一．**填空题**（每小题 4 分，共 24 分，答案写在试题后的括号内）

1．已知 X 的分布列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$ 则 $P(X < 2 | X \neq 1) =$（　　　）。

2．随机变量 X 服从参数为1的泊松分布，则 $P\{X \geq \sqrt{D(X)}\} =$（　　　）。

3．在区间（0，1）上任取两个数，则两数之和小于0.5的概率为（　　　）。

4．设 X 服从 $N(\mu,2^2)$，；$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，

则检验问题 H_0：$\mu = 1$;　　H_1：$\mu \neq 1$ 通常所用的统计量（　　　）。

5．随机变量 X、Y 的方差分别为 1 和 9，相关系数为 $1/3$，则随机变量

$X - Y$ 的方差为（　　　）。

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 1)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，且 $D(X) = \sigma^2$

则 $D(X_1 + \overline{X}) =$（　　　）。

二．　**单项选择题**(每题 4 分,共 24 分,答案写在试题后的括号内)

1．设 $f_1(x)$ 为$[-1，3]$上均匀分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $N(1，\sigma^2)$ 的概率密度

若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 1 \\ bf_2(x), & x > 1 \end{cases}$ 为概率密度，则 a, b 应取（　　　）。

（A）$a = 1, b = 2$（B）$a = 1, b = 1$（C）$a = -1, b = 3$（D）$a = 2, b = 1$

2. 设X_1,X_2的分布列都为:$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，且$P\{|X_1X_2|=0\}=1$

则$P\left\{X_1^2+X_2^2=1\right\}=$（　　　　）。

(A)0；　　(B)0.5；　　(C)1；　　(D)0.25。

3. 随机变量X服从标准正态分布。则$E[(X-1)^2e^X]=$（　　）。

(A) $\sqrt{e}$；　(B) $2\sqrt{e}$；　(C) 1；　(D) 2。

4. 设总体X服$[0,6]$上的均匀分布，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，则当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于（　　）。

(A) 常数12；（B）常数3；（C）常数 9；（D）常数6。

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自标准正态总体的简单随机样本，$\overline{X}$和S^2为样本均值和样本方差，则（　　）

(A) $\overline{X}$服从标准正态分布；　　(B) $D(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=n$

(C) $\sqrt{n}\overline{X}$服从标准正态分布；　　(D) $D(S^2)=2(n-1)$

6. X和Y的相关系数为0.4，$U=2X+1, V=1-2Y$
则U和V的相关系数为（　　）
(A) 0.2；　(B) -0.8；　(C) -0.2；　(D) -0.4。

三. 计算题（46分, 解答写在答题纸上）

(一)（12分）设X的分布列为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=0.5$，Y服从标准正态分布，

X、Y相互独立；试求$Z=Y/X$的分布密度函数$f_z(z)$。

(二)（16分）设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & 0<x<1, \quad 0<y<2x, \\ 0, & \text{其它}。\end{cases}$$

1.求常数c　　2. 求出X、Y的边际分布密度

3. 说明X、Y是否独立，为什么？　4.求X、Y的协方差$Cov(X,Y)$

（三）（10 分）总体 X 概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$； 参数 $\lambda>0$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

1. 求参数 λ 的矩估计和极大似然估计。

2. 它们是否参数 λ 的相合估计？。

（四）（8 分）随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}3x^2, 0<x<1\\ 0，其它。\end{cases}$，$F(x)$ 为 X 的分布函

数 试求 $Y=F(X)$ 的概率密度函数和数学期望。

四．（6 分）总体 X 数学期望 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2>0$ ，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自

总体 X 的简单随机样本；　　证明：在数学期望 μ 的所有线性无偏估计

$\hat{\mu}=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$ （其中 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 为常数）中，

$\overline{X}$ 方差最小。

2014 秋答案

一．填空题

1． $\frac{1}{4}$；2． $1-e^{-1}$；3． $\frac{1}{8}$；4. $\frac{(\overline{X}-1)}{2}\sqrt{n}$； 5．8；6. $\frac{n+3}{n}\sigma^2$

二．单选题

1-----6 *BBAACD*

三.

（一）解：记 Z 得分布函数为 $F_Z(z)$

$$则 F_Z(z)=P\left\{\frac{Y}{X}\le z\right\}=\sum_{i=1}^{2}P\left\{X=i,\frac{Y}{x}\le z\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{2}P\{X=i\}P\{Y\le iz\}=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le 2z\}$$

$$=\frac{1}{2}\Phi(z)+\frac{1}{2}\Phi(2z)$$

$$f_z(z)=\frac{1}{2}[\phi(x)+2\phi(2z)]$$

（二）解

（1） $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$

$\therefore c=1$

（2）X 的边际分布密度 $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}2x & 1>x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

Y 的边际分布密度

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}1-\frac{y}{2} & 2>y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（3）$\because$ $p(x,y)\neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、Y 不独立，

（4） $E(XY)=\int_0^1\int_o^{2x} xydxdy=\dfrac{1}{2}$ $E(X)=\int_0^1\int_o^{2x} xdxdy=\dfrac{2}{3}$

$E(Y)=\int_0^1\int_o^{2x} ydxdy=\dfrac{2}{3}$ $Cov(X,Y)=\dfrac{1}{18}$

（三）

解： 1. X 服从参数为λ的指数分布

计算得$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，令$\dfrac{1}{\lambda}=\overline{X}$ 所以λ的 矩估计 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$

.似然函数$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$

$\text{Ln}L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i)$

令$\dfrac{d\ln L}{d\lambda}=0$ 解得$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$ 时$L(\theta)$达到最大值

所以$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$也为$\lambda$的最大似然估计

它们都是λ的相合估计。

（四）解：（过程略）X 的分布函数$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

$Y=F(X)$的概率密度函数$p(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$EY=\dfrac{1}{2}$

四．证明： 略