x)\big) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) = L_1 + L_2$

c).- En forma análoga se demuestra que el **límite de la diferencia de funciones, es igual a la diferencia de los límites** de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan.

d).- El **límite del producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones** dadas, siempre y cuando los límites existan: $\lim_{x\to x_0}\big(f_1(x).f_2(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \,.\, \lim_{x\to x_0} f_2(x) = L_1.L_2$

e).- El **límite de la recíproca de una función es igual a la recíproca del límite**, siempre que dicho límite sea distinto a cero: $\displaystyle lím_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{lím_{x\to x_0} f(x)} = \frac{1}{L}$

f).- El **límite de un cociente de funciones** es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero: $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *existe y es* $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

g).- El **límite de la opuesta** de una función es igual a la opuesta del límite.

h).- **<u>Unicidad del Límite</u>**: una función no puede tener, para $x \to x_0$, dos límites distintos.

Sí $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$ *, entonces :* $L_1 = L_2$

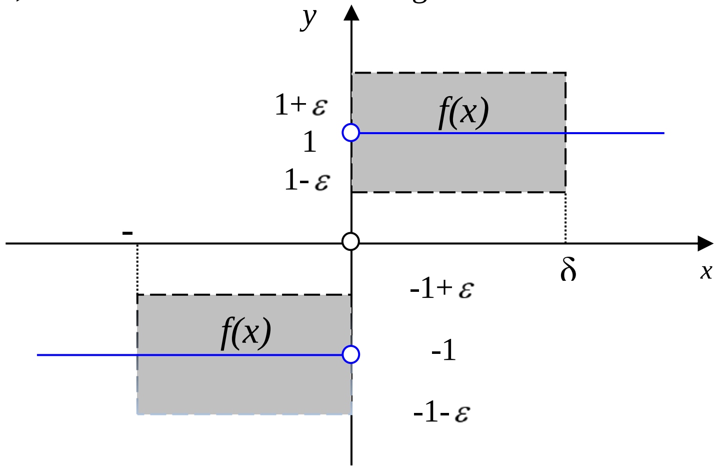
i).- **<u>Teorema de Confrontación entre límites</u>:**
Si existe un intervalo abierto A que contiene a x_0 / $\forall\, x \neq x_0$: $f(x) \le g(x) \le h(x)$ y sí:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

Límites laterales

Al hablar de límite, tenemos que considerar puntos próximos al punto a, a ambos lados de dicho punto. Es decir, números reales en el $E'_{(a)}$, a derecha e izquierda del punto a. Interesa en algunos casos, el comportamiento de los valores de la función correspondiente a puntos del dominio a un solo lado, esto es, en un semientorno a la derecha o izquierda del punto a.

Ejemplo: Sea: y=$\frac{|x|}{x}$ $(función\ signo)$. Esta es una función que no tiene límite finito para $x \to 0$. Pero, puede pensarse en el límite de los valores de la función signo cuando $x \to 0$ con valores positivos exclusivamente, o bien, cuando $x \to 0$ con valores negativos exclusivamente.



A la derecha de 0, $\forall x \to 0$, se satisface la definición de límite con el número 1, puesto que:

$$\forall x \in E'\left(0^+;\delta\right) \Rightarrow f(x) \in E_{(1;\varepsilon)} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

análogamente, el límite de$f(x)$, cuando $x \to 0^-$ es o –1, puesto que:

$$\forall x \in E'\left(0^-;\delta\right) \Rightarrow f(x) \in E_{(-1;\varepsilon)} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

Definiciones:

1)._ ***Límite lateral derecho o Límite por la derecha:*** L es el límite por la derecha de la función $f(x)$, en el punto a $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x: \left(x \in \text{Df} \ \wedge\ a < x < a + \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$

a es punto de acumulación de $A = \{x\ /\ x \in Df\ \wedge\ x > a\}$

2)._ ***Límite lateral izquierdo o Límite por la izquierda***: L es el límite por la izquierda de la función$f(x)$, en el punto$a$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x: \left(x \in Df \ \wedge\ a - \delta < x < a \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$

a es punto de acumulación de$A = \{x\ /\ x \in Df\ \wedge\ x < a\}$.

Considerando en cada caso semientornos a la derecha o a la izquierda del punto a, se pueden interpretar topológicamente las definiciones anteriores.

Luego, se puede demostrar que sí: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L \ \wedge\ \lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$

Infinitésimos

Hemos visto lo que se entiende por límite de una función, las condiciones para que esta pueda tender a un límite, a varios o a ninguno, pudiendo en caso de existir límite, ser finito o infinito (se verá más adelante), y como se calculan.

Tienen especial importancia en Análisis Matemático las funciones que tienen por límite cero, denominados ***INFINITESIMOS***, que quedarían definidos de la siguiente manera: Una función $f(x)$ cuyo límite es 0, cuando $x \to a$ se dice que es infinitésimo en el punto $x = a$ o para x→a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

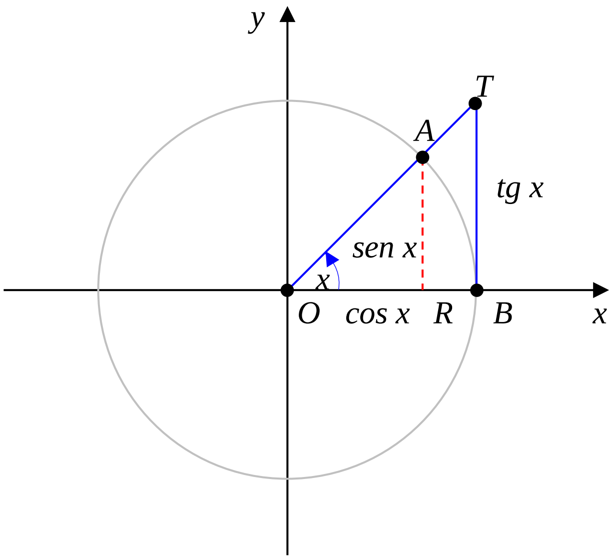
Ejemplos: sen x es infinitésimo para x=0 (x→0)
(1-cos x) es infinitésimo para x=0 (x→0)
(1-x) es infinitésimo para x=1 (x→1)
x^3 es infinitésimo para x=0 (x→0)
cos x es infinitésimo para x=π/2 (x→π/2)
Shx es infinitésimo para x=0 (x→0)
$(2x-1)^2$ es infinitésimo para x=1/2 (x→1/2)

Observaciones:

(I).- No hay números infinitésimos, sino funciones infinitésimas en un punto. No se puede decir que un número sea pequeño o grande si no se toma algún punto de referencia. Un milímetro es una longitud pequeña para las mediciones habituales, pero muy grande para la escala atómica.

(II).- Las funciones no son infinitésimas en general, sino en ciertos puntos de x. Así, $sen\ x$ es infinitésimo para $x \to k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$, pero no lo es para ningún otro valor de x.

Un límite importante: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$



Si en la circunferencia trigonométrica se considera un ángulo central de *x* radianes, y en él la medida del arco $\overset{\frown}{AB}$ que queda determinado sobre la circunferencia, es *x*.

En *B* se traza la tangente *TB*, y entre las superficies de los triángulos $\overset{\Delta}{AOR}$ y $\overset{\Delta}{TOB}$, y el sector circular $\overset{\frown}{AOB}$, valen las relaciones:

$$\overset{\Delta}{AOR} \le sector\ \overset{\frown}{AOB} \le \overset{\frown}{TOB} \Rightarrow \text{Área}\ \overset{\Delta}{AOR} \le \text{Área sector}\ \overset{\frown}{AOB} \le \text{Área}\ \overset{\Delta}{TOB}$$

Las áreas correspondientes se pueden expresar en función de *x*; resultando:

$$\frac{senx.\cos x}{2} \le \frac{1}{2}\, x\,.\,1 \le \frac{1}{2}\,.\,1\,.\,tg\ x$$

dividiendo por: $\frac{sen\ x}{2}$ (que es un factor positivo, si x es positivo): $\cos\ x \le \frac{x}{sen\ x} \le \frac{1}{\cos\ x}$

Esta desigualdad vale si cambiamos x por $-x$, pues en este caso:

$$(-x) : sen\ (-x) = x : sen\ x \quad , \text{ y } \quad \cos\ (-x) = \cos\ x$$

Luego: $\cos x \underset{x\to 0}{\to} 1$ y $\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{\to} 1 \Rightarrow$ por el T. C. L.: $\frac{x}{\text{sen } x} \underset{x\to 0}{\to} 1$ y también: $\frac{\text{sen } x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$

Se dice, entonces que, <u>*en el origen*</u> <u>*sen x*</u> *y* <u>*x*</u> <u>*son infinitésimos equivalentes.*</u>

En forma análoga, se prueba: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (en la prueba se divide por $\frac{tg\ x}{2}$). Siendo también $tg\ \ x$ y x <u>*infinitésimos equivalentes para x→0*</u>.

<u>Ejemplos:</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^3\ x \,.\, tg^4\ x}{x^3} = \dfrac{\cancel{x}^3 \,.\, x^4}{\cancel{x}^3} = \lim\limits_{x \to 0} x^4 = 0$

<u>Un Ejemplo sobre la **No Existencia de Límite**</u> (pg 98 y 99 de Stewart, “Cálculo en una variable”)

V EJEMPLO 4 Una función con comportamiento oscilante Investigue $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Otra vez, la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Si evaluamos la función para algunos valores pequeños de x, obtenemos

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{2}) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

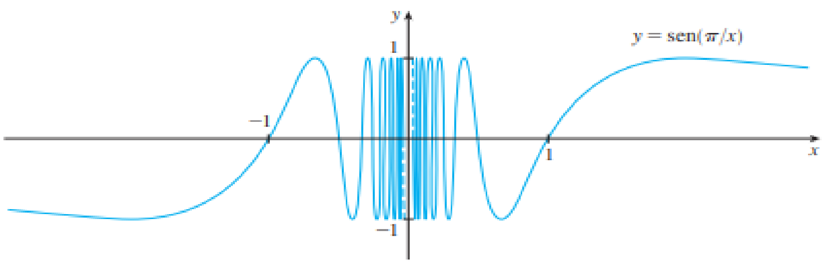
$$f(\tfrac{1}{3}) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{4}) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Del mismo modo, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información podríamos estar tentados a intuir que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez nuestro cálculo es erróneo. Observe que aun cuando $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para infinitamente muchos valores de x que se aproximan a 0. La gráfica de f está dada en la Figura 7.



Las líneas interrumpidas cerca del eje y, indican que los valores de $\boldsymbol{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$ oscilan entre 1 y -1 con frecuencia infinita cuando x se aproxima a 0. (Observe con una aplicación graficadora lo que sucede al acercarse al origen). Debido a que los valores de f(x) no se aproximan a un número “fijo” cuando x se aproxima a 0, se afirma que: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right)}$ **No Existe**

<u>***Límite infinito para x tendiendo a un número finito***</u>

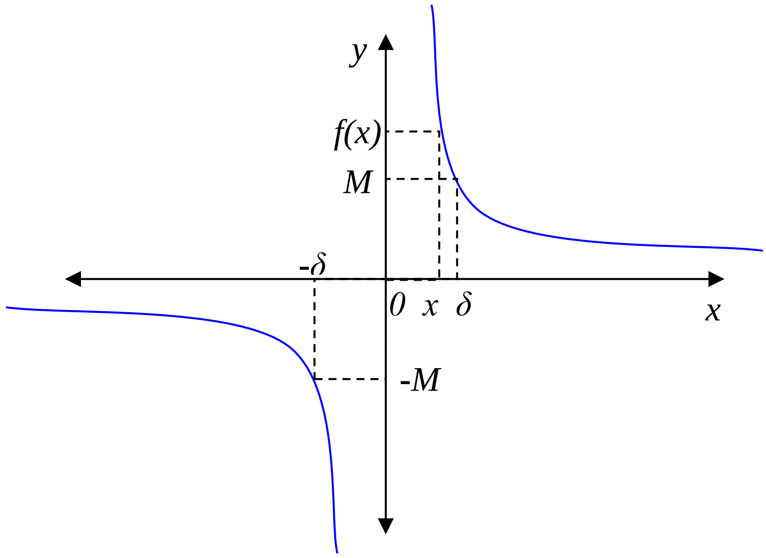
La no existencia de “límite finito” puede significar, que existan límites finitos distintos a derecha y a izquierda del punto $a$elegido como sucede en el origen para la función signo: $y = \frac{|x|}{x}$. También puede significar que la función oscila, como sucede en el origen para la función: $y = sen\frac{\pi}{x}$. O bien, que cuando$x \to a$, los valores de la función superan en valores absolutos a cualquier número prefijado.

Definición: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x : (x \in Df \ \ \wedge \ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow | f(x)| > M)$

Ejemplo: $y = \frac{1}{x}$ que no tiene límite finito en el origen. Si prefijo cualquier número $M>0$, tan grande como se quiera, siempre es posible encontrar un $E'_{(0)}$, en el cual los valores correspondientes de la función en valor absoluto son mayores que M.

Para probar por definición tomo: $M = 10^6$: $\left|\frac{1}{x}\right| > 10^6 \quad \therefore \quad |x| < \frac{1}{10^6}$.
Es decir, para: $0 < |x - 0| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > 10^6$. De lo que se deduce que para cualquier valor de $x \in E'\left(0; \frac{1}{10^6}\right)$, la función toma valores, en valor absoluto mayores a 10^6. En general basta considerar: $\delta = \frac{1}{M}$ para que se verifique la proposición:
si: $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > M$; pues: $|x| < \frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > M$

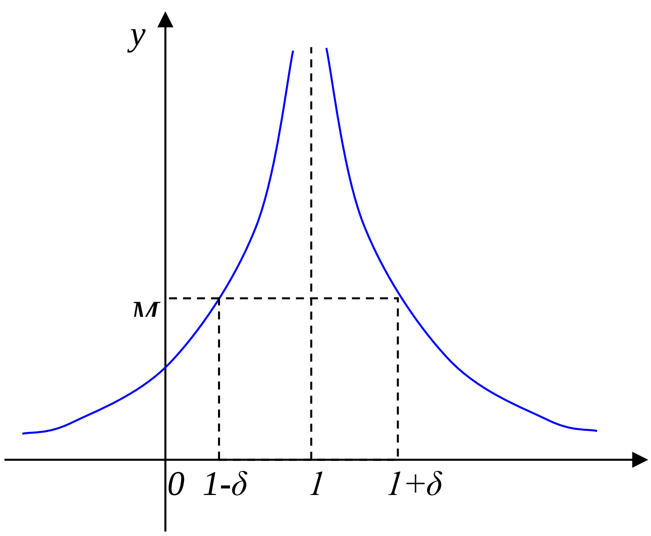
El concepto de límite se puede diversificar, considerando el signo de los valores de la función.



εε
Ejemplos:

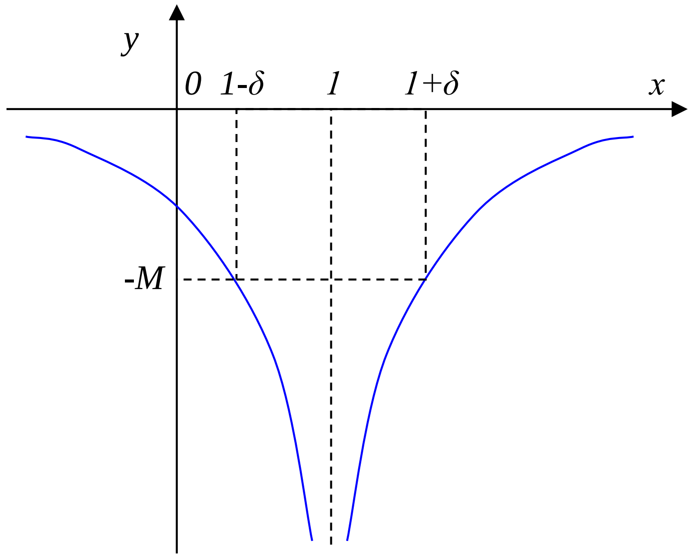
a).- Sea: $\frac{1}{(x-1)^2}$. Esta función no está definida para $x = 1$. Del gráfico se desprende que para cualquier número $M>0$ prefijado arbitrariamente y tan grande como se quiera, se puede determinar un número $\delta > 0 \ / \ \forall \ x \in E'_{(1;\delta)}$, la función toma valores mayores que M; o sea:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \ M > 0, \exists \delta_{(M)} > 0 \ / \ \forall x : (x \in Df \ \wedge 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$



b).-Sea: $f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$. El valor funcional de $f(x)$ no está definido para $x=1$. Se desprende del gráfico que para cualquier número $M>0$ prefijado arbitrariamente y tan grande como se quiera, se puede determinar un número $\delta>0$ / $\forall\ x\in E'_{(1;\delta)}$, la función $f(x)$ toma valores menores que - M; o sea:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall\ M>0, \exists\delta_{(M)}>0\ /\ \forall x:\left(x\in Df\ \wedge 0<|x-1|<\delta \Rightarrow f(x)<-M\right)$$

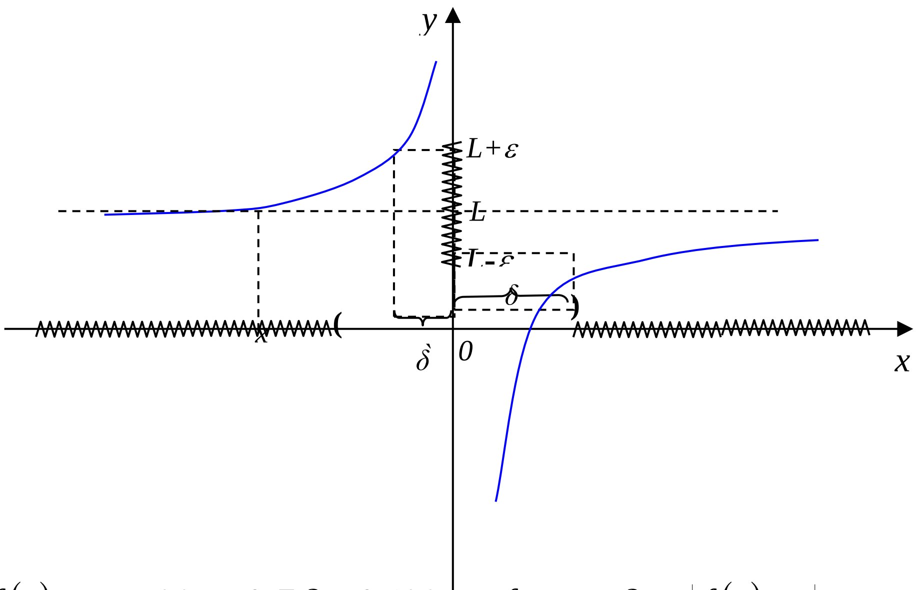


<u>Generalización del concepto de límite</u>: A fin de generalizar el concepto de límite, debemos considerar una "definición" de límite para cada uno de los siguientes casos:

<u>Primer caso</u>: Límite finito para $x\to\pm\infty$:

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0\ /\ \forall x\in Df\ \wedge |x|>\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

La recta de ecuación $y=L$ es <u>Asíntota Horizontal</u> del gráfico de la función.



(b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0\ /\ \forall x\in Df\ \wedge x>\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

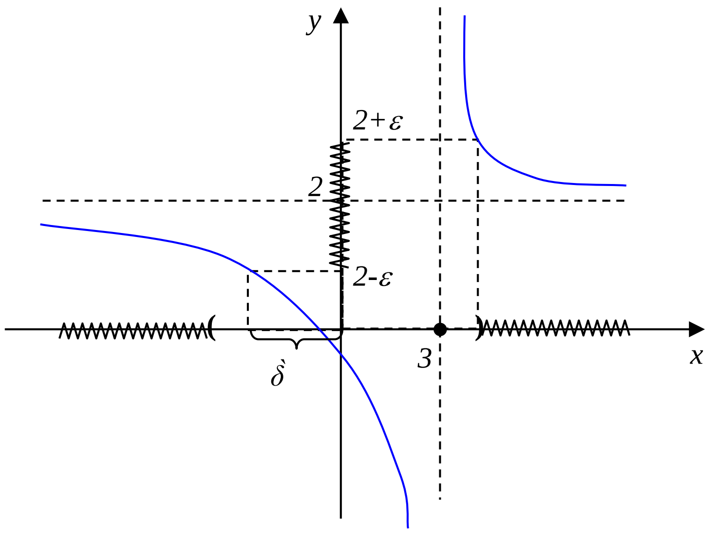
(c) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; \forall x \in Df \wedge x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Luego, de acuerdo al gráfico, se verifica: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$.

También: $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$

<u>Ejemplo</u>: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$

Además, se verifica: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2 \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2$

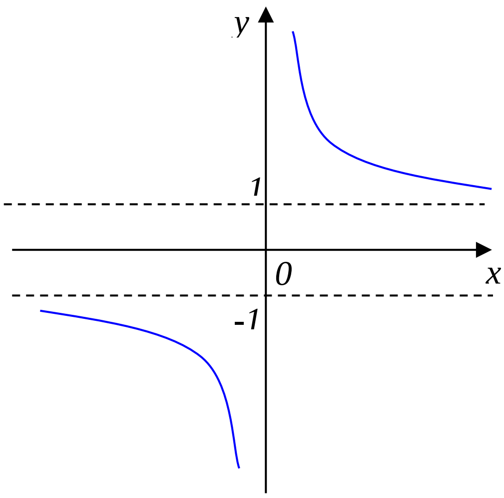


Sea: $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$, para calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$ dividimos numerador y denominador por $\sqrt{x^2} = |x|$; como $|x|$ depende del signo del número x, debemos calcular en forma separada:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$

(1) cuando $x > 0$, resulta: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = 1$

(2) cuando $x < 0$, resulta: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{|x|}} = -1$

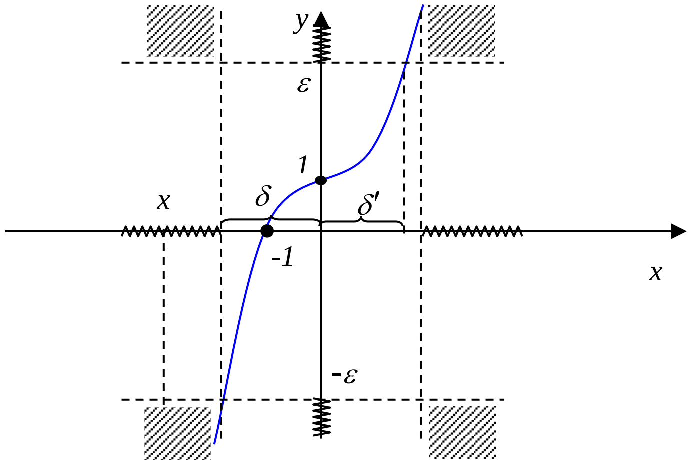


Segundo caso: límite infinito para $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \; / \; \forall x \in Df \wedge |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Ejemplo: sea: $y = x^3 + 1$

Del gráfico se desprende: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + 1\right) = +\infty \wedge \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + 1\right) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \left(x^3 + 1\right) = \infty$



***Infinitos*. *Comparación de infinitos*:**

Se dice que una función $f(x)$ es un infinito para $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

En forma análoga que en el caso de los infinitésimos podemos, aplicando definición y teoremas, demostrar las siguiente Propiedades de los infinitos:

(a) La suma de dos infinitos de igual signo es un infinito.

(b) El producto de un infinito por un infinito cuyo valor absoluto está acotado inferiormente en un $E_{(x_0)}$ considerado, es un infinito.

(c) El producto de dos infinitos es un infinito.

(d) El cociente entre un infinito y una función acotada en un $E_{(x_0)}$ es un infinito.

En cuanto al cociente de dos infinitos nada podemos afirmar, puesto que encontraremos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, a pesar de la cual, salvada la indeterminación, el "verdadero valor" del límite del cociente nos permite efectuar la Comparación de infinitos.

En general si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos para $x \to x_0$ y sí: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \Rightarrow$ $f(x)$ es un infinito de orden superior a $g(x)$

Sí: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow$ $f(x)$ es un infinito de orden inferior a $g(x)$

Sí: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \Rightarrow$ $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos del mismo orden

Y sí además: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow$ $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos equivalentes

Indeterminaciones del límite

Cuando estudiamos infinitésimos y ahora infinitos, ambas denominaciones valen para el caso $x \to \infty$.
El cociente de dos infinitésimos o de dos infinitos pueden tener cualquier límite finito o infinito, según las funciones elegidas. Se dice, por ello, que el cociente de dos infinitos o de dos infinitésimos son casos de indeterminación del límite.

Casos de indeterminaciones del límite

(1) Cociente de dos infinitésimos$\left(\frac{0}{0}\right)$.
(2) Cociente de dos infinitos $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
(3) Producto de un infinitésimo por un finito $(0.\infty)$

(4) Suma de dos infinitos de distinto signo $(\infty - \infty)$

(5) $f(x)^{g(x)}$; sí: $f(x) \to 1 \quad \wedge \quad g(x) \to \infty \quad (1^{\infty})$

(6) $f(x)^{g(x)}$; sí: $f(x) \to 0 \quad \wedge \quad g(x) \to 0 \quad (0^{0})$

(7) $f(x)^{g(x)}$; sí: $f(x) \to \infty \quad \wedge \quad g(x) \to 0 \quad (\infty^{0})$

Ejemplos:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-2x+6}{3x^3-x+3} = \dfrac{5}{3}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-2} = 1$; (3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = \infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x} = e^{15}$ $\rightarrow$ $e = \lim\limits_{t\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t} = \lim\limits_{t\to\infty} (1+t)^{1/t}$

Asíntotas a curvas planas:

Ya hemos considerado anteriormente, al aproximar el gráfico de funciones racionales, la idea de asíntota.

Veamos ahora, usando límite.

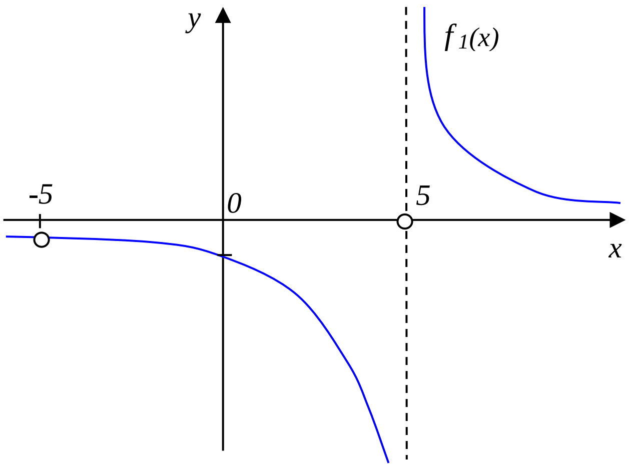
(a) *Asíntota Vertical*:

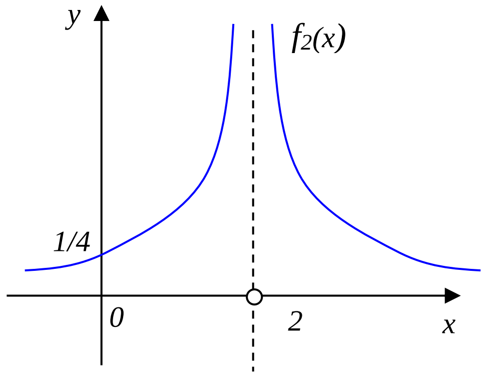
Definición: La recta de ecuación: $x = a$ es Asíntota Vertical del gráfico de la función $f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Ejemplos:

(1) Sea: $f_1(x) = \dfrac{x+25}{x^2-25}$; $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+25}{x^2-25} = \infty \Rightarrow x = 5$ es Asíntota Vertical del gráfico de $f_1(x)$.

(2) Sea: $f_2(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty \Rightarrow x = 2$ es Asíntota Vertical del gráfico de $f_2(x)$.





(b) *Asíntota Horizontal*:

Definición: La recta de ecuación: $y = l$ es Asíntota Horizontal del gráfico de la función $f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$

Ejemplo:

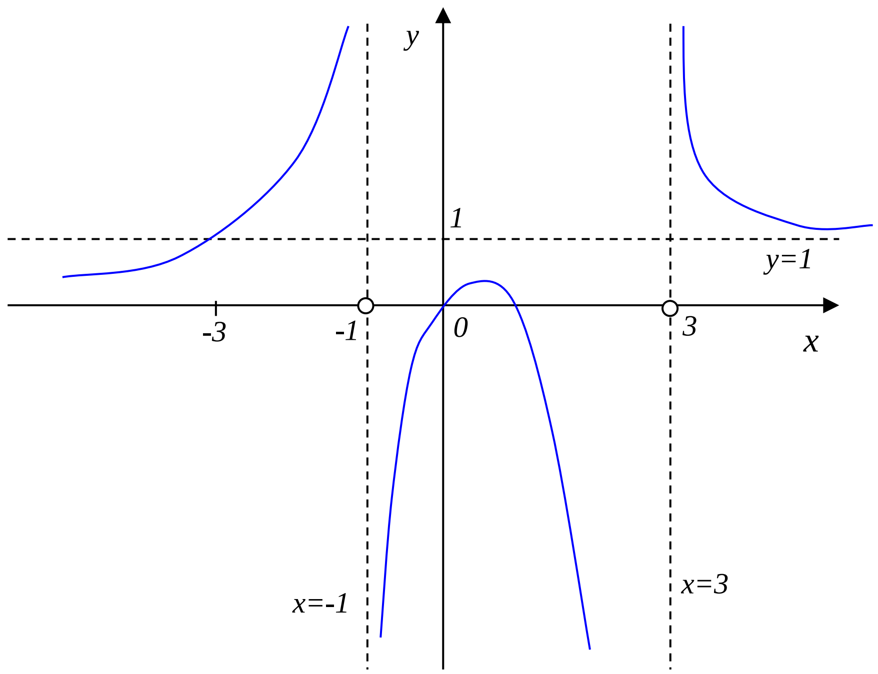
Sea: $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ es Asíntota Horizontal del gráfico de $f(x)$.

Además: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty \Rightarrow x = -1$ Asíntota Vertical

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty \Rightarrow x = 3$ Asíntota Vertical

Obsérvese que el gráfico de la función $f(x)$ corta a la Asíntota Horizontal en el punto$(-3;1)$. Luego, el gráfico de una función puede cortar a una Asíntota Horizontal u Oblicua en n puntos.

Por ejemplo: la función $f(x) = 2^{-x}\, sen\ \ x$, admite como Asíntota Horizontal al eje x, y la corta n veces para cualquier n$\in \mathbb{N}$.



(b) *Asíntota Oblicua*:

Definición: la recta de ecuación: $y = px + q \quad (p \neq 0)$ es Asíntota Oblicua del gráfico de la función $f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (px+q)] = 0$

O bien: $p = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad q = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - px)$

En la primera definición, se verifica: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \wedge \quad f(x) = px + q + g(x)$; donde $g(x)$ es un infinitésimo para$x \to \infty$.

Asíntotas de este tipo aparecen en funciones racionales fraccionarias, donde el grado del numerador es mayor en una unidad que el grado del denominador. En efecto, si la función racional fraccionaria considerada es el cociente de la función polinómica$f(x)$, donde el grado $(f) = n \geq 2$ sobre la función polinómica h, de grado$(h) = n - 1$, al efectuar dicho cociente, resulta: $\frac{f(x)}{h(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$, donde s es un polinomio de primer grado y r es un polinomio de grado menor que gr (h), según se verá en un ejemplo.

Luego, $\frac{r}{h}$ es infinitésimo para $x \to \infty$ y s es una función lineal, cuyo gráfico es Asíntota Oblicua al gráfico de la función racional fraccionaria $\frac{f(x)}{h(x)}$.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-2}$

Veamos si tiene Asíntota Vertical:

$\lim_{x\to 2} = \frac{x^2+2x}{x-2} = \frac{8}{0} = \infty$ ⇒ la recta de ecuación $x = 2$ es **Asíntota Vertical**

Asíntota Horizontal:

$\lim_{x\to\infty} = \frac{x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$ ⇒ ∄ **Asíntota Horizontal**

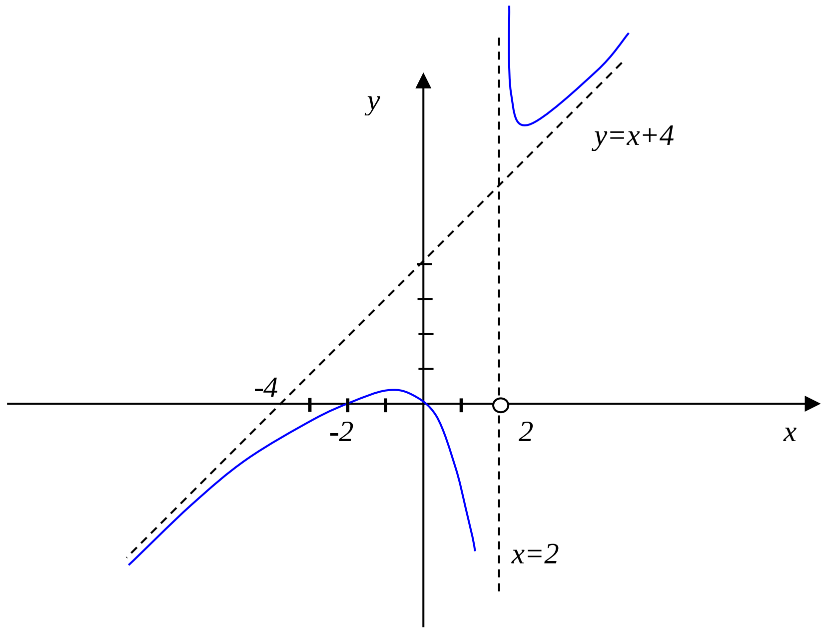
Asíntota Oblicua:

$$p = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2x}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 1}$$

$$q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{1-\frac{2}{x}} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 4}$$

Luego, la Asíntota Oblicua es: $\boxed{y = px + q = x + 4}$



Funciones Continuas

Función continua en un punto

Definición: sea $f(x)$ función y a un punto de acumulación del Df; $f(x)$ es continua en a, si y solo si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Sí a no es punto de acumulación del Dominio, se conviene en considerar que en a f(x) es continua si existe $f(a)$. Como la continuidad se basa en el concepto de límite, puede darse también la definición utilizando entornos convenientes de a y $f(a)$:

$f(x)$ es continua en a $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \;/\; \forall\, x: \left(x \in \mathrm{Df} \;\wedge\; \underbrace{|x-a| < \delta}_{E_{(a;\delta)}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(a)| < \varepsilon}_{E_{(f(a);\varepsilon)}} \right)$$

(pués $f(x)$ está definida en a, y en dicho punto se verifica: $\forall\, \varepsilon > 0$: f$(a) - f(a) = 0 < \varepsilon$).

En el caso de una función continua, los símbolos de función y de límite pueden conmutarse:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x \right)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que si una función es continua en a, los límites laterales son iguales:

$$f(x) \text{ es continua} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Sí la continuidad se verifica solamente en el $E_{(a^+;\varepsilon)}$ $\Rightarrow$ $f(x)$, continua por la derecha: o sea:

$$f(x) \text{ es continua por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Sí la continuidad se verifica solamente en el $E_{(a^-;\varepsilon)}$ $\Rightarrow$ $f(x)$, continua por la izquierda: o sea:

$$f(x) \text{ es continua por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Continuidad en un intervalo

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un $[a; b]$ si es continua en cada punto interior del $[a; b]$, y además es continua a derecha en el extremo a, y es continua a izquierda en el extremo b:
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Es continua en $(a; b)$ si $f(x)$ es continua en todos los puntos del intervalo, menos en sus extremos a y b.

Discontinuidades

Si no se verifica la definición de continuidad en un punto, la función considerada es discontinua en ese punto.

Una función puede ser discontinua en $x = a$, por que $\nexists$ f(a), o porque $\nexists \lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x)$, o porque ambos existen pero son distintos.

Según sea la condición o condiciones de continuidad que no se cumplan, se presentan distintos tipos o casos de discontinuidad que dividiremos en Discontinuidades Finitas y Discontinuidades Infinitas, según que los límites de la función en el punto sean finitos, o que exista por lo menos uno que sea infinito.

Discontinuidades Finitas

Se dividen en dos casos: de 1^{era} especie y de 2^{da} especie. Según, que existan los límites laterales o falte alguno.

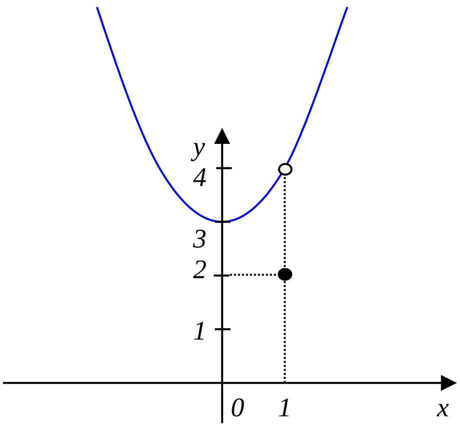
A) Discontinuidades finitas de 1^{era} especie: existen los límites laterales. Se presentan dos casos:

CASO 1: (a) $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$; pero: $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$

En este caso, la función presenta una discontinuidad en $x = a$ (definiéndose a $x = a$ como punto aislado), puesto que el valor de la función $f(a)$, es distinto a los límites laterales.

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 \ ; \text{ si } x \neq 1 \\ 2 \ ; \text{ si } x = 1 \end{cases}$

$$f(1) = 2 \neq \lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = 4$$



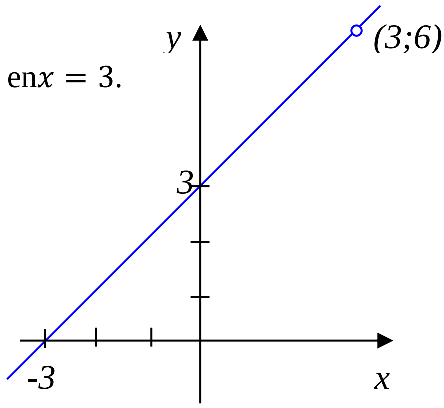
Discontinuidad de 1^{era} especie en $x = 1$

(b) Cuando $f(x)$ no está definida en $x = a$, pero sí: $\exists \lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x)$. En este caso particular, como la función no está definida en $x = a$, pero existe el límite finito en dicho punto, se dice que la función presenta en $x = a$ una Discontinuidad evitable.

Ejemplo: Sea: $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$; estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 3$.

(1)- $\nexists$ f(3)

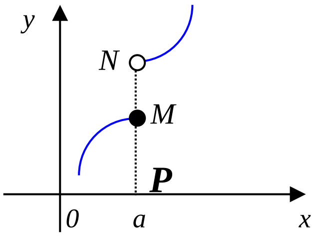
(2)- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} x + 3 = 6$



redefiniendo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} \ ; \ \text{si } x \neq 3 \\ 6 \ ; \ \text{si } x = 3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ <u>*f(x)* es continua</u>. $\therefore$ $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ tiene una <u>Discontinuidad evitable</u>, pues basta tomar como valor de la función en el punto considerado <u>el valor de su límite</u> para que desaparezca la discontinuidad.

<u>CASO 2</u>: es el caso en que los límites laterales son distintos: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

Según la gráfica: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \overline{PM} \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \overline{PN} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$



A esta forma de discontinuidad se la llama <u>salto finito</u>; pudiéndose presentar distintos <u>casos particulares</u>, según sea el valor de la función en el punto.

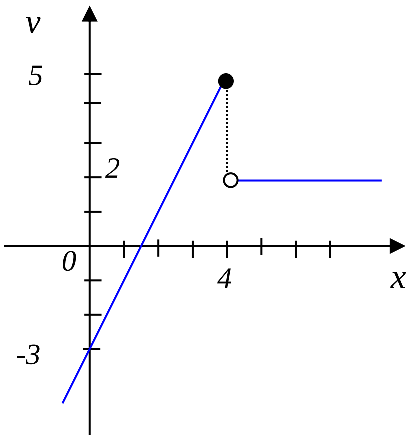
(a) Sí: $f(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \Rightarrow$ <u>la función será continua a izquierda y discontinua a derecha de $x=a$</u>.

<u>Ejemplo</u>: Sea: $f(x) = \begin{cases} 2x-3 \ ; \ si\ x \leq 4 \\ 2 \ ; \ si\ x > 4 \end{cases}$; Estudiaremos las condiciones de continuidad en $x = 4$.

(1)- $f(4) = 5$

(2)- $\nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x)$; $pues: \lim\limits_{x\to 4^+} 2 = 2 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to 4^-} 2x-3 = 5$

como: $f(4) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \Rightarrow f(x)$ es continua a izquierda y discontinua a derecha de $x = 4$, presentando además un salto de "discontinuidad finito".



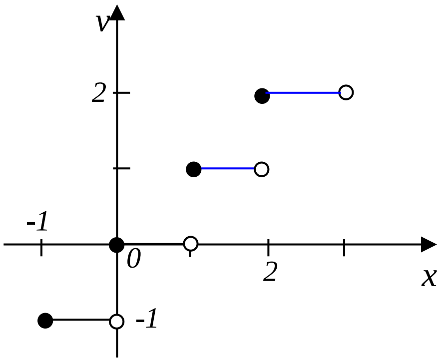
(b) Sí: $f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow$ <u>la función será continua a derecha y discontinua a izquierda de $x = a$</u>.

Ejemplo: Sea: $f(x) = [x]$. Estudiaremos las condiciones de continuidad en $x = 2$.

(1)- $f(2) = 2$

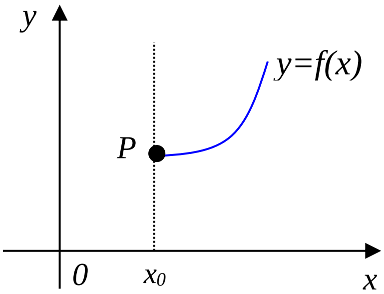
(2)- $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$; pues: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2 \wedge \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$

$\therefore f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2 \Rightarrow f(x) = [x]$, es continua a derecha y discontinua a izquierda del $x = 2$, presentando, además, un salto de "discontinuidad finito".

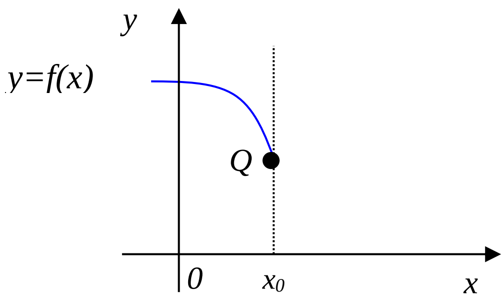


B). Discontinuidades finitas de 2da especie: cuando falta alguno de los límites laterales.

(a) Que falte el límite izquierdo. En este caso la discontinuidad a izquierda es esencial o inevitable, puesto que como se puede observar, la curva se detiene en el punto P.



(b) Que falte el límite derecho. En este caso la discontinuidad a derecha es esencial o inevitable, puesto que como se puede observar, la curva se detiene en el punto Q.



(c) Por último, puede presentarse el caso en que los límites laterales no existan, tal como sucede en la función: $f(x) = sen\frac{\pi}{x}$. Por lo que la discontinuidad será esencial o inevitable.

Discontinuidades infinitas

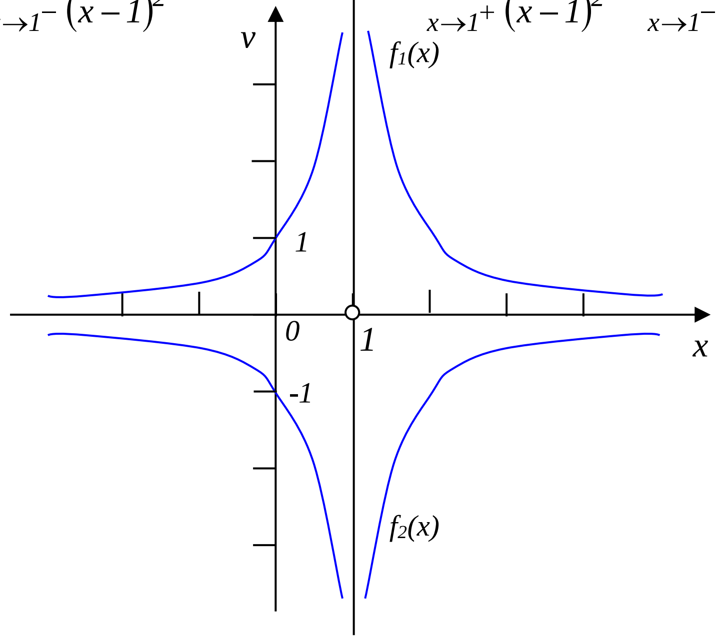
A) Discontinuidades infinitas 1^{era} especie: existen los límites laterales

(a) Puede suceder que los límites laterales a izquierda y derecha sean simultáneamente iguales a ∞, positivo o negativo; es decir, que se verifica separadamente alguna de las siguientes condiciones:

$$(1)\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad ; \qquad (2)\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Ejemplo: $f_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \quad \wedge \quad f_2(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

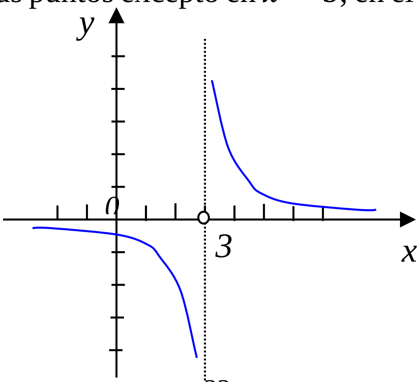


(b) Sea ahora el caso de una función $f(x)$ cuyos límites laterales sean también infinitos, pero de signo contrario, es decir: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

Como existen siempre los dos límites, este también es un caso de Discontinuidad infinita de *1^{era}* especie.

Ejemplo: Sea: $f(x) = \frac{1}{x-3}$; $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$; $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$

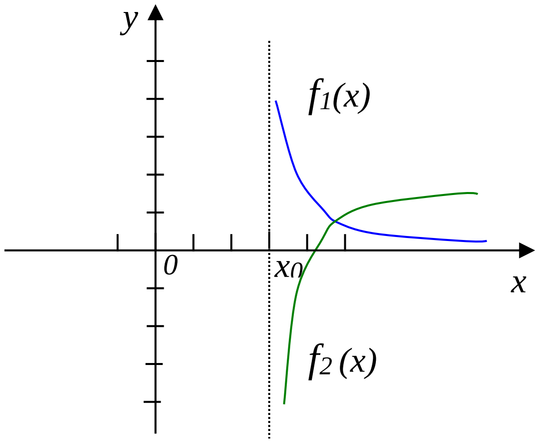
Esta función es continua en todos sus puntos excepto en $x = 3$, en el presente una discontinuidad infinita.



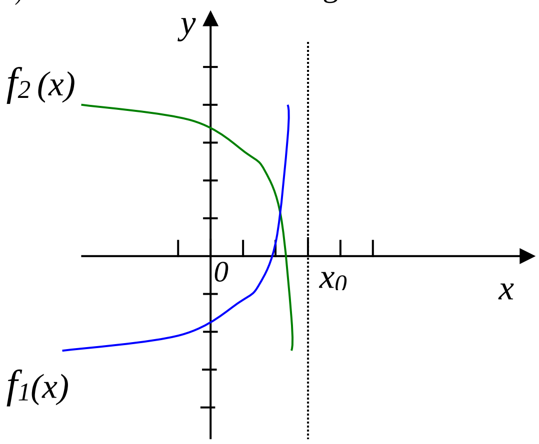
En los casos vistos precedentemente se dice que las funciones presentan en los puntos considerados " un salto infinito de discontinuidad".

B) Discontinuidades infinitas de 2da especie: cuando falta alguno de los límites laterales.

(a) Sea *f(x)* una función cuyo límite izquierdo no existe, siendo además, su límite derecho infinito, es decir: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, *f(x)* puede tomar alguna de las dos formas de la figura.



(b) Puede ocurrir que dada una función *f(x)*, falte el límite derecho, y que el límite izquierdo sea infinito; o sea: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$. En este caso la gráfica de la función tomará alguna de las formas de la figura.



Álgebra de funciones Continuas

Las funciones continuas tienen una serie de propiedades, algunas de las cuales son consecuencia de los Teoremas sobre límites, en base a los cuales, si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el $[a; b]$, puede demostrarse que:

(1)- La suma de dos funciones continuas en $[a; b]$ es una función continua en dicho intervalo. $h(x) = f(x) + g(x)$; como $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas:

$\forall x_0 \in [a;b]: \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$; y por límite de una suma:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = h(x_0)$$

(2)- El producto de dos funciones continuas en $[a; b]$ es una función continua en dicho intervalo.

(3)- El cociente de dos funciones continuas en $[a; b]$ es una función continua en dicho intervalo.

<u>Continuidad de la función Compuesta</u>

Sea: $y = f(u)$; $u = g(x)$; $f[g(x)] \Leftrightarrow$ Imagen g $\subseteq$ Dominio f

Sí g es continua en el punto x_0 y $f(u)$ es continua en $g(x_0) \Rightarrow h(x) = f \circ g(x) = f[g(x)]$ es continua en x_0.

<u>Extremos de funciones</u>

<u>Extremos Absolutos o Globales</u>

Sea $f(x)$, una función definida en un conjunto A $\subseteq \mathbb{R}$

<u>Máximo Absoluto</u>:

El valor de $f(c_1)$ es el máximo absoluto de $f(x)$ sí $A \subseteq$ Df $\Leftrightarrow$ $f(c_1)$ no es superado por ninguno de los valores $f(x)$ que alcanza la función en el conjunto A. Es decir:

$$f(c_1) \text{ \underline{máximo absoluto} de } f(x) \text{ en A} \Leftrightarrow f(x) \leq f(c_1); \forall x \in A$$

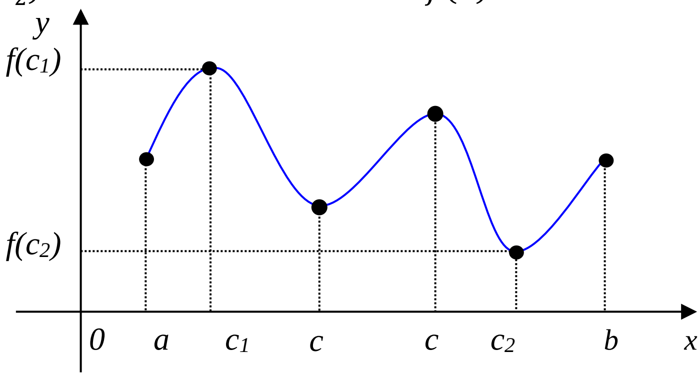
El conjunto A puede ser el Dominio de $f(x)$ o puede ser un subconjuto del Dominio de $f(x)$. En general, el valor $f(c_1)$ es el máximo absoluto de $f(x)$ sí se cumple la definición anterior con A=Df. O sea: $f(c_1)$ es el <u>máximo absoluto</u> de $f(x) \Leftrightarrow f(c_1)$ es el máximo del recorrido de $f(x)$.

<u>Mínimo absoluto</u>:

El valor de $f(c_2)$ es el mínimo absoluto de $f(x)$ *si* $A \subseteq Df \Leftrightarrow f(c_2)$ no supera a ninguno de los valores $f(x)$ que alcanza la función en el conjunto A. Es decir:

$$f(c_2) \text{ \underline{mínimo absoluto} de } f(x) \text{ en A} \Leftrightarrow f(x) \geq f(c_2); \forall x \in A$$

El valor $f(c_2)$ es el mínimo absoluto de $f(x)$ sí se cumple la definición anterior con A=Df. O sea: $f(c_2)$ es el <u>mínimo absoluto</u> de $f(x) \Leftrightarrow f(c_2)$ es el mínimo del recorrido de $f(x)$.



$f(c_1)$ Máximo Absoluto

$f(c_2)$ Mínimo Absoluto

<u>Extremos Relativos o Locales</u>

<u>Máximo relativo</u>:

Sea $f(x)$, función con dominio D, y sea c_1, un punto interior a dicho dominio.

El valor $f(c_1)$ es un <u>máximo local o máximo relativo</u> de $f(x) \Leftrightarrow$ existe un $E_{(c_1)}$ tal que los valores que toma $f(x)$ en los puntos de dicho entorno no superan el valor $f(c_1)$. Es decir:

$$f(c_1) \text{ \underline{máximo relativo} } \Leftrightarrow \exists\, E_{(c_1)} \subseteq Df \,/\, \forall x \in E_{(c_1;\delta)} \Rightarrow f(x) \leq f(c_1)$$

<u>Mínimo relativo</u>: Sea c_2 un punto interior de dominio de la función.

El valor $f(c_2)$ es un <u>mínimo local o mínimo relativo</u> de $f(x)$ ⇔ existe un $E_{(c_2)}$ en el cual se verifica que el valor $f(c_2)$ no supera a ninguno de los valores que toma *f(x)* en los puntos de dicho entorno. Es decir:

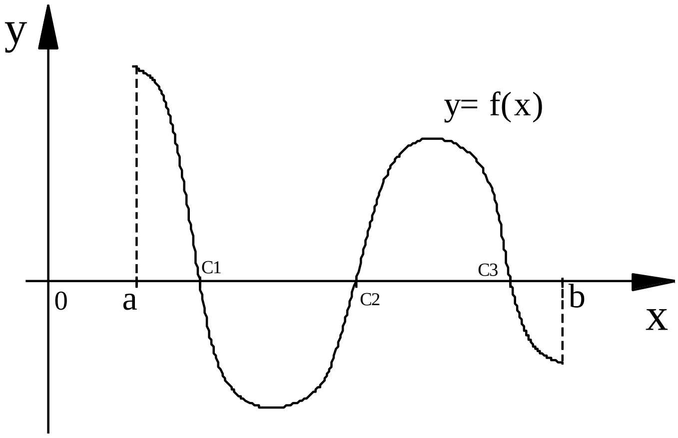
$$f(c_2)\ \underline{\text{mínimo relativo}} \Leftrightarrow \exists\, E_{(c_2)} \subseteq Df \,/\, \forall x \in E_{(c_2;\delta)} \Rightarrow f(x) \geq f(c_2)$$

En el gráfico anterior:

$f(c_1)$ y $f(c_4)$ Máximos Relativos $f(c_2)$ y $f(c_3)$ Mínimos Relativos

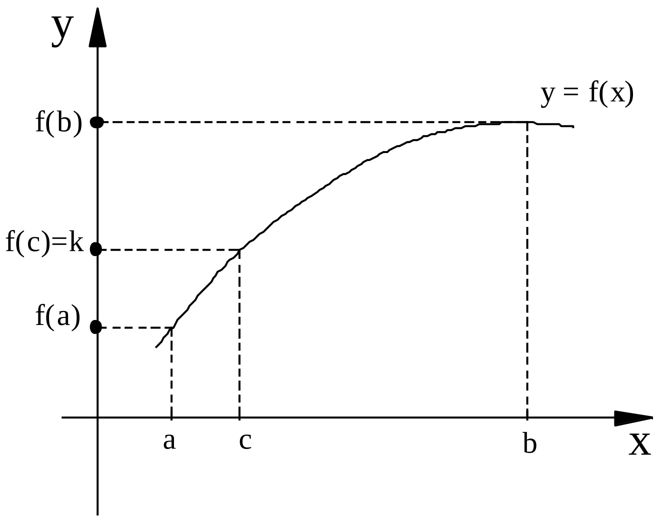
<u>Teorema de Bolzano o de los Ceros de las Funciones Continuas</u>

Si f(x) es una función continua en un intervalo $[a;b]$ y $f(a).f(b) < 0$, entonces $\exists\ c \in (a;b) \,/\, f(c) = 0$



<u>Teorema del Valor Intermedio</u>

Si f(x) es una función continua en un intervalo $[a;b]$ y $f(a) < k < (b)$, entonces $\exists\ c \in (a;b) \,/\, f(c) = k$



<u>Teoremas deWeierstrass</u>

<u>Primer Teorema</u>**:** Si f(x) es una función continua en un intervalo $[a;b]$, entonces f(x) está acotada en $[a;b]$.

<u>Segundo Teorema</u>**:** Si f(x) es una función continua en un intervalo $[a;b]$, entonces f(x) alcanza en $[a;b]$, Máximo y Mínimo Absolutos.

ANEXO

Teoremas sobre límites:

A continuación, encontrarás las demostraciones de los Teoremas sobre límites de funciones para $x \to a$.

a).- El **límite del producto de una constante *k*, por una función $f(x)$**, es igual al producto de la constante por el límite L de la función, o sea:

$$\lim_{x\to a} [k \,.\, f(x)] = k. \lim_{x\to a} f(x) = k \,.\, L$$

Demostración:

$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |k \,.\, f(x) - k \,.\, L| < \varepsilon \Leftrightarrow |k \,.\, (f(x) - L)| < \varepsilon \Leftrightarrow |k||f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/|k|$

para $0 < |x - a| < \delta$; O sea, por definición de límite: $\underset{x\to a}{f(x).\,k} = k \,.\, L$

b).- El **límite de una suma de funciones**, es igual a la suma de los límites de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan: $\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) = L_1 + L_2 \Leftrightarrow$

Hipótesis:

$\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon' > 0, \exists\, \delta'(\varepsilon') > 0 \,/\, \forall\, x{:}\ (x \in Df_1 \ \wedge\ 0 < |x - a| < \delta') \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \varepsilon'$

$\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon'' > 0, \exists\, \delta''(\varepsilon'') > 0 \,/\, \forall\, x{:}\ (x \in Df_2 \ \wedge\ 0 < |x - a| < \delta'') \Rightarrow |f_2(x) - L_1| < \varepsilon''$

Tesis:

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) = L_1 + L_2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, \forall x{:}\ \left(x \in D_{f_1 \cap f_2} \ \wedge\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2)\right|\right) < \varepsilon$

Demostración: por hipótesis: $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1 \ \wedge\ \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$

Tomando $\delta =$ mínimo $\{\delta_1;\ \delta_2\}$;

$$\left|(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2\right| \underset{\substack{\uparrow \\ asociamos}}{=} |(f_1(x) - L_1) + (f_2(x) - L_2)| \underset{\substack{\uparrow \\ por\ desigualdad \\ triangular}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{\left|\underbrace{f_1(x) - L_1}_{<\varepsilon'}\right| + \left|\underbrace{f_2(x) - L_2}_{<\varepsilon''}\right|}_{por\ hipótesis} \leq \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon \Rightarrow \left|(f_1(x) + f_2(x)) - (L_1 + L_2)\right| < \varepsilon$$

Luego: $[f_1(x) + f_2(x)] \underset{x\to a}{\to} (L_1 + L_2)$

c).- En forma análoga se demuestra que el **límite de la diferencia de funciones, es igual a la diferencia de los límites** de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan.

d).- El **límite del producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones** dadas, siempre y cuando los límites existan.

Límite de un producto de dos funciones

Hipótesis:

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=L_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon_1>0, \exists\delta_1(\varepsilon_1)>0\ /\ \forall x\in Df_1 \wedge 0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f_1(x)-L_1|<\varepsilon_1 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0} f_2(x)=L_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon_2>0, \exists\delta_2(\varepsilon_2)>0\ /\ \forall x\in Df_2 \wedge 0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |f_2(x)-L_2|<\varepsilon_2 \qquad (2)$$

Tesis:

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x).f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x).\lim_{x\to x_0} f_2(x)=L_1.L_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon'>0, \exists\delta(\varepsilon')>0/\forall x\in D(f_1\cap f_2):$$

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |(f_1(x).f_2(x)-(L_1L_2)|<\varepsilon'$$

Demostración: Sin emplear valor absoluto hacemos el siguiente producto:

$$(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)=f_1(x).f_2(x)-\underbrace{f_1(x).L_2-f_2(x).L_1}_{al\ 1^{er}\ miembro}+L_1.L_2$$

$(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+f_1(x).L_2+f_2(x).L_1=f_1(x).f_2(x)+L_1.L_2$;
invirtiendo la igualdad obtenemos:

$$f_1(x).f_2(x)+L_1.L_2=(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+f_1(x).L_2+f_2(x).L_1$$

$-2.L_1.L_2=-2.L_1.L_2$ sumamos a ambos miembros el valor $-2\ L_1.L_2$

$$f_1(x).f_2(x)-L_1.L_2=(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+f_1(x).L_2+f_2(x).L_1-2.L_1.L_2$$

descomponemos: $-2.L_1.L_2=-L_1.L_2-L_1.L_2$, y luego factoreamos el segundo miembro con el segundo caso de factoreo:

$$f_1(x).f_2(x)-L_1.L_2=(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+f_1(x).L_2+f_2(x).L_1-L_1.L_2-L_1.L_2=$$

$$=(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+L_2.(f_1(x)-L_1)+L_1.(f_2(x)-L_2)$$

aplicando valor absoluto:

$$|f_1(x).f_2(x)-L_1.L_2| = |(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+L_2.(f_1(x)-L_1)+L_1.(f_2(x)-L_2)| \underset{\text{Por Prop. del Valor Absoluto}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{|(f_1(x)-L_1)|}_{<\varepsilon_1 \text{ por } (1)} . \underbrace{|(f_2(x)-L_2)|}_{<\varepsilon_2 \text{ por } (2)} + |L_2|\ \underbrace{|(f_1(x)-L_1)|}_{<\varepsilon_1} + |L_1| . \underbrace{|(f_2(x)-L_2)|}_{<\varepsilon_2}$$

$$<\varepsilon_1.\varepsilon_1+|L_2|.\varepsilon_1+|L_1|.\varepsilon_2<\varepsilon'$$

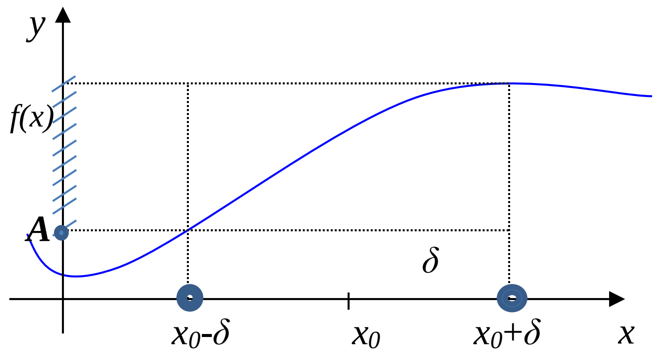
Luego: $|f_1(x).f_2(x)-L_1.L_2|<\varepsilon'$, si además: $\delta: mínimo \quad \{\delta_1;\delta_2\}$, cuando:

$$x\in D(f_1(x)\cap f_2(x)) \wedge 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f_1(x).\ f_2(x)]=\lim_{x\to x_0} f_1(x).\lim_{x\to x_0} f_2(x)=L_1.L_2$$

e).- El **límite de la recíproca de una función es igual a la recíproca del límite**, siempre que dicho límite sea distinto a cero.

Hipótesis:
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad (L\neq 0) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta(\varepsilon)>0 \,/\, \forall\, x:\left(\forall\, x\in Df \wedge 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\right)$$
Tesis:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=\frac{1}{L} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon'>0, \exists\, \delta'(\varepsilon')>0 \,/\, \forall\, x:\left(x\in Df_{1/f(x)} \wedge 0<|x-x_0|<\delta' \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|<\varepsilon'\right)$$
Demostración: Sea un número $\varepsilon'>0$; debemos probar que existe un número $\delta>0$ tal que:
$$si\ \ x\in D\frac{1}{f(x)} \ \wedge\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|<\varepsilon'$$

Calculemos cuando vale: $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L-f(x)}{f(x).L}\right| = \frac{|L-f(x)|}{|f(x)|.|L|} = \underbrace{\frac{1}{|f(x)|}}_{\varepsilon''}\ \frac{|f(x)-L|}{|L|} = \frac{\overbrace{|f(x)-L|}^{<\varepsilon\ por\ hipotesis}}{|f(x)||L|}$ (1)



Sí $\boldsymbol{A}$ es una cota inferior de la función en el intervalo$(x_0-\delta; x_0+\delta)$, podemos escribir:
$f(x)>A \Rightarrow \frac{1}{f(x)}<\frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|}<\frac{1}{|A|} \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|}<\varepsilon''>0$;
reemplazando en (1); resulta: $\frac{|f(x)-L|}{|f(x)|.|L|}<\frac{\varepsilon}{|A|.|L|}=\varepsilon'$

Luego, queda demostrado que: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{L}$

f).- El **límite de un cociente de funciones** es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

Sí $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=L_1 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=L_2 \wedge L_2\neq 0$,y si x_0 es punto de acumulación del dominio de $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, entonces: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *existe y es* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{L_1}{L_2}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x).\frac{1}{f_2(x)}\right]=\lim_{x\to x_0} f_1(x).\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f_2(x)}=L_1.\frac{1}{L_2}=\frac{L_1}{L_2}$$

g).-El límite de la opuesta de una función es igual a la opuesta del límite.

h).-Unicidad del Límite: una función no puede tener, para$x\to a$, dos límites distintos.

Una función no puede tener para $x\to x_0$ dos límites distintos.

Sí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_2$ *, entonces :* $L_1=L_2$

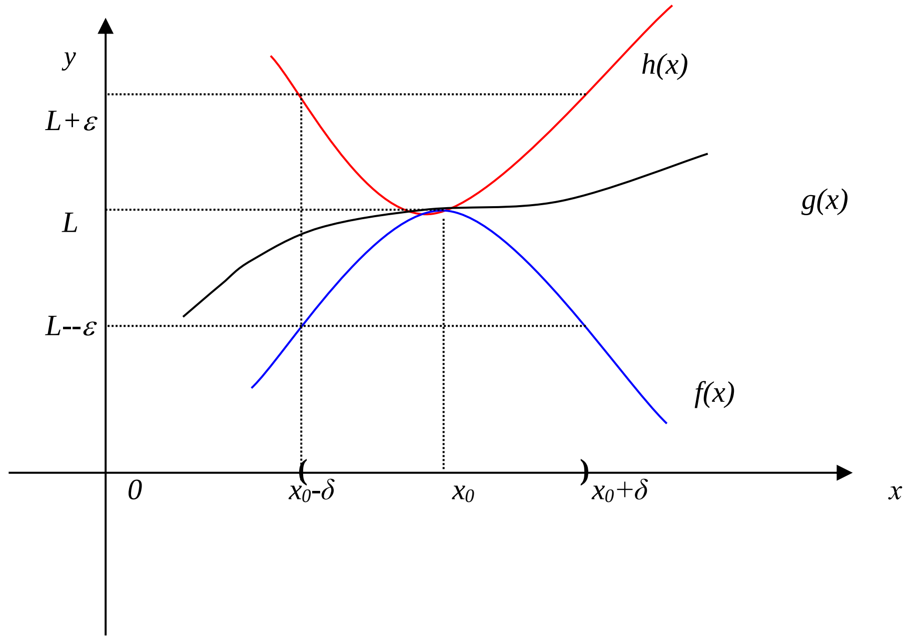
Supongamos que la función $f(x)$ tiene para $x \to x_0$ dos límites distintos, o sea: $L_1 \neq L_2$

Siendo $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y δ_2 tales que: $x \in Df \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon'$
$x \in Df \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon''$

Ahora bien, cuando x_0 es un punto de acumulación del Df, está definida en algún punto $x_1 \neq x_0$ en el intervalo abierto: $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1) \cap (x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2)$,
Luego: $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_1) + f(x_1) - L_2| \leq |L_1 - f(x_1)| + |f(x_1) - L_2| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon$
Y como sabemos que sí: $|a| \leq \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0 \ \Rightarrow \ a = 0$, resulta: $L_1 = L_2$

i).- Teorema de Confrontación entre límites:

Sí existe un intervalo abierto *A* que contiene a x_0 / $\forall x \neq x_0$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y sí:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$



ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS INFINITÉSIMOS

(I).- Si una función tiene límite finito, entonces dicha función es igual a su límite más un infinitésimo:
$$f(x) = L + \varepsilon(x);$$

puesto que: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, cuando la diferencia: $f(x) - L$ tiene límite cero, o sea, cuando la diferencia es un infinitésimo $\varepsilon_{(x)}$, podemos escribir en un entorno del punto $x = a$:

$$f(x) = L + \varepsilon(x); \quad \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 0$$

O bien: ''Si una función tiene límite finito, entonces dicha función es igual a su límite más un infinitésimo''.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 / \forall x: \left(x \in Df \ \wedge \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \underbrace{\varepsilon}_{\varphi(x)} \right)$$

Sea la siguiente función: $\varepsilon(x) = \phi(x) = f(x) - L$

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} [f(x) - L] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} L = L - L = 0 \quad \therefore \quad \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\to} 0$$

$\varepsilon(x)$ es un infinitésimo; $\qquad f(x) - L = \varepsilon(x) \Rightarrow f\big(x = L + \varepsilon(x)\big)$

(II).- La suma de varios infinitésimos en un mismo punto $x = a$ es otro infinitésimo en el punto a. O bien, la suma de un número finito de infinitésimo para$x \to a$, es otro infinitésimo para$x \to a$.

(III).- El producto de dos infinitésimos en un mismo punto $x = a$, es un infinitésimo en el punto$a$.

(IV).- El producto de un infinitésimo por una constante k cualquiera, es un infinitésimo.

(V).- El cociente de un infinitésimo por una constante, es un infinitésimo.

Cociente de infinitésimos. Órdenes infinitesimales

A diferencia de lo que sucede con la suma resta y producto de infinitésimos, no podemos asegurar nada en general sobre el cociente de infinitésimos.
Ejemplo:
El cociente: $\frac{x^5}{x^3}$; x^5 y x^2 infinitésimos para $x \to 0$; $\quad \frac{x^5}{x^2} = x^3$ infinitésimo para $x \to 0 \qquad (1)$

El cociente: $\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3} \underset{x\to 0}{\to} \infty \qquad (2)$

El cociente: $\frac{x^2}{2x^2}$; x^2 y $2x^2$ infinitésimos para $x \to 0$: $\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \qquad (3)$

En general, si $f(x)$ y $g(x)$son dos infinitésimos y $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 0$, se dice que $f(x)$ es un infinitésimo de orden superior, respecto de$g(x)$. Simbolizamos: $f = o(g) \quad (1)$

Si: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} \infty$, $f(x)$ es un infinitésimo de orden inferior respecto de $g(x)$ $\quad g = o(f) \quad (2)$

Si: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} k \neq 0$, $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos del mismo orden $\quad f \approx k.g \quad (3)$

Sí además: $k = 1$; $\quad f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes.

(VI).- El producto de un infinitésimo para $x \to a$ por una función acotada es otro infinitésimo para $x \to a$.

(VII).- Si a un infinitésimo se le suma otro de orden superior se obtiene un infinitésimo equivalente al primero.

(VIII).- La diferencia entre dos infinitésimos equivalentes, es otro infinitésimo de orden superior a ellos.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis Matemático I

MATERIAL DIDÁCTICO

Derivada y Diferencial

REEDICIÓN AÑO 2020

Profesor: ***Edgardo Alberto Arriola***

Unidad Temática III:

Derivada y Diferencial

La Tangente

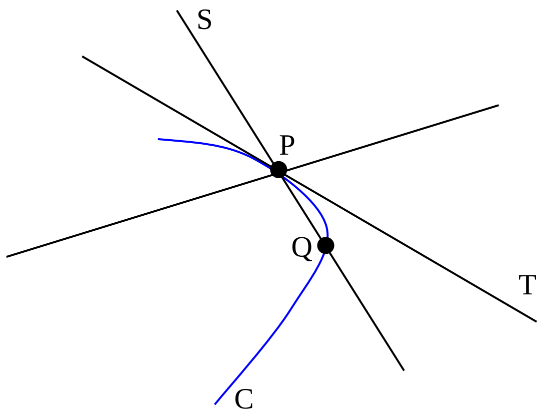
Abordaremos este tema tomando como punto de partida dos problemas básicos y concretos que son "el trazado de una recta tangente a una curva dada en un punto x_0 especificado y "la descripción de la velocidad de una partícula que se mueve en línea recta".

La solución de estos problemas han sido de interés para los matemáticos, desde los griegos (300-200 antes de J.C.), y las técnicas desarrolladas para resolver los mismos, son la columna vertebral de gran parte de la ciencia y la tecnología actuales.

Los métodos desarrollados para resolver el trazado de una recta tangente a una curva dada tienen una serie de aplicaciones importantes en la actualidad. Por ejemplo: "la dirección del movimiento de un objeto a lo largo de una curva en cada instante, se define en términos de la dirección de la recta tangente a la trayectoria del movimiento". Las órbitas de los planetas alrededor del sol y la de los satélites artificiales alrededor de la tierra, se estudian esencialmente comenzando con la información sobre la recta tangente a la trayectoria del movimiento.

Empezamos con el problema de la tangente, no solo por su importancia "histórica y práctica", sino también porque la intuición geométrica que tenemos contribuirá a hacer concreto lo que de otro modo sería una noción abstracta.

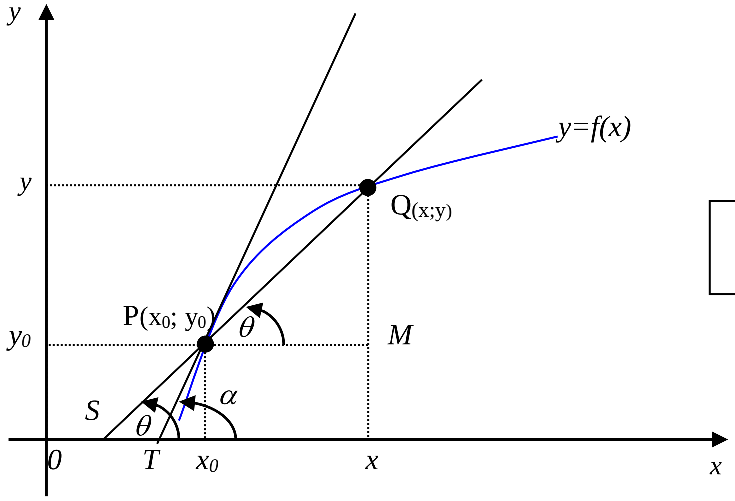
En esta figura se ilustra un procedimiento intuitivo para trazar una tangente a una curva continua C, en un punto P. Sí se hace girar una recta alrededor del punto P, generalmente cruzará la curva en P, y posiblemente en otro punto. Una recta que corte a la curva en P, y en otro punto tal como Q, secante a la curva.



A medida que el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de la curva, la secante gira alrededor de P y parece llegar a una posición límite, la cual es la recta $\overline{PT}$ que en P coincide en dirección con la curva. En este sentido consideramos a la recta $\overline{PT}$ como límite de la secante $\overline{PQ}$.

Lo expuesto nos permite efectuar la siguiente <u>Definición</u>: "sí $\overline{PQ}$ es una secante que pasa por los puntos P y Q de una curva continua C, entonces el límite (si existe) de la secante $\overline{PQ}$, cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, <u>se llama Tangente a la curva en P</u>".

Supongamos que la ecuación de la curva sea $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una función continua y x e y son las coordenadas rectangulares usuales. Se pide trazar la tangente en el punto $P_{(x_0;y_0)}$ de la curva. Sí queremos aplicar la definición dada consideraremos otro punto $Q_{(x;y)}$ de la curva. Los puntos P y Q determinan una secante cuya pendiente es: $tg\,\theta = \dfrac{y-y_0}{x-x_0}$



$$\lim_{Q\to P} S = T$$

Suponiendo que la curva tiene una tangente $\overline{PT}$, hallamos que cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, la inclinación θ de la secante se aproxima a la inclinación α de la tangente, es decir: $\lim\limits_{Q\to P} \theta = \alpha$

Además, la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente, es decir:

$$\lim_{Q\to P} tg\,\theta = tg\,\alpha$$

Como las coordenadas de P se pueden escribir: $[x_0; f(x_0)]$, y los de Q: $[x; f(x)]$, en consecuencia: cuando $Q \to P \Leftrightarrow x \to x_0$

$$\therefore \lim_{Q\to P} tg\,\theta = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Esta expresión nos dice que la pendiente $m(x_0)$ de la tangente a la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto $P_{(x_0;y_0)}$, es:

$$m(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

<u>Definición de derivada de una función en un punto</u>

Como vimos, el límite que define la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto $P_{(x_0;y_0)}$, es: $m(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

También el límite que define la velocidad instantánea de una partícula que se mueve sobre una recta de acuerdo con la fórmula:

$e = e(t)\ ;\ V(t_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e(t) - e(t_0)}{t - t_0}$, tiene exactamente la misma forma.

Además, es conveniente dejar aclarado que muchos otros problemas que se presentan en la técnica implican este tipo de límite. Para evitar toda relación con un problema particular, a estos límites se les da el nombre de <u>Derivada</u>.

Sí el $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, se llama <u>Derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa x_0</u>, y se designa por: $f'(x_0)\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

En general, dada una función $y = f(x)$, si damos un incremento Δx (positivo o negativo) a la variable independiente, resultará para la función un incremento $f(x + \Delta x) - f(x)$, que se indica con Δy.

Si formada, luego, la "relación media" o el cociente incremental: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, y existe:

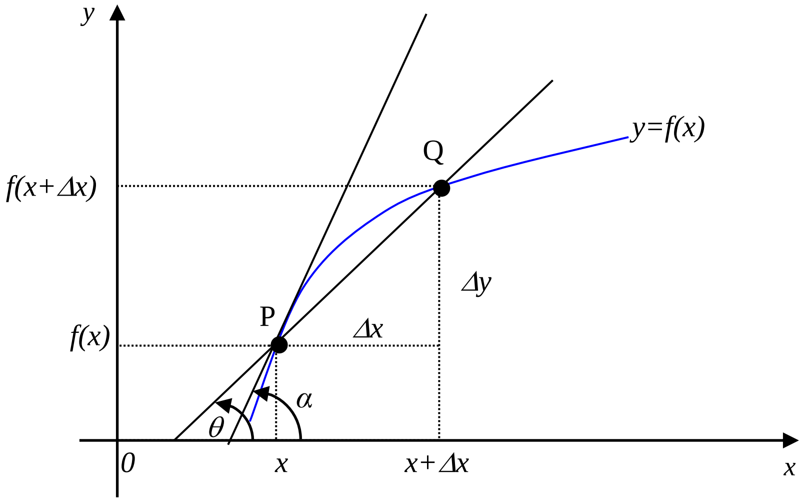
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, a este límite, si existe, se lo llama <u>Definición de</u> <u>Derivada</u> de la función $f(x)$.

<u>En símbolos</u>:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$ ***<u>Regla General de Derivación</u>***.

Es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica a la curva en un punto considerado.



<u>NOTA</u>: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ representa la variación de la función (Δy) por unidad de variación de Δx.

Cuando $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, representa la variación de la función en un punto.

<u>NOTACIONES</u>: $y'; Dy; f'(x); [f(x)]'; Df(x); D_x f(x); \frac{dy}{dx}$; (Notación de Leibniz 1646-1716)

<u>Función Derivada</u>

El valor $f'(a)$ considerado como imagen para cada punto a del Dominio, donde $f(x)$ es derivable, permite definir una nueva función $f'(x)$, que se llama función derivada de $f(x)$.

Es decir, $f'(x)$ es la función derivada de $f(x) \Leftrightarrow f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}; \forall a \in Df$, donde dicho límite existe.

El dominio de $f'(x)$ está formado por los puntos a del Dominio de $f(x)$ para los cuales existe $f'(a)$.

$$\therefore \; Df' \subseteq Df$$

<u>Derivabilidad y Continuidad</u>:

Hagamos notar que, siendo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, podemos escribir: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon; \varepsilon$: infinitésimo; o lo que es lo mismo: $\Delta y = y' \Delta x + \varepsilon \Delta x$. Luego, sí $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Es decir, sí una función es derivable, es continua.

La proposición recíproca no es cierta, hay funciones continuas que no son derivables, o, en términos geométricos, hay curvas que no tienen tangente.

Es importante dejar perfectamente claro que "una función es derivable en x_0, si su derivada existe en x_0".

<u>Continuidad de las funciones derivables</u>

Para una función, la propiedad de ser derivable es más fuerte que la de ser continua. Es decir, la derivabilidad asegura la continuidad, mientras que el recíproco no se cumple, pues existen funciones continuas en un punto que no son derivables en él. O sea:

$$DERIVABILIDAD \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{\text{—}}} \text{CONTINUIDAD}$$

<u>Teorema</u>: sí una función tiene derivada finita en un punto, entonces es continua en dicho punto. Es decir, el Teorema asegura que sí existe un número real $k \,/\, k = f'(a) \Rightarrow f(x)\, es\ continua\ en\ a.$

<u>Demostración</u>:

Como $f(x)$ es derivable en el punto a, y sí $x \in Df$ es otro punto del dominio / si $x \neq a$:

podemos escribir $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$; calculando el límite en el punto a, es:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a}(x - a) = f'(a).0 = 0$$

↑ por límite de un producto

luego: $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - f(a)] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x)$ es continua en a.

<u>Derivadas Laterales</u>: se obtienen considerando los límites laterales del cociente incremental.

(a) <u>Derivada lateral derecha o derivada por la derecha</u>: sea $f(x)$, función continua en $x = x_0$, la derivada por la derecha:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(b) <u>Derivada lateral izquierda o derivada por la izquierda</u>: análogamente, la derivada por la izquierda:

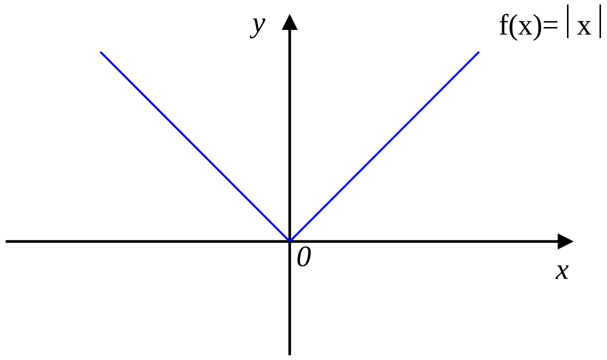
$$f'_{-}(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Como consecuencia inmediata de estas definiciones se puede demostrar el siguiente:

Teorema: sí la función $f(x)$ es continua en $x=x_0$, entonces si $f'(x_0)$ existe $\Leftrightarrow f'_{+}(x_0)=f'_{-}(x_0)$

Ejemplo: estudiar la derivabilidad de $f(x)=|x|$ en $x=0$

Esta función es continua $\forall\ x\in\mathbb{R}$, puesto que: $|x|=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 0 \\ -x \text{ si } x<0\end{cases}$



Veamos las derivadas laterales en $x_0=0$.

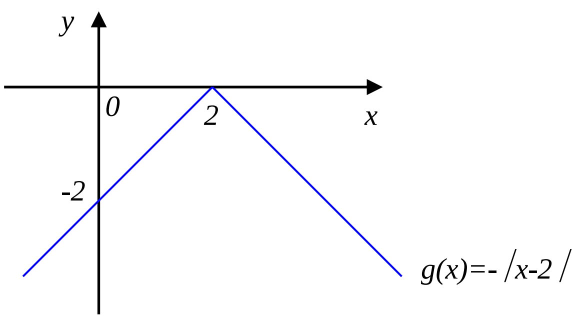
$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{x-0}{x-0}=1\ ;\ f'_{-}(0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

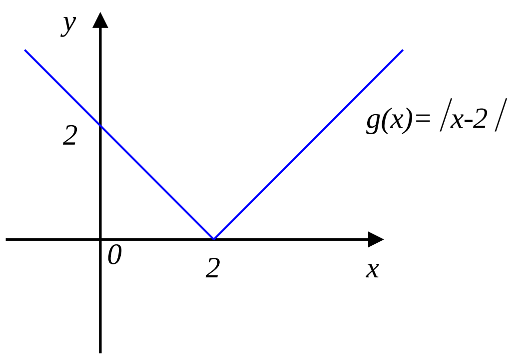
$$\therefore\ \nexists\ f'(0), \text{ pues que: } f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$$

Luego, $f(x)=|x|$ no es derivable en el punto $x_0=0$, pero sí es continua en dicho punto.

Algo similar ocurre con la función: $f(x)=-|x-2|$, en el punto $x_0=2$; $f(x)$ es continua en $x_0=2$ y $\nexists\ f'(2)$, pues: $f'_{+}(2)=-1\ \wedge\ f'_{-}(2)=1$

O en: $g(x)=|x-2|$





<u>Álgebra de Derivadas</u>

<u>Derivada de una suma algebraica de funciones</u>: es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones sumandos.

$y = u(x) + v(x) - w(x)$ siendo: $u(x); v(x); w(x)$ funciones de x (derivables).

Incrementando x en Δx:

$$y + \Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - w(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - w(x + \Delta x) - u(x) - v(x) + w(x)$$
$$\Delta y = [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] - [w(x + \Delta x) - w(x)]$$

pero: $u(x + \Delta x) - u(x) = \Delta u$; $v(x + \Delta x) - v(x) = \Delta v$; $w(x + \Delta x) - w(x) = \Delta w$

luego: $\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$; dividiendo por Δx y pasando al límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = u'(x) + v'(x) - w'(x) \Rightarrow y' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

<u>La derivada de una constante</u>: es nula.

$y = f(x) = c$; como $f(x)$ es constante, cualquiera sea el valor de x se verifica:

$$f(x + \Delta x) = f(x); \quad \therefore \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

luego: $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} 0 = 0$

<u>La derivada de la variable independiente</u> (respecto de ella misma): es la unidad.

$$y = f(x) = x; \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cancel{x} + \Delta x - \cancel{x} = \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad ; \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

<u>La derivada del producto de dos funciones</u>: es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera función por la derivada de la segunda.

$y = u(x).v(x)$, incremento x en Δx. Tenemos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ se incrementan en Δu y Δv respectivamente.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u).(\mathrm{v} + \Delta \mathrm{v}) = u\,.\,\mathrm{v} + \mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v} + \mathrm{v}\,.\,\Delta\mathrm{u} + \Delta\mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v}$$

$$\Delta y = \cancel{u\,.\,\mathrm{v}} + \mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v} + \mathrm{v}\,.\,\Delta\mathrm{u} + \Delta\mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v} - \cancel{u\,.\,\mathrm{v}} = \mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v} + \mathrm{v}\,.\,\Delta\mathrm{u} + \Delta\mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v}$$

$$\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}} = u\,\frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{x}} + v\,.\,\frac{\Delta \mathrm{u}}{\Delta \mathrm{x}} + \frac{\Delta \mathrm{u}}{\Delta \mathrm{x}}\,.\,\Delta\mathrm{v}\,;$$

$\uparrow$ cuando $\Delta\mathrm{x} \to 0$; $\Delta\mathrm{v} \to 0$ pues: $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$

pasando al límite para $\Delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad y' = u\,.\,v' + u'\,.\,v$

Para hallar la **derivada del producto de tres factores**, tenemos:

$$y = u(x)\,.\,v(x)\,.\,w(x) = u(x)\,.\,[v(x)\,.\,w(x)]$$

$$y' = u'(x)\,.\,[v(x)\,.\,w(x)] + u(x)\,.\,[v(x)\,.\,w(x)]' = u'(x)\,.\,[v(x)\,.\,w(x)] + u(x)\,.\,\left[v'(x)\,.\,w(x) + v(x)\,.\,w'(x)\right]$$

$$\therefore \quad y' = u'\,.\,v(x)\,.\,w(x) + u(x)\,.\,v'(x)\,.\,w(x) + u\,.\,v(x)\,.\,w'(x)$$

La derivada del producto de tres funciones: es igual a la suma cuyos sumandos se forman con la derivada de una función multiplicada por las otras dos funciones (sin derivar).

Luego, **generalizando**: sí: $y = u\,.\,\mathrm{v}\ldots\mathrm{w}$; siendo: *u, v, ... , w* funciones de *x*, resulta:

$$y' = u'\,.\,\mathrm{v}\ldots\mathrm{w} + u\,.\,\mathrm{v}'\ldots\mathrm{w} + \ldots + u\,.\,\mathrm{v}\ldots\mathrm{w}'$$

La derivada de una constante por una función: es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$\mathrm{c} = \mathrm{cte.}$; $\mathrm{y} = \mathrm{c}\,.\,\mathrm{f}(\mathrm{x})$; aplicando la regla de derivación de un producto:

$$y' = c'\,.\,f(x) + c\,.\,f'(x) = c\,.\,f'(x)$$

La derivada de un cociente de dos funciones: es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

$y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$; incrementando x en Δx, tenemos:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \;;\; \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} \;;\; \Delta y = \frac{\cancel{u\,.\,v} + v\,.\Delta u - \cancel{u\,.\,v} - u\,.\,\Delta v}{v\,.\,(v + \Delta v)} = \frac{v\,.\Delta u - u\,.\,\Delta v}{v^2 + v\,.\,\Delta v}$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v\,.\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\,.\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\,.\,\Delta v}$; teniendo en cuenta que cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta v \to 0$, por ser $v(x)$ una función continua (pues $v(x)$ es derivable).

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \,. \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \,. \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \,. \underbrace{\Delta v}_{\substack{\Delta v \to 0 \\ \Delta x \to 0}}} = \frac{u' . v + u . v'}{v^2}$$

Derivada de la función logarítmica:

Sea la función: $y = log_a x$; donde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $\wedge$ Dominio $f(x) = \mathbb{R}^+$

$$y + \Delta y = log_a(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = log_a(x + \Delta x) - log_a(x) = log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} . log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$. Antes de pasar al límite transformamos el cociente incremental multiplicando y dividiendo por *x*:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} . \frac{x}{\Delta x} . log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} . log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

↑ como el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la misma

haciendo: $\frac{x}{\Delta x} = t$; de donde $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{t}$. cuando $\Delta x \to 0$; $t \to \infty$ $\wedge$ $\frac{1}{t} \to 0$

Sustituyendo y pasando al límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{x} . log_a\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x} . \lim_{t \to \infty} log_a\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \Rightarrow$$

↑ como el límite de una constante por una función es igual al producto de la constante por el límite de la función

Utilizando propiedades de los logaritmos de números reales, puede demostrarse que si una función $f(x)$ tiene límite finito y positivo en un punto $a \Rightarrow$ "el límite del logaritmo es el logaritmo del límite" es decir: $\lim_{x \to a} [log_b f(x)] = log_b \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$ $(b>1)$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} . log_a\left[\lim_{t \to \infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right] \Rightarrow y' = \frac{1}{x} . log_a e \text{; como: } log_a e = \frac{1}{ln\, a} : y' = \frac{1}{x . ln\, a}$$

"La derivada del $log_a x$ para todo valor positivo de x, es igual al recíproco de x, por el recíproco de $ln\, a$".

Obsérvese que la derivada de: $y = log_a x$ (función trascendente), es $y' = \frac{1}{x \, . ln \, a}$ (función algebraica).

<u>Derivada del logaritmo natural</u>:

$y = ln\, x$, luego $y' = \frac{1}{x \, . ln\, e} = \frac{1}{x}$

<u>Derivada de una función de función</u>: (o derivada de una función o compuesta o Regla de la Cadena)

Sabemos que la dependencia de y con respecto a x se puede poner de manifiesto a través de una variable auxiliar u. Tengamos: $y = f(u)$, siendo $u = g(x)$. y es función u; u es función de x. Si x recibe un incremento Δx, u recibe un incremento Δu; la razón incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se puede escribir así: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} . \frac{\Delta u}{\Delta x}$; $\begin{matrix} \text{cuando } \Delta x \to 0 \\ \text{también } \Delta u \to 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} . \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow$

$$y'(x) = y'(u) . u'(x); \text{ o tambien :}$$
$$y'(x) = f'(u) . g'(x)$$

<u>Derivación logarítmica</u>:

Sea la función $y = f(x)$, si aplicando logaritmo tenemos que $ln\, y$ es una función de función (pues $ln\, y$ es función de y, e y es función de x), entonces: $(ln\, y)' = \frac{y'}{y}$, pués:

$ln\, y = g(y); \quad y = f(x)$

$(ln\, y)' = g'(y) . f'(x); \quad g'(y) = \frac{1}{y}$

$(ln\, y)' = \frac{f'(x)}{y} = \frac{y'}{y}$

Esta expresión se llama derivada logarítmica o derivación logarítmica de la función $y = f(x)$. Muchas veces resulta sumamente útil aplicar logaritmo antes de derivar y vamos a usar este método para hallar la <u>derivada de una potencia cualquiera de una función</u>.

<u>Derivada de una potencia de x</u>:

Sea: $y = f(x) = x^m$; $m \in \mathbb{N}$; $y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$; por comodidad escribimos:

$$x_1 = x + \Delta x \Rightarrow \Delta x = x_1 - x$$

nos queda: $y+\Delta y = {x_1}^m \Rightarrow \Delta y = {x_1}^m - x^m \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{{x_1}^m - x^m}{\Delta x} = \frac{{x_1}^m - x^m}{x_1 - x}$; efectuando el cociente de los polinomios, nos queda:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = {x_1}^{m-1} + {x_1}^{m-2}.\,x + {x_1}^{m-3}.\,x^2 + \ldots\ldots\ldots + x_1.\,x^{m-2} + x^{m-1}$$

Sí $\Delta x \to 0$, tenemos que $x_1 \to x$ por lo tanto nos queda una suma de m sumandos iguales a x^{m-1}, es decir: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \underbrace{x^{m-1} + x^{m-1} + \ldots\ldots + x^{m-1}}_{m \text{ sumandos}} = m\,.\,x^{m-1} \Rightarrow \mathrm{D}\,\mathrm{x}^{\mathrm{m}} = m\,.\,x^{m-1}$

De otra forma:

$y+\Delta y = (x+\Delta x)^m$, desarrollando el segundo miembro según el Binomio de Newton, nos queda:

$$y+\Delta y = x^m + m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{m-1}}.\,\Delta\mathrm{x} + m\,.\,(m-1).\,x^{m-2}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^2}{2!} + m\,.\,(m-1).\,(\mathrm{m}-2).\,x^{m-3}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^3}{3!} + \ldots + \Delta x^m$$

$$\Delta y = \cancel{x^m} + m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{m-1}}.\,\Delta\mathrm{x} + m\,.\,(m-1).\,x^{m-2}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^2}{2!} + m\,.\,(m-1).\,(\mathrm{m}-2).\,x^{m-3}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^3}{3!} + \ldots + \Delta x^m - \cancel{x^m}$$

$$\Delta y = m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{m-1}}.\,\Delta\mathrm{x} + m\,.\,(m-1).\,x^{m-2}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^2}{2!} + m\,.\,(m-1).\,(\mathrm{m}-2).\,x^{m-3}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^3}{3!} + \ldots + \Delta x^m$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{m-1}}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}}{\Delta\mathrm{x}} + m\,.\,(m-1).\,x^{m-2}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^2}{2!}\,\frac{\Delta x^2}{\Delta x} + m\,.\,(m-1).\,(\mathrm{m}-2).\,x^{m-3}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^3}{3!}\,\frac{\Delta x^3}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta x^m}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el cociente $\Delta x/\Delta x \to 1$, pero a partir del segundo sumando vemos que aparece el cociente de potencias crecientes de Δx sobre Δx, es decir el cociente de un infinitésimo de orden superior por otro de menor orden: $\underset{\Delta x\to 0}{su\ cociente \to 0}$.

Por lo tanto, nos queda: $Dx^m = y' = m\,.\,x^{m-1}$

Casos particulares:

Exponentes negativos: $y = x^{-m}$;

$$y' = -m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{-m-1}}$$

$$y' = -m\,.\,\mathrm{x}^{-(\mathrm{m}+1)} = \frac{-m}{x^{m+1}}$$

Derivada de una potencia cualquiera de una función

Sea: $f(u) = y = u^m$; siendo: $u = g(x) \quad \wedge \quad m \in \mathbb{R}$

Aplicando logaritmo neperiano en ambos miembros, tenemos: $ln\, y = m\,.\,ln\, u$

Aplicando derivada logarítmica: $\frac{y'}{y} = m\,.\,\frac{u'}{u} \Rightarrow y' = m\,.\,\frac{u'}{u}\,.\,u^m \Rightarrow y' = m\,.\; u^{m-1}\,.\,u'$

Derivada de la función exponencial

$$y = a^u;\quad a = constante\,, u \;\; función\; de\; x$$

$$ln\, y = u\,.\,ln\, a \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = u'\,.\,ln\, a \;\Rightarrow\; y' = a^u\,.\,ln\, a\,.\,u'$$

Casos particulares:

(a) Sea: $y = e^u;\; u = g(x)$ $\qquad ln\, y = u\,.\,ln\, e \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = u'\,.\,ln\, e = y' = e^u\,.\,u'$

(b) Sea: $y = a^x;\; ln\, y = x\,.\,ln\, a \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = x'\,.\,ln\, a = ln\, a \;\Rightarrow\; y' = a^x\,.\,ln\, a$

(c) Sea: $y = e^x$; (función exponencial natural)

$$ln\, y = x\,.\,ln\, e \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = x'\,.\,ln\, e = 1 \;\Rightarrow\; y' = y \;\Rightarrow\; y' = e^x$$

(d) Caso de base y exponente variable. Derivada de la función potencial-exponencial (o función exponencial compuesta).

La función donde tanto la base como el exponente son funciones de x, se llama "Función Exponencial Compuesta".

Por ejemplo: $y = (sen\, x)^{x^2};\; y = x^{tg\, x};\; y = x^x;\; y = (ln\, x)^x;$ y en general toda función del tipo:

$y = u^v$, siendo u y v funciones de x.

$$ln\, y = v\,.\,ln\, u \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = v'\,.\,ln\, u + v\,.\,\frac{u'}{u} \;\Rightarrow\; y' = \left(v'\,.\,ln\, u + v\,.\,\frac{u'}{u}\right).\,u^v = u^v\,.\,v'\,.\,ln\, u + v\,.\,\frac{u'}{u}\,.\,u^v$$

$$y' = \underbrace{u^v\,.\,v'\,.\,ln\, u}_{(1)} + \underbrace{v\,.\,u'\,.\,u^{v-1}}_{(2)}$$

(1)- Este término es la derivada de u^v considerando a v como función y a u como constante (función exponencial).

(2)- Este término es la derivada de u^v considerando a u como función y a v como constante (función potencial).

<u>Derivada de la raíz enésima de una función</u>

$$y = \sqrt[n]{u}\,;\; u = f(x)$$

$y = u^{1/n}$, derivo como potencia: $y' = \frac{1}{n}.u^{\frac{1}{n}-1}.u' = \frac{1}{n}.u^{\frac{1-n}{n}}.u' = \frac{1}{n}.\frac{1}{u^{\frac{n-1}{n}}}.u'$

$$y' = \frac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

<u>Casos particulares</u>:

(a) Si se trata de una raíz cuadrada: $y = u^{1/2}$; $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

(b) Sea la función: $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Derivadas de funciones inversas</u>

Sí $f(x)$ es una función biyectiva con derivada finita no nula en el punto a, entonces $f^{-1}(x)$ tiene derivada finita en $f(a)$, y esta derivada es: $\frac{1}{f'(a)}$.

<u>Demostración</u>: por definición de función inversa: $\forall x : f^{-1}[f(x)] = x$, sí derivamos esta expresión, aplicando la derivada de una función de función para derivar el primer miembro; resulta:

$$f(x)\circ g(x) = f[g(x)] \Rightarrow (f(x)\circ g(x))' = f'[g(x)].g'(x)$$

$f^{-1'}[f(x)].f'(x) = 1 \Rightarrow f^{-1'}[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$; sí $f'(x) \neq 0$

Derivada de funciones trigonométricas (o circulares directas)

Derivada de la función seno:

Sea: $y = sen\, x$

$y + \Delta y = sen\left(x + \Delta x\right) \Rightarrow \Delta y = sen\left(x + \Delta x\right) - sen\, x\,;$

recordando que: $sen\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

$$\Delta y = 2\,sen\left(\frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{2}\right).cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = 2\,sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1} . \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = cos\, x;$$

$$y' = cos\, x$$

sí: $y = sen\, u\,;\;\; u = g\left(x\right)$, aplicando derivada de función de función:

$$y' = cos\, u\, .u'$$

Derivada de la función coseno:

Sea: $y = cos\; x$

$y + \Delta y = cos\left(x + \Delta x\right) \Rightarrow \Delta y = cos\left(x + \Delta x\right) - cos\; x\,;$

recordando que: $cos\,\alpha - cos\,\beta = -2\,sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

$$\Delta y = -2\,sen\left(\frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{2}\right).sen\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = -2\,sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\,sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).sen\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{-sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.sen\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\mathrm{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{-1}.\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-sen\,x;$$

$$y'=-sen\,x$$

sí: $y=cos\,u$; $u=f(x)$, aplicando derivada de función de función:

$$y'=-sen\;u\,.u'$$

<u>Derivada de la función tangente</u>

$y=tg\;x=\frac{sen\,x}{cos\,x}$; derivamos como cociente, y obtenemos:

$$y=\frac{1}{cos^2\,x}=sec^2\,x;$$

sea: $y=tg\,u$; $u=f(x)$;

$$y'=\frac{u'}{cos^2\,u}=sec^2\,u\,.u'$$

<u>Derivadas de funciones Circularas Inversas</u> (Funciones ciclométricas)

<u>Derivada de la función arco seno</u>

Sea: $y=arc\;sen\,x$; donde: $Df=[-1;1]$; $Rg=\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; cuya función inversa es: $x=sen\,y\quad(1)$; aplicando la regla de derivación de funciones inversas, tenemos:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{cos\,y}$ (2): dado que: $sen^2\,y+cos^2\,y=1 \Rightarrow cos\,y=\sqrt{1-sen^2\,y}$; por (1):

$cos\,y=\sqrt{1-x^2}$; reemplazando en (2): $\dfrac{dy}{dx}=y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; para: $-1\le x\le 1$

$$\therefore \quad y=arc\,sen\,u \Rightarrow \quad y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \text{ siendo } u=g(x)$$

Obsérvese que tomamos la raíz con el signo positivo, porque la función $y=arc\,sen\,x$ se define en el intervalo $\left[-\pi/2\le y\le \pi/2\right]$; o sea en el primero y cuarto cuadrantes donde $cos\,y\ge 0$.

***<u>Derivada de la función arco coseno</u>*:**

Sea: $y=arc\,cos\,x$; donde: $Df=[-1;1]$; $Rg=[0;\pi]$; cuya función inversa es: $x=cos\,y$, derivando, se tiene:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{-sen\,y}=-\dfrac{1}{sen\,y}$; puesto que: $sen\,y=\sqrt{1-cos^2\,y}=\sqrt{1-x^2}$;

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad \dfrac{dy}{dx}=y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; para: $-1\le x\le 1$

$\therefore \quad y=arc\,cos\,u \Rightarrow \quad y'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$; siendo $u=g(x)$

En la igualdad $sen\,y=\sqrt{1-cos^2\,y}$, tomamos la raíz con signo positivo, porque la función $y=arc\,cos\,x$ esta definida en el intervalo $0\le y\le \pi$, es decir en el primero y segundo cuadrantes, donde $sen\,y\ge 0$.

<u>Derivada de las funciones hiperbólicas directas</u>

***<u>Derivada de la función</u>*:** $y=Sh\,x$; $\quad y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}e^x+e^{-x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=Ch\,x$

***<u>Derivada de la función</u>*:** $y=Ch\,x$; $\quad y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=Sh\,x$

<u>Casos particulares</u>: aplicando derivada de función de función, tenemos:

$$y=Sh\,u \Rightarrow y'=Ch\,u\,.u'; \qquad \text{y} \qquad y=Ch\,u \Rightarrow y'=Sh\,u\,.u'$$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas

Para derivar funciones hiperbólicas inversas se procede de forma análoga a la empleada para funciones circulares inversas.

(I) $y = Arg\ Sh\,x \Rightarrow x = Sh\,y\,;\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{Ch\,y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+Sh^2\,y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,;$

$Ch^2\,\alpha - Sh^2\,\alpha = 1$

(II) $y = Arg\ Ch\,x \Rightarrow x = Ch\,y\,;\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{Sh\,y} = \dfrac{1}{\sqrt{Ch^2\,y - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(III) $y = Arg\ Th\,x \Rightarrow x = Th\,y\,;\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{Ch^2\,y}} = Ch^2\,y = \dfrac{1}{1-Th^2\,y} = \dfrac{1}{1-x^2}$

Derivada de funciones definidas implícitamente

Sea: $F(x;y) = 0$. Sí existe una función $y = f(x)$ definida en un cierto intervalo $[a;b]$ tal que $F[x;f(x)] = 0,\ \forall\, x \in [a;b]$, diremos que la ecuación $F(x;y) = 0$ define y como función implícita de x.

En ocasiones resulta factible "despejar" y de $F(x;y) = 0$, transformándose así la función implícita en explícita, pero esta transformación resulta a veces penosa y otras imposible.

La teoría de funciones implícitas (existencia y derivabilidad) se verá al estudiar funciones de dos variables, pero podemos agregar que una ecuación $F(x;y) = 0$, generalmente implica una o más relaciones funcionales.

Entonces "Una función cuya existencia está implicada en una ecuación $F(x;y) = 0$, se llama *función implícita*".

Ejemplos:

(1) sea la ecuación: $x\,.y + x - 2y - 1 = 0$, derivando se obtiene: $x'\,.\,y + x\,.\,y' + x' - 2y' - \underbrace{1'}_{0} = 0$

$$y + x\,.y' + 1 - 2y' = 0 \Rightarrow (x-2).y' + y + 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y-1}{x-2} = \frac{y+1}{2-x}$$

(2) sea la ecuación: $x^2.\,y + 3y - 4 = 0$, derivando, se tiene:

$$x^2\,.\,y' + 2x\,.\,y + 3y' = 0 \Rightarrow (x^2+3).\,y' + 2x\,.\,y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x.y}{x^2+3}$$

En general, para hallar la derivada y' se puede seguir uno de los procedimientos que se detallan a continuación:

(i) "Despejar" y, si es posible, derivar luego con respecto a x. Este procedimiento debemos evitar a menos que se trate de una ecuación sencilla.

(ii) Derivar la ecuación dada con respecto de x, teniendo en cuenta que y es función de x, y despejar después y'. Esta forma de efectuar la derivación recibe el nombre de "*Derivación Implícita*".

Derivadas sucesivas: (o derivadas de orden superior)

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable en el intervalo $[a;b]$. Los valores $f'(x)$ dependen generalmente de x, es decir, como ya hemos visto, la derivada $f'(x)$ también es una función de x.

La derivada de la primera derivada se llama segunda derivada o derivada de segundo orden de la función inicial, y se designa: $y'';\quad f''(x);\quad \frac{d^2y}{dx^2};\ D^2y;\ \frac{d^2}{dx^2}f(x);\ y^{(2)}$

La derivada de la segunda derivada se denomina derivada tercera o derivada de tercer orden, y se designa: $y''';\quad f'''(x);\quad \frac{d^3y}{dx^3};\ D^3y;\ \frac{d^3}{dx^3}f(x);\ y^{(3)}$

En consecuencia, diremos que la derivada n-sima (o de orden n) de una función $f(x)$ es, entonces, la derivada de la derivada de orden *n-1* (supuesta derivada) de $f(x)$. Diremos también, en este caso, que $f(x)$ es derivable n veces en el intervalo $[a;b]$. Simbólicamente podemos escribir: $f^{(n)}(x) = Df^{(n-1)}(x) = y^{(n)}$.

Es obvio que él calculo de las derivadas superiores de $f(x)$ se efectúa aplicando reiteradamente las reglas de derivación que hemos estudiado.

Digamos, asimismo, que para ciertas funciones es factible encontrar una expresión de la derivada enésima en función de n. El procedimiento consiste en calcular un cierto número de derivadas sucesivas, tantas como sea necesarias, para inferir una ley de formación para, posteriormente, aplicar el principio de inducción completa.

Ejemplo: Sea la función: $f(x) = e^{\alpha x}$

$$f'(x) = a\,.e^{\alpha x};\quad f''(x) = a^2\,.e^{\alpha x};\quad f'''(x) = a^3\,.e^{\alpha x};..........;\ f^{(n-1)}(x) = a^{(n-1)}\,.e^{\alpha x};$$

$$f^{(n)}(x) = Df^{(n-1)}(x) = a^n.e^{ax}$$

Por último, digamos que las funciones más comunes, y que resultan de particular importancia, son infinitamente derivables, es decir, que admiten derivadas de orden n cualquiera. Por ejemplo, la función exponencial $y = e^x$, para la cual $D^{(n)}e^x = e^x;\ \forall n \in \mathbb{Z}$; la función $y = e^{ax}$ que hemos visto; los polinomios, etc.

Diferencial de una función*. *Definición. Parte principal del incremento

Sea la función $y = f(x)$ que suponemos derivable y, por ende, continua en el intervalo $[a;b]$.

En un punto $x \in [a;b]$, la derivada de la función se define como: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; donde podemos observar que cuando $\Delta x \to 0$, la razón $\Delta y / \Delta x$ tiende a un número determinado $f'(x)$, y por lo tanto esta razón incremental se diferencia de la derivada $f'(x)$ en un infinitésimo. Es decir, por una propiedad de los infinitésimos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon_{(x)}, \text{ donde } \varepsilon_{(x)} \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$$

de donde: $\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon_{(x)}.\Delta x$. En virtud de la continuidad de $f(x)$, se sabe que Δy es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$. También sabemos que $f'(x).\Delta x$ es un infinitésimo equivalente a Δy; o sea que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f'(x).\Delta x}^{dy}}{\Delta y} = 1$$

Asimismo, sabemos que $\varepsilon_{(x)}.\Delta x$ es un infinitésimo de orden superior a Δy, o sea que: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon_{(x)}.\Delta x}{\Delta y} = 0 \quad \therefore \quad \Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon_{(x)}.\Delta x$

$\varepsilon_{(x)}$ es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$; Δx es un infinitésimo; $f'(x) = \text{constante}$.

$\varepsilon_{(x)}.\Delta x$ es un infinitésimo de orden superior a $\varepsilon_{(x)}$ y Δx; tiende más rápidamente a cero y por lo tanto no influye prácticamente en los valores del incremento Δy; cuando Δx es muy pequeño.

$f'(x).\Delta x$ es infinitésimo del mismo orden que Δx .

Por ejemplo: $x^2; x^5; x^7$ son infinitésimos para $x \to 0$; $x^7 \to 0$ tiende más rápidamente a cero que x^2. Luego, x^7 es infinitésimo de orden superior a x^2 .

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x}{f'(x).\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}\right)}_{\substack{\text{cuando } \Delta x \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} = 1 + 0 = \overset{\text{o bien } (\otimes)}{1} \quad ; \Delta y \cong dy$$

$$\therefore \quad \Delta y = \underbrace{f'(x).\Delta x}_{(1)} + \underbrace{\varepsilon_{(x)}.\Delta x}_{(2)}$$

El primer *(1)* sumando recibe el nombre de "Parte principal del incremento" que es lineal con relación a Δx . El segundo *(2)* "Término complementario".

Sí $f^{'}(x) \neq 0$, la parte principal del incremento recibe el nombre de diferencial de la función, $y = f(x)$ y se designa por: $dy = d\ f(x) = f^{'}(x).\Delta x$.

<u>Definición de Diferencial</u>

"Diferencial de una función $y = f(x)$ derivable se define como el producto de su derivada por el incremento de la variable independiente".

<u>Expresión analítica de la diferencial</u>

<u>Diferencial de la variable independiente</u>

Sea la función identidad: $y = f(x) = x$; aplicando la fórmula para calcular la diferencial: $dy = f^{'}(x).\Delta x$; pero como: $y = x$ resulta: $dy = dx \Rightarrow dy = f^{'}(x).\Delta x$. Sabemos que la derivada: $f^{'}(x) = 1 \Rightarrow dx = 1.\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$. Con lo que queda probado que el incremento de la variable independiente es igual a la diferencial de esa variable.

Luego: $dy = f^{'}(x).dx$ que es la <u>Expresión Analítica de la Diferencial</u>.

$(\otimes)$ ***<u>Relación de la diferencial con el incremento</u>*** $\underline{\Delta y}$:

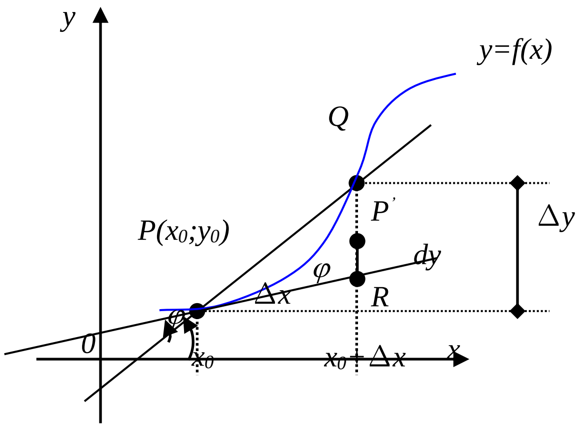
Sí $\Delta x \to 0$, y es $y^{'} \neq 0$,los infinitésimos dy y Δy son equivalentes, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y^{'}.\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{1}{y^{'}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{y^{'}} = y^{'}.\frac{1}{y^{'}} = 1$$

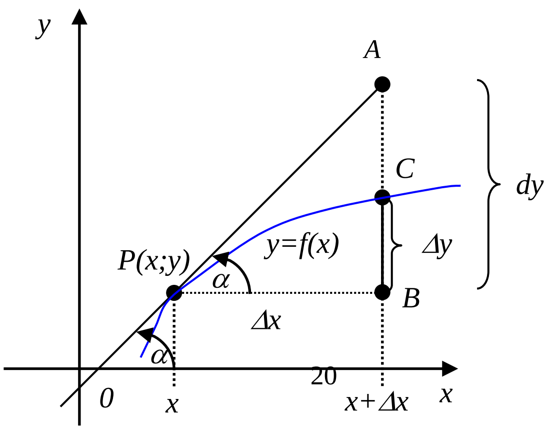
<u>Significado o interpretación geométrica de la diferencial</u>

$$dy = f^{'}(x).dx \qquad y^{'} = tg\,\varphi = \frac{P'R}{PR};\ dx = \Delta x = \overline{PR} \Rightarrow dy = y^{'}.dx = \frac{\overline{P^{'}R}}{\overline{PR}}.\overline{PR} = \overline{P^{'}R}$$

En este caso: $dy < \Delta y$;



$$tg\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \Rightarrow dy = y^{'}.dx = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}.\overline{PB} = \overline{AB}; \qquad dy > \Delta y$$



Geométricamente la diferencial de una función: $y = f(x)$ es el incremento que sufre la recta tangente a la curva en el punto x cuando se pasa de x *a* $x + \Delta x$.

La longitud $\overline{AB}$ corresponde al diferencial de $f(x)$ en x, respecto del incremento Δx.

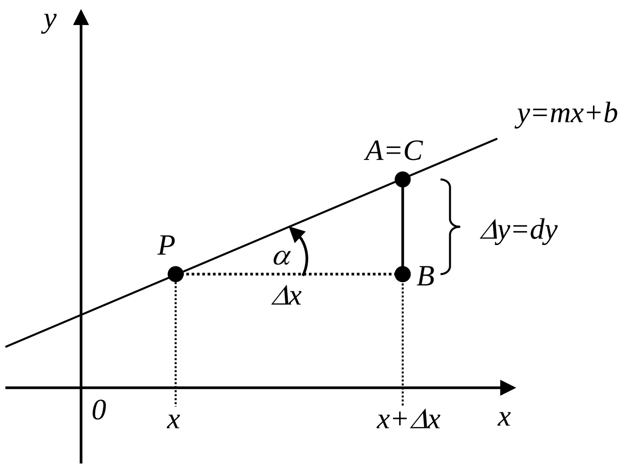
Por otra parte, la longitud $\overline{BC}$ comprende al incremento: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

En un entorno de x, cuando menor es el número $\Delta x\,(\Delta x \to 0)$, más se aproximan las longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. *O sea, la resta* $\underset{\Delta x \to 0}{\overline{AB} - \overline{BC}} \to 0$. Por lo tanto, sí reemplazamos $\overline{BC}$ por $\overline{AB}$ estamos reemplazando en el gráfico de $f(x)$, entre x y Δx por la recta tangente a la curva en el punto: $[x;f(x)]\ (P(x;y))$ por lo tanto podemos aproximar el valor de $f(x + \Delta x)$ conociendo el valor de $f(x)$ y el diferencial de f respecto de Δx:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta\text{x} \text{ ; ó } f(x + \Delta x) \cong f(x) + d\ f(x)$$

El error que se comete al reemplazar $f(x + \Delta x)$ por $f(x) + d\ f(x)$, puede hacerse menor que cualquiera: $\varepsilon > 0$, prefijado, sí se toma Δx convenientemente pequeño.

Luego: $f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x)\Delta x \quad \therefore \quad \Delta y \cong dy$



<u>*Reglas de diferenciación*</u>

En realidad, los cálculos de la diferencial de una función se reducen al cálculo de la derivada, ya que al multiplicar la última por la diferencial de la variable independiente se obtiene "la diferencial de la función".

(1) la diferencial de la suma (resta) de dos funciones derivables u y v es igual a la suma (resta) de las diferenciales de esas funciones: $d(u \pm v) = du \pm dv$

(2) $d(u\ .\ v) = u\ .\ dv + v\ .\ du$

Sí:

$$y = u(x)\,.v(x) = u\ .\ v \Rightarrow dy = y'.\,dx = (u\ .\ v' + u'\ .\ v).\ dx = u\ .\ \underbrace{v'\ .\ dx}_{dv} + v\ .\ \underbrace{u'\ .dx}_{du} = u\ .\ dv + v\ .\ du$$

<u>*La diferencial de una función compuesta*</u>:

Sea: $y = f(u)$; $u = g(x)$; o sea: $y = f[g(x)]$

Sabemos que: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = f_u^{'}(u).g_x^{'}(x)$; luego: $dy = f_u^{'}(u) \,.\, g_x^{'}(x) \,.\, dx$; pero: $g_x^{'}dx = du$

$$\therefore \quad dy = f_u^{'}(u) \,.\, du = f^{'}[g(x)] \,.\, dg(x)$$

Es decir que: "la diferencial de una función compuesta tiene la misma forma que tendría en el caso en que la variable intermedia u fuere la variable independiente". En otras palabras, la expresión de la diferencial no depende de que la variable sea independiente o sea, a su vez, función de otra variable. Esta importante propiedad de la diferencial, que se usa con frecuencia, recibe el nombre de <u>INVARIANCIA DE LA DIFERENCIAL</u>.

<u>***Diferenciales de orden superior***</u>

Supongamos la función $y = f(x)$. La diferencial de esta función: $dy = f^{'}(x)dx$, es una función de x. Pero de x depende solamente el primer factor: $f^{'}(x)$, puesto que el segundo: dx es un incremento de la variable x, que no depende del valor de esta.

En consecuencia, podemos denominar "a la diferencial de la diferencial de una función con el nombre de diferencial segunda o diferencial de segundo orden", y se designa: $d^2y = d(dy)$.

De la expresión de la diferencial segunda: $d^2y = \left[f^{'}(x) \,.\, dx\right]^{'} dx$, como dx es independiente de x, al derivar, dx sale fuera del signo de derivación. Luego: $d^2y = f^{''}(x) \,.\, (dx)^2$. En la potencia del diferencial se suele omitir el paréntesis: $(dx)^2 = dx^2$, entendiéndose que se trata del cuadrado de la expresión dx; $(dx)^3 = dx^3$; y así sucesivamente.

Se llama diferencial tercera o diferencial de tercer orden de una función, a la diferencial de la diferencial segunda de esta función: $d^3y = d\left(d^2y\right) = \left[f^{''}(x) \,.\, dx^2\right]^{'} .dx = f^{'''}(x) \,.\, dx^3$.

En general se llama diferencial n-sima o diferencial de n-simo orden a la diferencial primera de la diferencial de orden (n-1): $d^n y = d\left(d^{(n-1)}y\right) = \left[f^{(n-1)}(x) \,.\, dx^{n-1}\right]^{'} .dx = f^{(n)}(x) \,.\, dx^n$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis Matemático I

MATERIAL DIDÁCTICO

Aplicaciones del Cálculo Diferencial

REEDICIÓN AÑO 2020

Profesor: ***Edgardo Alberto Arriola***

Unidad Temática IV:

Aplicaciones del Cálculo Diferencial

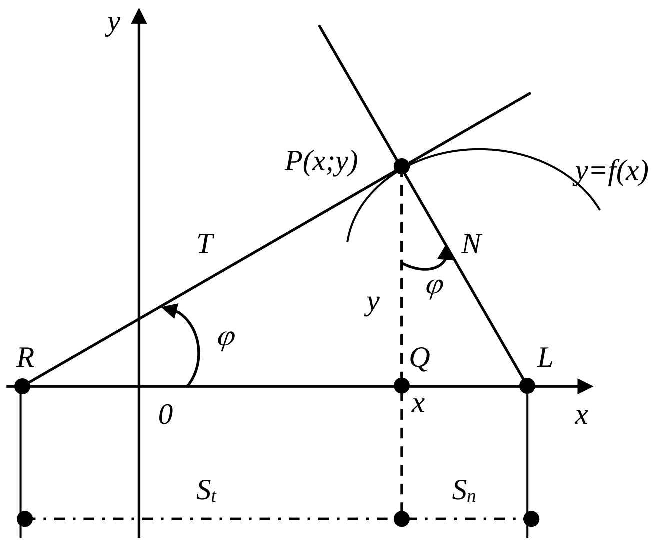
Tangente. Normal. Subtangente y Subnormal

Con las notaciones de la figura, se llama tangente T al segmento $\overline{RP}$ de tangente comprendido entre el punto $P(x;y)$ y el eje de abscisas, y normal N, al segmento $\overline{PL}$ de normal, comprendido entre $P(x;y)$ y el eje de las abscisas.

Las proyecciones de estos segmentos sobre el eje de abscisas se denominan, respectivamente, Subtangente: S_t y Subnormal: S_n: $S_t = RQ;\ S_n = QL$.

Si φ es el ángulo que forma la recta tangente con el eje de las abscisas, el ángulo $Q\hat{P}L$ será igual a φ, por tener ambos el mismo complemento. Por ser: $tg\,\varphi = y'$, resulta:

$$y' = tg\,\varphi = \frac{y}{S_t} \Rightarrow S_t = \frac{y}{y'} \quad y' = tg\,\varphi = tg\,Q\hat{P}L = \frac{S_n}{y} \Rightarrow S_n = y\,.\,y'.$$



Aplicando el Teorema de Pitágoras, resulta:

$$T = \sqrt{RQ^2 + PQ^2} = \sqrt{S_t^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2} = \frac{y}{y'}\,.\sqrt{1+y'^2} = S_t\sqrt{1+y'^2}$$

$$N = \sqrt{PQ^2 + QL^2} = \sqrt{S_n^2 + y^2} = \sqrt{y^2.\,y'^2 + y^2} = y\,.\sqrt{1+y'^2}.$$

<u>Variación de Funciones</u>

<u>Funciones Crecientes y Decrecientes</u>

<u>Funciones Crecientes</u>

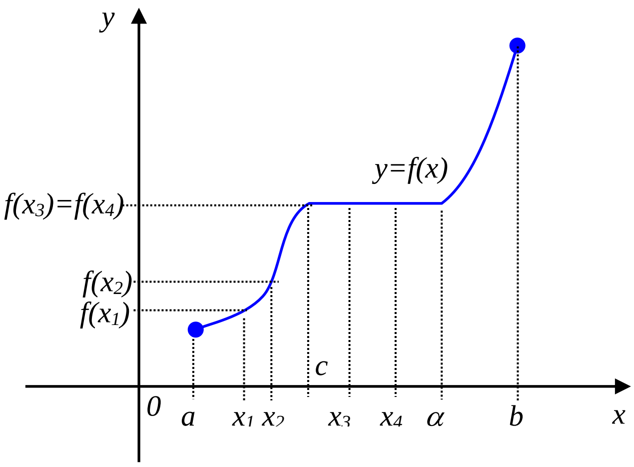
(a) <u>En sentido amplio</u>

Sea: $y = f(x)$, con $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$, <u>función creciente en sentido amplio</u> en $Df \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in Df$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

<u>Por ejemplo</u>: Sea: $y = f(x)$, donde: $Df = (a;b)$. Sí $f(x)$ es creciente en sentido amplio en el $(a;b)$, se tendrá: $\forall\, x_1, x_2 \in (a;b) : x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.

Luego: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$. Vale decir que si una función es creciente en sentido amplio en un $(a;b)$, todo cociente incremental es positivo en sentido amplio en dicho intervalo. La recíproca es evidentemente cierta, por lo que la <u>condición</u> $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ es <u>necesaria y suficiente</u>.



(b) <u>En sentido estricto</u>

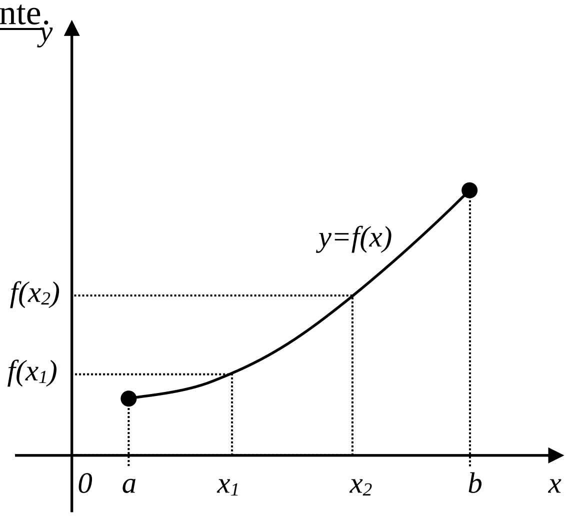
Sea la función: $y = f(x)$, con $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$, <u>función creciente en sentido estricto o estrictamente creciente</u> en $Df \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in Df$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

<u>Ejemplo</u>: Sea: $y = f(x)$, con: $Df = (a;b)$. Sí $f(x)$ es estrictamente creciente en el $(a;b)$, se tendrá: $\forall\, x_1, x_2 \in (a;b) : x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Luego: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$.

Es decir que si una función es estrictamente creciente en un $(a;b)$, todo cociente incremental es estrictamente positivo en dicho intervalo. La recíproca también es cierta, por lo que la condición $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ es necesaria y suficiente.



Funciones Decrecientes

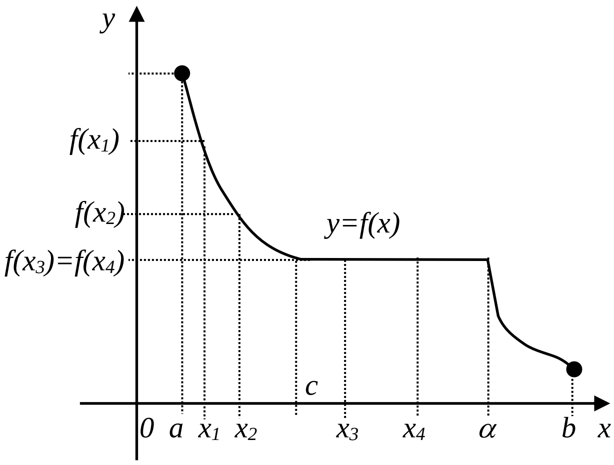
(a) En sentido amplio

Sea: $y = f(x)$, con $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$, función decreciente en sentido amplio en $Df \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in Df$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Ejemplo: Sea: $y = f(x)$, donde: $Df = (a;b)$. Sí $f(x)$ es decreciente en sentido amplio en el $(a;b)$, se tendrá: $\forall\, x_1, x_2 \in (a;b) : x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$.

Luego: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$. Si una función es decreciente en sentido amplio en un $(a;b)$, todo cociente incremental es negativo en sentido amplio en dicho intervalo. La recíprocas también es cierta, por lo que la condición $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ es necesaria y suficiente.



(b) <u>En sentido estricto</u>

Sea la función: $y = f(x)$, con $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$, <u>función decreciente en sentido estricto o estrictamente decreciente</u> en $Df \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in Df$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

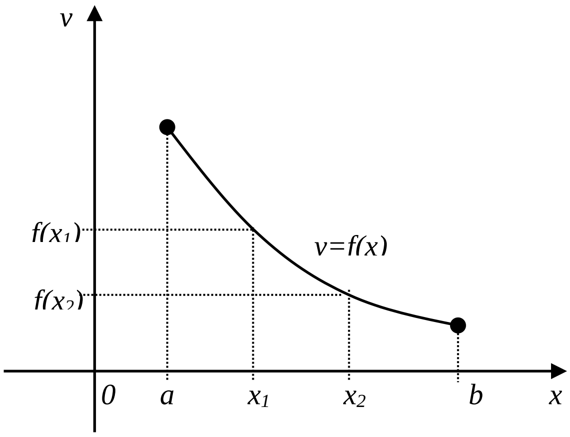
<u>Ejemplo</u>: Sea: $y = f(x)$, donde: $Df = (a;b)$. Sí $f(x)$ es estrictamente decreciente en el $(a;b)$, se tendrá:

$$\begin{array}{r} \forall\, x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \\ x_1 - x_2 > 0 \end{array} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$$

Luego: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$. $x_2 - x_1 > 0$

Es decir que si una función es estrictamente decreciente en un $(a;b)$, todo cociente incremental es estrictamente negativo en dicho intervalo. La recíproca también es cierta, por lo que la <u>condición</u> $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ es <u>necesaria y suficiente</u>.

Si la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en Df , se dirá que se trata de una función "**<u>estrictamente monótona</u>**".



<u>Funciones Crecientes y Decrecientes en un punto</u>

(a) <u>Función Creciente en un punto</u>

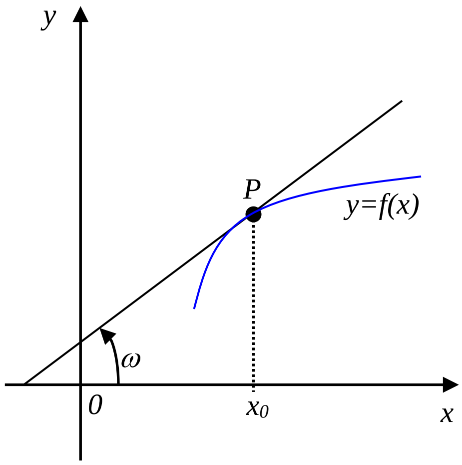
Sea el punto $x_0 \in Df$. Se dice que la función es creciente en x_0, si existe un número real estrictamente positivo δ / $\forall\, x$ que cumpla la condición: $0 < \Delta x < \delta$ se verifique que:

$$f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$$

En símbolos: $f(x)$ es <u>creciente</u> en $x_0 \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \ / \ \forall\, \Delta x : 0 < \Delta x < \delta \Rightarrow f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$

O sea, cuando la función es estrictamente creciente en el $E_{(x_0;\delta)} = (x_0 - \delta\, ; x_0 + \delta)$.

Resulta evidente que una función estrictamente creciente en un intervalo abierto es creciente en cada uno de sus puntos y viceversa.

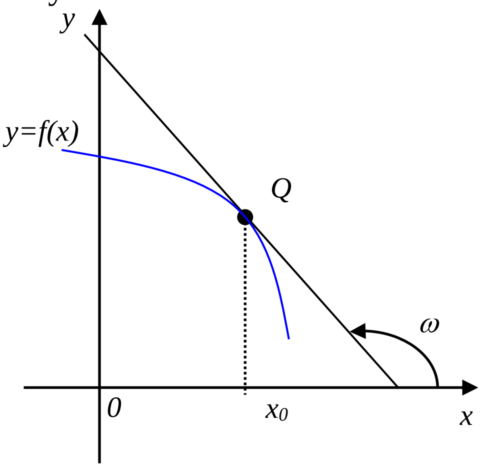


(b) Función decreciente en un punto

$f(x)$, función decreciente en $x_0 \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, \Delta x : 0 < \Delta x < \delta \Rightarrow f(x_0 - \Delta x) > f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$.

O sea, cuando la función es estrictamente decreciente en el $E_{(x_0;\delta)} = (x_0 - \delta \,;\, x_0 + \delta)$.

Resulta evidente que una función estrictamente decreciente en un intervalo abierto es decreciente en cada uno de sus puntos y viceversa.



Signo de la derivada primera

Hemos definido anteriormente las funciones crecientes y decrecientes. Apliquemos, ahora, el concepto de derivada al estudio del crecimiento y decrecimiento de funciones.

Teorema: si una función $f(x)$ derivable en el $(a;b)$, es creciente en este intervalo, su derivada en él es no negativa; es decir: $f'(x) \geq 0$.

Demostración: supongamos que $f(x)$ crece en el $(a;b)$, damos un incremento Δx a la variable independiente x, y formamos el cociente incremental: $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. De acuerdo a lo visto, como $f(x)$ es una función creciente:

para: $\Delta x > 0 :\ f(x+\Delta x) \geq f(x)$; y para: $\Delta x < 0 :\ f(x+\Delta x) \leq f(x)$.

En ambos casos: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$; tomando límite para $\Delta x \to 0$, tenemos:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0\text{; es decir: } f'(x)\geq 0.$$

<u>Teorema</u>: si una función $f(x)$ es continua en el $[a;b]$, y derivable en el $(a;b)$, entonces sí $f'(x)\geq 0$, $\forall\, x\in(a;b)$, $f(x)$ es una función creciente en el $(a;b)$.

<u>Demostración</u>: sean x_1 y x_2 dos puntos cualquiera del intervalo, tales que: $x_1 < x_2$, y supongamos: $f'(x)\geq 0$. Entonces, a probar: $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Para ello consideramos un intervalo cerrado: $x_1 \leq x \leq x_2$; puesto que $f(x)$ es derivable, debe ser continua, y entonces por el <u>**Teorema de Weierstrass**</u> debe tener un valor máximo en este intervalo cerrado. Además, por ser $f'(x) > 0$ no puede ocurrir este máximo en ningún punto interior.

Supongamos que el máximo está en x_1, entonces $\forall\, x$ interior al intervalo: $\forall\, x\in(x_1;x_2)$:

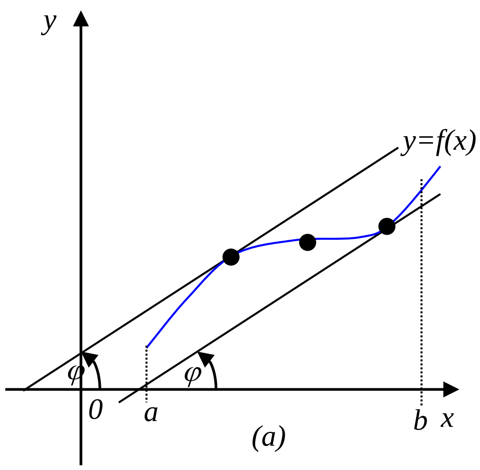
$x > x_1 \Rightarrow x - x_1 > 0$ y $f(x)\leq f(x_1)$ por ser x_1 máximo, definición de máximo, ya se dió en unidad anterior. $f(x)-f(x_1)\leq 0$

Así: $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq 0$, lo cual implica que $f'(x)\leq 0$. Pero, por hipótesis $f'(x)\geq 0$. Esta contradicción muestra que el máximo debe ocurrir en x_2; es decir: $f(x_1)\leq f(x_2)$.

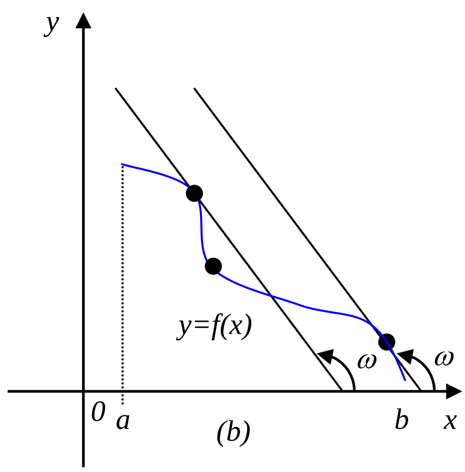
Con respecto a las funciones decrecientes, siempre que sean derivables, existe un <u>Teorema</u> análogo que dice:

(a) Si la función $f(x)$ decrece en el $(a;b) \Rightarrow f'(x)\leq 0$ en él.

(b) Si $f'(x)\leq 0$ en el $(a;b)$, la función $f(x)$ es decreciente en el $(a;b)$.



(a)



(b)

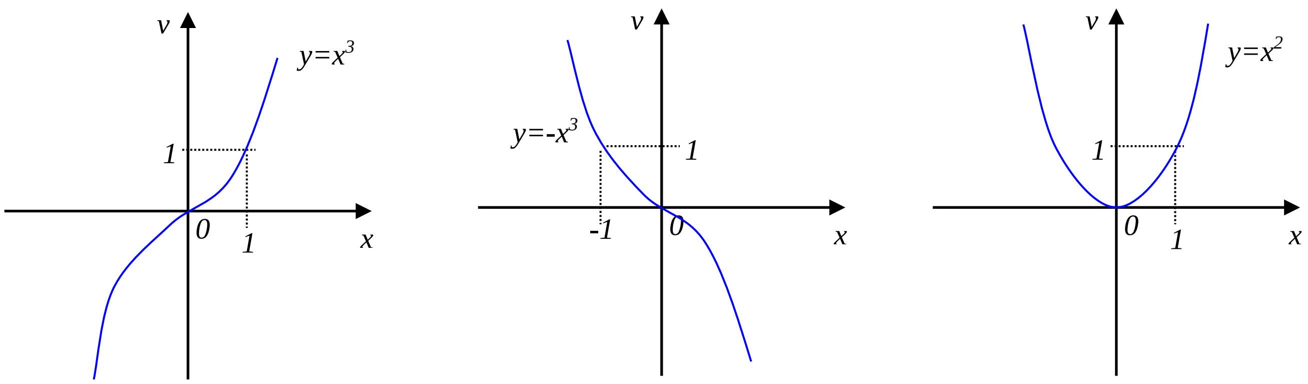
Los Teoremas vistos tienen la siguiente interpretación geométrica

Si la función $f(x)$ es creciente en el $(a;b)$, la tangente a la curva $y = f(x)$, forma con el semieje positivo de las x un ángulo agudo (en algunos casos puede ser paralelo a este eje). La tangente de este ángulo es positiva: $tg\,\varphi = f'(x) \geq 0$. Figura (a).

Si la función decrece en el $(a;b)$, el ángulo de inclinación de la tangente será obtuso (en algunos puntos la tangente puede ser paralela al eje x).
La tangente de este ángulo será negativa: $tg\,\omega = f'(x) \leq 0$. Figura (b).

Es decir, de acuerdo a lo visto, los **Teoremas** permiten juzgar sobre el crecimiento o decrecimiento de la función considerada, por el signo de su derivada primera.

Ejemplo: determinar los dominios de crecimiento y decrecimiento de las funciones: $f(x) = x^3$; $g(x) = -x^3$; $h(x) = x^2$



$f'(x) = 3x^2$; $g'(x) = -3x^2$; $h'(x) = 2x$. Obsérvese que:

(a) $f(x)$ es creciente $\forall\, x \geq 0$, puesto que $f'(x) \geq 0$, y además creciente en el origen.
(b) $g(x)$ es decreciente $\forall\, x \geq 0$, puesto que $g'(x) \leq 0$, y además decreciente en el origen.
(c) $h(x)$ es creciente para $x > 0$, puesto que $h'(x) > 0$, y decrece para $x < 0$, pues $h'(x) < 0$, y en el origen $x = 0$, donde $h'(x) = 0$, no creciente ni decreciente.

Por lo tanto, si $f'(x) = 0$ (tangente horizontal) no puede afirmarse nada con respecto al comportamiento de $f(x)$ en x.

Máximos y Mínimos Absolutos o Globales

Sea: $f(x): A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, y sea: $x_0 \in A$.
(a) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un máximo absoluto, sí $f(x) \leq f(x_0)$; $\forall\, x \in A$.
Cuando el máximo absoluto es alcanzado en un solo punto, o sea, $f(x) < f(x_0)$; $\forall\, x \in A$, se dirá que el máximo absoluto es estricto.

(b) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un <u>mínimo absoluto</u>, sí $f(x) \geq f(x_0)$; $\forall x \in A$. Cuando el mínimo absoluto es alcanzado en un solo punto, o sea, $f(x) > f(x_0)$; $\forall x \in A$, se dirá que el <u>mínimo absoluto</u> es <u>estricto</u>.

<u>Máximos y Mínimos Relativos o Locales</u>

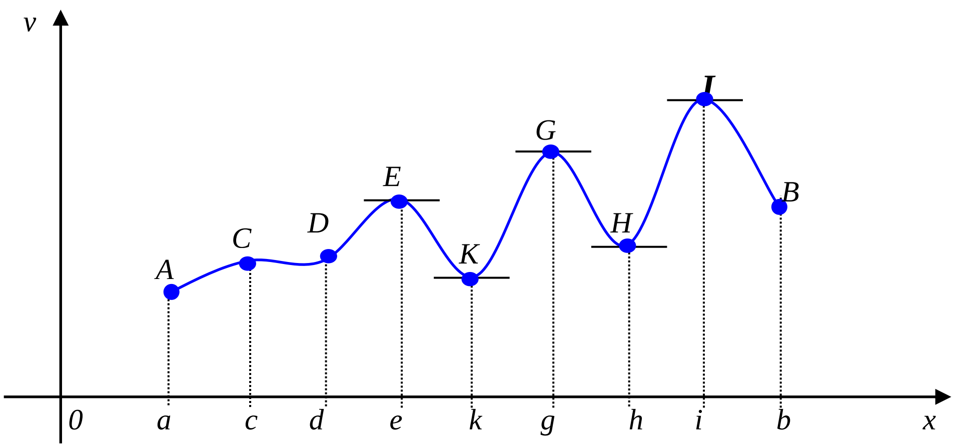
Sea: $f(x): A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, y sea: $x_0 \in A$.

(a) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un <u>máximo relativo</u>, si $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x$ suficientemente próximo a x_0, es decir si se puede determinar un número real estrictamente positivo $\delta : (\delta > 0) / f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Sí $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, con $x \neq x_0$, se dirá que el <u>máximo relativo</u> $f(x_0)$ es <u>estricto</u>.
Resulta claro que $f(x_0)$ es el máximo absoluto en el intervalo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

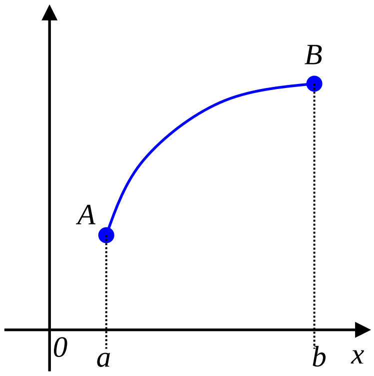
(b) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un <u>mínimo relativo</u>, si $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x$ suficientemente próximo a x_0, es decir si se puede determinar un número real estrictamente positivo $\delta : (\delta > 0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Ahora bien, si: $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, con $x \neq 0$, diremos que el <u>mínimo relativo</u> es <u>estricto</u>.
Aquí también resulta claro que $f(x_0)$ es un mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.
Digamos que los máximos y mínimos relativos se denominan "**<u>Extremos Relativos</u>**" de la función.

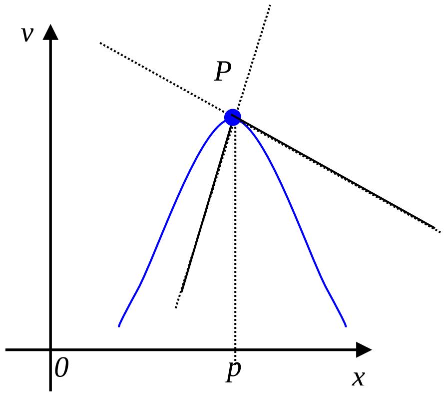
<u>Ejemplos</u>: sean los siguientes gráficos. Observarlos y sacar conclusiones.



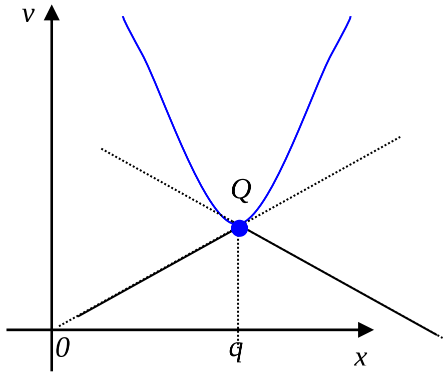
(A)



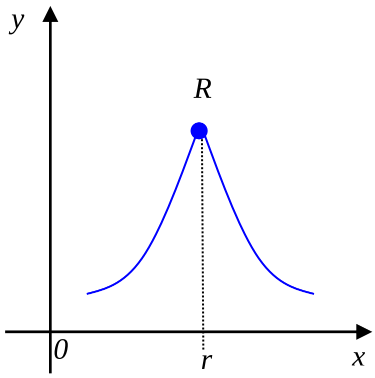
(B)



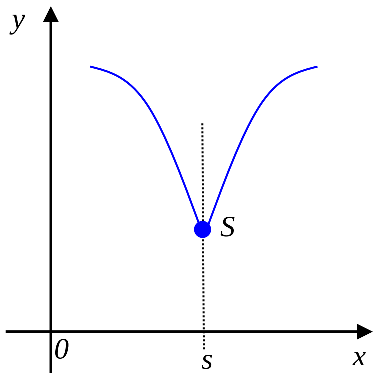
(C)



(D)



(E)



(F)

(a) <u>GRAFICO (A)</u>: la función $f(x)$ tiene en k y en h mínimos relativos estrictos. En c un máximo relativo amplio. En *d* un mínimo relativo amplio. En los puntos del intervalo $(c;d)$ tienen máximos y mínimos relativos amplios simultáneamente. En a un mínimo absoluto y en i un máximo absoluto, ambos en el intervalo cerrado $[a;b]$.

(b) <u>GRAFICO (B)</u>: la función $f(x)$ no presenta máximos ni mínimos relativos en el intervalo cerrado $[a;b]$.

(c) <u>GRAFICO (C)</u>: la función $f(x)$ presenta en *p* un máximo relativo estricto.

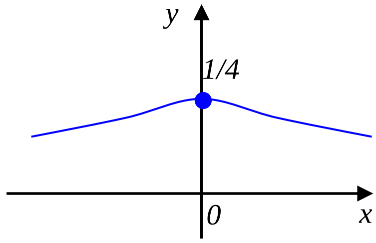
(d) <u>GRAFICO (D)</u>: la función tiene un mínimo relativo estricto en *q*.

(e) <u>GRAFICOS (E) y (F)</u>: en cada gráfica la función $f(x)$ presenta un máximo y un mínimo relativo estricto en *r* y *s*, respectivamente. En particular en estos extremos se puede observar a lo que denominamos “punto anguloso”.

De la observación de las figuras (A) y (B) se infiere que una función puede tener (uno o varios) o no extremos relativos en un intervalo. De la figura (A) se desprende asimismo que, un mínimo relativo puede ser mayor que un máximo relativo. También que un extremo relativo no es necesariamente absoluto, y si la función es continua, los máximos y mínimos relativos se presentan alternadamente.

Para encontrar los extremos relativos de una función se puede recurrir a su definición, esto es, investigando los valores que alcanza la función en distintos puntos del dominio. En algunos casos puede resultar sencillo utilizar ese método, como sucede en este ejemplo:

Sea la función: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$; para $x=0$, es: $f(0)=\dfrac{1}{4}$; $\forall\, x\neq 0$, es $f(x)<\dfrac{1}{4}$

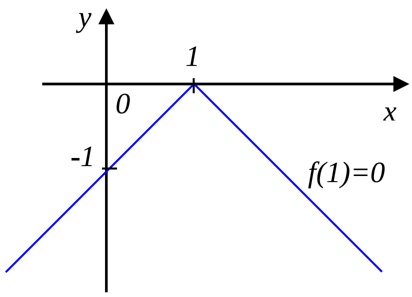


Luego: $f(0)=\dfrac{1}{4}$ es un máximo relativo de $f(x)$, que en este caso en particular, es también máximo absoluto de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

Obsérvese que $f(0)=\dfrac{1}{4}$ es un máximo absoluto en cualquier subconjunto del dominio al cual pertenece el origen. Sin embargo, en la mayoría de las funciones, no es sencillo localizar extremos por comparación de valores.

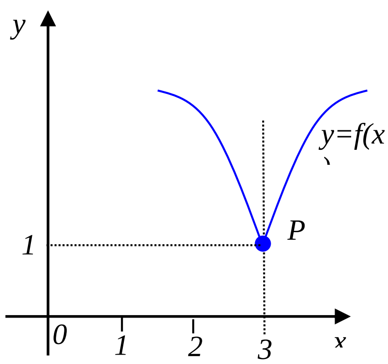
Además, vemos que la derivada de una función se anula en el origen, es decir: $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+4)^2} \wedge f'(0)=0$. Esta circunstancia parece sugerir la idea de que la función alcanza valores extremos en aquellos puntos donde la derivada primera se anula, o sea en aquellos puntos donde el gráfico admite tangente horizontal.

Esta idea no es correcta pues una función puede alcanzar máximo o mínimo local en puntos donde no hay tangente, es decir, en puntos donde la función no es derivable, como sucede con los puntos R y S de los gráficos (E) y (F) vistos anteriormente, o bien como sucede en la función: $f(x)=-|x-1|$, cuyo gráfico es:



$f(1)$ es máximo relativo y absoluto de la función, y además, como podemos ver $\nexists\, f'(1)$.

Consideremos la función: $f(x)=(x-3)^{2/3}+1$



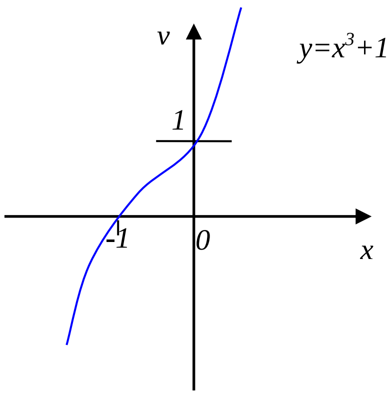
$f(3)$ es un mínimo relativo, y en el punto $P[3; f(3)]$ el gráfico tiene tangente vertical (semi tangente).

Por lo tanto, en este caso, igual que en el ejemplo anterior, la función alcanza un extremo relativo en un punto donde no tiene derivada finita.

También puede suceder que el gráfico tenga tangente horizontal en un punto del mismo y el valor correspondiente de la función no sea máximo ni mínimo relativo, como sucede en la función:

$f(x) = x^3 + 1;\ f'(x) = 3x^2;$ luego: $f'(0) = 0$.

En el punto $(0;1)$ el gráfico tiene tangente horizontal, y sin embargo no hay extremo. De acuerdo a lo ya visto esta función es constantemente creciente en todo el dominio.



Por lo tanto, de todo lo visto podemos concluir que la condición de tener derivada nula en un punto no asegura la existencia de extremo relativo para una función. (<u>Condición necesaria pero no suficiente para la existencia de extremos relativos</u>).

<u>Pero si una función derivable tiene un extremo en un punto interior a su dominio, entonces dicha derivada es nula</u>.

Es decir, la anulación de la derivada es <u>condición necesaria</u> para la existencia de máximo o mínimo, si la función es derivable y el punto correspondiente es interior al dominio de la misma. Esta condición la probaremos mediante el siguiente:

<u>*Teorema*</u>: si una función derivable tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto x_0 interior a su dominio, su derivada primera se anula en este punto, es decir: $f'(x_0) = 0$.

Como por hipótesis existe el número real $f'(x_0)$, caben generalmente tres posibilidades: $f'(x_0) \gtreqless 0$

(a) si $f'(x_0) > 0$ de acuerdo a lo visto, la función $f(x)$ será creciente.

(b) si $f'(x_0) < 0$ de acuerdo a lo visto, la función $f(x)$ será decreciente.

Por ende, debe ser $f'(x_0) = 0$, lo que significa geométricamente que la tangente a la curva en el punto considerado es horizontal. Lo recíproco no es cierto como ya lo hemos visto en el caso de la función $f(x) = x^3 + 1$, es decir, que <u>la existencia de una tangente horizontal no implica la existencia de un extremo</u>.

Digamos que los valores de x para los valores $f'(x_0) = 0$ reciben el nombre de "***<u>Valores Críticos Ordinarios</u>***", y los puntos correspondientes del gráfico "***<u>Puntos Críticos Ordinarios</u>***".

Por último, como el problema de localizar extremos es de singular importancia, desarrollaremos <u>criterios</u> que permiten asegurar la existencia de los mismos.

<u>Puntos Críticos de una función</u>

Si bien durante el desarrollo de este tema hemos hablado de puntos críticos, es conveniente dejar perfectamente aclarado que son <u>puntos críticos</u>. Como se ha visto en el ejemplo anterior, al buscar los extremos absolutos de una función continua en el intervalo $[a;b]$, debe considerarse especialmente los valores que alcanza la función en los extremos del intervalo.

Además, si la función que se investiga no es derivable en algún punto, hay que tener en cuenta el valor de la función en dicho punto. La función $f(x) = |x|$, por ejemplo, no es derivable en el origen, no obstante, alcanza en el mismo un mínimo relativo y absoluto.

Por ello, al buscar los extremos absolutos de una función, es importante considerar especialmente los puntos de los distintos tipos mencionados, que son puntos clave en la investigación que se efectúa.

A estos puntos los llamamos <u>Puntos Críticos</u> de la función, sobre los cuales daremos la siguiente:

<u>Definición</u>:

Si $f(x)$ es una función continua definida sobre un intervalo (abierto o cerrado), el punto x_0 es un punto crítico de $f(x)$ en dicho intervalo, si se cumple una de las siguientes condiciones:

(1) x_0 es interior al intervalo y $f'(x)$ existe y es nula en x_0. $\left(f'(x_0) = 0\right)$.
(2) x_0 es interior al intervalo y $f(x)$ no es derivable en x_0. (No hay derivada finita).
(3) x_0 es uno de los extremos del intervalo.

<u>Determinación de Extremos Relativos</u>

Sea la función $y = f(x)$ continua en un cierto intervalo, al cual pertenece un valor crítico x_0, y derivable en todos los puntos del mismo (a excepción, quizás del mismo x_0).

Calculemos su primera derivada $f'(x)$, obtenemos la ecuación $f'(x_0) = 0$, limitándonos a considerar las raíces reales de la misma. Estas raíces serán los valores críticos ordinarios.

Supongamos que x_0 es uno de ellos. A partir de aquí la determinación de los extremos podamos efectuarlos mediante los siguientes criterios.

<u>Criterios para determinar extremos relativos</u>

Ya hemos visto que no basta la anulación de la derivada primera de una función en un punto interior a un conjunto, para asegurar la existencia en dicho punto de un extremo relativo: $f'(x_0) = 0$, condición necesaria pero no suficiente para la existencia de un extremo relativo.

<u>Estudio de los valores de la función</u> (Variación de la función)

Si x_0 es un punto interior al Dominio de una función $f(x)$ derivable y $f'(x_0) = 0$, para saber si $f(x_0)$ es un máximo relativo pueden considerarse los valores de $f(x)$ en un $E_{(x_0)}$ y ver si satisface la definición.

Es decir, si es posible determinar un $E_{(x_0)} \;/\; \forall x \in E_{(x_0)} : f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x_0)$ <u>máximo relativo</u>.

La misma idea se utiliza para verificar la existencia de <u>mínimo relativo</u>.

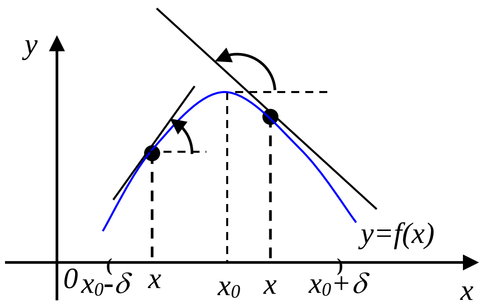
<u>Observación</u>: En general, este Criterio presenta dificultades de cálculo, pues exige considerar los valores de una función en los infinitos puntos de un entorno y puede llevar a conclusiones falsas si se consideran solo algunos valores de la función en puntos aislados del entorno.

<u>Variación del signo de la derivada primera</u>

Si $f(x)$ es una función derivable, x_0 punto interior a su dominio donde $f'(x)$ se anula: $f'(x_0) = 0$, y existe $E_{(x_0)}$:

$$\exists\, \underbrace{E_{(x_0;\delta)}}_{E(x_0)} \;/\; \forall x: \left(\underbrace{x \in (x_0\text{-}\delta; x_0)}_{x \in E\left(x_0^-\right)} \Rightarrow f'(x) > 0 \right) \wedge \left(\underbrace{x \in (x_0; x_0 + \delta)}_{x \in E\left(x_0^+\right)} \Rightarrow f'(x) < 0 \right) \Rightarrow f(x_0)$$

<u>máximo relativo</u>.



<u>Demostración</u>: sabemos que: $f'(x) > 0 \text{ en } E_{\left(x_0^-\right)} \Rightarrow f(x)$ es creciente en $E_{\left(x_0^-\right)}$ (1) $\wedge$

$f'(x) < 0 \text{ en } E_{\left(x_0^+\right)} \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $E_{\left(x_0^+\right)}$ (2)

Luego, por (1): $\forall x \in \mathrm{E}_{\left(x_0^-\right)} : f(x) < f(x_0) \quad \wedge \quad$ por (2): $\forall x \in \mathrm{E}_{\left(x_0^+\right)} : f(x_0) > f(x)$

$\therefore \quad \forall x \in \mathrm{E}_{(x_0)} : f(x) < f(x_0)$, y de acuerdo con la definición: $f(x_0)$ es <u>máximo relativo</u>.

En forma análoga se demuestra el criterio para determinar un <u>mínimo relativo</u>.
Si $f(x)$ es una función derivable, x_0 es un punto interior a su dominio donde $f'(x_0) = 0$:

$\exists E_{(x_0)} / \forall x : \left(x \in E_{\left(x_0^-\right)} \Rightarrow f'(x) < 0 \right) \wedge \left(x \in E_{\left(x_0^+\right)} \Rightarrow f'(x) > 0 \right) \Rightarrow f(x_0)$ <u>mínimo relativo</u> de la función.

Es decir, $f(x_0)$ es mínimo relativo si la derivada primera pasa de negativa a positiva cuando x pasa de izquierda a derecha del punto x_0.

<u>Signo de la derivada segunda</u>

Si $f(x)$ es una función derivable, x_0 punto interior a su dominio donde $f'(x_0) = 0$ y existe $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ es un <u>máximo relativo</u> de $f(x)$.

Obsérvese que este criterio difiere fundamentalmente de los anteriores pues solamente debe investigarse el signo de la derivada segunda en un punto y no exige su consideración en un entorno.

<u>Demostración</u>: sea: $f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$

por una propiedad de límite finito: $\exists E'_{(x_0)} / \forall x \in E'_{(x_0)} : \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$; como: $f'(x_0) = 0$, es: $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0$; para que este cociente sea negativo, numerador y denominador deben tener signos opuestos; o sea:

a izquierda de $x_0 : x - x_0 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \wedge$

a derecha de $x_0 : x - x_0 > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

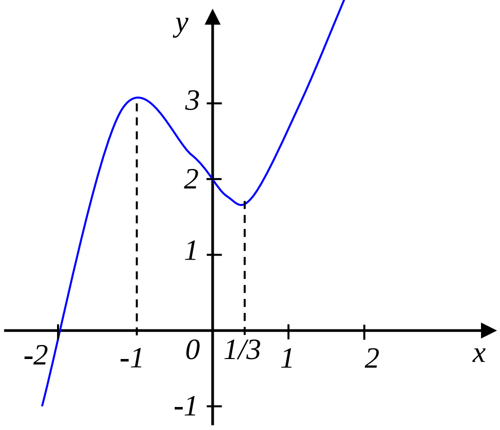
Luego, por el criterio de la derivada primera, $f(x_0)$ es <u>máximo relativo</u>.

En las mismas condiciones puede probarse que si $f''(x_0) > 0;\ f(x_0)$ es <u>mínimo relativo</u>.

<u>Ejemplo</u>: hallar extremos relativos de $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$, utilizando el criterio de la segunda derivada.

Calculamos $f'(x)$: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1/3 \end{cases}$

Buscamos $f''(x)$: $f''(x) = 6x + 2$ $\begin{cases} f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow P_1(-1;3) \text{ máximo relativo} \\ f''\left(\frac{1}{3}\right) = 4 > 0 \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{3};\frac{49}{27}\right) \text{ mínimo relativo} \end{cases}$



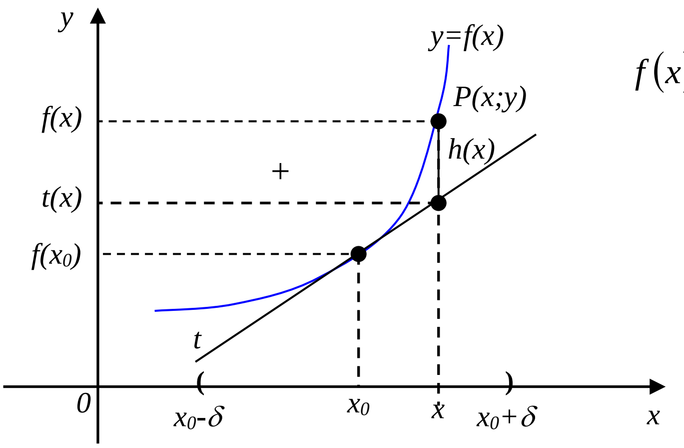
Concavidad de una curva

La curva correspondiente a una función derivable $y = f(x)$ es "***Cóncava hacia arriba***" en el punto $[x_0; f(x_0)]$, sí y solo sí existe un $E'(x_0)$ donde la curva está por encima de la recta tangente a la misma en dicho punto. (La concavidad de la curva está dirigida hacia el sentido positivo del eje de las ordenadas).

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $[x_0; f(x_0)]$, es: $t(x) - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$. (Ecuación, recta que pasa por el $P(x_1; y_1): y - y_1 = m(x - x_1)$).

$$\therefore \quad t(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$

Consideremos, ahora la función auxiliar: $h(x) = f(x) - t(x) > 0$



$$f(x) > t(x) \Rightarrow \overbrace{f(x) - t(x)}^{h(x)} > 0$$

Reemplazando $t(x)$ en $h(x)$: $h(x) = f(x) - \lfloor f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) \rfloor$.

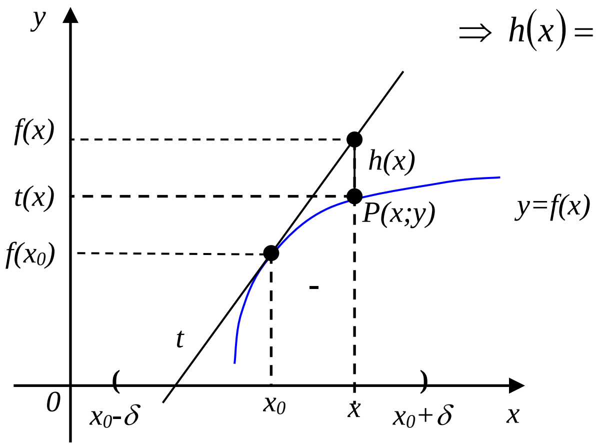
Obsérvese que el valor $h(x)$ es la deferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la recta tangente t, para un punto cualquiera del dominio de $f(x)$.

Por otra parte si $h(x)$ es positivo significa que la ordenada de la curva es mayor que la ordenada de la recta tangente, y entonces la curva en cada punto x del entorno está por encima de la recta tangente, lo que implica que la curva es cóncava hacia arriba o tiene concavidad positiva en el punto $[x_0 ; f(x_0)]$.
Se cumple también la implicación recíproca.

En forma análoga, podemos decir que la curva correspondiente a una función derivable $y = f(x)$ es "***Cóncava hacia abajo***" en el punto $[x_0 ; f(x_0)]$ sí y solo sí existe un $E'(x_0)$ donde la curva está por debajo de la recta tangente a la misma en dicho punto. En este caso la concavidad de la curva está dirigida hacia el sentido negativo del eje y.

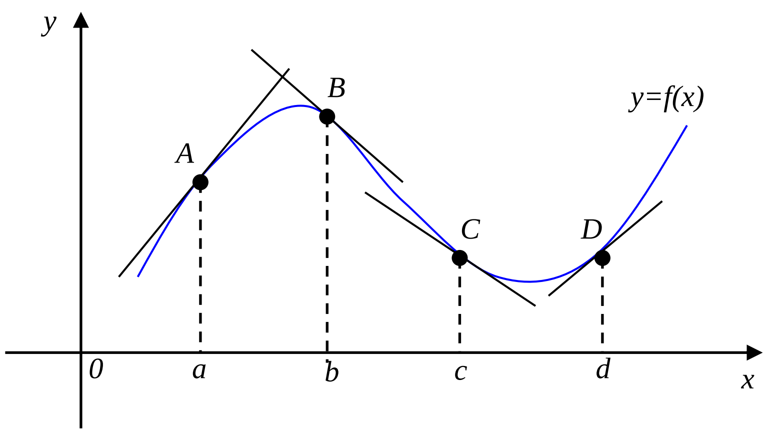
Como puede verse en el gráfico: $h(x) = f(x) - t(x) < 0$

$$t(x) > f(x) \Rightarrow h(x) = t(x) - f(x) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(x) = t(x) - f(x) < 0$$



Es decir $h(x)$ es negativa, puesto que la ordenada de la curva es menor que la ordenada de la recta tangente, y la curva en cada punto x del entorno está por debajo de la recta tangente, lo que implica que la curva es cóncava hacia abajo o tiene concavidad negativa en el punto $[x_0 ; f(x_0)]$.
Aquí también se cumple la implicación recíproca.

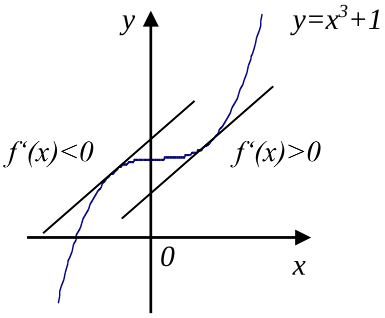
La Concavidad y el signo de la derivada segunda

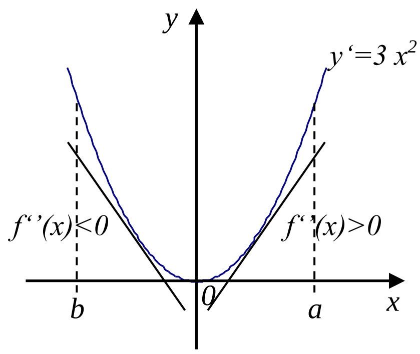


Consideramos la curva que se muestra en la figura. En un entorno de los puntos como A o B, la curva está por debajo de su tangente, y al ir de A a B, la tangente gira en el sentido de las

agujas del reloj. Análogamente, en un entorno de C o D, la curva está arriba de su tangente, y al ir de C a D la tangente gira en el sentido contrario a las agujas del reloj.
Además, si la tangente gira en el sentido de las agujas del reloj, la pendiente disminuye cuando vamos hacia la derecha; si la tangente gira en sentido contrario, la pendiente de la tangente aumenta.

Ahora bien, puesto que la pendiente de la tangente en cualquier punto $P(x;y)$ de la curva está dada por $f'(x)$, parecería que el signo de $f''(x)$, siempre que exista, nos permitiría analizar la conducta de la curva en los puntos tales como A, B, C y D.
Antes de demostrar lo anterior, trataremos de sacar algunas conclusiones de utilidad a partir del análisis de los gráficos de una función $f(x)$ y de su función derivada.
Sea la función: $f(x) = x^3 + 1$, cuya derivada es: $f'(x) = 3x^2$.





De la observación que se efectúa podemos concluir que:

(1)._ $f''(x) > 0$ en el intervalo $(0;b)$ lo que implica que la pendiente $f'(x)$ de la tangente es una función creciente y por lo tanto la tangente de la gráfica gira en sentido contrario al de las agujas del reloj, quedando la gráfica por arriba de la misma, cuando x aumenta.

(2)._ $f''(x) < 0$ en el intervalo $(a;0)$ lo que implica que la pendiente $f'(x)$ de la tangente es una función decreciente y por lo tanto la tangente de la gráfica gira en el sentido de las agujas del reloj, quedando la gráfica debajo de la misma, cuando x aumenta.

Estas conclusiones puramente sugeridas desde un punto de vista geométrico, se demuestran a partir del siguiente:

<u>Teorema</u>: sea $y = f(x)$ una función derivable dos veces en el intervalo $(a;b)$. Sea además x_0 un punto de este intervalo, y sea t la función lineal ya vista, definida por la ecuación: $t(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$. Entonces:

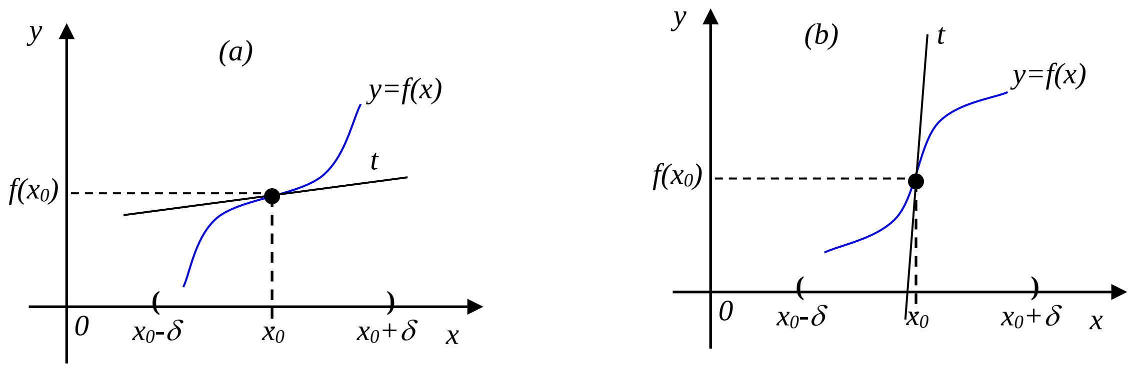
(a) si $f''(x) > 0$ en el intervalo $(a;b)$, entonces para cada x_0 hay un entorno reducido $E'(x_0;\delta)$ tal que $\forall x \in E'(x_0;\delta) \Rightarrow f(x) > t(x)$.
Geométricamente, esta desigualdad implica que la curva dada por $y = f(x)$ queda arriba de su tangente en un $E'(x_0;\delta)$.

(b) si $f''(x) < 0$ en el intervalo $(a;b)$, entonces para cada x_0 hay un entorno reducido $E'(x_0;\delta)$ tal que $\forall x \in E'(x_0;\delta) \Rightarrow f(x) < t(x)$.

Geométricamente, esta desigualdad implica que la curva dada por $y = f(x)$ queda por debajo de su tangente en un $E'(x_0;\delta)$.

Punto de Inflexión:

El punto $[x_0; f(x_0)]$ del gráfico de una función derivable $y = f(x)$ es un punto de inflexión sí y solo sí, en el mismo, la curva cambia el sentido de su concavidad.



Si por ejemplo existe un $E_{(x_0;\delta)}$ tal que el gráfico de $f(x)$ es cóncavo hacia abajo en $(x_0-\delta; x_0)$ $(fig(a))$ y cóncavo hacia arriba en $(x_0; x_0+\delta)$, entonces el punto $[x_0; f(x_0)]$ es de inflexión.

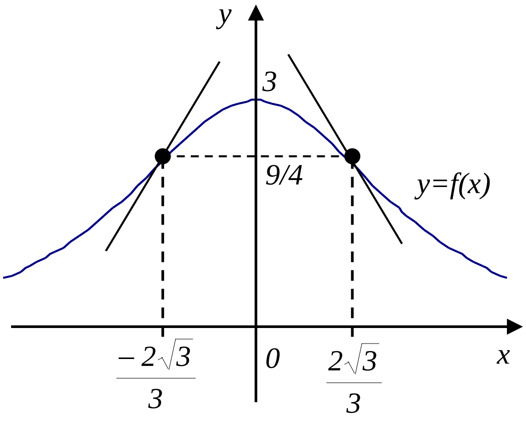
De acuerdo con la definición de concavidad en ambos semientornos, la tangente del gráfico atraviesa al mismo en dicho punto.

Según propiedades vistas, si $f''(x_0) = 0$, y existe un $E_{(x_0)}$ / $f''(x) > 0$ en $(x_0-\delta; x_0)$, y $f''(x) < 0$ en $(x_0; x_0+\delta)$, o recíprocamente, el punto considerado es de inflexión.

Ejemplo: hallar, si existen, puntos de inflexión en el gráfico de: $f(x) = \dfrac{12}{x^2+4}$.

$f'(x) = \dfrac{-24x}{(x^2+4)^2}$; $f''(x) = \dfrac{24(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$. Luego, sí: $f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{4}{3}$; es decir que la derivada segunda se anula en los puntos: $x_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$;

Luego, los puntos $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$; $Q\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}; f\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ <u>pueden ser puntos de inflexión</u>.



Para verificarlo estudiemos la concavidad del gráfico en algún entorno de cada una de ellos.

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ E(x_1-\delta;x_1)=\left(0<x<{}^{2\sqrt{3}}\!/_{3}\right) \Rightarrow f''(x)<0\\ (2)\ E(x_1;x_1+\delta)=\left({}^{2\sqrt{3}}\!/_{3}<x<5\right) \Rightarrow f''(x)>0\end{array}\right\}$$ $\therefore$ de acuerdo a lo visto, el punto <u>P es punto de inflexión</u>.

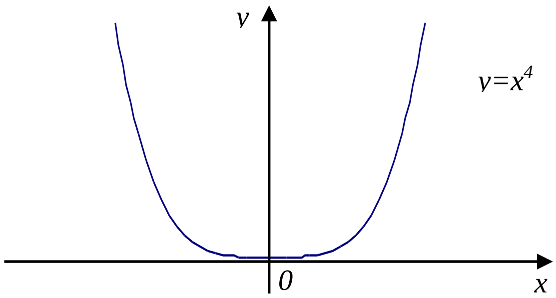
En forma análoga se demuestra que el punto <u>Q es otro punto de inflexión</u>.

Es importante tener en cuenta que la <u>condición</u> de ser nula la segunda derivada es <u>necesaria pero no suficiente</u> para la existencia de un punto de inflexión.

<u>Ejemplo</u>: Sea: $f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3;\ f''(x)=12x^2;\ f''(x)=0 \Rightarrow 12x^2=0 \Rightarrow x=0$, por lo tanto la derivada segunda se anula en el origen, pero allí no hay inflexión.

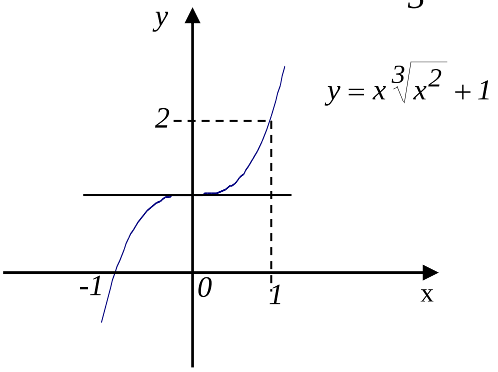
Puede probarse que la función tiene en $x=0$ un <u>mínimo relativo y absoluto</u>.



También es importante observar que puede haber inflexión en un punto donde $\nexists f''(x)$.

Ejemplo:

$$f(x)=x\,.\sqrt[3]{x^2}+1=x\,.\,x^{2/3}+1=x^{5/3}+1 \qquad f'(x)=\frac{5}{3}x^{2/3};\quad f''(x)=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}};\forall\, x\neq 0\,.$$



Luego, la derivada segunda no existe en el origen, es decir para $x=0$; pero, es positiva a la derecha del mismo y negativa a la izquierda. Además, como $f(x)$ es derivable en el origen, existe recta tangente, y la curva es cóncava hacia arriba a derecha del origen y cóncava hacia abajo a la izquierda. Por lo tanto, el punto $(0;1)$ es un punto de inflexión.

En conclusión, para encontrar los puntos de inflexión de un gráfico, interesa considerar los puntos donde se anula $f''(x)$, si existe, pero también hay que tener en cuenta los puntos del dominio donde $\nexists\, f''(x)$.

Otro método para llegar a la conclusión de Extremos relativos es la Prueba de la derivada de orden superior.

Ejemplo:

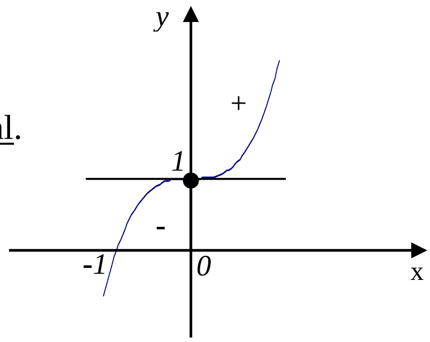
$f(x)=x^4$	$f(x)=-x^4$
$f'(x)=4x^3=0 \Rightarrow x=0.$	$f'(x)=-4x^3=0 \Rightarrow x=0.$
$f''(x)=12x^2;\ f''(0)=0.$	$f''(x)=-12x^2;\ f''(0)=0.$
$f'''(x)=24x;\ f'''(0)=0$	$f'''(x)=-24x;\ f'''(0)=0$
$f^{IV}(x)=24;\ f^{IV}(0)=24>0$	$f^{IV}(x)=-24;\ f^{IV}(0)=-24<0$
(1)	(2)

(1) Puesto que el orden de la primera derivada que no se anula para ese valor, es par y mayor que cero, en $x=0$ existe un mínimo relativo.

(2) Puesto que el orden de la primera derivada que no se anula para ese valor, es par y menor que cero, en $x=0$ existe un máximo relativo.

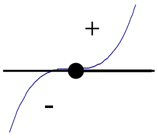
$$f(x)=x\,.\sqrt[3]{x^2}+1=x^{5/3}+1;\ f''(x)=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}};\forall\, x\neq 0$$

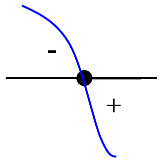
$$\left.\begin{array}{l} f''(-1)<0 \\ f''(1)>0 \end{array}\right. \Rightarrow P(0;1)$$ punto de inflexión con tangente horizontal.



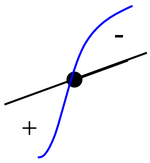
NOTA:

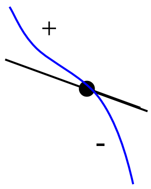
- ✓ Cuando la derivada segunda cambia de signo al pasar por los puntos $x = x_1$ y $x = x_2$, existen allí dos puntos de inflexión. Si la derivada segunda es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de un punto, en él existe un <u>punto de inflexión con tangente horizontal</u>.





- ✓ Si la segunda derivada es positiva a la izquierda y negativa a la derecha del punto, allí existe <u>punto de inflexión con tangente oblicua</u>.

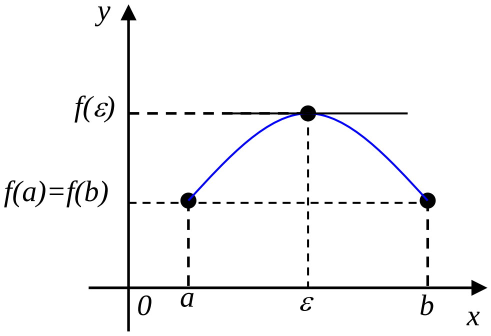




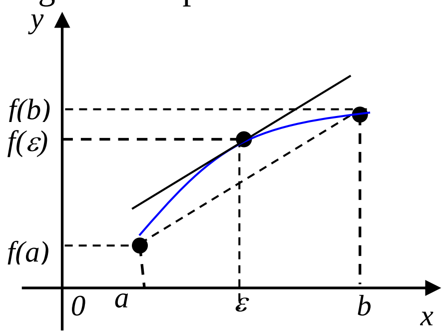
- ✓ Cuando el $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$, <u>la tangente en el punto de inflexión es vertical</u>. (*a* es la abscisa del punto de inflexión).

Incrementos Finitos

Al dibujar la curva correspondiente a una función derivable en un intervalo cerrado, se verifica la siguiente propiedad geométrica:
Si se traza la recta que pasa por los puntos extremos de la curva, es posible hallar un punto interior, cuanto menos, al intervalo donde la tangente al gráfico es paralela a dicha recta.



(a)



(b)

La figura *(a)* corresponde al caso particular en que la función toma valores iguales en los extremos del intervalo. En cambio, en la figura *(b)* corresponde al caso general.

La propiedad ilustrada en la figura *(a)* se demuestra en el ***Teorema de Rolle***. La propiedad general mediante el ***Teorema del Valor Medio***.

Teorema de Rolle. Ilustración gráfica

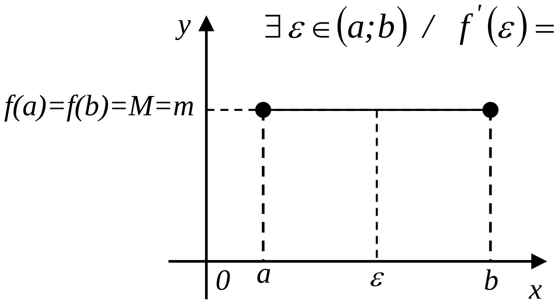
"Si una función $f(x)$ continua en el intervalo $[a;b]$ tiene derivada finita en el intervalo $(a;b)$, y además $f(a) = f(b)$, entonces existe por lo menos un punto ε en el intervalo $(a;b)$, donde $f'(\varepsilon) = 0$".

Demostración:

De acuerdo con el segundo *Teorema de Weierstrass*, al ser $f(x)$ continua en el intervalo $[a;b]$, alcanzará en este un valor máximo absoluto M y un valor mínimo absoluto m.
A los efectos de la demostración, analicemos las dos posibilidades que se pueden presentar:

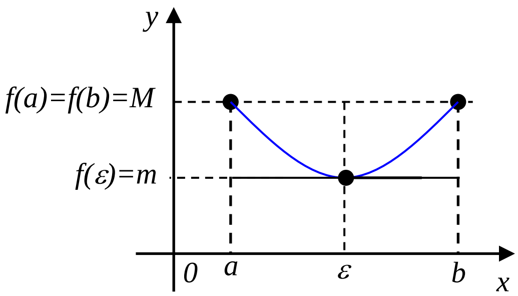
(a) Si $M = m$, la función $f(x)$ es constante, es decir tiene un valor constante $f(x) = m = M, \forall x$. Pero en este caso, en cualquier punto del intervalo considerado, y de acuerdo a lo ya visto, la derivada de una función constante es cero. Luego, $\forall x \in (a;b)$ es $f'(x) = 0$.
Por lo tanto la tesis se verifica para cualquier punto interior del intervalo especificado:

$$\exists\, \varepsilon \in (a;b) \;/\; f'(\varepsilon) = 0$$



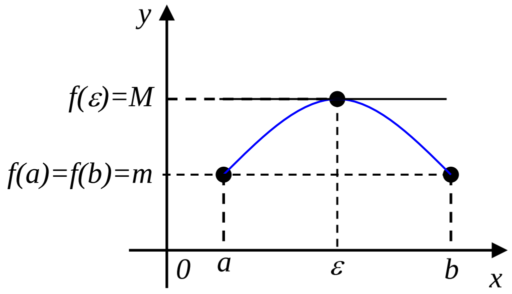
(b) Si $m \neq M$, entonces, uno de los dos valores es distinto de $f(a) = f(b)$. En virtud de ello se pueden presentar tres Casos:

(1) Si $m \neq f(a)$ y $M = f(a)$
En este caso, como m es el mínimo absoluto de $f(x)$ en $[a;b]$; será: $m < f(a)$, por lo tanto $f(x)$ alcanza el mínimo absoluto en un punto ε interior al intervalo. luego $f(\varepsilon)$ es un mínimo absoluto. Por un Teorema ya visto, como $f(x)$ es derivable, tendremos que: $f'(\varepsilon) = 0$.



(2) Si $M \neq f(a)$ y $m = f(a)$

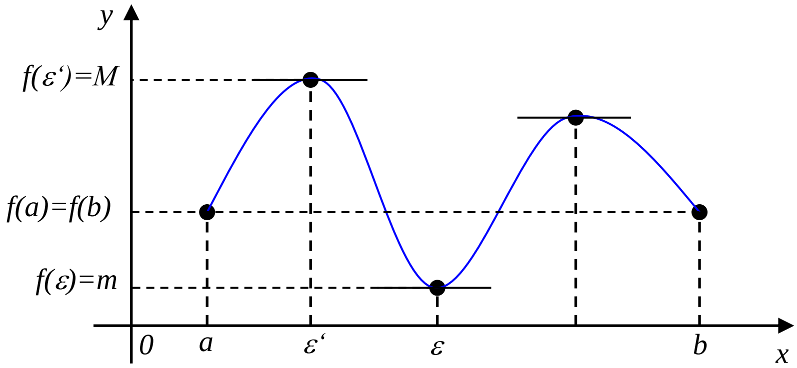
En este caso por ser M el máximo absoluto de $f(x)$ en $[a;b]$; será: $M > f(a)$. Por un razonamiento análogo al anterior, $f(\varepsilon) = M$, es el máximo absoluto y, por lo tanto: $f'(\varepsilon) = 0$.



(3) Si $M \neq f(a)$ y también $m \neq f(a)$

En este último caso, la función $f(x)$ alcanza el mínimo m en un punto ε interior al intervalo, y el máximo M en un punto ε' también interior al intervalo especificado $[a;b]$ .En esta situación, ambos extremos absolutos son también relativos.

Luego, es: $f'(\varepsilon) = 0$ y $f'(\varepsilon') = 0$.



Nota: los casos (1), (2) y (3) pueden sintetizarse en uno solo, de la siguiente manera:

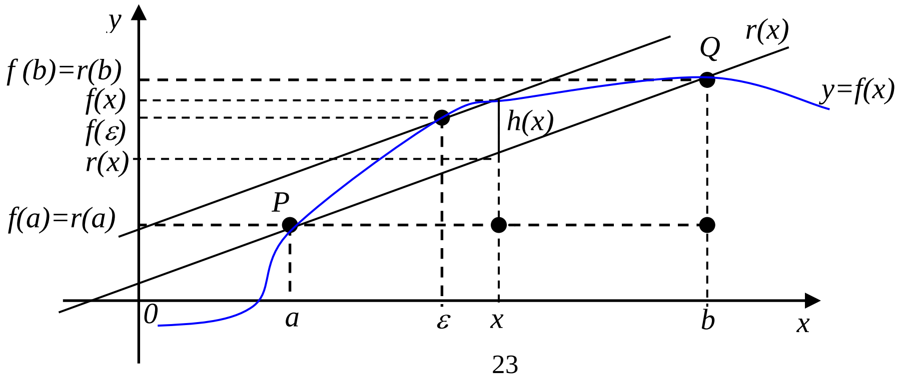
Si $m \neq M$, entonces uno de ellos, por lo menos, es distinto de $f(a) = f(b)$. Por lo tanto, $f(x)$ alcanza dicho extremo absoluto en un punto ε interior al intervalo, y $f(\varepsilon)$ es, al mismo tiempo, extremo absoluto y relativo. Por un Teorema anterior: $f'(\varepsilon) = 0$.

Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. (Teorema de Lagrange)

Sí $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a;b]$ y tiene derivada finita en el $(a;b)$, entonces existe al menos un punto $\varepsilon \in (a;b)$ tal que: $f'(\varepsilon) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostración:

Consideramos la recta $r(x)$ determinada por los puntos: $P[a; f(a)]$ y $Q[b; f(b)]$.



Por la ecuación de la recta que pasa por dos puntos: $y - f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$

Luego, la recta $r(x)$ es del tipo $r(x) = mx + b$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\qquad r(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.\,x - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.\,a + f(a).$

La función lineal correspondiente, es:

$$r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.\,x + k \text{; siendo: } \mathrm{k} = -\frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.\,\mathrm{a} + \mathrm{f}(\mathrm{a}).$$

Determinemos una función auxiliar: $h(x) = f(x) - r(x)$.

La función $h(x)$ es derivable en $(a;b)$, por ser la resta de dos funciones derivables, y:

$$h'(x) = f'(x) - r'(x)$$

Es decir: $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Por razones análogas $h(x)$ es continua en $[a;b]$, y además:

$$h(a) = f(a) - r(a) = 0 \text{, y } h(b) = f(b) - r(b) = 0\,.$$

Por lo tanto, la función $h(x)$ cumple con las condiciones exigidas por la hipótesis del ***Teorema de Rolle***, y entonces: $\exists\, \varepsilon \in (a;b) \;/\; h'(\varepsilon) = 0$.

Pero: $h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - r'(\varepsilon) = 0 \Rightarrow h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$.

Luego: $\exists\, \varepsilon \in (a;b)$ tal que $f'(\varepsilon) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ 1

Gráficamente puede observarse que la recta que une los puntos P y Q es paralela a la recta tangente a la curva en $[\varepsilon; f(\varepsilon)]$. En efecto, según el Teorema demostrado, ambos tienen igual pendiente.

Nota: Significado geométrico del ***Teorema de Lagrange***

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ (magnitud) representa la pendiente de la recta secante (cuerda) PQ que pasa por los puntos P y Q, cuyas abscisas son a y b.

Por otra parte, $f'(\varepsilon)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $[\varepsilon; f(\varepsilon)]$. De modo que el significado geométrico de la igualdad 1 es el siguiente:

"Si por cada punto del arco PQ puede trazarse una tangente, existirá sobre este arco, entre *P* y *Q*, cuanto menos un punto ε, tal que la correspondiente tangente es paralela a la secante (cuerda) que une los puntos *P* y *Q*".

<u>Consecuencias del Teorema de Lagrange</u>

(1) Si $f(x)$ es una función derivable en un intervalo *I*, y en todos los puntos del intervalo la derivada de $f(x)$ es nula, entonces $f(x)$ es constante en *I*.

<u>Demostración</u>:

Consideremos un intervalo cualquiera: $[x_1; x_2] \subseteq I$.
La función $f(x)$ satisface la hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x_1; x_2]$.

Luego, $\exists\, \varepsilon \in (x_1; x_2)$ tal que $f'(\varepsilon) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$; como: $f'(\varepsilon) = 0$, resulta: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$\therefore\ f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Como x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera de *I*:

$$\forall\, x \in I : f(x) = f(x_1) = f(x_2) = k$$

Luego, hemos probado que: $\forall\, x \in I : (\, f'(x) = 0 \Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{R} \ /\ \ f(x) = k\,)$.

Obsérvese que este Teorema es el recíproco del Teorema que afirma que la derivada de una constante es nula.

(2) Si dos funciones tienen la misma derivada en cada punto de un intervalo *I*, entonces dichas funciones difieren en una constante. (***<u>Teorema fundamental del cálculo integral</u>***). (T.F.C.I.). O sea: si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un intervalo *I* y $\forall\, x \in I : f'(x) = g'(x)$, entonces: $\exists\, k \in \mathbb{R} \ /\ \forall\, x \in I : f(x) - g(x) = k$.

<u>Demostración</u>:

$\forall\, x \in I : f'(x) - g'(x) = (f - g)'(x) = 0$. Por la consecuencia anterior:

$\exists\, k \in \mathbb{R} \ /\ \forall\, x \in I : (f - g)(x) = k$. O sea: $\forall\, x \in I : f(x) - g(x) = k \ \therefore\ \forall\, x \in I : f(x) = g(x) + k$.

Este resultado está incluido en el importante Teorema que afirma que: <u>la condición necesaria y suficiente</u> para que dos funciones tengan igual derivada es que difieran en una constante.

La condición es necesaria, pues si: $f(x)=g(x)+k$, con k constante, derivando resulta: $f^{'}(x)=g^{'}(x)$.
La condición es suficiente, lo asegura el Teorema (2).

Este Teorema es el ***Teorema Fundamental del Cálculo Integral***, pues, este propone precisamente encontrar todas las funciones que tienen una derivada dada. Ha quedado demostrado que si se posee una función que tiene una derivada dada, se poseen todas sin más que agregarle una constante.

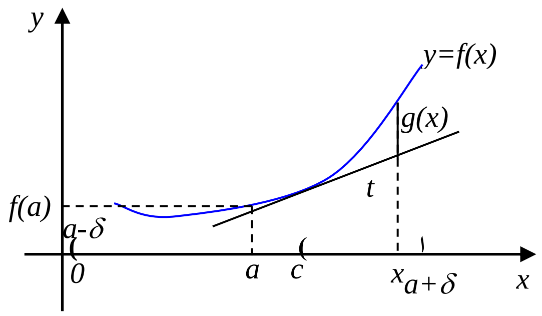
Teorema (Concavidad)

Si una función $f(x)$ tiene derivada segunda positiva en un punto a, y existe $f^{'}(x)$ finita en un $E_{(a)}$, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el punto $[a; f(a)]$.
Demostración:

Consideremos nuevamente la función $g(x)$ (la hemos considerado en concavidad de una curva), que indica la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la tangente en $[a; f(a)]$, para un punto x del $E_{(a;\delta)}$, donde existe $f^{'}(x)$.

Es, por lo tanto: $g(x)= f(x)-\lfloor f(a)+ f^{'}(a).(x-a)\rfloor$

Y también: $g(x)=[f(x)- f(a)]- f^{'}(a).(x-a)$ 1



Si aplicamos el ***Teorema del Valor Medio*** al intervalo entre a y x, es posible encontrar un punto c entre a y x tal que: $f(x)- f(a)= f^{'}(c).(x-a)$, reemplazando en 1, resulta:

$g(x)= f^{'}(c).(x-a)- f^{'}(a).(x-a)=\lfloor f^{'}(c)- f^{'}(a)\rfloor.(x-a)$ 2 , con c entre a y x.

Ahora bien, por hipótesis: $f^{''}(a)$ es positiva, es decir: $f^{''}(a)= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{'}(x)- f^{'}(a)}{x-a} > 0$

Por una propiedad de los límites finitos: $\exists E^{'}\left(a;\delta^{'}\right) \ / \ \forall x: \left(x\in E^{'}\left(a;\delta^{'}\right) \Rightarrow \dfrac{f^{'}(x)- f^{'}(a)}{x-a} > 0 \right)$.

Para que este cociente de incrementos sea positivo, numerador y denominador tienen el mismo signo, es decir: $\left(x > a \Rightarrow f^{'}(x) > f^{'}(a)\right)$ y $\left(x < a \Rightarrow f^{'}(x) < f^{'}(a)\right)$

Supongamos: $\delta < \delta'$. Si $x \in E'(a;\delta)$, también $c \in E'(a;\delta)$, y se verifica:

$$x > a \Rightarrow f'(x) > f'(a) \Rightarrow f'(c) > f'(a) \quad \wedge \quad x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a) \Rightarrow f'(c) < f'(a)$$

Por lo tanto, los dos factores de la expresión 2 tienen el mismo signo. Es decir: $\forall\, x : \left(x \in E'(a;\delta) \Rightarrow g(x) > 0\right)$ y el gráfico de $f(x)$ es cóncavo hacia arriba en el punto $[a; f(a)]$.

De la misma forma se demuestra que si $f''(a)$ es negativa, el gráfico de $f(x)$ es cóncavo hacia abajo en el punto $[a; f(a)]$.

Resumiendo:
$f''(x)$ es positiva, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia el eje *y* positivo (concavidad hacia arriba).
$f''(x)$ es negativa, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia el eje *y* negativo (concavidad hacia abajo).

Teorema de Cauchy

El cociente de incrementos de dos funciones continuas en $[a;b]$ y derivables en $(a;b)$, es igual al cociente de las derivadas correspondientes en un punto interior del intervalo.

O bien: si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en $[a;b]$ y derivables en $(a;b)$, y además $g'(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in (a;b)$, entonces existirá un punto $\varepsilon \in (a;b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$.

(Obsérvese que en la hipótesis no es necesario exigir que $g(b) - g(a) \neq 0$, a pesar de que esta expresión figura como denominador. Si fuera $g(b) = g(a)$, por el ***Teorema de Rolle***, existirá un punto ε donde $g'(\varepsilon) = 0$, lo que contradice el enunciado $g'(x) \neq 0$).

Demostración:

Consideremos una función que es combinación lineal de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y derivables:
$h(x) = f(x) + k \,.\, g(x)$ 1 , donde *k* es una constante, tal que $h(a) = h(b)$ (la función $h(x)$ toma valores iguales en los extremos del intervalo).

Determinemos *k*, de modo que esta expresión tome valores iguales en los puntos $x = a$ y $x = b$. Luego:

$$\left.\begin{aligned} h(a) &= f(a) + k \,.\, g(a) \\ h(b) &= f(b) + k \,.\, g(b) \end{aligned}\right\} como\ h(a) = h(b) \Rightarrow f(a) + k \,.\, g(a) = f(b) + k \,.\, g(b) \Rightarrow \text{¨despejo¨ } k$$

$k = \dfrac{f(a) - f(b)}{g(b) - g(a)} = -\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$; reemplazando *k* en 1: $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$.

Esta función es continua en $[a;b]$, por ser combinación lineal de dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ y además derivable en $(a;b)$. Es evidente, además que $h(a) = 0 \quad \wedge \quad h(b) = 0$. Por lo tanto $h(x)$ satisface, en el intervalo especificado, todas las condiciones del ***Teorema de Rolle***, entonces existirá al menos un punto $\varepsilon \in (a;b)$ tal que $h'(\varepsilon) = 0$.

O sea: $h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}; \quad a < \varepsilon < b$.

Escribiendo *x* en lugar de *b*, tenemos el ***Teorema de Cauchy***:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}; \quad a < \varepsilon < x \ .$$

Podemos observar que este ***Teorema (de Cauchy)*** comprende como caso particular, el ***Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial***. Sí $g(x)$ es la función identidad; es decir, si:

$$g(x) = x, \ \forall x \in [a;b] \ \therefore \ g(a) = a \ \wedge \ g(b) = b; \quad g'(\varepsilon) = 1$$

Luego: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon); \quad a < \varepsilon < b$ ***Teorema de Lagrange***

Límites Indeterminados. Regla de L' Hôpital

Al estudiar las diferentes propiedades de los límites de una función, hemos demostrado que:

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, siempre y cuando $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$. Además, al estudiar límites infinitos, hemos visto que: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Es decir, puede probarse que si el divisor tiene límite nulo y dividendo límite finito, entonces el límite del cociente es infinito. Por lo tanto, queda por resolver un caso que aparece frecuentemente, y es justamente el de indeterminación del límite, o sea cuando tenemos el cociente de dos infinitésimos.

Este caso de indeterminación de límite lo constituye el siguiente ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x} = \dfrac{0}{0}$. No obstante ello, de acuerdo a lo ya visto, este límite es igual a uno.

Cabe agregar que en muchas circunstancias esta indeterminación de límite, se puede destruir recurriendo a las funciones derivadas, mediante un método que se denomina ***Regla de L'Hôpital***:

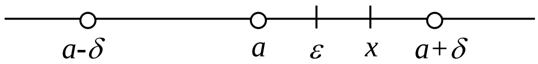
“Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables en un $E'(a)$ (excluyendo a lo sumo el punto *a*), tales que $f(a) = g(a) = 0$, y además $g'(x) \neq 0,\ \forall\, x \in E'(a)$ (excluyendo a lo sumo el punto *a*), se verifica que, si existe:

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe también: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y se cumple que: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$”.

Demostración:

Tomemos en el intervalo $[a; x]$ un punto $x \neq a$. Aplicamos la fórmula de Cauchy:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}; \text{ donde } a < \varepsilon < x$$



por hipótesis: $f(a) = g(a) = 0$, esto significa que: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$.

Por otra parte si: $x \to a$, también $\varepsilon \to a$, ya que ε está comprendido entre *a* y *x*; es decir que en las proximidades de a, x y ε se encontrarán sumamente próximos, y al tomar límite será exactamente lo mismo hablar de x o de ε.

En consecuencia: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 1

Si aún fuese $f'(a) = 0$ y $g'(a) = 0$, estará el segundo miembro de 1 en condiciones de aplicar la Regla de L’Hôpital, resultando así: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$.

Se observa que la regla podrá aplicarse en forma reiterada mientras siga apareciendo la indeterminación $0/0$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{\cos x} + x.(-\operatorname{sen} x) - \cancel{\cos x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} - x \cdot \operatorname{sen} x = 0$.

La Regla de L’Hôpital es aún aplicable a otros casos de indeterminación, y que analizaremos a continuación:

(a) Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, entonces: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$; si hacemos $x = \dfrac{1}{z}$, resulta que si $x \to \infty,\ z \to \infty$ y por lo tanto: $\lim\limits_{z \to 0} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0;\ \lim\limits_{z \to 0} g\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0$.

Es decir que: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$, y en este segundo miembro tenemos indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, con la variable tendiendo a un número finito, podemos por lo tanto aplicar la <u>Regla de L'Hôpital</u>, con la sola observación de que $f(x)$ y $g(x)$ están expresados como función de z, por lo que se deberá aplicar la regla de derivación correspondiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]'}{\left[g\left(\frac{1}{z}\right)\right]'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{\cancel{-\frac{1}{z^2}}}{\cancel{-\frac{1}{z^2}}}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Luego, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>Ejemplo</u>: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{sen\,\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{cos\,\frac{k}{x}\cdot\left(-\frac{k}{\cancel{x^2}}\right)}{\frac{1}{\cancel{x^2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}k\,.cos\,\dfrac{k}{x}=k$.

(b) Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty \quad\wedge\quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, entonces: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

En efecto, escribiendo: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$, tenemos en el segundo miembro una indeterminación $\frac{0}{0}$, cuando $x\to a$, por lo que sí aplicamos la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\right]'=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-g'(x)}{g(x)^2}}{\frac{-f'(x)}{f(x)^2}}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2$$

Luego, $\cancel{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot\cancel{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}}\Rightarrow 1=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,si multiplicamos ambos miembros por: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$: $\quad\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{\cancel{f'(x)}}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\cancel{g'(x)}}$

por lo tanto $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cotg\ x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-1}{sen^2\ x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{sen^2\ x}=1$

(c) Caso de indeterminación del tipo $0\,.\,\infty$: sea $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \quad\wedge\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. En este caso hacemos: $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,.\,g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$; donde la expresión del segundo miembro es de la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x\to a$; luego se aplica la Regla de L'Hôpital para destruir la indeterminación.

(d) Caso de indeterminación del tipo 0^0: sea $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \quad\wedge\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Entonces $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=0^0$.

Haciendo: $y=[f(x)]^{g(x)}$ y tomando ln en ambos miembros, tenemos: $ln\ y=g(x).ln\ f(x)$; si $x\to a$ obtenemos en el segundo miembro una indeterminación del tipo $0\,.\,\infty$.
Una vez calculado el $\lim\limits_{x\to a} ln\ y$, será fácil hallar el $\lim\limits_{x\to a} y$.

En efecto, en virtud de la continuidad de la función logarítmica, se tiene: $\lim\limits_{x\to a} ln\ y = ln \lim\limits_{x\to a} y$, y sí: $ln \lim\limits_{x\to a} y=b \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{definición\ de\\ logaritmo}} \lim y=e^b$. Si como caso particular $b=+\infty$ ó $b=-\infty$ entonces será respectivamente: $\lim y=+\infty$ ó $\lim y=0$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to o} x^x$. Hacemos:

$$y=x^x \;\Rightarrow\; ln\ y=x\,.\,ln\ x \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} ln\ y=\lim_{x\to 0}(x\,.\,ln\ x)=\lim_{x\to 0}\frac{ln\ x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{\frac{-1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to 0}-x=0\,.$$

Luego: $ln \lim\limits_{x\to 0} y=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} y=e^0=1 \;\therefore\; \lim\limits_{x\to 0} x^x=1$

Son también indeterminados los límites $\left(f(x)^{g(x)}\right)$ en los casos que se puede escribir simbólicamente: $1^\infty, \infty^0$, y estas indeterminaciones se salvan tomando logaritmo, pues entonces se trata de hallar el límite de: $g(x).ln\ f(x)$ que como en el caso anterior $\left(0^0\right)$ toma la forma $0\,.\,\infty$, ya estudiada. Luego, $1^\infty, \infty^0, 0^0$ se salvan de la misma manera.

Nota: la Regla de L'Hôpital que permite, en el cálculo del límite, reemplazar a ciertas funciones por sus derivadas, solo puede aplicarse, como se ha indicado, al cociente de dos infinitésimos o al cociente de dos infinitos. Los restantes casos de indeterminación de límites deben reducirse previamente a uno de los dos casos mencionados, mediante operaciones algebraicas o mediante aplicación de logaritmos.

<u>Polinomios y Fórmulas de Taylor y Mac Laurin</u>

Los polinomios en una variable con coeficientes reales, determinan funciones simples que tienen la propiedad de ser derivable. Si el polinomio es de grado n, admite n polinomios no idénticamente nulos, que son sus derivadas sucesivas.

<u>Ejemplo</u>:

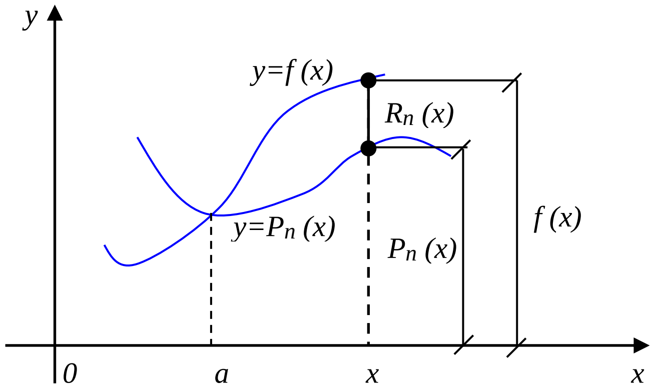
$P(x)=4x^3+2x^2+5x+6$

$P'(x)=12x^2+4x+5$

$P''(x)=24x+4$

$P'''(x)=24$

$P^{IV}(x)=0$



En más de una ocasión resulta conveniente aproximar el valor de una función derivable no polinómica, por ejemplo: $e^x, sen\, x, ln\, x$, etc. mediante un <u>polinomio particularmente elegido</u>, y precisar la <u>aproximación o error</u> que se comete al reemplazar el valor de la función en un punto x de su Dominio por el valor en el mismo punto del polinomio seleccionado.

Es decir que si una función $y = f(x)$ tiene n derivadas sucesivas finitas en un punto a, existe y es único el polinomio de grado n cuyas derivadas sucesivas coinciden con las derivadas de la función $f(x)$ en dicho punto a, y por lo tanto interesa conocer para el número x del Dominio, el valor de la diferencia: $R_n(x)= f(x)-P_n(x)$.

El término $R_n(x)$ se conoce con el nombre de <u>Término Complementario</u>.

Para aquellos valores de x en que el Término Complementario $R_n(x)$ es pequeño, el polinomio $P_n(x)$ da un valor aproximado de la función $f(x)$.

<u>Polinomios de Taylor y Mac Laurin</u>

De acuerdo con las consideraciones efectuadas precedentemente, supongamos que la función $y = f(x)$ admite n derivadas finitas en cualquier punto de un cierto intervalo que contiene al punto $x = a$.

Busquemos ahora un polinomio $y = P_n(x)$ de grado n y coeficientes reales $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ cuyo valor en el punto $x = a$ sea igual al de la función $f(x)$ en el mismo punto $x = a$, iguales a los valores de las derivadas correspondientes de la función $f(x)$ en el punto.

Es decir: $P(a)= f(a), P'(a)= f'(a), P''(a)= f''(a), \dots, P^{(n)}(a)= f^{(n)}(a)$, . 1

Es de suponer que el polinomio que nos proponemos encontrar será, en cierto aspecto, próximo a la función $f(x)$.

Sea, entonces, la siguiente función polinómica de grado *n* y coeficientes reales:

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n$$

si *a* es un número real cualquiera, es posible expresar el polinomio $P_n(x)$ según las potencias del binomio $(x-a)$, para lo cual basta efectuar las divisiones sucesivas por dicho binomio. Es decir que: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, *será:*

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n \,. \qquad 2$$

Los coeficientes indeterminados $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ los calculamos de modo que cumplan las condiciones enunciadas, o sea que se verifique 1 Para ello, hallaremos previamente las derivadas sucesivas de $y = P_n(x)$:

$$P_n^{'}(x) = c_1 + 2.c_2(x-a) + 3.c_3(x-a)^2 + 4.c_4(x-a)^3 \dots + n.c_n(x-a)^{n-1}$$
$$P_n^{''}(x) = 2.c_2 + 2.3.c_3(x-a) + 3.4.c_4(x-a)^2 + \dots + n.(n-1).c_n(x-a)^{n-2}$$
$$P_n^{'''}(x) = 2.3.c_3 + 2.3.4.c_4(x-a) + \dots + n.(n-1).(n-2).c_n(x-a)^{n-3}$$

$$P_n^{(n)}(x) = 1.2.3.4.5 \dots (n-2).(n-1).n.c_n$$

Luego, en el punto $x = a$ las funciones determinadas por las expresiones anteriores tomarán los siguientes valores:

$$\left.\begin{array}{l} P(a) = c_0 \\ P^{'}(a) = c_1 \\ P^{''}(a) = 1.2.c_2 = 2!.c_2 \\ P^{'''}(a) = 1.2.3.c_3 = 3!.c_3 \\ ---------------- \\ P^{(n)}(a) = 1.2.3 \dots n.c_n = n!.c_n \end{array}\right\} \quad \text{por lo tanto, resulta:} \quad \left\{\begin{array}{l} c_0 = P(a) \\ c_1 = P^{'}(a) \\ c_2 = P^{''}(a) / 2! \\ c_3 = P^{'''}(a) / 3! \\ --------- \\ c_n = P^{(n)}(a) / n! \end{array}\right.$$

reemplazando en 2, tenemos:

$$P_n(x) = P(a) + P^{'}(a).(x-a) + \frac{P^{''}(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{P^{'''}(a)}{3!}.(x-a)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n \,.$$

Esta función polinómica recibe el nombre de ***Polinomio de Taylor***.

Si consideramos en particular $a = 0$, el polinomio queda expresado se la forma:

$P_n(x)=P(0)+P'(0).x+\frac{P''(0)}{2!}.x^2+\frac{P'''(0)}{3!}.x^3+\ldots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}.x^n$. Esta expresión recibe el nombre de ***Polinomio de Mac Laurin***.

Ahora bien, en virtud de 1, tenemos también que:

$c_0 = f(a)$

$c_1 = f'(a)$

$c_2 = f''(a)/2!$

$---------$

$c_n = f^{(n)}(a)/n!$

Luego: $P_n(x)= f(a)+ f'(a).(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$. Es el ***Polinomio de Taylor*** correspondiente a la función $y = f(x)$ en el punto $x=a$.

Sus *n* derivadas coinciden en el punto $x=a$ con las *n* derivadas de la función $f(x)$.

Por otra parte según lo visto anteriormente, hemos designado por $R_n(x)$,la diferencia entre los valores de la función dada $f(x)$, y el polinomio calculado $P_n(x)$: $R_n(x)= f(x)-P_n(x)$, de donde tenemos: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, o lo que es lo mismo:

$$f(x)\cong f(a)+ f'(a).(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n+R_n(x) \qquad 3$$

Además, si se considera: $f^{o}(x)= f(x)$, y recordando que: $0!=1$, la expresión anterior 3 puede considerarse de la siguiente manera: $f(x)\cong \sum_{h=0}^{n}\frac{f^{(h)}(a).(x-a)^{(h)}}{h!}+R_n(x)$.

A fin de aclarar conceptos, efectuamos el siguiente ejercicio de aplicación:

Sea la función $f(x)=e^x$, cuyo valor se quiere aproximar mediante el Polinomio de Taylor en el punto $a=1$.

$$P_n(x)= f(a)+ f'(a).(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n \qquad 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=f(1)=e^{1}=e \\ f'(x)=e^{x} \quad \therefore \quad f'(a)=f'(1)=e^{1}=e \\ f''(x)=e^{x} \quad \therefore \quad f''(a)=f''(1)=e^{1}=e \\ f'''(x)=e^{x} \quad \therefore \quad f'''(a)=f'''(1)=e^{1}=e \\ ------------------------ \\ f^{(n)}(x)=e^{x} \quad \therefore \quad f^{(n)}(a)=f^{(n)}(1)=e^{1}=e \end{array}\right\}$$ Luego, reemplazando en 1:

$P_n(x)=e+e.(x-1)+\dfrac{e.(x-1)^2}{2!}+\ldots+\dfrac{e.(x-1)^n}{n!}$, o lo que es lo mismo: $P_n(x)=\sum\limits_{h=0}^{n}\dfrac{e^h.(x-1)^h}{h!}$

Este polinomio $P_n(x)$ es el ***Polinomio de Taylor*** correspondiente a la función $f(x)=e^x$ en el punto $a=1$.

Una vez encontrado el polinomio, interesa conocer el valor del Resto de Taylor o Término Complementario: $R_n(x)$, en el punto *x* perteneciente a un entorno del punto $a=1$, o sea:

$$R_n(x)=e^x-\sum_{h=0}^{n}\frac{e^h.(x-1)^h}{h!}$$

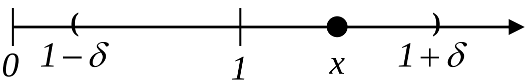
Como puede observarse, el valor $R_n(x)$ depende, para cada *x*, de *h*. O sea, del grado del polinomio.

Si, $h=1$ es $R_n(x)=e^x-\sum\limits_{h=0}^{1}\dfrac{e^h.(x-1)^h}{h!}$; o sea: $R_n(x)=e^x-[e+e.(x-1)]=e^x-ex$

Si $h=2$, es $R_n(x)=e^x-\sum\limits_{h=0}^{2}\dfrac{e^h.(x-1)^h}{h!}$; o sea:

$$R_n(x)=e^x-\left[e+e.(x-1)+\frac{e.(x-1)^2}{2!}\right]=e^x-ex-\frac{e}{2}\left(x^2-2x+1\right)=e^x-\frac{e}{2}-\frac{e\,x^2}{2}.$$

Por lo tanto, para *x* próximo a 1, el resto $R_n(x)$ considerado, se hace menor al aumentar el grado del polinomio que aproxima la función.



Si $h=1$, es decir si se considera el polinomio de Taylor de primer grado, la aproximación obtenida se llama aproximación lineal de la función en el punto especificado.
Si $h=2$, el polinomio será de segundo grado, la aproximación obtenida en este caso se denomina aproximación cuadrática de la función en el punto elegido, y así sucesivamente.

Fórmulas de Taylor y Mac Laurin* - *Fórmula de Lagrange del Término Complementario

A continuación, determinaremos mediante el siguiente Teorema la expresión del Resto de Taylor.

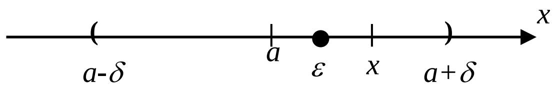
Teorema: sea $f(x)$ una función con derivada finita de orden $(n+1)$ en todos los puntos de un $E_{(a)}$. Si *x* es un punto cualquiera de dicho $E_{(a)}$, entonces existe un punto ε entre *a* y *x* tal que:

$$f(x)\cong P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

En esta expresión, $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor correspondiente a $f(x)$ en el punto *a*. Es decir:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}.(x-a)^{(n+1)}$$

<u>Demostración</u>: vamos a demostrar el teorema para un punto *x* ubicado en el semientorno a la derecha de *a*. En forma análoga, puede efectuarse la demostración para un punto *x* ubicado en el semientorno a izquierda de *a*.



A los efectos de la demostración vamos a considerar a *x* como un punto fijo. Además, definamos en el intervalo $[a;x]$ dos funciones auxiliares: $F(t)$ y $G(t)$, de la siguiente manera:

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t).(x-t) - \frac{f''(t).(x-t)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(t).(x-t)^n}{n!}\;;\ \forall\, t \in [a;x]$$

$$G(t) = (x-t)^{(n+1)};\ \forall\, t \in [a;x]$$

Como puede observarse, las funciones $F(t)$ y $G(t)$ cumplen con las <u>condiciones del Teorema de Cauchy</u>, y por lo tanto va a existir un punto ε interior al intervalo $(a;x)$ tal que:

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\varepsilon)}{G'(\varepsilon)} \qquad 1$$

Si reemplazamos *t* por *x* en las expresiones que definen a las funciones F y G: $F(x) = G(x) = 0$. Además, al derivar F', debemos tener en cuenta que $f'(x) = 0$,pues $f(x)$ es una constante. Por lo tanto:

$$F'(t) = -\cancel{f'(t)} - \cancel{f''(t).(x-t)} + \cancel{f'(t)} - \frac{f'''(t).(x-t)^2}{2!} + \frac{\cancel{f''(t).2.(x-t)}}{\cancel{2!}} - \ldots - \frac{f^{(n+1)}(t).(x-t)^n}{n!}$$

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t).(x-t)^{(n)}}{n!}\text{. Luego: } F'(\varepsilon) = -\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-\varepsilon)^{(n)}}{n!}$$

$G'(t) = -(n+1).(x-t)^n$. Luego: $G'(\varepsilon) = -(n+1).(x-\varepsilon)^n$; reemplazando en la expresión 1:

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{\dfrac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-\varepsilon)^n}{n!}}{(n+1).(x-\varepsilon)^n} \Rightarrow F(a) = G(a).\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \qquad \otimes$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de $F(a)$ y $G(a)$, resulta: $(sustituyendo\ en\ F(t) : t = a)$

$$F(a)= f(x)- f(a)- f'(a).(x-a)- \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} - \ldots - \frac{f^{(n)}(a).(x-a)^n}{n!} = \underbrace{(x-a)^{(n+1)}}_{G(a)} . \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

$$\uparrow por \otimes$$

$$f(x)- f(a)- f'(a).(x-a)- \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} - \ldots - \frac{f^{(n)}(a).(x-a)^n}{n!} = \frac{(x-a)^{n+1}. f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

despejando $f(x)$:

$$f(x)= f(a)+ f'(a).(x-a)+ \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a).(x-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$ Esta expresión se denomina <u>Fórmula de Taylor</u>, donde: $R_n(x)= \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, es la <u>Fórmula de Lagrange del Término Complementario</u>, que tiene la misma expresión formal que los términos del polinomio de Taylor, pero el valor de la derivada de orden (*n+1*) no se calcula en el punto *a*, sino en el punto ε que está ubicado entre *a* y *x*.

Si $a = 0$, se obtiene la <u>Fórmula de Mac Laurin</u>

$$f(x)\cong f(0)+ f'(0).x+ \frac{f''(0).x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0).x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon).x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cabe agregar que el <u>Término Complementario de Lagrange</u> puede escribirse también de la siguiente forma, teniendo en cuenta que: $\varepsilon = a+\theta.(x-a)$ donde $0<\theta<1$.

Luego: $R_n(x)= \frac{f^{(n+1)}[a+\theta.(x-a)].(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$. Si $a=0$: $R_n(x)= \frac{f^{(n+1)}(\theta x).x^{(n+1)}}{(n+1)!}$.

<u>Aproximación de funciones</u>

El cálculo del valor de un polinomio en un punto cualquiera *x* ubicado en un $E_{(a)}$ donde se conoce el valor del mismo y de sus derivadas sucesivas, es un problema sencillo. <u>La Fórmula de Taylor</u> permite utilizar este cálculo simple para <u>aproximar funciones que no son polinomios, mediante el polinomio de Taylor</u> correspondiente. La aproximación es más precisa cuando mayor sea el grado del polinomio.

El Término Complementario o Resto de Taylor, permite estimar la aproximación obtenida ya que es la diferencia entre el valor de la función en el punto considerado y el polinomio correspondiente. O sea: $R_n(x)= f(x)- P_n(x)$, y también: $|R_n(x)| = |f(x)- P_n(x)|$.

Si se halla un número positivo δ tal que: $|R_n(x)| < \delta$, entonces $|f(x)- P_n(x)| < \delta$.

Es decir, si se considera como valor de la función $f(x)$ en el punto *x*, el valor numérico en dicho punto *x* del polinomio $P_n(x)$, el error cometido, en valor absoluto será menor que el número δ.

<u>Ejemplo</u>: aproximar la función *ln* mediante un polinomio de cuarto grado.

Consideremos la función de Taylor con un polinomio de cuarto grado:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a).(x-a)^3}{3!} + \frac{f^{IV}(a).(x-a)^{IV}}{4!} + \frac{f^{V}(\varepsilon).(x-a)^{V}}{5!} ; a < \varepsilon < x$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ f'(x) = 1/x \\ f''(x) = -1/x^2 \\ f'''(x) = 2/x^3 \\ f^{IV}(x) = -6/x^4 \\ f^{V}(x) = 24/x^5 \end{array}\right\} \quad \text{si } a = 1 \text{ es: } \quad \left\{\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f'(1) = 1 \\ f''(1) = -1 \\ f'''(1) = 2 \\ f^{IV}(1) = -6 = -3! \\ f^{V}(1) = \dfrac{24}{\varepsilon^5} = \dfrac{4!}{\varepsilon^5} ;\ 1 < \varepsilon < x \end{array}\right.$$

Por lo tanto:

$$P_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + 2\,.\frac{(x-1)^3}{3!} - 3!\,.\frac{(x-1)^4}{4!} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

$$R_n(x) = \frac{4!\,.(x-1)^5}{5!\,.\varepsilon^5} = \frac{(x-1)^5}{5!\,.\varepsilon^5} = \frac{(x-1)^5}{5}\,.\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^5 \qquad (1)$$

Si se elige x en el intervalo $(1;1{,}1)$, es $1 < \varepsilon < 1{,}1$ y $\frac{1}{\varepsilon} < 1$. Considerando los valores anteriores, de (1) se obtiene: $|R_n(x)| < \frac{(0{,}1)^5}{5} = 0{,}000002$.

Luego, $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm 0{,}000002$, si $1 < x < 1{,}1$.

Por ejemplo, si elegimos $x = 1{,}01$, resulta: $\ln 1{,}01 \cong 0{,}00099503$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis Matemático I

MATERIAL DIDÁCTICO

Integrales Indefinidas

REEDICIÓN AÑO 2020

Profesor: ***Ing. Raúl Binaghi***

Reedición: ***Prof. Edgardo A. Arriola***
Ing. Graciela A. Luque
Ing. Ramón S. Sampayo

Integrales Indefinidas

1.- INTRODUCCIÓN Y DEFINICIÓN

En matemática estamos acostumbrados a hablar de operaciones inversas, la suma tiene su inversa que es la resta; el producto, la división; etc. También podemos pensar que la operación derivada tiene una inversa y esta será la integración o antiderivada (como la llaman algunos autores).
En este capítulo nos referiremos a ella, para lo cual debemos tener en cuenta que en el cálculo diferencial se expresó la derivada de una función de la siguiente manera:

$$\text{si} \quad y = f\,(x) \text{ resulta } \quad y' = f'\,(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

y, por lo tanto: $d\,f(x) = f\,'(x)\,dx$ que constituye la expresión de la diferencial de una función $f(x)$.

En el cálculo integral, trataremos de hallar una función cuya derivada conocemos, es decir, calcularemos $F(x)$ sabiendo como dato, que $F'(x) = f(x)$. Si además tenemos en cuenta que:

$$d\,F\,(x) = F'\,(x)\,dx = f\,(x)\,dx,$$

podemos decir que el problema de la integración es hallar una función cuya diferencial (y por ende su derivada) conocemos.

La función $F\,(x)$ que se logra como resultado de este proceso se llama integral de la diferencial dada y recibe el nombre de primitiva o antiderivada de la función $f\,(x)$.
Por lo expuesto, podemos definir como función Primitiva o Antiderivada de una función $f(x)$:

$$F(x) \text{ es una Primitiva o Antiderivada de } f\,(x) \Leftrightarrow F'(x) = f\,(x)$$

Es necesario tener en cuenta que pueden existir muchas funciones que tienen la misma derivada (infinitas) y que, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, todas difieren en una constante, por lo tanto, si $F\,(x)$ es una primitiva de $f\,(x)$ también lo será $F\,(x) + C,\ \forall\, C \in \Re$, ya que se verificará: $D\,[\,F\,(x) + C\,] = F'(x) = f\,(x)$, lo cual satisface la definición de primitiva.
Asimismo, teniendo en cuenta lo dicho al comienzo, podemos definir la integral de dos maneras (que en realidad es solamente una):

"LA OPERACIÓN INTEGRAL ES BUSCAR UNA FUNCIÓN CUYA DIFERENCIAL (Y POR ENDE SU DERIVADA) SE CONOCE"

Simbólicamente: $$\int f\,(x)\,dx = F\,(x) + C \;\Leftrightarrow D\left[F\,(x) + C\right] = F'\,(x) = f\,(x)$$

El valor "***C***", que es una constante que pertenece al conjunto de los números reales, recibe el nombre de "Constante de Integración" y debemos escribirla en todos los casos de integrales indefinidas para tener en cuenta las infinitas primitivas que tiene una función y que difieren entre si en dicha constante.

2.- INTEGRALES INMEDIATAS

Si bien es posible afirmar que toda función continua tiene una integral indefinida o primitiva, puede resultar que esta sea imposible de obtener en términos de funciones elementales conocidas.

Además, es necesario tener en cuenta que en cálculo integral no se puede formular una regla general de integración, como la que fue formulada para el cálculo diferencial (que nos permitió obtener las fórmulas de derivación), sino que cada caso necesita un análisis especial que permita resolverlo.

Asimismo, y teniendo en cuenta esto, se puede afirmar que la integración es un procedimiento en el cual deben efectuarse sucesivos ensayos para resolverla, y para facilitar este trabajo se formularon tablas de integrales conocidas o de fácil cálculo, las que constituyen las llamadas "Tablas de Integrales Inmediatas", que convienen recordar para poder aplicarlas en los distintos problemas.

También es necesario aclarar que muchas de las integrales se resuelven solamente aplicando artificios matemáticos que son específicos para cada una de ellas. En el presente capítulo solo trataremos de explicar los métodos más generales para resolverlas.

Para el cálculo de algunas integrales inmediatas o fáciles de resolver tendremos en cuenta que se puede verificar el resultado obtenido aplicando la definición de integral, es decir, comparando la diferencial del resultado con la diferencial a integrar, las que deben resultar iguales.

Considerando lo expuesto, vamos a calcular algunas integrales inmediatas o fáciles de resolver:

a) $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; si \; n \neq -1$ b) $\int \dfrac{dx}{x} = ln\, x + C \;, si \;\; n = -1$

c) $\int e^x \, dx = e^x + C$ d) $\int \sqrt{x} \; dx = \int x^{1/2} \; dx = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} = \dfrac{2}{3}\, x\sqrt{x} + C$

e) $\int \dfrac{1}{x^n}\, dx = \int x^{-n} \; dx = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$ f) $\int sen\, x \; dx = -\cos x + C$ g) $\int \cos x \;\; dx \; = \; sen\, x + C$

h) $\int sec^2\, x \; dx \; = \; tg\; x + \; C$ i) $\int \; sec\, x \,.\, tg\, x \;\; dx \; = \; sec\, x + C$ j) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arc\, tg\; x \; + C$

k) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \; = arc\, sen\, x + C$ l) $\int \; -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc \cos x + C \; \ldots$

Nota: La presente tabla no agota la totalidad de integrales que pueden ser consideradas como inmediatas, sino se trató de ejemplificar las más usuales.

3.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

3.1. Derivada de la integral

Por definición de integral, podemos decir:

$$\int f\,(x)\, dx = \; F\,(x) + C \Leftrightarrow D\,[\; F\,(x) + C] = F'\,(x) = \; f(x)$$

Si derivamos ambos miembros de la primera parte de la expresión de la definición de integral vemos que se mantiene la igualdad, dado que si las funciones son iguales, también lo son sus derivadas. Entonces:

$D\int f\,(x) \;\; dx = \; D\,[\; F\,(x) + C \;]$ por lo tanto, resulta que: $D\int \; f(x)\, dx = F'\,(x)$

pero, por la definición de integral indefinida, resulta que: $F'(x) = f(x)$

y, por carácter transitivo podemos afirmar: $D\int f(x)\,dx = f(x)$, es decir:

"La derivada de una integral de una función da como resultado la misma función"

Ejemplo: $\int x^3\ dx\ =\ \dfrac{x^4}{4} + C$

resultado al que llegamos aplicando la fórmula de integración respectiva. Si derivamos a ambos miembros, resulta:

$D\int x^3\ dx = D\left[\dfrac{x^4}{4} + C\right] = \dfrac{4\,x^3}{4} = x^3$, con lo que se verifica numéricamente, la propiedad.

3.2 <u>Integral de una diferencial</u>

Teniendo en cuenta la definición de integral, podemos afirmar:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

si diferenciamos la segunda parte de esta expresión, resulta: $d\,[f(x)] = d\,[\,F'(x)\,]$

resolviendo las diferenciales tenemos: $f'(x)\ \ dx\ = F''(x)\ \ dx,$ dado que la diferencial de una función es igual a la derivada de la misma, multiplicada por la diferencial de la variable independiente. Calculemos ahora la siguiente integral:

$$\int d\,[f(x)] = \int f'(x)\ \ dx = \int F''(x)\,dx$$

pero resulta que: $\int F''(x)\,dx = F'(x) + C \Leftrightarrow D\,[\,F'(x) + C] = F''(x)$

y como por la definición de integral resulta que: $f(x) = F'(x)$

por carácter transitivo podemos afirmar: $\boxed{\int d\,[f(x)] = f(x) + C}$

es decir:

"La integral de la diferencial de una función resulta igual a la misma función más la constante de integración"

Ejemplo: Sea: $f(x) = sen\ x$ resultará $d\,[\,f(x)\,] = cos\ x\ \ \ dx$

Por lo tanto: $\int d\,[f(x)] = \int cos\ x\ \ \ dx\ = sen\ x + C\ \ =\ f(x) + C$

3.3. Integral de una suma de funciones

Por la definición de integral indefinida resulta que:

$$\int f(x)\ \ dx\ = F(x) + C \Leftrightarrow D\,[F(x) + C] = F'(x) = f(x)$$

Si consideramos ahora la suma de dos funciones: $F(x) = G(x) + H(x)$
su derivada será: $F'(x) = G'(x) + H'(x)$

Teniendo en cuenta que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de ellas, y además: $F'(x) = f(x)$ entonces, $f(x) = G'(x) + H'(x)$ **(1)**
si llamamos:

$g(x) = G'(x)$ entonces $G(x)$ es primitiva de $g(x)$

y $h(x) = H'(x)$ entonces $H(x)$ es primitiva de $h(x)$ **(2)**

reemplazando en (1) resulta: $f(x) = g(x) + h(x)$; por lo tanto, si calculamos la integral indefinida resultará:

$$\int f(x)\,dx = \int [g(x) + h(x)]\,dx = F(x) + C = [G(x) + H(x)] + C$$

es decir: $\int [g(x) + h(x)]\,dx = G(x) + H(x) + C$ **(3)**

Teniendo en cuenta lo expresado en (2) resulta que:

$$\begin{array}{rl} & \int g(x)\,dx = G(x) + C_1 \\ + & \\ & \int h(x)\,dx = H(x) + C_2 \\ \hline & \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx = G(x) + H(x) + C_1 + C_2 \end{array}$$

resultado que obtenemos sumando miembro a miembro las dos igualdades, que por supuesto da otra igualdad. Además, si consideramos que la suma de dos constantes da siempre otra constante, podemos hacer: $C = C_1 + C_2$

donde resulta: $\int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx = G(x) + H(x) + C$ *(4)*

Si comparamos ahora las expresiones (3) y (4) resulta que los segundos miembros de ambas son iguales, por lo tanto, también tienen que ser iguales los primeros miembros, es decir:

$$\int [g(x) + h(x)]\,dx = \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx$$

por lo tanto:

"La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de dichas funciones"

Ejemplo: $\int (x^3 + x^2)\,dx = \int x^3\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$

3.4 <u>Integral de una constante por la función</u>

Por definición de integral indefinida resulta:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Sea: $F(x) = k\,G(x)$ donde $\boldsymbol{k}$ es una constante cualquiera que pertenece al conjunto de los números reales. Si derivamos ambos miembros resultará: $F'(x) = K\,G'(x)$

Dado que la derivada de una función multiplicada por una constante es igual a la constante por la derivada de la función.
Si además consideramos: $G'(x) = g\,(x)$, entonces $G\,(x)$ es una primitiva de $g\,(x)$.
SI tenemos en cuenta las igualdades vistas anteriormente, podemos decir que:

$$F'(x) = k\,G'(x) = k\,g\,(x) = f\,(x)$$

Si calculamos ahora la integral siguiente, resultará:

$$\int f\,(x)\;dx = \int k\,g\,(x)\;dx = F\,(x) + C = k\,G\,(x) + C \qquad (1)$$

y además: $\int g\,(x)\;dx\; = G\,(x) + C_1$ por ser $G\,(x)$ una primitiva de $g\,(x)$
multiplicando ambos miembros de esta igualdad por k, la misma se mantendrá, es decir:

$$k\int g\,(x)\;dx\; = k\;[G\,(x) + C_1\,] = k\,G\,(x) + k\,C_1$$

reemplazando $k\;C_1\; = C$ por ser ambas constantes de integración, la expresión anterior quedará:

$$k\int g\,(x)\;dx = k\;G(x) = C \qquad (2)$$

Si comparamos las expresiones (1) y (2), los últimos miembros de ambas son iguales, por lo tanto, por carácter transitivo también lo serán los primeros miembros, y entonces:

$$\boxed{\int k\;g\,(x)\;dx\; = \;k\int g\,(x)\;dx}$$

es decir:

"La integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función"

Ejemplo: $\int 3\;sen\;x\;dx = 3\int sen\;x\;dx = -\,3\;cos\;x + C$

4.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Como ya hemos mencionado, no siempre la integral de una función nos da una función elemental conocida y además, no siempre la función a integrar responde a algunas de las integrales llamadas inmediatas. En este último caso, es necesario aplicar algunos de los métodos que veremos a continuación. Los mismos representan técnicas adicionales, aplicables en algunos de los casos, para tratar de llevar la expresión a integrar a una forma inmediata o de más fácil resolución.
En general, los métodos se basan en propiedades de las funciones de las integrales que ya hemos considerado anteriormente.

4.1 Integración por Descomposición - Linealidad de la Integración

Este método se basa en las propiedades de las integrales vistas anteriormente en los puntos 3.3 y 3.4:

$$\int [f\,(x) + g\,(x)]\;dx\; = \;\int f\,(x)\,dx + \;\int\; g\,(x)\,dx$$

$$\int k\;\;f\,(x)\;\;dx\; = k\int f(x)\;\;dx$$

Su aplicación principal, aunque se usa en otros casos también, es en las funciones de tipo polinómicas. Consideremos, por ejemplo, el siguiente polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + ... + a_n\, x^n$$

calculamos su integral: $\int P(x)\, dx = \int (a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n\, x^n)\, dx$

al aplicar las propiedades vistas anteriormente, resulta:

$$\int P(x)\, dx = a_0 \int dx + a_1 \int x\, dx + a_2 \int x^2\, dx + ... + a_n \int x^n\, dx =$$

con lo cual se logra una serie de integrales de fácil resolución. Es decir:

$$\int P(x)\, dx = a_0\, x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + ... + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

lo que nos permitió resolver el problema.

Veremos a continuación un ejemplo de aplicación del método que nos permitirá entender mejor el problema. Calcularemos: $I = \int \frac{x^3 + 3\sqrt{x} - 6}{x}\, dx = \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{6}{x} \right) dx =$

$$\int \left(x^2 + 3\, x^{1/2}\, x^{-1} - \frac{6}{x} \right) dx =$$

aplicando descomposición, resulta:

$$I = \int x^2\, dx + 3 \int x^{-1/2}\, dx - 6 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 6\sqrt{x} - 6\, \ln x + C$$

con lo cual hemos logrado resolver la integral.

4.2 Integración por Sustitución

Este método es también conocido como "Integración por la Regla de la Cadena", por similitud a la regla de la cadena utilizada en derivadas de funciones compuestas.
Este método se aplica, en general, cuando tenemos que integrar una función de función (o función compuesta).

Consideremos dos funciones derivables: $y = F(u) \quad \wedge \quad u = g(x) \quad \Rightarrow \quad y = F[g(x)]$
derivando, para lo cual hay que aplicar la regla de la cadena, resulta que: $y' = F'(u)\, .\, g'(x)$
si además: $F(u)$ es primitiva de $f(u)$ entonces $F'(u) = f(u)$, de donde:
$y' - F'(u)\, .\, g'(x) = f(u)\, .\, g'(x) = f[g(x)]\, .\, g'(x)$

Ahora bien, si tenemos una integral del tipo: $\int f\, [g(x)]\, .\, g'(x)\, dx$

y teniendo en cuenta que: $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\, dx$

reemplazando en la integral:

$$\int f\, [g(x)]\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F\, [g(x)] + C$$

que nos ha permitido resolverla.

A continuación presentamos una serie de ejemplos que nos permitirá apreciar la mayoría de los casos que se resuelven aplicando el método de integración por sustitución:

a) $\int \cos ax \ dx =$

si llamamos $u = ax \Rightarrow du = a \ dx \Rightarrow \frac{du}{a} = dx$

entonces: $\int \cos ax \, dx = \int \cos u \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \cos u \ du = \frac{1}{a} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax + C$

b) $\int \sqrt{3x+2} \ dx =$

si llamamos $u = 3x + 2 \Rightarrow du = 3 \ dx \Rightarrow \frac{du}{3} = dx$

entonces: $\int \sqrt{3x+2} \ dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^{1/2} \ du =$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} u^{3/2} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+2)^3} + C$$

c) $\int (ax - b)^3 \ dx =$

si llamamos $u = ax - b \Rightarrow du = a \ dx \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$

realizando la sustitución: $\int (ax-b)^3 \ dx = \int u^3 \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int u^3 \ du = \frac{u^4}{4a} + C = \frac{(ax-b)^4}{4a} + C$

d) $\int \frac{2x \ dx}{(3x^2+5)^5} =$

si llamamos: $u = 3x^2 + 5 \Rightarrow du = 6x \ dx \Rightarrow x \ dx = \frac{du}{6}$ sustituyendo:

$$\int \frac{2x \ dx}{(3x^2+5)^5} = \int \frac{2 \frac{du}{6}}{u^5} = \frac{1}{3} \int u^{-5} \ du = \frac{1}{3} \frac{u^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{12 u^4} + C = -\frac{1}{12(3x^2+5)^4} + C$$

e) $\int e^{-5x} \ dx$

si llamamos: $u = -5x \Rightarrow du = -5 \ dx \Rightarrow dx = -\frac{dx}{5}$

realizando la sustitución: $\int e^{-5x} \ dx = \int e^u \left(-\frac{du}{5} \right) = -\frac{1}{5} \int e^u \ du = -\frac{1}{5} e^u + C = -\frac{1}{5} e^{-5x} + C$

f) $\int \frac{3x^3 \ dx}{(x^2-2)^2}$

si llamamos: $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2x \ dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x \ dx$

donde: $x^2 = u + 2$, por lo tanto: $\int \frac{3\,x^3\,dx}{(x^2-2)^2} = 3\int \frac{x^2\;x\,dx}{(x^2-2)^2} = 3\int \frac{(u+2)\frac{du}{2}}{u^2} =$

$= \frac{3}{2}\int \frac{u+2}{u^2}\,du =$ y podemos aplicar el método de descomposición visto anteriormente:

$$= \frac{3}{2}\left[\int \frac{u\,du}{u^2} + 2\int \frac{du}{u^2}\right] = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int u^{-2}\,du = = \frac{3}{2}\ln u + 3\,\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2-2) - \frac{3}{x^2-2} + C$$

g) $\int \frac{x^5\;dx}{(x^2-1)^3} =$

si llamamos $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x\;dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\;dx$

además: $x^2 = u + 1 \Rightarrow x^4 = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$

sustituyendo: $\int \frac{x^5\;dx}{(x^2-1)^3} = \int \frac{(u^2+2u+1)\frac{du}{2}}{u^3} = \frac{1}{2}\left[\int \frac{u^2}{u^3}\,du + 2\int \frac{du}{u^2} + \int \frac{du}{u^3}\right] =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int u^{-2}\,du + \frac{1}{2}\int u^{-3}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\;\ln u + \frac{u^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\,\frac{u^{-2}}{-2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\;\ln u - \frac{1}{u} - \frac{1}{4\,u^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\;\ln(x^2-1) - \frac{1}{(x^2-1)} - \frac{1}{4\,(x^2-1)^2} + C$$

4.3 <u>Integración por partes</u>

Es una técnica que se utiliza para transformar una integral a formas más sencillas que la dada originalmente y así poder resolverla. Su justificación se basa en el cálculo de la diferencial de un producto de dos funciones, es decir:

$d\,(u\,.v)$ donde $u = u\,(x) \wedge v = v\,(x)$ es igual a:

$$d\,(u\,.v) = D\,(u\,.\,v)\,dx = (u'v + v'\,u)\;dx = v\,u'\,dx + \;u\,v'\,dx$$

y si tenemos en cuenta que:

$u = u\,(x) \Rightarrow\; du = u'\,dx$

$v = v\,(x) \Rightarrow\; dv = v'\,dx$

Reemplazando: $d\,(u\,.\,v) = v\,du + u\,dv$

De donde: $u\,dv = d\,(u\,.\,v) - v\;\;du$

Si integramos ambos miembros y aplicamos propiedades de la integral indefinida, tendremos:

$$\int u\;\;dv = \int d\,(u\,.v) - \int v\,du = u\,.\,v - \int v\,du$$

Luego, la fórmula a utilizar:

$$\boxed{\int u\,dv = u\,.\,v - \int v\,du}$$

En general puede decirse que: "La integral del producto de una función por la diferencial de otra, es igual al producto de ambas funciones menos la integral de la segunda por la diferencial de la primera función".
Aparentemente deben existir don funciones para poder aplicar el método, pero resulta que también es aplicable, como veremos en los ejemplos, a los casos de funciones trascendentes cuyas derivadas son algebraicas, como por ejemplo, la función $y = ln\ x$ cuya derivada es $y' = \dfrac{1}{x}$, y en ese caso: $\int ln\ x\ dx$ se puede resolver por el método de integración por partes, aunque parece una sola función, pero realmente son dos, es decir:

$$u = ln\ x \quad \wedge \quad v = x \quad \Rightarrow dv = dx$$

Asimismo, siempre debe descomponerse la diferencial dada en dos funciones (*u* y *dv*) y la mayor dificultad del método estriba en que no pueden darse instrucciones precisas para la elección de las mismas, sino solamente algunas indicaciones como las siguientes:

- El *dx* está siempre presente en *dv*
- Debe resultar posible integrar *dv* (aunque no siempre sea una integral inmediata)
- Cuando se deba integrar el producto de dos funciones, generalmente es mejor elegir la forma más complicada (aparentemente) como parte del *dv*.

Veamos el siguiente ejemplo. Primero lo resolveremos eligiendo correctamente los factores y luego haremos la elección incorrecta de los mismos para que se vea como aparece una segunda integral más difícil de resolver, que la primera.
Consideremos: $\int x\, e^x\ dx$
si elegimos: $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x\ dx = e^x$$

de donde: $\int x\, e^x\ dx = x\, e^x - \int e^x\ dx = x\, e^x - e^x + C$

Nótese que la constante de integración "*C*" recién fue colocada al finalizar con las integraciones y no en el cálculo de las integrales intermedias, es decir, al calcular la $\int dv$; esto se hace, ya que, como veremos a continuación, el uso de la constante intermedia dan el mismo resultado que si la colocamos al final. Como ejemplo calcularemos la misma integral anterior, utilizando todas las constantes de integración, es decir: $\int x\, e^x\ dx =$
si elegimos: $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x\ dx = e^x + C_1$$

donde resulta:

$$\int x\, e^x\ dx = x\,(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1)\, dx =$$
$$= x\, e^x + x\, C_1 - \int e^x\ dx - C_1 \int dx =$$
$$= x\, e^x + x\, C_1 - e^x + C_2 - x\, C_1 + C_3 =$$
$$= x\, e^x - e^x + C_2 + C_3 = x\, e_x - e_x + C$$

Teniendo en cuenta que la suma de dos constantes es otra constante: $C_2 + C_3 = C$

Con lo que se puede comprobar que el resultado obtenido es el mismo que el logrado colocando la constante al finalizar todas las integraciones.

Veremos a continuación la manera incorrecta de resolverla: $\int e^x \; x \; dx =$

si elegimos: $u = e^x \Rightarrow du = e^x \; dx$

$$dv = x \; dx \;\Rightarrow v = \int dv = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

donde resulta: $\int e^x \; x \; dx = e^x \, \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x \; dx = \frac{e^x \; x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \; e^x \; dx$

Podemos observar que la integral que nos queda es más complicada que la original y este hecho nos indica que la elección es incorrecta.

Ejemplos:

a.- $\int ln \, x \; dx =$

si: $u = ln \; x \;\Rightarrow\; du = \dfrac{du}{x}$

$dv = \; dx \;\Rightarrow v = \int dv = \int dx = x$

entonces:

$$\int ln \, x \; dx = x \, ln \, x - \int x \frac{dx}{x} = x \, ln \, x - \int \; dx =$$

$$= x \, ln \, x - x + C = x \, (l - ln \, x) + C$$

b.- $\int arc \, tg \; x \; dx =$

si: $u = arc \; tg \, x \; dx = \;\Rightarrow\; du = \dfrac{dx}{1 + x^2}$

$dv = dx \;\Rightarrow\; v = \int dv = \int dx = x$

entonces: $\int arc \, tg \; x \; dx = x \, arc \, tg \; x - \int \dfrac{x \; dx}{1 + x^2} =$

y esta última integral la resolvemos por sustitución:

$$w = 1 + x^2 \;\Rightarrow dw = 2 \, x \; dx \Rightarrow x \; dx = \frac{dw}{2}$$

de donde:

$$\int \frac{x \; dx}{1 + x^2} = \int \frac{\frac{dw}{2}}{w} = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \, ln \, w + C =$$

$$\frac{1}{2} \; ln \; (1 + x^2 \,)$$

reemplazando resulta: $\int arc \, tg \; x \; dx = x \, arc \, tg \; x - \dfrac{1}{2} \, ln \, (1 + x^2 \,) + C$

c.- $\int cos^2\ x\ dx = \int cos\ x\ cos\ x\ dx =$

si: $u = cos\ x \Rightarrow du = -sen\ x\ dx$

$dv = cos\ x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int cos\ x\ dx = sen\ x$

entonces: $\int cos^2\ x\ dx = cos\ x\,.\,sen\ x + \int sen^2\ x\ dx =$

como: $sen^2\ x = 1 - cos^2\ x$

reemplazamos y resulta:

$$\int cos^2\ x\ dx = cos\ x\ sen\ x + \int (1 - cos^2 x)\, dx =$$

$$= cos\ x\ sen\ x + \int dx - cos^2\ x\ dx$$

resolviendo: $2\int cos^2\ x = cosx\ sen\ x + x$

luego: $\int cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x + cos\ x\,.\,sen\ x) + C$

d.- $\int x^2\ sen\ x\ dx$

si: $u = x^2 \Rightarrow du = 2\ x\ dx$

$dv = sen\ x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int sen\ x\ dx = -\ cos\ x$

entonces:

$$I = \int x^2\ sen\ x\ dx = -\ x^2\ cos\ x + \int 2x\ cos\ x\ dx =$$

$$= -\ x^2\ cos\ x - 2\int x\ cos\ x\ dx =$$

Debemos calcular la última integral que, si bien no es inmediata, también puede resolverse por partes, siendo más simple que la integral inicial, es decir:

$\int x\ cos\ x\ dx =$

si: $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = cos\ x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int cos\ x\ x\ dx = sen\ x$

entonces: $\int x\ cos\ x\ dx = x\ sen\ x + cos\ x$

y reemplazando en la integral I tendremos que:

$$I = \int x^2\ sen\ x\ dx = -\ x^2\ cos\ x + 2\,(x\ sen\ x + cos\ x) + C$$

5.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS RACIONALES FRACCIONARIAS

Analizaremos la integración de funciones del tipo: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Tanto *P(x)* como *Q(x)* son polinomios de "x": Por ejemplo:

$$P(x) = a_0 + a^1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + ... + a_n x^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1\ x + b_2\ x^2 + b_3\ x^3 + ... + b_m x^m$$

Donde el grado del polinomio *P(x)* es "n" y el de *Q(x)*, "m". Entonces la función:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n\, x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + ... + b_m x^m}$$

recibe el nombre de "fracción racional fraccionaria"
Comparando los grados de ambos polinomios puede resultar que: $n \geq m$. En ese caso la función recibe el nombre de fraccionaria impropia. Si $n < m$, la función es fraccionaria propia.

Los métodos que analizaremos a continuación están referidos a funciones fraccionarias propias, pero en el caso de no serlo, se podrán convertir mediante una fácil operación algebraica. Para ello y, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del denominador, podemos efectuar la división, con lo cual obtendremos un resultado que llamaremos *C(x)* y un Resto *R (x)*; donde ambos son polinomios de "x", es decir:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q\,(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C\,(x) \end{array}$$

El grado de *R(x)* debe ser menor que el de *Q(x)*, caso contrario, la división está incompleta y debemos continuar hasta que esto ocurra.

Por la definición de cociente resulta: $P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$
Si dividimos ambos miembros por *Q(x)* nos queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)\,.\,C(x) + R(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)\,.\,C(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Hemos convertido la función fraccionaria impropia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en la suma de un polinomio *C(x)* y una función fraccionaria propia, donde el grado del numerador es menor que el del denominador, $\frac{R(x)}{Q(x)}$

Por lo tanto, si tenemos: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, donde el grado de *P(x)* es mayor que el de *Q(x)*, podemos convertirla en:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

y la $\int C(x)\, dx$ es de fácil resolución como hemos visto en el método de integración por descomposición, quedando por resolver la integral: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ que es la de una función racional propia.
Los casos que analizaremos, son todos referidos a funciones racionales propias y difieren entre si en el tipo de raíces que tiene el polinomio del denominador, es decir *Q(x)*, y los podemos clasificar en:

a) Raíces del denominador reales simples o ceros reales simples.
b) Raíces del denominador reales múltiples o combinación de raíces reales múltiples y simples.
c) Raíces del denominador imaginarias (complejos conjugados).

A continuación resolveremos los dos primeros casos, ya que el tercero corresponde a una integración en el campo complejo, que evade los temas tratados en este trabajo.

5.1 <u>Raíces Reales Simples o Ceros Reales Simples</u>

Si el polinomio del denominador tiene grado "m" tendrá "m" raíces y si son simples, serán todas distintas, es decir: $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \ldots \neq x_m$

Aplicando la descomposición del polinomio en factores binomiales, resulta:

$$Q(x) = b_m\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2)\ldots(x - x_m)$$

Consideremos además que $b_m = 1$, donde el coeficiente del término de mayor grado de $Q(x)$ es igual a uno. Si esto no ocurre, se podemos hacer lo siguiente:

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{b_m} = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)\; Q(x) = b_m\; Q_1(x)$$

obteniendo así un nuevo polinomio $Q_1(x)$ cuyas raíces son iguales a las de $Q(x)$ y que tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a uno. Por consiguiente, la integral nos queda:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{P(x)}{b_m Q_1(x)}\,dx = \frac{1}{b_m}\int \frac{P(x)}{Q_1(x)}\,dx$$

donde el coeficiente del término de mayor grado del nuevo polinomio es igual a uno, con lo cual podemos afirmar que al resolver la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ considerando $b_m = 1$, y no quitamos generalidad al problema.

Si hacemos: $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)} = \frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_2)} + \frac{C}{(x - x_3} + \ldots + \frac{M}{(x - x_m)}$$

efectuamos la descomposición de la función fraccionaria en una suma de fracciones simples, donde *A, B, C,..,M,* son constantes que debemos determinar.
Si en la expresión anterior, efectuamos el pasaje de $Q(x)$ al otro miembro, resulta:

$$P(x) = \frac{A\,Q(x)}{x - x_1} + \frac{B\,Q(x)}{x - x_2} + \frac{C\,Q(x)}{x - x_3} + \ldots + \frac{M\;Q(x)}{x - x_m}$$

y reemplazando $Q(x)$ por el producto de sus factores binomiales, tenemos:

$$P(x) = \frac{A\,(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{x - x_1} + \frac{B(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{x - x_2} + \ldots + \frac{M\,(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{x - x_m} =$$

simplificando:

$$P(x) = A(x - x_2)\ldots(x - x_m) + B(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_m) + \ldots + M(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{m-1})$$

A partir de esta expresión, para calcular las constantes podemos usar dos procedimientos que nos permitirán obtener idénticos resultados.

Uno de los procedimientos es el siguiente:

Hacemos $x = x_1$ tenemos:

$$P(x_1) = A(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_m) + + B(x_1 - x_1)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_m) + \dots +$$
$$+ M(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_{m-1}) =$$

y si se observa, salvo el primer término, todos los demás poseen un factor $(x_1 - x_1)$ que es igual a cero, por lo tanto, se anulan y nos queda solamente: $P(x_1) = A(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_m)$

Donde: $$A = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_m)}$$

De manera similar, si hacemos $x = x_2$:

$$P(x_2) = A(x_2 - x_2)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_m) + B(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_m) + \dots +$$
$$+ M(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)\dots(x_2 - x_{m-1}) =$$

De igual manera que en el caso anterior, tendremos factores $(x_2 - x_2)$ que resultan iguales a cero y nos queda: $P(x_2) = B(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_m)$

Donde: $$B = \frac{P(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_m)}$$

y así sucesivamente, haciendo:

$x = x_3$

$x = x_4$

$\vdots$

$x = x_{m-1}$

hasta llegar a $x = x_m$ donde:

$$P(x_m) = A(x_m - x_2)(x_m - x_3)\dots(x_m - x_m) + B(x_m - x_1)(x_m - x_3)\dots(x_m - x_m) + \dots +$$
$$+ M(x_m - x_1)(x_m - x_2)\dots(x_m - x_{m-1}) =$$

Donde: $$M = \frac{P(x_m)}{(x_m - x_1)(x_m - x_2)\dots(x_m - x_{m-1})}$$

con lo cual hemos calculado los valores de las constantes: *A, B,...,M* y por lo tanto podemos resolver la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left[\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots + \frac{M}{x - x_m} \right] dx =$$

aplicando el método de descomposición y propiedades de la integral, resultará:

$$= A\int \frac{dx}{x - x_1} + B\int \frac{dx}{x - x_2} + ... + M\int \frac{dx}{x - x_m} =$$

de esta manera nos quedarán "m" integrales del tipo:

$\int \frac{dx}{x - x_i}$ que debemos calcular por sustitución, es decir:

si $u = x - x_i \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int \frac{dx}{x - x_i} = \int \frac{du}{u} = ln\, u + C = ln(x - x_i) + C$

por lo tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = A\, ln(x - x_1) + B\, ln(x - x_2) + ... + M\, ln(x - x_m) + C_i =$$

y aplicando propiedades de los logaritmos resultará:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = ln\left[(x - x_1)^A (x - x_2)^B ...(x - x_m)^M\right] + Ci$$

con lo cual se ha resuelto la integral.

El otro procedimiento es más general, ya que el que hemos visto anteriormente nos sirve únicamente para el caso de raíces simples, en cambio este no solo sirve para ese caso, sino que también para los de raíces múltiples o combinación de raíces simples y múltiples. Se denomina: "Método de los Coeficientes Indeterminados" y se basa en que, a partir de:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + ... + \frac{M}{x - x_m}$$

podemos llegar a:

$$P(x) = A(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_m) + +B(x - x_1)(x - x_3)...(x - x_m) + ... +$$
$$+ M(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{m-1}) =$$

Si resolvemos esta igualdad llegaremos a una de polinomios en "x" y por una propiedad de la igualdad de los mismos, los coeficientes de igual grado de "x" tienen que resultar iguales y, entonces esto nos permite formular un sistema de "m" ecuaciones con "m" incógnitas que son: *A*, *B*, *C*,...,*M*, que podemos resolver mediante alguno de los métodos para el cálculo de sistemas de ecuaciones, con lo cual obtendremos los valores de las constantes.
Luego de esto, se puede calcular la integral siguiendo el mismo procedimiento anterior.
A continuación veremos un ejemplo, que los resolveremos aplicando ambos procedimientos:

Se desea calcular: $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x}\, dx =$

Donde: $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $\quad y\ Q(x) = x^3 - x$

si calculamos las raíces del polinomio denominador:

$Q(x) = x^3 - x = 0$, entonces:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 - 1 = 0$$

y el conjunto solución de las raíces de $Q(x)$ será: $\{x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1\}$

por lo tanto: $Q(x) = x\,(x-1)\,(x+1)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$$

Donde: $2x^2 - 3x + 1 = A(x-1)(x+1) + B\,x(x+1) + C\,x(x-1)$

si $x = 0$, entonces:

$$2(0)^2 - 3(0) + 1 = A(0-1)(x+1) + B(0)(0+1) + C(0)(0-1) \Rightarrow 1 = A(-1)(1) \Rightarrow \underline{A = -1}$$

si $x = 1$, entonces:

$$2(1) - 3(1) + 1 = A(1-1)(1+1) + B(1)(1+1) + C(1)(1-1) \Rightarrow 2 - 3 + 1 = 2B \Rightarrow 0 = 2B \Rightarrow \underline{B = 0}$$

si $x = -1$, entonces:

$$2(-1) - 3(-1) + 1 = A(-1-1)(-1+1) + B(-1)(-1+1) + C(-1)(-1-1) \Rightarrow 2 + 3 + 1 = C(-1)(-2) \Rightarrow 6 = 2C \Rightarrow \underline{C = 3}$$

con lo cual hemos calculado los tres coeficientes.

De otra manera y teniendo en cuenta que: $2x^2 - 3x + 1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + C\,x(x-1)$
operando:

$$2x^2 - 3x + 1 = A(x^2 - 1) + B(x^2 + x) + C(x^2 - x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = x^2(A + B + C) + x\,(B - C) - A$$

si igualamos los coeficientes de igual grado de "x", tendremos: $\begin{cases} 2 = A + B + C \\ -3 = B - C \\ 1 = -A \end{cases}$

que resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que podemos resolver por alguno de los métodos conocidos.

Aplicaremos sustitución. Si consideramos la tercera ecuación, resulta: $\underline{A = -1}$.

Si reemplazamos este valor en la primera, tendremos: $-1 + B + C = 2 \Rightarrow B + C = 3 \Rightarrow B = 3 - C$
y reemplazando en la segunda: $-3 = (3 - C) - C \Rightarrow -6 = -2C \Rightarrow \underline{C = 3}$
por lo tanto, como: $B = 3 - C \Rightarrow B = 3 - 3 \Rightarrow B = 0$

Hemos calculado los coeficientes. Podemos ahora resolver la integral.
Entonces:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x}\,dx = -1\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x+1} = -1\ln x + 3\ln(x+1) + Ci =$$

$$= \ln[x^{-1}.(x+1)^3] + Ci = \ln\left[\frac{(x+1)^3}{x}\right] + Ci$$

5.2 Raíces Reales Múltiples o Combinación de Reales Múltiples y Simples

Consideremos *Q(x)* un polinomio de grado "m" y : m = h + k + s

y que además las raíces de *Q(x)* son:

x_1 múltiples h veces

x_2 múltiples k veces

x_3 múltiples s veces

Asimismo: $b_m = 1$

Caso contrario operamos de igual forma que en el punto anterior (5.1). Entonces resulta:

$$Q(x) = (x - x_1)^h (x - x_2)^k (x - x_3)^s$$

efectuamos la descomposición siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x-x_1)^h} + \frac{A_1}{(x-x_1)^{h-1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{h-2}} + \dots + \frac{A_{h-1}}{(x-x_1)} +$$

$$+ \frac{B_0}{(x-x_2)^k} + \frac{B_1}{(x-x_2)^{k-1}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{k-2}} + \dots + \frac{B_{k-1}}{(x-x_2)} +$$

$$+ \frac{C_0}{(x-x_3)^s} + \frac{C_1}{(x-x_3)^{s-1}} + \frac{C_2}{(x-x_3)^{s-2}} + \dots + \frac{C_{s-1}}{(x-x_3)} =$$

Luego, procedemos de manera similar a lo utilizado en el desarrollo de raíces reales simples, es decir, "pasamos" *Q(x)* al otro miembro, multiplicamos y realizamos las simplificaciones correspondientes.
Como en el caso anterior veremos dos formas de obtener los coeficientes.

Una, operando de manera similar al de raíces simples, utilizando el "Método de los Coeficientes Indeterminados". Efectuamos las operaciones en el segundo miembro de la igualdad y sacamos factores comunes los distintos grados de "x", obteniendo así un polinomio que es igual a *P(x)* y por propiedad de estos, para ser iguales, los coeficientes de los términos de igual grado también deben ser iguales, lo que nos permite obtener un sistema de ecuaciones (m) con la misma cantidad de incógnitas, que resolviendo obtenemos los coeficientes, que son las incógnitas.

El otro Método, llamado "Método de las Derivadas", consiste en que, luego de multiplicar ambos miembros por *Q(x)* se procede a dar a "x" los valores de las raíces, en nuestro caso x_1, x_2 y x_3; con lo cual obtendremos los coeficientes de subíndice cero $(A_0, B_0$ y $C_0)$.

Luego procedemos a derivar ambos miembros de la igualdad y dar nuevamente a "x" los valores de las raíces, obteniendo así los coeficientes de subíndice uno $(A_1, B_1$ y C_1 *en nuestro ejemplo).*
Si continuamos con las derivadas sucesivas, tantas veces como haga falta, obtendremos todos los coeficientes.
A continuación veremos un ejemplo, que resolveremos aplicando ambos procedimientos.

Se desea calcular la siguiente integral: $\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2(x-2)}\,dx =$

En este ejemplo nos dan las raíces del denominador ya calculadas, lo que nos facilita el trabajo, pero que no invalida la generalidad de los métodos, ya que obtener las raíces de un polinomio es un problema meramente algebraico.
Como el polinomio del denominador es de grado 3 debe tener tres raíces, que son:

$$x_1 = x_2 = 1 \quad \text{raíz múltiple, de orden de multiplicidad dos}$$
$$x_3 = 2 \qquad \text{raíz simple}$$

Teniendo en cuenta esto, hacemos la siguiente descomposición:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_0}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{B_0}{(x-2)}$$

Resolvemos primero por el método de los coeficientes indeterminados.

$$3x^2 - 6x + 2 = A_0(x-2) + A_1(x-1)(x-2) + B(x-1)^2$$

si resolvemos el segundo miembro obtendremos:

$$3x^2 - 6x + 2 = A_0 x - 2A_0 + A_1 x^2 - 3A_1 x + 2A_1 + Bx^2 - 2Bx + B$$

y sacando factores comunes:

$$3x^2 - 6x + 2 = x^2(A_1 + B) + x(-3A_1 - 2B + A_0) + (-2A_0 + 2A_1 + B)$$

por lo tanto:
$$\begin{cases} A_1 + B = 3 \\ A_0 - 3A_1 - 2B = -6 \\ -2A_0 + 2A_1 + B = 2 \end{cases}$$

lo que resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:
A_0, A_1 y B que podemos resolver por cualquiera de los métodos conocidos. Lo hacemos por determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (4+2) - (6+1) = 6 - 7 = -1$$

$$\Delta A_0 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-9 - 4 - 12) - (-6 - 12 - 6) = 14 - 15 = -1$$

$$\Delta A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (12+2) - (12+3) = 14 - 15 = -1$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (12+6) - (18+2) = 18 - 20 = -2$$

por lo tanto:

$$A_0 = \frac{\Delta A_0}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$A_1 = \frac{\Delta A_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$B = \frac{\Delta B}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Hemos calculado los coeficientes. Sólo nos resta integrar.
Si aplicamos ahora el método de las derivadas resulta que, teniendo en cuenta la igualdad arribada al comenzar el otro método, tendremos:

$$3x^2 - 6x + 2 = A_0(x-2) + A_1(x-1)(x-2) + B(x-1)^2$$

si hacemos $x = 1$:

$$3(1)^2 - 6(1) + 2 = A_0(1-2) + A_1(1-1)(1-2) + B(1-1)^2 \Rightarrow 3 - 6 + 2 = A_0(-1) \Rightarrow -1 = -A_0 \Rightarrow A_0 = 1$$

si hacemos: $x=2$:

$$3(2)^2 - 6(2) + 2 = A_0(2-2) + A_1(2-1)(2-2) + B(2-1)^2 \Rightarrow 12 - 12 + 2 = B(1) \Rightarrow B = 2$$

derivamos ambos miembros de la igualdad:

$$6x - 6 = A_0 + A_1(x-2) + A_1(x-1) + 2B(x-1)$$

hacemos nuevamente $x = 1$, entonces:

$$6(1) - 6 = A_0 + A_1(1-2) + A_1(1-1) + 2B(1-1) \Rightarrow 6 - 6 = A_0 + A_1(-1) \Rightarrow B = A_0 - A_1 \Rightarrow A_0 = A_1 \Rightarrow A_1 = 1$$

y obtenemos nuevamente los coeficientes.

Ahora para resolver el ejercicio nos resta calcular las integrales:

$$\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2 (x-2)} dx = \int \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{x-2} \right] dx =$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x-2} dx =$$

las calculamos por separado:

$\int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx =$ Resolvemos aplicando el método de sustitución:

si $u = x - 1 \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}\, du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = \frac{1}{x-1}$

Las otras dos integrales son similares a las realizadas para el caso de raíces simples y dan como resultado siempre logaritmos neperianos. Por lo tanto:

$$\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2(x-2)}\, dx = -\frac{1}{x-1} + ln\,(x-1) + 2\,ln\,(x-2) + C =$$

$$= -\frac{1}{x-1} + ln\left[(x-1)(x-2)^2\right] + C$$

6.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El cálculo de integrales de funciones trigonométricas, salvo el caso en que resultan inmediatas, se realiza utilizando el método de integración por sustitución, aunque como veremos, algunas veces hay que efectuar previamente algunos artificios matemáticos.
Resolvemos las integrales de todas las funciones trigonométricas:

$\int sen\, x\, dx = -cos\, x + C$ (integral inmediata)

$\int cos\, x\, dx = sen\, x + C$ (integral inmediata)

$\int tg\, x\, dx =$

Sabemos que: $tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$. Reemplazamos: $\int tg\, x\, dx = \int \frac{sen\, x}{cos\, x}\, dx$; donde podemos aplicar el método de integración por sustitución:

$u = cos\, x \Rightarrow du = -\,sen\, x\, dx \Rightarrow -\,du = sen\, x\, dx$, entonces:

$$\int \mathrm{tg\ x\ dx} = \int -\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}} = -\ln \mathrm{u} + \mathrm{C} = -\ln(\cos \mathrm{x}) + \mathrm{C}$$

$\int \mathrm{ctg\ x\ dx} =$

esta integral es similar a la anterior y en ella debemos reemplazar: $ctg\, x = \frac{cos\, x}{sen\, x}$

de lo que resulta: $\int ctg\, x\, dx = \int \frac{cos\, x}{sen\, x}\, dx$

y para sustituir hacemos: $u = sen\, x \Rightarrow du = cos\, x\, dx$

entonces: $\int \mathrm{ctg\ x\ dx} = \int \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}} = \ln \mathrm{u} + \mathrm{C} = \ln(\mathrm{sen\ x}) + \mathrm{C}$

$\int \mathrm{sec\ x\ dx} =$

En este caso es necesario utilizar previamente un artificio matemático. El mismo consiste en multiplicar numerador y denominador por: *sec x + tg x*

$$\int \mathrm{sec\ x\ dx} = \int \left[\mathrm{sec\ x}\left(\frac{\mathrm{sec\ x + tg\ x}}{\mathrm{sec\ x + tg\ x}}\right)\right] \mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{sec^2 x + tg\ x\ sec\ x}}{\mathrm{sec\ x + tg\ x}}\, \mathrm{dx} =$$

Hacemos la siguiente sustitución:

$u = sec\ x + tg\ x \quad \Rightarrow \quad du = (sec^2\ x + tg\ x\ sec\ x)\ dx$

$$u = \int \sec x\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx =$$

De manera similar al caso anterior multiplicamos y dividimos por: $cosec\ x - ctg\ x$

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \left[\operatorname{cosec} x \left(\frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x} \right) \right] dx = \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x\,.\operatorname{tg} x}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x}\, dx =$$

En este caso hacemos: $u = cosec\ x\ ctg\ x \ \Rightarrow \ du = (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x.\operatorname{ctg} x)\ dx$

Entonces:

$$\int cosec\ x\ \ dx = \int \frac{du}{u} = ln\, u + C = ln\,(cosec\ x - ctg\ x) + C$$

Hacemos notar que en los casos de la secante y cosecante existen otras sustituciones que permiten resolver la integral y si bien, aparentemente, los resultados a los que se arriba son distintos, se puede demostrar su igualdad, o que difieren en una constante, operando trigonométricamente.

6.1 Integración de Potencias de Funciones Trigonométricas

La integración de las potencias de las funciones trigonométricas se resuelven por aplicación del método de integración por sustitución. Generalmente resultan similares entre si todas las potencias impares, como así también todas las pares. Por lo tanto, para analizar la resolución de cada una de las funciones hacemos una subdivisión:

6.1.1 Integración de Potencias de la Función Coseno

Calculamos la integral: $\int cos^n\ x\, dx$, donde el exponente $n \in$ N y puede ser un número natural par o impar; además $n \neq 1$, ya que en ese caso, pese a ser impar, la integral resulta inmediata.

6.1.1.1 Integración de Potencias Impares de la función *cos x*

Consideremos que el exponente es impar, es decir:

$n = 2k + 1 \qquad \forall\, k \in$ N, donde reemplazando k por cada uno de los números naturales, obtendremos todos los naturales impares:

$$k = 1 \Rightarrow n = 2(1) + 1 = 3$$
$$k = 2 \Rightarrow n = 2(2) + 1 = 5$$
$$k = 3 \Rightarrow n = 2(3) + 1 = 7$$

y así sucesivamente. $\quad u = 2x \Rightarrow du = 2\ dx \Rightarrow \ du = \dfrac{dx}{2}$

Si reemplazamos n en la integral y operamos, tenemos:

$$\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{2k+1} x \, dx = \int \cos^{2k} x \, \cos x \, dx = \int (\cos^2 x)^k \cos x \, dx =$$

Donde hemos aplicado propiedades del producto de potencias de iguales bases y de la potencia de potencia. Si consideramos ahora la relación de Pitágoras para la trigonometría, que dice:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad ==> \quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

reemplazamos: $\int \cos^n x \, dx = \int (\cos^2 x)^k \cos x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx =$

Aplicando el método de integración por sustitución:

$$u = \operatorname{sen} x \quad ==> \quad du = \cos x \, dx$$

resulta: $\int \cos^n x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx = \int (1 - u^2)^k \, du =$

y esta última integral la podemos resolver aplicando el desarrollo del Binomio de Newton:

$$\int (1-u^2)^k \, du = \int \left[1^k - \frac{k}{1!} 1^{k-1} (u^2)^1 + \frac{k(k-1)}{2!} 1^{k-2} (u^2)^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} 1^{k-3} (u^2)^3 + .. + \frac{k(k-1)(k-2)...3.2.1}{n!} (u^2)^k \right] du =$$

Para analizar el signo del último término del desarrollo, debemos tener en cuenta que el mismo consta de ($k+1$) términos y que los que ocupan una posición impar (términos 1, 3, 5, 7,...) son positivos y los de una posición par (términos 2, 4, 6, 8,...) son negativos. Por lo tanto:

<u>Si *k* es par</u>: el último término tiene que ser positivo ya que ocupa una posición impar ($k+1=impar$), entonces: $(-1)^k = 1$ resulta positivo.

<u>Si *k* es impar</u>: el último término tiene que ser negativo ya que ocupa una posición par ($k+1=par$), entonces: $(-1)^k = -1$ resulta negativo, con lo cual hemos resuelto el signo del último término del desarrollo. A continuación resolvemos las operaciones posibles y tenemos:

$$\int \cos^n x \, dx = \int \left[1 - k\,u^2 + \frac{k(k-1)}{2!} u^4 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} u^6 + ... + (-1)^k u^{2k} \right] du =$$

y esta última integral la podemos resolver aplicando el método de descomposición y propiedades de la integral indefinida, es decir:

$$\int \cos^n x \, dx = \int du - k \int u^2 \, du + \frac{k(k-1)}{2!} \int u^4 \, du - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int u^6 \, du + ... + (-1)^k \int u^{2k} \, du =$$

Así, resultan todas integrales inmediatas. Resolviendo, nos queda:

$$\int \cos^n x \, dx = u - k \frac{u^3}{3} + \frac{k(k-1)}{2!} \frac{u^5}{5} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \frac{u^7}{7} + ... + (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{2k+1} + C$$

hacemos nuevamente la sustitución: $u = \operatorname{sen} x$, tendremos resuelto el problema. Luego:

$$\int \cos^n x \, dx = \operatorname{sen} x - k \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{k(k-1)}{2!} \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + .. + (-1)^k \frac{\operatorname{sen}^{2k+1} x}{2k+1} + C$$

Resolvemos algunos ejercicios donde aplicaremos el método de resolución visto anteriormente.

Resolver:

a)

$$\int cos^3 x\, dx$$

$$\int cos^3 x\, dx = \int cos^{2+1} x\, dx = \int cos^2 x\ \ cos\, x\, dx =$$

si tenemos en cuenta que: $cos^2 x = 1 - sen^2\ x$

Entonces: $\int cos^3 x\, dx = \int (1 - sen^2 x)\, cos\, x\, dx =$

si hacemos: $u\ =\ sen\ x \Rightarrow du\ =\ cos\ x\ dx$

reemplazando y aplicando el método de descomposición resulta:

$$\int cos^3\ x\, dx = \int (1 - u^2\ )\, du = \int du - \int u^2\ du = u - \frac{u^3}{3} + C = sen\ x - \frac{sen^3 x}{3} + C$$

b)

$$\int cos^9 x\, dx$$

$$\int cos^9\ x\, dx = \int\ cos\ ^{2.4+1} x\, dx = \int (cos^2\ )^4\ cos\, x\, dx = \int (1 - sen^2 x)^4\, cos\, x\, dx =$$

$$= \int (1 - sen^2 x)^4\ cos\, x\, dx =$$

aplicando sustitución hacemos: $u\ =\ sen\ x \Rightarrow du\ =\ cos\ x\ \ dx$

reemplazando y resolviendo resulta:

$$\int cos^9 x\, dx = \int (1 - u^2\ )^4\ du = \int \left[1 - 4u^2\ + \frac{4.3}{2!} (u^2\ )^2\ - \frac{4.3.2}{3!} (u^2\ )^3\ + \frac{4.3.2.1}{4!} (u^2\ )^4 \right] du =$$

$$\int (1 - 4u^2\ + 6u^4\ - 4u^6\ + u^8\ )\, du = \int du - 4\int u^2\ du + 6\ \int u^4\ du - 4\int u^6\ du + \int u^8\ du =$$

$$u - \frac{4u^3}{3} + \frac{6u^5}{5} - \frac{4u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

por lo tanto: $\int \cos^9\ x\ dx = \text{sen}\ x\ - \frac{4\,\text{sen}^3\ x}{3} + \frac{6\,\text{sen}^5\ x}{5} - \frac{4\text{sen}^7 x}{7} + \frac{\text{sen}^9 x}{9} + C$

6.1.1.2 <u>Integración de Potencias Pares de la función cos x</u>

Analicemos ahora el caso en que el exponente es par: $n\ =\ 2k \quad \forall\, k\, \in N$

Donde al igual que en el caso anterior, dándole a k los valores de cada uno de los números naturales, obtendremos todos los naturales pares, por ejemplo:

$k\ =\ 1\ \Rightarrow\ n=2\ (1)\ =\ 2$
$k\ =\ 2\ \Rightarrow\ n=2\ (2)\ =\ 4$
$k\ =\ 3\ \Rightarrow\ n=2(3)\ =\ 6$

y así sucesivamente.
Si reemplazamos n en la integral y operamos, tendremos:

$$\int cos^n\ x\,dx = \int cos^{2k} x\,dx = \int (cos^2 x)^k\ dx =$$

donde hemos aplicado el concepto de potencia de otra potencia. Además consideremos las siguientes igualdades trigonométricas, a los efectos de la sustitución.

Sabemos que: $sen^2 x + cos^2 x = 1 \qquad (1)$.

y: $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta$

si hacemos: $\alpha = \beta = x$ resulta:

$cos\ (x+x) = cos\ x\ .\ cos\ x - sen\ x\ .\ sen\ x \quad \Rightarrow \qquad cos\ 2x = cos^2 x - sen^2 x \qquad (2)$

Si a la igualdad (1) le sumamos la (2), resulta:

$$\begin{array}{rl} & \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \\ + & \\ & \underline{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \ = \cos 2x} \\ & 2\cos^2 x \qquad = 1 + \cos 2x \\ & \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \qquad (3) \end{array}$$

esta última igualdad es la que utilizamos para la sustitución. Operando:

$$\int \cos^n n\, dx = \int (\cos^2 x)^k\ dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx = \frac{1}{2''} \int (1+\cos 2x)^k\ dx =$$

Aplicando el desarrollo del Binomio de Newton:

$$\int \cos^n\ x\ dx = \frac{1}{2^k} \int \left[1 + k\cos 2x + \frac{k(k-1)}{2!}\cos^2 2x + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\cos^3 2x + ... + \cos^k 2x\right] dx$$

Utilizando el método de integración por descomposición y propiedades de la integral indefinida resulta:

$$\int cos^n x\,dx = \frac{1}{2^k}\left[\int dx + k\int cos\,2x\,dx + \frac{k(k-1)}{2!}\int cos^2\ 2x\,dx + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\int cos^3\ 2x\,dx + .. + \int cos^k 2x\,dx\right] =$$

Solo queda resolver cada una de las integrales que aparecen en el segundo miembro de la igualdad anterior:

$I_1 = \int dx = x$ (integral inmediata)

No escribimos las constantes de integración en cada integral, ya que todas serán sumadas al final en una sola, teniendo en cuenta que la suma de un número finito de constantes nos da otra constante.

$$I_2 = \int cos\, 2x\, dx =$$

Resolvemos por sustitución: $u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$, entonces:

$$I_2 = \int \cos 2x \; dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

Por lo tanto: $I_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

$$I_3 = \int \cos^2 2x\, dx$$

Este caso, que es de una potencia par, lo resolvemos haciendo la siguiente sustitución

$$u = 2x \Rightarrow du = 2\; dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

Por lo tanto: $I_3 = \int \cos^2 2x\, dx = \int \cos^2 u\; \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos^2 u\, du =$

si además tenemos en cuenta la igualdad (3), resulta: $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$

Entonces:

$$I_3 = \int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos 2u}{2}\, du = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2u)\, du = \frac{1}{4}\left[\int du + \int \cos 2u\, du\right] =$$

donde hemos aplicado, propiedades de la integral y el método de descomposición. Las dos integrales resultan similares a I_1 e I_2 respectivamente, que hemos resuelto anteriormente. Por consiguiente: $\int du = u$ y $\int cos\, 2u\, du = \frac{1}{2}\, sen\, 2u$

Entonces: $I_3 = \frac{1}{4}\left[u + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\right] = \frac{1}{4}\left[2x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\,(2x)\right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x$

con lo que hemos calculado la integral I_3

$I_4 = \int cos^3\, 2x\, dx =$ Esta integral, por ser de exponente impar, se resuelve aplicando el método visto en 6.1.1.1, es decir: $\int cos^3\, 2x\, dx = \int cos^2\, 2x\, cos\, 2x\, dx = \int (1 - sen^2\, 2x)\, cos\, 2x\, dx$

si hacemos: $u = sen\, 2x \Rightarrow du = 2\, cos\, 2x\, dx \Rightarrow \frac{du}{2} = cos\, 2x\, dx$

Entonces:

$$I_4 = \int (1-u^2)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\, du = \frac{1}{2}\left[\int du - \int u^2\right] = \frac{1}{2}\left[u - \frac{u^3}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen} 2x - \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3}\right]$$

O sea: $I_4 = \dfrac{\text{sen } 2x}{2} - \dfrac{\text{sen}^3\, 2x}{6}$

con lo que calculamos la integral I_4

$I_5 = \int cos^4\ 2x\, dx$. Esta integral se resuelve siguiendo el proceso visto para los exponentes pares, para lo cual hacemos: $u = 2x \Rightarrow du = 2\, dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = dx$

por lo tanto: $\int cos^4\ 2x\, dx = \int cos^4\ u\ \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2}\int cos^4\ u\, du = \dfrac{1}{2}\int (cos^2\ u)^2\ du$

integral ésta a la que arribamos luego de la sustitución y operando algebraicamente.

De acuerdo con la formula (3) vista anteriormente, podemos hacer: $cos^2\ u = \dfrac{1 + cos\, 2u}{2}$

reemplazando resulta: $I_5 = \int \left(\dfrac{1 + cos\, 2u}{2}\right)^2\ du$

Si a partir de esta integral continuamos operando y aplicamos el método de descomposición llegamos a:

$$I_5 = \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2u)^2\ du = \frac{1}{8}\int (1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u)\, du =$$

$$I_5 = \frac{1}{8}\left[\int du\ +\ 2\int \cos 2u\, du\ +\ \int \cos^2 2u\, du\right] =$$

donde:

$$\int du = I_1 \quad ===> \quad \int du = u$$

$$\int cos\ 2u\ \ du = I_2 \quad ===> \quad \int cos\ 2u\ du = \frac{1}{2}\ sen\ 2u$$

$$\int cos^2\ 2u\ du = I_3 \quad ===> \quad \int cos^2\ 2u\ du = \frac{u}{2} + \frac{1}{8}\ sen\ 4u$$

Integrales todas que fueron resueltas anteriormente, por lo cual conocemos sus resultados.
Asimismo, para resolver la integral propuesta, debemos sumar las integrales y sustituir $u = 2x$, es decir:

$$I_5 = \int \cos^4 2x\, dx = \frac{1}{8}(I_1 +\ 2\, I_2 +\ I_3) = \frac{1}{8}\left[u + 2\left(\frac{1}{2}\text{sen}\ \ 2\, u\right) + \left(\frac{u}{2} +\ \frac{1}{8}\text{sen } 4u\right)\right]$$

entonces: $I_5 = \dfrac{1}{8}\left[(2x) + \text{sen } 2(2x) + \dfrac{(2x)}{2} + \dfrac{1}{8}\text{sen } 4\,(2x)\right] =$

Por lo tanto: $I_5 = \dfrac{3x}{8} + \dfrac{1}{8}\ sen\ 4x + \dfrac{1}{64}\ sen\ 8x$

Luego: $I_6 = \int cos^5\ 2x\, dx$

Esta integral es del tipo de exponente impar y como tal se resuelve de manera similar a lo visto en el apartado 6.1.1.1. Por lo tanto:

$$I_6 = \int \cos^5 2x\, dx = \int (\cos^2 2x)^2 \cos 2x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)^2 \cos 2x\, dx =$$

si hacemos: $u = sen\ 2x \Rightarrow du = 2\cos 2x\, dx \Rightarrow \frac{du}{2} = \cos 2x\, dx$

sustituyendo resulta:

$$I_6 = \int (1 - u^2)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int (1 - 2u^2 + u^4)\, du = \frac{1}{2}\left[\int du - 2\int u^2\, du + \int u^4 du\right] \frac{1}{2}\left[u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right] = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{10}$$

Reemplazando; $I_6 = \dfrac{sen\, 2x}{2} - \dfrac{sen^3\, 2x}{3} + \dfrac{sen^5\, 2x}{10}$

Con lo que se ha resuelto la integral.

Debemos continuar calculando todas las integrales que aparecen, teniendo en cuenta que son de exponente par e impar alternativamente, hasta llegar a la última, que es:

$$I_{k+1} = \int \cos^k\, 2x\, dx$$

donde si k es par, se resuelve de manera similar a las integrales $I_3, I_5, I_7, ...$ y si k es impar, entonces se analizan en forma análoga a las integrales $I_2, I_4, I_6 ...$

De esta manera se pueden calcular todas las integrales. Por lo tanto, la integral del coseno de x elevado a un exponente natural par, resulta igual a:

$$\int \cos^n x\, dx = \int \cos^{2k} x\, dx = \frac{1}{2^k}\left[I_1 + k\, I_2 + \frac{k(k-1)}{2!} I_3 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} I_4 + ... + I_{k+1}\right] + C$$

y reemplazando las I_i por los valores obtenidos anteriormente se tendrá resuelta la integral propuesta.

Ejemplo: $\int \cos^6 x\, dx$

si hacemos:

$$\int \cos^6 x\, dx = \int (\cos^2 x)^3\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x)^3\, dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int dx + 3\int \cos 2x\, dx + 3\int \cos^2 2x\, dx + \int \cos^3 2x\, dx\right]$$

es necesario calcular cada una de las integrales:

$I_1 = \int dx = x$ inmediata

$I_2 = \int \cos 2x \, dx =$ se resuelve por sustitucion

$u = 2x \;\Rightarrow\; du = 2\,dx \;\Rightarrow\; \frac{du}{2} = dx$

$I_2 = \int \cos 2x \, dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{\text{sen } u}{2} = \frac{\text{sen } 2x}{2}$

$I_3 = \int \cos^2 2x \, dx$ = integral de exponente par, y como tal debe ser resuelta es decir :

$$\int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1+\cos 2(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx$$

donde la primera es inmediata y la segunda se resuelve por el método de sustitución, es decir:

$$u = 4x \;\Rightarrow\; du = 4\,dx \;\Rightarrow\; \frac{du}{4} = dx$$

$$\int \cos 4x \, dx = \int \cos u \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\,\text{sen } u = \frac{\text{sen } 4x}{4}$$

Entonces: $I_3 = \frac{1}{2}(x) + \frac{1}{2}\frac{\text{sen } 4x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 4x}{8}$, $I_4 = \int \cos^3 2x \, dx$ se resuelve aplicando el procedimiento de exponentes impares.

Por lo tanto:

$$\int \cos^3 2x \, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx =$$

$$\int (1-\text{sen}^2 2x)\cos 2x \, dx =$$

Donde: $u = \text{sen } 2x \;\Rightarrow\; du = 2\cos 2x \, dx \;\Rightarrow\; \frac{du}{2} = \cos 2x \, dx$

entonces: $I_4 = \int (1-u^2)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int du - \frac{1}{2}\int u^2 \, du = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} = \frac{\text{sen } 2x}{2} - \frac{\text{sen}^3 2x}{6}$

Hemos resuelto todas las integrales, restando solamente reemplazar para obtener el resultado final:

$$\int \cos^6 x \, dx = \frac{1}{8}\left[I_1 + 3I_2 + 3I_3 + I_4\right] + C =$$

$$\frac{1}{8}\left[(x) + 3\frac{\text{sen } 2x}{2} + 3\left(\frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 4x}{8}\right) + \frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{\text{sen}^3 2x}{6}\right] + C =$$

$$= \frac{5x}{16} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{3\,\text{sen } 4x}{64} + \frac{\text{sen}^3 2x}{24} + C$$

6.1.2 <u>Potencias de la función Seno</u>

Como en el caso del coseno consideremos dos posibilidades para la: $I = \int \text{sen}^n x \, dx$

donde el exponente "n" puede ser un número natural par o impar. Consideremos ambas posibilidades por separado.

6.1.2.1 Potencia Impar de la función *sen x*

De la misma manera que en el coseno, si el exponente es impar, podemos escribir:

$$n = 2k + 1 \qquad \forall k \in N$$

si reemplazamos en la integral y operamos algebraicamente, resulta:

$$\int sen^n\ x\, dx = \int sen^{2k+1}\ x\, dx = \int (sen^2\ x)^k\ sen\ x\, dx =$$

Si consideramos: $\qquad sen^2 x + cos^2 x = 1 \qquad sen^2\ x = 1 + cos^2\ x$

y reemplazamos en la integral anterior, tendremos:

$$\int sen^n x\, dx = \int (1 - cos^2 x)^k\ sen\ x\, dx =$$

aplicamos el método de sustitución: $\qquad u = cos\ x \ \Rightarrow\ du = -\ sen\ x\ dx \ \Rightarrow\ -du = sen\ x\ dx$

por lo tanto: $\qquad \int sen^n x\, dx = \int (1 - u^2\ )^k\ (-du) = -\int (1 - u^2\ )^k\ du$

Para desarrollar esta última integral aplicamos el Binomio de Newton:

$$-\int (1 - u^2\ )\, du = -\int \left[1 - k\, u^2 + \frac{k(k-1)}{2!} u^4 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} u^6 + \ldots + (-1)^k\ u^{2k} \right] du$$

En cuanto al signo del último término, son válidas las mismas consideraciones hechas para la integral de las potencias impares de la función coseno.
Aplicamos el método de integración por descomposición y propiedades de la integral indefinida.

$$\int sen^n\ x\, dx = -\left[\int du - k \int u^2\ du + \frac{k(k-1)}{2!} \int u^4\ du - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int u^6\ du + \ldots + (-1)^k \int u^{2k}\ du \right]$$

Integrales que podemos resolver fácilmente, ya que resultan inmediatas. Si además tenemos en cuenta el signo menos exterior al corchete, el mismo nos cambiará todos los signos de las integrales, por lo tanto, el del último término también variará, por lo cual es necesario sumarle una unidad al exponente. Entonces resulta:

$$\int \mathrm{sen}^n\ x\ dx = -u + k\,\frac{u^3}{3} - \frac{k(k-1)}{2!}\,\frac{u^5}{5} + \frac{k * k-1)(k-2)}{3!}\,\frac{u^7}{7} + \ldots + (-1)^{k+1}\,\frac{u^{2k+1}}{2k+1} + C$$

sustituyendo u tenemos resuelta la integral:

$$\int \mathrm{sen}^n x\ dx = -\cos x + \frac{k \cos^3 x}{3} - \frac{k(k-1)}{2!}\,\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\,\frac{\cos^7 x}{7} + \ldots + (-1)^{k+1}\,\frac{\cos^{2k+1} x}{2k+1} + C$$

Resolvemos una serie de ejercicios donde aplicaremos este método:

Resolver: $\int sen^3 x\,dx = \int sen^3 x\,dx = \int sen^2 x\,dx = \int (1 - cos^2 x)\,sen\,x\,dx =$

Si hacemos: $u = cos\,x \;\Rightarrow\; du = -sen\,x\,dx \;\Rightarrow\; -du = sen\,x\,dx$

Por lo tanto:

$$\int sen^3 x\,dx = \int (1 - u^2)\,(-du) = -\int (1 - u^2)\,du = -\int du + \int u^2\,du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -cos\,x + \frac{cos^3 x}{3} + C$$

Resolver: $\int sen^9 x\,dx = \int sen^9 x\,dx = \int (sen^2 x)^4 sen\,x\,dx = \int (1 - cos^2 x)\,sen\,x\,dx =$

si hacemos: $u = cos\,x \;\Rightarrow\; du = -\,sen\,x\,dx \;\Rightarrow\; -du = sen\,x\,dx$

$$\int sen^9 x\,dx = \int (1 - u^2)^4\,(-du) = -\int (1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8)\,du =$$
$$= -\int du + 4\int u^2\,du - 6\int u^4\,du + 4\int u^6\,du - \int u^8\,du =$$
$$= -\,u + 4\frac{u^3}{3} + 6\frac{u^5}{5} + 4\frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + C =$$
$$= -cos\,x + \frac{4\,cos^3 x}{3} - \frac{6\,cos^5 x}{5} + \frac{4\,cos^7 x}{7} - \frac{cos^9 x}{9} + C$$

6.1.2.2 Potencia Par de la función *sen x*

Consideremos ahora que el exponente es un número natural par. Por lo tanto:

$$n = 2k \qquad \forall k \in N$$

entonces: $\int sen^n\,x\,dx = \int sen^{2k} x\,dx = \int (sen^2 x)^k\,dx =$

A los efectos de la sustitución consideremos las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\begin{array}{lll} \text{Relacion de Pitágoras:} & cos^2 x + sen^2 x = 1 & (1) \\ & cos^2 x - sen^2 x = cos\,2x & (2) \\ \hline \text{restando ambas igualdades:} & 2\,sen^2 x = 1 - cos\,2x & \\ \text{y haciendo pasaje de terminos:} & sen^2 x = \dfrac{1 - cos\,2x}{2} & (3) \end{array}$$

La expresión (2) podemos hallarla de la siguiente manera: $cos\,(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sen\,a\,sen\,b$

si hacemos $a = b = x$ resulta: $cos\,(x+x) = cos\,x\,cos\,x - sen\,x\,sen\,x$

Por lo tanto: $cos\,2x = cos^2 x - sen^2\,x$

La expresión (3) es la que utilizamos para resolver la integral. Por consiguiente:

$$\int sen^n\ x\,dx = \int \left(\frac{1 - cos\,2x}{2} \right)^k\ dx =$$

Donde, de manera similar a la integración de la función coseno, podemos aplicar propiedades de la integral indefinida y el desarrollo del Binomio de Newton, es decir:

$$\int sen^n x\,dx = \frac{1}{2^k} \int (1 - cos\,2x)^k\ dx = \frac{1}{2^k} \int \left[1 - k\,cos\,2x + \frac{k(k-1)}{2!} cos^2\ 2x - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} cos^3\ 2x + ... + (-1)^k\ cos^k\,2x \right] dx =$$

y continúa siendo válida la consideración del signo del último término hecha anteriormente.
Aplicamos el método de integración por descomposición y propiedades de la integral:

$$\int sen^n x\,dx = \frac{1}{2^k} \left[\int dx - k \int cos\,2x\,dx + \frac{k(k-1)}{2!} \int cos^2 2x\,dx - \frac{k)k-1)(k-2)}{3!} \int cos^3 2x + ... + (-1)^k \int cos^k\,2x\,dx \right]$$

Donde aparecen las siguientes integrales:

$$I_1 = \int dx =$$

$$I_2 = \int \cos 2x\,dx =$$

$$I_3 = \int \cos^2\ 2x\,dx =$$

$$I_4 = \int \cos^3\ 2x\,dx =$$

.

.

.

$$I_k = \int \cos^k\ 2x\,dx =$$

Todas estas integrales fueron resueltas oportunamente cuando estudiamos la función coseno con exponente par.

Por lo tanto: $$\int sen^n x\,dx = \frac{1}{2^k} \left[I_1 - k\,I_2 + \frac{k(k-1)}{2!} I_3 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} I_4 + ... + (-1)^k\ I_{k+1} \right] + C$$

restando reemplazar los valores de las I_i por los resultados obtenidos anteriormente para lograr la solución final de la integral propuesta.

<u>Ejercitación</u>:

Resolver: $\int sen^4\ x\,dx =$

Consideremos:

$$\int \text{sen}^4 x\,dx = \int (\text{sen}^2 x)^2\ dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2\ dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2\ dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos\ 2x + \cos^2\ 2x)\,dx = \frac{1}{4} \int dx - 2 \int \cos 2x\,dx + \int \cos^2\ 2x\,dx$$

Calculamos por separado cada una de las integrales, es decir:

$$I_1 = \int dx = x$$

$$I_2 = \int cos\, 2x\, dx =$$

integral que resolvemos por sustitución:

$$u = 2x \Rightarrow du = 2\, dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$\int cos\, 2x\, dx = \int cos\, u\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cos\, u\, du = \frac{1}{2}\, sen\, u$$

$$I_2 = \frac{sen\, 2x}{2}$$

$$I_3 = \int cos^2\, 2x\, dx = \int \frac{1 + cos\, 2(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int cos\, 4x\, dx$$

La integral de cos 4x la resolvemos por sustitución: $u = 4x$ $\quad du = 4\, dx$ $\quad \frac{du}{4} = dx$

entonces:

$$I_3 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int cos\, u\, \frac{du}{4} = \frac{x}{2} + \frac{sen\, u}{8} =$$

$$I_3 = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 4x}{8}$$

reemplazamos:

$$\int sen^4 x\, dx = \frac{1}{4}\left[I_1 - 2I_2 + I_3\right] + C = \frac{1}{4}\left[x - 2\left(\frac{sen\, 2x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{sen\, 4x}{8}\right)\right] + C = \frac{3x}{8} + \frac{sen\, 2x}{4} + \frac{sen\, 4x}{32} + C$$

6.1.3 Integración de Potencias de la función Tangente

Estas integrales tienen genéricamente la forma: $\quad I = \int tg^n x\, dx$

Existen varias maneras de resolver dichas integrales: utilizando sustituciones diferentes y aunque parezca que los resultados obtenidos son distintos, no es así. Se puede demostrar trigonométricamente, que en todos difieren entre si solamente en una constante.
En el presente trabajo se resolverá por uno de dichos métodos, que se considera de más fácil aplicación y consiste en utilizar la siguiente relación trigonométrica:

$$1 + tg^2 x = sec^2 x \Rightarrow tg^2 x = sec^2 x - 1$$

por lo tanto:

$$\int tg^n x\, dx = \int tg^{n-2} x\, tg^2 x\, dx = \int tg^{n-2}\, x\, (sec^2 x - 1)\, dx = \int tg^{n-2} x\, sec^2 x\, dx - \int tg^{n-2} x\, dx$$

Podemos resolver la integral: $\quad I_1 = \int tg^{n-2} x\, sec^2 x\, dx =$

Aplicando el método de sustitución: $\quad u = tg\, x \Rightarrow du = sec^2 x\, dx$

resulta: $I_1 = \int u^{n-2}\, du = \dfrac{u^{n-1}}{n-1} = \dfrac{tg^{n-1}\, x}{n-1}$

Restaría resolver la integral: $I_2 = \int tg^{n-2} x\, dx$

Donde podemos reiterar la aplicación del método anterior. Entonces:

$$I_2 = \int tg^{n-2}x\, dx = \int tg^{n-4}x\, tg^2 x\, dx = \int tg^{n-4}x\,(sec^2 x - 1)\, dx = \int tg^{n-4}x\, sec^2 x\, dx - \int tg^{n-4}x\, dx =$$

Donde: $I_3 = \int tg^{n-4}\, sec^2 x\, dx =$

Se resuelve por sustitución al igual que la integral I_1, es decir: $I_3 = \int u^{n-4}\, du = \dfrac{u^{n-3}}{n-3} = \dfrac{tg^{n-3} x}{n-3}$

Restando resolver la integral: $I_4 = \int tg^{n-4} x\, dx$, que se obtiene de manera similar a las anteriores, es decir, se debe reiterar el procedimiento hasta llegar a la última integral. Esta depende del exponente "n". Si es par, será del tipo:

$$\int tg^2 x\, dx = \int (sec^2 x - 1)\, dx = \int sec^2 x\, dx - \int dx = tg^2\, x - x + C$$

Si el exponente "n" es impar, entonces la última integral será del tipo:

$$\int tg\ x\, dx = \int \frac{sen\ x}{cos\ x}\, dx = - \int \frac{du}{u} = - ln\, u + C =$$

Integral que fue resuelta por sustitución: $u = cos\ x \Rightarrow du = - sen\ x\, dx$

Por lo tanto: $\int tg\ x\, dx = - ln\,(cos\ x) + C$

y si reemplazamos cada una de las integrales en las anteriores, solucionamos el problema.

<u>Ejercitación</u>:

Resolver: a) $\int tg^5 x\, dx =$

$$\int tg^5 x\, dx = \int tg^3 x\, tg^2 x\, dx = \int tg^3 x\,(sec^2 x - 1)\, dx = \int tg^3 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^3 x\, dx =$$
$$= \int tg^3 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, tg\ x\, dx = \int tg^3 x\, sec^2 x\, dx - \int tg\ x\,(sec^2 x - 1)\, dx =$$
$$= \int tg^3 x\, sec^2 x\, dx - \int tg\ x\, sec^2 x\, dx + \int tg\ x\, dx =$$

donde las dos primeras integrales se resuelven por sustitución:

$$u = tg\ x \Rightarrow du = sec^2 x\, dx$$

la última, de la siguiente manera: $\int tg\ x\, dx = \int \frac{sen\ x}{cos\ x}\, dx$

donde: $w = cos\ x \Rightarrow dw = -\ sen\ x\, dx$

aplicando sustituciones resulta:

$$\int tg^5 x\, dx = \int u^3\, du - \int u\, du + \int -\frac{dw}{w} = \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} - \ln w + C = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln(\cos x) + C$$

b) $\int tg^6 x\, dx$

$$\int tg^6 x\, dx = \int tg^4 x\, tg^2 x\, dx = \int tg^4 x\,(sec^2 x - 1)\, dx = \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx = \int tg^4 x\, dx =$$
$$= \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, tg^2 x\, dx =$$
$$\int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\,(sec^2 x - 1)\, dx = \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, sec^2 x\, dx + \int tg^2 x\, dx =$$
$$= \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, sec^2 x\, dx + \int sec^2 x\, dx - \int dx =$$
$$= \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, sec^2 x\, dx + \int sec^2 x\, dx - \int dx =$$

donde podemos resolver las tres primeras integrales por sustitución:

$$u = tg\ x \Rightarrow du = sec^2\ x\, dx$$

y la última resulta inmediata. Por lo tanto:

$$\int tg^6 x\, dx = \int u^4\, du - \int u^2\, du + \int du - \int dx = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + u - x + C = \frac{tg^5 x}{5} - \frac{tg^3 x}{3} + tg\ x - x + C$$

6.1.4 Integración de Productos de Potencias de las Funciones Seno y Coseno

Estas integrales tienen genéricamente la forma: $I = \int sen^n x\, cos^m x\, dx$, donde se pueden plantear distintas alternativas de acuerdo a que los exponentes sean pares o impares. Analizaremos por separado.

6.1.4.1 Potencia de la Función Seno Impar y del Coseno Par

El exponente del coseno es un número natural par y del seno impar:

$$m = par \Rightarrow m = 2h \quad \forall h \in N$$
$$n = impar \Rightarrow n = 2k + 1 \quad \forall k \in N_0$$

por lo tanto:

$$I = \int sen^n x\, cos^m x\, dx = \int sen^{2k+1} x\, cos^m x\, dx = \int sen^{2k} x\, sen\ x\, cos^m x\, dx = \int (sen^2 x)^k\, sen\ x\, cos^m x\, dx =$$

Donde usamos propiedades de las potencias y del producto de potencias de igual base, y si además tenemos en cuenta que: $sen^2\ x = 1 - cos^2\ x$

Reemplazando, resulta: $I = \int (1 - cos^2 x)^k \; cos^m x \; sen \; x \; dx =$

integral que podemos resolver por el método de sustitución, haciendo:

$u = cos\ x \;\; \Rightarrow \;\; du = -sen\ x\ dx \;\; \Rightarrow \;\; -du = sen\ x\ dx$

Por lo tanto:

$$I = \int (1 - u^2)^k \; u^m \; (-du) = - \int (1 - u^2)^k \; u^m \; du =$$

integral que resulta de fácil resolución aplicando el desarrollo del Binomio de Newton y el método de integración por descomposición.

Ejemplo: $I = \int sen^5 x \; cos^4 x \; dx =$

$$I = \int sen^5 x \; cos^4 x \; dx = \int sen^4 x \; sen\ x \; cos^4 x \; dx = \int (sen^2 x)^2 \; sen\ x \; cos^4 \; dx = \int (1 - cos^2 x)^2 \; cos^4 x \; sen\ x \; dx =$$

hacemos la siguiente sustitución: $u = cos\ x \;\; \Rightarrow \;\; du = -\ sen\ x\ dx$

Por lo tanto:

$$I = \int (1 - u^2)^2 \; u^4 (-du) = - \int (1 - 2u^2 + u^4) \; u^4 \; du = - \int (u^4 - 2u^6 + u^8) \; du = - \int u^4 du + 2 \int u^6 \; du - \int u^8 du =$$

$$= \quad - \frac{u^5}{5} + 2 \frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + C = - \frac{cos^5 x}{5} + 2 \frac{cos^7 x}{7} - \frac{cos^9 x}{9} + C$$

6.1.4.2 Potencias de la Función Seno Par y del Coseno Impar

En este caso, el exponente del coseno es un número natural impar y el del seno, par:

$m = impar \;\; \Rightarrow \;\; m = 2h + 1 \quad \forall h \in N_0$

$n = par \;\; \Rightarrow \;\; n = 2k \quad \forall k \in N$

Por lo tanto:

$$I = \int sen^n x \; cos^m \; x \; dx = \int sen^n x \; cos^{2h+1} x \; dx = \int sen^n x \; cos^{2h} x \; cos\ x \; dx = \int sen^n x \; (cos^2 x)^h \; cos\ x \; dx =$$

$$= \int sen^n \; x \; (1 - sen^2 x)^h \; cos\ x \; dx =$$

hacemos la siguiente sustitución: $u = sen\ x \;\; \Rightarrow \;\; du = cos\ x\ dx$

Por lo tanto: $I = \int u^n \; (1 - u^2)^h \; du =$

nos queda una integral similar a la del caso anterior, aplicamos el desarrollo del Binomio de Newton y el método de integración por descomposición.

Ejemplo:

$$I = \int sen^4 x \; cos^3 x \; dx = \int sen^4 x \; cos^3 x \; dx = \int sen^4 x \; cos^2 x \; cos\ x \; dx = \int sen^4 \; x \; (1 - sen^2 x) \; cos\ x \; dx =$$

hacemos la siguiente sustitución: $u = sen\,x \;\Rightarrow\; du = cos\,x\,dx$

Por lo tanto:

$$I = \int u^4(1-u^2)\,du = \int (u^4 - u^6)\,du = \int u^4\,du - \int u^6\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{sen^5x}{5} - \frac{sen^7x}{7} + C$$

6.1.4.3 <u>Potencias de la Función Seno Impar y del Coseno Impar</u>

En este caso, ambos exponentes son números naturales impares:

$m = impar \;\Rightarrow\; m = 2h + 1 \quad \forall h \in N_0$

$n = par \;\Rightarrow\; n = 2k + 1 \quad \forall k \in N_0,$

Esta integral puede resolverse de dos maneras. Una reemplazando el coseno en función del seno y la otra el seno en función del coseno. Si bien aparentemente los resultados a que se llegan de ambas maneras son distintos, se puede demostrar trigonométricamente que difieren solamente en una constante.

Presentamos uno de los procedimientos:

$$I = \int sen^n x\, cos^m x\,dx = \int sen^n x\, cos^{2h+1}\,x\,dx = \int sen^n x\,(cos^2x)^h\, cos\,x\,dx = \int cos^n x\,(1-sen^2x)^h\, cos\,x\,dx =$$

si hacemos la siguiente sustitución: $u = sen\,x \;\Rightarrow\; du = cos\,x\,dx$

reemplazando, resulta: $I = \int u^n\,(1-u^2)^h\,du$

Nos queda una integral similar a la de los casos anteriores y como tal se resuelve.

Ejemplo: $I = \int sen^3 x\, cos^3 x\,dx$

$$I = \int sen^3x\, cos^3x\,dx = \int sen^3x\, cos^2x\, cos\,x\,dx = \int sen^3x\,(1-sen^2x)\, cos\,x\,dx =$$

si hacemos la siguiente sustitución: $u = sen\,x \qquad du = cos\,x\,dx$

resulta:

$$I = \int u^3(1-u^2)\,du = \int (u^3 - u^5)\,du = \int u^3\,du - \int u^5\,du = \frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} + C = \frac{sen^4x}{4} - \frac{sen^6x}{6} + C$$

6.1.4.4 <u>Potencias de la función Seno Par y del Coseno Par</u>

Aquí ambos exponentes son números naturales pares:

$m = par \;\Rightarrow\; m = 2h \quad \forall h \in N$

$n = impar \;\Rightarrow\; n = 2k \quad \forall k \in N$

Como en el caso anterior, esta integral puede ser resuelta de dos maneras: sustituyendo el seno o el coseno, llegando en ambos a resultados análogos. Plantearemos una de las formas:

$$I = \int sen^n x\, cos^n x\, dx = \int sen^{2k} x\, cos^{2h}\; x\, dx =$$

$$\int (sen^2 x)^k\; cos^{2h} k\; dx = \int (1 - cos^2 x)^k\; cos^{2h} x\, dx =$$

En esta última expresión podemos aplicar el desarrollo del Binomio de Newton y posteriormente el método de integración por descomposición:

$$I = \int \cos^{2h} x \left[1 - k \cos^2 x + \frac{k(k-1)}{2!} \cos^4 x - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cos^6\; x + .. + (-1)^k \cos^{2k} x \right] dx =$$

$$= \int \cos^{2h} x\; dx - k \int \cos^{2h+2} x\; dx + \frac{k(k-1)}{2!} \int \cos^{2h+4} x\; dx - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int \cos^{2h+6} x\; dx + .. + (-1)^k \int \cos^{2h+2k} x\; dx =$$

Podemos observar que todas las integrales son de la función coseno con exponente par. Estas pueden ser resueltas de acuerdo a lo oportunamente analizado en el apartado 6.1.1.2.

Ejemplo: $I = \int \text{sen}^2 x\;\; \cos^2 x\;\; dx$

$$I = \int \text{sen}^2 x \cos^2 x\; dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x\; dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x)\; dx = \int \cos^2 x\; dx - \int \cos^4 x\; dx =$$

Tenemos dos integrales del tipo coseno con exponente par. Las resolvemos por separado:

Es decir: $I_1 = \int cos^2\; x\, dx =$

Para poder calcular esta integral hacemos la siguiente sustitución:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$I_1 = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\; dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x)\; dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x\; dx =$$

donde la integral de cos 2x se resuelve por sustitución: $u = 2x \qquad du = 2\; dx \qquad dx = \dfrac{du}{2}$

Por lo tanto: $\int cos\; 2x\; dx = \int cos\; u\; \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2} \int cos\; u\; du = \dfrac{1}{2}\; sen\; u = \dfrac{1}{2}\; sen\; 2x$

reemplazando: $I_1 = \int cos^2 x\; dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{sen\; 2x}{4}$

Resolvemos la otra integral:

$$I_2 = \int \cos^4 x\; dx = \int (\cos^2 x)^2\; dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\; dx = \frac{1}{2} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\; dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int dx + 2 \int \cos 2x\; dx + \int \cos^2\; 2x\; dx \right] =$$

las resolvemos por separado: $\int dx = x$

$\int cos\, 2x\, dx = \frac{sen\, 2x}{2}$ fue resuelta en la integral anterior.

$\int cos^2\, 2x\, dx =$ la resolvemos mediante la siguiente sustitución:

$$u = 2x \qquad du = 2\, dx \qquad dx = \frac{du}{2}$$

$\int cos^2\, 2x\, dx = \int cos^2\, u\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cos^2 u\, du =$ integral que también fue resuelta:

$$\int cos^2\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2} + \frac{sen\, 2u}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{2} + \frac{sen\, 4x}{4}\right] = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 4x}{8}$$

Por lo tanto:

$$I_2 = \int cos^4 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 2x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{sen\, 4x}{16} =$$

es decir: $I_2 = \int cos^4 x\, dx = \frac{3x}{4} + \frac{sen\, 2x}{2} + \frac{sen\, 4x}{16}$

resulta entonces que: $I = I_1 + I_2$

Luego:

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{sen}^2 x\, \cos^2 x\, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen}\, 2x}{4}\right] + \left[\frac{3x}{4} + \frac{\mathrm{sen}\, 2x}{2} + \frac{\mathrm{sen}\, 4x}{16}\right] + C = \frac{5x}{4} + \frac{3\,\mathrm{sen}\, 2x}{4} + \frac{\mathrm{sen}\, 4x}{16} + C$$

Con lo que queda resuelto el ejercicio.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis Matemático I

MATERIAL DIDÁCTICO

Integrales Definidas

Profesor: Ing. *Raúl J. Binaghi*

REEDICIÓN 2020

Prof. *Edgardo A. Arriola*
Ing. *Graciela A. Luque*
Ing. *Ramón S. Sampayo*

INTEGRALES DEFINIDAS

1.- CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

La medida del área es un problema que ha preocupado al hombre desde la antigüedad. Los egipcios conocían reglas para el cálculo de las áreas y volúmenes de algunas figuras sencillas como ser: triángulos, rectángulos, trapecios etc.

Recién los griegos dieron derivaciones lógicas y sistemáticas a estas fórmulas. Podemos citar a Arquímedes como el que más se acercó al concepto moderno del cálculo de área. Su método, llamado de exhaución, consistía en acotar el área a calcular mediante dos conjuntos de rectángulos, uno situado en el interior, cuya suma permitía obtener un **área contenida** (suma interior) y el otro, que lo cubre y da el **área continente** (suma exterior).

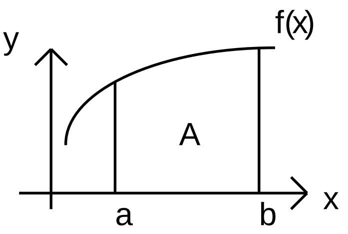
A medida que se aumentaba la cantidad de rectángulos de cada uno de los dos conjuntos considerados, dichas sumas eran cada vez más similares, lo cual permitía calcular el área deseada, por la aproximación de ambas.

Posteriormente, distintos autores adoptaron este principio y lograron el concepto de integral definida, de los cuales, veremos dos.

2.- INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN CAUCHY

Si consideramos una función $y = f(x)$ positiva y continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, su gráfica conjuntamente con el eje "x" y las ordenadas correspondientes a los extremos del intervalo limitan una región del plano, cuya forma se designa como **trapezoide** y a cuya superficie o área *(A)* la llamaremos la integral definida de la función entre los límites o extremos que corresponden a los del intervalo. Es decir:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



Para calcular dicha área procedemos a dividir el intervalo $[a,b]$ en un número finito de subintervalos, cuyos tamaños o amplitud pueden ser todas iguales o distintos, lo cual va a constituir una **partición** de dicho intervalo.

La máxima distancia entre dos puntos cualquiera de un subintervalo constituye el **diámetro** del mismo y el mayor de todos los diámetros de los subintervalos componentes de la partición, la **norma** de la misma.

Además, si consideramos dos particiones distintas de un mismo intervalo y una tiene menor norma que la otra, se dice que dicha partición es más refinada o más fina que la otra. Asimismo, es necesario tener en cuenta que si una función es continua en un intervalo cerrado, lo será también en cada uno de los subintervalos que se generan en él mediante una partición cualquiera y si consideramos que una propiedad de la función continua en un intervalo cerrado es la de alcanzar un **máximo** (M) y un **mínimo** (m) en dicho intervalo, esto mismo deberá ocurrir en cada subintervalo. Es decir, podemos afirmar que en cada uno de los subintervalos que se originan por una determinada partición del intervalo $[a,b]$ existirá un máximo (M_i) y un mínimo (m_i).

Por lo tanto, si hacemos una partición del intervalo considerado en ***"n"*** partes, que pueden ser todas iguales o distintas, nos quedarían los siguientes subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

Donde resulta: $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \cdots \leq x_n = b$, y además podemos suponer que dicha partición tiene una determinada norma δ.

También, existirán un máximo y mínimo en cada uno de los subintervalos, que llamaremos:

$M_1 \wedge m_1$ los del $[x_0, x_1]$

$M_2 \wedge m_2$ los del $[x_1, x_2]$

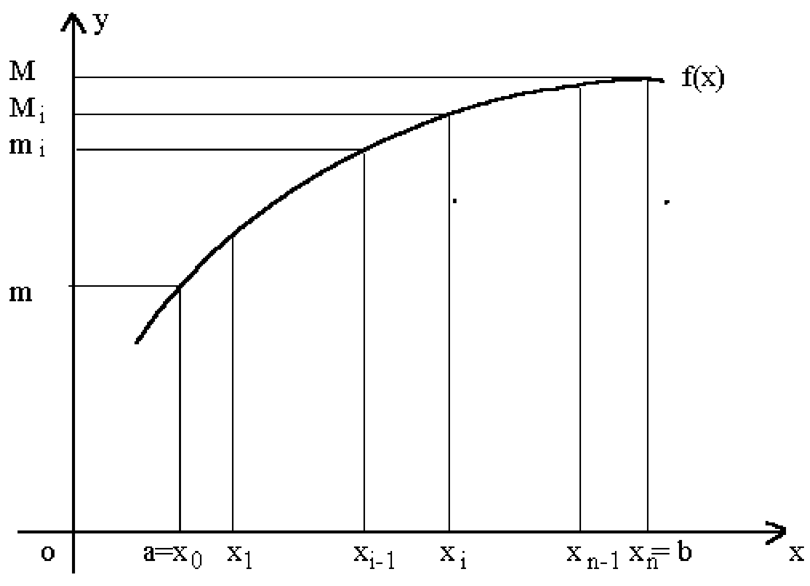
$\vdots$

$M_i \wedge m_i$ los del $[x_{i-1}, x_i]$

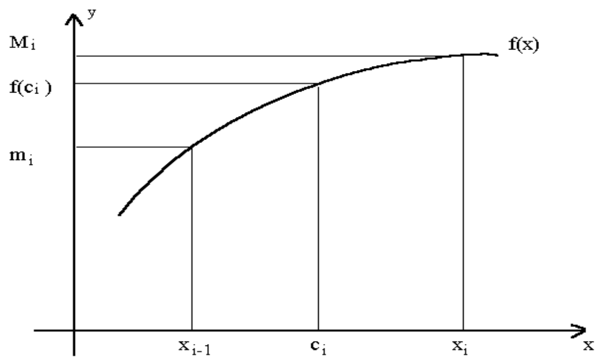
$\vdots$

$M_n \wedge m_n$ los del $[x_{n-1}, x_n]$

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente podemos calcular un área inferior y otra superior en cada subintervalo de la partición. A manera de ejemplo, lo haremos en un subintervalo genérico de ella:



Para mayor claridad haremos el gráfico con el subintervalo genérico únicamente, entendiendo que lo mismo ocurre en los " n" subintervalos correspondientes de la partición:



Podemos ver que el área superior corresponde a la superficie de un rectángulo de base igual a la amplitud del subintervalo y de altura, el máximo del mismo. De manera similar, el área inferior tiene la misma base, pero su altura corresponde al mínimo. Por lo tanto:

$$A_{S_i} = M_i \left(x_i - x_{i-1} \right)$$

$$A_{I_i} = m_i \left(x_i - x_{i-1} \right)$$

, y además se puede expresar el área de un rectángulo intermedio, comprendido entre los otros dos, teniendo en cuenta que entre el máximo y el mínimo del subintervalo van a estar comprendidos todos los valores de la función . Por lo tanto:

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i \implies m_i \leq f(c_i) \leq M_i$$

Podemos plantear el área media de la siguiente manera: $A_{M_i} = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ de tal forma que se cumpla siempre que: $A_{I_i} \leq A_{M_i} \leq A_{S_i}$

Esto mismo deberá cumplirse para cada uno de los subintervalos en que se encuentra dividido el intervalo mediante la partición. Por lo tanto, podemos expresar:

$$\begin{array}{ccccc} A_{I_1} & \leq & A_{M_1} & \leq & A_{s_1} \\ A_{I_2} & \leq & A_{M_2} & \leq & A_{S_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{I_i} & \leq & A_{M_i} & \leq & A_{s_i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{I_n} & \leq & A_{M_n} & \leq & A_{S_N} \end{array}$$

Si sumamos las *"**n**"* desigualdades planteadas, obtendremos otra desigualdad del mismo sentido que resulta:

$$A_{I_1} + A_{I_2} + \cdots + A_{I_n} \leq A_{M_1} + A_{M_2} + \cdots + A_{M_n} \leq A_{S_1} + A_{S_2} + \cdots + A_{S_n}$$

Es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{I_i} \leq \sum_{i=1}^{n} A_{M_i} \leq \sum_{i=i}^{n} A_{S_i}$$

Ahora bien, si tomamos particiones cada vez más refinadas (aumentando el número de subintervalos) las tres áreas se aproximan entre si, por lo tanto se puede suponer que si el número de subintervalos tiende a infinito (por consiguiente la norma tiende a cero) las tres áreas tenderán a igualarse. Teniendo en cuenta esto, podemos suponer que en el límite para el número de subdivisiones tendiendo a infinito serán iguales, por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{I_i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{M_i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{S_i}$$

A dichos límites los denominaremos la **integral definida** de la función $y = f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$ y ello nos posibilita calcular el área real encerrada por la función, el eje de las absisas (x) y las ordenadas correspondientes a los extremos del intervalo, Es decir:

$$\boxed{A_R = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{M_i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_b^a f(x)dx}$$

Lo que constituye la definición de la **Integral definida (según Cauchy).**

3.- INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN RIEMANN

Riemann plantea otro enfoque de la integral definida, ya no como límite, sino como sucesiones y además puede prescindir de la hipótesis de continuidad, bastando solamente con el acotamiento de la función.

Sea $y = f(x)$ una función acotada en un intervalo cerrado $[a,b]$ y en ella se pueden efectuar particiones, las que llamaremos: $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_n, \ldots$, con la condición que sean cada vez más refinadas entre sí. Si llamamos: δ_1 a la norma de P_1, δ_2 a la de P_2, δ_3 a la de P_3, y así respectivamente, se debe verificar que: $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3 \geq \ldots \geq \delta_n \geq \ldots$

Teniendo en cuenta esto, podemos obtener, de acuerdo con lo visto, la suma inferior y superior para cada partición. Por lo tanto, para la partición P_1 existirá una suma superior, que llamaremos S_{P_1} y una inferior, I_{P_1} y así respectivamente para cada una de ellas, y si consideramos además, que por ser las particiones cada vez más refinadas, se debe verificar: $S_{P_1} > S_{P_2} > S_{P_3} > \ldots\ldots > S_{P_n} > \ldots\ldots$, lo que constituye una sucesión decreciente de sumas superiores, que debe ser acotada inferiormente y tener, por lo tanto, un extremo inferior, que llamaremos:

$$\text{extr. inf. } [S_P]$$

De igual manera, las sumas inferiores constituirán una sucesión creciente, es decir:

$I_{P_1} < I_{P_2} < I_{P_3} < \ldots < I_{P_n} < \ldots$, que también debe ser acotada superiormente y por consiguiente tener un extremo superior que designaremos:

$$\text{extr. sup. } [I_P]$$

A dichos extremos, que siempre existen, los llamaremos:

$$extr.inf\,.[S_P] = \overline{\int_a^b} f(x)dx =$$

lo que constituye la **Integral superior de Riemann** y a:

$$extr.sup\,.[I_P] = \underline{\int_a^b} f(x)dx =$$

que es la **Integral inferior de Riemann.**

Se va a verificar siempre que: $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$

La condición de existencia de la integral definida según Riemann es que ambas sean iguales:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx}$$

Lo que constituye la definición de **Integral definida (según Riemann).**

4.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Las propiedades de la linealidad de la integral indefinida vistas y demostradas anteriormente, se verifican en el caso de la integral definida, de manera similar.

4.1.- Integral definida de una suma de funciones

Demostraremos a continuación que:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Consideramos la definición de integral definida:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})[f(c_i)+g(c_i)] =$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [(x_i - x_{i-1})f(c_i) + (x_i - x_{i-1})g(c_i)] =$$

Por propiedad de la sumatoria, podemos descomponer en dos sumatorias resulta:

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})f(c_i) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})g(c_i) \right] =$$

Por propiedad del límite de una suma, que es igual a la suma de los límites, tenemos que:

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(c_i) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) g(c_i) =$$

Si consideramos que:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\ f(c_i) \wedge$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\ g(c_i)$$

Reemplazamos en la expresión anterior:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

4.2.- Integral definida del producto de una función por una constante

Vamos a demostrar que: $\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Por definición de la integral definida:

$$\int_a^b k\ f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\ k\ \ f(c_i) =$$

Si aplicamos primero las propiedades de las sumatorias que nos permiten sacar fuera del signo las constantes y luego la del límite del producto que nos dice que es igual al producto de los límites, resultará:

$$= \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(c_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} k\ \ \lim_{n\to\infty}\sum(x_i - x_{i-1}) f(c_i) =$$

Si calculamos los límites, tendremos que el primero es el límite de una constante que resulta igual a la misma constante y el segundo es la definición de la integral definida de una función, por lo tanto:

$$\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Otras propiedades, que son propias de la integral definida:

4.3.- Integral definida con extremos de integración iguales

En esta propiedad vamos demostrar que:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Para ello tendremos en cuenta lo visto en la definición de integral definida:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad (1)$$

Si llamamos M al máximo y m al mínimo de todo el intervalo cerrado $[a, b]$ debe resultar que:

$M_i \leq M \wedge m_i \geq m$, se debe verificar:

$$M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

Donde se pudo extraer M del signo de sumatoria por no depender de los subintervalos considerados, es decir de "i", y además, la sumatoria de todos los subintervalos de la partición nos va a dar el intervalo completo. De manera similar se puede analizar para el mínimo. Luego:

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m(b-a)$$

Reemplazando en la formula (1):

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

Y como se quiere hallar la integral cuyos extremos de integración coinciden, entonces el intervalo será $[a, a]$ cuya amplitud es, *a - a = 0*. Por lo tanto:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 0$$

Aplicando límite para ¨***n***¨ tendiendo a infinito :

$$\lim_{n\to\infty} 0 \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \lim_{n\to\infty} 0$$

Como resulta que el límite de cero es el mismo valor por ser una constante y teniendo en cuenta el Teorema de Confrontación entre límites podemos ver que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

y dicho límite resulta la integral definida:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

<u>4.4.- Integral definida de intervalos negativos (o inversión de los extremos de integración)</u>

Veremos que: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, donde la integral del segundo miembro corresponde a un intervalo negativo, ya que ¨*a*¨ es menor que ¨*b*¨ y entonces la amplitud del intervalo da un resultado negativo, es decir: $a < b \Rightarrow a - b < 0$

Para demostrar esta propiedad utilizaremos la definición de la integral definida.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{1-1})f(c_i)$$

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1} - x_i)f(c_i)$$

Si analizamos esta última expresión tendremos que:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1} - x_i)f(c_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} -(x_i - x_{i-1})f(c_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1} - x_i)f(c_i) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i) = -\int_a^b f(x)dx$$

Expresión que podemos llegar teniendo en cuenta que, como todos los términos de la sumatoria son negativos, la misma será negativa y por eso se pude sacar el signo menos afuera y además, se considera que el límite de la opuesta de una función es la opuesta del límite, con lo cual llegamos a la integral definida negativa, por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \end{array}}$$

4.5.- Propiedad aditiva del intervalo en la integral definida

Demostremos que: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$, para lo cual debemos considerar las posibles ubicaciones del punto ¨*c* ¨, es decir, si el punto pertenece al intervalo $[a , b]$ o si no pertenece al mismo, y en ese caso si se encuentra a la izquierda (menor que a) o a la derecha (mayor que *b*).

a) El punto $c \in (a , b)$, es un punto interior a dicho intervalo

En ese caso podemos hacer: $[a , b] = [a , c] \cup [c , b]$

Por lo tanto, si efectuamos una partición del intervalo, la misma originará una similar en cada uno de los subintervalos. Es decir, si dividimos el intervalo en ¨***n***¨ partes podemos suponer que los subintervalos se dividirán en ¨*k* ¨ y ¨*n-k*¨ partes, siendo ¨ $k < n$ ¨ , ambos naturales. Entonces podemos hacer:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

Si multiplicamos por $f(c_i)$ siendo $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ resulta:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(c_i) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1}) f(c_i) + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(c_i)$$

S aplicamos límite para $n \to \infty$, podemos pensar que $k \to \infty$, es decir, la norma del intervalo tenderá a cero y por consiguiente también lo harán las de los subintervalos. Entonces: $(\delta \to 0)$

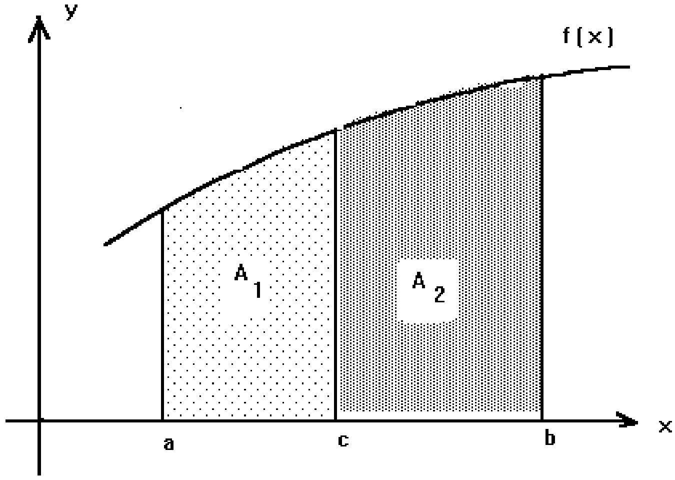
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(c_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1}) f(c_i) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(c_i)$$

Donde se ha aplicado la propiedad del límite de una suma y como dichos límites representan las integrales definidas respectivas, tenemos demostrado que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

Gráficamente podemos observar:



$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

Si llamamos: $A_1=\int_a^c f(x)\,dx$ Resulta:

$$A_2=\int_c^b f(x)\,dx$$

$A=A_1+A_2$ donde el área total es igual a la suma de las áreas 1 y 2.

b) el punto c $\notin$ [a , b] $\wedge$ c < a

Tendremos ahora dos subintervalos $[c,a] \wedge [c,b]$ de tal manera que resulte:

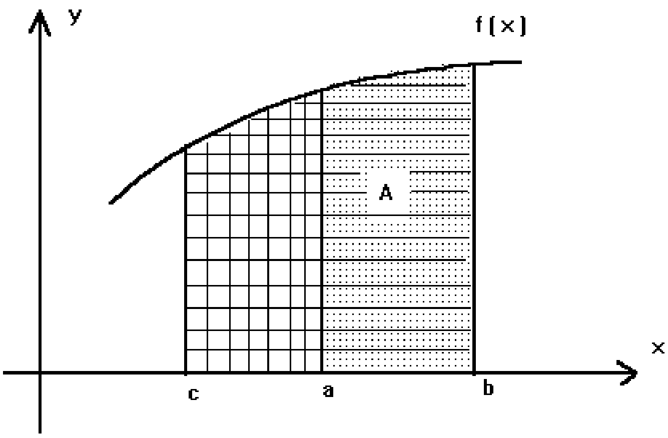
$[a,b] = [c,b] - [c,a]$ y entonces :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=$$

Pero, por ser el intervalo de integración negativo va a ser: $\int_a^c f(x)dx=-\int_c^a f(x)dx$

y reemplazando tenemos: $\int_a^b f(x)dx=\int_c^b f(x)dx-\int_c^a f(x)dx=$

Gráficamente:



Donde el área a determinar (sombreada con puntos) resulta igual a la diferencia entre el área sombreada con líneas horizontales menos la de líneas verticales.

c) El punto c $\notin$ [a , b] $\wedge$ b < c

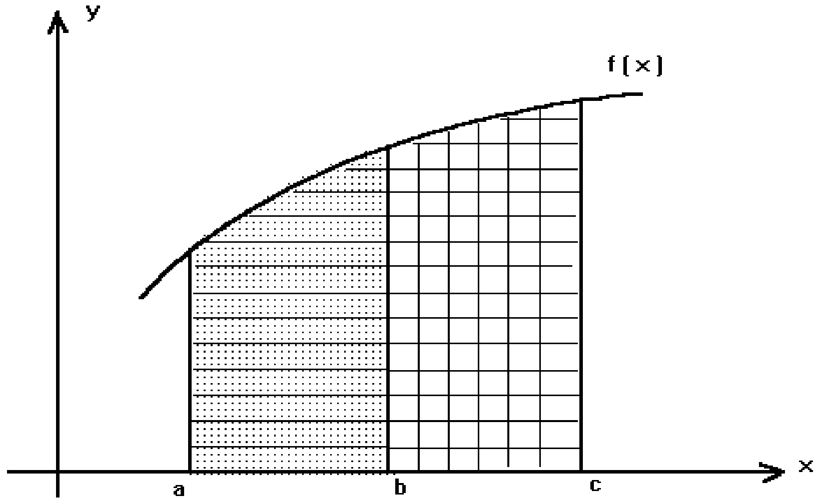
Sean los subintervalos *[a , c]* $\wedge$ *[b , c]*, de tal manera que resulta : *[a , b] = [a , c] - [b , c],* y por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Pero, por ser el intervalo de integración negativo: $\int_c^b f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx$

Reemplazando, tenemos: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx =}$

Gráficamente:



Donde

El área a determinar (sombreada con puntos) resulta igual a la diferencia entre el área sombreada con líneas horizontales menos las de líneas verticales.

5.- TEOREMA DE LA MEDIA DEL CÁLCULO INTEGRAL (O DEL VALOR MEDIO)

Sea *f(x)*, función definida y acotada en un $[a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$

Demostración: como *f (x)* está acotada en *[a , b]*, admitirá en dicho intervalo un valor máximo (*M*) y otro valor mínimo (*m*), de tal manera que debe verificarse que:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

Si además consideramos una partición de dicho intervalo, resultará un conjunto de subintervalos los que serán todos acotados y por consiguiente también tendrán máximos y mínimos, los que llamaremos respectivamente $M_i \wedge m_i$. donde resulta: $m \leq m_i \quad \wedge \quad M_i \leq M$

Por lo tanto se debe verificar:

$$M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

Extraemos M del signo sumatoria por no depender de los subintervalos considerados, es decir de "i", y además, la sumatoria de todos los subintervalos de la partición nos va a dar el intervalo completo. De manera similar se puede analizar para el mínimo:

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m(b-a)$$, teniendo en cuenta que cuando definimos la Integral Definida según Cauchy dijimos:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Por lo tanto, considerando las expresiones anteriores, resulta:

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

Si aplicamos límite con el número de subintervalos tendiendo a infinito (o la norma de la partición tendiendo a cero) resulta :

$$\lim_{n\to\infty} m(b-a) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \lim_{n\to\infty} M(b-a)$$

Pero como ni el máximo, ni el mínimo, ni la amplitud del intervalo dependen de la partición considerada, los podemos considerar como constantes y por lo tanto su límite da lo mismo y entonces teniendo en cuenta la definición de integral definida según Cauchy, resulta:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Si dividimos todo por (b - a), como el intervalo es positivo, la desigualdad no se altera y nos queda:

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

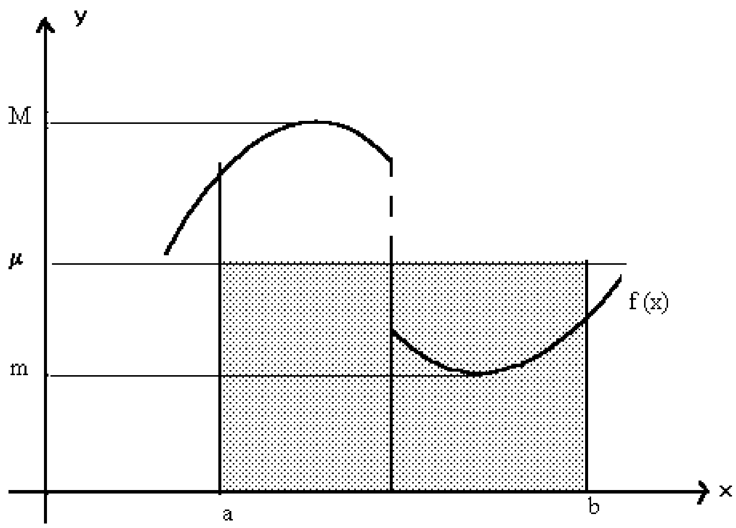
Llaman a esta expresión: $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx = \mu$

Luego: $m \leq \mu \leq M$. μ es un valor comprendido entre el Máximo y el Mínimo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

El área calculada por la Integral Definida puede ser sustituida (o resulta igual) por un área rectangular equivalente, multiplicando la amplitud del intervalo por el valor ¨mu ¨ *(μ)*, que está comprendido entre el máximo y el mínimo de la función en el intervalo.

Gráficamente:



Lo

Lo sombreado representa el área equivalente.

Ahora bien, si además de ser acotada, la función es continua (hay que tener en cuenta que toda función continua en un intervalo cerrado es siempre acotada en el mismo, no siempre es cierto el recíproco) podemos afirmar que va a existir un punto ¨*c* ¨ interior al intervalo, de tal manera que se verifique:

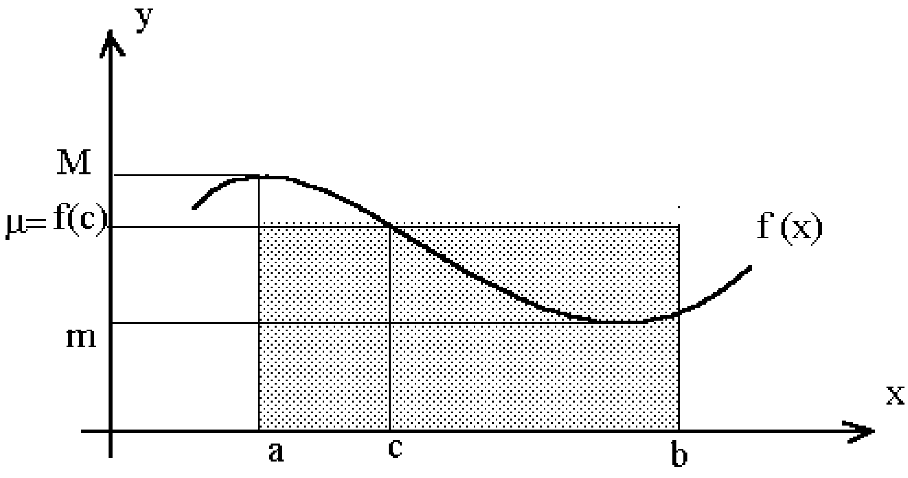
$$\mu = f(c) \qquad \wedge \qquad c \in (a,b)$$

Teniendo en cuenta que todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo están ocupados por valores de la función en el intervalo (esto no ocurre en funciones acotadas en el intervalo como se ve en el gráfico anterior). Entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(c)}$$

Donde el área equivalente ahora está constituida por el intervalo multiplicado por la función en un punto interior del mismo.

Gráficamente:



Nuevamente lo sombreado representa el área equivalente.

6.- TEÓREMA DE LA FUNCIÓN ÁREA (O DE LA PRIMITIVA O DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INTEGRAL)

Algunos autores llaman a este Teorema como el Fundamental de la Integral y esto tiene sus razones, ya que nos va a relacionar la integral indefinida (operación) con la definida (cálculo de área) y por lo tanto nos permitirá resolver fácilmente esta última.

Para demostrar este teorema, sea una función $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a , b]$, y teniendo en cuenta que: $\int_a^b f(x)dx = N^o$, corresponde a un área, podemos pensar que si sustituimos el extremo superior de la integral por una variable ¨x ¨ con la condición de que esta pertenezca al intervalo considerado, obtendremos una función de este extremo, que se denomina **Función Integral** (o Función Área), y nos dará un área variable. Es decir:

$$\int_a^x f(x)dx = F(x)$$

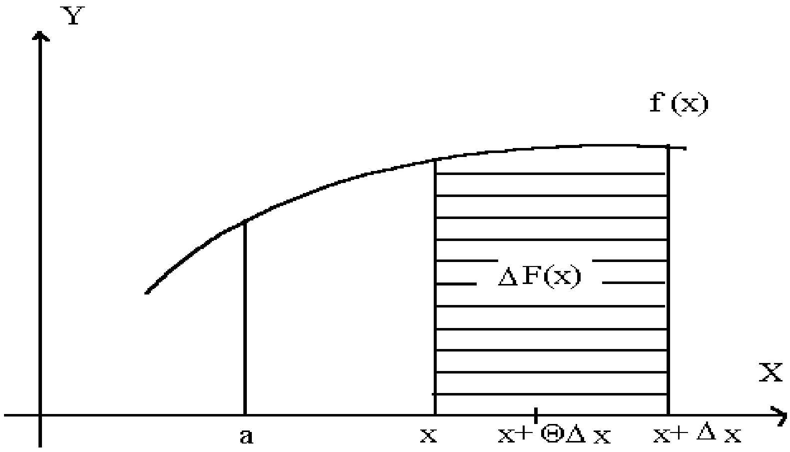
Si incrementamos el extremo superior, obtendremos una función incrementada, entonces:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx = F(x+\Delta x)$$

y haciendo la diferencia, obtendremos el incremento de la función integral:

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x)$$
$$= \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx$$

Como podemos observar en el grafico siguiente donde el incremento es el área sombreada:



Si además tenemos en cuenta la propiedad de la integral definida, que dice:

$$\int_a^x f(x)dx = -\int_x^a f(x)dx$$

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) =$$

podemos hacer: $= \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx + \int_x^a f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$

Hemos aplicado la propiedad aditiva del intervalo en la integral definida y por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, considerando que la amplitud del intervalo es Δx y que Θ es un valor comprendido entre cero y uno: $0 < \Theta < 1$, entonces $(x + \Theta \Delta x)$ en un punto interior del intervalo, resulta:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = \Delta x \, f(x + \Theta \Delta x)$$

Dividimos por Δx tendremos: $$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x + \Theta \Delta x)$$

pasando al límite para Δx tendiendo a cero, resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Theta \Delta x)$$

Entonces:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Lo cual nos permite afirmar que la que la función integral es una primitiva de la función integrando, por consiguiente, se podría calcular la función integral mediante la utilización de la integral indefinida.

7.- REGLA DE BARROW

Si *G(x)* es una primitiva de *f(x)*, función continua en $[a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b = [G(x)]_a^b$

Demostración: esta regla nos permite calcular una integral definida por aplicación de una primitiva y se basa en si dos funciones tienen igual derivada, ambas difieren en una constante (Teorema Fundamental del Cálculo Integral). Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} G(x)\, es\ una\ primitiva\ de\ f(x) \Rightarrow G'(x) = f(x) \\ F(x)\, es\ una\ primitiva\ de\ f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow F'(x) = G'(x) = f(x \Rightarrow F(x) = G(x) + K$$

siendo: $$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

si hacemos $x = a$, resulta: $$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

por ser los extremos de integración iguales, pero además:

$$F(a) = G(a) + K = 0 \quad \Rightarrow K = -G(a)$$

si hacemos $x = b$, tendremos: $$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

y también: $F(b) = G(b) + K = G(b) - G(a)$

Igualamos las dos expresiones anteriores resulta: $$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

que es la Regla de Barrow, que se puede también de la siguiente manera:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)}$$

Un ejemplo de aplicación de esta Regla:

Calcular la integral entre 1 y 3 de la función $y = x^2$

Para resolver procedemos de la siguiente manera:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

INTEGRALES IMPROPIAS

1.- INTRODUCCION:

La integral definida, vista anteriormente, tenía en cuenta que la función estaba definida en todos los puntos de un intervalo cerrado [a, b], finito, y en el cual, por lo menos, la misma tenía que ser acotada, es decir, no se admiten que existan puntos del intervalo en que la función tienda a infinito (discontinuidades infinitas).

Estas restricciones sobre la característica de la función y del intervalo son posibles de flexibilizar para poder resolver algunas aplicaciones prácticas que son útiles.

Para ello, desde el punto de vista matemático, se le debe dar un nuevo enfoque a la integral definida, obteniéndose con ello las integrales impropias.

Estas se originan por dos causas, y teniendo en cuenta esto, se clasifican. Puede ocurrir que el intervalo de integración no sea finito, por lo tanto, tiene uno o los dos extremos infinitos, y la integral será **Impropia de Primera Especie**, o que la función presente un infinito en el intervalo (no esté definida en un punto del mismo) y en ese caso es **Impropia de Segunda Especie**.

Veremos cómo se resuelven.

2.- Integrales Impropias de Primera Especie

En este caso, el intervalo de integración es infinito y en general se resuelven reemplazando el extremo infinito por una variable *(t)* y luego aplicar límite para *t* tendiendo a infinito.

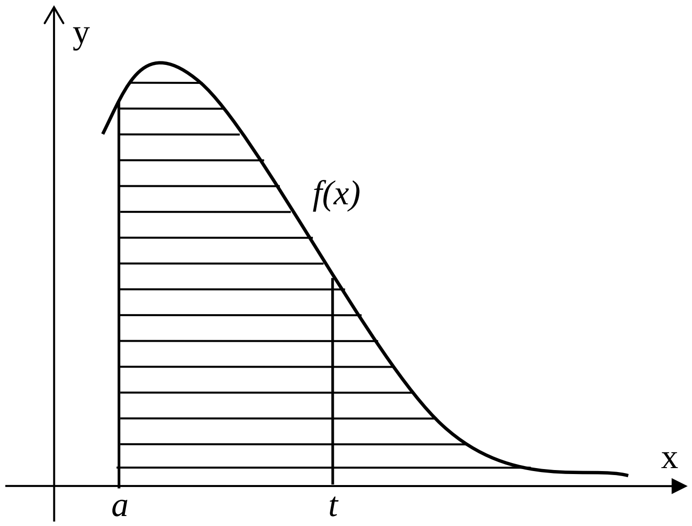
El resultado de este límite puede ser un valor finito. En este caso se dice que la integral impropia es convergente. Si el límite es infinito, la integral impropia será divergente y si no existe el límite la integral impropia será oscilante.

Analizamos cada una de las alternativas que se presentan:

a) El extremo superior de la integral es infinito

En este caso la integral a resolver es: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

Su gráfico podría ser el siguiente:

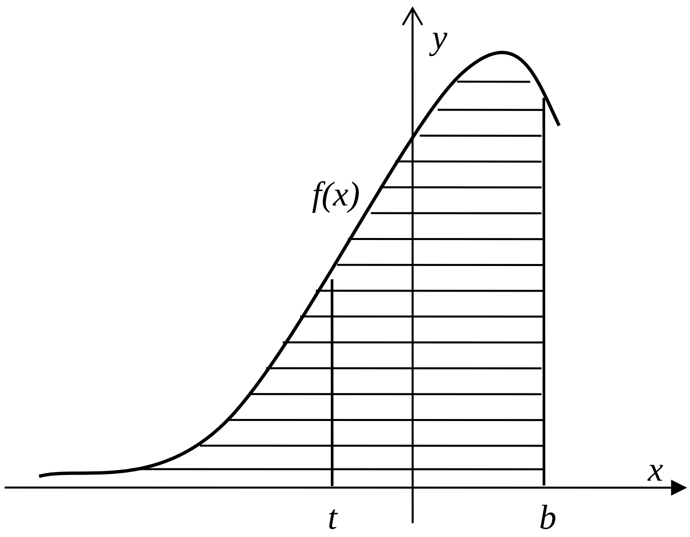


Para poder resolverla es necesario adaptar el extremo superior de la integral, variable " *t* " y aplicar límite tendiendo a infinito, es decir: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)\,dx =$

b) El extremo inferior de la integral es infinito

Ahora la integral a calcular resulta: $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

Y podemos suponer su que su gráfico es el siguiente:

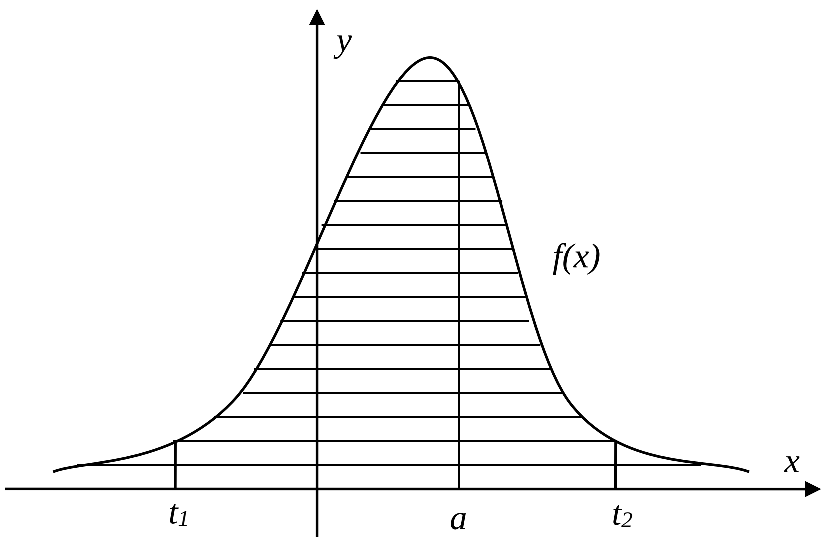


Ahora es necesario reemplazar el extremo inferior por la variable " *t* " y aplicar límite tendiendo a menos infinito, por lo tanto: $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx =$

c) Ambos extremos son infinitos

Entonces la integral a resolver es del tipo: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$

Y su grafica puede ser:



En este caso es necesario descomponer el intervalo de integración en la suma de otros dos. Para ello hay que adoptar un valor intermedio del mismo " *a* ". Aplicamos una propiedad vista en la integral definida (propiedad aditiva del intervalo de integración) y, entonces tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

Por consiguiente es preciso resolver dos integrales impropias similares a las vistas en los casos anteriores, por lo tanto, vamos a reemplazar los extremos infinitos por las variables " t_1 " y " t_2 " respectivamente y a continuación aplicamos los límites tendiendo a menos y más infinito respectivamente, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t_1 \to -\infty} \int_{t_1}^{a} f(x)\,dx + \lim_{t_2 \to +\infty} \int_{a}^{t_2} f(x)\,dx$$

3.- INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

En este caso la función presenta una discontinuidad infinita en un punto del intervalo, es decir, no está acotada en el mismo. Las posibilidades que se presentan son: que dicho punto singular se encuentre en uno de los extremos, o en el interior del intervalo, lo que nos dará los distintos casos, que en general se resuelven de la misma forma.

Para resolver es necesario desplazarnos del punto donde se presenta la discontinuidad y luego pasar al límite del nuevo extremo tendiendo a dicho punto.

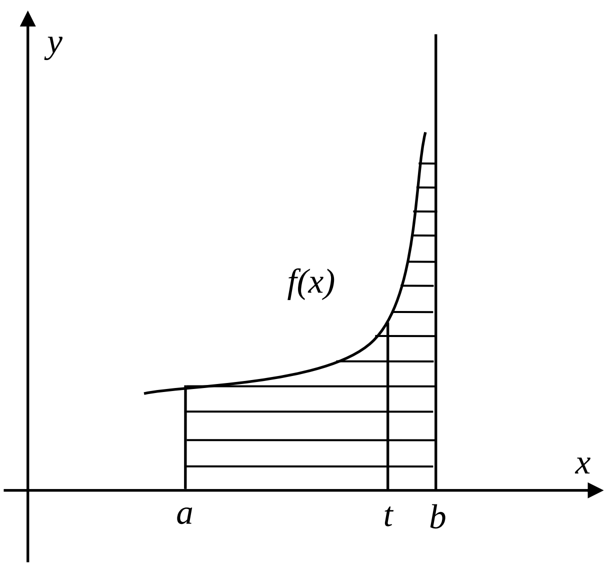
El límite, en general, es lateral, dado que debemos tender a la discontinuidad por un solo lado y al igual que en las de primera especie, puede ser finito o infinito, los que nos dará una integral impropia convergente o divergente según sea el resultado.

Analizamos los distintos casos que se presentan:

a) El punto de discontinuidad infinita se encuentra ubicado en el extremo superior del intervalo de integración

La integral a resolver será: $\int_{b}^{a} f(x)\,dx \quad \wedge \quad no\ existe\ \ f(b)$

Podemos suponer un gráfico como el siguiente:



Existen dos formas de planear el problema, que por supuesto llegan al mismo resultado. Una de ellas es suponer un extremo superior de la integral variable *t*, próximo a *b*, dentro del intervalo y luego hacer tender el mismo al extremo superior por izquierda, es decir: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx$

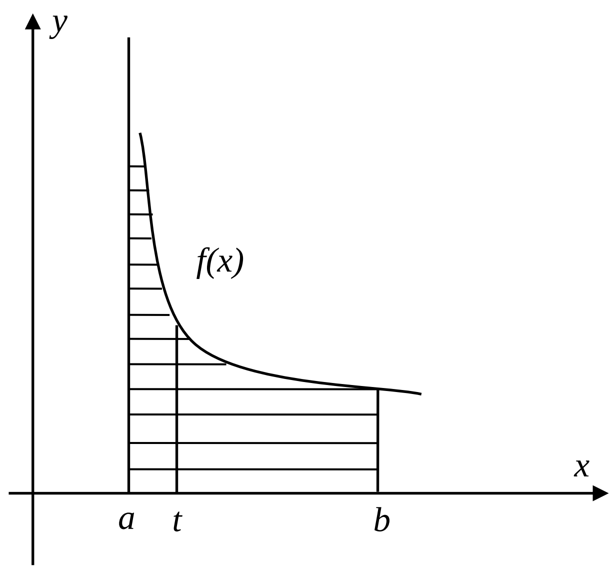
La otra manera se puede considerar un valor ε, positivo y variable, y reemplazar el extremo superior de la integral por la diferencia $b - \varepsilon$, y pasar al límite para ε tendiendo a cero, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

b) **El punto de discontinuidad infinita se encuentra ubicado en el extremo inferior del intervalo de integración**

En este caso tenemos: $\int_b^a f(x)\,dx \quad \wedge \quad no\ existe\ \ f(a)$

Podemos considerar el siguiente gráfico:



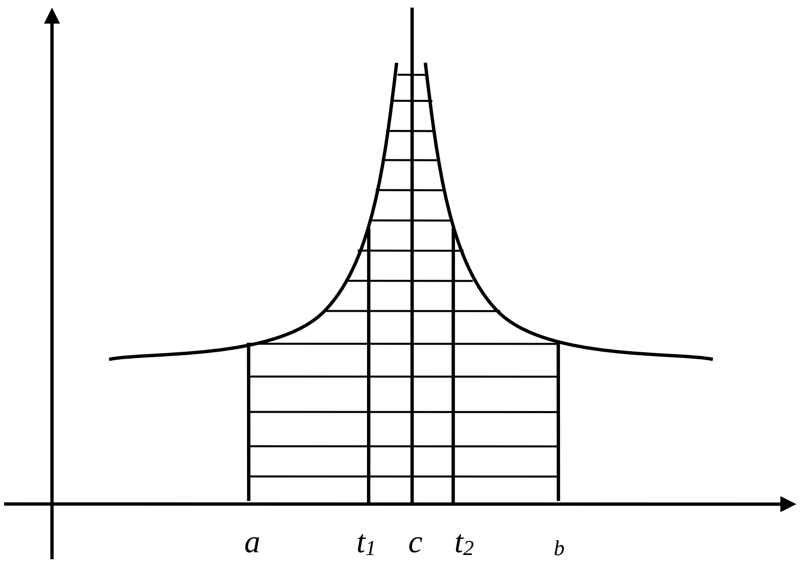
Y procedemos de manera similar al caso anterior, es decir: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$

O también: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$

c) **El punto de discontinuidad infinita se encuentra ubicado en un punto interior del intervalo de integración**

El problema a resolver es: $\int_b^a f(x)\,dx \quad \wedge \quad no\ existe\ \ f(c) \quad \wedge \quad c \in (a,b)$

Y podemos considerar el siguiente gráfico



En este caso, similar al último visto en las de primera especie, es necesario descomponer el intervalo de integración en la suma de otros dos. Para ello hay que adoptar un valor intermedio del mismo: *"c"* y aplicamos una propiedad vista en la integral definida (propiedad aditiva del intervalo de integración), y entonces tenemos: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Por consiguiente, es preciso resolver dos integrales impropias similares a las vistas en los casos anteriores. Por lo tanto, vamos a reemplazar los extremos "c" por las variables t_1 y t_2 respectivamente y luego aplicamos los límites laterales para ellas tendiendo a dicho extremo. Es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t_1 \to c^-} \int_a^{t_1} f(x)\,dx + \lim_{t_2 \to c^+} \int_{t_2}^{b} f(x)\,dx$$

<u>Ejemplos</u>:

1.- Calcular la siguiente integral: $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$

Para resolverla cambiamos el extremo superior de la misma por una variable *t* y resolvemos el límite para dicha variable tendiendo a infinito:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-t} + e^{0}\right]$$

Aplicamos la Regla de Barrow, restando solamente calcular el límite. Por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-t} + e^{0}\right] = \lim_{t\to\infty} \left[1 + \frac{1}{e^{t}}\right] = \left[1 + \frac{1}{e^{\infty}}\right] = 1$$

Como el resultado es finito, la misma es <u>*convergente.*</u>

2.- Calcular la siguiente integral: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Para resolverla, al igual que en el ejemplo anterior, cambiamos el extremo superior de la misma por una variable t y resolvemos el límite para dicha variable tendiendo a infinito, es decir:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x^{-1/2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[2 (\sqrt{t} - \sqrt{1}) \right] = 2\left(\sqrt{\infty} - 1 \right) = \infty$$

Como el resultado es infinito, la misma es *divergente.*

3.- Calcular la siguiente integral: $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

En este ejemplo, la integral presenta una discontinuidad infinita en el extremo superior de la misma. Por Si reemplazamos por la variable *t* y luego resolvemos el límite para este tendiendo a 1, es decir:

$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1} \int_0^{t} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1} \left[arc\ \ sen\, x \right]_0^t = \lim_{t\to 1} \left[arc\ \ sen\, t \text{ - } arc\ sen\, 0 \right] =$$

$$= arc\ \ sen\, 1 \text{ - } arc\ sen\, 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Integral Impropia *convergente.*

4.- Calcular la siguiente integral: $\int_0^{2} \frac{dx}{x^3}$

En este caso la discontinuidad infinita está en el extremo inferior y es el que reemplazamos. Por lo tanto:

$$\int_0^{2} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to 0} \int_t^{2} x^{-3} dx = \lim_{t\to 0} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_t^2 = \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{-2x^{-2}} \right]_t^2 = \lim_{t\to 0} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2t^2} \right] = -\frac{1}{8} + \frac{1}{0} = \infty$$

Integral Impropia *divergente.*

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

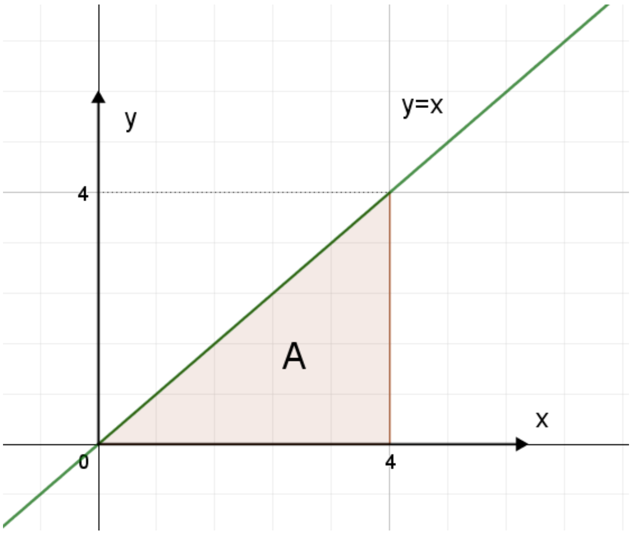
1.- APLICACIONES GEOMÉTRICAS

1.1.- CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

Como primera aplicación de la Integral Definida veremos el cálculo de áreas planas. Algunos problemas que se presentan:

I) Calcular el área del triángulo formado por la recta y=x, el origen del Sistema de ejes coordenados y la ordenada correspondiente a x=4.

Gráficamente:



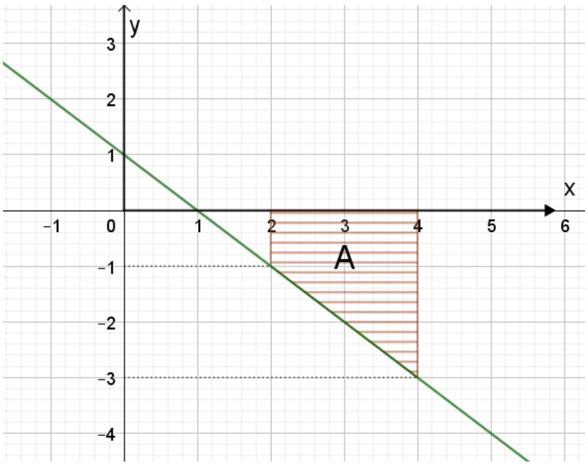
Considerando el área de un triángulo, el resultado será baso por altura sobre dos: $A = 4 \text{ x } \frac{4}{2} = 8$.
Aplicando la integral definida a *y=x* entre los extremos del intervalo de integración [0 ; 4]:

$$A = \int_0^4 y\,dx = \int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ u. a. (unidades de área)}$$

I

II) Calcular el área comprendida entre la recta y=1, el eje x y las ordenadas correspondientes x=2 y x=4.

Gráficamente:



El área a calcular según el gráfico, corresponde a un trapecio. Cuy área es la semisuma de sus lados por la altura: $\frac{1+3}{2}$ x $2 = 4$.

Aplicando la integral definida:

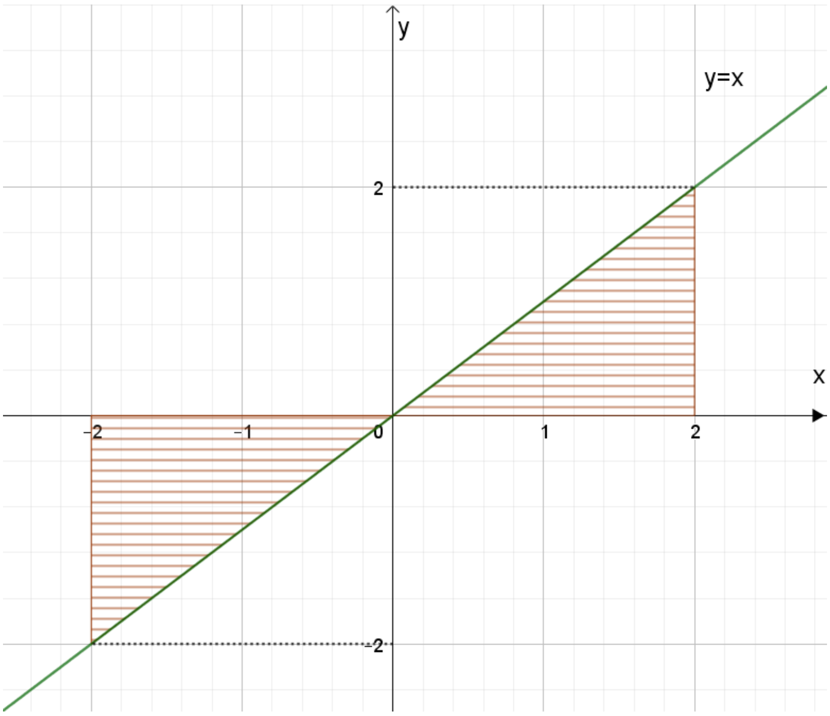
$$A = \int_{2}^{-4} (x-1)\, dx = \int_{2}^{-4} dx - \int_{2}^{-4} x\, dx \;=\; [x]\begin{matrix}-4\\2\end{matrix} - \left[\frac{x^2}{2}\right]\begin{matrix}-4\\2\end{matrix} = (4-2) - \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) =$$

$$= 2 - 8 + 2 = \; -4$$

Vemos que el resultado obtenido mediante la integral es el mismo que el calculado anteriormente, pero con signo negativo. Esto es porque las áreas que se encuentran por debajo del *eje x* son negativas. Es necesario tener en cuenta la posición de la superficie respecto del eje coordenado. En estos casos tomamos el resultado valor absoluto: $\mathrm{A} = |-4| = 4$ u. a.

III) Calcular el área comprendida entre la recta y=x, el eje x y las ordenadas correspondientes x=2 y x=-2.

Gráficamente:



El área a calcular corresponde a dos triángulos rectángulos de base 2 y altura también 2, Luego:

$A = 2\,.\,\left(\frac{2\,.2}{2}\right) = 4.$

Mediante la integral:

$$A = \int_{-2}^{2} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]\begin{matrix}2\\-2\end{matrix} = (4-2) - \left(\frac{-2^2}{2} - \frac{-2^2}{2}\right) = -2 + 2 = \; 0$$

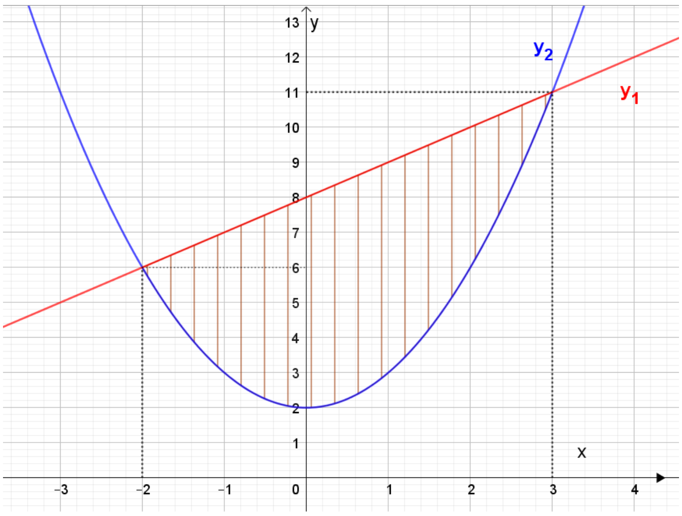
Esto indicaría que no tenemos área, y esto no es así ya que hemos visto que el área es 4. Observando el gráfico vemos que parte del área se encuentra por debajo del eje de abscisas, o sea área negativa. Asimismo, el área que está por encima del *eje x* es la misma que está por debajo. O

sea, son simétricas respecto del origen del sistema de ejes. Al resolver mediante la integral, y calcular el área, sumamos el positiva y el área negativa. Por lo tanto, debemos tener en cuenta la posición de la curva respecto del eje de abscisas, y en caso de observar cambios tenemos que integrar cada parte por separado y las negativas, en valor absoluto y luego realizar la suma.
En este caso, la recta entre -2 y 0, está por debajo del *eje x*, y entre 0 y 2, por encima.
Entonces:

$$A = \left|\int_{-2}^{0} \mathrm{x\,dx} + \right| + \left|\int_{0}^{2} \mathrm{x\,dx}\right| = \left|\left[\frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_{0}^{2}\right| = \left|\frac{4}{2}\right| + \left|\frac{4}{2}\right| = 4\ \mathrm{u.a.}$$

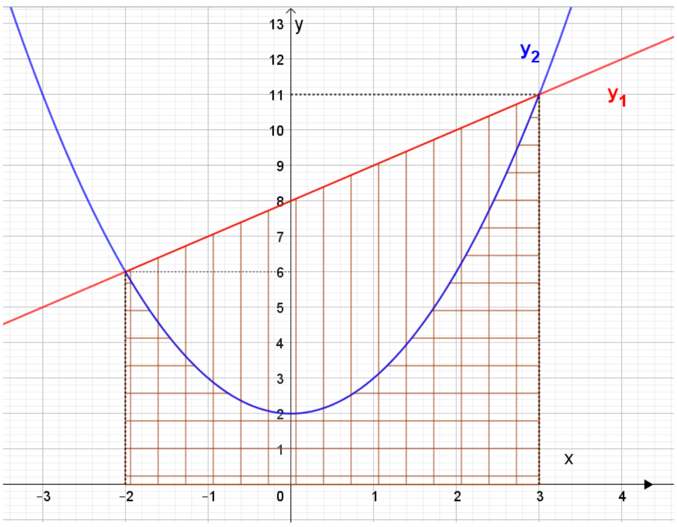
IV) Calcular el área encerrada entre las siguientes curvas: $\begin{cases} \boldsymbol{y_1 = x + 8} \\ \boldsymbol{y_2 = x^2 + 2} \end{cases}$

Es importante graficar ambas funciones para visualizar el problema a resolver:



Realizamos la intersección entre ambas curvas para determinar los extremos de integración: Sean: $y_1 = x + 8$ $y_2 = x^2 + 2$. Entonces: $y_1 = y_2$. Luego:
$x + 8 = x^2 + 2$, de donde: $x^2 - x - 6 = 0,$ *cuyas raíces son*: $x_1 = 3$; $x_2 = -2$.

El área buscada será la diferencia entre el área de la recta respecto del *eje x*, entre los extremos de integración -2 y 3 (sombreada verticalmente en el gráfico), y la de la parábola con respecto también al *eje x* y extremos (sombreada horizontalmente).



Por lo tanto:

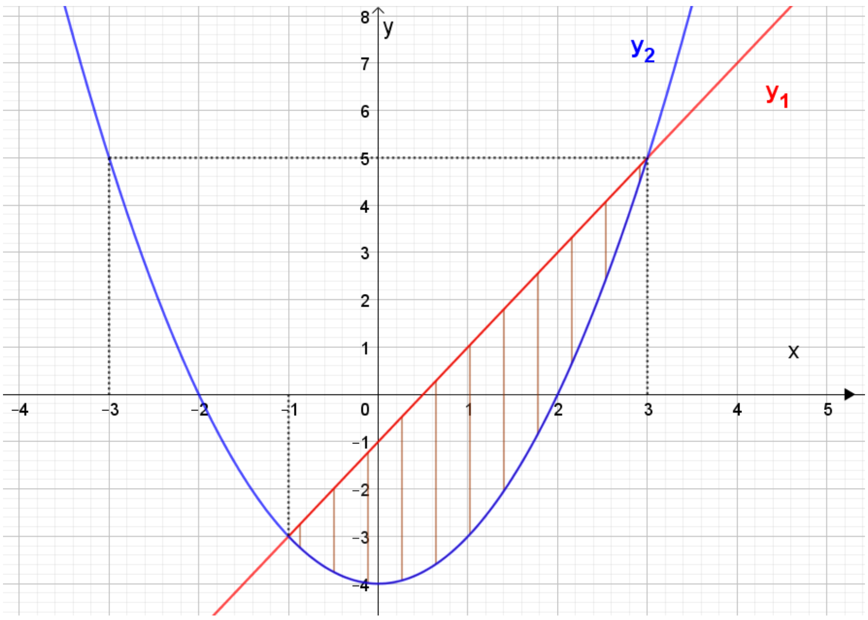
$$A = \int_{-2}^{3} y_1\,dx - \int_{-2}^{3} y_2\,dx = \int_{-2}^{3} (y_1 - y_2)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} (x + 8 - x^2 - 2)\,dx = \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{3} =$$

$$= \frac{125}{6}\ u.a.$$

V) Calcular el área encerrada entre las siguientes curvas: $\begin{cases} \boldsymbol{y_1 = 2x - 1} \\ \boldsymbol{y_2 = x^2 - 4} \end{cases}$

Realizamos el gráfico:



En este caso, ambas curvas tienen una parte por encima del *eje x*, y otra por debajo. Para resolver el área, no solo tenemos que hallar la intersección entre ambas curvas, sino también los ceros (intersección con el *eje x*).

Entonces: $y_1 = y_2 \Longrightarrow\ 2x - 1 = x^2 - 4\ \Longrightarrow\ x^2 - 2x - 3 = 0\ \Longrightarrow\ x_1 = 3\ ;\ x_2 = -1.$

Los ceros, son: $Recta$: $2x - 1 = 0\ \Rightarrow\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $Parábola$: $x^2 - 4\ \Rightarrow x = \pm 2$

Para calcular el área dividimos ésta en tres subáreas, teniendo en cuenta los cambios relativos de posiciones:

$$A_1\ \ entre\ -1\ \wedge\ \frac{1}{2}$$

$$A_2\ \ entre\ \ \frac{1}{2}\ \wedge\ 2$$

$$A_3\ \ entre\ \ 2\ \wedge\ 3$$

Resolviendo la diferencia de las áreas de la recta y la parábola, en valor absoluto, de cada una de las subáreas y sumándolas, obtenemos la superficie encerrada por las curvas:

$$A_1 = \left|\int_{-1}^{1/2} (2x = 1)dx - \int_{-1}^{1/2} (x^2 - 4)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{1/2} (2x + 3 - x^2)dx\right| = \left|\frac{27}{8}\right| = \frac{27}{8}$$

$$A_2 = \left|\int_{1/2}^{2} (2x - 1)\,dx - \int_{1/2}^{2} (x^2 - 4)\,dx\right| = \int_{1/2}^{2} (2x + 3 - x^2)\,dx = \left|\frac{45}{8}\right| = \frac{45}{8}$$

$$A_3 = \left|\int_{2}^{3} (2x - 1)dx - \int_{2}^{3} (x^2 - 4)\;\,dx = \int_{2}^{3} (2x + 3 - x^2)\,dx\right| = \left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$$

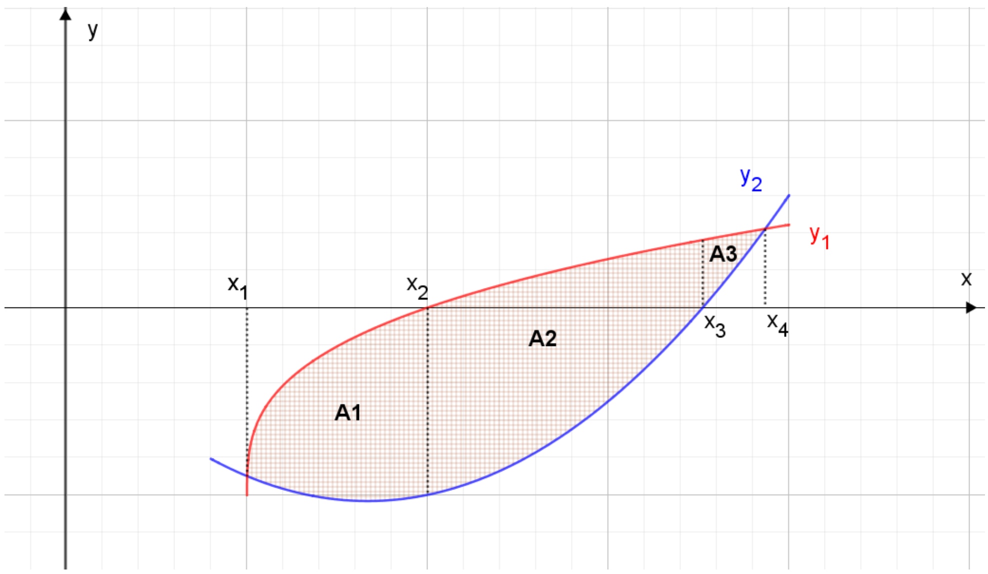
Luego, el área total será: $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{27}{8} + \frac{45}{8} + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}\;\; u.a.$

Como podemos observar este procedimiento resulta bastante trabajoso. Veremos que resulta si integramos solamente entre los puntos de intersección entre las dos curvas, sin tener en cuenta lo que está debajo o arriba del *eje x*:

$$A = \int_{-1}^{3} (2x - 1)\,dx \;-\; \int_{-1}^{3} (x^2 - 4)\,dx = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\,dx = \frac{32}{3}\;\; u.a.$$

Como llegamos al mismo resultado Podemos pensar que sería lo mismo proceder de esta última manera. Para estar seguros debemos demostrar en general.

Sean: $y_1 = f(x) \qquad y_2 = g(x)$ dos funciones cualesquiera.
Supongamos que sus gráficas, son:



Las curvas se cortan en dos puntos de abscisas: x_1 y x_4. La función y_1 corta al *eje x* en x_2, y la función y_2 en x_3. De esta manera podemos dividir el área a calcular, en tres partes. Llamamos A_1 al área comprendida entre x_1 y x_2. Vemos que se encuentra por debajo del *eje x*, por lo tanto, es negativa. El resultado será la resta entre la curva generada por la función y_2 menos y_1, cambiada de signo.

Entonces tendremos: $A_1 = -\left(\int_{x_1}^{x_2} y_2 - \int_{x_1}^{x\;\;2} y_1\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} y_1\,dx - \int_{x_1}^{x_2} y_2\,dx$

A_2 comprendida entre x_2 y x_3, donde una parte es positiva y otra negativa. Hacemos la diferencia entre las dos: $A_2 = \int_{x_2}^{x_3} y_1\, dx - \int_{x_2}^{x_3} y_2\, dx$

A_3 comprendida entre x_3 y x_4, área positiva. Hacemos la diferencia entre las dos: $A_3 = \int_{x_3}^{x_4} y_1\, dx - \int_{x_3}^{x_4} y_2\, dx$

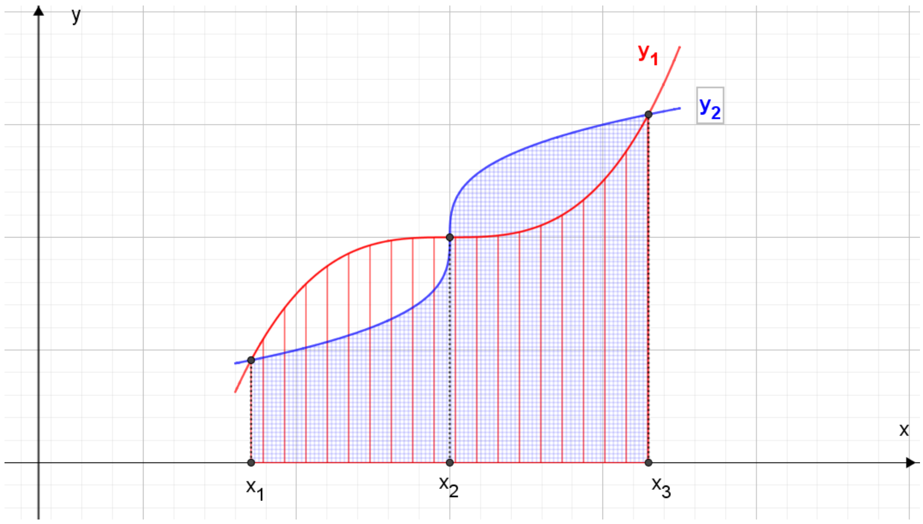
Luego, el resultado del área buscada será la suma de las tres áreas parciales:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \left(\int_{x_1}^{x_2} y_1\, dx - \int_{x_1}^{x_2} y_2\, dx\right) + \left(\int_{x_2}^{x_3} y_1\, dx - \int_{x_2}^{x_3} y_2\, dx\right) + \left(\int_{x_3}^{x_4} y_1\, dx - \int_{x_3}^{x_4} y_2\, dx\right)$$

Aplicando propiedades: $A = \int_{x_1}^{x_4} y_1\, dx - \int_{x_1}^{x_4} y_2\, dx = \int_{x_1}^{x_4} (y_1 - y_2)\, dx.$

Esto se puede realizar siempre que la posición relativa entre las curvas de las funciones $y_1 = f(x)$ $y_2 = g(x)$ se mantenga. Caso contrario habrá que integrar en valor absoluto entre cada cambio de posición relativa, sin tener en cuenta las intersecciones con el *eje x*. Es decir, si está por encima o por debajo del eje de abscisas.
Por ejemplo, en el siguiente gráfico:

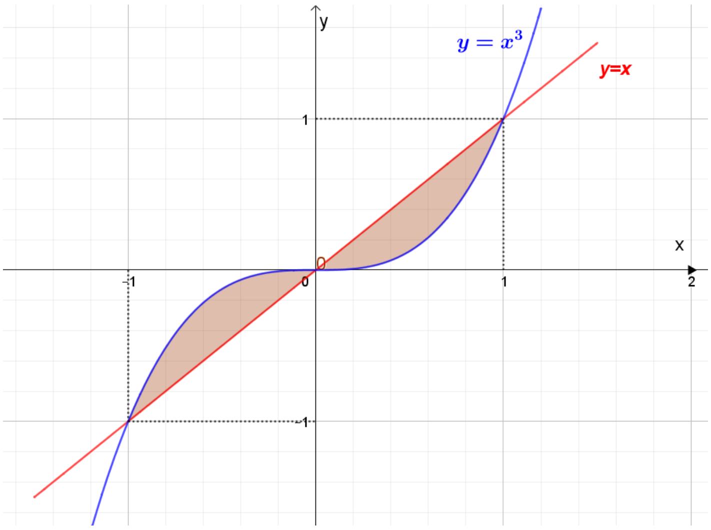


El área originada por la curva de la función y_1 con respecto al *eje x*, como podemos observar, es la sombreada con rectas, y la de y_2 con puntos.
Si hacemos: $\int_{x_1}^{x_3} (y_1 - y_2)\, dx$. Resulta que entre x_1 y x_2, el área originada por y_1, es mayor que la de y_2. Por lo tanto, el resultado es positivo. En cambio, entre x_2 y x_3, el área de y_1 es menor que la de y_2, con resultado negativo. En el gráfico, las áreas con los dos sombreados se anulan, y las de un solo sombreado, son del mismo signo. Por lo tanto, hacemos la diferencia. Luego:
$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y_2)\, dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} (y_1 - y_2)\, dx\right|$. De esta manera podemos calcular el área.

VI) Calcular el área encerrada entre las siguientes curvas: $\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^3 \end{cases}$

Hacemos: $y_1 = y_2$. Entonces: $x = x^3 \Longrightarrow x^3 - x = 0$
$\therefore$ $x\,.(x^2 - 1) = 0$, obtenemos tres raíces: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$

Si realizamos el gráfico:



Vemos que se produce un cambio de posición relativa entre ambas curvas, lo que original un cambio de signo, lo que nos indica que debemos integrar por secciones:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{4}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right| = 1\ u.a$$

VII) **Calcular el área del triángulo formado por las rectas:** $\begin{cases} \boldsymbol{y = 2x - 3} \\ \boldsymbol{y = x - 1} \\ \boldsymbol{y = 5} \end{cases}$

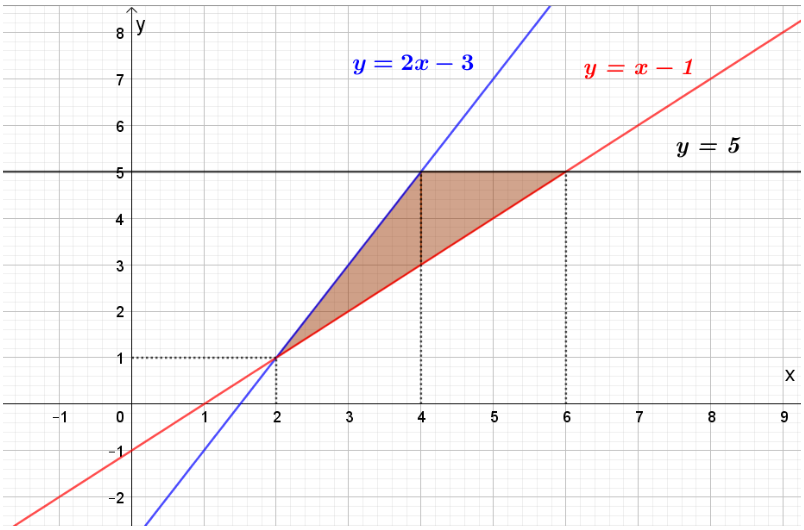
Realizamos la intersección de las rectas a efectos de obtener los vértices del triángulo

Primera intersección: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$. Entonces: 2x – 3 = x – 1 ; x = 2. Luego: A(2 ; 1)

Otra intersección: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 5 \end{cases}$. 2x – 3 = 5 ; x = 4. Luego: B(4 ; 5)

Por último: $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 5 \end{cases}$. x – 1 = 5 ; x = 6. Luego: A(6 ; 5)

Gráficamente:



Observando el gráfico, vemos que no podemos hacer una sola integral respecto del *eje x*, tenemos que dividirla en dos. Una entre 2 y 4, y la otra entre 4 y 6, ambas en valor absoluto.
Asimismo, cambian las funciones en cada caso. Entre 2 y 4, la diferencia será entre: y = 2x - 3 ; y = x – 1.
Entre 4 y 6: y = 5 ; y = x – 1.
Tendremos las siguientes integrales:

$$A_1 = \int_2^4 [(2x-3)-(x-1)]\,dx = \int_2^4 (x-2)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4 = 2$$

Análogamente:

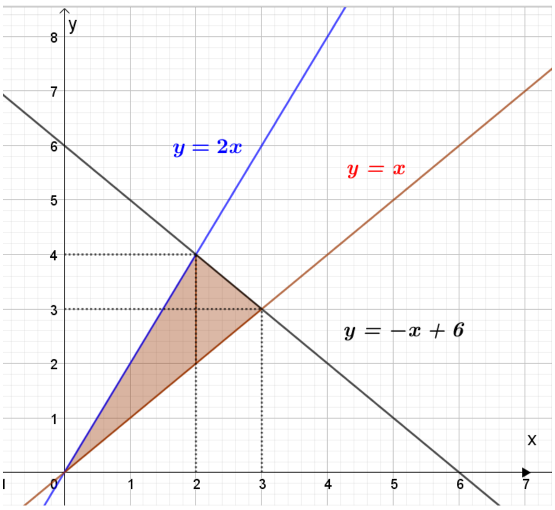
$$A_2 = \int_4^6 [5-(x-1)]\,dx = \int_4^6 (-x+6)\ dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 6x\right]_4^6 = 2$$

Luego: $A = A_1 + A_2 = 4\ \ u.a.$

Ahora bien, podemos pensar en otra manera mas sencilla de resolver este ejercicio, mediante una sola integral. Esto es, integrar respecto del *eje y* en lugar del *eje x*. Para ello es necesario expresar x en función de y en cada una de las funciones.
y = 2x – 3 $\Longrightarrow x = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$; y = x – 1 $\Longrightarrow x = y + 1$
Tendríamos que integrar la diferencia de ambas funciones en el intervalo [1 ; 5]. O sea, con extremos de integración 1 y 5.
Entonces: $A = \int_1^5 \left[(y+1) - \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)\right] dy = \int_1^5 \left(\frac{y}{2} + \frac{5}{2}\right) dy = \left[\frac{y^2}{4} + \frac{5y}{2}\right]_1^5 = 4\ \ u.a.$

VIII) Calcular el área del triángulo formado por las rectas: $\begin{cases} \boldsymbol{y = 2x} \\ \boldsymbol{y = x} \\ \boldsymbol{y = -x + 6} \end{cases}$

Gráficamente:



En este caso no tendremos ninguna ventaja si integramos respecto del *eje y*, o del *eje x*. Integramos respecto del *eje x*. Realizamos las intersecciones de las rectas y obtenemos:

$I_1 = (0\,,0)$ $\quad I_2 = (2\,,4)$ $\quad I_3 = (3\,,3)$, que representan los extremos de integración.

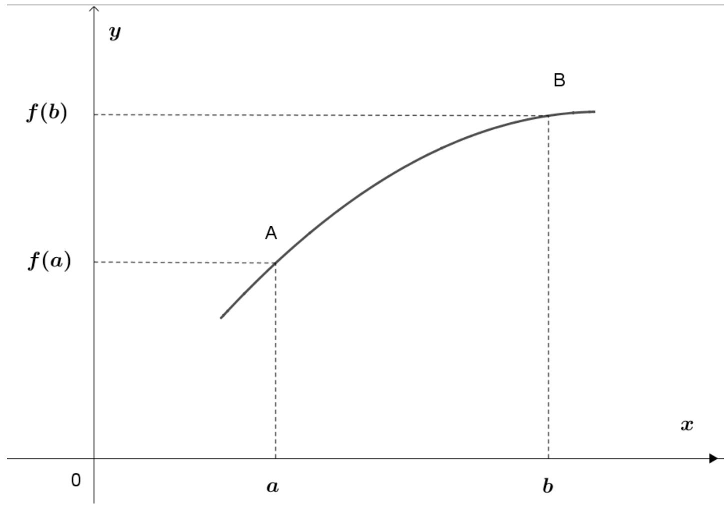
El área buscada, será: $A_1 = \int_0^2 (2x - x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = 2$

$$A_2 = \int_2^3 (-x+6-x)\,dx = \int_2^3 (6-2x)\,dx = 1$$

Luego: $A = A_1 + A_2 = 2 + 1 = 3\ \ u.a$

1.2.- LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA (RECTIFICACIÓN DE ARCOS)

El problema consiste en calcular la longitud de una curva plana, que representa a una función: y = f(x) derivable en un intervalo [a ; b], entre dos puntos A[a ; f(a)] y B[b ; f(b)], extremos del mismo.
Su gráfica podría ser:



Para obtener la longitud del arco de curva, realizamos una partición del intervalo [a ; b] y lo dividimos en n subintervalos, siendo:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_i \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Los valores de la función:

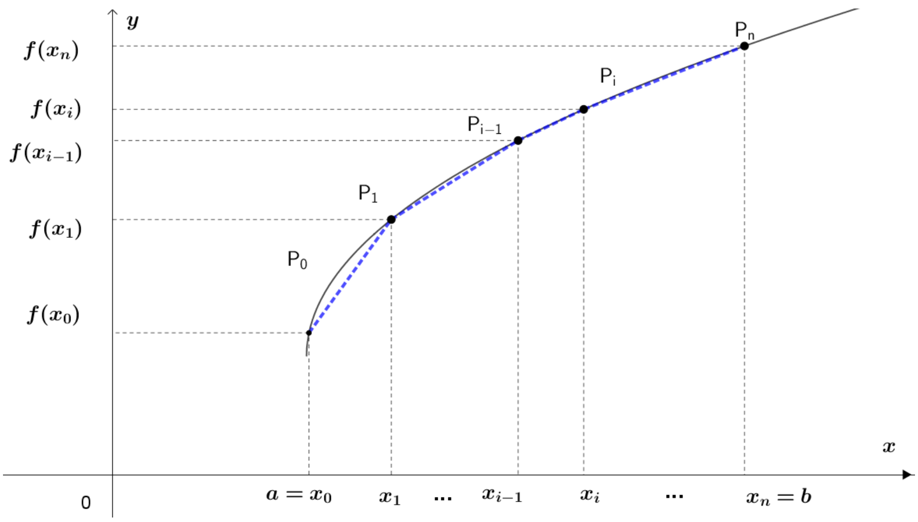
$$f(x_0)\ ;\ f(x_1)\ ;\ f(x_2)\ ; \ldots ;\ f(x_{i-1})\ ;\ f(x_i)\ ; \ldots ;\ f(x_{n-1})\ ;\ f(x_n)$$

Los puntos correspondientes a la curva de la función, serán:

$$P_0\big(x_0\,;f(x_0)\big)\,;\ P_1\big(x_1\,;f(x_1)\big)\,;\ P_2\big(x_2\,;f(x_2)\big)\,;\ \ldots\ ;P_{i-1}\big(x_{i-1}\,;f(x_{i-1})\big)\,;\ P_i\big(x_i\,;f(x_i)\big)\ldots;$$

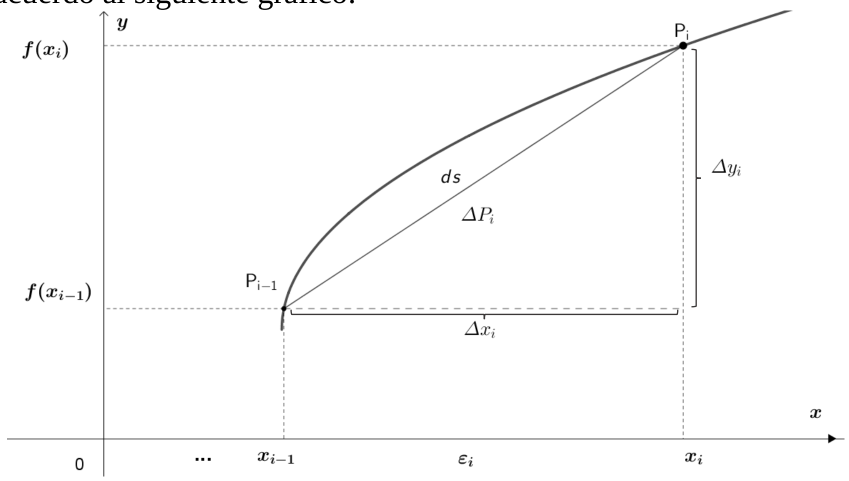
$$;\ P_{n-1}\big(x_{n-1}\,;f(x_{n-1})\big)\,;\ P_n\big(x_n\,;f(x_n)\big)$$

Si unimos estos puntos de la curva, tendremos una poligonal inscripta en el gráfico de la función:



Si refinamos la partición, la longitud de esta poligonal a se acerca cada vez más a la de la curva, y en el límite con el número de subintervalos tendiendo a infinito, obtendremos la longitud del arco de curva, siempre que este límite exista, y podemos decir entonces que la curva es rectificable.

Para calcular la longitud de la poligonal, determinamos previamente la de los segmentos que la conforman, de acuerdo al siguiente gráfico:



Donde: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$

Entonces: $\Delta P_i = ds = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left[1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right]} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right]}$

Si consideramos: $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ que representa un incremento funcional, podemos aplicar el Teorema de Lagrange (del Valor Medio del Cálculo Diferencial) por ser *f(x)* función derivable:
$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} \,.\, f'(\varepsilon_i) = \Delta y_i \,.\, f'(\varepsilon_i)$; siendo: $\varepsilon_i \in (x_{i-1} \,;\, x_i)$

$$\therefore \Delta P_i = ds = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\cancel{\Delta x_i} \cdot f'(\varepsilon_i)}{\Delta x_i}\right)^2\right]} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \cdot \left[1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2\right]} = \sqrt{1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2} \,.\, \Delta x_i$$

Si queremos calcular la longitud de la poligonal, será la suma de todos los segmentos que la componen:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2} \,.\, \Delta x_i$$

Como la longitud de la curva resulta igual al límite para la cantidad de puntos tendiendo a infinito, o la norma de la partición tendiendo a cero, tendremos:

$$s = \lim_{n \to \infty} P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2} \,.\, \Delta x_i$$

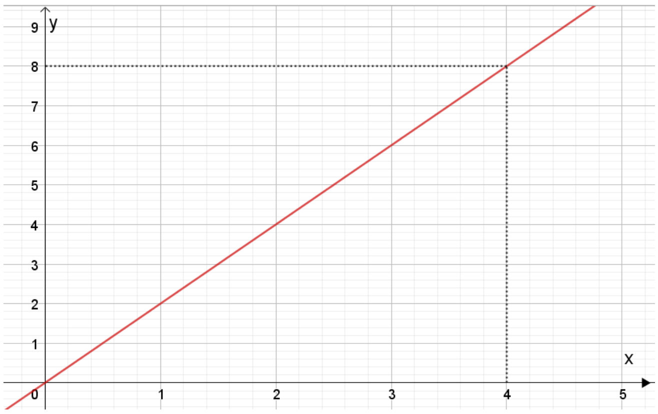
Y por definición de integral definida:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2} \,.\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \,.\, dx$$

Luego, la longitud de la curva en el intervalo [a ; b], será: $s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \,.\, dx$

Vemos algunos ejercicios de aplicación:

1.- Calcular la longitud de la recta *y = 2x* en el intervalo [0 ; 4]
Graficamos la función:



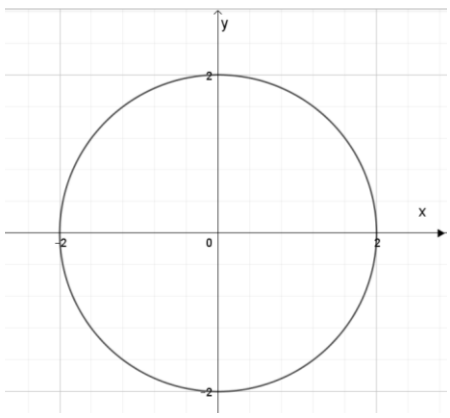
Por el Teorema de Pitágoras podemos calcular:
$L = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 - 64} = \sqrt{80} = \sqrt{5\,.\,16} == 4\,.\,\sqrt{5}$

Mediante la fórmula de la longitud de un arco de curva:
y = 2x ⇒ y' = 2.
Luego: $L = \int_0^4 \sqrt{1 + 2^2}\ dx = \int_0^4 \sqrt{5}\ dx = \sqrt{5}\int_0^4 dx = \sqrt{5}\,[x]_0^4 = 4\sqrt{5}$

2.- Calcular la longitud del arco de parábola $y = \frac{2}{3}\,.\,x^{\frac{3}{2}}$, el intervalo [0 ; 3]
Consideramos: $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}\,.\,x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = x^{\frac{1}{2}}}$
Aplicando la fórmula, resulta: $L = \int_0^3 \sqrt{1 + (x^{1/2})^2}\ dx = \int_0^3 \sqrt{1 + x}\ dx,$
Resolvemos esta integral, por sustitución:
Llamamos: $u = 1 + x \quad \Longrightarrow \quad du = dx$
Entonces: $L = \int_0^3 \sqrt{1 + x}\ dx = \int_0^3 \sqrt{u}\ du = \int_0^3 u^{1/2}\ dx = \left.\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|_0^3 = \left.\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right|_0^3 = \frac{14}{3}$, longitud de la curva.

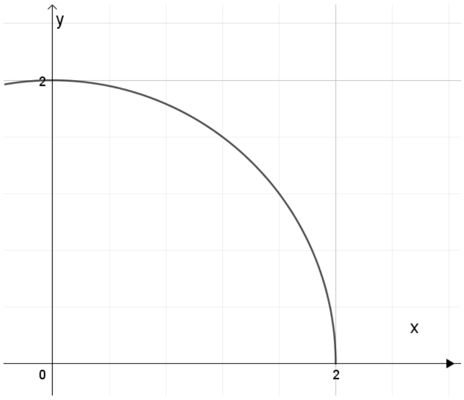
3.- Calcular la longitud de una circunferencia de radio 2.

La ecuación de esta circunferencia, es: $x^2 + y^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$
Graficamos:



Derivamos: $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

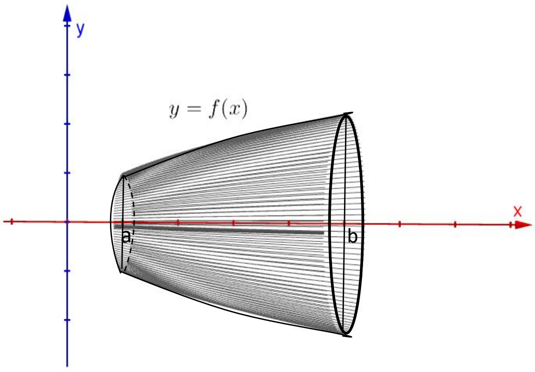
Si queremos aplicar la fórmula para hallar la longitud, determinamos los extremos de integración y tener en cuenta que la circunferencia en su totalidad no representa una función, ya que para cada elemento del Dominio tiene dos Imágenes. Por lo tanto, solo debemos tomar la parte positiva de la raíz, gráficamente por encima del *eje x*. En este caso se presentan dos posibilidades: una considerar el intervalo [-2 ; 2], mitad de la circunferencia. Luego al resultado lo multiplicamos por 2. La otra, el intervalo [0 ; 2], la cuarta parte de la circunferencia, y al resultado lo multiplicamos por 4.
Utilizando esta última opción:



Luego, la longitud de la circunferencia, será: 4π

1.3.- VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Llamamos Sólido o Cuerpo de Revolución, al engendrado por una función continua al girar alrededor de un eje.
Por ejemplo, la función *f(x)* en un intervalo [a ; b] gira alrededor del eje x, de acuerdo con el siguiente gráfico:



Vamos a calcular el Volumen encerrado por dicho Cuerpo o Sólido de Revolución. Para ello realizamos una partición del intervalo [a ; b], obteniendo *n* subintervalos que pueden ser iguales o distintos en su amplitud:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_i \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Obtenemos los siguientes subintervalos:

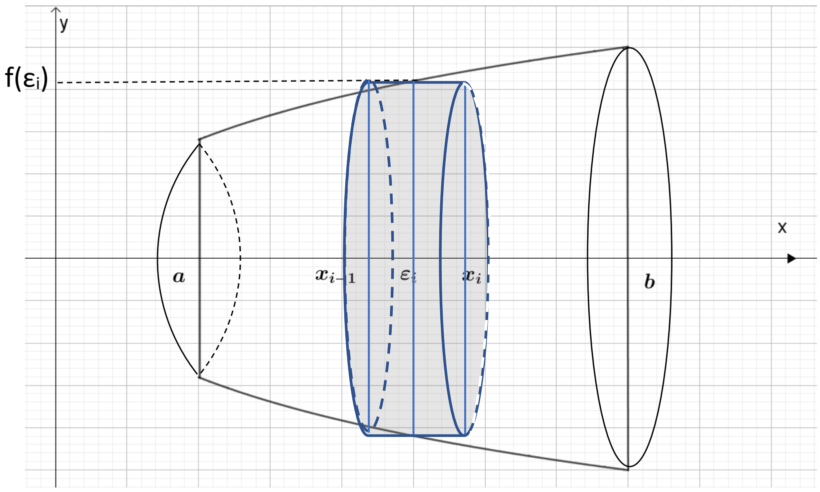
$$[x_0 ; x_1] ; [x_1 ; x_2] ; [x_2 ; x_3] ; \ldots ; [x_{i-1} ; x_i] ; \ldots ; [x_{n-1} ; x_n]$$

Si tomamos un punto interior en cada uno de los subintervalos:

$$\varepsilon_1 \in (x_0 \,;\, x_1)$$
$$\varepsilon_2 \in (x_1 \,;\, x_2)$$
$$\varepsilon_3 \in (x_2 \,;\, x_3)$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_i \in (x_{i-1} \,;\, x_i)$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_n \in (x_{n-1} \,;\, x_n)$$

Con lo que podemos obtener volúmenes de cilindros rectos, cuyas alturas son las amplitudes de los subintervalos y sus radios las funciones en los puntos interiores.
Sea el subintervalo genérico: $[x_{i-1} \,;\, x_i]$

Gráficamente:



Teniendo en cuenta que el volumen de un cilindro recto es: $V = \pi \,.\, h \,.\, r^2$

Así, obtendremos un volumen aproximado en el subintervalo genérico:
$V_i = (x_i - x_{i-1}) \,, \pi \,.\, [f(\varepsilon_i)]^2 = \pi \,.\, \Delta x_i . [f(\varepsilon_i)]^2$

Siendo: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
Luego el Volumen total aproximado, será la suma de cada uno de los volúmenes obtenidos en cada subintervalo:

$$V_{aproxim.} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots V_i + \cdots + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \,.\, \Delta x_i . [f(\varepsilon_i)]^2$$

Si refinamos la partición aumentando el número de subintervalos o reduciendo la norma, el volumen aproximado será cada vez más próximo al real. Por lo tanto, pasando al límite para la cantidad de subintervalos tendiendo a infinito, o la norma tendiendo a cero, los volumenes serán iguales:

$$V = \lim_{n \to \infty} V_{aproxim.} = \lim_{n \to \infty} V_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \,.\, \Delta x_i . [f(\varepsilon_i)]^2$$

Considerando la Definición de Integral Definida:

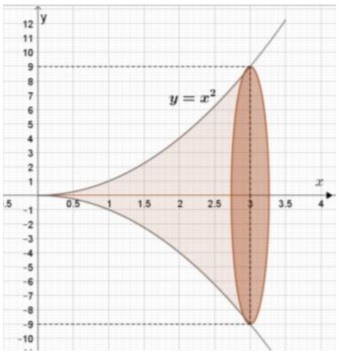
$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \,.\, \Delta x_i . [f(\varepsilon_i)]^2 = \int_a^b \pi \,.\, [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Fórmula para calcular el Volumen de un Sólido Revolución.

Ejemplos:

1.- Hallar el volumen engendrado por la parábola $y = x^2$ que gira alrededor del *eje x*, en el intervalo [0 ; 3]

Gráficamente:

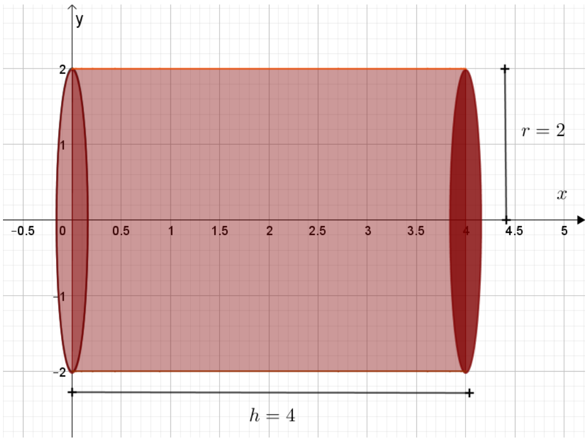


Sea: $y = f(x) = x^2 \implies [f(x)]^2 = x^4$

Entonces el Volumen, resulta: $V = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_0^3 x^4 \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{243\,\pi}{5}$

2.- Hallar el volumen de un cilindro recto de altura *h=4* y radio *r=2*

Consideramos que la función es una recta paralela al *eje x* por *y=2*, y que gira alrededor de este eje en el intervalo [0 ; 4]. Es decir:



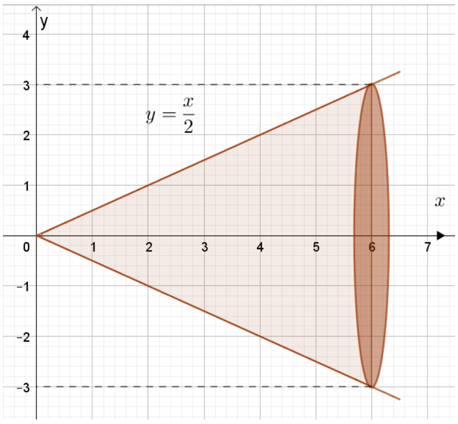
Luego, la función a integrar será: $y = f(x) = 2 \implies [f(x)]^2 = 4$

Entonces, el volumen será:

$$V = \pi \int_0^4 [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_0^4 4 \, dx = 4\,\pi \,[x]_0^4 = 16\,\pi$$

3.- Hallar el volumen de un cono recto de altura *h=6* y radio *r=3*

Si graficamos el problema pensando que el cono es engendrado por una recta que pasa por el origen de sistema de coordenadas y gira alrededor del *eje x*, tendremos:



Es hallar la ecuación de la recta que, al girar alrededor del *eje x*, engendra el cono y pasa por el origen del sistema de coordenadas y por el punto *P(0 ; 6)*.

Ésta será: $y = \frac{x}{2}$, que representa la función a integrar.

Entonces: $y = f(x) = \frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad [f(x)]^2 = \frac{x^2}{4}$

El intervalo de integración está determinado por la altura, es decir [0 ; 6]. Luego, el volumen será:

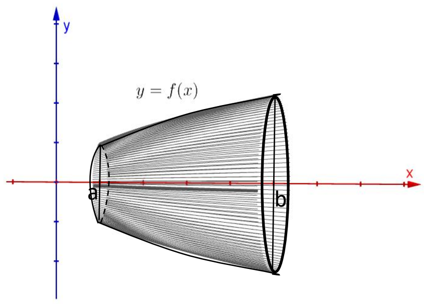
$$V = \pi \int_0^6 [f(x)]^2 \ dx = \pi \int_0^6 \frac{x^2}{4} \ dx = \pi \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^6 = 18\,\pi$$

1.4.- ÁREA DE UNA SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Es el área engendrada por la curva de una función *y=f(x)* que gira alrededor del *eje x* en un determinado intervalo *[a ;b]*.

Además, esta función debe ser derivable, con derivada continua en todos los puntos del intervalo considerado.

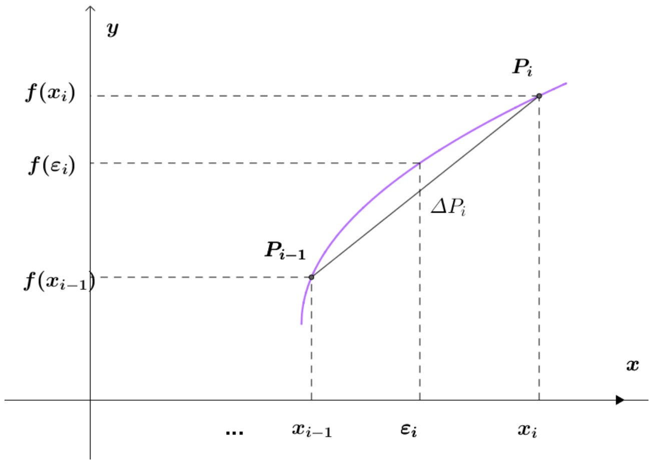
La gráfica de la superficie a calcular, puede ser:



Para obtener dicha superficie procedemos de manera similar al cálculo de la Longitud de un Arco de Curva. Realizamos una partición del intervalo *[a ;b]* en n subintervalos que pueden ser iguales o distintos. Calculamos los valores de la función en cada uno de los subintervalos. Así, obtendremos puntos de la curva que representa la función, por ejemplo: $P_i = [x_i\,;f(x_i)]$, y construir una poligonal inscripta a la curva.

Consideramos un subintervalo genérico $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$.

Gráficamente:



Sea ΔP_i el segmento de poligonal, de longitud: $\Delta P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$
Teniendo en cuenta que: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, resulta:

$$\Delta P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right)}$$

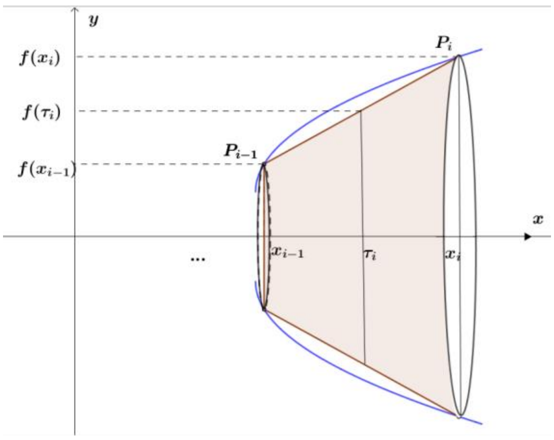
Por ser un incremento funcional, aplicamos el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (Teorema de Lagrange), con: $\varepsilon_i \in (x_{i-1}\,;\, x_i)$

Sabiendo que: $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})\,.\,f'(\varepsilon_i) = \Delta x_i\,.\,f'(\varepsilon_i)$
Reemplazando, resulta:

$$\Delta P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \frac{\cancel{(\Delta x_i)^2}\left(f'(\varepsilon_i)\right)^2}{\cancel{(\Delta x_i)^2}}\right)} = \Delta x_i \sqrt{\left(1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2\right)}$$

Expresión similar a la obtenida en Longitud de un Arco de Curva.
Ahora bien, la superficie aproximada de este subintervalo genérico la obtendremos considerando que dicho segmento (parte de la poligonal) gira alrededor del *eje x* generando un tronco de cono, cuya superficie lateral podemos calcular aplicando su fórmula que es igual a la semisuma de los perímetros de ambas bases, por la altura inclinada del mismo (en nuestro caso, la longitud del segmento de la poligonal). Por lo tanto, tenemos que la longitud de la circunferencia en x_{i-1}, es:

$L_{i-1} = r_{i-1}$, y como $r_{i-1} = f(x_{i-1})$, entonces: $L_{i-1} = 2\,\pi\, f(x_{i-1})$
Y de la misma manera, la longitud de la circunferencia en x_i, es: $L_i = 2\,\pi\, f(x_i)$, de acuerdo al siguiente gráfico:



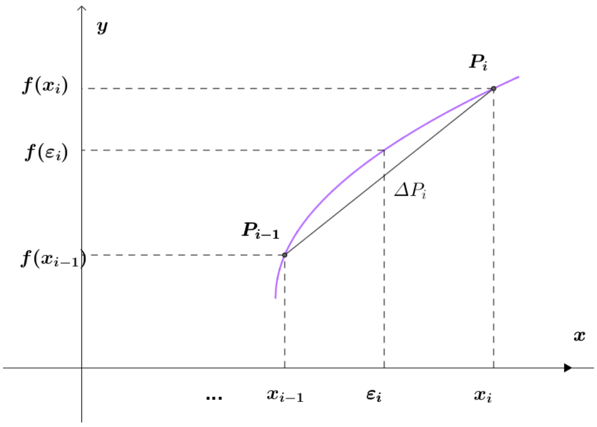
Entonces, la superficie del tronco de cono considerado en la figura, es: $\Delta S_i = \frac{L_{i-1} + L_i}{2} \, . \Delta P_i$

Reemplazando: $\Delta S_i = \frac{2\,\pi\, f(x_{i-1}) + 2\,\pi\, f(x_i)}{2} \, . \Delta P_i = 2\pi \left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right] . \Delta P_i$

Dónde podemos considerar que: $\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\tau_i)$

Como en las aplicaciones anteriores, tomamos un subintervalo genérico $[x_{i-1} \,;\, x_i]$.

Gráficamente:



En este subintervalo, el segmento de poligonal tiene una longitud igual a:

$$\Delta P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

Teniendo en cuenta que: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, resulta:

$$\Delta P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}\right)}$$

Sabiendo que: $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) \,. f'(\varepsilon_i) = \Delta x_i \,. f'(\varepsilon_i)$

Por ser un incremento funcional, aplicamos el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (Teorema de Lagrange), con: $\varepsilon_i \in (x_{i-1} \,;\, x_i)$

Reemplazando, resulta:

$$\Delta P_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \frac{\cancel{(\Delta x_i)^2}\left(f'(\varepsilon_i)\right)^2}{\cancel{(\Delta x_i)^2}}\right)} = \Delta x_i \sqrt{\left(1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2\right)}$$

Donde: τ_i es el punto medio del subintervalo, es decir: $\tau_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ que puede coincidir o no con ε_i, por lo tanto: $\Delta S_i = 2\pi \,. f(\tau_i) \,. \Delta P_i = 2\pi \,. f(\tau_i) \,. \sqrt{\left(1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2\right)}\, \Delta x_i$

Y la superficie total aproximada será igual a la suma de todos los troncos de cono generales en la partición considerada.

Entonces: $S_{aproxim.} = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \,. f(\tau_i) \,. \sqrt{\left(1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2\right)}\, \Delta x_i$

La superficie real la vamos a obtener pasando al límite con el número de subintervalos tendiendo a infinito, o la norma de la partición tendiendo a cero:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_{aproxim.} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \,.\, f(\tau_i) \,.\, \sqrt{\left(1 + \left(f'(\varepsilon_i)\right)^2\right)}\; \Delta x_i$$

Por definición de integral definida y, teniendo en cuenta que, si la amplitud del subintervalo tiende a cero, tienden a ser iguales $f(\varepsilon_i)$ y $f(\tau_i)$

Entonces, resulta:

$S = \int_a^b 2\pi \,.\, f(x) \,.\, \sqrt{1 + (f'(x))^2}\; dx = 2\pi \,.\, \int_a^b f(x) \,.\, \sqrt{1 + (f'(x))^2}\; dx =$

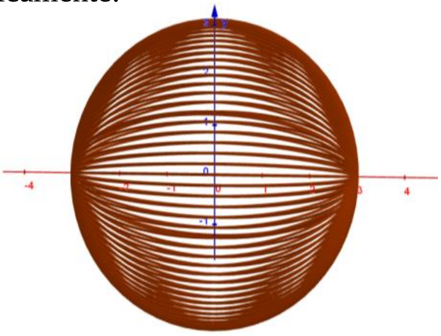
$2\pi \,.\, \int_a^b y \,.\, \sqrt{1 + (y')^2}\; dx$. Fórmula para calcular la Superficie Lateral de un Sólido de Revolución.

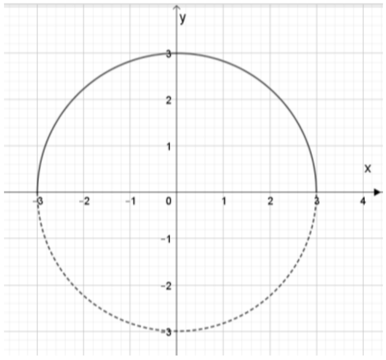
<u>Ejemplos</u>:

1.- Hallar el área de una superficie esférica de radio igual a 3.

Consideramos la ecuación de una circunferencia de radio 3: $x^2 + y^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

Gráficamente:





Para que sea función consideramos únicamente media circunferencia, la cual al rotar alrededor de *eje x* describe la superficie esférica.

Asimismo, por ser simétrica respecto del *eje y*, podemos integrar solamente en la mitad del intervalo y luego multiplicar el resultado por dos.

El intervalo de integración, será: [0 ; 3]

La fórmula de la superficie, es: $S = 2 \,.\, \left[2\pi \,.\, \int_0^3 y \,.\, \sqrt{1 + (y')^2}\; dx\right]$

Donde: $y = \sqrt{9 - x^2} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} \quad \Longrightarrow \quad (y')^2 = \frac{x^2}{9 - x^2}$

Luego:

$S = 2 \,.\, \left[2\pi \,.\, \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \,.\, \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}\; dx\right] = 4\pi \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \,.\, \sqrt{\frac{9 \cancel{- x^2} \cancel{+ x^2}}{9 - x^2}}\; dx =$

$4\pi \int_0^3 3\; dx = 12\pi \int_0^3 dx = 12\pi\, [x]_0^3 = 36\pi$, resultado que podemos comprobar sabiendo que la superficie de la esfera es: $4\pi r^2$ y como el radio es 3, obtenemos el mismo resultado.

En este ejemplo, si en lugar de girar alrededor del *eje x*, hubiéramos calculado respecto del *eje y*, nos daría el mismo resultado, haciendo: $S = 2 \,.\, \left[2\pi \,.\, \int_0^3 x \,.\, \sqrt{1 + (y')^2}\; dx\right]$ y resolviendo de la misma manera que lo hicimos anteriormente.

2.- Hallar el área de la superficie de un cono engendrado por la revolución de un segmento de recta *y=2x* limitado por *x=0* y *x=2*, que gira alrededor del *eje x*.

Aplicando la fórmula, tenemos: $S = 2\pi \int_0^2 y \,.\, \sqrt{1+(y')^2}\ dx$

$y = 2x \implies y' = 2 \implies (y')^2 = 4$

Entonces: $S = 2\pi \int_0^2 2x\sqrt{1+4}\ dx = 4\pi\sqrt{5}\int_0^2 x\ dx = 4\pi\sqrt{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 8\pi\sqrt{5}$

3.- Hallar el área de una superficie de revolución que engendrada por un arco de parábola cúbica $9y = x^3$, comprendida en el intervalo [0 ; 3] que gira alrededor del eje de abscisas.

$Si \quad y = \frac{x^3}{9} \implies y' = \frac{x^2}{3} \implies (y')^2 = \frac{x^4}{9}$

Reemplazando en la fórmula, tenemos:

$$S = 2\pi \int_0^3 y \,.\, \sqrt{1+(y')^2}\ dx = 2\pi \int_0^3 \frac{x^3}{9}\sqrt{1+\left(\frac{x^4}{9}\right)}\,dx = \frac{2}{9}\pi\int_0^3 x^3\ \sqrt{\frac{9+x^4}{9}}\ dx =$$

$$= \frac{2}{9}\pi\int_0^3 x^3\ \frac{\sqrt{9+x^4}}{\sqrt{9}}\,dx = \frac{2}{27}\pi\int_0^3 x^3\sqrt{9+x^4}\,dx$$

Resolvemos por sustitución: $\int x^3 . \sqrt{9+x^4}\,dx$

Llamamos: $u = 9 + x^4 \implies du = 4x^3 \implies \frac{du}{4} = x^3$

Entonces: $\int x^3.\sqrt{9+x^4}\,dx = \int \sqrt{u}\,.\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int\sqrt{u}\ du = \frac{1}{4}\,.\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{4}\,.\frac{2}{3}\ \sqrt{u^3} + C = \frac{1}{6}\sqrt{(9+x^4)^3} + C$

Luego:

$$S = \frac{2}{27}\pi\int_0^3 x^3\sqrt{9+x^4}\,dx = \frac{2}{27}\pi\,.\frac{1}{6}\left[\sqrt{(9+x^4)^3}\right]_0^3 = operando = \frac{\pi}{3}\left(10\,.\sqrt{10}-1\right) \cong$$

$$\cong 10{,}207\,\pi$$