$x \in J$。

(3) 由于 $\varphi$ 是同态，所以有 $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b) = 0 \vee 0 = 0$，$a \vee b \in J$。 □

**19.36**

(1) 对任意同态 $\varphi : B_1 \to B_2$，由教材定理 19.24(1) 应有 $\varphi(0) = 0$，$\varphi(1) = 1$。从而必有 $\varphi(B_1) = B_2$。

易见，若 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ (或 $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$)，则有 $\varphi(a) \vee \varphi(b) = 0 \neq 1 = \varphi(a \vee b)$ (或 $\varphi(a) \wedge \varphi(b) = 1 \neq 0 = \varphi(a \wedge b)$)，从而 $\varphi$ 不是同态。而当 $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ 时，$\varphi$ 是同态。

因此，从 $B_1$ 到 $B_2$ 的同态只有 $\varphi_1 = \{\langle 0,0\rangle, \langle a,0\rangle, \langle b,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ 和 $\varphi_2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$。

(2) 对上题中的 $\varphi_1$，有 $B_1/\!\sim\, = \langle\{\{0,a\},\{b,1\}\}, \wedge, \vee, {}^-, \{0,a\}, \{b,1\}\rangle$。运算表如下：

| $\wedge$ | $\{0,a\}$ | $\{b,1\}$ |
|---|---|---|
| $\{0,a\}$ | $\{0,a\}$ | $\{0,a\}$ |
| $\{b,1\}$ | $\{0,a\}$ | $\{b,1\}$ |

| $\vee$ | $\{0,a\}$ | $\{b,1\}$ |
|---|---|---|
| $\{0,a\}$ | $\{0,a\}$ | $\{b,1\}$ |
| $\{b,1\}$ | $\{b,1\}$ | $\{b,1\}$ |

| $x$ | $\bar{x}$ |
|---|---|
| $\{0,a\}$ | $\{b,1\}$ |
| $\{b,1\}$ | $\{0,a\}$ |

对于 $\varphi_2$，只需将上述集合中的 $a$，$b$ 对换即可。

**19.37** 注意到：

**引理 19.3** 设 $A, B$ 是两个不交的集合，则对任意 $X_1, X_2 \subseteq A$，$Y_1, Y_2 \subseteq B$，有

$$X_1 \cup Y_1 \subseteq X_2 \cup Y_2 \iff X_1 \subseteq X_2 \text{ 且 } Y_1 \subseteq Y_2.$$

**证明:** 充分性显然。下面证必要性。

若 $X_1 \cup Y_1 \subseteq X_2 \cup Y_2$，则对任意 $x \in X_1$，有 $x \in X_1 \cup Y_1 \subseteq X_2 \cup Y_2$。由 $x \in A$ 和 $A \cap B = \varnothing$ 可知，$x \notin Y_2 \subseteq B$。从而必有 $x \in X_2$。这就证明了 $X_1 \subseteq X_2$。同理可证 $Y_1 \subseteq Y_2$。 □

再证原题。

**证明:** 由教材例 19.14 和教材定理 15.6 可知，$\langle \mathcal{P}(A \cup B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, A \cup B\rangle$ 和 $\langle \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \wedge, \vee, -, \langle\varnothing,\varnothing\rangle, \langle A, B\rangle\rangle$ 都是布尔代数。

定义 $\varphi : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A \cup B)$，$\forall \langle X, Y\rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$，令 $\varphi(\langle X, Y\rangle) = X \cup Y$。$\varphi$ 显然是映射，且为满射。

由引理 19.3 可知，$\varphi$ 是单射，从而是双射。

由引理 19.3 和教材定理 19.8 可知，$\varphi$ 是 $\langle \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \wedge, \vee\rangle$ 到 $\langle \mathcal{P}(A \cup B), \cap, \cup\rangle$ 的同构。也即，对任意 $\langle X_1, Y_1\rangle, \langle X_2, Y_2\rangle \in \mathcal{P}(A \cup B)$，有 $\varphi(\langle X_1, Y_1\rangle \wedge \langle X_2, Y_2\rangle) = \varphi(\langle X_1, Y_1\rangle) \cap \varphi(\langle X_2, Y_2\rangle)$ 和 $\varphi(\langle X_1, Y_1\rangle \vee \langle X_2, Y_2\rangle) = \varphi(\langle X_1, Y_1\rangle) \cup \varphi(\langle X_2, Y_2\rangle)$。

$\forall \langle X, Y\rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$，有

$$
\begin{aligned}
& \varphi(-\langle X, Y\rangle) \\
=& \varphi(\langle A - X, B - Y\rangle) && (- \text{ 运算定义}) \\
=& (A - X) \cup (B - Y) && (\varphi \text{ 定义}) \\
=& (A \cap \sim X) \cup (B \cap \sim Y) && (\text{补交转换律}) \\
=& ((A \cap \sim X) \cup B) \cap ((A \cap \sim X) \cup \sim Y) && (\text{分配律}) \\
=& (A \cup B) \cap (\sim X \cup B) \cap (A \cup \sim Y) \cap (\sim X \cup \sim Y) && (\text{分配律}) \\
=& (A \cup B) \cap \sim X \cap \sim Y \cap (\sim X \cup \sim Y) && (B \subseteq \sim X\text{、}A \subseteq \sim Y\text{、习题 1.21 结论}) \\
=& (A \cup B) \cap \sim X \cap \sim Y && (\sim Y \subseteq \sim X \cup \sim Y\text{、习题 1.21 结论})
\end{aligned}
$$