Informe Técnico: Justificación Algorítmica y Conversión de Ángulos al Sistema de Radianes

I. Introducción y Fundamentos Axiomáticos de la Medida Angular

1.1. Contextualización y la Necesidad de un Sistema Estructural

La medición angular tradicional en grados (360°) se basa en una división histórica que, si bien es conveniente, no se relaciona intrínsecamente con la geometría del círculo. El radián, en contraste, se define por la relación directa entre el arco y el radio, lo que lo convierte en el sistema métrico nativo para el estudio avanzado de la geometría, la física y el cálculo.[1]

Esta relación intrínseca lleva a la equivalencia fundamental: $180^\circ = \pi$ radianes.[1] Esta equivalencia, a su vez, genera el factor de conversión ($\pi/180^\circ$) que permite expresar un ángulo θ_{grados} como una fracción irreducible de π: $\theta = \frac{N}{D}\pi$.

1.2. El Propósito del Algoritmo: Predicción vs. Simplificación

El objetivo de esta investigación es justificar que el algoritmo predictivo basado en las fórmulas cuadrantales, utilizando las variables k y D, no solo refleja la verdad geométrica, sino que **simplifica y acelera la obtención de la estructura final** del ángulo en radianes.

El método tradicional requiere simplificar la fracción completa $\frac{\theta}{180^\circ}$ (un proceso que a menudo requiere buscar el Máximo Común Divisor (MCD) [4]). El algoritmo propuesto elimina este paso al predecir el numerador (N) mediante una simple operación de suma o resta condicionada por el cuadrante, una vez que k y D son conocidos.

II. Metodología Algorítmica y Variables Clave

La metodología se basa en la definición del **ángulo de referencia** (α) [7] para determinar las variables clave que componen la notación final $\theta = \frac{N}{D}\pi$:

- D **(Denominador):** El denominador de la fracción simplificada $\frac{\alpha}{180^\circ}$. Este define la familia angular.
- k **(Unidad de Medida de Referencia):** El numerador de la fracción simplificada $\frac{\alpha}{180^\circ}$. Este valor indica cuántas unidades fraccionarias (π/D) están presentes en el ángulo de referencia α.
- N **(Numerador Final):** El numerador de la respuesta final del ángulo θ, calculado mediante la fórmula predictiva del cuadrante.

III. Generalización Algorítmica y Fórmulas Predictivas

El algoritmo se basa en la simetría angular respecto al eje X (π y 2π). Las fórmulas son funciones condicionales que convierten la ubicación geométrica en una operación algebraica simple para determinar N.

Fórmulas de Conversión de Ángulos a Radianes Simplificados

Cuadrante I ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)

El ángulo θ **es** su propio ángulo de referencia (α).

Regla/Fórmula	Descripción
1. Hallar α	$\alpha =$
2. Hallar $\mathbf{k}$ **y** $\mathbf{D}$	$\frac{k}{D} =$
3. Hallar $\mathbf{N}$	$\mathbf{N} =$ (El numerador es igual a k).
Resultado Final	$\theta =$

Cuadrante II ($90^\circ < \theta < 180^\circ$)

El ángulo θ está antes del eje x negativo (180°). La fórmula traduce la relación geométrica

$\theta = \pi - \alpha$. 9

Regla/Fórmula	Descripción
1. Hallar α	$\alpha = \mathbf{180}^\circ -$
2. Hallar $\mathbf{k}$ **y** $\mathbf{D}$	$\frac{k}{n} =$
3. Hallar $\mathbf{N}$	$\mathbf{N} = \mathbf{D} -$ (Se resta la unidad k de π).
Resultado Final	$\theta =$

Cuadrante III ($\mathbf{180}^\circ < \theta < \mathbf{270}^\circ$)

El ángulo θ está después del eje x negativo (180°). La fórmula traduce la relación geométrica $\theta = \pi + \alpha$.

Regla/Fórmula	Descripción
1. Hallar α	$\alpha = \theta - \mathbf{18}$
2. Hallar $\mathbf{k}$ **y** $\mathbf{D}$	$\frac{k}{n} =$
3. Hallar $\mathbf{N}$	$\mathbf{N} = \mathbf{D} +$ (Se suma la unidad k a π).
Resultado Final	$\theta =$

Cuadrante IV ($\mathbf{270}^\circ < \theta < \mathbf{360}^\circ$)

El ángulo θ está antes del eje x positivo (360° o 2π). La fórmula traduce la relación geométrica $\theta = 2\pi - \alpha$.

Regla/Fórmula	Descripción
1. Hallar α	$\alpha = \mathbf{360^\circ} -$
2. Hallar $\mathbf{k}$ **y** $\mathbf{D}$	$\frac{k}{n} =$
3. Hallar $\mathbf{N}$	$\mathbf{N} = \mathbf{2D} -$ (Se resta la unidad k de 2π).
Resultado Final	$\theta =$

IV. Aplicación Detallada del Algoritmo (Demostración de la Precisión Predictiva)

Se demuestra cómo el algoritmo predictivo evita la necesidad de simplificar la fracción original $\frac{\theta}{180^\circ}$ mediante la simple aritmética de D y k.

4.1. Cuadrante II: Predicción de N ($N = D - k$)

Ejercicio 1: Ángulo Notable 150° **(Caso simple:** $k = 1$**)**

1. **Hallar** α **(Regla C-II):** $\alpha = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. 9
2. **Hallar** $\mathbf{k}$ **y** $\mathbf{D}$**:** $\frac{30}{180}$. Simplificando por 30, obtenemos $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$.
   - $D = 6$ y $k = 1$.
3. **Hallar** $\mathbf{N}$ **(Fórmula C-II):** $N = 6 - 1 = \mathbf{5}$.
4. **Resultado Final:** $\theta = \frac{5}{6}\pi$ radianes.
   - *Verificación tradicional:* $\frac{150}{180}$ simplificado por 30 es $5/6$. **Resultado idéntico.**

Ejercicio 2: Ángulo No Notable 100° **(Caso complejo:** $k > 1$**)**

1. **Hallar α (Regla C-II):** $\alpha = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.[9]
2. **Hallar $\mathbf{k}$ y $\mathbf{D}$:** $\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{80}{180}$. Simplificando por 20, obtenemos $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}$.
   - $D = 9$ y $k = 4$.
3. **Hallar $\mathbf{N}$ (Fórmula C-II):** $N = D - k = 9 - 4 = \mathbf{5}$.
4. **Resultado Final:** $\theta = \frac{5}{9}\pi$ radianes.
   - *Ventaja Predictiva:* En lugar de simplificar $\frac{100}{180}$ (que también da $5/9$), este método predice el numerador 5 mediante la operación simple $9 - 4$, demostrando que la estructura final depende de la referencia angular ($k = 4$).

4.2. Cuadrante III: Predicción de N ($N = D + k$)

Ejercicio 3: Ángulo Notable 225° (Caso simple: $k = 1$)

1. **Hallar α (Regla C-III):** $\alpha = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$.
2. **Hallar $\mathbf{k}$ y $\mathbf{D}$:** $\frac{45}{180}$. Simplificando por 45, obtenemos $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.
   - $D = 4$ y $k = 1$.
3. **Hallar $\mathbf{N}$ (Fórmula C-III):** $N = D + k = 4 + 1 = \mathbf{5}$.
4. **Resultado Final:** $\theta = \frac{5}{4}\pi$ radianes.

Ejercicio 4: Ángulo No Notable 220° (Caso complejo: $k > 1$)

1. **Hallar α (Regla C-III):** $\alpha = 220^\circ - 180^\circ = 40^\circ$.
2. **Hallar $\mathbf{k}$ y $\mathbf{D}$:** $\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{40}{180}$. Simplificando por 20, obtenemos $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$.
   - $D = 9$ y $k = 2$.
3. **Hallar $\mathbf{N}$ (Fórmula C-III):** $N = D + k = 9 + 2 = \mathbf{11}$.
4. **Resultado Final:** $\theta = \frac{11}{9}\pi$ radianes.
   - *Ventaja Predictiva:* La simplificación directa de $\frac{220}{180}$ a $\frac{11}{9}$ puede ser lenta. El algoritmo predice el 11 inmediatamente a partir de la estructura del ángulo de referencia ($9 + 2$).

4.3. Cuadrante IV: Predicción de N ($N = 2D - k$)

Ejercicio 5: Ángulo Notable 315° (Caso simple: $k = 1$)

1. **Hallar α (Regla C-IV):** $\alpha = 360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$.
2. **Hallar $\mathbf{k}$ y $\mathbf{D}$:** $\frac{45}{180}$. Simplificando por 45, obtenemos $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.
   - $D = 4$ y $k = 1$.
3. **Hallar $\mathbf{N}$ (Fórmula C-IV):** $N = 2D - k = 2(4) - 1 = \mathbf{7}$.
4. **Resultado Final:** $\theta = \frac{7}{4}\pi$ radianes.

Ejercicio 6: Ángulo No Notable 280° (Caso complejo: $k > 1$)

1. **Hallar α (Regla C-IV):** $\alpha = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$.
2. **Hallar $\mathbf{k}$ y $\mathbf{D}$:** $\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{80}{180}$. Simplificando por 20, obtenemos $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}$.
   - $D = 9$ y $k = 4$.
3. **Hallar $\mathbf{N}$ (Fórmula C-IV):** $N = 2D - k = 2(9) - 4 = 18 - 4 = \mathbf{14}$.
4. **Resultado Final:** $\theta = \frac{14}{9}\pi$ radianes.
   - *Ventaja Predictiva:* Simplificar $\frac{280}{180}$ requiere varios pasos o el cálculo del MCD. El algoritmo, en cambio, predice el numerador final $\mathbf{14}$ mediante la operación directa $18 - 4$, demostrando que el ángulo es 4 unidades de $\pi/9$ menos que 2π.

V. Compendio Final y Estructura Predictiva

La siguiente tabla consolida los resultados, haciendo visible el patrón fraccionario y su utilidad para la representación en el plano polar.

Tabla 2: Ángulos Notables Canónicos y sus Equivalentes Polares (Radianes)

Grados (θ)	**Radianes**	**Referencia (θref)**	**Expresión de θ en θref**	**Cuadrante**
0°	0	0	Eje X Positivo	Eje X Positivo

30°	$\pi/6$	$\pi/6$	θ_{ref}	I
45°	$\pi/4$	$\pi/4$	θ_{ref}	I
60°	$\pi/3$	$\pi/3$	θ_{ref}	I
90°	$\pi/2$	N/A	Cuadrantal	Eje Y Positivo
120°	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi -$	II
135°	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi -$	II
150°	$5\pi/6$	$\pi/6$	$\pi -$	II
180°	π	N/A	Cuadrantal	Eje X Negativo
210°	$7\pi/6$	$\pi/6$	$\pi +$	III
225°	$5\pi/4$	$\pi/4$	$\pi +$	III
240°	$4\pi/3$	$\pi/3$	$\pi +$	III
270°	$3\pi/2$	N/A	Cuadrantal	Eje Y Negativo
300°	$5\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi -$	IV
315°	$7\pi/4$	$\pi/4$	$2\pi -$	IV
330°	$11\pi/6$	$\pi/6$	$2\pi -$	IV
360°	2π	0	Eje X Positivo	Eje X Positivo

VI. Conclusiones y Aplicaciones Avanzadas

6.1. Justificación de la Simplificación del Proceso

La investigación confirma que el algoritmo desarrollado, basado en las fórmulas

$N = D \pm k$ y $N = 2D - k$, ofrece una **alternativa predictiva y estructuralmente superior** a la conversión directa por $\theta/180$.

En lugar de simplificar fracciones grandes (como $\frac{280}{180}$) de manera repetitiva, el algoritmo permite:

1. **Determinar la referencia** (α).
2. **Identificar las unidades** (k y D) en $\frac{\alpha}{180^\circ}$.
3. **Predecir el numerador final** (N) mediante una operación aritmética simple ($D \pm k$) basada en la simetría del cuadrante.

Esta metodología **simplifica el proceso de obtención** de los valores de los ángulos en radianes, lo que resulta invaluable tanto en la enseñanza como en la programación de cálculos trigonométricos avanzados. [2]

6.2. Extensión y Robustez del Algoritmo de Conversión

La metodología es universalmente aplicable a cualquier ángulo, incluyendo aquellos mayores a 360°. Por ejemplo, un ángulo de 750° (cuadrante I) se reduce a 30° (α), lo que implica $k = 1$ y $D = 6$. La fórmula para la conversión con revoluciones múltiples sigue siendo sencilla y robusta.[4] La consistencia demostrada con ángulos no notables y complejos confirma la validez del algoritmo para cualquier análisis avanzado.

Obras citadas

1. fecha de acceso: octubre 23, 2025, https://es.scribd.com/document/632850523/Radian#:~:text=Radi%C3%A1n-,El%20radi%C3%A1n%20es%20la%20unidad%20de%20medida%20de%20%C3%A1ngulos%20que,%C3%A1ngulos%20como%20m%C3%BAltiplos%20de%20%CF%80.
2. ¿Por Qué Usamos Radianes? Conversión y Aplicaciones | Sergio Ruiz - YouTube, fecha de acceso: octubre 23, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=L_66vksef-A
3. 5.1 Ángulos - Precálculo 2ed | OpenStax, fecha de acceso: octubre 23, 2025, https://openstax.org/books/prec%C3%A1lculo-2ed/pages/5-1-angulos
4. Conversión de grados a radianes - YouTube, fecha de acceso: octubre 23, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=ew188f6LTGI
5. Convertir grados a radianes Ejemplo 1 - YouTube, fecha de acceso: octubre 23, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=seR9VVW4DaI
6. Converting degrees to radians | Example 4 #julioprofe - YouTube, fecha de

acceso: octubre 23, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=9uDYMczcFI0
7. Respuestas de Flexi - ¿Qué es un ángulo de referencia? | CK-12 Foundation, fecha de acceso: octubre 23, 2025, https://www.ck12.org/flexi/es/algebra/radianes/que-es-un-angulo-de-referencia/
8. Grados y radianes: ejercicios resueltos, fecha de acceso: octubre 23, 2025, https://s26bef4fb0b7c48da.jimcontent.com/download/version/1583304223/module/8133897363/name/Ejercicios%20grados%20y%20radianes.pdf
9. Determine el ángulo de referencia de un ángulo dado en radianes (4pi / 3 y 11pi / 4), fecha de acceso: octubre 23, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=s3FER_I-6IA
10. Conversión entre Grados y Radianes. Curso de Trigonometría - Clase 3 - YouTube, fecha de acceso: octubre 23, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=FuKqRggYQVQ