6.13 Exercises

1. Determine whether each of the following operations is valid, and, if so, the size of the resulting matrix.

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times3}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3\times3}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times4}$$

a) $\mathbf{CB}$ $\boxed{\text{No}}$
$3\times4 \quad 3\times3$

b) $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \rightarrow 4\times3 \cdot 3\times3 = \boxed{\text{Yes}, 4\times3}$

c) $(\mathbf{CB})^{\mathrm{T}} = \underset{3\times3}{B^T}\ \underset{4\times3}{C^T}$ $\boxed{\text{No}}$

d) $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{BC} \rightarrow 4\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times4 = \boxed{\text{Yes}, 4\times3}$

e) $\mathbf{ABCB} \rightarrow 2\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times4 \cdot 3\times3$ $\boxed{\text{No}}$

f) $\mathbf{ABC} \rightarrow 2\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times4 = \boxed{\text{Yes}, 2\times4}$

g) $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{BA}^{\mathrm{T}}\mathbf{AC}$
$4\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times2 \cdot 2\times3 \cdot 3\times4 = \boxed{\text{Yes}, 4\times4}$

h) $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{BCC}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \rightarrow 3\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times4 \cdot 4\times3 \cdot 2\times3$ $\boxed{\text{No}}$

i) $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} \rightarrow 2\times3 \cdot 3\times2 = \boxed{\text{Yes}, 2\times2}$

j) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \rightarrow 3\times2 \cdot 2\times3 = \boxed{\text{Yes}, 3\times3}$

k) $\mathbf{BBA}^{\mathrm{T}}\mathbf{ABBCC}$
$3\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times2 \cdot 2\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times4 \cdot 3\times4 =$ $\boxed{\text{No}}$

l) $(\mathbf{CBB}^{\mathrm{T}}\mathbf{CC}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ reverse order
$C C^T B B^T C^T$ $\boxed{\text{No}}$
$3\times4 \cdot 4\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times3 \cdot 4\times3$

m) $(\mathbf{A} + \mathbf{ACC}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ rev
$(B^TCC^TA^T + A^T)A$
$A^TA + AA^TAC^TACAB^T$ $\boxed{\text{No}}$

n) $\mathbf{C} + \mathbf{CA}^{\mathrm{T}}\mathbf{ABC}$ $\boxed{\text{No}}$
$3\times4 + 3\times4 \cdot 3\times2$

o) $\mathbf{C} + \mathbf{BA}^{\mathrm{T}}\mathbf{ABC}$
$3\times4 + 3\times3 \cdot 3\times2 \cdot 2\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times4$
$3\times4 + 3\times4 = \boxed{\text{Yes}, 3\times4}$

p) $\mathbf{B} + 3\mathbf{B} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \mathbf{CC}^{\mathrm{T}}$
$3\times3 + 3\times3 + 2\times3 \cdot 3\times2 - 3\times4 \cdot 4\times3$
$3\times3 + 3\times3 + 2\times2 - 3\times3$ $\boxed{\text{No}}$

Hadamard multiplication (same size)

q) $\mathbf{A} \odot (\mathbf{ABC})$
$2\times3 \odot 2\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times4$
$2\times3 \odot 2\times4$ $\boxed{\text{No}}$

r) $\mathbf{A} \odot \mathbf{ABC}(\mathbf{BC})^{\mathrm{T}}$
$2\times3 \odot 2\times3 \cdot 3\times3 \cdot 3\times4 \cdot 4\times3 \cdot 3\times3$
$2\times3 \odot 2\times3$ $\boxed{\text{Yes}, 2\times3}$

2. Compute the following matrix multiplications. Each problem should be completed twice using the two indicated perspectives of matrix multiplication (#1: element, #2: layer, #3: column, #4: row).

a) #1,2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ b) #2,4: $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) #3,4: $\begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -8 & .5 \end{bmatrix}$ d) #1,4: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

e) #2,3: $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ f) #1,3: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

g) #2,3: $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ h) #1,2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -1 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

i) #2,3: $\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) #1,2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

1: element

$$\begin{bmatrix} (1\cdot0)+(0\cdot2) & (1\cdot5)+(0\cdot2) \\ (3\cdot0)+(1\cdot2) & (3\cdot5)+(1\cdot2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}$$

2: Layer

1st col · 1st row + 2nd col · 2nd row ...

$$\begin{bmatrix} (1\cdot0) & (1\cdot5) \\ (3\cdot0) & (3\cdot5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0\cdot2) & (0\cdot2) \\ (1\cdot2) & (1\cdot2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}$$

b) #2,4: $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2: Layer

$$\begin{bmatrix} (-3\cdot1) & (-3\cdot0) \\ (-2\cdot1) & (-2\cdot0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2\cdot0) & (2\cdot2) \\ (3\cdot0) & (3\cdot2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

4: Row

$$\begin{matrix} -3\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \\ -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

c) #3,4: $\begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -8 & .5 \end{bmatrix}$

3: Column

$$3\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} + -8\begin{bmatrix} -5 \\ -13 \end{bmatrix} \qquad 1\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix} + .5\begin{bmatrix} -5 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 & 8.5 \\ 131 & 2.5 \end{bmatrix}$$

4. Row

$$\begin{matrix} 11\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} + -5\begin{bmatrix} -8 & .5 \end{bmatrix} \\ 9\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} + -13\begin{bmatrix} -8 & .5 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 73 & 8.5 \\ 131 & 2.5 \end{bmatrix}$$

d) #1,4: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

1: Element

$$\begin{bmatrix} 1a + 0c & 1b + 0d \\ 0a + 2c & 0b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

4: Row

$$\begin{matrix} 1\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \end{matrix} + \begin{matrix} 0\begin{bmatrix} b & d \end{bmatrix} \\ 2\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1a & 1b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

e) #2,3: $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

2: Layer

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 10 & 2\cdot 1 \\ 1\cdot 10 & 1\cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot -5 & 2\cdot 4 \\ 3\cdot -5 & 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 8 \\ -15 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

3: Column

$$10\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + -5\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20-10 & 2+8 \\ 10-15 & 1+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

f) #1,3: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

1: element

$$\begin{bmatrix} 2a+0\cdot 4 & 3a+0\cdot 1 \\ 2b+0\cdot 4 & 3b+0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 3a \\ 2b & 3b \end{bmatrix}$$

3: Column

$$\begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 3a \\ 2b & 3b \end{bmatrix}$$

g) #2,3: $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

2: layer

$$\begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 3a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4b & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+4b & 3a+b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3: column

$$\begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+4b & 3b+b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

h) #1,2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -1 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

1: element

$$\begin{bmatrix} 1\cdot -2+0\cdot -1+4\cdot 0 & 1\cdot -3+0\cdot -9+4\cdot 1 & 1\cdot -1+0\cdot 3+4\cdot 5 \\ 0\cdot -2+1\cdot -1+1\cdot 0 & 0\cdot -3+1\cdot -9+1\cdot 1 & 0\cdot -1+1\cdot 3+1\cdot 5 \\ 3\cdot -2+3\cdot -1+0\cdot 0 & 3\cdot -3+3\cdot -9+0\cdot 1 & 3\cdot -1+3\cdot 3+0\cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+0 & -3+0+4 & -1+0+20 \\ 0+-1+0 & 0+-9+1 & 0+3+5 \\ -6+-3+0 & -9+-27+0 & -3+9+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 19 \\ -1 & -8 & 8 \\ -9 & -36 & 6 \end{bmatrix}$$

2: layer

$$\begin{bmatrix} -2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & -3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & -1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & -9\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & 5\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -9 & 3 \\ -3 & -27 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 19 \\ -1 & -8 & 8 \\ -9 & -36 & 6 \end{bmatrix}$$

i) #2,3: $\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2: layer

$$\begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & b\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & c\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & ba & ca \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 2b & 3b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & ba & ca+1 \\ b & 2b & 3b \\ a & b & 2c \end{bmatrix}$$

i) #2,3: $\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3: column

$$\begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} & b\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} & c\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+0+0 & ba+0+0 & ca+0+1 \\ 0+b+0 & 0+2b+0 & 0+3b+0 \\ a+0+0 & b+0+0 & c+0+c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & ba & ca+1 \\ b & 2b & 3b \\ a & b & 2c \end{bmatrix}$$

3. Compute the following matrix-vector products, if the operation is valid.

a) $\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-4&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-4&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&3&2\\6&1&5\\3&5&0\end{bmatrix}$

a) $\underbrace{\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}}_{2\times2}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}}_{2\times1 = 2\times1}$

$\begin{bmatrix}2\cdot2+0\cdot3\\0\cdot2+3\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix}$

b) $(2\times1)^{\mathrm{T}}\cdot 2\times2 = 1\times2$ $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2\cdot2+3\cdot0 & 2\cdot0+3\cdot3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4&9\end{bmatrix}$

c) $\to 2\times1$ $\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2\cdot2+1\cdot3\\2\cdot2+3\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\13\end{bmatrix}$

d) $\to 1\times2$ $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2\cdot2+3\cdot2 & 2\cdot1+3\cdot3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10&11\end{bmatrix}$

e) $\to 3\times1$ $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\c\\a\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\cdot a+1\cdot b+0\cdot c\\0\cdot a+0\cdot b+1\cdot c\\1\cdot a+0\cdot b+0\cdot c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\c\\a\end{bmatrix}$

f) $\to 3\times1$ $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-4&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\cdot5+0\cdot2+1\cdot1\\0\cdot5+-4\cdot2+0\cdot1\\1\cdot5+0\cdot2+1\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-8\\6\end{bmatrix}$

g) $3\times1\cdot3\times3$ size mismatch $\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-4&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

h) $(3\times1)^{\mathrm{T}}\cdot3\times3\to1\times3$ $\begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&3&2\\6&1&5\\3&5&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3\cdot1+3\cdot6+2\cdot3\\3\cdot3+3\cdot1+2\cdot5\\3\cdot2+3\cdot5+2\cdot0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

$=\begin{bmatrix}27&22&21\end{bmatrix}$

4. Consider square matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$, with nonzero values at all elements. What assumptions on symmetry would make the following equalities hold (note: the operations might also be impossible under any assumptions)? Provide a proof or example for each.

a) $\mathbf{AB}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ b) $\mathbf{AB}=(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$

c) $\mathbf{AB}=\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$ d) $\mathbf{AB}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$

e) $\mathbf{AB}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ f) $\mathbf{AB}=(\mathbf{BA})^{\mathrm{T}}$

a) $\mathbf{AB}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
both must be symmetric

b) $\mathbf{AB}=(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$
both symmetric
$A=B^T$ or $A=B$

c) $\mathbf{AB}=\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$
$B=B^T$

d) $\mathbf{AB}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$
$A=A^T$

e) $\mathbf{AB}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$
$\cancel{A=A^T}$
No general rule

f) $\mathbf{AB}=(\mathbf{BA})^{\mathrm{T}}$
both symmetric

5. In section 6.7 you learned that the product of two symmetric matrices is generally not symmetric. That was for standard multiplication; is the *Hadamard product* of two symmetric matrices symmetric? Work through your reasoning first, then test your hypothesis on the following matrix pair.

$$\begin{bmatrix}2&5&7\\5&3&6\\7&6&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a&d&f\\d&b&e\\f&e&c\end{bmatrix}$$

The Hadamard product of 2 symmetric matrices should be symmetric since it is an element-wise multiplication.

$\to 3\times3$

$\begin{bmatrix}2&5&7\\5&3&6\\7&6&4\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}a&d&f\\d&b&e\\f&e&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a&5d&7f\\5d&3b&6e\\7f&6e&4c\end{bmatrix}$ ✓

6. For the following pairs of matrices, vectorize and compute the vector dot product, then compute the Frobenius inner product as $tr(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})$.

column-wise Note: Python defaults to row-wise unless you specify A.flatten(order='F')

a) $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0&5\\7&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\13&14\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}4&-5&8\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-5&8\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a&b\\a&b\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}1&1&7\\2&2&6\\3&3&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

vectorized dot product:

$\begin{bmatrix}a\\c\\b\\d\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\2\\4\end{bmatrix}$ $a\cdot1+c\cdot3+b\cdot2+d\cdot4$ $=\boxed{a+3c+2b+4d}$

$tr(A^TB)$:

$\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1a+3c&2a+4c\\1b+3d&2b+4d\end{bmatrix}$

$tr()=\boxed{a+3c+2b+4d}$

b) $\begin{bmatrix}0&5\\7&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\13&14\end{bmatrix}$

vectorized dot product:

$\begin{bmatrix}0\\7\\5\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\13\\0\\14\end{bmatrix}$ $=0+91+0+-28$ $=\boxed{63}$

$tr(A^TB)$:

$\begin{bmatrix}0&7\\5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\13&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+91&0+98\\5+65&0+-28\end{bmatrix}$

$tr()=91-28=\boxed{63}$

c) $\begin{bmatrix}4&-5&8\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-5&8\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{bmatrix}$

vectorized dot product:

$\begin{bmatrix}4\\1\\-2\\-5\\-1\\2\\8\\2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}s\\a\\m\\e\end{bmatrix}$ $=16+1+4+25+1+4+64+4+16$ $=\boxed{135}$

$tr(A^TB)$:

$\begin{bmatrix}4&1&-2\\-5&-1&2\\8&2&-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-5&8\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16+1+4&\text{skip}&\text{skip}\\\text{skip}&25+1+4&\text{skip}\\\text{skip}&\text{skip}&64+4+16\end{bmatrix}$

$tr()=16+1+4+25+1+4+64+4+16$

$=\boxed{135}$

d) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$

Vectorized dot product:

$\begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{bmatrix} = \boxed{aa+ca+bb+db}$

$tr(A^TB)$:

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa+ca & \\ & bb+db \end{bmatrix} = \boxed{aa+ca+bb+db}$

e) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Vectorized dot product:

$\begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix} = \boxed{aa+cc+bb+dd}$

$tr(A^TB)$:

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa+cc & \\ & bb+dd \end{bmatrix} = \boxed{aa+cc+bb+dd}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ size mismatch

7. Implement the indicated multiplications for the following matrices.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) AB **b) AC** **c) BC** **d) CA**

e) CB **f) BCA** **g) ACB** **h) ABC**

a) AB

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) AC

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

c) BC

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 20 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

d) CA

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -1 \\ 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

e) CB

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 0 & 20 & 3 \\ 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$

f) BCA

$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 20 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -6 \\ 0 & 40 & -5 \\ 18 & 12 & -9 \end{bmatrix}$

g) ACB

$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 27 \\ 0 & 40 & 6 \\ -4 & -10 & -9 \end{bmatrix}$

h) ABC

$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 18 \\ 0 & 40 & 10 \\ -6 & -6 & -9 \end{bmatrix}$