等价(equivalence)关系

- 定义
- 同余关系
- 等价类
- 商集
- 划分
- 划分的加细
- Stirling子集数

等价(equivalence)关系定义

定义 设$R\subseteq A\times A$ 且$A\neq$, 若R是**自反的, 对称的, 传递的**,则称R为等价关系.

例2.9: 判断下列关系是否等价关系(A是某班学生)?

$R_1=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$与$y$同年生$\}$

$\mathrm{R}_2=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$与$y$同姓$\}$

$\mathrm{R}_3=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$的年龄不比$y$小$\}$

$\mathrm{R}_4=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$与$y$选修同门课程$\}$

$\mathrm{R}_5=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$的体重比$y$重$\}$

举例

判断下列关系中，哪些是等价关系？

(1) R是实数集,$T_1 \subseteq R \times R$, aT_1b当且仅当a-b是整数

(2) R是实数集,$T_2 \subseteq R \times R$, xT_2y当且仅当$|x-y|<1$

(3) 设n是正整数, S是字符串集合,在S上定义二元关系R_n, sR_nt当且仅当s=t或者s与t的长度至少为n且s和t开头的n个字符相同。如n=3，S是所有二进制字符集合，那么01R310,0010R30011,0110与0011不相关。

(4)A={0,1,2,3},R_1={<0,0>,<1,1>,<2,2>,<3,3>},

R_2={<0,0>,<0,2>,<2,0>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>},

R_3={<0,0>,<1,1>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,3>}

例2.9(续)

	定义	自反	对称	传递	等价关系
R_1	x与y同年生	√	√	√	√
R_2	x与y同姓	√	√	√	√
R_3	x的年龄不比y小	√	×	√	×
R_4	x与y选修同门课程	√	√	×	×
R_5	x的体重比y重	×	×	√	×

例2.10

例2.10: 设$R \subseteq A \times A$ 且$A \neq \varnothing$, 对R依次求三种闭包共有6种不同顺序, 其中哪些顺序一定导致等价关系?

解 对R依次求三种闭包共有6种不同顺序,产生的关系分别为：$rst(\mathrm{R})$, $rts(\mathrm{R})$, $str(\mathrm{R})$, $srt(\mathrm{R})$, $trs(\mathrm{R})$.

由定理2.26可知,

$tsr(R)=trs(R)=rts(R)$, $str(R)=srt(R)=rst(R)$

$str(R) \subseteq tsr(R)$

因此6种不同顺序的闭包运算只产生两种可能不同的关系 (注意观察s与t的次序)

例2.10 续1

下面$tsr(R)$是等价关系,而$str(R)$不一定是等价关系.

由定理2.25可知,

$r(R)$是自反的$\Rightarrow sr(R)$是自反的且对称的$\Rightarrow tsr(R)$也是自反的、对称的且是传递的

因此$tsr(R)$是等价关系.

同理，由定理2.25可知,

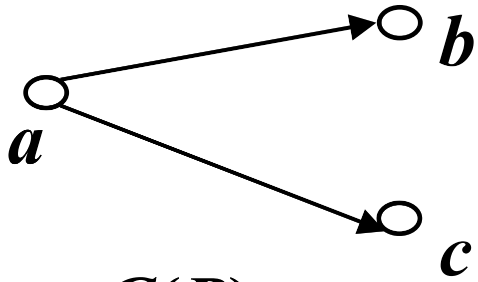
$r(R)$是自反的$\Rightarrow tr(R)$是自反的且传递的$\Rightarrow str(R)$是自反的、对称的但不一定是传递的

所以$str(R)$不一定是等价关系.

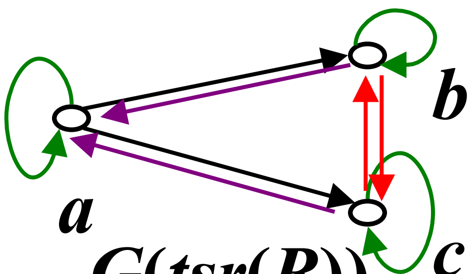
例2.10 续2

	$tsr(R)=trs(R)=rts(R)$	$str(\mathrm{R})=srt(\mathrm{R})=rst(\mathrm{R})$
自反	√	√
对称	√	√
传递	√	×
等价关系	√ 等价闭包	×

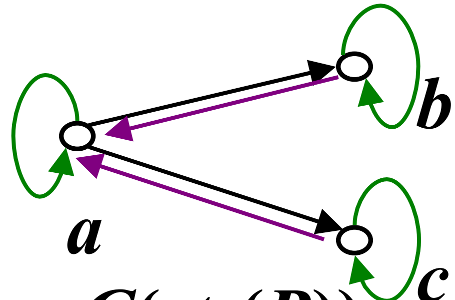
举例



$G(R)$



$G(tsr(R))$



$G(str(R))$

等价类(equivalence class)

定义: 设R是$A\neq\varnothing$上等价关系, $\forall x\in A$,令

$$[x]_R=\{\, y \mid y\in A \wedge xRy \,\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称x的等价类, 简记为$[x]$.

例： $A=\{1,2,3,4,5\}, R\subseteq A\times A, R=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>, <3,2>,<1,3>,<3,1>,<4,5>,<5,4>\}\cup I_A$,求$[x], x\in A$.

例： 在Z上定义二元关系R： $a\mathrm{R}b \Leftrightarrow a=b \vee a=-b$， R是等价关系吗？若是，求[7],[5],[0]

例2.11

例2.11: 设A⊆N∧A≠∅,令

$R_n=\{<x,y>|x,y\in A \wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ n)\},n\geq 2$.

(1)证明R_n是A上的等价关系;

(2) 设$A=\{1,2,3,4,5,8\}$, 求

$R_3 = \{ <x,y> | x,y\in A \wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3) \}$的等价类,并画出$R_3$的关系图.

解: (1) 证明 $\forall x, x\in A$,显然$x\equiv x(\mathrm{mod}\ n)$,所以 $<x,x>\in R_n$. 因此R_n是自反的.

例2.11 续

$\forall <x,y>$, $<x,y> \in R_n \Leftrightarrow x \equiv y(\mathrm{mod}\ n) \Leftrightarrow y \equiv x(\mathrm{mod}\ n)$

$\Leftrightarrow <y,x> \in R_n$

因此R_n是对称的.

$\forall <x,y>,<y,z>$, $<x,y> \in R_n \wedge <y,z> \in R_n$

$\Leftrightarrow x-y=k_1 n \wedge y-z=k_2 n \Rightarrow x-z=(k_1+k_2)n \Leftrightarrow x \equiv z(\mathrm{mod}\ n)$

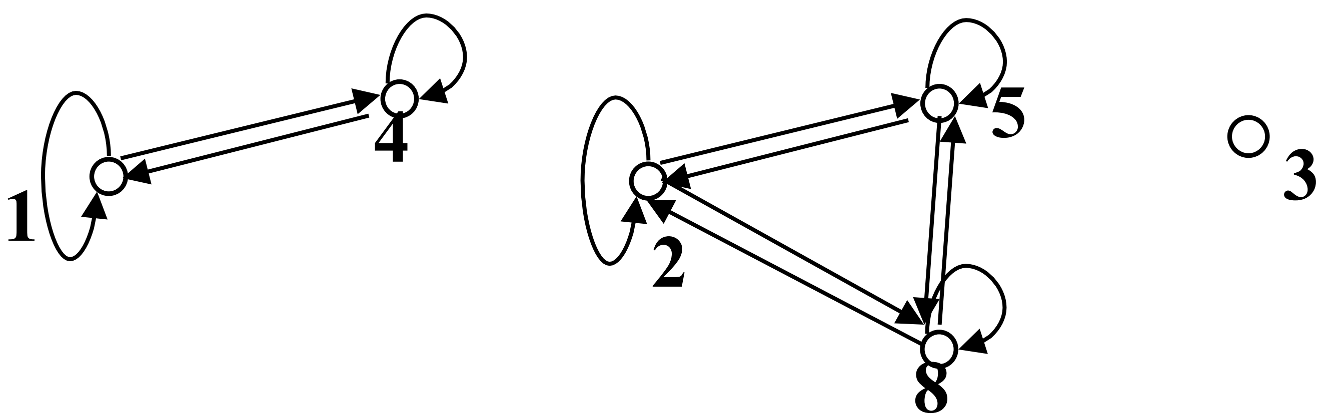
$\Leftrightarrow <x,z> \in R_n, k_1, k_2 \in \mathrm{Z}$

因此R_n是传递的.

综上所述, R_n是自反的,对称的,传递的,即R_n是等价关系.

例2.11 续

(2) 解: [1]=[4]={1,4}, [2]=[5]=[8]={2,5,8},[3]={3}.



$G(R_3)$

同余(congruence)关系

同余关系: 设$n\in\{2,3,4,\ldots\}$, $x,y\in Z$,则x与y**模n同余** (be congruent modulo n)

$$\Leftrightarrow x\equiv y(\bmod n) \Leftrightarrow n|(x-y) \Leftrightarrow x-y=kn\ (k\in Z)$$

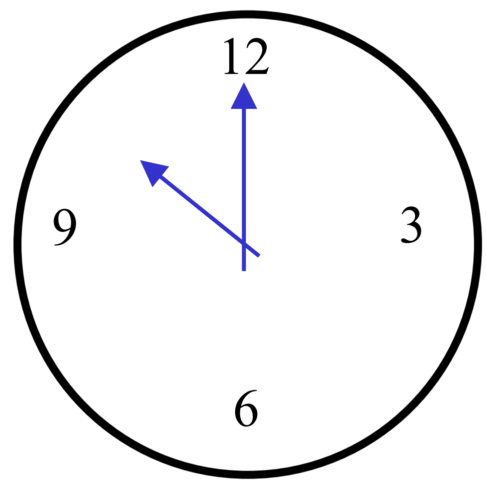
同余关系是等价关系

$[0]=\{kn|k\in Z\}$,

$[1]=\{1+kn|k\in Z\}$,

$[2]=\{2+kn|k\in Z\},\ldots,$

$[n-1]=\{(n-1)+kn|k\in Z\}$.



定理2.27(等价类的性质)

定理27: 设R是$A\neq\varnothing$上等价关系, $\forall x,y\in A$,

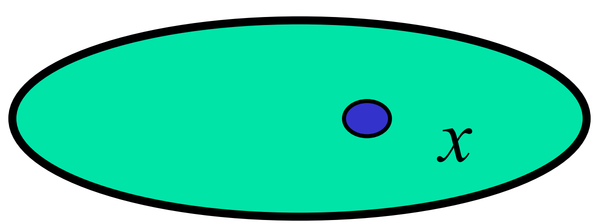
(1) $[x]_R\neq\varnothing$

(2) $xRy \Leftrightarrow [x]_R=[y]_R$;

(3) $\neg xRy \Leftrightarrow [x]_R\cap[y]_R=\varnothing$;

(4) $\cup\{\ [x]_R \mid x\in A\ \}=A$.

证明: (1) R自反$\Rightarrow\forall x, x\in \mathrm{A}, xRx\Rightarrow x\in[x]_R\Rightarrow[x]_R\neq\varnothing$



$[x]$

定理2.27 续

（2）证明: 先证明$xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$,

只需证明$[x]_R \subseteq [y]_R$和$[x]_R \supseteq [y]_R$.

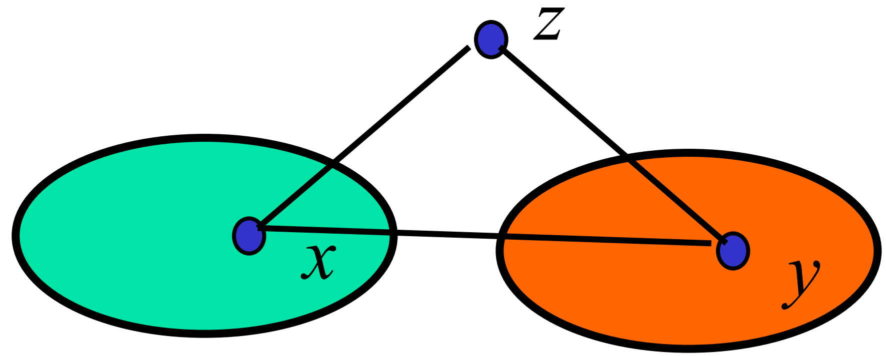
($\subseteq$) $\forall z, z \in [x]_R \wedge xRy \Rightarrow zRx \wedge xRy \Rightarrow zRy \Rightarrow z \in [y]_R$.

$\therefore$ $[x]_R \subseteq [y]_R$.

($\supseteq$) 同理可证$[y]_R \subseteq [x]_R$.

再证$[x]_R=[y]_R \Rightarrow xRy$

$x \in [x] \Rightarrow x \in [y] \Rightarrow xRy$



定理2.27 续

(3) 证明: 先证$\neg xRy \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$

(反证) 假设$\exists z$, $z \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R \Rightarrow$

$xRz \wedge zRy \Rightarrow xRy$

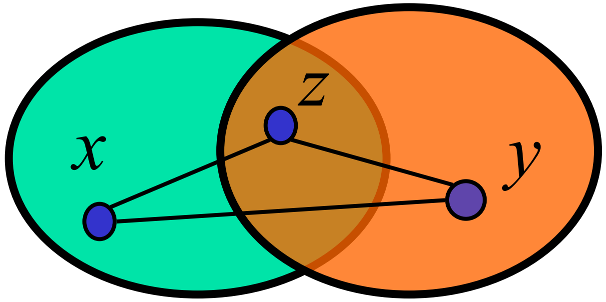
这与$\neg xRy$矛盾 $\therefore [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$.

再证$[x]_R \cap [y]_R = \varnothing \Rightarrow \neg xRy$

假设$\langle x,y \rangle \in R \Rightarrow x \in [y]_R \wedge x \in [x]_R$

$\Rightarrow x \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$

与$[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$矛盾.



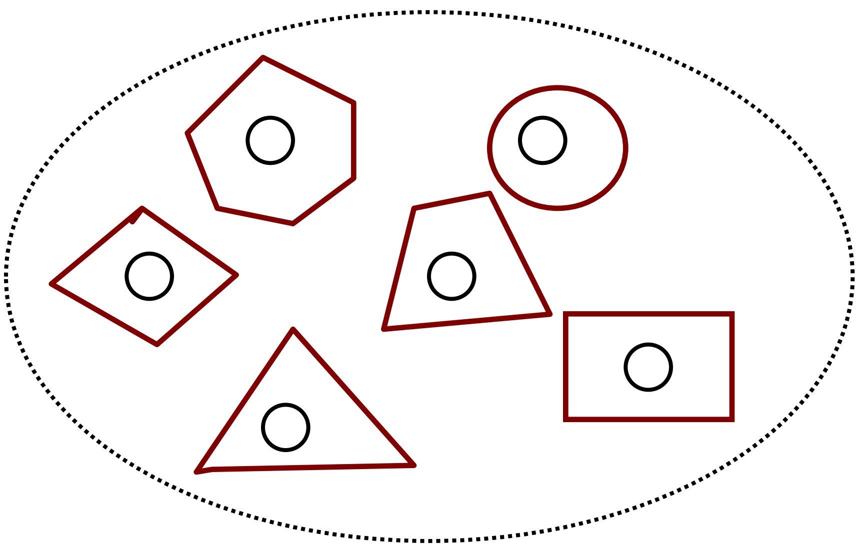
定理2.27 续

(4) 证明: (⊇) $\forall x, x\in A \Rightarrow x\in [x]_R \Rightarrow \{x\} \subseteq [x]_R$

$\Rightarrow A = \cup\{\ \{x\}\mid x\in A\ \} \subseteq \cup\{\ [x]_R \mid x\in A\ \}$

(⊆) $\forall x,\ [x]_R \subseteq A \Rightarrow \cup\{\ [x]_R \mid x\in A\ \} \subseteq \cup\{A \mid x\in A\ \} = A$

$\therefore\ \cup\{\ [x]_R \mid x\in A\ \} = A$

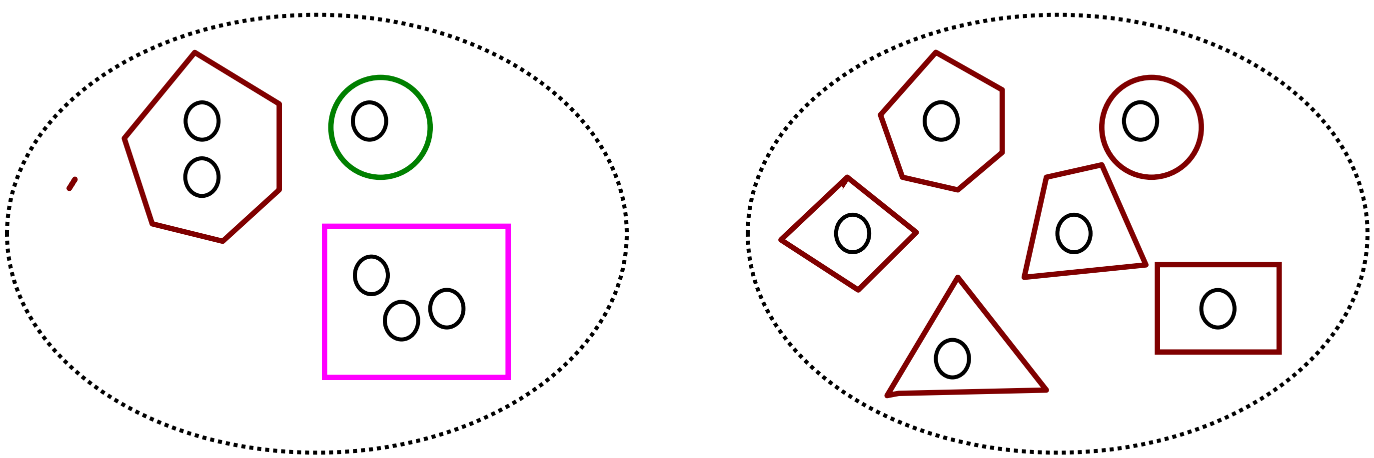


商集(quotient set)

定义: 设R是$A\neq\varnothing$上等价关系，$A/R = \{\ [x]_R \mid x\in A\ \}$ 称为A关于R的商集, 简称A的商集.

显然 $\cup A/R = A$.

例2.11: $A/R_3 = \{\ \{1,4\}, \{2,5,8\}, \{3\}\ \}$.



例2.12

例12 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $n\geq 1$.

(1) 验证I_A, E_A,$R_{ij}=I_A\cup\{<a_i,a_j>,<a_j,a_i>\}$都是$A$上等价关系,并求其对应的商集, 其中$a_i,a_j\in$ A, $i\neq j$. $\varnothing$是A上等价关系吗?

(2) A=$\{a,b,c\}$,试求出A上的全体等价关系及其对应的商集.

解 (1) 显然I_A, E_A,R_{ij}是等价关系.

$A/I_A=\{\ \{a_1\},\ \{a_2\},\ldots,\ \{a_n\}\ \}$, $A/E_A=\{\ \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\ \}$

$A/R_{ij}= A/I_A\cup\{\{a_i,a_j\}\} - \{\{a_i\},\{a_j\}\}$.

因为$\varnothing$无自反性,所以$\varnothing$不是A上等价关系.

例2.12 续

(2) 根据(1)中n=3的情况, A=$\{a,b,c\}$上共有5种不同的等价关系:

E_A,其商集为$A/E_A=\{\{a,b,c\}\}$

I_A,其商集为$A/I_A=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

$R_1=I_A\cup\{<a,b>,<b,a>\}$,其商集为$A/R_1=\{\{a,b\},\{c\}\}$

$R_2=I_A\cup\{<a,c>,<c,a>\}$,其商集为$A/R_1=\{\{a,c\},\{b\}\}$

$R_3=I_A\cup\{<b,c>,<c,b>\}$,其商集为$A/R_1=\{\{a\},\{b,c\}\}$

划分(partition)

- 如何找出A上的全部等价关系呢？

定义 设$B\neq\varnothing$, $B\subseteq P(A)$,若满足

(1) $\varnothing\notin B$;

(2) $\forall x,y(x,y\in B \wedge x\neq y \Rightarrow x\cap y=\varnothing)$

(3) $\cup B = A$

则称B为A的一个划分, B中元素称为划分块(block).

如： A=$\{a,b,c\}$,$B_1=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$, $B_2=\{\{a,b\},\{c\}\}$,
$B_3=\{\{a,c\},\{b\},\{c\}\}$, $B_4=\{\{a,c\},\{c\}\}$,问B_1, B_2, B_3, B_4中哪些是A的划分？

举例

设$A_1,A_2,\ldots,A_n \subset E$, 且$A_i$非空,则以下都是划分:

$B_i = \{A_i, \sim A_i\}$, (i=1,2,…,n)

$B_{ij} = \{A_i \cap A_j, \sim A_i \cap A_j, A_i \cap \sim A_j, \sim A_i \cap \sim A_j\} - \{\varnothing\}$

(i,j =1,2,…,$n \wedge i \neq j$) ……

$B_{12\ldots n} = \{\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_n, \ldots,$

$\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_{n-1} \cap A_n, \ldots$

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\} - \{\varnothing\}$

等价关系与划分是一一对应的

定理2.28: 设$A\neq\varnothing$, 则

(1) R是A上等价关系$\Rightarrow A/R$是A的划分

(2) π是A的划分$\Rightarrow R_\pi$是A上等价关系,其中

$$x\, R_\pi y \Leftrightarrow \exists z(z\in\pi \wedge x\in z \wedge y\in z)$$

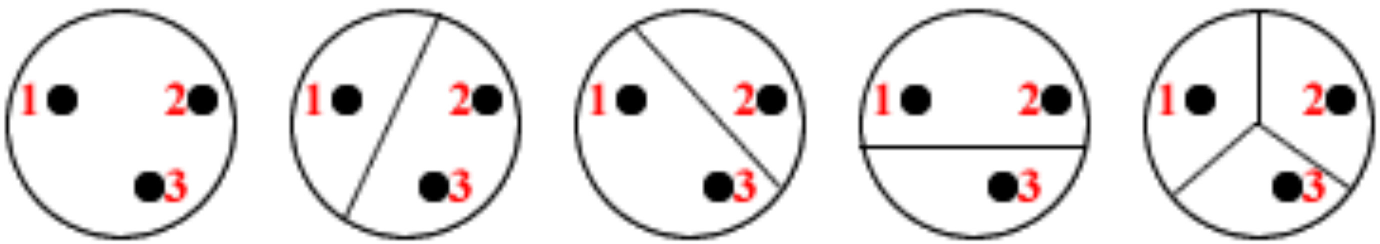
R_π称为由划分π所定义的等价关系(同块关系).

例2.13

例2.13 给出$A=\{1, 2, 3\}$上所有的等价关系。

解 先求出A的所有划分：$B_1=\{\{1,2,3\}\}$, $B_2=\{\{1\},\{2,3\}\}$,

$B_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$, $B_4=\{\{1,2\},\{3\}\}$, $B_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$



每个划分对应一个等价关系：

$R_1=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<1,3>,<2,3>,<2,1>,<3,1>,$

$<3,2>\}$, 即全域关系E_A,

$R_2= I_A \cup \{<2,3>,<3,2>\}$, $R_3= I_A \cup \{<1,3>,<3,1>\}$,

$R_4= I_A \cup \{<1,2>,<2,1>\}$, $R_5= I_A$.

Bell数(Bell number)

- **问题: 给n个对象分类, 共有多少种分法?**
- **答案: Bell数** $B_n = \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} + \cdots + \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix}$

  (Eric Temple Bell, 1883~1960)

- **Stirling子集数**(Stirling subset number) : $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$

  把n个对象分成k个非空子集的分法个数.

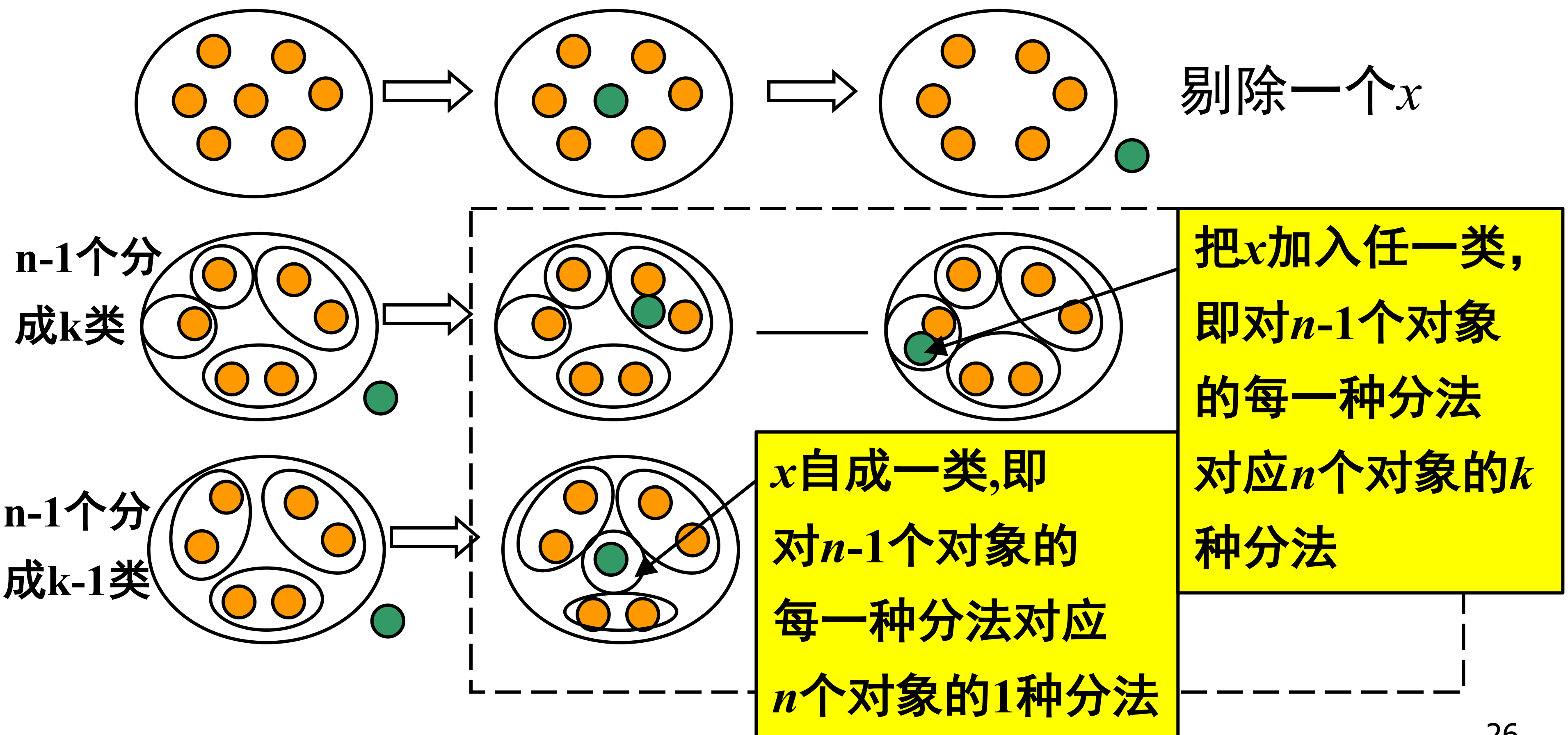
$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1, \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1, \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = C_n^2, \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1.$$

- **递推公式:**

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}.$$

Stirling子集数

递推公式: $$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$



例2.14

例2.14: 求出$A=\{a,b,c,d\}$上有多少种等价关系?商集为2元集的有几个？写出他们的集合表达式

解:

$$B_4 == \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\}$$

$$= 1 + (2^3 - 1) + c_4^2 + 1 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

$$B_4 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 1 + (2\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\}) + (3\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}) + 1$$

$$= 2 + 3\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 3\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 2 + 3\times 3 + 1 + 3\times 1 = 15$$

划分的加细(refinement)

- **定义：** 设π_1和π_2都是集合A的划分,若π_1的每个划分块都包含于π_2的某个划分块中, 则称π_1为π_2的**加细**.

例如：A={1,2,3,4}, π_i都是A的划分,

$\pi_1=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$,$\pi_2=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$, $\pi_3=\{\{1,2,4\},\{3\}\}$,

$\pi_4=\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$, $\pi_5=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$,

令$B=\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$， $R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in B, y\in B, x$是$y$的加细$\}$,

用集合表示出R.并分析R具有哪些性质？

解 $R=\{\langle\pi_1, \pi_2\rangle, \langle\pi_1, \pi_3\rangle, \langle\pi_5, \pi_2\rangle\}\cup I_B$

R具有自反性、反对称性、传递性.

π_1为π_2的加细$\Leftrightarrow R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_2}$

证 先证π_1为π_2的加细$\Rightarrow R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_2}$

$\forall <x,y> \in R_{\pi_1}, xR_{\pi_1}y \Leftrightarrow \exists A(A \in \pi_1 \wedge x \in A \wedge y \in A)$

$\Rightarrow \exists A \exists B\ (A \in \pi_1 \wedge B \in \pi_2 \wedge A \subseteq B \wedge x \in A \wedge y \in A)$

$\Rightarrow \exists A \exists B\ (A \in \pi_1 \wedge B \in \pi_2 \wedge A \subseteq B \wedge x \in B \wedge y \in B)$

$\Rightarrow \exists B\ (B \in \pi_2 \wedge x \in B \wedge y \in B) \Rightarrow xR_{\pi_2}y$

所以$R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_2}$

再证$R_{\pi_1} \subseteq R_{\pi_2} \Rightarrow \pi_1$为$\pi_2$的加细

$\forall X, X \in \pi_1 \Rightarrow X \neq \varnothing$

$\forall z,\ z \in X \Rightarrow \langle z,z \rangle \in R_{\pi_1}$

$\Rightarrow \langle z,z \rangle \in R_{\pi_2}$

$\Rightarrow \exists Y(Y \in \pi_2 \wedge z \in Y)$

即π_1中任意的分块都是π_2中某个分块的子集,因此π_1是π_2的加细。

例2.13 续

例2.13 $A=\{1, 2, 3\}$

(1) 求出$A=\{1, 2, 3\}$的全部划分及对应的等价关系.

(2) 找出划分间的加细及关系中的包含关系.

解 (1)先求出A的所有划分：$B_1=\{\{1,2,3\}\}$, $B_2=\{\{1\},\{2,3\}\}$, $B_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$, $B_4=\{\{1,2\},\{3\}\}$, $B_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

它们对应的等价关系为：

$R_1=E_A$, $R_2= I_A \cup \{<2,3>,<3,2>\}$, $R_3= I_A \cup \{<1,3>,<3,1>\}$, $R_4= I_A \cup \{<1,2>,<2,1>\}$, $R_5= I_A$.

(2) 显然B_2,B_3,B_4,B_5都是B_1的加细, B_5是B_2, B_3, B_4的加细;

R_2,R_3,R_4,R_5都是R_1的子集, R_5是R_2, R_3, R_4的子集;

总结

- 等价关系,
- 等价类,商集,
- 划分
- 作业：p56, 习题二, 34,35,37,39,41,43