再证原题。

证明： 由 B 对 $\vee$，$\wedge$ 和求补运算的封闭性可知，$\oplus$ 是 B 上的二元运算。

对任意 $a,b,c\in B$，有

$$
\begin{aligned}
(a\oplus b)\oplus c &= (((a\wedge\bar b)\vee(\bar a\wedge b))\wedge\bar c)\vee(\overline{(a\wedge\bar b)\vee(\bar a\wedge b)}\wedge c) && (\oplus\text{ 运算定义})\\
&= (((a\wedge\bar b)\vee(\bar a\wedge b))\wedge\bar c)\vee(((\bar a\wedge\bar b)\vee(a\wedge b))\wedge c) && (\text{引理 19.2})\\
&= (a\wedge\bar b\wedge\bar c)\vee(\bar a\wedge b\wedge\bar c)\vee(\bar a\wedge\bar b\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge c) && (\text{分配律})\\
&= (a\wedge\bar b\wedge\bar c)\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(\bar a\wedge b\wedge\bar c)\vee(\bar a\wedge\bar b\wedge c) && (\text{交换律})\\
&= (a\wedge((\bar b\wedge\bar c)\vee(b\wedge c)))\vee(\bar a\wedge((b\wedge\bar c)\vee(\bar b\wedge c))) && (\text{分配律})\\
&= (a\wedge(\overline{(b\wedge\bar c)\vee(\bar b\wedge c)}))\vee(\bar a\wedge((b\wedge\bar c)\vee(\bar b\wedge c))) && (\text{引理 19.2})\\
&= a\oplus(b\oplus c) && (\oplus\text{ 运算定义})
\end{aligned}
$$

从而 $\oplus$ 是可结合的。

由 $\vee$ 和 $\wedge$ 的可交换性立即可得 $\oplus$ 的可交换性。

对任意 $a\in B$，有

$$
\begin{aligned}
0\oplus a &= a\oplus 0 && (\oplus\text{ 是可交换的})\\
&= (a\wedge\bar 0)\vee(\bar a\wedge 0) && (\oplus\text{ 运算定义})\\
&= (a\wedge 1)\vee(\bar a\wedge 0) && (\bar 0 = 1)\\
&= a\vee 0 && (0\preccurlyeq\bar a\text{、}a\preccurlyeq 1\text{、教材定理 19.2})\\
&= a && (0\preccurlyeq a\text{、教材定理 19.2})
\end{aligned}
$$

从而 0 是关于 $\oplus$ 运算的单位元。

对任意 $a\in B$，有 $a\oplus a=(a\wedge\bar a)\vee(\bar a\wedge a)=0\vee 0=0$。从而 B 中所有元素都是自身的逆元。

这就证明了 $\langle B,\oplus\rangle$ 是 Abel 群。 □

19.28

证明： 由上题结论可知，$\langle B,\oplus\rangle$ 构成 Abel 群。

由 B 对 $\wedge$ 运算的封闭性和 $\wedge$ 运算的可结合性可知，$\langle B,\otimes\rangle$ 是半群。

由 $\wedge$ 运算对 $\vee$ 运算的分配律可知，$\otimes$ 运算对 $\oplus$ 运算是可分配的。

这就证明了 $\langle B,\oplus,\otimes\rangle$ 是环。

由教材定理 19.3(3) 可知，对任意 $a\in B$，有 $a\otimes a=a$。从而 $\langle B,\oplus,\otimes\rangle$ 是布尔环。 □

19.29

证明： 充分性显然。下面证必要性。

作 $\varphi:B\to\mathcal{P}(A)$，$\forall x\in B$，$\varphi(x)=\{a\mid a\in B,\ a\text{ 是原子},\ a\preccurlyeq x\}$。由教材定理 19.25 的证明过程可知，$\varphi$ 是从 B 到 $\mathcal{P}(A)$ 的同构。

注意到，$\varphi(0)=\varnothing$，且对任何原子 $a_i\in A$，有 $a_i\in\varphi(a_i)$。反设 $x\neq 0$，则 $\varphi(x)\neq\varnothing$，从而存在 $a\in A$，使得 $a_i\in\varphi(x)$。于是有 $a\in\varphi(x)\cap\varphi(a)=\varphi(x\wedge a_i)\neq\varnothing$。这与 $\varphi(x\wedge a)=\varphi(0)=\varnothing$ 矛盾。 □

19.30

证明： 对 n 作归纳。

当 $n=1$ 时，命题显然成立。

设 $n=k$ 时，命题成立。则当 $n=k+1$ 时，

$$\overline{a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_k\wedge a_{k+1}}=\overline{a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_k}\vee\bar a_{k+1} \qquad (\text{教材定理 19.23(2)})$$