树

- **基本概念**
  - 树:不含简单回路的连通图
  - 森林:每个连通分支都是树的无向图;
  - 树叶v:d(v)=1;
  - 分枝点v: d(v)>=2;
  - 平凡树: 平凡图,既无树叶,也无分支点;
- **无向树的基本概念**
  - 设G=<V,E>为n阶m条边的无向图
  - (1) G是树(连通无回路);
  - (2) G中任二顶点之间存在唯一路径;
  - (3) G中任二顶点之间存在唯一路径;
  - (4) G连通且m=n-1;
  - (5) G连通且每条边均为桥;
  - (6) G无圈,但在任二不同顶点之间增加新边,所得图含唯一的一个圈;
  - 证明显然:1->2->3...->6
  - 无向树的性质
    - 定理9.2 任一n阶非平凡无向树至少有两片树叶.
      - **证** 设$T=<V,E>$是无向树，其中$|V|=n$，$|E|=m$
        设T有x片树叶,则剩余的$n-x$个结点的度均大于等于2,
        由握手定理及定理9.1可知,
        $$2m=2(n-1)=\sum d(v_i)\ge x+2(n-x)$$
        解上式可得 $x\ge 2$.
      - 习题九:6
        - 例 设G为n(n≥5)阶简单图,证明G或G的补图中必含圈.
        - **证** 设简单图G和其补图的边数分别为m和m',则
          $m+m'=n(n-1)/2$
          根据鸽巢原理,G与其补图必有一个边数$\ge n(n-1)/4$,不妨设G的边数$m\ge n(n-1)/4$,下面证G中必含有圈.
          假设G中没有圈,且有$w(w\ge 1)$个连通分支,则每个连通分支都是树,$m_i=n_i-1$，$i=1,\dots,w$，m_i,n_i分别为第i个连通分支的边数与阶数,所以有 $m=\sum_{i=1}^{w}m_i=\sum_{i=1}^{w}n_i-w\le n-1$
          解得不等式 $\frac{n(n-1)}{4}\le m\le n-1$ 得 $1\le n\le 4$，与$n\ge 5$矛盾.
- **生成树**
  - 生成树T:T是G的生成子图,且T为树
    - **树枝**: $e\in E(G)$且$e\in E(T)$
    - **弦**: $e\in E(G)$且$e\notin E(T)$
    - prim算法(破圈法)
    - 克鲁斯卡尔算法
  - 定理9.4: 设T是无向连通图G中一棵生成树,e是T的 任意一条弦,不同的弦对应的圈是不同的.
  - 基本回路
    - **定义9.3** 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设$e_1', e_2', \dots, e'_{m-n+1}$为$T$的弦. 设$C_r$为$T$添加弦$e_r'$产生的$G$中惟一的圈(由$e_r'$和树枝组成)，称$C_r$为对应弦$e_r'$的**基本回路**或**基本圈**，$r=1, 2, \dots, m-n+1$. 称$\{C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}\}$为对应$T$的**基本回路系统**,称$m-n+1$为G的**圈秩**,记作$\xi(G)$.
      - 基本回路的秩为 m-n+1
  - 基本割集
    - **定义9.4** 设T是n阶连通图G的一棵生成树，$e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$为T的树枝，S_{e_i}是G的只含树枝e_i，其他边都是弦的割集，称S_{e_i}为生成树T由树枝e_i生成的**基本割集**，$i=1, 2, \dots, n-1$. 称$\{S_1, S_2, \dots, S_{n-1}\}$为对应$T$的**基本割集系统**.称$n-1$为G的割集秩,记为$\eta(G)$.
      - 基本割集的秩为 n-1
    - **求基本割集的算法:** 设e为生成树T的树枝，$T-e$由两棵子树T_1与T_2组成，令$S_e=\{e|e\in E(G)$且e的两个端点分别属于T_1与$T_2\}$，则S_e为e对应的基本割集.
      - $S_e=\{e|e\in E(G)$且e的两个端点分别属于$V(T_1)$和$V(T_2)\}$.
  - 生成树的个数
    - G是n阶无向连通标定图(V={v1, v2, ..., vn}),则对于G的任意非环边均有
    - t(G)= t(G-e)+ t(G\e)
      - $\tau(K_n)=n^{n-2}(n\ge 2)$,其中$K_n$为$n$阶标定完全图.
- **环路空间**
  - **环路: G中圈或若干个边不重的圈的并**
  - **规定:∅是环路**
  - **$C_环$:G中所有环路的集合**
  - **定理9.10** 设C_1,C_2为无向图G的任意两个回路,则环和$C_1\oplus C_2$为G中环路.
    - **定理9.11** 设G为无向连通图,T是G的任意一棵生成树,则G中任一回路或为T的基本回路或为若干个基本回路的环和.
      - 可以理解成 00->8->0
  - 定理 9.9,环路系统就是 $C_{i_2},\dots,C_{i_r}\in C_基$,必有它们对应的弦$e_{i_1}', e_{i_2}',\dots, e_{i_r}'$均在$C_{i_1}\oplus C_{i_2}\oplus \dots \oplus C_{i_r}$中,其中⊕为图之间的环和运算.
- **断集空间**
  - **断集:** G=<V,E>为无向图,$V_1\subset V$且$V_1\ne\varnothing$,记$\overline{V}_1=V-V_1$, $\{(u,v)|u\in V_1\wedge v\in \overline{V}_1\}$为G中的一个断集, 记作$E(V_1\times\overline{V}_1)$,简记$(V_1,\overline{V}_1)$.
    - 割集是断集,断集不一定是割集
    - **定理9.14** G是n阶m条边的无向连通图,T是G的生成树,$S_基$是T对应的基本割集系统,则对于任意的$S_{i_1}, S_{i_2},\dots, S_{i_k}\in S_基$,必有它们对应的树枝$e_{i_1}', e_{i_2}',\dots, e_{i_k}'$均在$S_i\oplus S_{i_2}\oplus \dots \oplus S_{i_k}$中,其中⊕为对称差运算.
    - **证明** 不同的基本割集对应的树枝边不同,得证.
    - **定理9.15** 设S_1,S_2为无向图G的两个断集,则$S_1\oplus S_2$为G中断集,其中⊕为对称差运算.
    - **证明** 若$S_1=S_2$,则$S_1\oplus S_2=\varnothing$,显然成立.
      - **定理9.16** 设G为无向连通图,T是G的任意一棵生成树,则G中任一断集或为T的基本割集或为若干个基本割集的对称差.
- **根树**
  - ■ **定理14.13**: 设正则$r(\ge 2)$叉树T有i个分支点和t个树叶, 则$(r-1)i=t-1$.
    证明:正则r叉树的每个分枝结点的出度均是r,树叶的出度为零,除了根结点,其余每个结点的入度都为1,根据有向图的握手原理得
    $m=t+i-1=ri$
  - 哈夫曼编码--会了