第五章 线性方程组的迭代解法

6.3 平方根法
6.4 误差分析

平方根法

- 平方根法
- 改进的平方根法
- 一维压缩存储

平方根法

定理6：（对称正定矩阵的三角分解）

如果A为对称正定矩阵，则存在一个实的非奇异下三角矩阵，使$A=LL^T$，且当限定的对角元素为正时，这种分解是唯一的。

$$
\begin{tikzcd}
\text{设 } A=LU \arrow[r, "A^T=A"] & U^T L^T = LU \arrow[d, "LU\text{ 分解唯一}"] \\
\boxed{A=LL^T} & U=L^T \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

用平方根法解线性代数方程组的算法

（1）对矩阵A进行三角分解，即$A=LL^T$，由矩阵乘法：

对于 $i=1,2,\ldots,n$ 计算

$$l_{ii}=\left(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2\right)^{1/2}$$

$$l_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}l_{jk}\right)\Big/l_{jj} \qquad j=1,2,\cdots,i-1$$

用平方根法解线性代数方程组的算法

（2）求解下三角形方程组

$$y_i = \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \right) \Big/ l_{ii}$$

（3）求解$\boldsymbol{L^T X = y}$

$$x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k \right) \Big/ l_{ii} \qquad (i = n, n-1, \cdots, 1)$$

改进的平方根法

定理 如果n阶对称矩阵A的所有顺序主子式均不等于零，则矩阵A存在唯一的分解式$A=LDR$其中L和R分别是n阶单位下三角阵和单位上三角阵，D是n阶对角元素的不为零的对角阵，上述分解也称为A的LDR分解。

设 $A=LDR$ $\xrightarrow{A^T=A}$ $R^TDL^T=LDR$

$\Downarrow$ LDR 分解唯一

$R=L^T$ $\Longrightarrow$ $\boxed{A=LDL^T}$

改进的平方根法

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & l_{21} & l_{31}\cdots l_{n1} \\ & 1 & l_{32}\cdots l_{n2} \\ & & \ddots \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}d_{11} & & \\ s_{21} & d_{22} & \\ \vdots & & \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots d_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & l_{21}\cdots l_{n1} & \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

其中 $s_{ik}=l_{ik}d_{kk} \qquad k<i$

改进平方根法解对称正定方程组的算法

$$
\begin{cases}
d_{11} = a_{11} \\
\text{对于} i = 2, 3, \cdots, n \\
s_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{ik} l_{jk} \\
l_{ij} = s_{ij} / d_{jj} \\
d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik} l_{ik}
\end{cases}
$$

改进平方根法解对称正定方程组的算法

令$L^T X = y$，先解下三角形方程组$LDY = b$得

$$y_i = \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} l_{ik} y_k \right) \Big/ d_{ii} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

解上三角形方程组$L^T X = Y$得

$$x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik} x_k \right) \qquad (i = n, n-1, \cdots, 2, 1)$$

一维压缩存储

在编写乔累斯基程序时，考虑到系数矩阵 **A** 的对称性，只要将其下三角部分

$$
\begin{array}{llll}
a_{11} & & & \\
a_{21} & a_{22} & & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{array}
$$

逐行存放于一维数组 **A^［1：m］**中.

方程组的病态

误差分析

误差分析

误差分析

误差分析

条件数的性质

ⅰ） **cond (A)≥1**

ⅱ） **cond (*k*A)= cond (A)** ***k*** **为非零常数**

ⅲ）若 $\|A\| = 1$ ， 则 $\mathrm{cond}(A) = \|A^{-1}\|$

误差分析

精度分析

精度分析