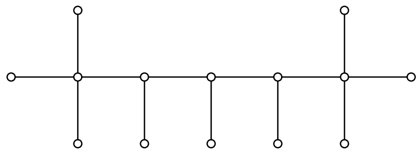

$4-3-3-3-4$

9.3 设 T 有 n_1 片树叶，则由树的性质和图论基本定理有：

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i - 2 = 2(n-1) = 2m = \sum_{i=1}^{k} i \cdot n_i$$

解得：

$$n_1 = \sum_{i=2}^{k} (i-2)n_i + 2$$

注意到，当 $i = 2$ 时，$(i-2)n_i = 0$，因此，上式可以改写成

$$n_1 = \sum_{i=3}^{k} (i-2)n_i + 2$$

这一公式说明，无向树中树叶的个数由 3 度及 3 度以上顶点的个数唯一确定，与树的结构和 2 度顶点的个数无关。

9.4

证明： 对 k 作归纳。

当 $k = 1$ 时，T 即为 K_2。$\delta(G) \geq 1$，从而 G 中有边，任取边 $e \in E(G)$，则由 $\{e\}$ 导出的子图 $G[\{e\}]$ 即为与 T 同构的子图。命题成立。

设 $k = t (t \geq 1)$ 时，命题成立。当 $k = t + 1$ 时，设 $v \in V(T)$ 是 T 中某片树叶，且 $u \in V(T)$ 为 T 中(唯一)与 v 相邻的顶点。令 $T' = T - v$。由归纳假设，G 中存在与 T' 同构的子图 H'。设同构函数为 $\overline{\varphi} : V(T') \to V(H')$，并记 $u' = \overline{\varphi}(u)$。注意到，$u'$ 在 $V(G) - V(H')$ 中必然还有邻接点(若不然，则 u' 的所有邻接点都在 $V(H')$ 中，从而由 $u' \in V(H')$ 和 H' 是简单图可知，$d(u') \leq |V(H')| - 1 = t < t + 1 = \delta(G)$，矛盾)，设 $v' \in V(G) - V(H')$ 就是一个与 u' 相邻且不在 $V(H')$ 中的顶点。

令 $H = \langle V(H') \cup \{v'\}, E(H') \cup \{(u', v')\}\rangle$，取 $\varphi : V(T) \to V(H)$，$\forall x \in V(T)$，

$$\varphi(x) = \begin{cases} \overline{\varphi}(x), & \text{若 } x \in V(T') \\ v', & \text{若 } x = v \end{cases}$$

易见，φ 是从 T 到 H 的同构。从而当 $k = t + 1$ 时，命题同样成立。 □

9.5

证明： T_3 中显然无简单回路 (否则这一回路也将出现在 T 中，这与 T 是树矛盾)。下面只需证 T_3 是连通的。对任意 $u, v \in V(T_3)$，有 $u, v \in V(T_1)$ 和 $u, v \in V(T_2)$，由于 T_1 和 T_2 都是树，所以在中 T_1 和 T_2 中分别有唯一的路径 Γ_1 和 Γ_2 连接 u, v。注意到，Γ_1 和 Γ_2 都在 T 中，而 T 也是树，由 T 中路径的唯一性可知，$\Gamma_1 = \Gamma_2 \subseteq T_1 \cap T_2$。从而 $\Gamma_1 \subseteq T_3$。这就是说，u, v 在 T_3 中也是连通的。由 u, v 的任意性可知，T_3 是连通的，从而是树。 □

9.6

证明： 反设 G 和 $\overline{G}$ 中都无圈，则由引理 7.5 有 $|E(G)| = n - p(G) \leq n - 1$ 和 $|E(\overline{G})| = n - p(\overline{G}) \leq n - 1$。从而有 $\dfrac{n(n-1)}{2} = |E(K_n)| = |E(G \cup \overline{G})| \leq 2n - 2$。即 $n^2 - 5n + 4 \leq 0$，解得 $1 \leq n \leq 4$。与题设 $n \geq 5$ 矛盾。 □