Plazo de entrega: Miércoles 21 de Abril

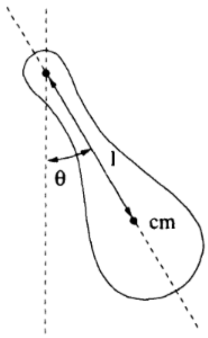
Tarea 2

1. Encontrar el valor de la siguiente integral

$$I = \int_0^1 x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}dx$$

   a) utilizando el método de Simpson, y estudiar la convergencia como función del número de puntos en la malla
   b) utilizando cuadratura Gaussiana, y estudiar la convergencia como función del número de nodos
   c) ¿Cuál es el valor de la integral? ¿Cuál y en qué condiciones fue el cálculo más óptimo?

2. Un **péndulo físico** es un objeto de forma arbitraria que puede pivotar libremente alrededor de un eje horizontal, como se indica en la figura



   a) Utilizando conservación de energía demostrar que

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega_0\left[\sin^2\frac{\theta_{max}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{1/2} \tag{1}$$

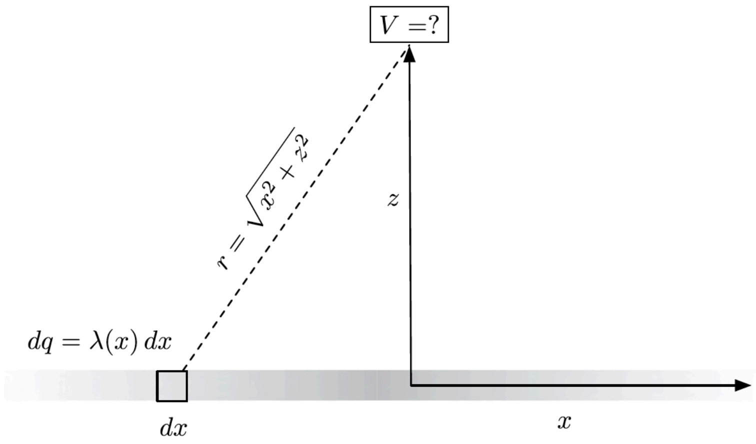
   y que, por lo tanto

$$T = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\left[\sin^2\frac{\theta_{max}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{1/2}} \tag{2}$$

   donde $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$ es el período natural del péndulo.

   b) Escribir un programa que calcule el período T/T_0 como función del desplazamiento angular máximo θ_{max}, y graficarlo. ¿Hasta que valores de θ_{max} el péndulo se comporta armónicamente dentro de un error del 1%? Utilizar el método de Simpson para la integración.
   c) Escribir un programa que calcule $\theta(t)$ utilizando (1). Compruebe que si la energía inicial es ligeramente menor que $2mgl$, el movimiento es periódico, pero no armónico (considerando que la energía es cero cuando el péndulo está en reposo en $\theta = 0$).
   d) Comprobar que para $E = 2mgl$, el movimiento cambia de vibración a rotación. Ver qué tan cerca se puede llegar a esta línea de separación y tratar de comprobar que en $E = 2mgl$ se necesita un tiempo infinito para que el péndulo llegue a la cima.

3. **Potencial electrostático**. Supongamos que tenemos un alambre infinito con densidad de carga lineal igual a $\lambda(x) = Qe^{-0.01x^2}$. Queremos conocer el potencial electrostático a una altura z del alambre como se muestra en la Figura.



a) Calcular numéricamente Q si se sabe que la carga total en el alambre es 20 statC.
b) Sabemos que cada punto a lo largo del alambre contribuye al potencial como fuente puntual, es decir, si un elemento de longitud dx centrada en x contiene una carga dq, entonces su contribución al potencial en el punto de interés es

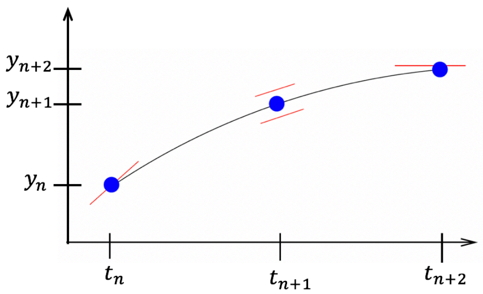
$$dV = \frac{dq}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\lambda(x)dx}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

Encontrar numéricamente el comportamiento del potencial como función de z, integrándolo en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Graficarlo.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) usando RK4, y compararlas con la solución analítica

a) $f'(x) = x^{10} - 5x^2$ $\quad f(0) = 1$
b) $f'(x) = -xf(x)$ $\quad f(0) = 1$
c) $f''(x) = -29f(x) - 4f'(x)$ $\quad f(0) = 1,\ f'(0) = 0$

5. **Método Adaptativo para RK4.** Para resolver una ODE en aplicaciones prácticas, es necesario tener una estimación del error local y ajustar el tamaño del paso Δt correctamente. Con el método Runge-Kutta, esto se puede lograr de la siguiente manera:



Calculamos y_{n+2} primero por dos pasos Δt y luego por un paso $2\Delta t$. Para el método de cuarto orden, estimamos los siguientes errores ($\mathcal{E}$ se ocupa como símbolo de error):

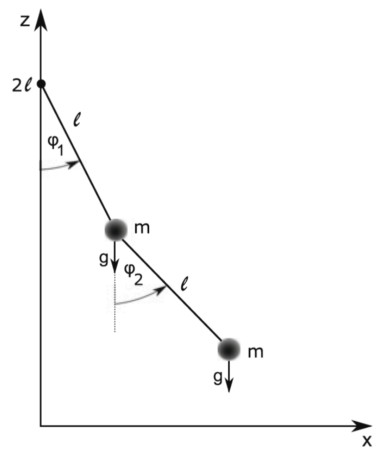
$$\begin{cases} \mathcal{E}y_{n+2}^{(\Delta t)} = 2A(\Delta t)^5 \\ \mathcal{E}y_{n+2}^{(2\Delta t)} = A(2\Delta t)^5 \end{cases} \Rightarrow \left| y_{n+2}^{(2\Delta t)} - y_{n+2}^{(\Delta t)} \right| = 30|A|(\Delta t)^5$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathcal{E}y_{n+1}^{(\Delta t)} = A(\Delta t)^5 = \frac{\left|y_{n+2}^{(2\Delta t)} - y_{n+2}^{(\Delta t)}\right|}{30}$$

Entonces, el tamaño del paso Δt se puede ajustar para mantener el error local dentro una precisión deseada.
Utilice este método para encontrar numéricamente, y con una precisión dada, la trayectoria de una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético (bajo la influencia de la fuerza de Lorentz).

a) Considerar el caso en el que el campo magnético está dado por $\vec{B} = B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$ con $qB_y/m = -0.02y$, $qB_z/m = 1 + 0.02z$, el campo eléctrico $\vec{E} = \vec{0}$, y con condiciones iniciales $\vec{v}(0) = \hat{y} + 0.1\hat{z}$, $\vec{r}(0) = \hat{x}$. Dibujar la trayectoria en un sistema cartesiano tridimensional (x, y, z) hasta 500 s.
b) El mismo caso anterior, pero en presencia de un campo eléctrico $\vec{E} = E_z\hat{z}$ con $qE_z/m = -0.01y$

6. **Péndulo doble**. Resolver la dinámica del péndulo doble mostrado en la figura, donde m es la masa de las dos partículas y ℓ la longitud de las dos varillas de masa despreciable.



a) Demostrar que el Hamiltoniano del sistema está dado por

$$\mathcal{H}(p_1, p_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2m\ell^2}\frac{p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1p_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} +$$

$$+ mg\ell[4 - 2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2]$$

b) Resolver numéricamente las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_i}, \quad i = 1,2$$

con condiciones iniciales $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0.0$, $p_1(0) = 4.0$, $p_2(0) = 2.0$. Dibuje la trayectoria en el espacio φ, en el espacio p, y realizar una animación del movimiento del péndulo en el espacio real.
c) Repetir el enunciado (b) con las siguientes condiciones iniciales: $\varphi_1(0) = 1.0$, $\varphi_2(0) = 0.0$, $p_1(0) = 0.0$, $p_2(0) = 3.0$

7. **El problema de tres cuerpos**. Investigue los efectos de Júpiter sobre la Tierra y sobre Marte, dibujando la trayectoria de cada uno de ellos en un tiempo adecuado y obteniendo también una animación:
   a) Considere un sistema de referencia solidario al Sol (con el Sol en el origen). Escribir las ecuaciones diferenciales que describan el movimiento de dos planetas que sienten el campo gravitacional del Sol y el campo gravitacional entre ellos. Mantener el movimiento en un plano.
   b) Escriba un algoritmo, usando RK4, que resuelva las ecuaciones de movimiento para obtener las posiciones y velocidades de cada planeta.
   c) Obtener la trayectoria de la Tierra y Júpiter suponiendo (i) que la masa de Júpiter es la verdadera M_J, (ii) que la masa de Júpiter es $100M_J$, y (iii) que es $1000M_J$.
   d) Repetir (c), pero con Marte en lugar de la Tierra.

planet	mass (kg)	radius (AU)	eccentricity
Mercury	2.4×10^{23}	0.39	0.206
Venus	4.9×10^{24}	0.72	0.007
Earth	6.0×10^{24}	1.00	0.017
Mars	6.6×10^{23}	1.52	0.093
Jupiter	1.9×10^{27}	5.20	0.048
Saturn	5.7×10^{26}	9.54	0.056
Uranus	8.8×10^{25}	19.19	0.046
Neptune	1.03×10^{26}	30.06	0.010
Pluto	$\sim 6.0 \times 10^{24}$	39.53	0.248

$M_{\text{Sol}} = 2 \times 10^{30}$ kg