2017 春

一．填空题

1．事件 A、B 相互独立，且 $P(B)=0.5, P(B-A)=0.2$ 则 $P(A-B)=$(　　　　)。

2．随机变量 X 服从标准正态分布。　则 $E[(Xe^{2X}]=$（　　　　　）。

3．设 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$；　$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，

则检验问题 $H_0:\sigma^2=1$;　$H_1:\sigma^2\neq 1$ 通常所用的统计量为（　　　　　）。

4．随机变量 X 、Y 的方差分别为 1 和 4；相关系数为 -0.5，则随机变量 $3X-Y$ 的方差为（　　　　）。

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，

记统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　，　　则 $D(Y)=$（　　　　　）。

6.设（X，Y）服从正态分布 $N(1,0;4,4;0)$，　则 $E(X^2Y^2)=$(　　　　　)。

二．单项选择题

1．设 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 分别为 X_1,X_2 的概率分布密度，则下列选项中一定为某一随机变量概率分布密度的是（　　　　）。

（A）$f_1(x)f_2(x)$；（B）$2f_1(x)-f_2(x)$；（C）$f_1(x)+f_2(x)$；（D）$\frac{1}{3}f_1(x)+\frac{2}{3}f_2(x)$

2．设 X_1,X_2 的概率分布列都为:$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，且 $Cov(X_1,X_2)=-\frac{1}{9}$

则概率 $P\{X_1^2+X_2^2=1\}=$（　　　　　　）。

(A)0；　　　(B)$\frac{1}{3}$；　　　(C)1；　　　(D)$\frac{2}{3}$。

3．随机变量 $X\sim b(3,p)$，$Y\sim b(2,p)$。如果 $P\{X\geq 1\}=\frac{19}{27}$

则 $P\{Y=1\}=$（　　　　）。

(A) $\dfrac{2}{9}$ ； (B) $\dfrac{1}{3}$ ； (C) $\dfrac{4}{9}$ ； (D) $\dfrac{5}{9}$ 。

4．设总体 X 服从 $N(0,\sigma^2)$， $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，

则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^3$ 依概率收敛于（　　　　）。

（A）0； （B）σ^2； （C） σ^3； （D）1。

5．总体 X 服从区间 $[1-\theta,\ \theta+1]$ 上的均匀分布，$\theta>0$ 为未知参数；

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本。

则下面选项中**不是统计量**的是（　　　　）。

(A) $\overline{X}+2$ ； （B）$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-D(X)$； （C） $n(\overline{X})^2$； （D）$\overline{X}+E(X)$

6. 一批产品共 10 件,其中 2 件次品,从中随机抽取 3 次,每次抽 1 件,抽后不放回,则第 3 次才抽到正品的概率为（　　　　）。

(A) $\dfrac{1}{45}$ ； (B) 0.2 ； (C) $\dfrac{7}{45}$ ； （D） 1。

三．计算题

（一）设 X 的分布列为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=0.5$；

在 $X=k$ 的条件下，Y 服从区间 $[0,\ k]$ 上的均匀分布（$k=1,2$），

试求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 和 Y 概率分布密度 $f_Y(y)$。

（二）设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}cxe^{-y}, & 0<x<1,0<y<+\infty,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

1.求常数 c 　　2. 求出 X 、Y 的边际分布密度

3,说明 X 、Y 是否独立，为什么？ 　4. 求 $E(X^2Y)$

（三）总体 X 的概率分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{(x-b)}{\theta}}, & x\ge b\\ 0，其它。\end{cases}\qquad \theta>0,\quad b\ 为实数$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体 X 的简单随机样本。

1．当$b = 0$时，求参数θ的矩估计$\widehat{\theta}$。

2. 当$\theta = 1$时，求参数b的极大似然估计$\widehat{b}$。

3. 当$\theta = 1$时，求出极大似然估计$\widehat{b}$的概率密度函数。

四．总体 X 服从$N(0,3^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{18}$为来自总体 X 的简单随机样本

记$Y = \dfrac{(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_9^2)}{(X_{10} + X_{11} + \cdots + X_{18})^2}$。证明：$Y$ 服从$F(9,1)$

2016 秋答案

一． 填空题

1． 0.3；2． $2e^2$；3． $(n-1)S^2$； 4． 19；5． $2n\sigma^4$；6． 20

二． 单选题

1-----6 $DDCABA$

三．（一）解：据题意

$$X=1\text{时：}P\{Y\le y|X=1\}=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

$$X=2\text{时：}P\{Y\le y|X=2\}=\begin{cases}0 & y<0\\ \dfrac{y}{2} & 0\le y<2\\ 1 & y\ge 2\end{cases}$$

$$P\{Y\le y\}=\sum_{i=1}^{2}P\{X=i\}P\{Y\le y|X=i\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \dfrac{3}{4}y & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4} & 1\le y<2\\ 1 & 2\le y\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4} & 0<y<1\\ \dfrac{1}{4} & 1<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（二）解

（1） $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

$c = 2 \quad f(x,y) = \begin{cases} 2xe^{-y}, & 0 < x < 1, 0 < y < +\infty, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$

（2）X 的边际分布密度 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 2x & 1 > x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

Y 的边际分布密度

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

（3）$\because \ f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 所以 X 、Y 独立，

（4） $E(X^2Y) = EX^2EY = \dfrac{1}{2}$

（三）

解： 1. 当 $b = 0$ 时，X 的分布函数

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, x \geq 0 & \theta > 0, \\ 0，\text{其它。} \end{cases}$

X 密度函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x \geq 0 & \theta > 0, \\ 0，\text{其它。} \end{cases}$

$EX = \theta \quad \therefore \quad \hat{\theta} = \overline{X}$ 为 θ 的矩估计

2. 当 $\theta = 1$ 时，X 的分布函数

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-b)}, x \geq b \\ 0，\text{其它。} \end{cases}$

X 密度函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-(x-b)}, x \geq b \\ 0，\text{其它。} \end{cases}$

似然函数 $L(b)=\begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + nb} & b \le \min(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ 0 & 其它 \end{cases}$

b 的极大似然估计 $\hat{b}=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

3. 当 $t=1$ 时，X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-(x-b)}, & x \ge b \\ 0, & 其它。 \end{cases}$$

$$\hat{b}=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$\hat{b}$ 的分布函数

$$F_{\hat{b}}(x)=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases} 1-e^{-n(x-b)}, & x \ge b \\ 0, & 其它。 \end{cases}$$

$\hat{b}$ 的概率密度函数 $f_{\hat{b}}(x)=\begin{cases} ne^{-n(x-b)} & x > b \\ 0 & 其它 \end{cases}$

四．证明： 略