FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA INFORMÁTICA

Lic. Martin Villarreal

Lenguajes regulares y expresiones regulares

- Definimos que un lenguaje es un subconjunto de Σ^* sobre un alfabeto Σ. ¿Como especificamos las cadenas de un lenguaje en particular?
- Las ***expresiones regulares*** son una notación formal de la forma que poseen las cadenas de un lenguaje.
- Un lenguaje descripto por una expresión regular se dice que es un lenguaje regular.
- No todos los subconjuntos de Σ^* son lenguajes regulares.

Lenguajes regulares y expresiones regulares

- **Expresión regular: Las expresiones regulares (ER) sobre un alfabeto Σ son cadenas obtenidas a partir del alfabeto**

Σ ∪ {), (, ., +, *, λ, ∅}

Definidas recursivamente como sigue:

1- ∅ es una ER

2- λ es una ER

3- todo símbolo i∈Σ, es una ER

4- si α y β son ER, entonces (α), α.β ,α+β ,α* son ER

5- ninguna otra secuencia de simbolos es una ER

Lenguajes regulares y expresiones regulares

Ej: sea $\Sigma=\{a, b\}$ un alfabeto, son expresiones regulares

- λ
- a
- b
- a+b
- a.b
- (a+b).(b.a)
- (a.b.a)*
- (b.a)*.(a.a)*.(b.b)*

Lenguajes regulares y expresiones regulares

- **Lenguaje regular: cada expresión regular α sobre un alfabeto Σ describe o representa un lenguaje L(α)⊆Σ***

  Este lenguaje se llama lenguaje regular y se define de forma recursiva como sigue:

1- si α=∅ entonces L(α)=∅

2- si α=λ entonces L(α)={λ}

3- si α=a y a∈Σ entonces L(α)={a}

4- si α y β son ER entonces L(α+β)=L(α)∪L(β)

5- si α y β son ER entonces L(α.β)=L(α).L(β)

6- si α es una ER entonces L(α*)=(L(α))*

Lenguajes regulares y expresiones regulares

Ejemplos:

•Dado $\Sigma = \{0, 1\}$ y la ER $\alpha = 0^*10^*$, indique cuales son las cadenas de $L(\alpha)$

$L(0^*,1,0^*) = L(0^*).L(1).L(0^*)$

$= (L(0))^*.L(1).(L(0))^* = \{0\}^*.\{1\}.\{0\}^*$

$= \{0^n10^m \mid n,m \geq 0\}$

•Dado = $\{a, b\}$ y la ER $\alpha = (a + b)^*a$, indique cuales son las cadenas de $L(\alpha)$

$L((a + b)^*a) = L((a + b)^*).L(a)$

$= (L(a + b))^*.\{a\} = (L(a) \cup L(b))^*. \{a\}$

$= \{a,b\}^*\{a\}$

Lenguajes regulares y expresiones regulares

- **Expresión regular equivalente: dos expresiones regulares α y β son equivalentes y lo denotamos α=β , si describen el mismo lenguaje, es decir, L(α)=L(β).**

Lenguajes regulares y expresiones regulares

- Teorema: sean α, β, γ expresiones regulares sobre el alfabeto Σ, entonces:

1- $\emptyset\alpha=\alpha\emptyset=\emptyset$

2- $\lambda\alpha=\alpha\lambda=\alpha$

3- $\emptyset^*=\lambda$

4- $\lambda^*=\lambda$

5- $\alpha+\emptyset=\alpha$

6- $\alpha+\alpha=\alpha$

7- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

8- $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

9- $\alpha^*=\alpha^*\alpha^*=(\alpha^*)^*$

10- $\alpha^*=\lambda+\alpha\alpha^*$

11- $\alpha\alpha^*=\alpha^*\alpha$

12- $\alpha(\beta+\gamma)= \alpha\beta+\alpha\gamma$

13- $(\alpha+\beta)\gamma= \alpha\gamma+\beta\gamma$

14- $(\alpha\beta)^*\alpha=\alpha(\beta\alpha)^*$

15- $(\alpha+\beta)^*= (\alpha^*+\beta^*)^*= (\alpha^*\beta^*)^*= (\alpha^*\beta)^*\alpha^*$

Lenguajes regulares y expresiones regulares

- Existen muchas equivalencias con respecto a expresiones regulares basadas en las correspondientes igualdades de lenguajes.

Ejemplo: sea $a \in \Sigma$ puede verse que $(a + a) = a$ utilizando los lenguajes que describen

$L(a + a) = L(a) \cup L(a) = \{a\} \cup \{a\} = \{a\} = L(a)$

Por lo tanto $(a + a) = a$

Lenguajes regulares y expresiones regulares

Muchas de estas igualdades se pueden demostrar por reasociación por ejemplo

$\alpha(\beta\alpha)^*=(\alpha\beta)^*\alpha$, si $w \in \alpha(\beta\alpha)^*$,

entonces $w=\alpha_0(\beta_1\alpha_1)\ldots(\beta_n\alpha_n)$

para algún $n\geq 0$. Puesto que la concatenación es asociativa, se puede reasociar la expresión

$w=(\alpha_0\beta_1)(\alpha_1\beta_2)\ldots(\alpha_{n-1}\beta_n)\alpha_n$

De aquí se obtiene que $\alpha(\beta\alpha)^*\subseteq(\alpha\beta)^*\alpha$ o que $L(\alpha(\beta\alpha)^*)\subseteq L((\alpha\beta)^*\alpha)$ de la misma forma se demuestra en sentido inverso con lo que se demuestra la igualdad.

Lenguajes regulares y expresiones regulares

- Para probar igualdades tambien se puede hacer uso de igualdades ya conocidas

Ej: $\gamma=\alpha^*\beta=(\lambda+\alpha^+)\beta$ ya que $\alpha^*=(\lambda+\alpha^+)$

$=(\lambda+\alpha\alpha^*)\beta$

$=\lambda\beta+\alpha\alpha^*\beta$ por (13)

$=\beta+\alpha\gamma$ por (2)

$=\alpha\gamma+\beta$ por (7)

lo cual prueba que $\gamma=\alpha^*\beta$, implica que $\gamma=\alpha\gamma+\beta$