



**Carrera:** Ingeniería en Sistemas de Información.

**Materia:** Análisis Numérico

**Actividad:** Trabajo Final

**Profesores:** FAURE, Omar. QUIROGA, Maximiliano

**Alumno:** TURIN BARRAGAN, Brian Emanuel

## PUNTO 3

Explique qué significan las condiciones de borde:

$$V(0) = V_0,$$

$$V(d) = 0.$$

La primera condición nos muestra que, en la posición de la primera placa, existe una cantidad de potencial eléctrico  $V_0$ . Mientras que el potencial a la distancia de la segunda placa (o sea a distancia “d”) tiene un valor de 0.

Esto es lógico pues simboliza una tensión pues el potencial entre ambas placas varía como  $\Delta V$ .

Además, estas condiciones de borde son las que futuramente nos permitirán resolver el problema utilizando métodos de aproximación que utilizan estas condiciones.

Resuelva la ecuación:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0},$$

Utilizando el Método de Diferencias Finitas, para diferentes tamaños de paso.

Para comenzar, al utilizar el Método de Diferencias Finitas se debe discretizar el dominio del problema/función. La forma más simple para hacerlo es pensar en una cantidad de subintervalos del intervalo principal. Por ejemplo, dividir al intervalo principal en “n” cantidad de subintervalos iguales de la forma:

Si  $[a,b]$  es el intervalo principal, entonces esto se interpreta como  $n \cdot h$ . Donde  $h$  es el largo de cada subintervalo y  $n$  la cantidad de estos.

∴ el largo de cada subintervalo “h” es:  $h = \frac{b-a}{n}$ .

También, cada valor de “x” se corresponderá con un subintervalo de la forma “ $x_i$ ”, siendo:

$$x_i = a + ih$$

Una vez tenemos el dominio, debemos aproximar el valor de la segunda derivada de la función.

Para derivada de segundo orden, se ha llegado a la conclusión según bibliografía de la cátedra, que esta se puede representar de la forma:

$$\mathcal{D}^2 u(x_0) = \frac{1}{h^2} [u(x_0 - h) - 2u(x_0) + u(x_0 + h)]$$

Entonces aplicando en este caso:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{1}{h^2} * [V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}]$$

Donde se puede despejar y obtener la ecuación de la forma:

$$V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1} = \frac{d^2 V}{dx^2} * h^2$$

Pero:  $\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0}$

Entonces:

$$V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1} = \frac{\rho_0 h^2}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

Antes de generalizar las ecuaciones y formar la matriz que una vez resuelta nos permitirá aproximar mediante este Método, debemos hacer uso de las condiciones de borde. Con las mismas, podremos definir el valor inicial  $V_0$  y final  $V_n$ .

Nótese que las mismas son:

$$V_{(0)} = V_0$$

$$V_{(d)} = 0$$

Entonces la primera ecuación queda:

$$V_1 = V_0$$

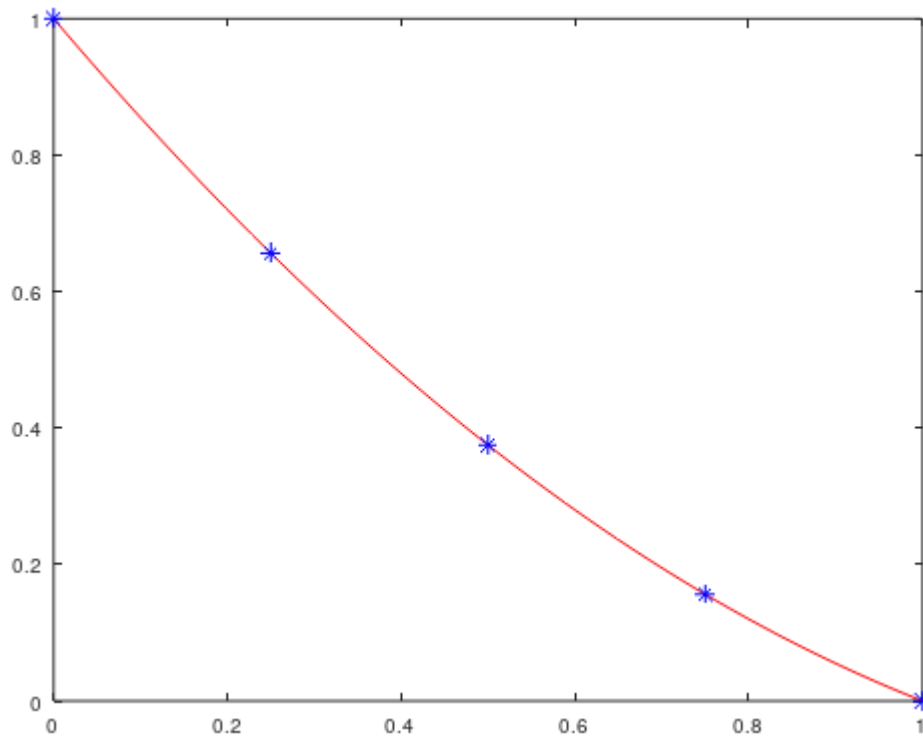
Y la última:

$$V_n = 0$$

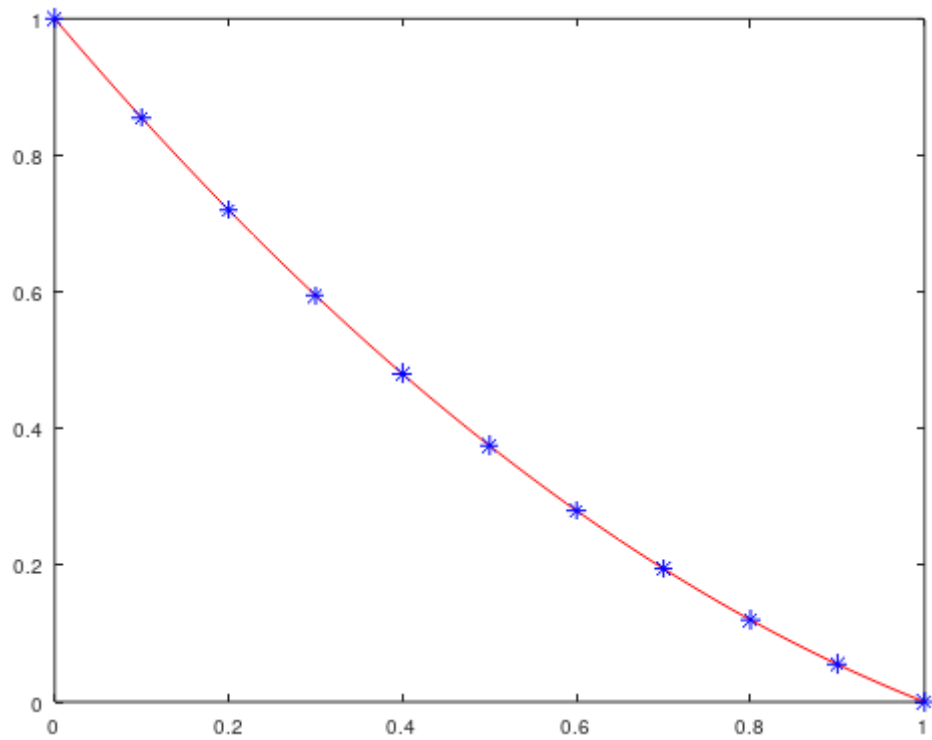
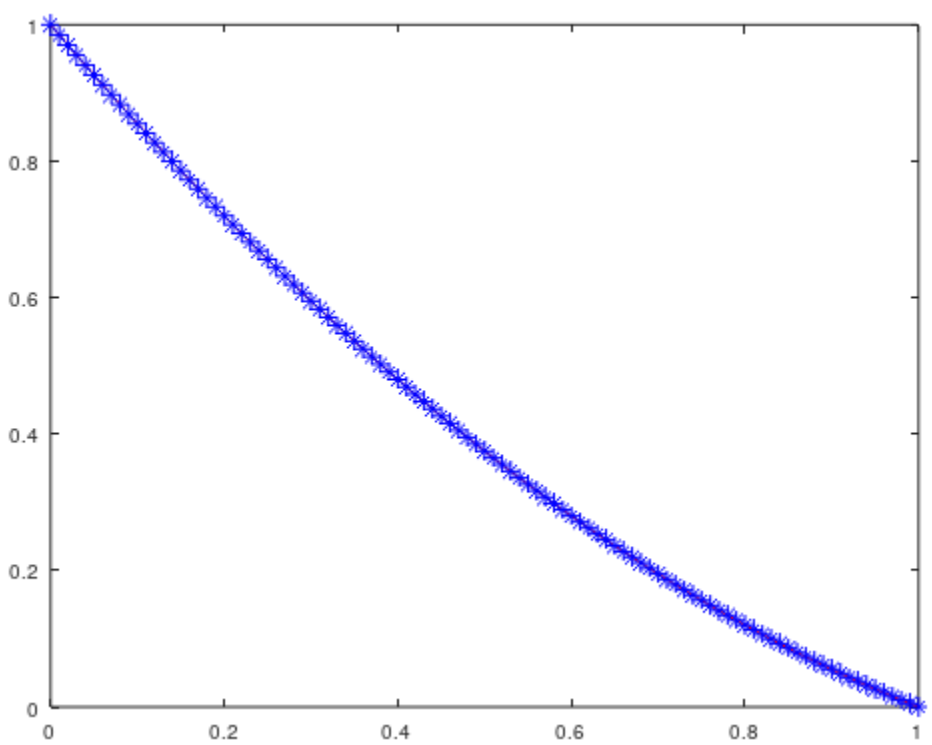
Quedando la matriz finalmente definida por:

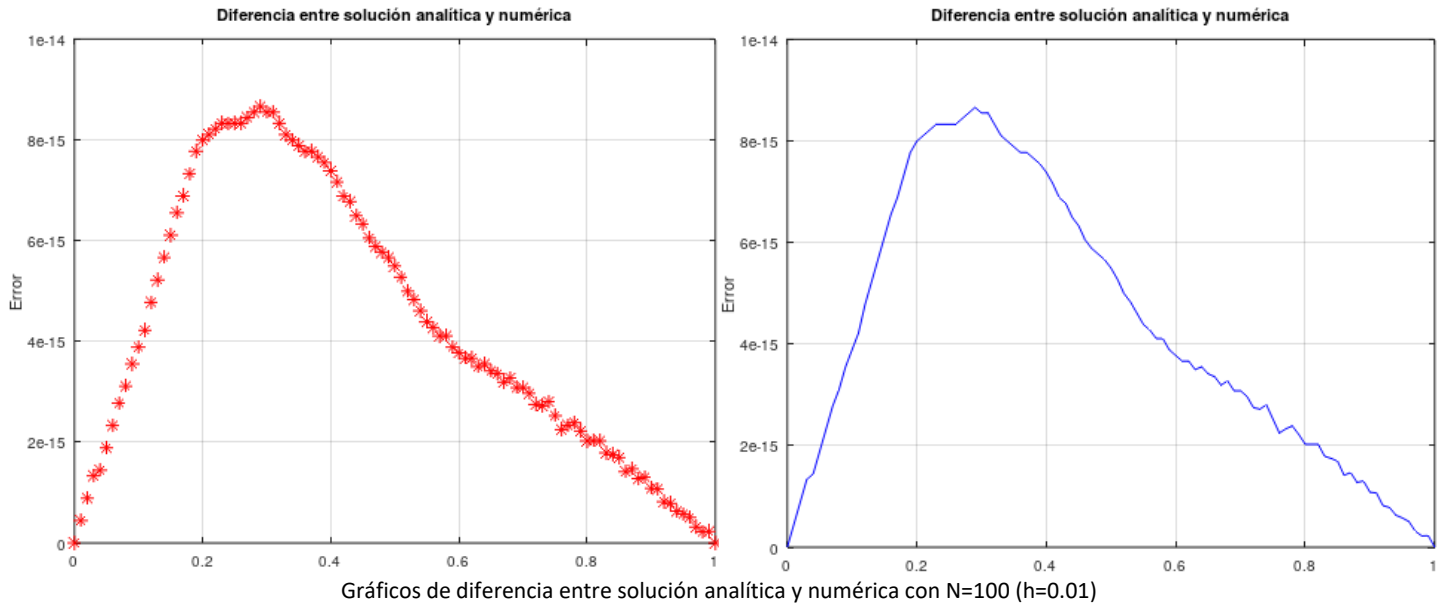
$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\
 -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\
 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . \\
 0 & 0 & . & . & -1 & 2 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\
 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 . \\
 . \\
 . \\
 V_{n-1} \\
 V_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 V_0 \\
 \frac{\rho_0 h^2}{\epsilon_r \epsilon_0} \\
 \frac{\rho_0 h^2}{\epsilon_r \epsilon_0} \\
 . \\
 . \\
 . \\
 . \\
 \frac{\rho_0 h^2}{\epsilon_r \epsilon_0} \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Esta resolución aplica la consigna de poder cambiar el tamaño del paso, pues variando la cantidad de subintervalos “n” variamos el valor de “h” que es lo mismo que cambiar el tamaño de paso.



Gráfica para tamaño de paso h=0.25

Gráfica para tamaño de paso  $h=0.1$ Gráfica para tamaño de paso  $h=0.01$



Escriba la formulación variacional del problema.

La formulación variacional es una forma de escribir el problema tal que pueda ser descrito con integrales las cuales viven en una dimensión finita y se tratan con álgebra.

Primeramente, se establece una función “de prueba” la cual se ajusta a las condiciones de borde del problema, en este caso:

$u_{(x)} : \text{función de prueba}$

$u_{(0)} = V_0 : \text{condición de borde } V_{(0)} = V_0$

$u_{(d)} = 0 : \text{condición de borde } V_{(d)} = 0$

Una vez tenemos la función de prueba, multiplicamos la misma miembro a miembro en la ecuación (4) de la actividad, de la forma:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} ; (4)$$

$$u_{(x)} * \frac{d^2 V}{dx^2} = u_{(x)} * \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

Y para involucrar a la integral, la aplicamos miembro a miembro sobre el dominio:

$$\int_0^d (u_{(x)} * \frac{d^2 V}{dx^2}) dx = \int_0^d (u_{(x)} * \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0}) dx$$

La parte de la izquierda de la igualdad permite aplicar una integración por partes, de la forma:

$$\int u dv = u v - \int v du$$

En este caso tomamos como función "u" a " $u_{(x)}$ " y como " $dv$ " a " $\frac{d^2V}{dx^2} dx$ ".

"v", por lo tanto, será: " $\frac{dV}{dx}$ "

Aplicamos entonces la integración por partes:

$$\int_0^d (u_{(x)} * \frac{d^2V}{dx^2}) dx = (u_{(x)} * \frac{dV}{dx})_0^d - \int_0^d \frac{dV}{dx} * \frac{du}{dx} dx$$

Por las condiciones de borde el término:  $(u_{(x)} * \frac{dV}{dx})_0^d$  se anula.

$$\therefore \int_0^d (u_{(x)} * \frac{d^2V}{dx^2}) dx = - \int_0^d \frac{dV}{dx} * \frac{du}{dx} dx$$

Si juntamos el segundo miembro de esta ecuación con el segundo de la igualdad original, todo resulta en:

$$- \int_0^d \frac{dV}{dx} * \frac{du}{dx} dx = \int_0^d (u_{(x)} * \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0}) dx$$

Resuelva utilizando el Método de Galerkin para diferentes tamaños de paso, con funciones lineales a trozos.

Para aplicar este método pensemos el resultado obtenido en el punto anterior como:

$$(u', v') = (f, v)$$

Pero debemos discretizar el dominio, para lo cual, generaremos otra vez "n" subintervalos de longitud:  $h = \frac{d-0}{n} = \frac{d}{n}$ .

Y cada intervalo se denominará:  $\Delta x_i$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Y también para trabajar como se hizo en el desarrollo de la cátedra, se reemplazará a la función “ $v$ ” por la función “ $\phi$ ”. Esta función se define:

$$\phi_{\ell}(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = \ell \\ 0, & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \quad k, \ell = 1, 2, 3, \dots, M,$$

O sea, toma el valor 1 solo en el punto  $x_i$  y en el resto del dominio vale 0.

Y se multiplicará por los valores de  $\alpha_i = v_{(x_i)}$  (valores de  $v$  en cada punto de la discretización).

Quedando entonces:  $(u', \phi'_i) = (f_i, \phi_i), \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$

Para encontrar  $u'$  el Método busca acercar su valor por medio de una serie de productos de la forma:

$$u'_{(x)} \approx \alpha_1 \phi'_1 + \alpha_2 \phi'_2 + \alpha_3 \phi'_3 + \dots + \alpha_n \phi'_n$$

$$u'_{(x)} \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi'_i$$

$$\therefore (\sum_{j=1}^n \alpha_j \phi'_j, \phi'_i) = (f, \phi_i)$$

Para plantear la matriz, utilizaremos este último resultado planteando:

$$a_{ij} = (\phi'_j, \phi'_i); b_i = (f, \phi_i)$$

Entonces:

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \dots + \alpha_n a_{1n} = b_1$$

$$\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} + \dots + \alpha_n a_{2n} = b_2$$

.

.

.

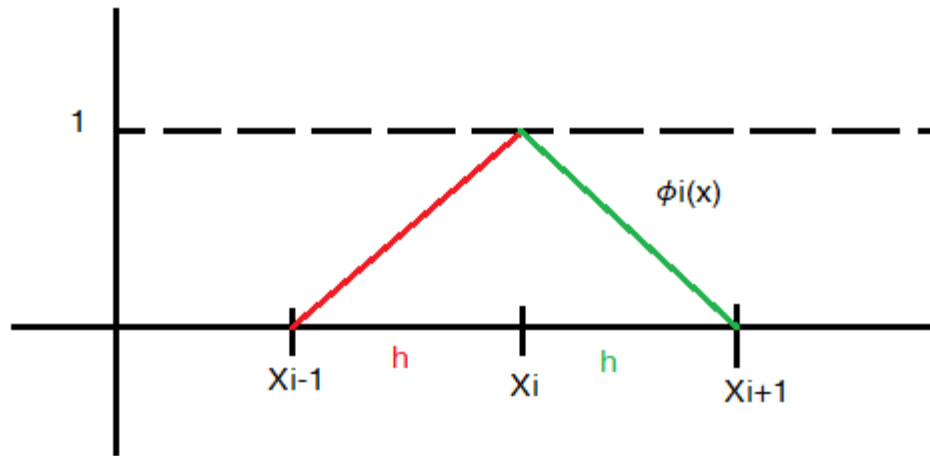
$$\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \alpha_3 a_{n3} + \dots + \alpha_n a_{nn} = b_n$$

Lo que conforma un sistema de la forma:  $A\alpha = b$

Llamándose a  $A$  como matriz de rigidez y a  $b$  como vector de cargas (proveniente de las primeras aplicaciones del método en mecánica estructural).



Para pensar que función de prueba ( $\phi_{i(x)}$ ) utilizar, se ha visto el ejemplo de que una opción fácil de entender y usar, que es la siguiente:



Dónde se define la función  $\phi$  a trozos como:

$$\begin{cases} 0 & ; \text{si } x < x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & ; \text{si } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & ; \text{si } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & ; \text{si } x > x_{i+1} \end{cases}$$

Entonces al derivar :  $\phi'$

$$\begin{cases} 0 & ; \text{si } x < x_{i-1} \\ \frac{1}{h} & ; \text{si } x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{1}{h} & ; \text{si } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & ; \text{si } x > x_{i+1} \end{cases}$$

Si utilizamos esta información, podemos plantear para cada elemento  $a_{ii}$ :

$$a_{ii} = \int_0^1 \phi'_{i(x)} \phi'_{i(x)} dx ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_{i(x)} \phi'_{i(x)} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_{i(x)} \phi'_{i(x)} dx ; \text{Dividimos integral}$$

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \frac{1}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) dx ; \text{Por Def. de } \phi'_{i(x)}$$

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx ; \text{Operando}$$

$$a_{ii} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} ; \text{resolviendo}$$

$$a_{ii} = \frac{2}{h} ; \text{En general}$$

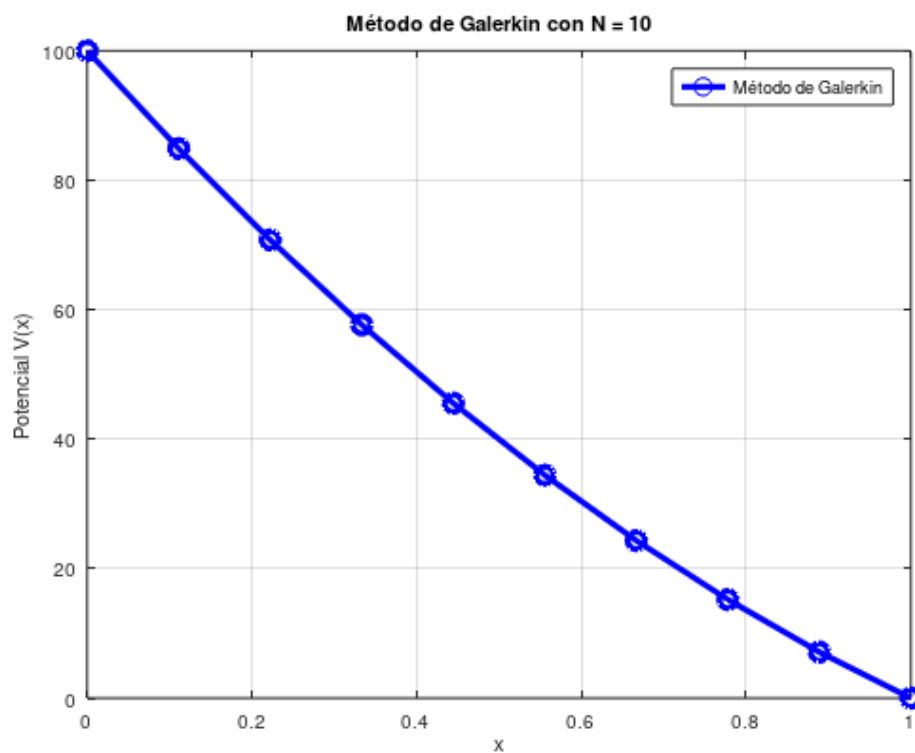
$$a_{i,i\pm 1} = -\frac{1}{h} ; \text{Una parte de la integral se anula simétricamente}$$

Ahora recordamos que los  $n$  valores de “ $y$ ” que necesitamos para realizar la aproximación con Método de Galerkin provienen de la función  $V_{(x)}$

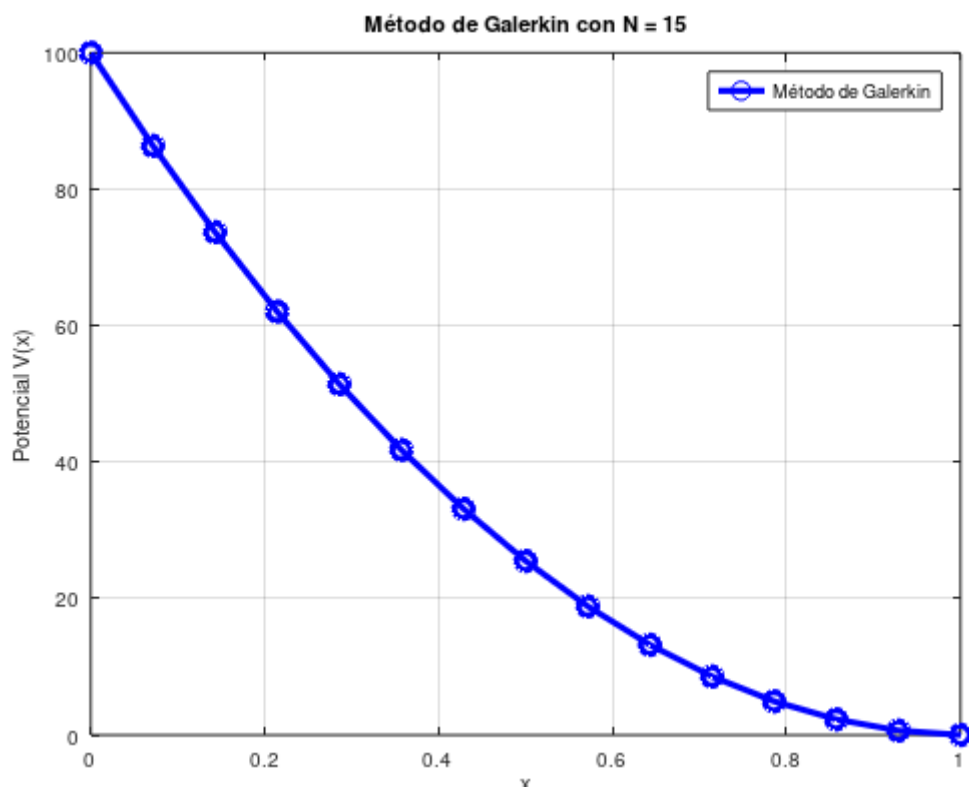
Entonces tendremos una solución de la forma  $AV = b$ . Dónde  $b$  es el vector conformado por las condiciones de borde y el miembro derecho de la igualdad inicial en el resto de valores que NO son de borde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ . \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ \frac{\rho_0 h}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ \frac{\rho_0 h}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ \frac{\rho_0 h}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\rho_0 h}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ \frac{\rho_0 h}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se mostrará ejemplos para distintos tamaños de  $h$ :

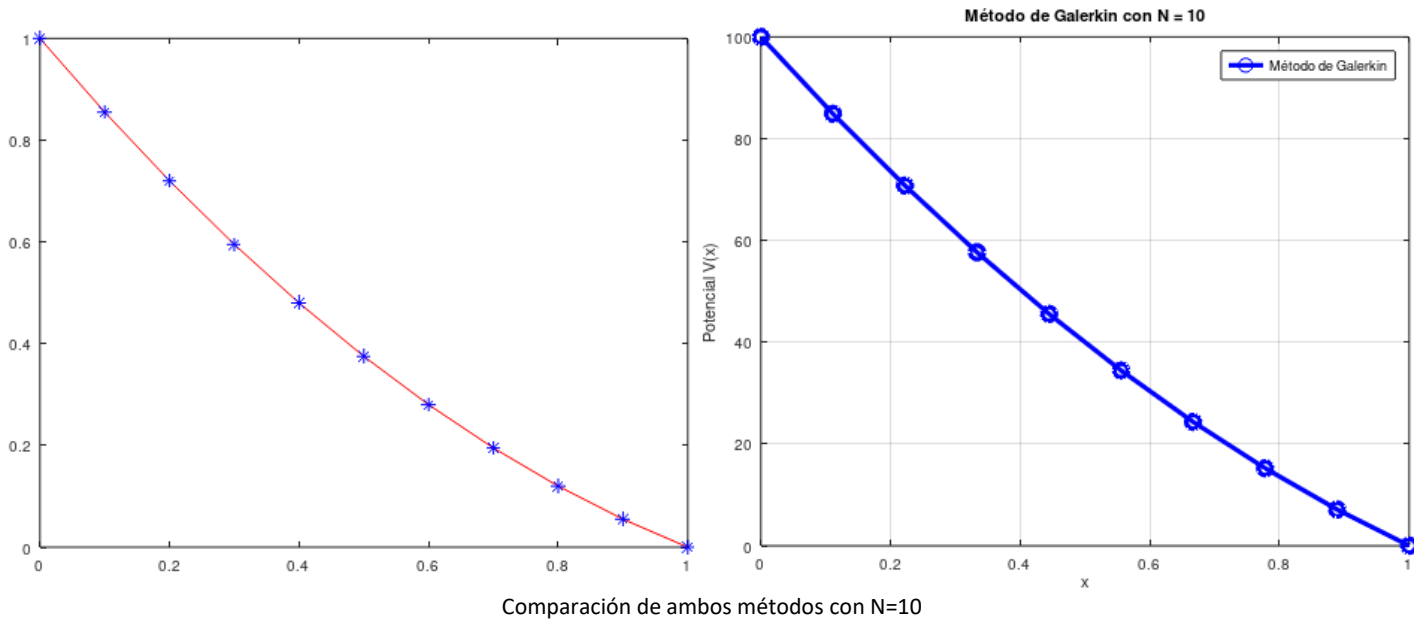


Gráfica para tamaño de paso  $h=0.1$



Gráfica para tamaño de paso  $h=0.067$

Compare los resultados entre los diferentes métodos y la solución analítica.



Comparando ambos resultados se puede observar que, por su parte, el Método de Diferencias Finitas se obtiene de una fórmula la cual se aplica en cada uno de los puntos que no es de borde, lo cual resulta fácil de entender y sería un aspecto a considerar en una implementación real, pues presenta una forma más sencilla de entender.

El Método de Galerkin es considerablemente más complejo de entender, el uso de funciones continuas a trozos y la definición de las mismas con sus respectivas características necesitan de un mayor grado de atención y razonamiento.

La solución analítica claramente es la más precisa, pues es la exacta. Sería redundante intentar comparar la misma con las demás en este tipo de aspectos, pues la solución analítica, de poder obtenerse, siempre va a ser objetivamente la mejor. Sin embargo, el resto de métodos están pensados para poder generalizarse y aplicarse en ocasiones dónde la solución analítica no se alcanzó o no sea alcanzable. En este ejemplo justamente se la coloca para realizar un análisis y para poder compararse con el resto de métodos, pero no es una regla práctica que se siga en la realidad. Aunque, en este caso, por la naturaleza del problema (cuadrático con dos condiciones de borde) la solución analítica y numérica como se vio antes son iguales. Solo que, la solución numérica trabaja a valores discretos.

## PUNTO 4

Plantee la formulación variacional del problema.

Al igual que en el Punto 3.3, plantearemos una función de prueba la cual tiene en cuenta las condiciones de borde:

$u_{(x,y)}$ : función de prueba (ahora con  $x$  e  $y$ )

$u_{(x,0)} = 0$  : Condición de borde  $V_{(x,0)} = 0$

$u_{(x,h)} = V_0$  : Condición de borde  $V_{(x,h)} = V_0$

$u_{(0,y)} = 0$  : Condición de borde  $V_{(0,y)} = 0$

$u_{(w,y)} = 0$  : Condición de borde  $V_{(w,y)} = 0$

Tomamos la ecuación:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

Multiplicamos, ahora sobre esta, miembro a miembro por la función de prueba definida. Resultando:

$$u_{(x,y)} \left( \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} \right) = 0$$

Y finalizamos integrando también miembro a miembro sobre el dominio  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} u_{(x,y)} \left( \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} \right) d\Omega = 0$$

Para continuar con la solución de la integral, debemos aplicar integración por partes. Notemos que podemos distribuir la función de prueba dentro de la suma. Esto, nos posibilitará realizar dos planteos por separado (uno para “ $x$ ” y otro para “ $y$ ”) para permitir una mejor visualización de los cálculos. Una vez obtengamos los resultados, podemos reemplazarlos y continuar operando.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{(x,y)} \left( \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} \right) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} u_{(x,y)} \frac{d^2V}{dx^2} d\Omega + \int_{\Omega} u_{(x,y)} \frac{d^2V}{dy^2} d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

Para término en  $x$ :

$$\int_{\Omega} u_{(x,y)} \frac{d^2 V}{dx^2} d\Omega = 0$$

$$\therefore u = u_{(x,y)} ; dv = \frac{d^2 V}{dx^2} d\Omega$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Aquí nace la primera consideración y diferencia con el punto anterior. Cuando queremos evaluar el término " $u * v$ " en los extremos del intervalo nos encontramos con que ahora estamos en un contorno en lugar de solo dos puntos. Para solucionar esto, debemos ponderar todos los puntos que integran a ese contorno (llamémoslo  $\partial\Omega$ ). Lo cual nos lleva a integrar sobre el mismo.

$$\int u dv = \int_{\partial\Omega} uv - \int v du$$

$$\int_{\Omega} u_{(x,y)} \frac{dV}{dx} d\Omega = \int_{\partial\Omega} u_{(x,y)} \frac{dV}{dx} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{dV}{dx} \frac{du}{dx} d\Omega$$

El término que se integra sobre el contorno se ve afectado por las condiciones de borde. En este caso, el contorno es la caja de dimensiones  $w * h$ . Nótese que las condiciones de borde son todas 0 exceptuando el punto  $V_{(x,h)} = V_0$ . Pero la derivada de una constante cualquiera es 0, por lo que el término se anula. Por lo tanto, el término que integra sobre el contorno se anulará también allí. Resultando entonces:

Para x:

$$\int_{\Omega} u_{(x,y)} \frac{dV}{dx} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{dV}{dx} \frac{du}{dx} d\Omega$$

Para y:

$$\int_{\Omega} u_{(x,y)} \frac{dV}{dy} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{dV}{dy} \frac{du}{dy} d\Omega$$

Ahora, volviendo a la igualdad original:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{(x,y)} \left( \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} \right) d\Omega &= 0 \\ - \int_{\Omega} \frac{dV}{dx} \frac{du}{dx} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{dV}{dy} \frac{du}{dy} d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{dV}{dx} \frac{du}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{dV}{dy} \frac{du}{dy} d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

Si bien logramos el objetivo, podemos llegar a una solución “más bella” al notar que podemos expresar la igualdad final en términos de gradientes.

$$\int_{\Omega} \nabla V * \nabla u \, d\Omega = 0$$

Realice una triangulación sobre el dominio  $\Omega$  detallando lo siguiente:

*a) Tabla con las coordenadas nodales (nodos):*

Realizar una triangulación nos permite subdividir al polígono que queremos analizar (en este caso la caja) en una cantidad finita de triángulos superpuestos. Es una forma de discretizar el dominio para permitir utilizar métodos de cálculo que lo necesiten para generar aproximaciones.

Primeramente, indicaremos tanto en eje vertical como horizontal una "n" cantidad de puntos (nodos) los cuales serán algunos de los vértices de algunos triángulos y definirán su cantidad y área (claramente, a mayor cantidad de puntos, mejor es la aproximación).

Teniendo en cuenta que el problema trabaja con valor de  $x$  e  $y$  entre 0 y 1. Una primera aproximación podría darse, por ejemplo, tomando valores de a 0,25 unidades.

Esto es: 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.

Nodo	Coordenada x	Coordenada y
$N_1$	0	0
$N_2$	0.25	0
$N_3$	0.5	0
$N_4$	0.75	0
$N_5$	1	0
$N_6$	0	0.25
$N_7$	0.25	0.25
$N_8$	0.5	0.25
$N_9$	0.75	0.25
$N_{10}$	1	0.25
$N_{11}$	0	0.5
$N_{12}$	0.25	0.5

$N_{13}$	0.5	0.5
$N_{14}$	0.75	0.5
$N_{15}$	1	0.5
$N_{16}$	0	0.75
$N_{17}$	0.25	0.75
$N_{18}$	0.5	0.75
$N_{19}$	0.75	0.75
$N_{20}$	1	0.75
$N_{21}$	0	1
$N_{22}$	0.25	1
$N_{23}$	0.5	1
$N_{24}$	0.75	1
$N_{25}$	1	1

*b) Tabla con las conectividades elementales (elementos):*

Ahora, para formar cada uno de los triángulos, lo haremos teniendo en cuenta los nodos anteriormente definidos. De esta manera, podemos formar ternas de nodos, tal de ir completando toda la malla.

<b>Elemento</b>	<b>Nodo 1</b>	<b>Nodo 2</b>	<b>Nodo 3</b>
$E_1$	$N_1$	$N_2$	$N_6$
$E_2$	$N_2$	$N_7$	$N_6$
$N_3$	$N_2$	$N_3$	$N_7$
$N_4$	$N_3$	$N_8$	$N_7$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



$N_{31}$	$N_{19}$	$N_{20}$	$N_{24}$
$N_{32}$	$N_{20}$	$N_{25}$	$N_{24}$

Para no mostrar una tabla muy larga, se muestra solo los primeros y últimos elementos a calcular. Sabemos que el número de elementos es 32, puesto que si dividimos de a 0,25 unidades entonces generamos una malla de 4x4 cuadrados lo que resulta en 16 cuadrados. Luego, cada cuadrado tiene 2 triángulos, así que:

$$Cantidad\ de\ Elementos = 4 * 4 * 2$$

Claro está que, si tomamos más valores en cada eje, o sea, generamos más triángulos y más pequeños, iremos logrando cada vez una mejor discretización.

Resuelva el problema utilizando los Métodos de Diferencias Finitas (utilizando diferentes tamaños de malla) y Elementos Finitos (utilizando diferentes tamaños de paso).

#### *Método de Diferencias Finitas*

En la realización del punto 3 se argumentó y describió como se puede expresar la segunda derivada parcial para cada variable. Si extrapolamos dichos resultados, ahora en 2 variables, se puede observar que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{h^2} ; Para\ x$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h^2} ; Para\ y$$

Esto, nos permitirá reemplazar en la igualdad original:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} = 0$$

$$\frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{h^2} + \frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h^2} = 0$$

$$\frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h^2} = 0 ; Operando$$

$$\frac{V_{i-1,j} - 4V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1}}{h^2} = 0$$

$$V_{i-1,j} - 4V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1} = 0$$

$$\frac{V_{i-1,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1}}{4} = V_{i,j}$$

$$\frac{1}{4} * (V_{i-1,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1}) = V_{i,j}$$

Hemos llegado así a una ecuación general con la cual podemos obtener el valor de cada uno de los nodos teniendo en cuenta sus vecinos.

Claramente, dicha expresión resulta de utilidad para calcular el valor de los nodos internos, pues por condiciones de borde, ya sabemos el valor de potencial en los bordes de la caja.

La implementación de este método se basa primeramente en generar la malla, inicializar la matriz en ceros, incorporar las condiciones de frontera, fijar la tolerancia e iteraciones máximas a usar y luego ciclar calculando el valor del elemento  $V_{i,j}$  como se estableció anteriormente hasta llegar al máximo de iteraciones o alcanzar el error tolerable.

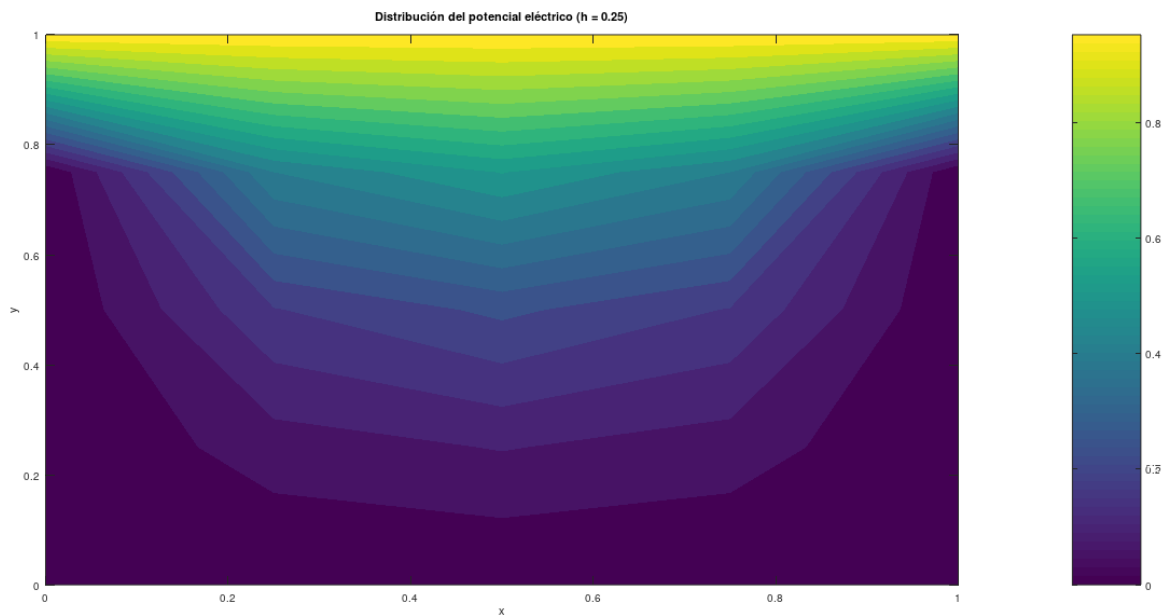
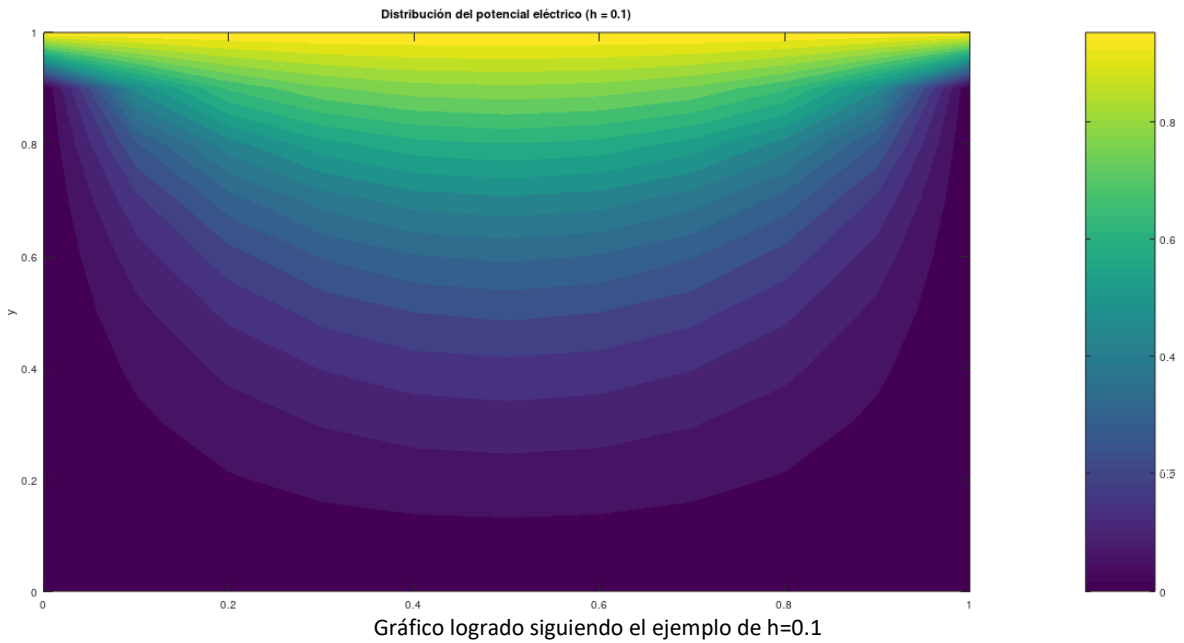


Gráfico logrado siguiendo el ejemplo de  $h=0.25$

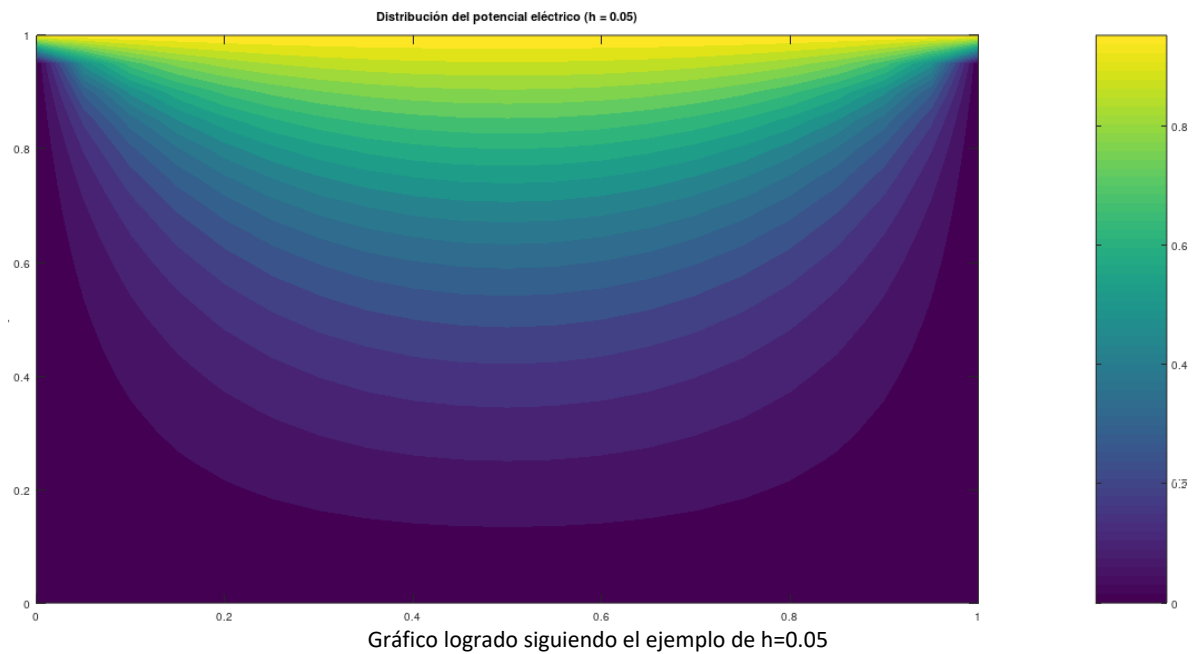
Notemos la alta similitud con el gráfico de la solución analítica. Las diferencias se pueden notar en lo poco curvada que es esta gráfica (los bordes no parecen ser completamente suaves).

Si disminuimos el  $h$  a por ejemplo:  $h=0.1$ :



Ahora, encontrar diferencias es bastante más difícil. La gráfica ya se parece mucho más a la del método analítico y los bordes se han suavizado notablemente.

Principalmente la diferencia se encuentra en  $y = 1$  y cerca de  $x = 0$  y  $x = 1$ . Pero ajustando a un  $h = 0.05$ :



Ahora ya las gráficas podrían considerarse iguales sin visualizar en extremo detalle. Continuar con tamaños de  $h$  más pequeños demandarán un gran tiempo de cálculo pero teóricamente mejorarán aún más la precisión.

### *Método de Elementos Finitos*

Para resolver el problema utilizando Método de los Elementos Finitos vamos a cubrir el dominio  $\Omega$  por una triangulación de la forma:

$$\Omega \approx \bigcup_{i=1}^M K_i = K_1 + K_2 + \cdots + K_M$$

Siendo la triangulación formada por triángulos no superpuestos, esto es:

$$\bigcap_{i=1}^M K_i = \{\emptyset\}$$

Ahora usaremos funciones continuas  $\phi$  las cuales representaran a cada uno de los triángulo. La misma se define:

$$\phi_j(N_i) \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

Estas funciones de forma se evalúan en los nodos, valiendo 1 solo cuando el nodo es el correspondiente a la función ( $i = j$ , se podría decir: son locales).

Como se vio en el desarrollo de la materia, el problema se formula de la forma:

$$A\xi = b$$

Dónde:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \nabla \phi_i * \nabla \phi_j \, dx \\ \xi_i &= u_h(N_i) \\ b_i &= 0 = (f, \phi_i) \end{aligned}$$

Recordemos que la matriz A es simétrica, positiva (entonces, convergente) y observemos que los elementos  $a_{ij} = 0$  a menos que los nodos  $N_i$  y  $N_j$  pertenezcan al mismo triángulo.

Nuestra idea ahora, es generar una matriz con la contribución de cada elemento (triángulo) y luego generar una matriz que pondere todos los elementos a la vez (matriz de ensamble).

Veamos que la forma de cada matriz  $K_n$ (triángulo) para sus nodos  $N_i, N_j, N_k$ . Será:

$$A_K = \begin{pmatrix} a_K(\phi_i, \phi_i) & a_K(\phi_i, \phi_j) & a_K(\phi_i, \phi_k) \\ a_K(\phi_j, \phi_i) & a_K(\phi_j, \phi_j) & a_K(\phi_j, \phi_k) \\ a_K(\phi_k, \phi_i) & a_K(\phi_k, \phi_j) & a_K(\phi_k, \phi_k) \end{pmatrix}$$

Si observamos:  $a_K(\phi_m, \phi_n) = a_K(\phi_n, \phi_m)$ , esto nos permite afirmar que la matriz anterior será siempre simétrica.

Si generamos una nueva función, la cual tome el valor 1 en uno de los nodos y 0 en el resto (restricciones de las funciones base sobre el triángulo K), de la forma:

$$\psi_i = \begin{cases} 1; & N_i \\ 0; & N_j \vee N_k \end{cases}$$

La matriz del elemento ahora puede reescribirse como:

$$A_K = \begin{pmatrix} a(\psi_i, \psi_i) & a(\psi_i, \psi_j) & a(\psi_i, \psi_k) \\ a(\psi_j, \psi_i) & a(\psi_j, \psi_j) & a(\psi_j, \psi_k) \\ a(\psi_k, \psi_i) & a(\psi_k, \psi_j) & a(\psi_k, \psi_k) \end{pmatrix}$$

Que sigue siendo simétrica por lo mismo que antes.

Ahora, pensemos que una función como la definida, en 2D, tiene la forma:

$$f(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$$

Esto es:

$$\psi_i(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$$

Para el primer elemento se podría dar:

$$\begin{aligned} \psi_i(x_i, y_i) &= 1 \\ \psi_i(x_j, y_j) &= 0 \\ \psi_i(x_k, y_k) &= 0 \end{aligned}$$

Desencadena la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz arroja los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{x_j x_k - x_k x_j}{2\Delta} \\ \beta_i &= \frac{y_j - y_k}{2\Delta} \\ \gamma_i &= \frac{x_k - x_j}{2\Delta} \end{aligned}$$

El determinante tiene la característica de ser el área del triángulo:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

Cada matriz de rigidez elemental surge de:

$$K_{i,j} = \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dA$$

Cómo los gradientes de las funciones de forma son constantes (siempre son lo mismo), podemos expresar el resultado de la integral en términos del área. Esta será la manera en la cual implementaremos el código para el Método.

$$K_{i,j} = A * (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j)$$

El cálculo de cada gradiente se puede pensar cómo:

$$grad(\nabla \phi) = (\nabla \phi_1 \quad \nabla \phi_2 \quad \nabla \phi_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \end{pmatrix}$$

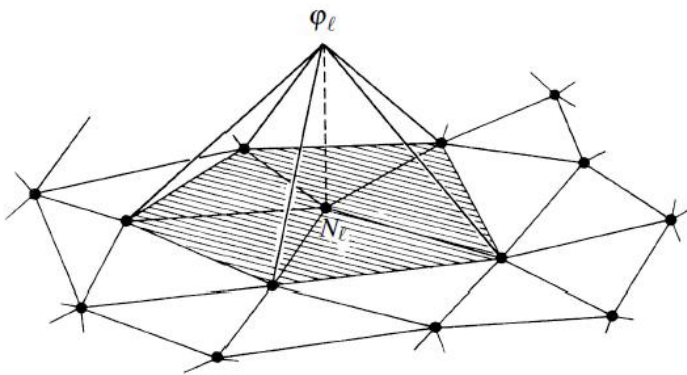
Cómo las funciones de forma son lineales, y teniendo en cuenta los resultados obtenidos de resolver el sistema matricial anterior, se puede reescribir teniendo en cuenta las coordenadas de los vértices de los triángulos:

$$grad(\nabla \phi) = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Entonces ahora podemos calcular  $K_{i,j}$  cómo  $A * (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j)$ .

Para finalmente acumular cada matriz elemental dentro de la matriz de ensamble calculando en bucle en la implementación.

Ejemplo de malla:



Podemos ir modificando la cantidad de nodos que tendremos en la malla. Primeramente, dividamos la malla en 4x4 cuadrados ( $h = 0.25$ ):

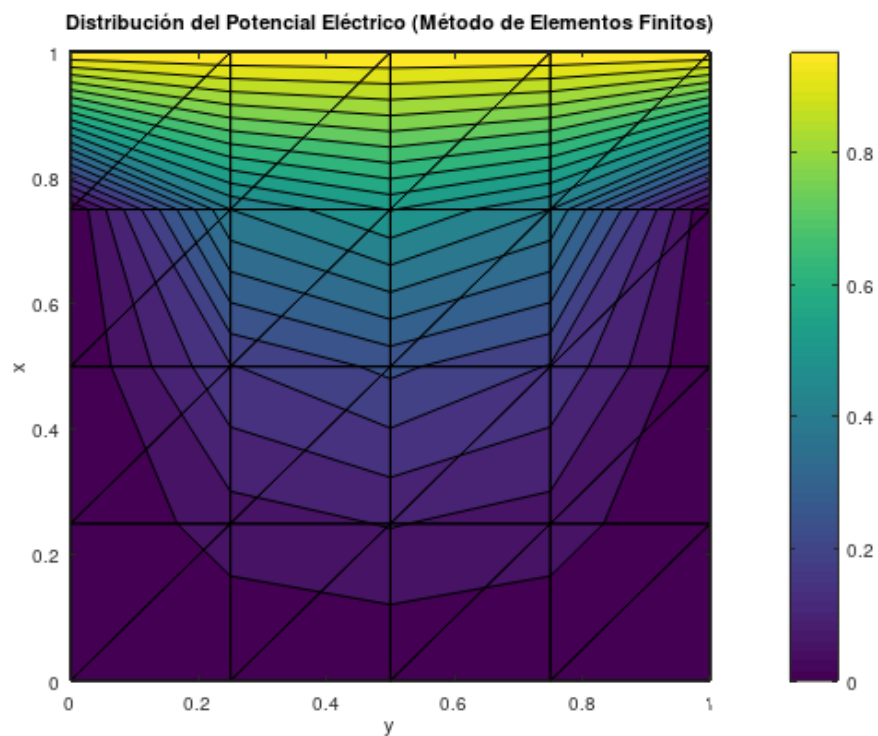


Gráfico 32 triángulos ( $h=0.25$ )

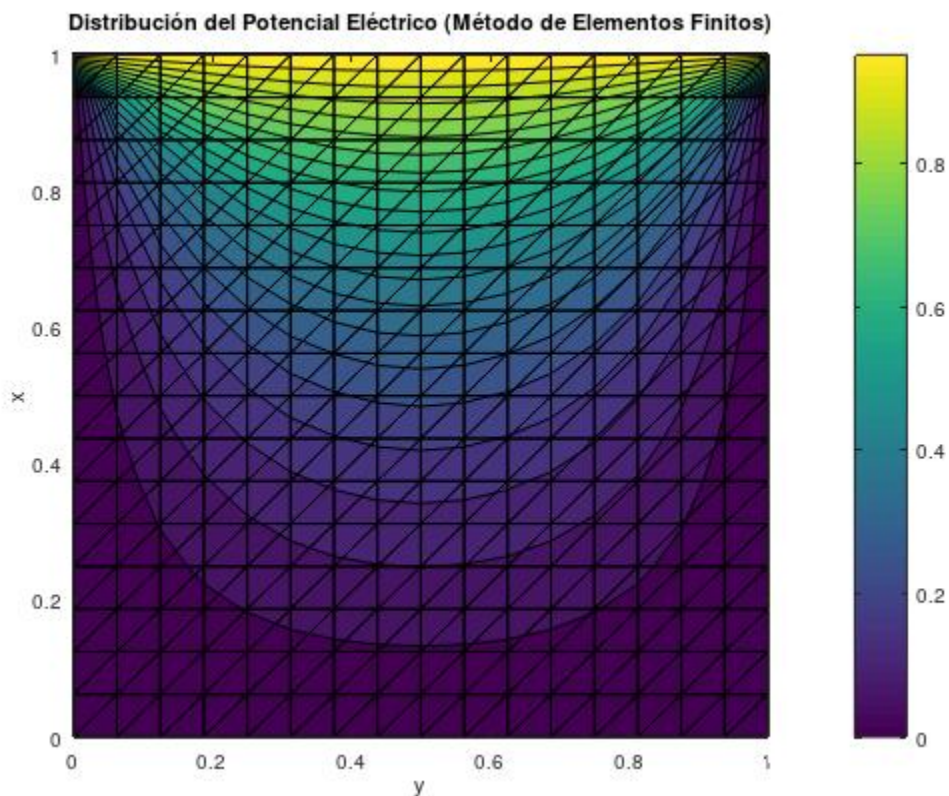


Gráfico 512 triángulos ( $h=0.0625$ )

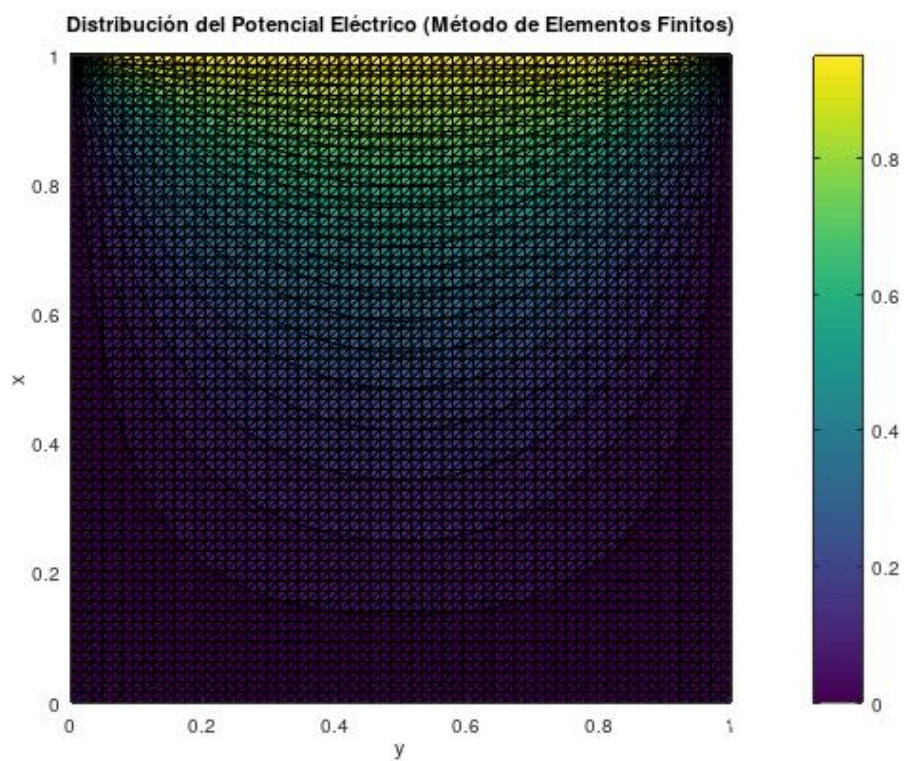


Gráfico 8192 triángulos ( $h=0.015625$ )

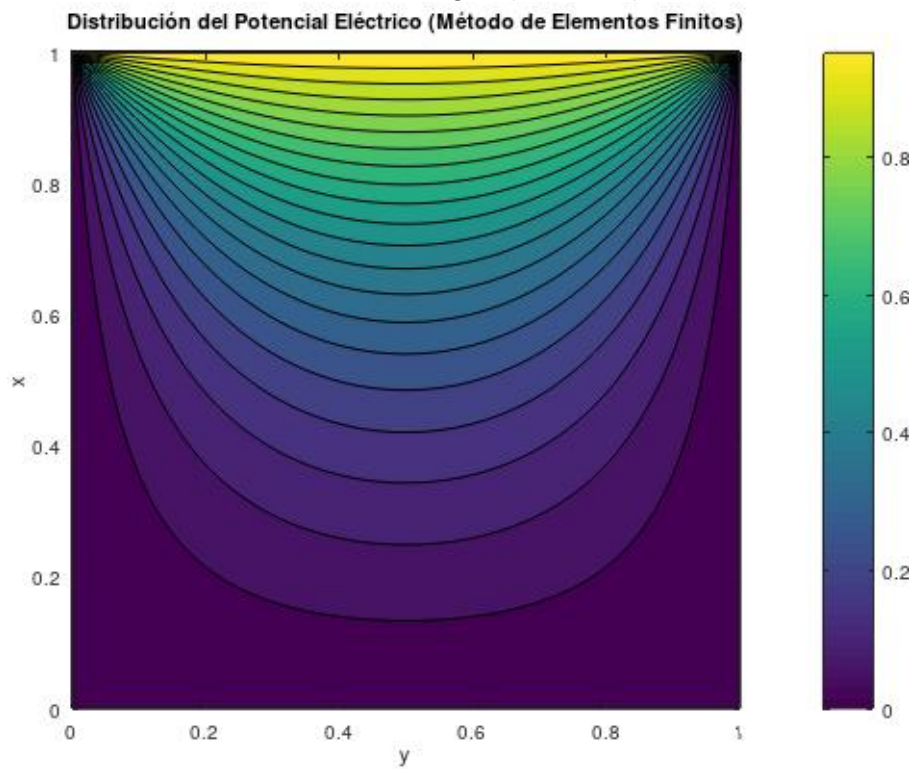
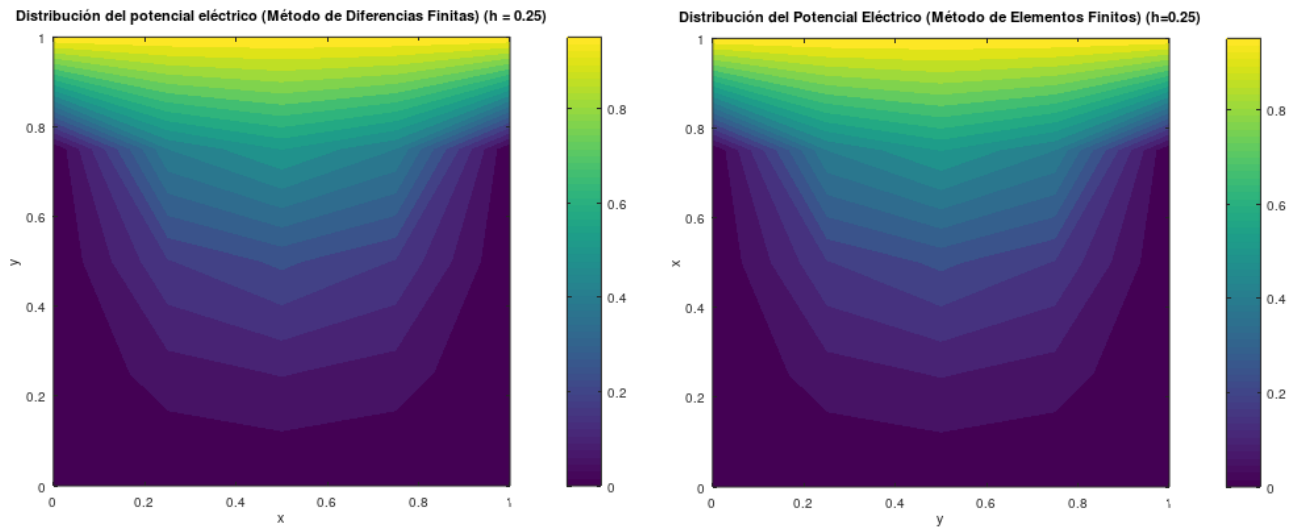


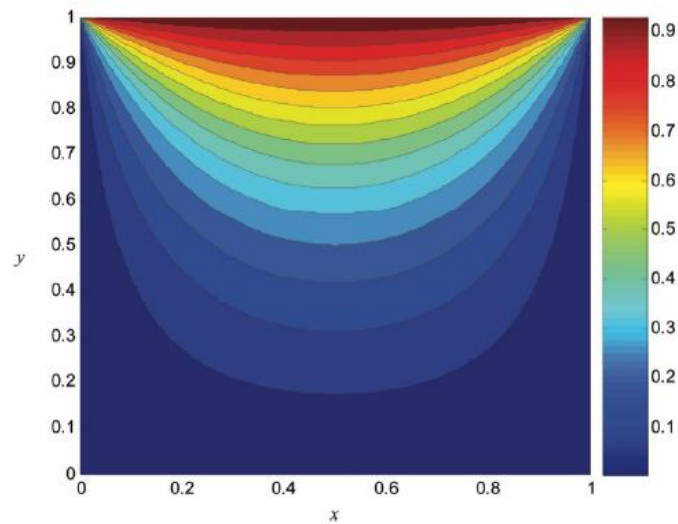
Gráfico 8192 triángulos sin graficar los mismos



Compare las soluciones numéricas obtenidas en el punto anterior con la solución analítica dada en (11).



Métodos numéricos para un  $h=0.25$



Solución analítica proporcionada en el TP

Más allá de lo destacado en el punto 3 (problema de menor dimensión), dónde se explicó que el Método de Diferencias Finitas era más entendible pues partía solo de una fórmula sin entrar en definiciones de funciones más complejas como sí lo hace el Método de Elementos Finitos (nótese que ahora en 3 dimensiones, es más complicado todavía entender cómo se vería una función de forma).

En el Método de Diferencias Finitas la resolución del mismo parte del hecho de calcular el valor de cada elemento como un promedio de sus elementos vecinos comenzando con una matriz nula con condiciones de borde. El Método busca el valor en base a iteraciones hasta llegar a un valor aceptable o una cantidad especificada de iteraciones.

Cuando queremos aumentar la dimensión del problema en el Método de Elementos Finitos estaremos trabajando con elementos más complejos de entender e implementar lo cual es un aspecto a considerar. La matriz se resolverá armando una matriz de ensamble que es una acumulación de los aportes de cada matriz elemental.

Si se observa las soluciones obtenidas con un  $h = 0.25$ , el cuál es el que se usó como ejemplo para la triangulación y por eso se muestra, ya los métodos numéricos resuelven bastante bien. Además, este valor de  $h$  es “bastante grande”, lo que hace que se pueda reducir para mejorar ampliamente la solución, sin demasiados problemas, como se hizo en la explicación de cada uno de los métodos.

Sea cual fuese el método a elegir, la solución analítica, si bien plantea una fórmula compleja a simple vista, seguirá siendo más exacta y entrega una forma fácil de seguir para calcular.

Verifique que los errores satisfacen las estimaciones teóricas.

Para el Método de Diferencias Finitas, el error se aproxima a  $Ch^2$

h	Error teórico	Error real	¿Cumple?
0.25	$C0.0625$	0,05788	Si
0.1	$C0.01$	0,01633	Si
0.0625	$C3.9 \times 10^{-3}$	$8,66761 \times 10^{-3}$	Si

(Aclaración: es importante recordar que computacionalmente, los valores decimales de un número se calculan como una suma de una “ $n$ ” cantidad de términos de una Serie de Fourier, para que la comparación del error teórico con el del método tenga sentido, las soluciones tienen que por lo menos contener la suficiente cantidad de términos de la Serie según el grado con el que se compara el error para que al aproximar el valor del número el truncamiento no afecte dicha comparación).

Resuelva el problema (9) numéricamente para la región de la figura (4), donde el objeto es un círculo de radio  $r = \frac{1}{6}$  en el centro del dominio.

Partimos nuevamente de:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

Con las condiciones de borde:

$$\begin{cases} V(x, 0) = 0 \\ V(x, h) = V_0 \\ V(0, y) = 0 \\ V(w, x) = 0 \end{cases}$$

Ahora, tenemos un círculo en medio de la caja, o sea en:  $(\frac{w}{2}, \frac{h}{2})$ . De radio  $r = \frac{1}{6}$ .

Cómo ayuda, en la definición del problema se especifica que en la frontera del círculo, se cumple la Condición de Neumann de la derivada normal:  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ .

El problema lo abordaré con el Método de Diferencias Finitas por facilidad de cálculos: Comenzamos con la discretización, en ambos ejes.

$$\Delta x = \frac{w}{c_x - 1} ; \Delta y = \frac{h}{c_y - 1}$$

Dónde  $c_i$  es la cantidad de valores que se toma en el eje  $i$ .

En la anterior resolución, vimos la forma en la que se aproxima las derivadas parciales. Usando los deltas definidos ahora se llega a:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} \approx \frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} ; \frac{d^2 V}{dy^2} \approx \frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{(\Delta y)^2}$$

(Otra forma es tomar un tamaño de paso “h” y utilizarlo en ambos ejes, como habíamos hecho antes).

Reemplazamos en la ecuación original:

$$\frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Operamos:

$$(\Delta y)^2 (V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}) + (\Delta x)^2 (V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}) = 0$$

$$(\Delta y)^2 (V_{i-1,j}) - (\Delta y)^2 (2V_{i,j}) + (\Delta y)^2 (V_{i+1,j}) + (\Delta x)^2 (V_{i-1,j}) - (\Delta x)^2 (2V_{i,j}) + (\Delta x)^2 (V_{i+1,j}) = 0$$

$$(\Delta y)^2 (V_{i-1,j}) + (\Delta y)^2 (V_{i+1,j}) + (\Delta x)^2 (V_{i-1,j}) + (\Delta x)^2 (V_{i+1,j}) = (\Delta y)^2 (2V_{i,j}) + (\Delta x)^2 (2V_{i,j})$$

$$(\Delta y)^2 (V_{i-1,j}) + (\Delta y)^2 (V_{i+1,j}) + (\Delta x)^2 (V_{i-1,j}) + (\Delta x)^2 (V_{i+1,j}) = 2((\Delta y)^2 + (\Delta x)^2) (V_{i,j})$$

Se llega entonces a:

$$\frac{(\Delta y)^2 (V_{i-1,j} + V_{i+1,j}) + (\Delta x)^2 (V_{i-1,j} + V_{i+1,j})}{2((\Delta y)^2 + (\Delta x)^2)} = V_{i,j}$$

Nótese que si hicieramos lo mismo que antes, esto es, tomar un tamaño  $h$  para ambos ejes.

$$\Delta y = \Delta x = h$$

Esto es:

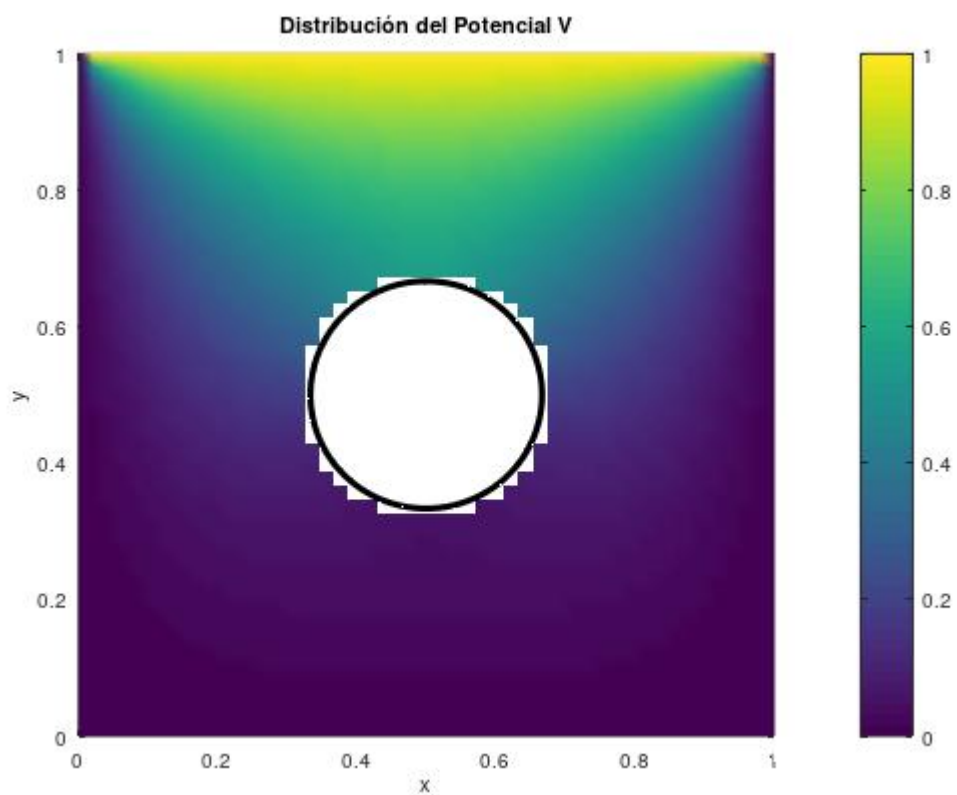
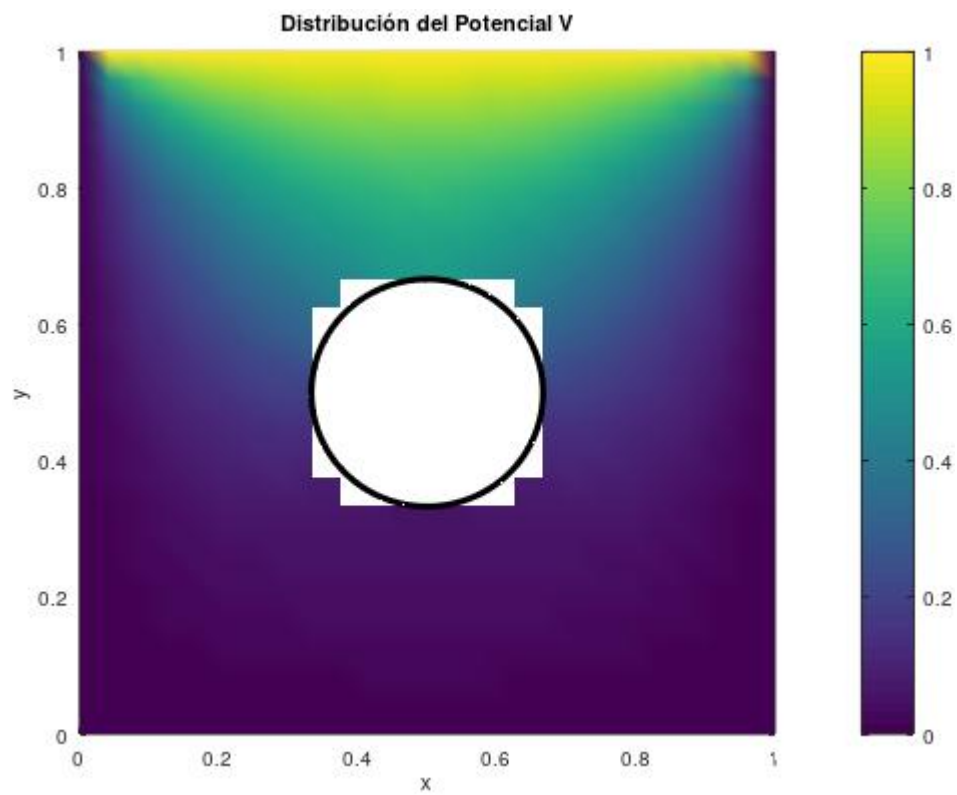
$$\begin{aligned} \frac{(h)^2(V_{i-1,j} + V_{i+1}) + (h)^2(V_{i-1,j} + V_{i+1})}{2((h)^2 + (h)^2)} &= V_{i,j} \\ \frac{h^2(V_{i-1,j} + V_{i+1}) + h^2(V_{i-1,j} + V_{i+1})}{2(2h^2)} &= V_{i,j} \\ \frac{h^2(V_{i-1,j} + V_{i+1}) + h^2(V_{i-1,j} + V_{i+1})}{4h^2} &= V_{i,j} \\ \frac{(V_{i-1,j} + V_{i+1}) + (V_{i-1,j} + V_{i+1})}{4} &= V_{i,j} \\ \frac{V_{i-1,j} + V_{i+1} + V_{i-1,j} + V_{i+1}}{4} &= V_{i,j} \end{aligned}$$

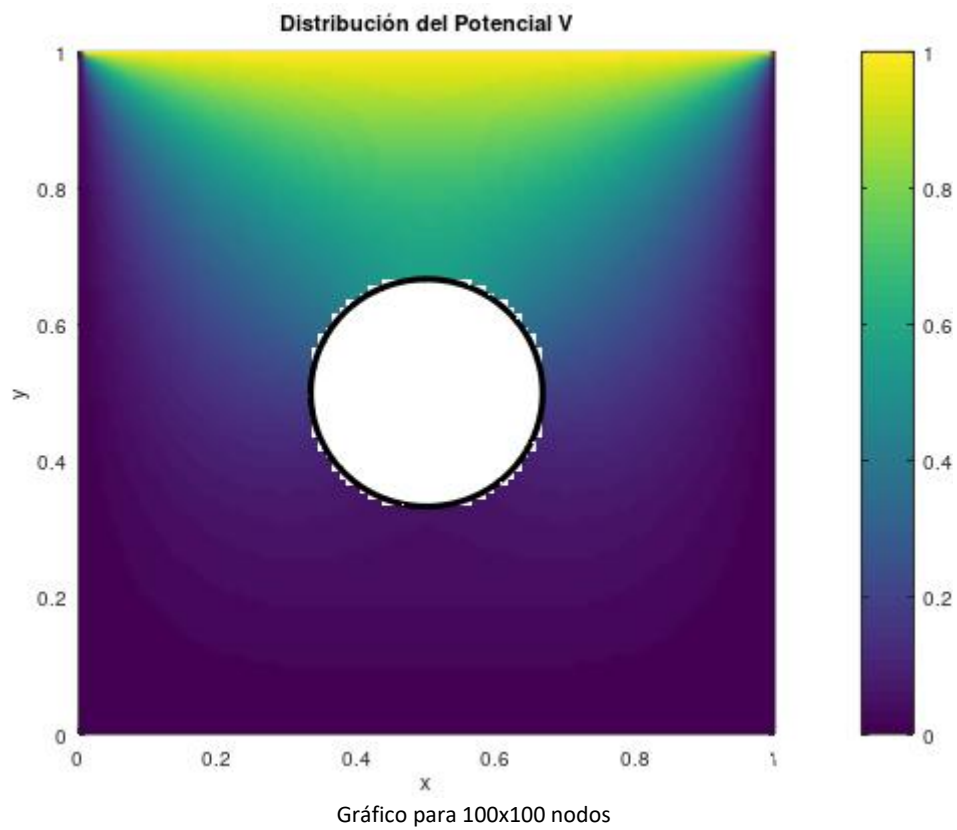
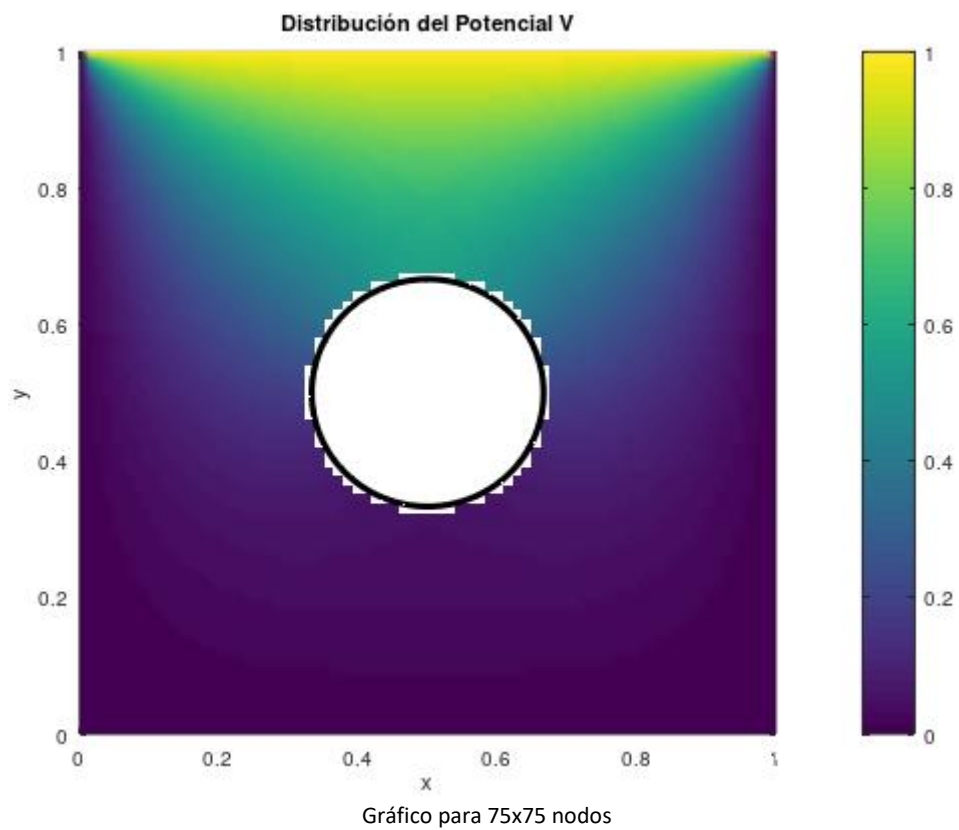
Volviendo a tener:

$$\frac{1}{4}(V_{i-1,j} + V_{i+1} + V_{i-1,j} + V_{i+1}) = V_{i,j}$$

Luego, se trabaja con una matriz booleana, la cual tiene el fin de detectar que elementos de la solución “caen” dentro del círculo. Aquellos elementos que cumplan lo anterior no serán tenidos en cuenta y además, a los elementos vecinos, se los promediará con el fin de mejorar la solución iteración a iteración.

Ahora, se mostrará la solución numérica para distintos tamaños de  $h$ :





Se puede observar que, si se sigue refinando el mallado por encima del último alcanzado, ya la solución parece ser bastante buena y aproximar de una manera lo suficientemente satisfactoria a la solución.

Ahora los inconvenientes sobre el círculo han disminuido notoriamente. Sin embargo, el tiempo que necesitó mi computadora para poder realizar el programa aumentó considerablemente.

Esto nos hace volver a caer sobre la conclusión común: si queremos mejor precisión, necesitaremos más tiempo y capacidad de procesamiento. Si aceptamos un mayor error/falta de prolijidad en el resultado, lo contrario.