15.2 代数系统

- 代数系统的定义

  构成成分，公理

- 代数系统的分类

  同类型的代数系统

  同种的代数系统

- 构造代数系统的方法

  子代数

  积代数

- 学习要点与基本要求

代数系统的定义

定义 一个代数系统是一个三元组$V=<A,\Omega,K>$,其中

A是 载体，非空集合，Ω 是非空运算集，

K是代数常数集合，$\varnothing\subseteq K\subseteq A$，如单位元、零元等

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j,\quad \Omega_j=\{o_j\,|\,o_j\text{为}A\text{上的}k_j\text{元运算}\}$$

简记为 $V=<A,\Omega>$

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j,\quad \Omega_j=\{o_j\,|\,o_j\text{为}A\text{上的}k_j\text{元运算}\}$$

简记为 $V=<A,o_1, o_2,\ldots o_r>$

说明

- $V=\langle A, o_1, o_2, \ldots o_r\rangle$中的$o_1, o_2, \ldots o_r$运算从高元到低元排列
- 无特殊说明，本课程所研究的代数系统是含有有限个代数运算的系统
- 在不产生误解的情况下，可以不写出代数系统中的所有成分，如<N,+,0>可以简记为<N,+>或N
- **代数系统的构成：**成分+公理

代数系统举例

- $<R-\{0\}, f>$，$f(x)=1/x$
- $<Z, +, \cdot>$, $<Q, +, \cdot>$, $<R, +, \cdot>$,
- $<P(S), \cup, \cap, \oplus, \sim>$, S是一个有限集
- $<M_n(R), +, \cdot>$
- $<\{0,1\}, \wedge, \vee>$
- $<Z_n, \oplus, \otimes>$

  $Z_n=\{0,1, \ldots, n-1\}$,

  $x \oplus y=(x+y) \bmod n$,

  $x \otimes y=(x \times y) \bmod n$,
- $<A^A, \circ>$

代数系统的分类

- **同类型的：** 构成成分相同
- **同种的：** 构成成分与公理都相同
- **构成成分：** 运算(包括运算个数,对应运算的元数)
- **公理：** 交换，结合，幂等，吸收，分配，消去,单位元e，可逆元。
- **例：**

1. 设<A, o, *>,其中o, *都是二元运算, *可结合, *对o可分配,则$\langle Z,+,\cdot\rangle$, $\langle Z_n,\oplus,\otimes\rangle$, $\langle M_n,+,\cdot\rangle$与 $\langle A, o, *\rangle$同种
2. 设<S, o′, *′>,其中o′, *′是二元运算,都是可交换, 结合, 幂等, o′, *′相互分配,满足吸收律,则$\langle P(B),\cup,\cap\rangle$, $\langle\{0,1\},\vee,\wedge\rangle$与 <S, o′ *′>同种. <A, o, *> 与<S, o′, *’>同类型。

子代数

定义15.11 设$V=\langle A, o_1, o_2, \ldots o_r\rangle$是代数系统，$B\subseteq A$, 如果$B$对$V$中的所有运算封闭(含0元运算在内)，则称$V'=\langle B, o_1, o_2, \ldots o_r\rangle$为V的子代数，若$B\subset A$,子代数$V'$称为V的真子代数.

例如：$\langle N,+\rangle$是$\langle Z,+\rangle$, $\langle R,+\rangle$, $\langle Q,+\rangle$的子代数.

$\langle Z,+,0\rangle$是$\langle Z,+,0\rangle$, $\langle R,+,0\rangle$, $\langle Q,+,0\rangle$的真子代数.

$\langle N-\{0\},+\rangle$不是$\langle Z,+,0\rangle$的子代数.

说明

- 子代数和原代数是同类型的代数系统。
  若公理是二元运算性质，子代数与原代数是同种的。
- 对于任何代数系统，其子代数一定存在。

平凡子代数（定义15.12）

- 最大的子代数：就是V本身。
- 最小的子代数：如果令V中所有代数常数构成的集合是K，且K对V中所有的运算都是封闭的，则$<K, o_1, o_2, \ldots o_r>$就构成了$V$的最小的子代数。
- 平凡子代数：最大和最小的子代数称为V的平凡子代数

实例分析

例1 代数系统$V=<Z,+,0>$，试证$nZ=\{nz \mid z\in Z\}$是V的子代数,n为自然数. +为普通加法运算

证明 任意nz_1，$nz_2 \in nZ$，

则$nz_1+nz_2 = n(z_1+z_2)\in nZ$, +运算在nZ上封闭.

$0=n+0=0+n \in nZ$，零元运算在nZ上封闭.

故nZ是V的子代数。

$n=0$ 平凡的真子代数。

$n=1$ 平凡的子代数。

$n>1$ 非平凡的真子代数

积代数的定义

定义 设$V_1=<A,o_{11},o_{12},\ldots,o_{1r}>$与$V_2=<B,o_{21},o_{22},\ldots,o_{2r}>$是同类型的代数系统，$o_{1i}$和$o_{2i}$是$k_i$元运算，$(i=1,2,\ldots,r)$. V_1与V_2的积代数是

$$V_1\times V_2=<A\times B,o_1,o_2,\ldots,o_r>$$

其中o_i是k_i元运算，$i=1,2,\ldots,r$,

$\forall <x_1,y_1>,<x_2,y_2>,\ldots,<x_{ki},y_{ki}>\in A\times B$,

$o_i(<x_1,y_1>,\ldots<x_{ki},y_{ki}>) = <o_{1i}(x_1,\ldots,x_{ki}),o_{2i}(y_1,\ldots,y_{ki})>$

V是V_1与V_2的积代数，也称V_1和V_2是V的因子代数.

积代数举例

例$<Z_5,+_5, \times_5>$与$<Z_3,+_3, \times_3>$，求积代数$<Z_5\times Z_3,\oplus, \otimes>$,并计算$<4,2> \oplus <2,2>$和$<4,2> \otimes <2,2>$的值.

解 $Z_5\times Z_3=\{0,1,2,3,4\} \times \{0,1,2\}$,运算$\oplus$、$\otimes$如下：

$\forall <x,y>,<u,v>\in Z_5\times Z_3$

$<x,y> \oplus <u,v>=<x+_5u,y+_3v>$,

$<x,y>\otimes<u,v>=<x\times_5u, y\times_3v>$

$<4,2> \oplus <2,2>=<4 +_5 2,2+_3 2>=<1,1>$

$<4,2> \otimes <2,2>=<4\times_5 2, 2\times_3 2>=<3,1>$

积代数的性质

- 若o_{1i}和o_{2i}分别在V_1与V_2中可交换（可结合或幂等），则o_i在V中也<u>可交换</u>（可结合或幂等）；
- 若o_{1i}对o_{1j}, o_{2i}对o_{2j}在V_1与V_2中分别适合分配律，则o_i对o_j在V中也适合<u>分配律</u>；
- 若o_{1i} ,o_{1j}与 o_{2i} ,o_{2j}在V_1与V_2中分别适合吸收律，则o_i与o_j在V中也适合<u>吸收律</u>；
- 若e_{1i} (θ_{1i}), e_{2i} (θ_{2i})分别为V_1与V_2中关于o_{1i}和o_{2i}运算的单位元（零元），则$< e_{1i}, e_{2i}>$($< \theta_{1i}, \theta_{2i}>$)为$V$中关于$o_i$运算的单位元（零元）
- 若o_{1i}和o_{2i}分别为V_1与V_2中含单位元的运算,$a\in$A,$b\in$B分别关于o_{1i}和o_{2i}运算存在逆元a^{-1}和b^{-1},则$< a^{-1},b^{-1} >$是V中$<a,b>$关于o_i运算的逆元.

积代数的单位元为$< e_{1i}, e_{2i}>$

设e_{1i} (θ_{1i}), e_{2i} (θ_{2i})分别为V_1与V_2中关于o_{1i}和o_{2i}运算的单位元，试证明$<e_{1i}, e_{2i}>$($< \theta_{1i}, \theta_{2i}>$)为$V$中关于$o_i$运算的单位元.

证明 设o_{1i}和o_{2i}运算是二元运算,

$\forall <x_1,y_1>,<x_2,y_2>\in V_1 \times V_2$,

$< x_1 , y_1 > o_i <e_{1i}, e_{2i}> = <x_1 o_{1i} e_{1i} , y_1 o_{2i} e_{2i} > = < x_1 , y_1 >$

$<e_{1i}, e_{2i}> o_i < x_1 , y_1 > = <e_{1i} o_{1i} x_1 , e_{2i} o_{2i} y_1> = < x_1 , y_1 >$

所以$<e_{1i}, e_{2i}>$是V的单位元.

如$<Z_5 \times Z_3, \oplus, \otimes>$中, $\oplus$运算的单位元是<0,0>, $\otimes$的单位元是<1,1>

积代数的性质（小结）

(1) 积代数能够保持因子代数的如下性质：

算律：交换律, 结合律, 幂等律, 分配律, 吸收律

特异元素：单位元, 零元, 幂等元, 可逆元素及其逆元

消去律不一定能够保持，反例 $V_1=\langle Z_2,\otimes\rangle, V_2=\langle Z_3,\otimes\rangle$，

$\theta=\langle 0,0\rangle$,如$\langle 0,1\rangle\otimes\langle 1,2\rangle=\langle 0,1\rangle\otimes\langle 2,2\rangle$，但$\langle 1,2\rangle\neq\langle 2,2\rangle$

(2) 积代数与因子代数是同类型的

若系统公理不含消去律，积代数与因子代数同种；

若系统公理含消去律，不保证积代数与因子代数同种.

(3) 积代数可以推广到有限多个同类型的代数系统

(4) 直积分解是研究代数结构的有效手段

(5) 笛卡尔积是构造同种离散结构的有效手段

作业

- 复习要点：

代数系统的构成要素

如何判断运算的封闭性

如何判断二元运算的性质及其特异元素

子代数与积代数的构成及其性质

- 作业

习题十五，14，16