

# DISEÑO DE CONTROLADORES PARA CIRCUITO RC

SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO CONTINUO

1<sup>ro</sup> Jeisson Styc Dominguez Rosero  
*F. de ingeniería electrónica y telecomunicaciones.*  
Universidad del Cauca.  
Popayán, Cauca  
jeissondominguez@unicauca.edu.co

2<sup>do</sup> Braian Steeven Silva Velasco  
*F. de ingeniería electrónica y telecomunicaciones.*  
Universidad del Cauca.  
Popayán, Cauca  
bsilva@unicauca.edu.co

## I. PLANTEAMIENTO

Para el siguiente circuito:

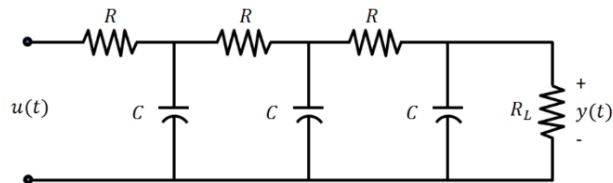


Fig. 1. Circuito RC.

y su respectivo montaje real del circuito RC:

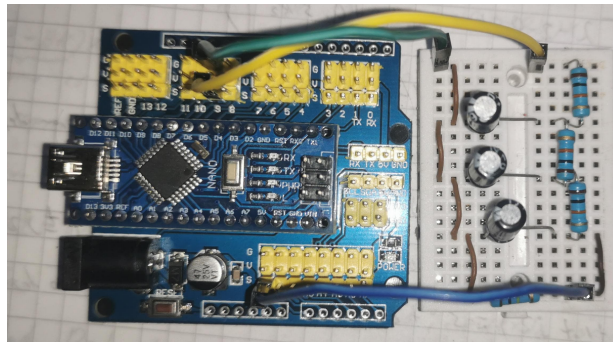


Fig. 2. Montaje circuito RC.

En cada uno de los siguientes puntos compare los resultados de simulación e implementación realizando variaciones de la señal de referencia y de la resistencia de carga  $RL$ , para un modelo matemático a partir de ecuaciones diferenciales que describan el comportamiento del voltaje en la resistencia de carga  $RL$ , un modelo aproximado de primer orden con tiempo muerto y el sistema físico con una placa de desarrollo como Controlador.

- Obtenga la respuesta en lazo abierto del sistema.
- Diseñe un controlador con sólo acción proporcional.
- Utilizando la técnica del LGR, diseñe un controlador en atraso de fase con acción integral.
- Utilizando la técnica de respuesta en frecuencia diseñe un controlador.
- Sintonicé un controlador PID.

Mediante la implementación de dichos controladores se desea un error en estado estacionario de cero ante una entrada tipo escalón, un tiempo de establecimiento de 0.75 segundos y un máximo sobre impulso de 10%.

## II. CON UNA RESISTENCIA DE CARGA DE $RL = 100K\Omega$

Para el modelado de los controladores es necesario tener un modelo matemático del sistema, por ello es necesario obtener las ecuaciones diferenciales del sistema, siendo estas en espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{c1} \\ \dot{v}_{c2} \\ \dot{v}_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{RC} & 0 \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ 0 & \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} - \frac{1}{R_L RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \quad (1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Obteniendo como función de transferencia, la señal de entrada en relación con el voltaje en la resistencia de carga:

$$G(s) = \frac{R_L}{R_L R^3 C^3 s^3 + (R^3 + 5R_L R^2) C^2 s^2 + 6R_L R C s + (3R + R_L)} \quad (3)$$

Tomando  $C = 10\mu F$  y  $R = 10k\Omega$  obtenemos la siguiente función de transferencia para  $R_L = 100k\Omega$ :

$$G(s) = \frac{1000}{s^3 + 515s^2 + 640s + 1300} \quad (4)$$

Ahora para obtener un sistema de primer orden con tiempo muerto es necesario excitar el sistema físico mediante una entrada de tipo escalón unitario. El valor unitario de la entrada tipo escalón será proporcional al 50% del esfuerzo de control máximo entregado por el controlador, es decir  $2.5V$ . Ante dicha referencia obtenemos la siguiente respuesta del sistema físico:

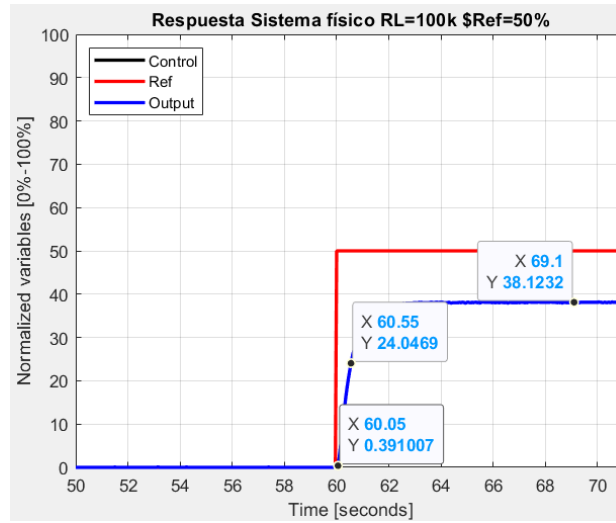


Fig. 3. Respuesta del sistema físico en lazo abierto con  $Ref = 50\%$

Donde es posible obtener los parámetros necesarios para modelar un sistema de primer orden con tiempo muerto de la forma:

$$G_{p(s)} = K \frac{e^{-Ls}}{\tau s + 1} \quad (5)$$

Siendo  $L = 0.05$ , el tiempo muerto del sistema;  $\tau = 0.4974$ , el tiempo que tarda en llegar al 63% del valor final y  $K = 0.768$ , el valor final de la respuesta del sistema; obteniendo el siguiente sistema de primer orden con tiempo muerto:

$$G_{p(s)} = 0.768 \frac{e^{-0.05s}}{0.4974s + 1} \quad (6)$$

#### A. Respuesta en Lazo Abierto.

Para obtener la respuesta en lazo abierto de la función de transferencia del sistema modelado en espacio de estados, hacemos uso del comando `step()` el cual excita el sistema ante una entrada tipo escalón unitario, ante dicha excitación observamos la siguiente respuesta del sistema:

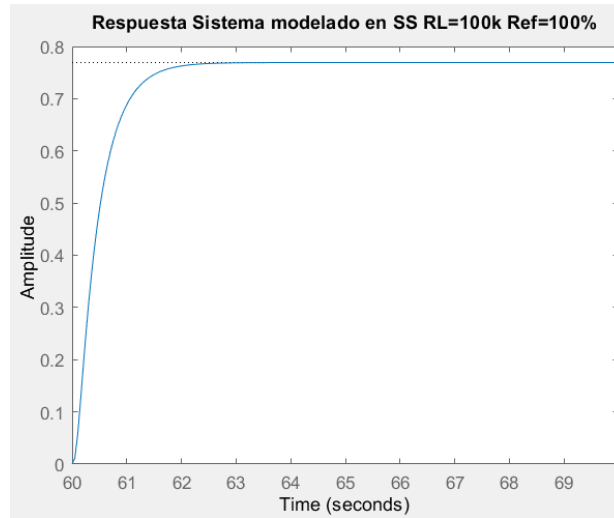


Fig. 4. Respuesta del sistema modelado en espacio de estados en lazo abierto

Para obtener la respuesta en lazo abierto del sistema físico es necesario excitar dicho sistema mediante una referencia, para este caso, la referencia será el esfuerzo de control máximo entregable por el controlador, es decir  $5V$ . Con dicha referencia observamos la siguiente señal de salida:

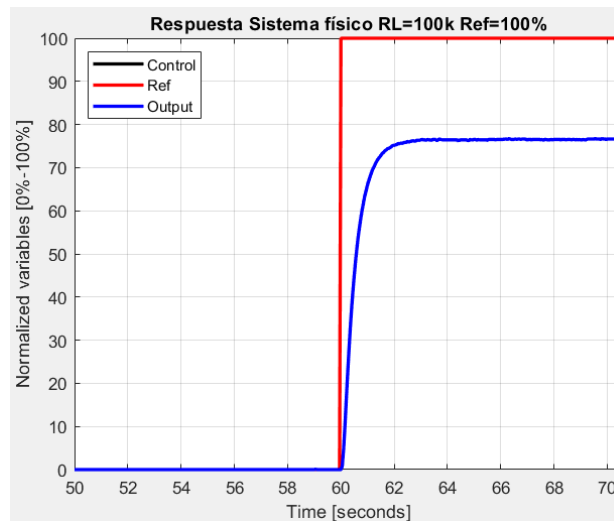


Fig. 5. Respuesta del sistema físico en lazo abierto con  $Ref = 100\%$

Para obtener la respuesta en lazo abierto de la función de transferencia del sistema de primer orden con tiempo muerto, hacemos uso del comando `step()` el cual excita el sistema ante una entrada tipo escalón unitario, ante dicha excitación observamos la siguiente respuesta del sistema:

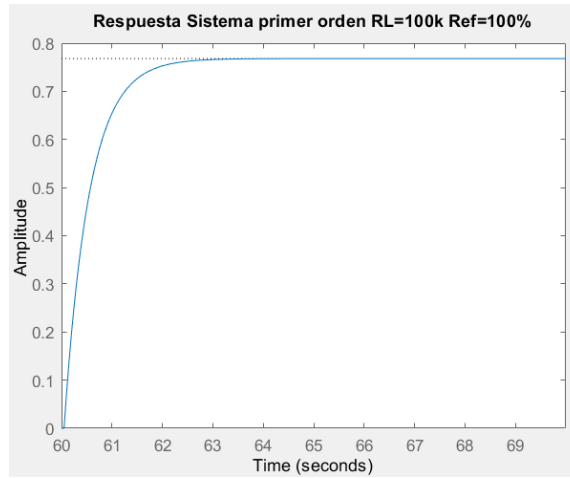


Fig. 6. Respuesta del sistema de primer orden en lazo abierto con  $Ref = 50\%$

Superponiendo las respuestas de los tres sistemas obtenemos:

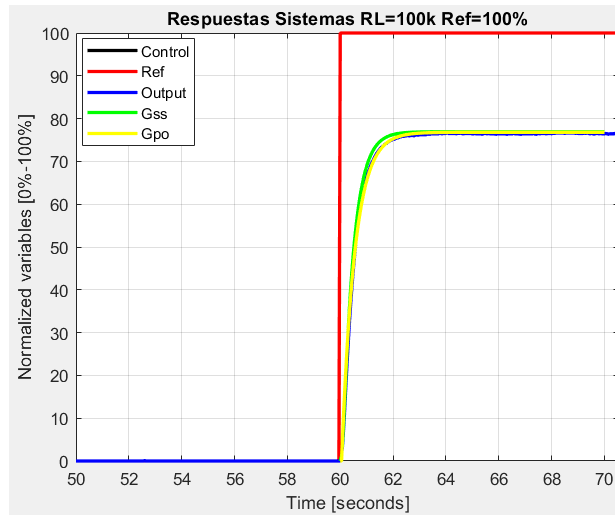


Fig. 7. Respuesta de los sistemas en lazo abierto con  $Ref = 100\%$

De las respuestas de los sistemas anteriores en lazo abierto podemos decir que presentan gran similitud entre estas, siendo que, las funciones de transferencia del sistema del modelo en espacio de estados y el sistema de primer orden con tiempo muerto, son fieles al comportamiento del sistema físico, o en otras palabras, el modelado de dichos sistemas está bien implementado.

**B. Controlador de acción proporcional :**  $G_{C(s)} = K$ .

Para obtener un controlador de acción proporcional a partir del sistema de primer orden con tiempo muerto, es posible basarse en el método de Ziegler - Nichols, donde podemos obtener un controlador PI, PID y nuestro caso de estudio P. La acción proporcional P está dada de la forma:

$$P = \frac{\tau}{KL} \quad (7)$$

Reemplazando los valores obtenidos para el modelado del sistema de primer orden con tiempo muerto obtenemos:

$$P = \frac{0.4974}{0.768 * 0.05} \approx 12.9531 \quad (8)$$

Implementando la acción proporcional tanto en el sistema físico como en los sistemas matemáticos, sistema de primer orden con tiempo muerto y sistema en modelo de espacio de estados, obtenemos:

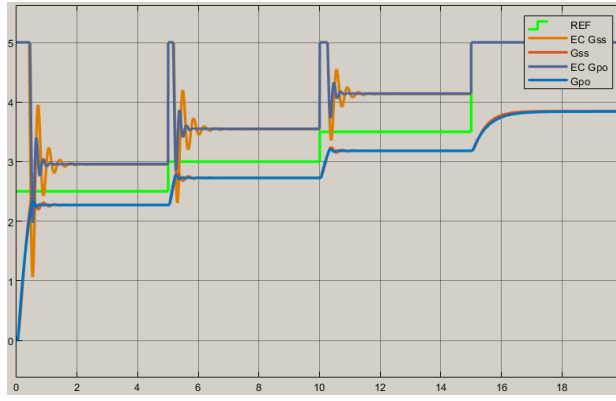


Fig. 8. Respuesta del sistema del modelo en espacio y de primer orden

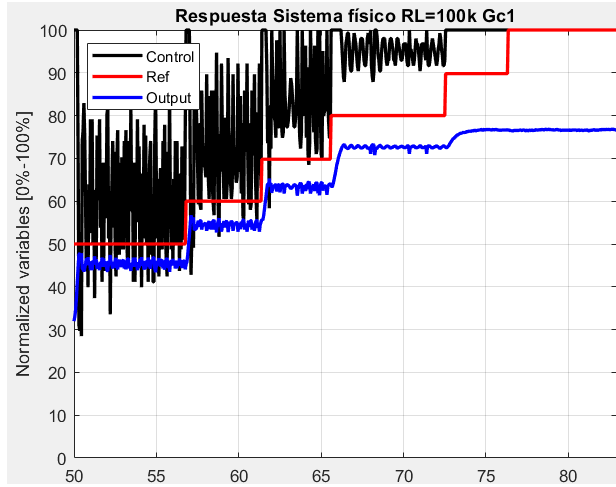


Fig. 9. Respuesta del sistema físico

Vemos que con este controlador de acción proporcional es posible obtener un seguimiento de la referencia con un error en estado estacionario de 0.09, dado que el sistema completo no cuenta con un integrador para hacer de este error en estado estacionario 0. Además, se obtiene un máximo sobre impulso aceptable aproximadamente del 5% a costa de un tiempo de establecimiento grande y sobre picos en el esfuerzo de control grandes al momento de un cambio en la referencia de seguimiento.

C. Controlador por atraso de fase con acción integral  $G_{C(s)} = \frac{s+\mathbb{Z}}{s}$ .

Para la implementación de un controlador por atraso de fase con acción integral, es necesario añadir un integrador al sistema, con el objetivo de obtener un error en estado estacionario de cero, y a partir de dicho sistema obtener un controlador por atraso de fase, obteniendo como sistema a trabajar:

$$G(s) = \frac{1000}{s^4 + 515s^3 + 640s^2 + 1300s} \quad (9)$$

Primero garantizamos que las condiciones  $M_P = 10\%$  y  $t_S = 0.75_{Seg}$  se cumplan en la respuesta transitoria del sistema, definiendo nuestro punto de operación así:

$$\varsigma = \sqrt{\frac{Ln^2(M_P)}{\pi^2 + Ln^2(M_P)}} \approx 0.5911 \quad (10)$$

Ahora para  $W_n$  tenemos:

$$W_n = \frac{4}{\varsigma t_s} \approx 9.0218 \quad (11)$$

Dado  $\varsigma \approx 0.5911$  y  $W_n \approx 9.0218$  calculamos el punto de operación que cumple las condiciones requeridas, es decir:

$$s_{0,1} = -\varsigma W_n \pm iW_n \sqrt{1 - \varsigma^2} \approx -5.3333 \pm i7.2766 \quad (12)$$

Dicho punto, situándolo en el LGR del sistema obtendremos:

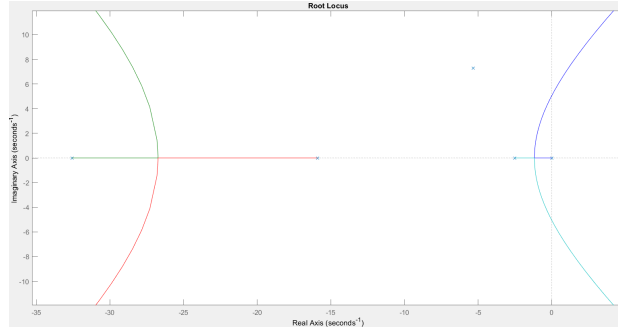


Fig. 10. Punto de operación en el LGR del sistema

Como podemos ver, el punto de operación no pertenece al LGR del sistema, por tanto, con un controlador de la forma  $G_C(s) = K$  no es posible alcanzar dicho punto de operación, será necesario un controlador diferente. Siendo los polos del sistema:

$$P = 0 \wedge -2.5077 \wedge -15.9106 \wedge -32.5816 \quad (13)$$

Calculamos la fase del sistema con respecto al punto de operación:

$$\angle G_P(s) = -\varnothing_0 - \varnothing_2 - \varnothing_{15} - \varnothing_{32} \approx -286.9391 \quad (14)$$

Por lo tanto, el controlador deberá de aportar  $106.9391^\circ$  de fase positiva, es decir, el controlador a implementar será por adelanto de fase, pero dicha compensación será dada por el cero del controlador ya que ya hemos implementado el polo en el origen, teniendo que  $\angle Z = 106.939^\circ$ . Despejando el cero de la ecuación de su fase obtenemos:

$$Z = 5.33333 \frac{7.2766}{\tan(180^\circ - \angle Z)} \approx 3.1171 \quad (15)$$

Ya obtenido el cero en  $Z = 3.1171$  y el polo en  $P = 0$  del controlador, calculamos la ganancia que nos desplazará hasta el punto de operación en el LGR, para esto, obtenemos el LGR del sistema y desplazamos las raíces hasta el punto de operación deseado. Una ventaja de encontrar la ganancia del controlador de esta manera es el poder ser utilizado como método de comprobación, ya que, si los cálculos son correctos, el punto de operación será perteneciente al LGR del sistema con controlador. Para esto usamos la herramienta de Matlab "rltool()" que me permite ver y desplazar las raíces del sistema a partir de una ganancia, dicha ganancia desplaza las raíces hasta el punto de operación deseado será la ganancia del controlador. El sistema en el nos interesa el LGR será:

$$G(s) = \frac{1000}{s^3 + 515s^2 + 640s + 1300} * \frac{s + 3.1171}{s} \quad (16)$$

Obteniendo de la herramienta "rltool()":

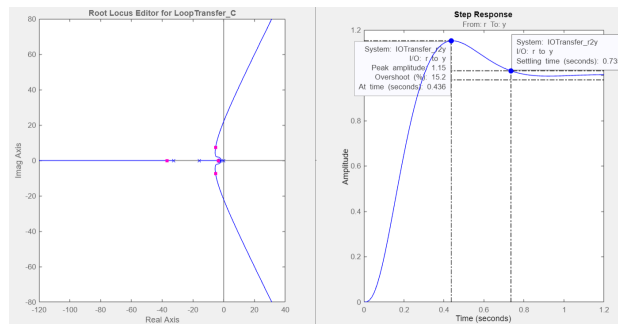


Fig. 11. Desplazamiento de las raíces al punto de operación

Donde la ganancia que permite alcanzar dicho punto de operación es  $K = 3.5554$ , obteniendo como controlador por atraso de faso con acción integral:

$$G_c(s) = 3.5554 \frac{s + 3.1171}{s} \quad (17)$$

Implementando el controlador por atraso de fase con acción integral en el sistema físico como en los sistemas matemáticos, sistema de primer orden con tiempo muerto y sistema en modelo de espacio de estados, obtenemos:

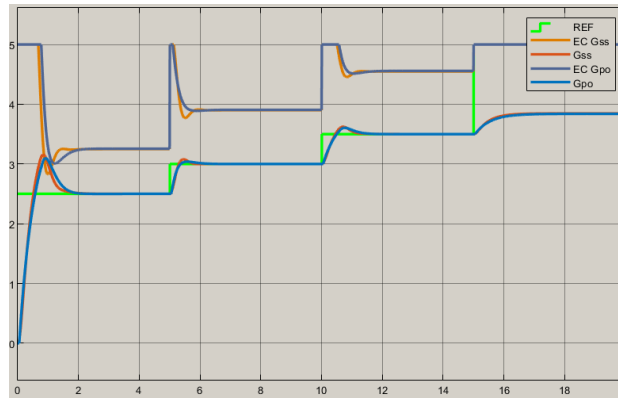


Fig. 12. Respuesta del sistema del modelo en espacio y de primer orden

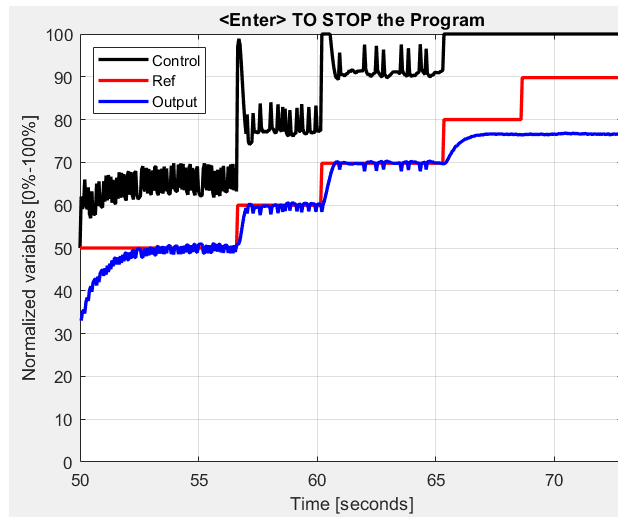


Fig. 13. Respuesta del sistema físico

Vemos que con este controlador es posible obtener un seguimiento de la referencia con un error en estado estacionario de 0, dado que el controlador cuenta con un integrador para hacer de este error en estado estacionario 0. Además, se obtiene un máximo sobre impulso aceptable aproximadamente del 5% y un tiempo de establecimiento de aproximadamente 0.8 segundos y una disminución drástica de los sobre picos en el esfuerzo control comparado con el controlador de ganancia proporcional.

D. Controlador por respuesta en frecuencia :  $G_C(s) = K_1 \frac{s+Z_1}{s+P_1} K_2 \frac{s+Z_2}{s+P_2}$ .

En principio para realizar las implementaciones de los compensadores en respuesta en frecuencia se observó el diagrama de Bode del sistema para analizar su estabilidad mediante este diagrama, de la siguiente manera.

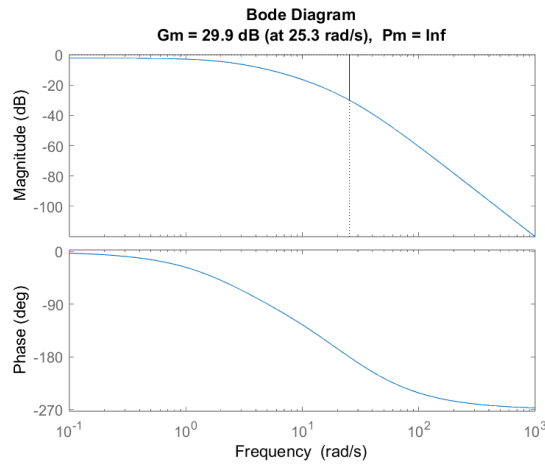


Fig. 14. Diagrama respuesta en frecuencia

Como se puede observar en la diagrama de magnitud el sistema como tal no pasa por 0 dB, por lo que el sistema tiene un margen de ganancia infinito, es decir que el sistema al no cruzar por cero tiene frecuencias altas en baja frecuencia por lo que el sistema tendrá siempre estabilidad por su margen de fase positiva.

Ahora teniendo en cuenta los requisitos que se establecieron tales como:  $t_s = 0.75s$ ,  $M_p = 0.1$  y un  $kp = 10$  teniendo en cuenta una resistencia de  $100k\Omega$  Se realiza los procedimientos para determinar  $\zeta$  y  $\omega_n$ ,

$$\sqrt{\frac{\ln(0.1)^2}{\pi^2 + \ln(0.1)^2}} \quad (18)$$

Mediante la ecuación 18 se tiene un  $\zeta$  de 0.591 se procede a calcular el  $\omega_n$ , con la ecuación de tiempo de establecimiento,

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} \approx 9.024 \quad (19)$$

dando como resultado un valor de  $\omega_n = 9.024$

Ahora mediante la relación de el margen e fase y  $\zeta$  se obtiene el margen de fase necesario para el compensador por adelante.

$$MF = 100\zeta = 59.1 \quad (20)$$

Obtenidos el margen de fase y el  $\omega_n$  para los compensadores se debe calcular el  $\omega_c$  que es el encargado de determinar la frecuencia por la que se da el cruce por cero del sistema con la adición de los compensadores, mediante la siguiente ecuación

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}} \quad (21)$$

Dando como resulta un  $\omega_n$  de 6.51 aproximadamente por lo que se realiza la modificación del punto deseado  $\omega_c$  en el diagrama de bode.



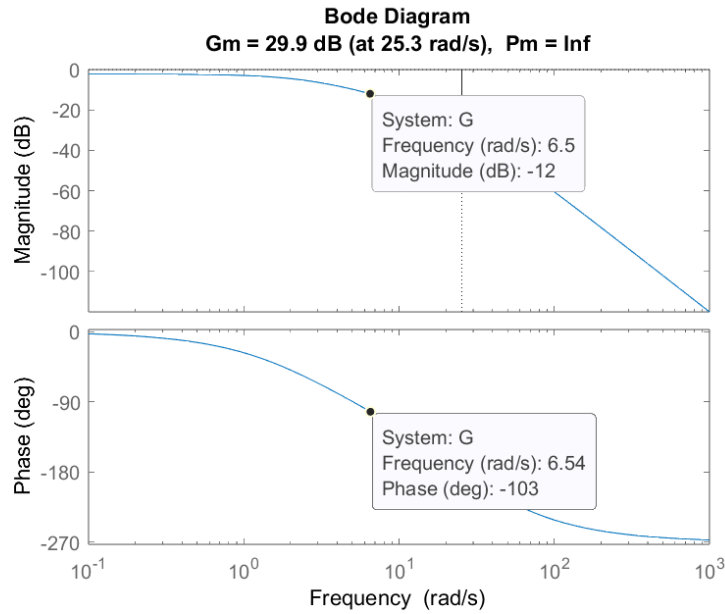


Fig. 15. Diagrama respuesta en frecuencia en el cruce por cero del sistema compensado

Como se puede observar en el punto  $\omega_c$  da una magnitud de -12 dB y una fase de -103, entonces a partir de esta información se procede a calcular el ángulo de fase requerido para el primer compensador,

$$\phi_m = 59.1 - (180 - 103) = -17.9 \quad (22)$$

El resultado nos da un ángulo negativo por lo que, se le aumenta el ángulo de fase que introduce el compensador para luego su respectivo calculo. Entonces, se tiene que en realidad se introduciría un ángulo de fase de -12.9 Por lo que se procede a calcular el  $\alpha$  necesario para el compensador.

$$\alpha = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m} = 0.6349 \quad (23)$$

se realiza el calculo del polo y cero del compensador.

$$p = \omega_c \sqrt{\alpha} = 5.187 \quad (24)$$

$$z = \frac{p}{\alpha} = 8.169 \quad (25)$$

Finalmente se calcula la ganancia para este controlador.

$$K_c = \frac{\sqrt{\alpha}}{|G(j\omega_c)|} = 3.209 \quad (26)$$

ya con las contantes se obtiene el siguiente compensador.

$$G_{c1} = 3.209 \left( \frac{s + 8.169}{s + 5.187} \right) \quad (27)$$

obteniendo el compensador se observa su respuesta en frecuencia

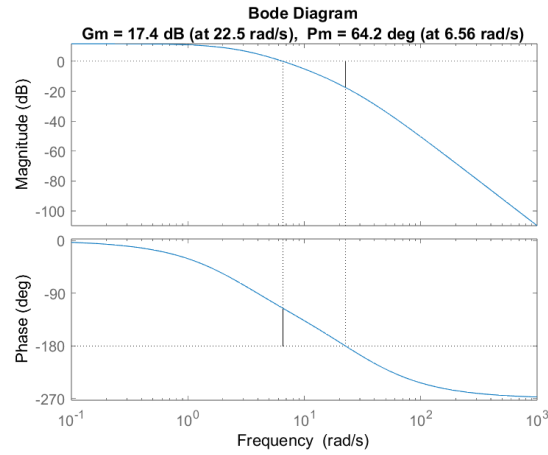


Fig. 16. Diagrama de frecuencia para la primer compensación

se puede observar que la adicción de los 5 grados afecta ocasionando que su margen de fase se aumente a 64. Ahora se procede a observar su respuesta transitoria con la primer compensación.

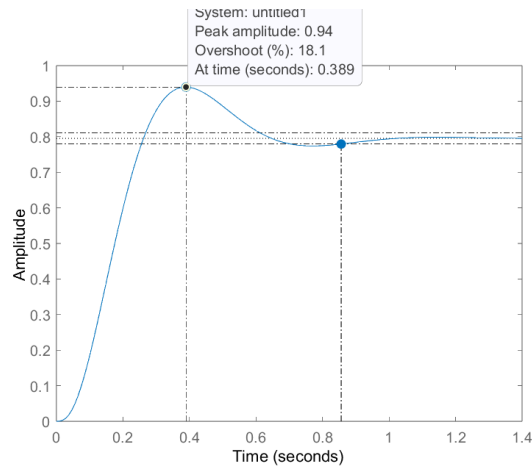


Fig. 17. Respuesta transitoria para la primer compensación

Donde se puede observar que en si el sistema tiene una buena respuesta con respecto al tiempo de establecimiento de 0.85 aproximadamente, pero un maximo sobre impulso de 18.1 donde se espera uno del 0.1 0 10 por ciento. Ademas se tiene un error de posición llegando el sistema a 0.8, por lo tanto se requiere un compensador para eliminar el ess teniendo un kp de 10, por lo que el ess seria de 0.09. calculamos el k para el error en kp dando como resultado un k de 2.57

$$kp = \lim_{s \rightarrow 0} 3.209 \left( \frac{s + 8.169}{s + 5.187} \right) K c_2 \frac{s + z_2}{s + p_2} \left( \frac{1000}{s^3 + 51s^2 + 640s + 1300} \right) \quad (28)$$

entonces se procede a realizar el diagrama de bode para ese valor de k con el compensador y la planta dando como resultado lo siguiente.

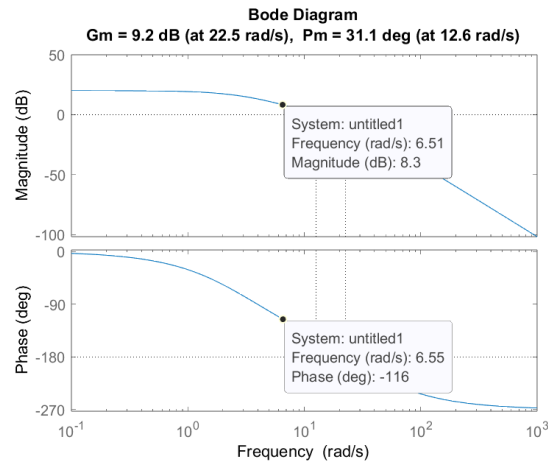


Fig. 18. Diagrama respuesta en frecuencia sistema con k

por lo que en  $\omega_c$  la atenuación que se debe de hacer es de 8dB. Entonces

$$-20\log(\alpha) = -8.29 = \alpha = 2.597 \quad (29)$$

Ahora calculando el polo y el cero se obtiene lo siguiente:

$$z = \omega_c/10 = 0.651 \quad (30)$$

$$p = \frac{z}{\alpha} = 0.25 \quad (31)$$

con una ganancia de compensación de 0.9922 se obtiene el compensador.

$$Gc_2 = 0.9922 \left( \frac{s + 0.651}{s + 0.25} \right) \quad (32)$$

Finalmente se observa su respuesta en frecuencia mediante el diagrama de bode del sistema ya compensado

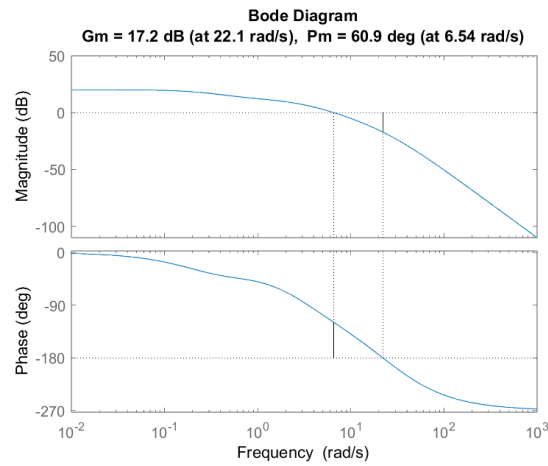


Fig. 19. Diagrama respuesta en frecuencia sistema compensado

se observa que al implementarse ya ambas compensaciones si se obtiene algo aproximado al valor que se de un margen de fase de 59.1 y un  $\omega_c$  de 6.51

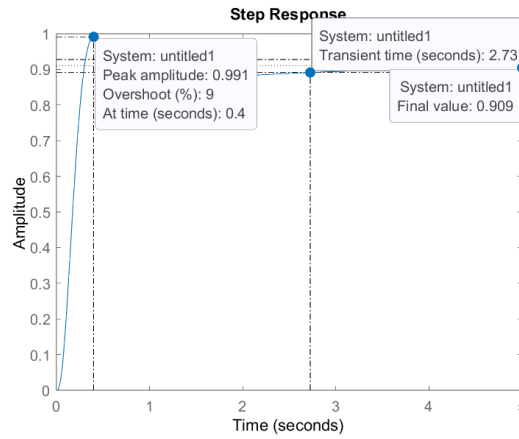


Fig. 20. Respuesta transitoria del sistema compensado

Por lo que se puede observar que en ambos controladores el polo esta mas cercano al eje imaginario por lo que el sistema tiene un tiempo de respuesta mayor al esperado. Ahora mediante la comprobación de los compensadores se introducen estos compensadores en el sistema real, para observar si tienen el mismo comportamiento

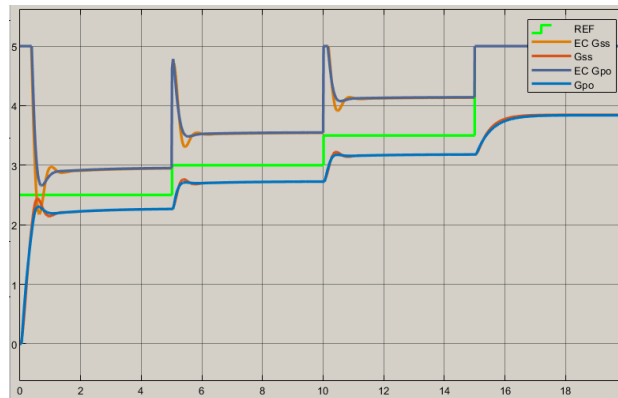


Fig. 21. Respuesta del sistema del modelo en espacio y de primer orden

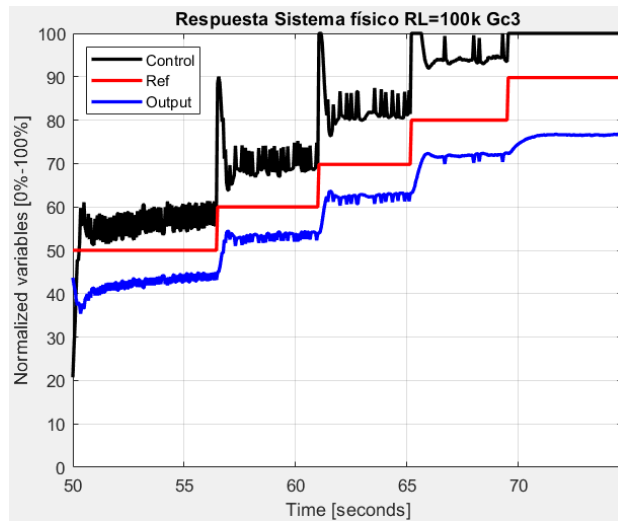


Fig. 22. Respuesta del sistema físico

### E. Controlador PID.

Para determinar la sintonización PID se tubo en cuenta la aproximación del sistema a un sistema de primer orden con tiempo muerto para el sistema con  $R = 100k\Omega$ , por lo que mediante el análisis del sistema en lazo abierto se pudo obtener la aproximación, mediante el metodo de la curva de reacción se determinaron el  $\tau$  y al  $k$ , como también el tiempo muerto dando como resultado el siguiente sistema.

$$G_{p(s)} = 0.768 \frac{e^{-0.05s}}{0.4974s + 1} \quad (33)$$

Teniendo el modelo se procede a realizar la sintonización mediante el método de Ziegler-Nichols, teniendo en cuenta la siguiente tabla de sintonización para nuestras constantes  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$

|     | <b>Kp</b>            | <b>Ti</b> | <b>Td</b> |
|-----|----------------------|-----------|-----------|
| P   | $\frac{\tau}{kL}$    |           |           |
| PI  | $\frac{0.9\tau}{kL}$ | $3L$      |           |
| PID | $\frac{1.2\tau}{kL}$ | $2L$      | $0.5L$    |

Fig. 23. tabla de sintonización de las constantes

por lo que introduciendo el valor del  $\tau$ ,  $k$  y  $L$ , obtenemos las siguientes constantes:

$$K_p = \frac{1.2\tau}{KL} = \frac{1.2 \cdot 0.4974}{0.768 \cdot 0.05} = 15.54 \quad (34)$$

$$T_i = 2L = 2(0.05) = 0.1 \quad (35)$$

$$T_d = 0.5L = 0.5(0.05) = 0.025 \quad (36)$$

para que se tenga una limitación de la acción derivativa se estableció un  $N$  de 10 para limitar la ganancia de alta frecuencia que otorga la acción derivativa.

obteniendo el siguiente controlador.

$$G_c = K_p[E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s) + \frac{T_d s}{\frac{T_d s}{N} + 1} E(s)] \quad (37)$$

$$G_c = 15.54[E(s) + \frac{1}{0.1} E(s) + \frac{0.025s}{\frac{0.025s}{10} + 1} E(s)] \quad (38)$$

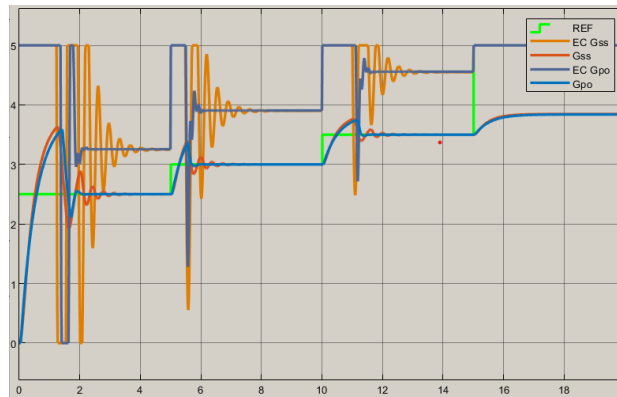


Fig. 24. Respuesta del sistema del modelo en espacio y de primer orden

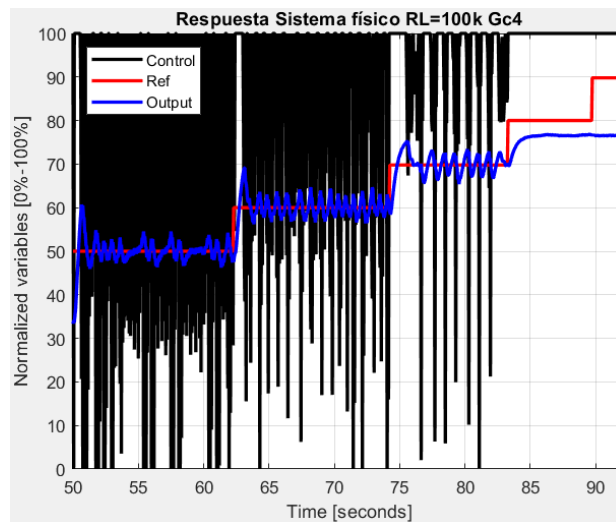


Fig. 25. Respuesta del sistema físico

figura montaje real y comportamiento para 100k

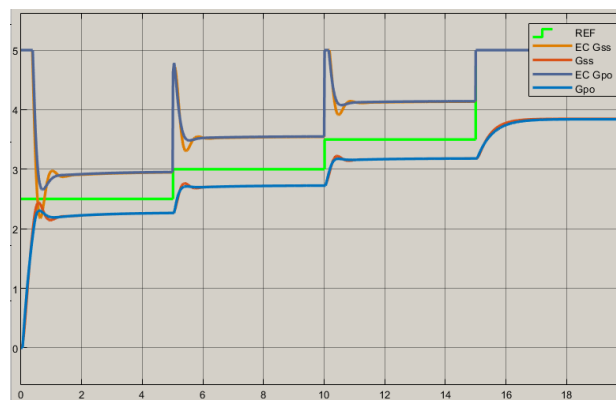


Fig. 26. Respuesta del sistema del modelo en espacio y de primer orden

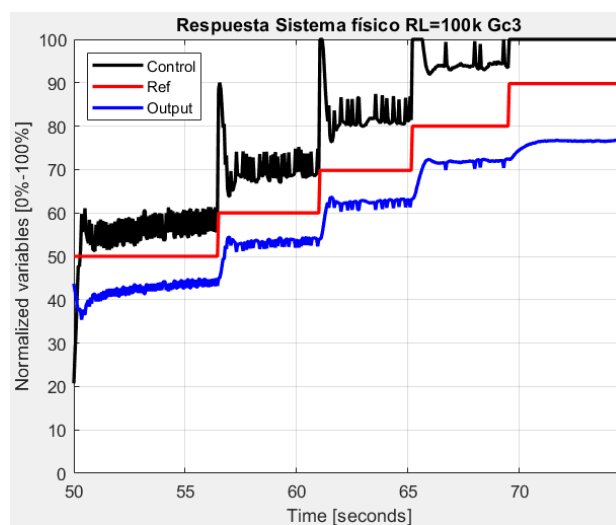


Fig. 27. Respuesta del sistema físico

se puede observar que tanto en simulación como en el sistema real tienen el comportamiento en semejanza, sin embargo por factores externos como la tolerancias de las resistencias, caída de voltajes, por lo que en simulación se tiene en cuenta un sistema ideal sin perdidas por factores externos, pero que en general el sistema presenta buena respuesta y un error de estado estable de 0.

### III. CON UNA RESISTENCIA DE CARGA DE $RL = 150K\Omega$

Para el modelado de los controladores es necesario tener un modelo matemático del sistema, por ello es necesario obtener las ecuaciones diferenciales del sistema, siendo estas en espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{c1} \\ \dot{v}_{c2} \\ \dot{v}_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{RC} & 0 \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ 0 & \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} - \frac{1}{R_L RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \quad (39)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Obteniendo como función de transferencia, la señal de entrada en relación con el voltaje en la resistencia de carga:

$$G(s) = \frac{R_L}{R_L R^3 C^3 s^3 + (R^3 + 5R_L R^2) C^2 s^2 + 6R_L R C s + (3R + R_L)} \quad (41)$$

Tomando  $C = 10\mu F$  y  $R = 10k\Omega$  obtenemos la siguiente función de transferencia para  $R_L = 150k\Omega$ :

$$G(s) = \frac{1000}{s^3 + 50.67s^2 + 626.75s + 1200} \quad (42)$$

Ahora para obtener un sistema de primer orden con tiempo muerto es necesario excitar el sistema físico mediante una entrada de tipo escalón unitario. El valor unitario de la entrada tipo escalón será proporcional al 50% del esfuerzo de control máximo entregado por el controlador, es decir 2.5V. Ante dicha referencia obtenemos la siguiente respuesta del sistema físico:

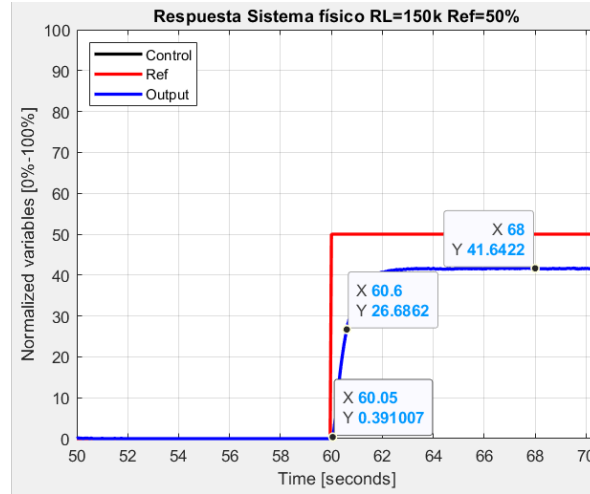


Fig. 28. Respuesta del sistema en lazo abierto con  $Ref = 50\%$

Donde es posible obtener los parámetros necesarios para modelar un sistema de primer orden con tiempo muerto de la forma:

$$G_p(s) = K \frac{e^{-Ls}}{\tau s + 1} \quad (43)$$

Siendo  $L = 0.05$ , el tiempo muerto del sistema;  $\tau = 0.5287$ , el tiempo que tarda en llegar al 63% del valor final y  $K = 0.832$ , el valor final de la respuesta del sistema; obteniendo el siguiente sistema de primer orden con tiempo muerto:

$$G_p(s) = 0.832 \frac{e^{-0.05s}}{0.5287s + 1} \quad (44)$$

### A. Respuesta en Lazo Abierto.

Para obtener la respuesta en lazo abierto de la función de transferencia del sistema modelado en espacio de estados, hacemos uso del comando `step()` el cual excita el sistema ante una entrada tipo escalón unitario, ante dicha excitación observamos la siguiente respuesta del sistema:

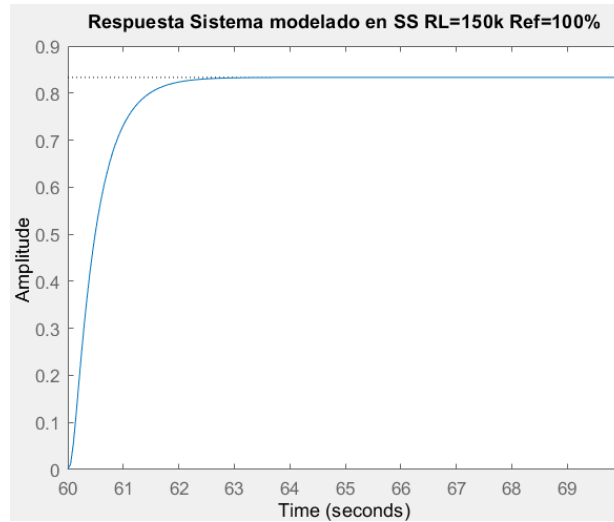


Fig. 29. Respuesta del sistema modelado en espacio de estados en lazo abierto

Para obtener la respuesta en lazo abierto del sistema físico es necesario excitar dicho sistema mediante una referencia, para este caso, la referencia será el esfuerzo de control máximo entregable por el controlador, es decir  $5V$ . Con dicha referencia observamos la siguiente señal de salida:

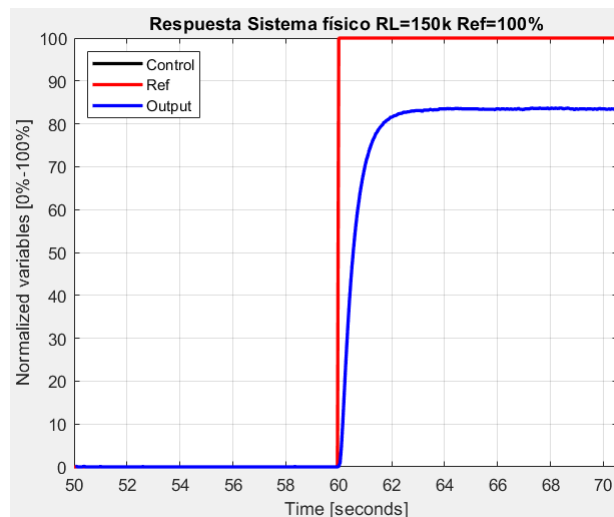


Fig. 30. Respuesta del sistema físico en lazo abierto con  $Ref = 100\%$

Para obtener la respuesta en lazo abierto de la función de transferencia del sistema de primer orden con tiempo muerto, hacemos uso del comando `step()` el cual excita el sistema ante una entrada tipo escalón unitario, ante dicha excitación observamos la siguiente respuesta del sistema:



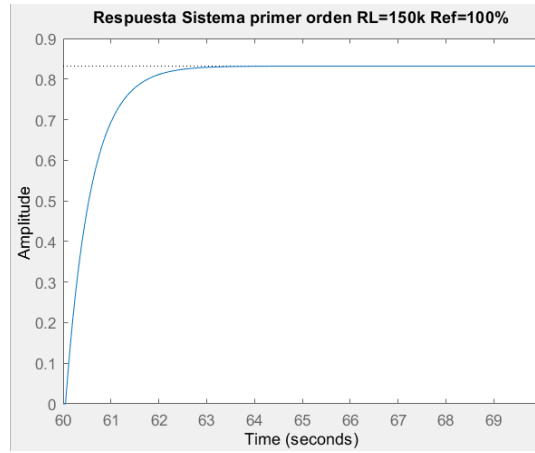


Fig. 31. Respuesta del sistema de primer orden en lazo abierto con  $Ref = 50\%$

Superponiendo las respuestas de los tres sistemas obtenemos:

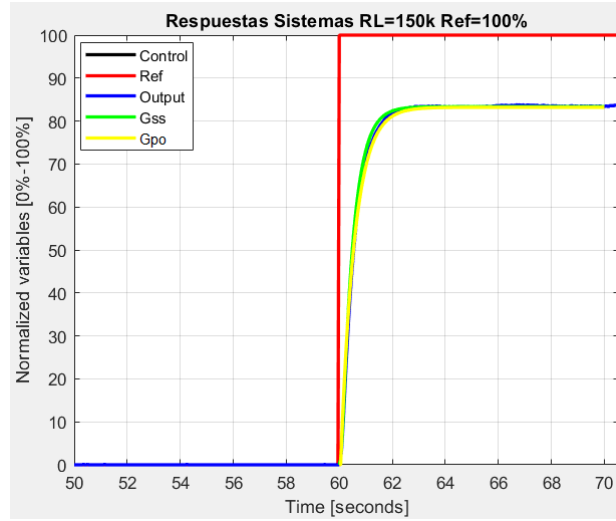


Fig. 32. Respuesta de los sistemas en lazo abierto con  $Ref = 100\%$

De las respuestas de los sistemas anteriores en lazo abierto podemos decir que presentan gran similitud entre estas, siendo que, las funciones de transferencia del sistema del modelo en espacio de estados y el sistema de primer orden con tiempo muerto, son fieles al comportamiento del sistema físico, o en otras palabras, el modelado de dichos sistemas esta bien implementado.

*B. Controlador de acción proporcional :  $G_{C(s)} = K$ .*

Para obtener un controlador de acción proporcional a partir del sistema de primer orden con tiempo muerto, es posible basarse en el método de Ziegler - Nichols, donde podemos obtener un controlador PI, PID y nuestro caso de estudio P. La acción proporcional P esta dada de la forma:

$$P = \frac{\tau}{KL} \quad (45)$$

Reemplazando los valores obtenidos para el modelado del sistema de primer orden con tiempo muerto obtenemos:

$$P = \frac{0.5287}{0.832 * 0.05} \approx 12.7091 \quad (46)$$

Implementando la acción proporcional tanto en el sistema físico como en los sistemas matemáticos, sistema de primer orden con tiempo muerto y sistema en modelo de espacio de estados, obtenemos:

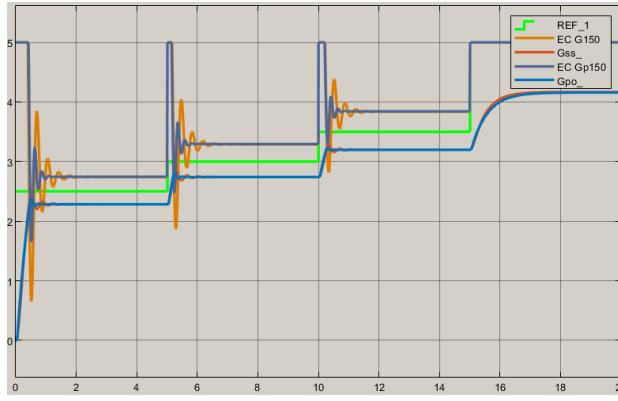


Fig. 33. Respuesta del sistema del modelo en espacio y de primer orden

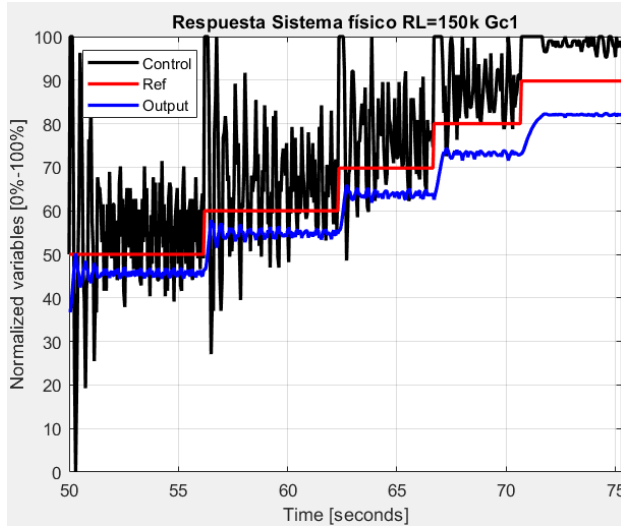


Fig. 34. Respuesta del sistema físico

Vemos que con este controlador de acción proporcional es posible obtener un seguimiento de la referencia con un error en estado estacionario de 0.1, dado que el sistema completo no cuenta con un integrador para hacer de este error en estado estacionario 0. Además, se obtiene un máximo sobre impulso aceptable aproximadamente del 10% a costa de un tiempo de establecimiento grande y sobre picos en el esfuerzo de control drásticos al momento de un cambio en la referencia de seguimiento y en el intento del seguimiento de esta.

C. Controlador por atraso de fase con acción integral  $G_C(s) = \frac{s+Z}{s}$ .

Para la implementación de un controlador por atraso de fase con acción integral, es necesario añadir un integrador al sistema, con el objetivo de obtener un error en estado estacionario de cero, y a partir de dicho sistema obtener un controlador por atraso de fase, obteniendo como sistema a trabajar:

$$G(s) = \frac{1000}{s^4 + 50.67s^3 + 626.75s^2 + 1200s} \quad (47)$$

Primero garantizamos que las condiciones  $M_P = 10\%$  y  $t_S = 0.75_{Seg}$  se cumplan en la respuesta transitoria del sistema, definiendo nuestro punto de operación así:

$$\varsigma = \sqrt{\frac{Ln^2(M_P)}{\pi^2 + Ln^2(M_P)}} \approx 0.5911 \quad (48)$$

Ahora para  $W_n$  tenemos:

$$W_n = \frac{4}{\varsigma t_s} \approx 9.0218 \quad (49)$$

Dado  $\varsigma \approx 0.5911$  y  $W_n \approx 9.0218$  calculamos el punto de operación que cumple las condiciones requeridas, es decir:

$$s_{0,1} = -\varsigma W_n \pm i W_n \sqrt{1 - \varsigma^2} \approx -5.3333 \pm i 7.2766 \quad (50)$$

Dicho punto, situándolo en el LGR del sistema obtendremos:

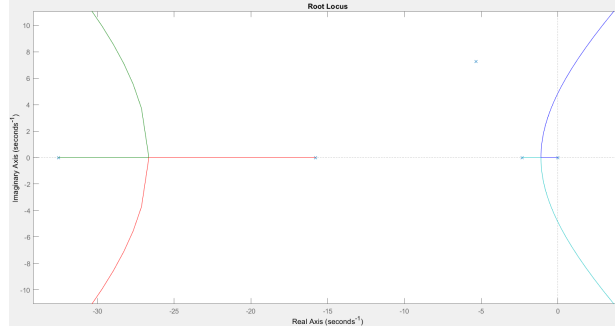


Fig. 35. Punto de operación en el LGR del sistema

Como podemos ver, el punto de operación no pertenece al LGR del sistema, por tanto, con un controlador de la forma  $G_{C(s)} = K$  no es posible alcanzar dicho punto de operación, será necesario un controlador diferente. Siendo los polos del sistema:

$$\mathbf{P} = 0 \wedge -2.3356 \wedge -15.7877 \wedge -32.5424 \quad (51)$$

Calculamos la fase del sistema con respecto al punto de operación:

$$\angle G_{P(s)} = -\varnothing_0 - \varnothing_2 - \varnothing_{15} - \varnothing_{32} \approx -288.4405 \quad (52)$$

Por lo tanto, el controlador deberá de aportar  $108.4405^\circ$  de fase positiva, es decir, el controlador a implementar será por adelanto de fase, pero dicha compensación será dada por el cero del controlador ya que ya hemos implementado el polo en el origen, teniendo que  $\angle \mathbf{Z} = 108.4405^\circ$ . Despejando el cero de la ecuación de su fase obtenemos:

$$\mathbf{Z} = 5.3333 \frac{7.2766}{\tan(180^\circ - \angle \mathbf{Z})} \approx 2.9070 \quad (53)$$

Ya obtenido el cero en  $\mathbb{Z} = 2.9070$  y el polo en  $\mathbb{P} = 0$  del controlador, calculamos la ganancia que nos desplazará hasta el punto de operación en el LGR, para esto, obtenemos el LGR del sistema y desplazamos las raíces hasta el punto de operación deseado. Una ventaja de encontrar la ganancia del controlador de esta manera es el poder ser utilizado como método de comprobación, ya que, si los cálculos son correctos, el punto de operación será perteneciente al LGR del sistema con controlador. Para esto usamos la herramienta de Matlab "rltool()" que me permite ver y desplazar las raíces del sistema a partir de una ganancia, dicha ganancia desplaza las raíces hasta el punto de operación deseado será la ganancia del controlador. El sistema en el nos interesa el LGR será:

$$G_{(s)} = \frac{1000}{s^3 + 50.67s^2 + 626.75s + 1200} * \frac{s + 2.9070}{s} \quad (54)$$

Obteniendo de la herramienta "rltool()":

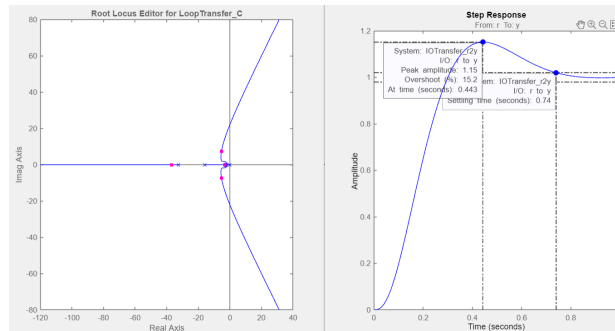


Fig. 36. Desplazamiento de las raíces al punto de operación

Donde la ganancia que permite alcanzar dicho punto de operación es  $K = 3.3161$ , obteniendo como controlador por atraso de faso con acción integral:

$$G_c(s) = 3.5554 \frac{s + 3.3161}{s} \quad (55)$$

Implementando el controlador por atraso de faso con acción integral en el sistema físico como en los sistemas matemáticos, sistema de primer orden con tiempo muerto y sistema en modelo de espacio de estados, obtenemos:

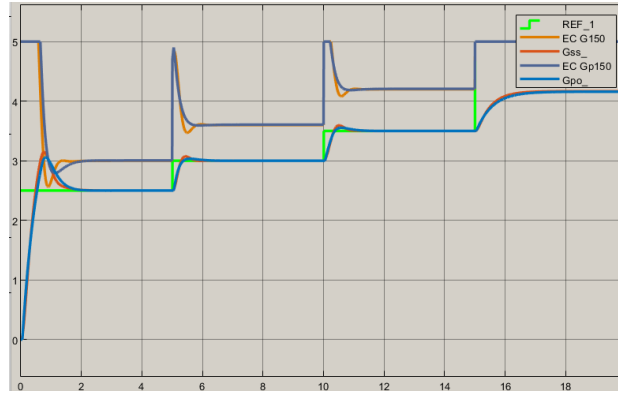


Fig. 37. Respuesta del sistema del modelo en espacio y de primer orden

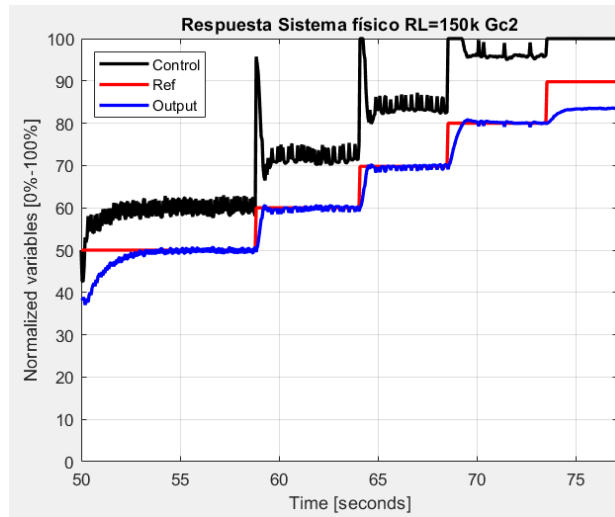


Fig. 38. Respuesta del sistema físico

Vemos que con este controlador es posible obtener un seguimiento de la referencia con un error en estado estacionario de 0, dado que el controlador cuenta con un integrador para hacer de este error en estado estacionario 0. Además, se obtiene un máximo sobre impulso aceptable aproximadamente del 4%, un tiempo de establecimiento de aproximadamente 0.75 segundos y una disminución drástica de los sobre picos en el esfuerzo control en el intento del seguimiento de la referencia comparado con el controlador de ganancia proporcional, pero presentando sobre picos grandes al momento de cambios de la referencia.

*D. Controlador por respuesta en frecuencia :  $G_C(s) = K_1 \frac{s+Z_1}{s+P_1} K_2 \frac{s+Z_2}{s+P_2}$ .*

En principio para realizar las implementaciones de los compensadores en respuesta en frecuencia se observó el diagrama de Bode del sistema para analizar su estabilidad mediante este diagrama, de la siguiente manera.

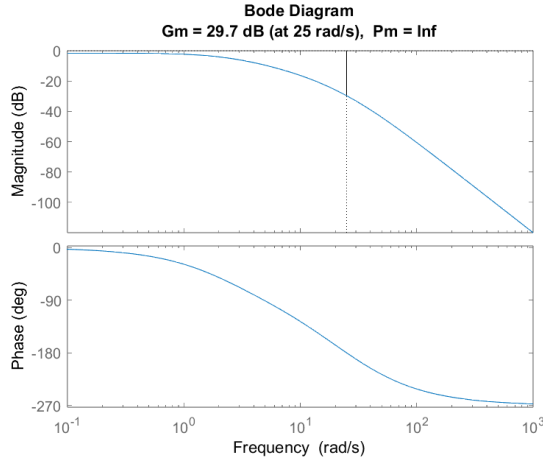


Fig. 39. Diagrama respuesta en frecuencia con 150k $\Omega$

Como se puede observar en la diagrama de magnitud el sistema para 150k  $\Omega$  como tal tampoco pasa por 0 dB, por lo que el sistema tiene un margen de ganancia infinito, es decir que el sistema al no cruzar por cero tiene frecuencias altas en baja frecuencia por lo que el sistema tendrá siempre estabilidad por su margen de fase positiva.

Ahora teniendo en cuenta los requisitos que se establecieron tales como:  $t_s = 0.75s$ ,  $M_p = 0.1$  y un  $k_p = 10$  teniendo en cuenta una resistencia de 150k $\Omega$  Se realiza los procedimientos para determinar  $\zeta$  y  $\omega_n$ ,

$$\sqrt{\frac{\ln(0.1)^2}{\pi^2 + \ln(0.1)^2}} \quad (56)$$

Mediante la ecuación 18 se tiene un  $\zeta$  de 0.591 se procede a calcular el  $\omega_n$ , con la ecuación de tiempo de establecimiento,

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} \approx 9.024 \quad (57)$$

dando como resultado un valor de  $\omega_n = 9.024$

Ahora mediante la relación de el margen e fase y  $\zeta$  se obtiene el margen de fase necesario para el compensador por adelante.

$$MF = 100\zeta = 59.1 \quad (58)$$

Obtenidos el margen de fase y el  $\omega_n$  para los compensadores se debe calcular el  $\omega_c$  que es el encargado de determinar la frecuencia por la que se da el cruce por cero del sistema con la adición de los compensadores, mediante la siguiente ecuación

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}} \quad (59)$$

Dando como resulta un  $\omega_n$  de 6.51 aproximadamente por lo que se realiza la modificación del punto deseado  $\omega_c$  en el diagrama de bode.

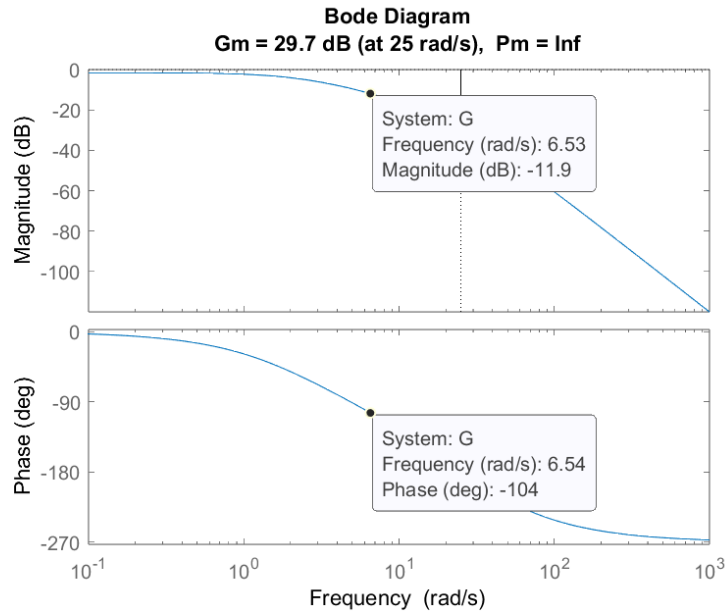


Fig. 40. Diagrama respuesta en frecuencia en el cruce por cero del sistema compensado con  $R = 150K \Omega$

Como se puede observar en el punto  $\omega_c$  da una magnitud de -11.9 dB y una fase de -104, entonces a partir de esta información se procede a calcular el ángulo de fase requerido para el primer compensador,

$$\phi_m = 59.1 - (180 - 104) = -11.9 \quad (60)$$

El resultado nos da un ángulo negativo por lo que, se le aumenta el ángulo de fase que introduce el compensador para luego su respectivo calculo. Entonces, se tiene que en realidad se introduciría un ángulo de fase de -11.9 Por lo que se procede a calcular el  $\alpha$  necesario para el compensador.

$$\alpha = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m} = 0.6580 \quad (61)$$

se realiza el calculo del polo y cero del compensador.

$$p = \omega_c \sqrt{\alpha} = 5.281 \quad (62)$$

$$z = \frac{p}{\alpha} = 8.0258 \quad (63)$$

Finalmente se calcula la ganancia para este controlador.

$$K_c = \frac{\sqrt{\alpha}}{|G(j\omega_c)|} = 3.192 \quad (64)$$

ya con las contantes se obtiene el siguiente compensador.

$$Gc_1 = 3.192 \left( \frac{s + 8.0258}{s + 5.281} \right) \quad (65)$$

obteniendo el compensador se observa su respuesta en frecuencia

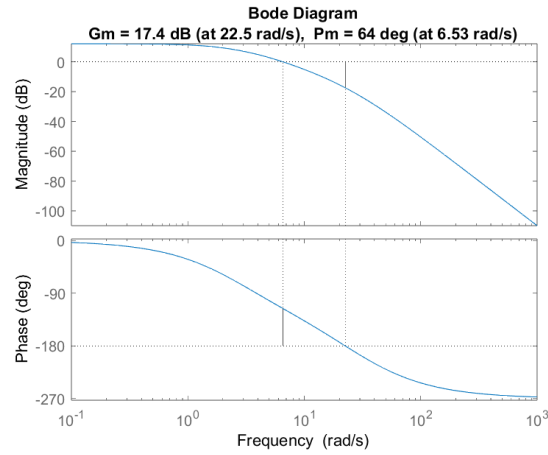


Fig. 41. Diagrama de bode la primer compensación con  $R = 150k \Omega$

se puede observar que la adición de los 5 grados afecta ocasionando que su margen de fase se aumente a 64. Ahora se procede a observar su respuesta transitoria con la primer compensación.

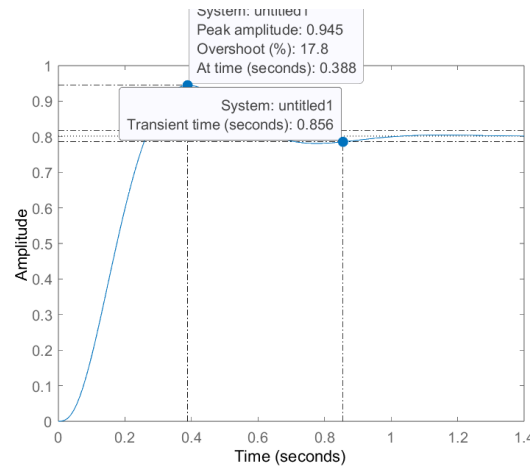


Fig. 42. Respuesta en transitoria para la primer compensación con  $R = 150k \Omega$

Donde se puede observar que en si el sistema tiene una buena respuesta con respecto al tiempo de establecimiento de 0.85 , pero un maximo sobre impulso de 17.8 donde se espera uno del 0.1 0 10 por ciento. Por siguiente compensador para eliminar en gran parte el ess teniendo un  $k_p$  de 10, por lo que el ess seria de 0.09. calculamos el  $k$  para el error en  $k_p$  dando como resultado un  $k$  de 2.474

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} 3.192 \left( \frac{s + 8.0258}{s + 5.281} \right) K c_2 \frac{s + z_2}{s + p_2} \left( \frac{1000}{s^3 + 51s^2 + 640s + 1200} \right) \quad (66)$$

entonces se procede a realizar el diagrama de bode para ese valor de  $k$  con el compensador y la planta dando como resultado lo siguiente.

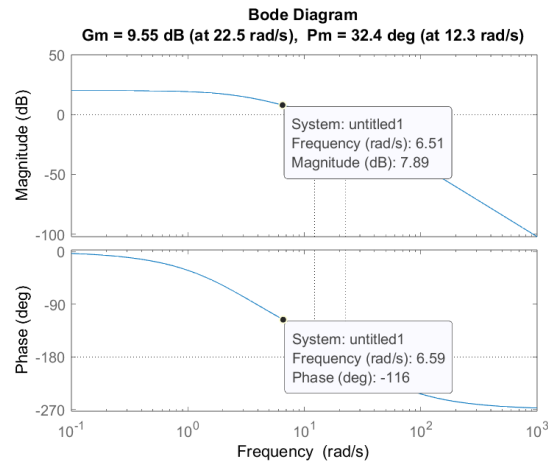


Fig. 43. Diagrama respuesta en frecuencia sistema con k

por lo que en  $\omega_c$  la atenuación que se debe de hacer es de 7.9dB. Entonces

$$-20\log(\alpha) = -7.9 = \alpha = 2.483 \quad (67)$$

Ahora calculando el polo y el cero se obtiene lo siguiente:

$$z = \omega_c/10 = 0.651 \quad (68)$$

$$p = \frac{z}{\alpha} = 0.262 \quad (69)$$

con una ganancia de compensación de 0.9964 se obtiene el compensador.

$$Gc_2 = 0.9964 \left( \frac{s + 0.651}{s + 0.262} \right) \quad (70)$$

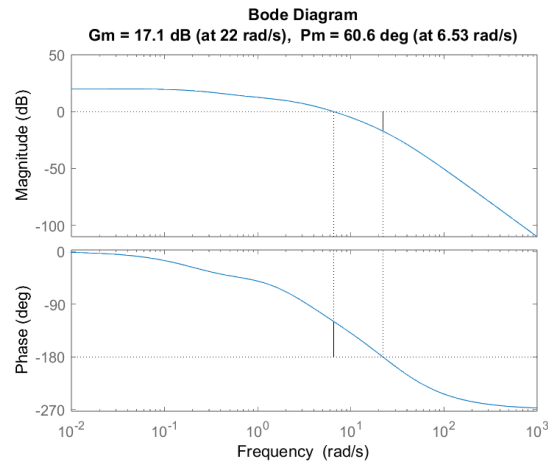


Fig. 44. Diagrama respuesta en frecuencia sistema compensado con  $RL = 150K\Omega$

Se puede observar que cumple con las especificaciones dadas el sistema compensado con un  $\omega_c$  de 6.51 aproximadamente y un MF de 59.1 aproximadamente.

Ahora se realiza el análisis del sistema en a respuesta transitoria.



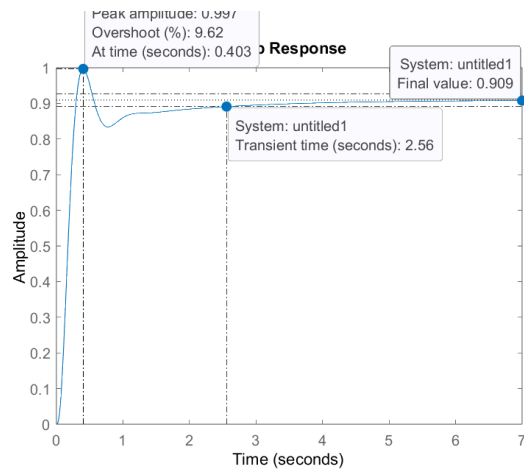


Fig. 45. Respuesta transitoria del sistema compensado con  $RL = 150K\Omega$

Por lo que se puede observar que en ambos controladores el polo está más cercano al eje imaginario por lo que el sistema tiene un tiempo de respuesta mayor al esperado. Además se observa que el sistema cumple con la especificación del  $M_p$ , y también del  $\text{ess}$ .

Ahora mediante la comprobación de los compensadores se introducen estos compensadores en el sistema real, para observar si tienen el mismo comportamiento

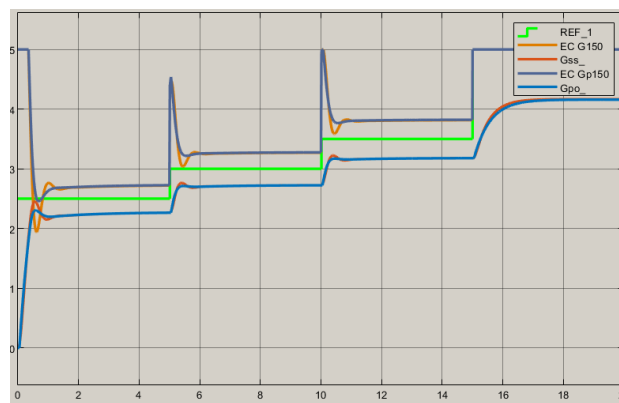


Fig. 46. Respuesta del sistema del modelo en espacio y de primer orden

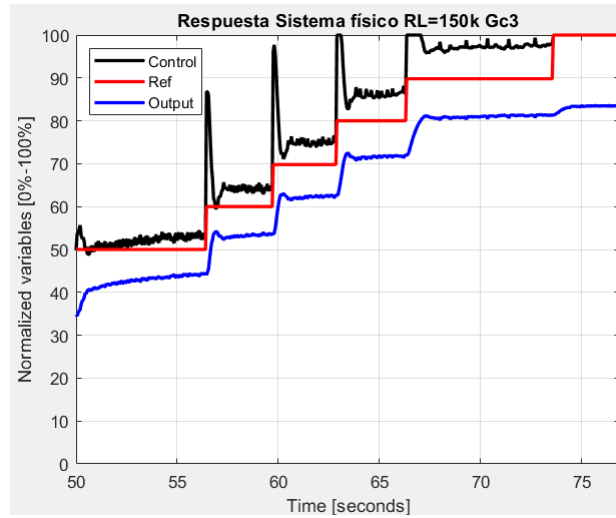


Fig. 47. Respuesta del sistema físico

#### E. Controlador PID.

Para determinar la sintonización PID se tubo en cuenta la aproximación del sistema a un sistema de primer orden con tiempo muerto para el sistema con  $R = 150k\Omega$ , por lo que mediante el análisis del sistema en lazo abierto se pudo obtener la aproximación, mediante el metodo de la curva de reacción se determinaron el  $\tau$  y al  $k$ , como también el tiempo muerto dando como resultado el siguiente sistema.

$$G_{p(s)} = 0.832 \frac{e^{-0.05s}}{0.5287s + 1} \quad (71)$$

Teniendo el modelo se procede a realizar la sintonización mediante el método de Ziegler-Nichols, teniendo en cuenta la siguiente tabla de sintonización para nuestras constantes  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$

|     | <b>Kp</b>            | <b>Ti</b> | <b>Td</b> |
|-----|----------------------|-----------|-----------|
| P   | $\frac{\tau}{kL}$    |           |           |
| PI  | $\frac{0.9\tau}{kL}$ | $3L$      |           |
| PID | $\frac{1.2\tau}{kL}$ | $2L$      | $0.5L$    |

Fig. 48. tabla de sintonización de las constantes

por lo que introduciendo el valor del  $\tau$ ,  $k$  y  $L$ , obtenemos las siguientes constantes:

$$K_p = \frac{1.2\tau}{KL} = \frac{1.2 \cdot 0.5287}{0.832 \cdot 0.05} = 15.25 \quad (72)$$

$$T_i = 2L = 2(0.05) = 0.1 \quad (73)$$

$$T_d = 0.5L = 0.5(0.05) = 0.025 \quad (74)$$

para que se tenga una limitación de la acción derivativa se estableció un  $N$  de 10 para limitar la ganancia de alta frecuencia que otorga la acción derivativa.

obteniendo el siguiente controlador.

$$G_c = K_p[E(s) + \frac{1}{T_i s}E(s) + \frac{T_d s}{\frac{T_d s}{N} + 1}E(s)] \quad (75)$$

$$G_c = 15.25[E(s) + \frac{1}{0.1}E(s) + \frac{0.025s}{\frac{0.025s}{10} + 1}E(s)] \quad (76)$$

Ahora se realiza tanto en simulación como en el montaje real para observar el comportamiento del sistema con dicho controlador.

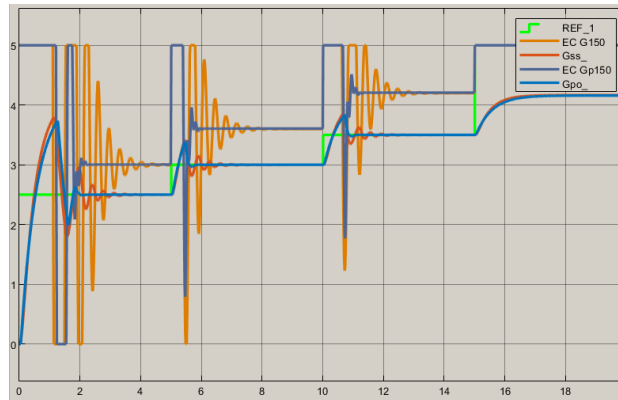


Fig. 49. Respuesta del sistema del modelo en espacio y de primer orden

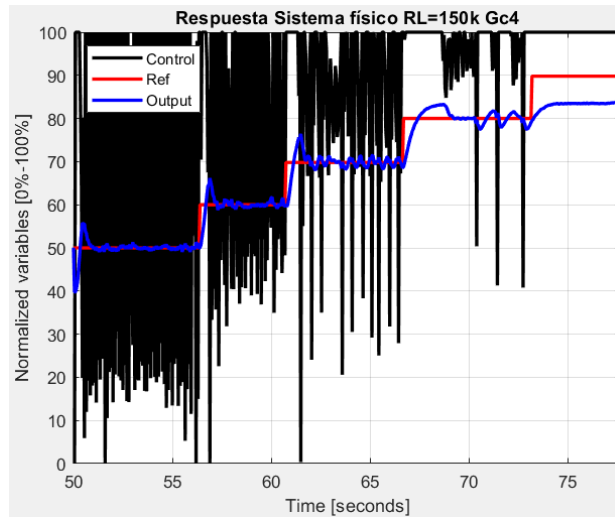


Fig. 50. Respuesta del sistema físico

como en el caso de la resistencia de  $100k\Omega$  se puede observar que tanto en simulación como en el sistema real también tienen cierta semejanza, sin embargo por factores externos como la tolerancias de las resistencias, caída de voltajes, difiere de simulación y el montaje real en el momento de su control por lo que en simulación se tiene en cuenta un sistema ideal sin pérdidas por factores externos, pero que en general el sistema presenta buena respuesta y un error de estado estable de 0.

#### REFERENCES

- [1] H. E. M. William, Jack and Steven, "Análisis de circuitos en Ingeniería,, 7ma ed, 2013, cap. 9.
- [2] A. Rudy," Electricidad y circuitos", Ed.Nueva 2014.