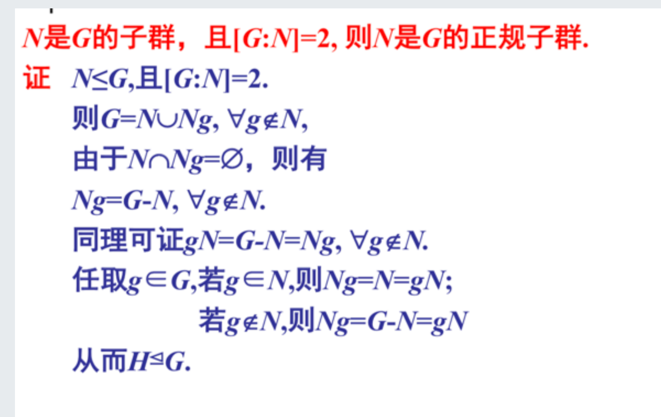
正规子群与商群

- 正规子群：$H \leq G$，且 $\forall a \in G$，$aH=Ha$. 记为 $H \trianglelefteq G$.
  - 判定定理：$N \leq G$, 则下述条件等价
    - (1) N 是 G 的正规子群
    - (2) $\forall g \in G$, $gNg^{-1}=N$
    - (3) $\forall g \in G$, $\forall n \in N$, $gng^{-1} \in N$
  - [G:N] –>子群N的阶数
    - 判定方法
    - (1) 判定定理
    - (2) $|N|=t$, N 是 G 的唯一 t 阶子群
    - (3) 指数为2 的子群



N是G的子群，且$[G:N]=2$, 则N是G的正规子群.

证 $N \leq G$,且$[G:N]=2$.

则$G=N \cup Ng$, $\forall g \notin N$,

由于$N \cap Ng=\varnothing$，则有

$Ng=G-N$, $\forall g \notin N$.

同理可证$gN=G-N=Ng$, $\forall g \notin N$.

任取$g \in G$,若$g \in N$,则$Ng=N=gN$;

若$g \notin N$,则$Ng=G-N=gN$

从而$H \trianglelefteq G$.

- 商群
  - 商群 $G/H=\{Ha \mid a \in G\}$, $(Ha)\circ(Hb)=Hab$ 说明：
  - 良定义性质：
  - $Ha=Hx$, $Hb=Hy \Rightarrow Hab=Hxy$ 商群 G/H 就是商代数
  - $aRb \Leftrightarrow Ha=Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$
  - aRb, $cRd \Rightarrow ac\ R\ bd$
  - $aRb \Rightarrow a^{-1}Rb^{-1}$
  - 性质：$|G/H|=[G:H]$，商群的阶是$|G|$的因子
  - 保持群 G 的性质：交换性，循环性等, 单位元
- 群的同态
  - 定义 f 为 G_1 到 G_2 的同态当且仅当 $f:G_1 \to G_2$, 且 $\forall x,y \in G_1$，$f(xy)=f(x)f(y)$
    - 实例: (1) 整数加群$<Z,+>$的自同态：$f_c(x)=cx$，c 为给定整数
    - (2) 模n 加群$<Z_n,\oplus>$的自同态：$f_p(x)=(px)\bmod n$, $p=0,1,\ldots,n-1$
    - (3) $G_1=<Z,+>$, $G_2=<Z_n,\oplus>$, G_1 到 G_2 的满同态 $f:Z \to Z_n$, $f(x)=(x)\bmod n$
  - 将群看成代数系统$<G,\circ,^{-1},e>$，则同态f满足：$f(e_1)=e_2$，$f(x^{-1})=f(x)^{-1}$。