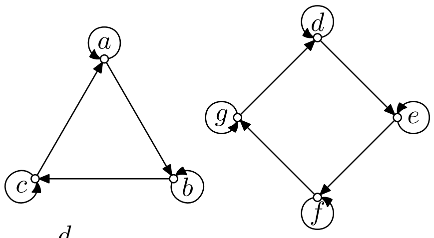
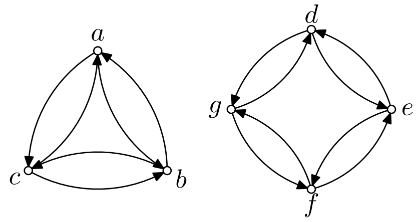
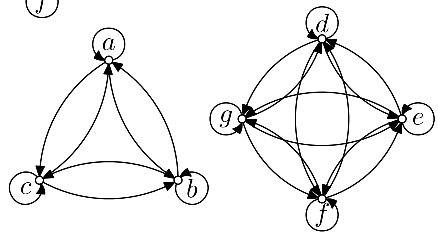
2.31



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

2.32

证明: 由 $A = I \cdot A \cdot I$ 可得三种关系的自反性。

分别由 $B = P \cdot A \cdot Q \to A = P^{-1} \cdot B \cdot Q^{-1}$、$B = P \cdot A \cdot P^{-1} \to A = P^{-1} \cdot B \cdot (P^{-1})^{-1}$ 和 $B = P \cdot A \cdot P^T \to A = P^{-1} \cdot B \cdot (P^T)^{-1} = P^{-1} \cdot B \cdot (P^{-1})^T$，得三种关系的对称性。

再由 $B = P_1 \cdot A \cdot Q_1 \wedge C = P_2 \cdot B \cdot Q_2 \to C = P_2 \cdot P_1 \cdot A \cdot Q_1 \cdot Q_2$、$B = P \cdot A \cdot P^{-1} \wedge C = Q \cdot B \cdot Q^{-1} \to C = Q \cdot P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot Q^{-1} = Q \cdot P \cdot A \cdot (Q \cdot P)^{-1}$ 和 $B = P \cdot A \cdot P^T \wedge C = Q \cdot B \cdot Q^T \to C = Q \cdot P \cdot A \cdot P^T \cdot Q^T = Q \cdot P \cdot A \cdot (Q \cdot P)^T$，得三种关系的传递性。

综上所述，三种关系皆为等价关系。 □

2.33

证明: 自反性。对任意 $a + bi \in \mathbb{C}^*$，由 a 是实数和 $a \neq 0$ 得：$a^2 > 0$。从而有 $\langle a + bi, a + bi \rangle \in R$。

对称性。对任意 $\langle a + bi, c + di \rangle \in R$，由定义得：$a + bi \in \mathbb{C}^* \wedge c + di \in \mathbb{C}^* \wedge ac > 0$，由逻辑与运算交换律和实数乘法交换律得：$c + di \in \mathbb{C}^* \wedge a + bi \in \mathbb{C}^* \wedge ca > 0$，于是得 $\langle c + di, a + bi \rangle \in R$。

传递性。对任意 $\langle a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i \rangle, \langle a_2 + b_2 i, a_3 + b_3 i \rangle \in R$，推得 $a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}^* \wedge a_3 + b_3 i \in \mathbb{C}^* \wedge a_1 a_2 > 0 \wedge a_2 a_3 > 0$。由乘法性质知，$ab > 0 \Leftrightarrow \mathrm{sgn}(a) = \mathrm{sgn}(b)$，[4] 于是有：

$$
\begin{aligned}
& a_1 a_2 > 0 \wedge a_2 a_3 \\
\iff & \mathrm{sgn}(a_1) = \mathrm{sgn}(a_2) \wedge \mathrm{sgn}(a_2) = \mathrm{sgn}(a_3) && \text{(乘法性质)} \\
\implies & \mathrm{sgn}(a_1) = \mathrm{sgn}(a_3) && \text{(等号传递性)} \\
\iff & a_1 a_3 > 0 && \text{(乘法性质)}
\end{aligned}
$$

故有 $\langle a_1 + b_1 i, a_3 + b_3 i \rangle \in R$。

综合得，R 是等值关系。 □

$\mathbb{C}^*/R = \{\{a + bi \mid a + bi \in \mathbb{C}^* \wedge a > 0\}, \{a + bi \mid a + bi \in \mathbb{C}^* \wedge a < 0\}\}$；

R 可以看作复平面内一切与 y 轴没有公共点的有向线段的集合。$\mathbb{C}^*/R$ 的性质则说明：一个有向线段与 y 轴没有公共点当且仅当线段的两个端点皆在 y 轴的同一侧。

2.34

(1) 不是。

[4] sgn 是"符号函数" (signum)，定义为 $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$。