运算不满足结合律。

由于 $x*x=|x-x|=0$，当 $x\neq 0$ 时，$x*x\neq x$，所以运算不满足幂等律。

由于对所有 $x,y\in A$，若 $x<0$，则有 $0\leq x*y\neq x$，从而 $\langle A,*\rangle$ 没有单位元。

(3) 由于 n 的倍数的乘积仍是 k 的倍数，所以 $A=n\mathbb{Z}$ 对 $*$ 运算封闭。从而 $\langle A,*\rangle$ 是代数系统。

由乘法性质知，$*$ 运算满足交换律和结合律，不满足幂等律。

当 $n=1$ 时，A 中有单位元 1，1 和 -1 $n\neq 1$ 时，无单位元。

(4) 由对称差的性质可知，A 对 $*$ 运算封闭。从而 $\langle A,*\rangle$ 是代数系统。

由对称差的性质知，运算满足交换律、结合律。

对任意 $x\in A$，有 $x*x=x\oplus x=\varnothing$，当 $x\neq\varnothing$ 时，$x*x\neq x$，所以运算不满足幂等律。

显然 $\varnothing$ 是单位元，且所有元素都是自身的逆元。

(5) 首先证明封闭性。

若 R_1,R_2 是两个等价关系，则 $R_1\cap R_2$ 显然是自反的(因为对任意 $x\in B$，都有 $\langle x,x\rangle\in R_1,\langle x,x\rangle\in R_2$，所以有 $\langle x,x\rangle\in R_1\cap R_2$)。对任意 $x,y,z\in B$，若 $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R_1\cap R_1$，则由 R_1,R_2 的传递性知，$\langle x,z\rangle\in R_1,\langle x,z\rangle\in R_2$，从而有 $\langle x,z\rangle\in R_1\cap R_2$，$R_1\cap R_2$ 是传递的。对任意 $x,y\in B$，若 $\langle x,y\rangle\in R_1\cap R_2$，则由 R_1,R_2 的对称性知，$\langle y,x\rangle\in R_1,\langle y,x\rangle\in R_2$，从而 $\langle y,x\rangle\in R_1\cap R_2$，$R_1\cap R_2$ 是对称的。这就证明了对证明 B 上的等价关系 $R_1,R_2\in A$，有 $R_1\cap R_2\in A$。从而 $\langle A,*\rangle$ 是代数系统。

由集合交的性质知，$*$ 运算满足交换律、结合律和幂等律。

B 上的全域关系 E_B 是单位元。除 E_B 外，其它元素无逆元。

7. 因为 $\langle\mathbb{Z}_{12},\oplus\rangle$ 是循环群，面循环群的子群都是 $\langle a^n\rangle$ 的形式。所以 G 的子群为：

$H_1=\langle 0\rangle=\{0\}$；

$H_2=\langle 6\rangle=\{0,6\}$；

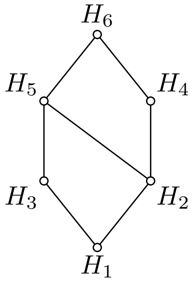
$H_3=\langle 4\rangle=\{0,4,8\}$；

$H_4=\langle 3\rangle=\{0,3,6,9\}$；

$H_5=\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,10\}$；

$H_6=\langle 1\rangle=G$；

子群格如下：



易于验证，$L(G)$ 中没有与五角格或钻石格同构的子格，所以 $L(G)$ 是模格，也是分配格。

由于 H_2 和 H_5 没有补元，所以 $L(G)$ 不是有补格，从而不是布尔代数。

8.

证明： 对任意 $g\in G,h\in N$，有

$$\begin{aligned}
f(ghg^{-1}) &= f(g)f(h)f(g)^{-1} && (f\text{ 是同态})\\
&= f(g)f(g)^{-1}f(h) && (G_2\text{ 是交换群})\\
&= f(h) && (f(g)f(g)^{-1}=e_2)
\end{aligned}$$