

Tarea 2

Brian Tapia Contreras [†]

Pregunta 1

Se busca el valor de la siguiente integral, cuyo resultado analítico es conocido:

$$I = \int_0^1 x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 3,627598728468436 \quad (1)$$

Notamos que el integrando tiene singularidades en 0 y 1, valores que están incluidos en la región de integración y representan un problema numéricamente. Buscaremos eliminarlos mediante una serie de cambios de variable.

$$\text{Sea } \mu = (1-x)^{1/3} \implies d\mu = -(1/3)[(1-x)^{-2/3}]dx = \frac{-1}{3\mu^2}dx.$$

Notamos qué $x = 1 - \mu^3$ y,

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \mu \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow \mu \rightarrow 0$$

Usando todo esto en la Ecuación 1, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= - \int_1^0 (1-\mu^3)^{-2/3} \mu^{-1} \cdot 3\mu^2 d\mu \\ &= 3 \int_0^1 \mu(1-\mu^3)^{-2/3} d\mu \end{aligned} \quad (2)$$

Si bien con este cambio de variable logramos eliminar una de las singularidades, aún queda una en $\mu = 1$, por lo que utilizamos un nuevo cambio de variable.

Sea $h = 1 - \mu \implies dh = -d\mu$, con

$$\mu \rightarrow 0 \Rightarrow h \rightarrow 1$$

$$\mu \rightarrow 1 \Rightarrow h \rightarrow 0$$

Recordamos qué el denominador del integrando se puede expandir como sigue,

$$\begin{aligned} \rightarrow (1-\mu^3) &= (1-\mu)(1+\mu+\mu^2) \\ &= h(1+(1-h)+(1-h)^2) \\ &= h(2-h+1-2h+h^2) \\ &= h(h^2-3h+3) \end{aligned}$$

[†]brian.tapia@uc.cl

Reemplazando en la Ecuación 2, tenemos:

$$I = \int_0^1 \frac{3(1-h)}{[h(h^2-3h+3)]^{2/3}} dh \quad (3)$$

Y por último, hacemos $\alpha = h^{1/3} \Rightarrow d\alpha = \frac{1}{3}h^{-2/3}dh$, que preserve los límites de integración. De esta forma nos quedamos con,

$$I = \int_0^1 \frac{3(1-\alpha^3)}{(\alpha^6-3\alpha^3+3)^{2/3}} \frac{3}{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}h^{-2/3}dh}_{d\alpha} \quad (4)$$

De donde obtenemos la expresión final,

$$\therefore I = 9 \int_0^1 \frac{1-\alpha^3}{(\alpha^6-3\alpha^3+3)^{2/3}} d\alpha \quad (5)$$

Que es equivalente a la integral pedida, pero no tiene singularidades en la región de integración. Esta será la expresión que utilizemos en los métodos numéricos a continuación. Queda definida en la sub rutina del archivo **funcion.f90**.

■ Simpson

Para evaluar la integral mediante el método de Simpson, se utilizó directamente la sub rutina definida en clase (**simpson.f90**), donde la función que utiliza es la función definida anteriormente.

■ Cuadratura de Gauss

También se utilizó la sub rutina utilizada en clase (**gauss_legendre.f90**), de manera análoga a lo realizado según el método de Simpson.

Para el análisis completo de la convergencia, se llamó a las sub rutinas dentro de un ciclo **do**, que itera sobre valores de N (número de nodos) entre 1 y 1000. Se extrajo el valor de la integral según cada método e inmediatamente se calculó el error relativo, tomando como valor real el mostrado en la Ecuación 1. El error relativo como función del número de nodos N se muestra en la siguiente figura.

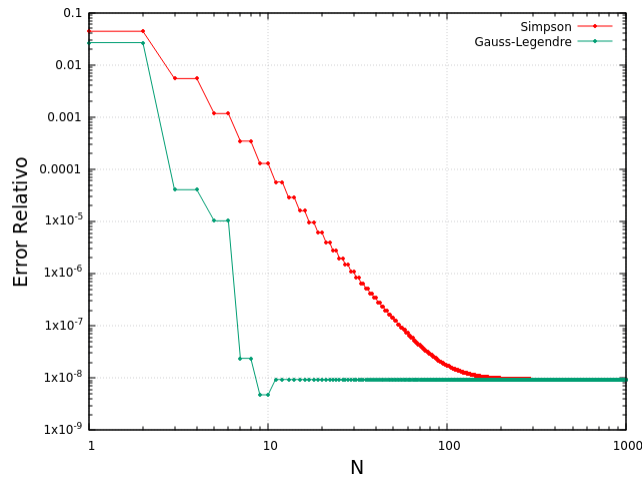


Figura 1: Error relativo como función del número de nodos. Métodos de Simpson y Cuadratura Gauss-Legendre.

Se puede hacer un análisis de el tiempo de ejecución de los códigos, para cada N , como muestra la Figura 4:

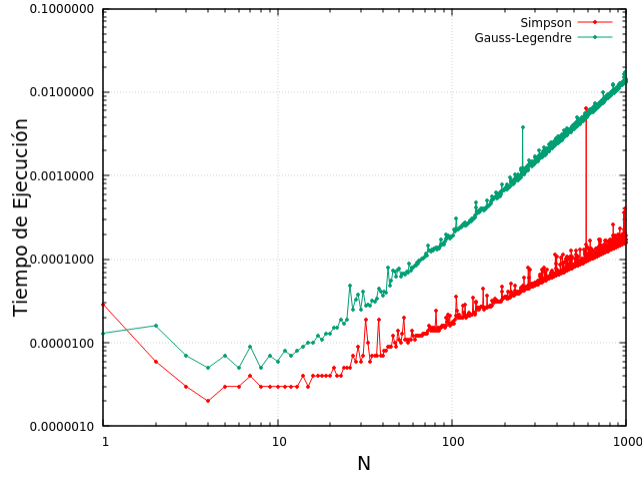


Figura 2: Tiempo de ejecución como función del número de nodos. Métodos de Simpson y Cuadratura Gauss-Legendre.

Notamos qué, en cuanto al tiempo de ejecución, el método de Cuadratura de Gauss es más lento que el de Simpson en órdenes de magnitud. Sin embargo, también observamos de la Figura 1 que el valor de la integral converge mucho más rápido al valor real.

Al equiparar ambos y comparar los tiempos en que convergen y minimizan el error relativo, es fácil ver que es más óptimo el método de Cuadratura de Gauss, converge a un menor N y en un menor tiempo.

Nota: El resultado analítico de la integral se muestra en la Ecuación 1.

Pregunta 2: Péndulo Físico

- (a) Comenzamos por ver las energías del sistema. Existe una energía cinética asociada al movimiento del péndulo físico, dependiente de la distribución de masa y de la variación en el ángulo θ . También existe una energía potencial asociada a la gravedad. De esta manera, obtenemos una expresión para la energía mecánica total del sistema:

$$E = E_K + E_U = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad (6)$$

Asumimos que existe un θ_{max} en el que la velocidad del péndulo físico es $d\theta/dt = 0$. Definimos la energía en este punto:

$$E_0 = mgl(1 - \cos \theta_{max}) \quad (7)$$

Por conservación de energía:

$$\begin{aligned} E = E_0 &\Rightarrow mgl(1 - \cos \theta_{max}) = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) \\ &\Rightarrow \cancel{mgl} - mgl \cos \theta_{max} - \cancel{mgl} + mgl \cos \theta = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow mgl(\cos \theta - \cos \theta_{max}) = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow 2 \underbrace{\left(\frac{mgl}{I}\right)}_{\omega_0^2} (\cos \theta - \cos \theta_{max}) = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow 2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_{max}) = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow 2\omega_0^2 \left[\cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) + \sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \right] = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow 4\omega_0^2 \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Finalmente, descartando la raíz negativa,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \omega_0 \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^{1/2} \quad (9)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{2\omega_0} \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^{-1/2} d\theta \quad (10)$$

Esta ecuación se puede integrar sobre un determinado intervalo para obtener el período, pero... ¿Cuál es ese intervalo?

Notamos que al integrar, por ejemplo, entre 0 y θ_{max} , estamos describiendo en verdad sólo un cuarto de ciclo de la oscilación. Tenemos la ventaja de que la oscilación es completamente simétrica, por lo que las integrales en los otros cuartos de oscilación tendrán exactamente el mismo valor. Esto permite encontrar el período bajo la siguiente relación:

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_0^{\theta_{max}} \frac{1}{2\omega_0} \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{-1/2} d\theta \\ T &= \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\theta_{max}} \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{-1/2} d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

Y definiendo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, tenemos finalmente:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_{max}} \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{-1/2} d\theta \quad (12)$$

- (b) Notamos que esta integral tiene una singularidad en θ_{max} . Se realizarán los siguientes cambios de variable para intentar eliminarla: Sea $\alpha = \sin \left(\frac{\theta_{max}}{2} \right)$; reemplazando, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_{max}} \left[\alpha^2 - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{-1/2} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_{max}} \alpha^{-1} \left[1 - \frac{\sin^2(\theta/2)}{\alpha^2} \right] d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

Sea también:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sin(\theta/2)}{\alpha} \Rightarrow d\mu = \frac{\cos(\theta/2)}{2\alpha} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\theta/2)}}{2\alpha} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{1 - \mu^2 \alpha^2}}{2\alpha} d\theta \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\alpha} [1 - \mu^2]^{-1/2} \cdot \frac{2\alpha}{\sqrt{1 - \mu^2 \alpha^2}} d\mu \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu^2 \alpha^2}} d\mu \end{aligned} \quad (15)$$

Por último, sea $x = \sqrt{1 - \mu^2} \Rightarrow dx = -\frac{1}{2\sqrt{1 - \mu^2}} d\mu = -\frac{1}{2x} d\mu$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2} \sqrt{1 - \alpha^2(1 - x^2)^2}} \quad (16)$$

Que es una integral sin singularidades en el dominio de integración, y se puede calcular numéricamente utilizando el método de simpson (para lo que aprovecharemos nuevamente la subrutina vista en clase). Esta función quedará definida en **P2/funcion.f90**, para efectos del código posterior.

El código que se encarga de calcular la integral está en **P2/p2b.f90**. En resumidas cuentas, crea un loop que itera sobre distintos valores de θ_{max} , con un paso definido en $d\theta_{max} = 0,001$, y un valor máximo definido en π . Define también un límite armónico, para el cual el péndulo se comportará de manera armónica, al llegar a ese límite lo imprime en pantalla.

El comportamiento de T/T_0 como función del parámetro θ_{max} , según lo calculado numéricamente, es como sigue:

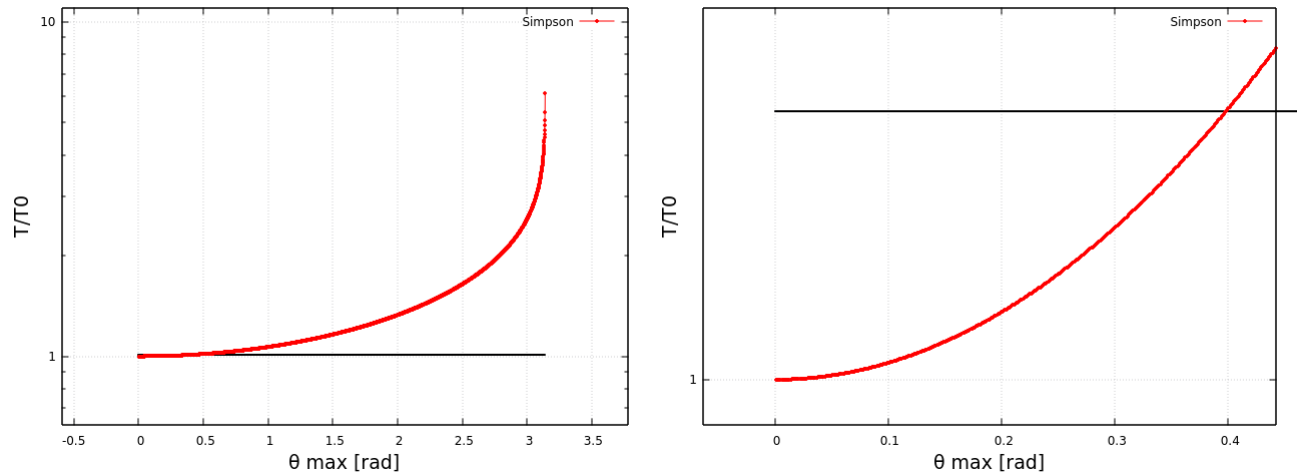


Figura 3: T/T_0 como función de θ_{max} . Límite armónico marcado con una línea negra horizontal.

El output del código nos indica que el péndulo se comportará de manera armónica hasta $\theta_{max} = 0,399$ rad.

Pregunta 3: Potencial electrostático

- (a) El alambre infinito tiene densidad lineal de carga dada por:

$$\lambda(x) = Qe^{-0,01x^2} \quad (17)$$

Notamos que esta distribución es simétrica respecto a $x = 0$, con su máximo en el mismo punto.

La carga total del alambre corresponderá a integrar la densidad a lo largo de todo el alambre, esto es

$$Q_T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} Qe^{-0,01x^2} dx \quad (18)$$

Utilizando que la distribución es simétrica:

$$Q_T = 2Q \int_0^{\infty} e^{-0,01x^2} dx \quad (19)$$

A lo que despejando Q , tenemos:

$$Q = \frac{1}{2} Q_T \left[\int_0^{\infty} e^{-0,01x^2} dx \right]^{-1} \quad (20)$$

La integral que aquí aparece la podemos calcular numéricamente utilizando el método de cuadratura Gaussiana adaptada al intervalo de cero a infinito. Para ello se utilizó la subrutina vista en clases, que está en **P3/05_gauss_legendre_infty.f90**. En conjunto a los códigos **P3/funcion.f90**, que modela la función a integrar; y **P3/p3a.f90** que actúa como main para obtener la respuesta final, se obtuvo el siguiente valor para Q :

$$Q = 1,12837916(8) \quad statC/[distancia] \quad (21)$$

Los decimales faltantes se pueden ver en detalle en **P3/fort.66**.

- (b) Consideramos:

$$dV = \frac{dq}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\lambda(x)dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{Qe^{-0,01x^2}dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad (22)$$

Para obtener el potencial V como función de z , integramos en todo el dominio, y, considerando la simetría del integrando, llegamos a lo siguiente:

$$V(z) = Q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-0,01x^2}}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx = 2Q \int_0^{\infty} \frac{e^{-0,01x^2}}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad (23)$$

Notamos que nuevamente podemos resolver esta integral con el método que ocupamos en el inciso anterior, sin embargo, es necesario modificarlos y adaptarlos para que contemplen al parámetro z .

Los códigos **P3/gauleg_0infy_mod.f90** y **funcion_3b.f90** contemplan estos sencillos cambios.

Al evaluar la integral a z fijo obtenemos simplemente un valor para el potencial en ese punto, por lo que para encontrar el comportamiento del potencial como función de z , realizamos un ciclo para hacer variar este parámetro.

El ciclo tendrá un número N de iteraciones (seteado a 1000 en este caso), y recorrerá z con un paso dz seteado en 0,5. El código en detalle se encuentra en **P3/p3b.f90**, y el resultado para el comportamiento del potencial $V(z)$ es el siguiente:

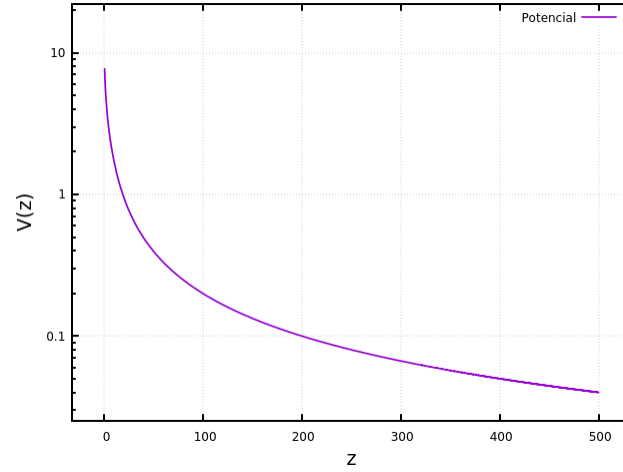


Figura 4: Potencial $V(z)$.

Notamos que el potencial decae a mayores valores de z , como es esperado al alejarnos perpendicularmente del alambre cargado.

Pregunta 4

- (a) Se pide la solución a la siguiente ecuación diferencial:

$$f'(x) = x^{10} - 5x^2 \quad f(0) = 1 \quad (24)$$

Cuya solución analítica es:

$$f(x) = \frac{x^{11}}{11} - 5\frac{x^3}{3} + 1 \quad (25)$$

Es fácil verificar que la función cumple las condiciones iniciales.

Se calculó la solución a la ODE con el método de Runge-Kutta de orden 4. El código para este inciso se encuentra en **P4/p4a.f90**. Se calcula en el mismo el error relativo respecto de la solución analítica, los resultados a continuación:

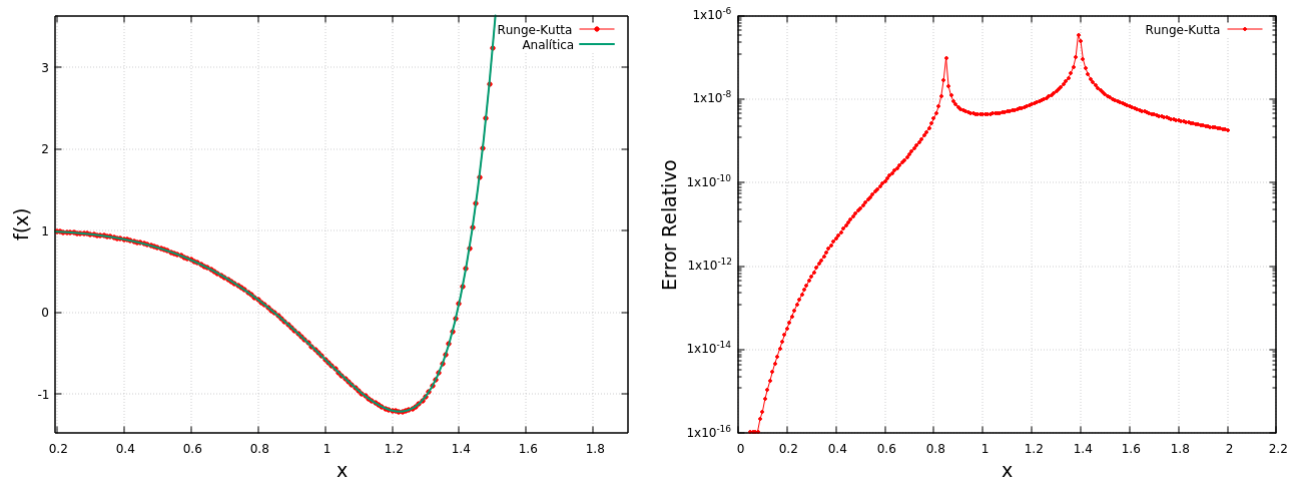


Figura 5: Solución a la ODE utilizando RK4. Errores relativos respecto a la solución analítica.

Notamos que la solución es bastante buena. El error relativo es bajo en órdenes de magnitud, y además cumple con que es mayor mientras más nos alejamos de la condición inicial, lo que es esperado para este tipo de cálculos numéricos.

- (b) Se pide la solución a la siguiente ecuación diferencial:

$$f'(x) = -xf(x) \quad f(0) = 1 \quad (26)$$

De solución analítica:

$$f(x) = e^{-x^2/2} \quad (27)$$

Nuevamente, es fácil verificar que cumple la condición inicial.

El código encargado de calcular numéricamente la solución a la ODE y el error relativo se encuentra en **P4/p4b.f90**. Los resultados son los siguientes:

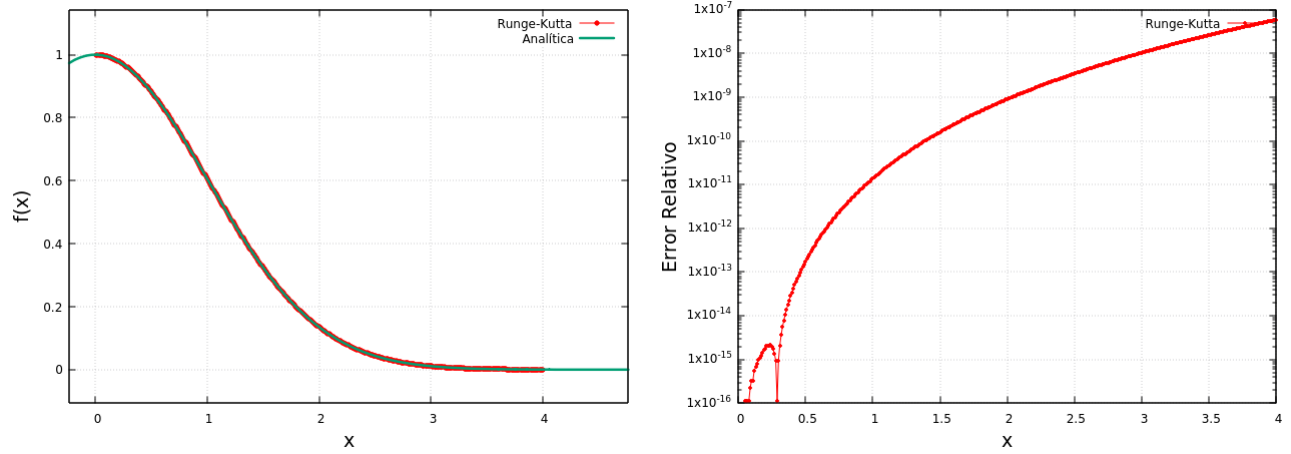


Figura 6: Solución a la ODE utilizando RK4. Errores relativos respecto a la solución analítica.

Las conclusiones son las mismas que en el inciso anterior.

- (c) Se pide la solución a la siguiente ecuación diferencial:

$$f''(x) = -29f(x) - 4f'(x) \quad f(0) = 1 \quad f'(0) = 0 \quad (28)$$

La solución analítica a esta ODE es:

$$f(x) = e^{-2x} \left[\cos(5x) + \frac{2}{5} \sin(5x) \right] \quad (29)$$

En el programa **P4/p4c.f90** se calculó numéricamente la solución a esta ODE. Notamos que no se puede calcular directamente, dado que contamos con una ODE de segundo orden, por lo que hay que trabajar un poco la expresión antes de hacer el cálculo. El método utilizado fue la reducción de la ODE de segundo orden a un sistema de ODEs lineales, que se logró definiendo $g(x) = f'(x)$. De esta manera, el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -29f(x) - 4g(x) \\ f'(x) &= g(x) \end{aligned} \quad (30)$$

Que se puede resolver utilizando Runge-Kutta.

Los resultados del cálculo numérico y el error relativo se encuentran en la siguiente figura.

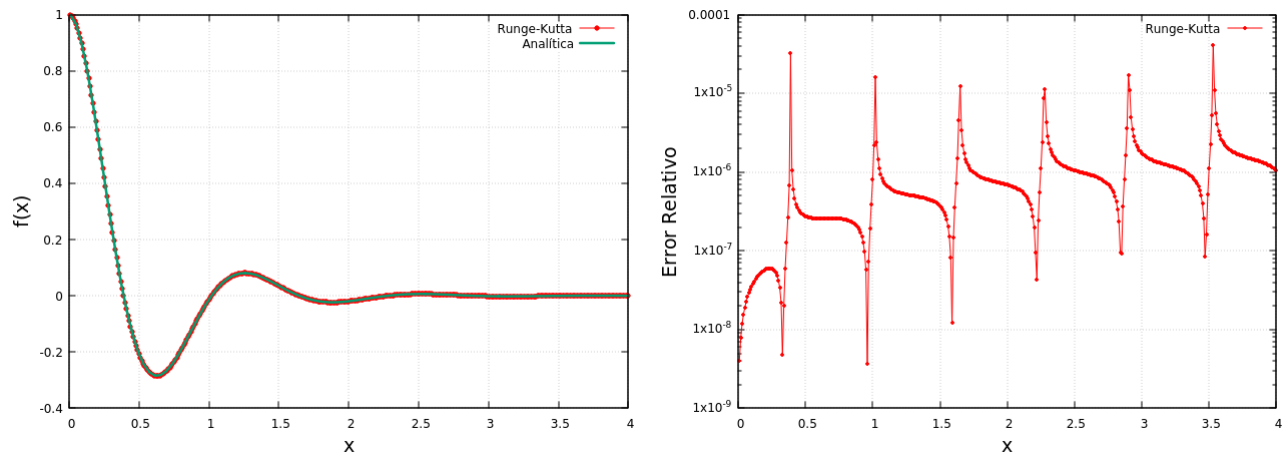


Figura 7: Solución a la ODE utilizando RK4. Errores relativos respecto a la solución analítica.

Notamos que nuevamente el ajuste es muy bueno, aunque encontramos una naturaleza oscilatoria en el error relativo. A primera vista, pareciera ser que los puntos conflictivos en la gráfica del error relativo, corresponden a puntos donde la derivada de $f(x)$ se maximiza.

Pregunta 5: Método adaptativo para RK4

- (a) Consideramos la fuerza de Lorentz que actúa sobre la partícula de carga q a velocidad $\dot{\vec{r}}$:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q(\dot{\vec{r}} \times \vec{B} + \vec{E}) = q(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) \times (B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) + q\vec{E} \\ &= q\left[\dot{x}B_y\hat{k} + (\dot{y}B_z - \dot{z}B_y)\hat{i} - \dot{x}B_z\hat{j}\right]\end{aligned}\quad (31)$$

De la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\ddot{\vec{r}} = q\left[\dot{x}B_y\hat{k} + (\dot{y}B_z - \dot{z}B_y)\hat{i} - \dot{x}B_z\hat{j}\right] \\ \Rightarrow m\left[\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}\right] &= q\left[\dot{x}B_y\hat{k} + (\dot{y}B_z - \dot{z}B_y)\hat{i} - \dot{x}B_z\hat{j}\right]\end{aligned}\quad (32)$$

Lo que implica, en esencia, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{q}{m}(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y) \\ \ddot{y} &= -\frac{q}{m}\dot{x}B_z \\ \ddot{z} &= \frac{q}{m}\dot{x}B_y\end{aligned}\quad (33)$$

Esto se puede reducir a lo siguiente considerando la información del enunciado:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \dot{y}(1 + 0,02z) + 0,02y\dot{z} = \dot{y} + 0,02z\dot{y} + 0,02y\dot{z} \\ \ddot{y} &= -\dot{x}(1 + 0,02z) = -\dot{x} - 0,02z\dot{x} \\ \ddot{z} &= -0,02y\dot{x}\end{aligned}\quad (34)$$

Con condiciones iniciales en:

$$x(0) = 1,0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0,0 \quad (35)$$

$$y(0) = 0,0 \quad ; \quad \dot{y}(0) = 1,0 \quad (36)$$

$$z(0) = 0,0 \quad ; \quad \dot{z}(0) = 0,1 \quad (37)$$

Con el fin de reducir el sistema de ecuaciones diferenciales de las ecuaciones en (34), definimos $v_x = \dot{x}$; $v_y = \dot{y}$; $v_z = \dot{z}$. Con lo que finalmente nos queda un sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= v_y + 0,02zv_y + 0,02yv_z \\ \dot{v}_y &= -v_x - 0,02zv_x \\ \dot{v}_z &= -0,02yv_x \\ \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{z} &= v_z\end{aligned}\quad (38)$$

Este es un sistema que podemos resolver numéricamente utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4.

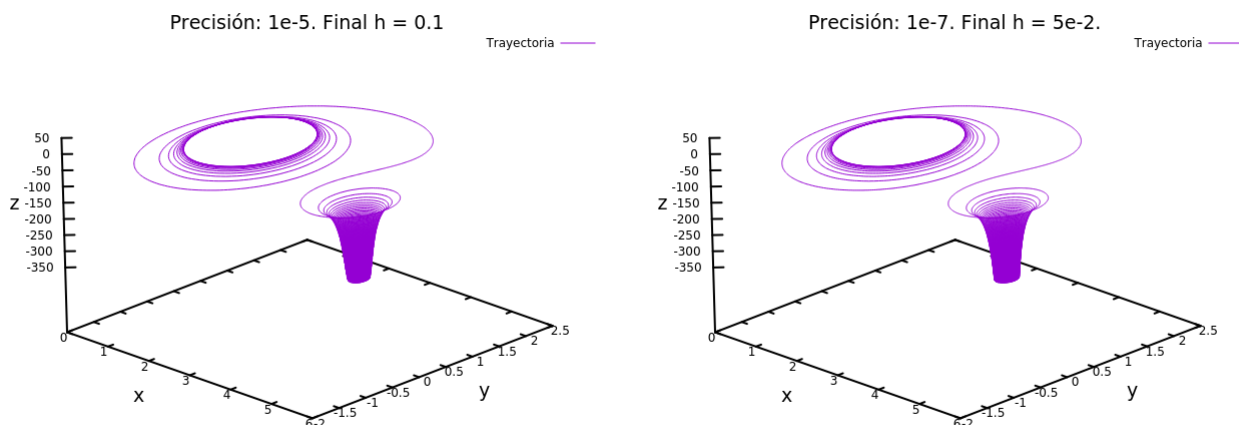
El código utilizado se encuentra en **P5/p5a.f90**. En resumidas cuentas, el código define todas las variables necesarias. Contempla en un principio las condiciones iniciales, el número de pasos hasta el tiempo final (establecido en $50s$), y comienza dos ciclos *do*. El primero de ellos será para verificar, después de cada iteración sobre el tamaño del paso (*variable h en el código*), si la precisión obtenida es suficiente, aunque esto lo hace al terminar el segundo ciclo, que está dentro de este.

El segundo ciclo se encarga de ejecutar el método de RK4, lo que se repetirá cada vez que necesitemos cambiar el valor de h para mejorar la precisión. En una primera instancia lo ejecuta de manera normal, como se hizo en el problema anterior. En una segunda instancia, ejecuta el método pero considerando pasos de tamaño $2h$ en vez de h . Y por último, lo vuelve a ejecutar, esta vez de manera idéntica a la primera instancia, pero al final el valor obtenido con los coeficientes k del método se le suman a los valores para obtenidos después de ejecutar el método por primera vez (en vez de sumarlos a los valores en el nodo anterior, los suma al nodo actual). Esto básicamente nos entrega el valor emulando el hecho de haber dado 2 pasos de tamaño h . Esto se explica de mejor manera en el código.

Después de calcular RK4 de estas 3 maneras distintas (y en verdad sólo con las últimas 2), podemos estimar el error según lo mencionado en el enunciado. Este error lo consideraremos para x, y, z , y estableceremos como condición de término del primer ciclo que cada uno de estos errores sea menor a la precisión requerida.

Por supuesto, si esta condición no se cumple, el primer ciclo se ejecuta de nuevo, no sin antes volver a definir las condiciones iniciales y cambiar el valor de h . Cada vez que necesitemos disminuir este último para aumentar la precisión, lo haremos según un factor $1/2$.

Sin más que añadir, se calculó la trayectoria de la partícula para distintos valores de precisión. Los resultados se muestran en las figuras a continuación:



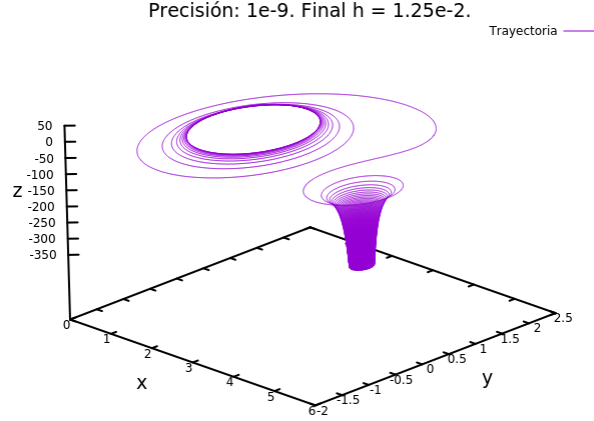


Figura 8: Trayectoria de una partícula cargada sometida a un campo magnético.

Notamos qué, al cambiar la precisión, el resultado no cambia aparentemente nada, por lo que esta no sería un factor determinante en este caso. Sin embargo, el tiempo de ejecución no es muy distinto entre los casos, por lo que siempre sería preferible quedarse con el menor precisión (menor h).

- (b) Al incluir un campo eléctrico que solamente tiene una componente en \hat{k} , las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento de la partícula se ven muy poco alteradas. En particular, sólo cambia la tercera ecuación de las ecuaciones mostradas en (38). El sistema, contemplando este cambio, quedaría así:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_x &= v_y + 0,02zv_y + 0,02yv_z \\
 \dot{v}_y &= -v_x - 0,02zv_x \\
 \dot{v}_z &= -0,02yv_x - 0,01y \\
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{z} &= v_z
 \end{aligned} \tag{39}$$

El código utilizado para modelar este caso sólo difiere en la definición de la subrutina *edo3*, que precisamente modela esta ecuación diferencial que cambió. A pesar de que el cambio sea mínimo, en **P5/p5b.f90** se encuentra el código completo.

Se graficaron las trayectorias para la partícula que se somete además a este campo eléctrico, y el resultado fue el siguiente:

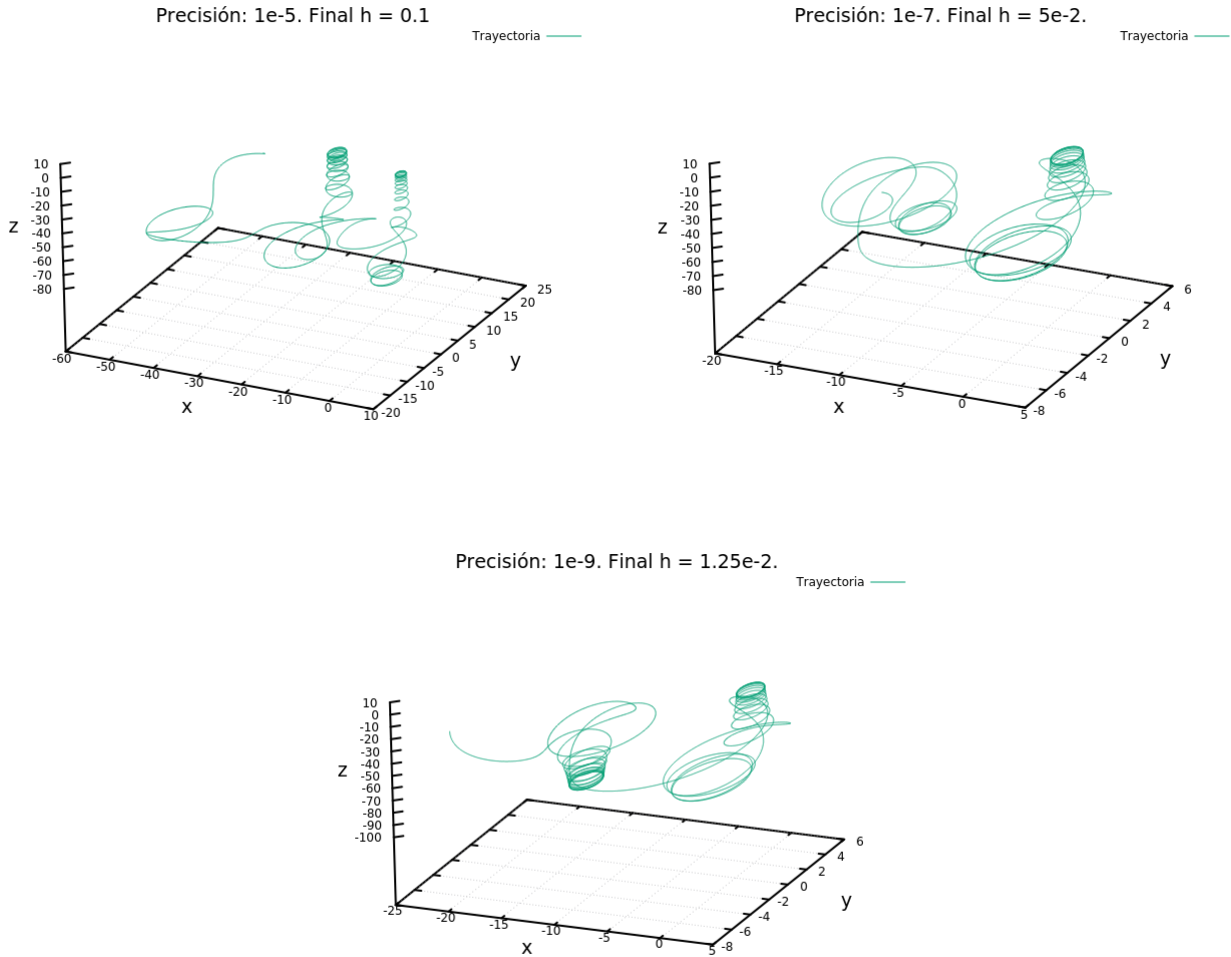


Figura 9: Trayectoria de una partícula cargada sometida a un campo magnético y un campo eléctrico.

Notamos que, a diferencia del caso anterior, el resultado cambia muchísimo según cambiamos la precisión exigida al programa. En este caso sí sería completamente necesario quedarnos con el de menor precisión (menor h), de lo contrario veríamos un comportamiento completamente distinto al de la realidad.

Notamos que en estos tres casos presentados no llegamos necesariamente a una convergencia, quedaría pendiente el estudio a precisiones menores, que en este trabajo se omitió por tiempo y efectos comparativos con el inciso anterior.

Pregunta 6: Péndulo Doble

- (a) La demostración de este inciso estará adjunta al final del documento.
- (b) Se busca resolver las ecuaciones de Hamilton, que tienen la siguiente forma:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i}; \quad i = 1, 2 \quad (40)$$

Conociendo la forma del Hamiltoniano del inciso anterior, obtenemos, mostrando el resultado en su forma simplificada:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{1}{ml^2} \frac{p_1 - p_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (41)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{1}{ml^2} \frac{2p_2 - p_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (42)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{1}{ml^2} \frac{1}{1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot h(p_1, p_2, \varphi_1, \varphi_2) - 2mgl \sin \varphi_1 \quad (43)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{1}{ml^2} \frac{1}{1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot h(p_1, p_2, \varphi_1, \varphi_2) - mgl \sin \varphi_2 \quad (44)$$

Donde

$$h = -p_1 p_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (45)$$

Considerando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \varphi_2(0) = 0,0 \\ p_1(0) &= 4,0 \\ p_2(0) &= 2,0 \end{aligned} \quad (46)$$

El sistema de ecuaciones se puede resolver utilizando el método de Runge-Kutta, acoplando las ecuaciones y haciendo cada una dependiente del resultado anterior. El método a seguir fue el método estándar para resolver Runge-Kutta, sólo que aplicado 4 veces (1 por ecuación). Cada ODE fue definida en una subrutina para ser llamada al momento de calcular los k correspondientes. El código completo se encuentra en **P6/p6aa.f90**.

El resultado de los cálculos nos deja con los valores de p_1, p_2, φ_1 y φ_2 como función del tiempo. Además, en base a estos, se calcularon las posiciones cartesianas de las masas en el péndulo. Los momentos se guardaron en **P6/espacio_p.dat**, los ángulos en **P6/espacio_phi.dat** y las coordenadas cartesianas en **P6/espacio_real.dat**. Los archivos *.gnu* bajo el mismo nombre se encargan de graficarlos. Los archivos terminados en *_c* corresponden al inciso siguiente.

A continuación, la trayectoria en los espacios φ y p :

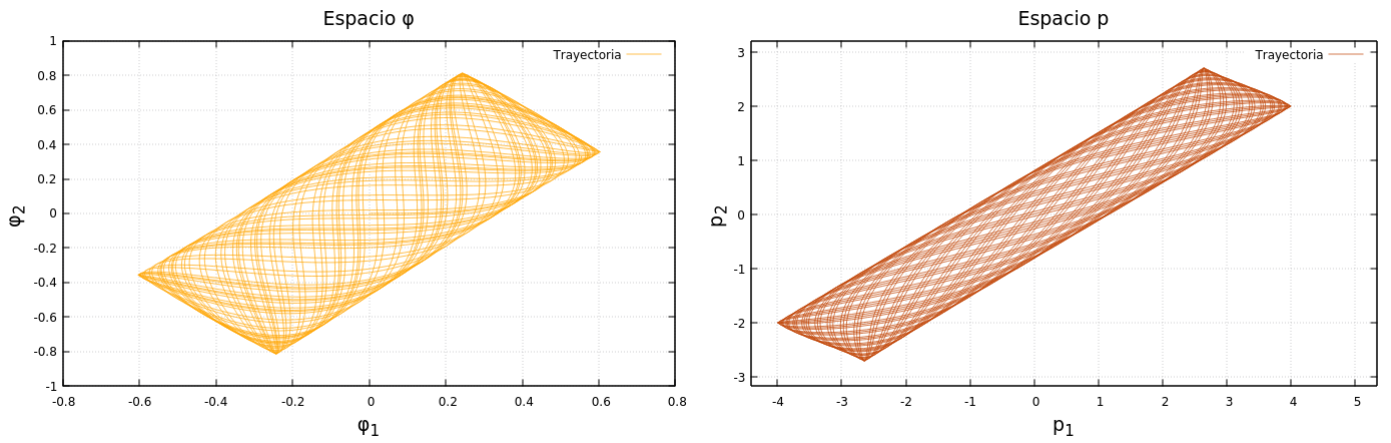


Figura 10: Trayectorias del péndulo doble en los espacios φ y p respectivamente.

- (c) Se repitió exactamente el proceso del inciso anterior, sólo cambiando las condiciones iniciales según lo pedido. El resultado es el siguiente:

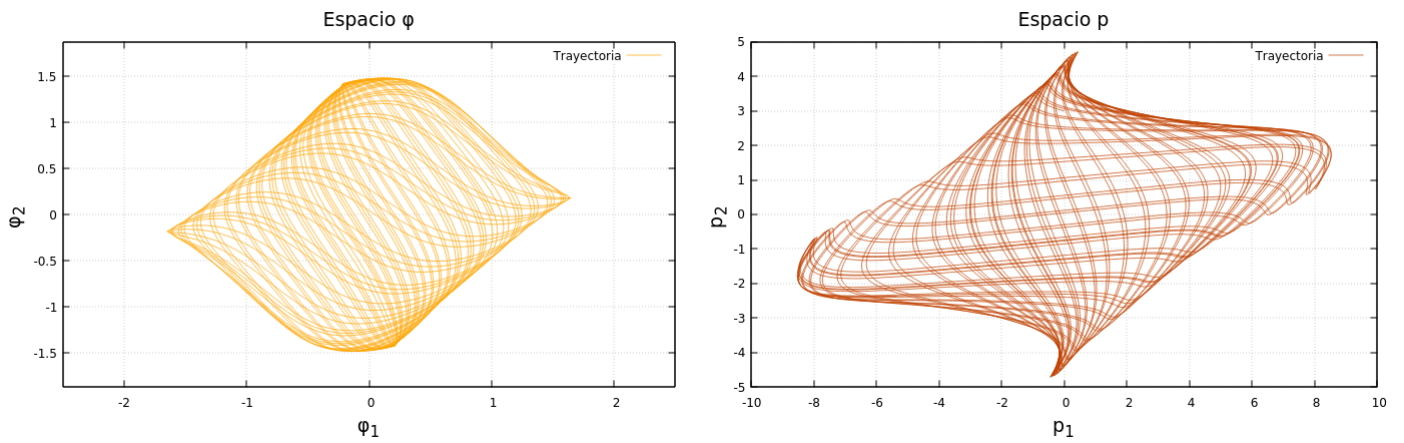
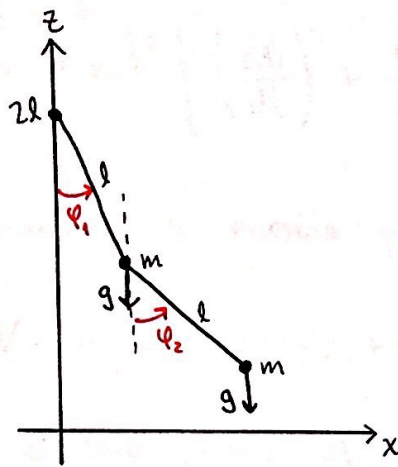


Figura 11: Trayectorias del péndulo doble en los espacios φ y p respectivamente.

76) a).



La posición de la masa 1 está descrita por:

$$\vec{r}_1 = l \sin \varphi_1 \hat{i} + l(2 - \cos \varphi_1) \hat{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_1}{dt} = l \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \hat{i} + l \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \hat{j}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right|^2 = l^2 \left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 \right]$$

La posición de la masa 2 depende directamente de la masa 1:

$$\vec{r}_2 = l(\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1) \hat{i} + l(2 - \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \hat{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_2}{dt} = l \left(\cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \right) \hat{i} + l \left(\sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \right) \hat{j}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right|^2 &= l^2 \left[\left(\cos^2 \varphi_2 \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \cos^2 \varphi_1 \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + 2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dt} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin^2 \varphi_2 \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \sin^2 \varphi_1 \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + 2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dt} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} \right) \right] \\ &= l^2 \left[\left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \end{aligned}$$

Conociendo estas cantidades, podremos calcular la energía cinética del sistema:

$$K = \frac{1}{2} m \left(\left| \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right|^2 + \left| \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right|^2 \right)$$

$$= \frac{ml^2}{2} \left[\cancel{\left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2} + \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \cancel{2} \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

$$\Rightarrow K = ml^2 \left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

En cuanto a la energía potencial, ubicando $V=0$ en $z=0$:

$$V = mgl(2 - \cos\varphi_1) + mgl(2 - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Así, el lagrangiano del sistema queda como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = ml^2 \left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] - 4mgl + 2mgl \cos\varphi_1 \\ + mgl \cos\varphi_2. \end{aligned}$$

Cuya derivada $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = 0 \rightarrow$ HAMILTONIANO será la energía total del sistema.

Calculamos los momentos de cada ángulo:

$$P_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = ml^2 \left[2 \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

$$P_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} = ml^2 \left[\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{d\varphi_1}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

A lo que despejando:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{P_1 - P_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{ml^2(1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))}$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{2P_2 - P_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{ml^2(1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))}. \quad (*)$$

Siendo el Hamiltoniano del sistema $\mathcal{H} = K + V$:

$$\Rightarrow \mathcal{H} = ml^2 \left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \\ + mgl(2 - \cos\varphi_1) + mgl(2 - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Y reemplazando lo obtenido en (*):

$$\Rightarrow \mathcal{H} = ml^2 \left[\left(\frac{p_1 - p_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{ml^2(1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2p_2 - p_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{ml^2(1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))} \right)^2 \right. \\ + \frac{(p_1 - p_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2))(2p_2 - p_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2))}{[ml^2(1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))]^2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \left. + 4mgl - 2mgl \cos\varphi_1 - mgl \cos\varphi_2 \right] \\ \Rightarrow \mathcal{H} = ml^2 \left[\left(\frac{p_1^2 - 2p_1 p_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + p_2^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{[ml^2(1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))]^2} \right) \right. \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{4p_2^2 - 4p_2 p_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + p_1^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{[ml^2(1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))]^2} \right) \\ + \left(\frac{2p_1 p_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + p_1^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) - 2p_2^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + p_1 p_2 \cos^3(\varphi_1 - \varphi_2)}{[ml^2(1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))]^2} \right) \\ \left. + mgl(4 - 2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \right].$$

Después de mucha Álgebra...

$$\therefore \mathcal{H} = \frac{1}{2ml^2} \cdot \frac{P_1^2 + 2P_2^2 - 2P_1P_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} + mgl(4 - 2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2). \quad \blacksquare$$