① 当 $\varphi(a)=a$ 时，由于：

$$\begin{aligned}\varphi(c)\circ b&=\varphi(c)\circ\varphi(b) && (\varphi(b)=b)\\ &=\varphi(c\circ b) && (\varphi\ \text{是同态})\\ &=\varphi(b) && (c\circ b=b)\\ &=b && (\varphi(b)=b)\end{aligned}$$

从而 $\varphi(c)$ 不能等于 a (因为 $a\circ b=a\neq b$)。同样，由于：

$$\begin{aligned}a\circ\varphi(c)&=\varphi(a)\circ c && (\varphi(a)=a)\\ &=\varphi(a\circ c) && (\varphi\ \text{是同态})\\ &=\varphi(b) && (a\circ c=b)\\ &=b && (\varphi(b)=b)\end{aligned}$$

所以 $\varphi(c)$ 不能等于 b (因为 $a\circ b=a\neq b$)。

对于 $\varphi(d)$ 进行类似的讨论也可证明 $\varphi(d)$ 不能等于 a 或 b。

而由于 c 和 d 的运算表完全一致，又不属于 $\circ$ 运算的值域，因此对它们进行任何形式的置换都不影响结果。如此，我们就得到了 4 个满足 $\varphi(a)=a,\varphi(b)=b$ 的自同态：

$\varphi_1(a)=a,\varphi_1(b)=b,\varphi_1(c)=c,\varphi_1(d)=d$；

$\varphi_2(a)=a,\varphi_2(b)=b,\varphi_2(c)=d,\varphi_2(d)=c$；

$\varphi_3(a)=a,\varphi_3(b)=b,\varphi_3(c)=c,\varphi_3(d)=c$；

$\varphi_4(a)=a,\varphi_4(b)=b,\varphi_4(c)=d,\varphi_4(d)=d$；

② 当 $\varphi(a)=b$ 时，上面关于 $\varphi(c)$ 和 $\varphi(d)$ 不能等于 a 的论证依然成立，但关于 $\varphi(c)$ 和 $\varphi(d)$ 不能等于 b 的论证不再成立。这是因为 $\varphi(a)=b$，从而 $\varphi(a\circ c)=\varphi(a)\circ\varphi(c)=b\circ\varphi(c)$，即使 $\varphi(c)=b$ 也不会破坏 φ 同态的性质。

下面说明，只要 $\varphi(a)=\varphi(b)=b$，且 $\varphi(c)$ 和 $\varphi(d)$ 都不等于 a，则 φ 必是同态。

因为 $\varphi(a)=\varphi(b)=b$ 且 $\varphi(c)$ 和 $\varphi(d)$ 都不等于 a，从而 $a\notin\operatorname{ran}(\varphi)$。这样，唯一一组使 $\circ$ 运算结果不为 b 的运算数 a,b 就不会出现同态像中。从而得到：$\forall x,y\in A,\varphi(x)\circ\varphi(y)=b$。而由于 $\varphi(a)=\varphi(b)=b$，从而：

$\forall x,y\in A$，

$$\begin{aligned}\varphi(x\circ y)&=\begin{cases}\varphi(a), & \text{若 } x=a\wedge y=b\\ \varphi(b), & \text{其它}\end{cases} && (\circ\ \text{定义})\\ &=b && (\varphi(a)=\varphi(b)=b)\end{aligned}$$

这就证明了 $\forall x,y\in A,\varphi(x\circ y)=\varphi(x)\circ\varphi(y)$，从而说明 φ 是同态。

如此，我们就得到了 9 个满足 $\varphi(a)=\varphi(b)=b$ 的自同态：

$\varphi_5(a)=b,\varphi_5(b)=b,\varphi_5(c)=b,\varphi_5(d)=b$；

$\varphi_6(a)=b,\varphi_6(b)=b,\varphi_6(c)=b,\varphi_6(d)=c$；

$\varphi_7(a)=b,\varphi_7(b)=b,\varphi_7(c)=b,\varphi_7(d)=d$；

$\varphi_8(a)=b,\varphi_8(b)=b,\varphi_8(c)=c,\varphi_8(d)=b$；

$\varphi_9(a)=b,\varphi_9(b)=b,\varphi_9(c)=c,\varphi_9(d)=c$；

$\varphi_{10}(a)=b,\varphi_{10}(b)=b,\varphi_{10}(c)=c,\varphi_{10}(d)=d$；

$\varphi_{11}(a)=b,\varphi_{11}(b)=b,\varphi_{11}(c)=d,\varphi_{11}(d)=b$；

$\varphi_{12}(a)=b,\varphi_{12}(b)=b,\varphi_{12}(c)=d,\varphi_{12}(d)=c$；

$\varphi_{13}(a)=b,\varphi_{13}(b)=b,\varphi_{13}(c)=d,\varphi_{13}(d)=d$；

从前面的论证中可知，这些便是 V 上所有的自同态。 □