第9章习题讲解

中国海洋大学

计算机系

习题九:2

- 2.[分析]利用树的等价定义及握手定理

解: 根据$m=n-1$及握手定理可知,

$$2(n-1)=9+3\times3+(n-3-9)\times4$$

解得 $n=14$

因此4度结点为14-3-9=2.

T的度数序列是(1,1,1,1,1,1,1,1,1,3,3,3,4,4)

14阶非同构的无向树:

(1) 直径为6的非树叶顶点的排列有6种

(2) 直径为5的非同构树有7种.

习题九:3

3.[分析]握手定理

解 设T有x片树叶,

$$2m=2n-2=2(x+\sum\nolimits^{k}_{i=2}n_i)-2=\sum\nolimits^{k}_{i=2}in_i+x$$

$$x=\sum\nolimits^{k}_{i=3}(i-2)n_i+2$$

习题九:5

证明 因为T是树，无圈，而T_3是T的子图，显然T_3也无圈，下面只需证明T_3是连通的。

$\forall u,v\in T_3$,那么$u,v\in T_1$, $u,v\in T_2$, 因为T_1是树，u和v之间在T_1中存在唯一路径P(u,v),又T和T_2均为树，所以u和v在T和T_2中也存在唯一路径,T_2和T_3都是T的子图，显然P(u,v)必在T_3中，因此u与v连通，由于u和v的任意性可知，T_3是连通的。

习题九：7

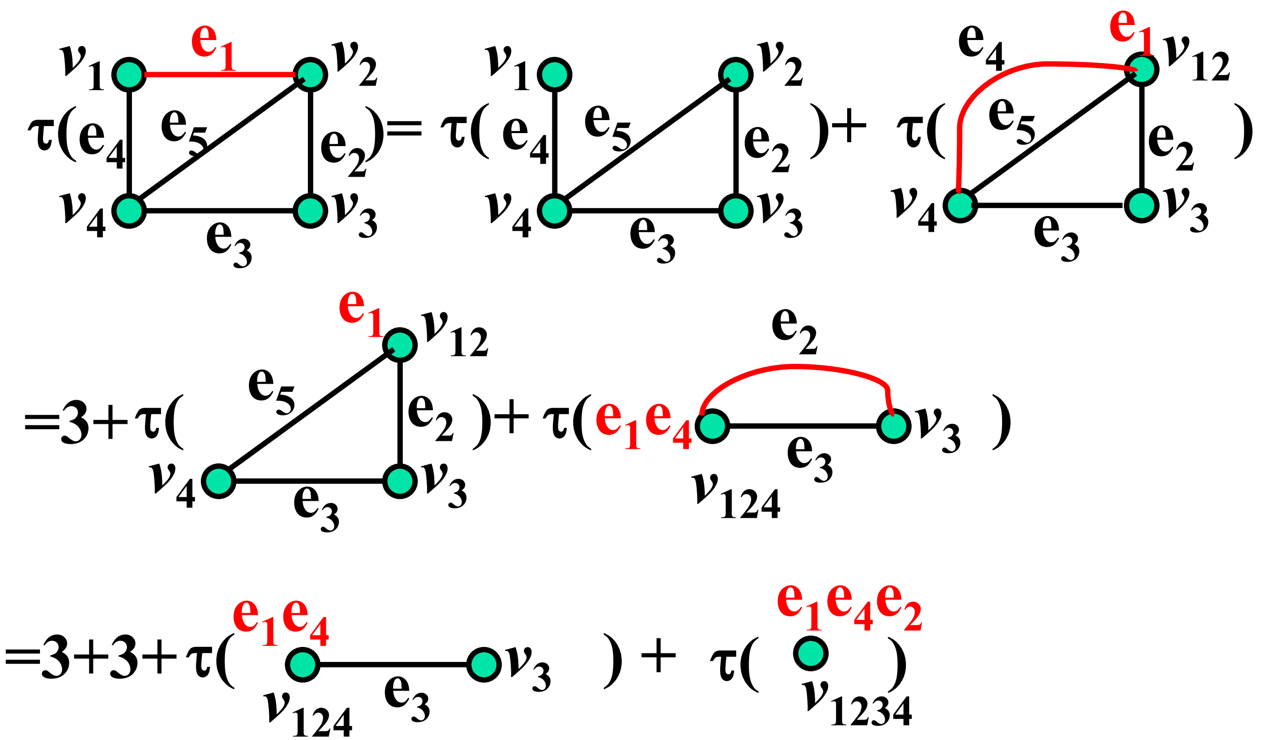
证明：因为G为*k*个连通分支的森林，即每个连通分支G_i均是一棵树，故而有$m_i=n_i-1$，

$$m=\sum_{i=1}^{k}m_i=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=\sum_{i=1}^{k}n_i-k=n-k$$

习题九:9

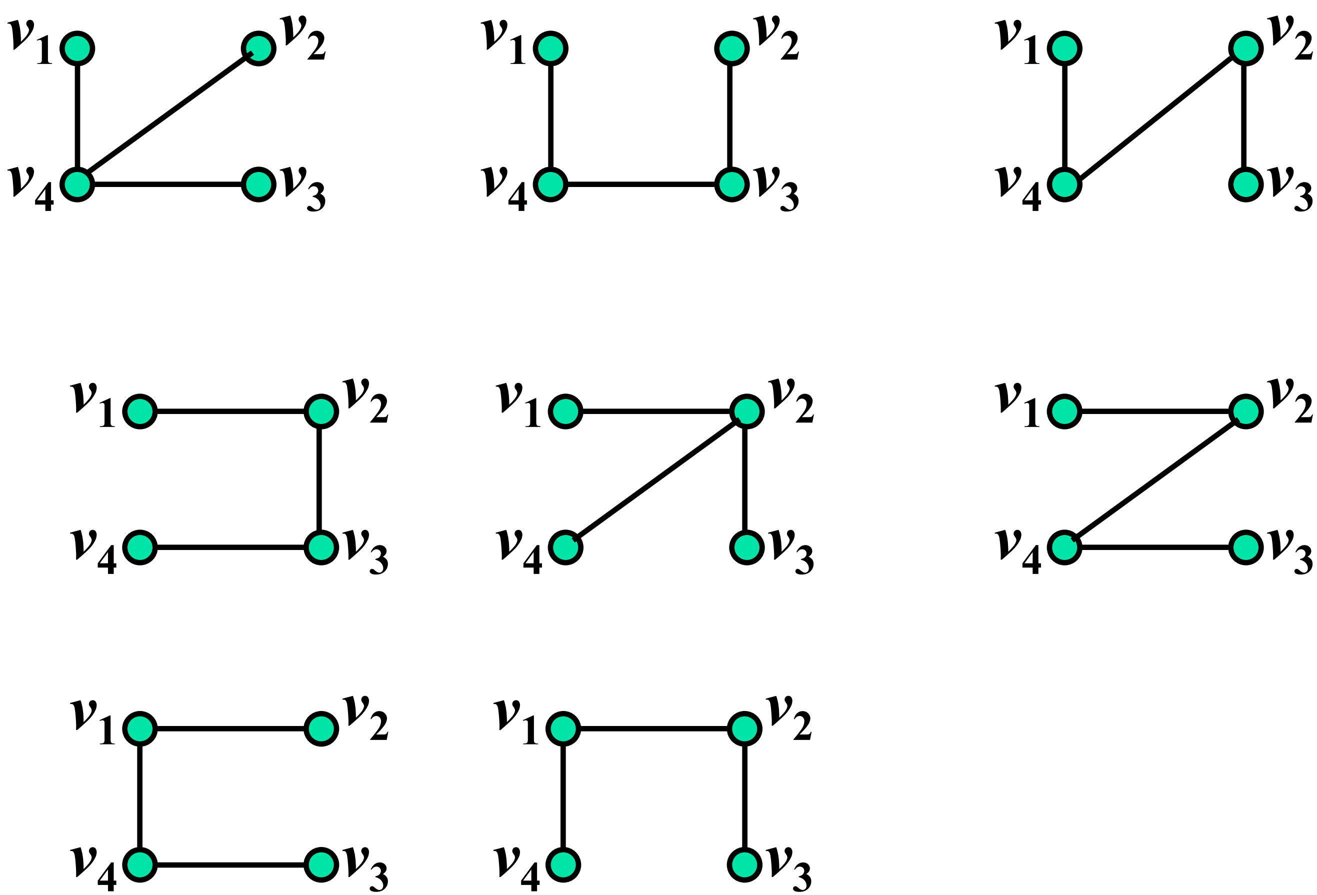
9.[分析]应用定理9.6

解



=6+1+1=8

习题九:9(续)



v_1 v_2 v_4 v_3
v_1 v_2 v_4 v_3
v_1 v_2 v_4 v_3
v_1 v_2 v_4 v_3
v_1 v_2 v_4 v_3
v_1 v_2 v_4 v_3
v_1 v_2 v_4 v_3
v_1 v_2 v_4 v_3

习题九:10

10.解

$C_a=egdja$, $C_b=gdjib$, $C_c=gdc$, $C_h=ijh$, $C_f=egf$

$C_{基}=\{C_a, C_b, C_c, C_h, C_f\}$

$S_e=\{e,f,a\}$, $S_g=\{g,a,b,c,f\}$, $S_d=\{a,b,c,d\}$, $S_j=\{a,b,h,j\}$, $S_i=\{b,h,i\}$

$S_{基}=\{S_e, S_g, S_d, S_j, S_i\}$

习题九:11

证明: 设T中有t片树叶, 则T有$(n-t)$个顶点的度数大于等于2.因为$\Delta(T)\geq k$,故$\exists v_0$,$d(v_0)\geq k$.除v_0和树叶外,还有$(n-t-1)$个结点度数大于等2.

$$2m=2n-2=\sum d(v_i)\geq 2(n-t-1)+k+t=(2n-2)+(k-t)$$

$$\Rightarrow k-t\leq 0 \Rightarrow k\leq t$$

所以T中至少有k片树叶。

- 方法二:归纳法

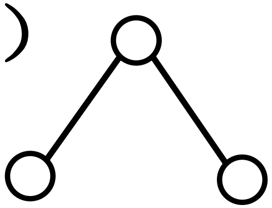
习题九:补充题

下面的简单图各有多少个不同的生成树？

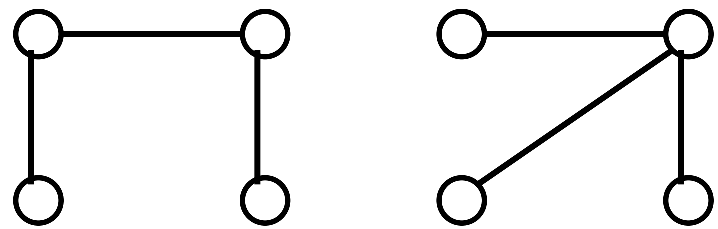
（1）K_3，（2）K_4，（3）$K_{2,2}$，（4）C_5

答：（1）1个；（2）2个；（3）1个；（4）1个

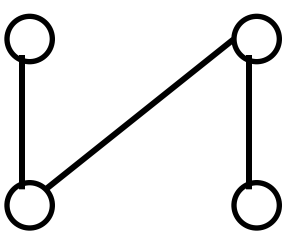
（1）



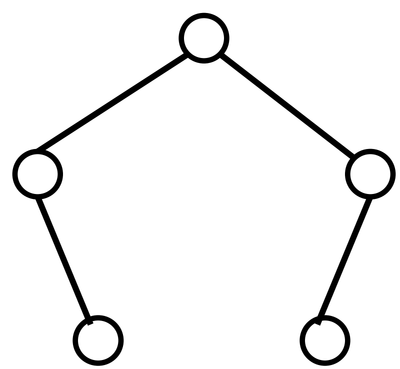
（2）



（3）



（4）



习题九:12

- 设G是连通图，否则，只讨论其连通分支即可。

根据破圈法由例9.1知，G中必存在包含C-e_1的生成树T，e_1是T的弦，e_2是树枝。不妨设$e_2=(u,v)$,e_2对应的基本割集是S_{e_2},因此在G-S_{e_2}中u与v不连通，则$e_1 \in S_{e_2}$。否则，因为S_{e_2}中只有一个树枝边e_2，其余均是弦，也就是C中只有一条边e_2在S_{e_2}中，那么G-S_{e_2}中u与v仍然连通，这与S_{e_2}是基本割集矛盾。得证。

习题九:13

【应用基本割集和基本回路的性质】

证明: 由已知得e_1是T_2的弦，所以e_1不是环和桥，记$e_1=(u,v)$

记S_{e1}是e_1对应的基本割集，C_{e1}是e_1对应的基本回路。

S_{e1}中除了T_1的树枝e_1外还有T_1的弦，故$|S_{e1}| \geq 2$.C_{e1}中除了T_2的弦e_1外还有T_2的树枝，所以$|C_{e1}| \geq 2$.那么存在$e_2 \in T_2, e_2 \in C_{e1}$,且$e_2 \in S_{e1}$,否则$C_{e1}$中所有$T_2$的树枝都不在$S_{e1}$中,那么从u到v在$G-S_{e1}$中沿着$C_{e1}-e_1$仍然有通路,与$S_{e1}$是割集矛盾。所以$e_2 \in S_{e1}$即$e_2$是$T_1$的弦,即$e_2 \in T_2, e_2 \notin T_1$.所以$(T_1-e_1) \cup \{e_2\}$连通无回路,所以是G的生成树。同理可证$(T_2-e_2) \cup \{e_1\}$是G的生成树.

习题九:14

- 14.[分析]先证明每条边出现在多少棵生成树中.
- 证明:由定理9.17知,对于n阶标定完全图$K_n(n\geq 2)$,

$\tau(K_n)=n^{n-2}$.K_n的每棵生成树中含n-1条边, n^{n-2}棵生成树共含$(n-1)\, n^{n-2}$条边.而K_n中共有$\frac{1}{2}n(n-1)$条边,因此每条边出现在$(n-1)\, n^{n-2}/\ \frac{1}{2}n(n-1)=2n^{n-3}$棵生成树中.

所以$\tau(K_n\text{-}e)=\tau(K_n)-2n^{n-3}=(n-2)\, n^{n-3}$.

习题九:16

16.[分析]　(1)找出一棵生成树,计算出$C_{基}$和$S_{基}$;

(2) 对$C_{基}$中的回路进行环和运算;

(3)对$C_{基}$中的回路进行对称差运算;

解 令G的生成树为$T=\{a,f,g,b\}$,

(1) $C_d=afgbd$, $C_c=afgbc$, $C_e=fge$, $C_{基}=\{C_d,C_c,C_e\}$

$S_a=\{a,c,d\}$, $S_f=\{f,e,c,d\}$, $S_g=\{c,d,e,g\}$, $S_b=\{b,c,d\}$, $S_{基}=\{S_a,S_f,S_g,S_b\}$

(2) $C_0=\varnothing$, $C_1=fge$, $C_2=afgbc$, $C_3=afgbd$,$C_4=C_1\oplus C_2=acbe$, $C_5=C_1\oplus C_3=adbe$, $C_6=C_2\oplus C_3=\mathrm{cd}$, $C_7=C_1\oplus C_2\oplus C_3=C_1\cup C_3$

$C_{环}=\{C_0,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7\}$

习题九:16(续)

(3) $S_0=\varnothing$, $S_1=\{a,c,d\}$,$S_2=\{b,c,d\}$, $S_3=\{f,e,c,d\}$, $S_4=\{c,d,e,g\}$, $S_5=S_1\oplus S_2=\{a,b\}$, $S_6=S_1\oplus S_3=\{a,f,e\}$, $S_7=S_1\oplus S_4=\{a,e,g\}$, $S_8=S_2\oplus S_3=\{b,f,e\}$, $S_9=S_2\oplus S_4=\{b,e,g\}$, $S_{10}=S_3\oplus S_4=\{f,g\}$, $S_{11}=S_1\oplus S_2\oplus S_3=\{a,b,f,e,c,d\}$, $S_{12}=S_1\oplus S_2\oplus S_4=\{a,b,c,d,e,g\}$ $S_{13}=S_1\oplus S_3\oplus S_4=\{a,f,c,d,g\}$, $S_{14}=S_2\oplus S_3\oplus S_4=\{b,f,c,d,g\}$, $S_{15}=S_1\oplus S_2\oplus S_3\oplus S_4=\{a,b,f,g\}$

习题九:19

归纳法

证明 对分支结点i归纳。

(1) i=1时，由于T是正则2叉树,故I=0,L=2,成立；

(2)假设当i=k时成立,当i=k+1时，存在两片树叶v_1和v_2,它们的父亲结点是v_3,记l为v_3的层数.

记$T_1 = T-\{v_1, v_2\}$,则T_1是有k个分支结点的正则二叉树,由归纳假设得$L_1=I_1+2k$.

而$I_1=I-l$, $L_1=L-(2(l+1)-l)=L-l-2$

$L-l-2=I-l+2k$，$L=I+2(k+1)$

习题九:20

20.[分析]利用树的性质及正则2叉树的定义

证明 根据定理14.13知, $(r-1)i=t-1, r=2$, 故$i=t-1$

由有向图的握手定理知,

$$m=n-1=i+t-1=2t-2$$

或者

所有结点的出度之和等于边数,所以有m=2i (1)

所有结点的入度之和等于边数,所以有m=t+i-1 (2)

因此2i=t+i-1, 得i=t-1，代入(2)得$m=2t-2$

习题九:21

21.[分析]　(1)画出算式对应的2叉树;

(2)用前序遍历得波兰表示;

(3)用后序遍历得逆波兰表示

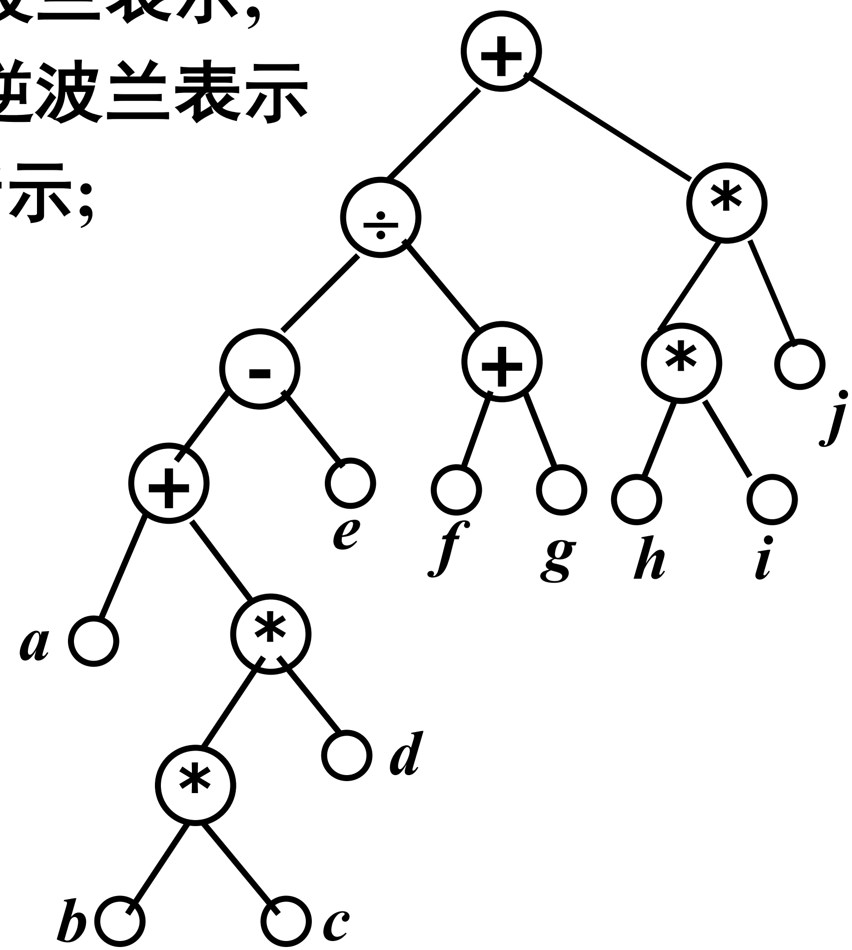
解 算式对应的2叉树如右图所示;

用前序遍历得波兰表示:

+÷-+*a***bcde+fg***hij*

用后序遍历得逆波兰表示:

*abc*d*+e-fg+* ÷*hi*j*+*

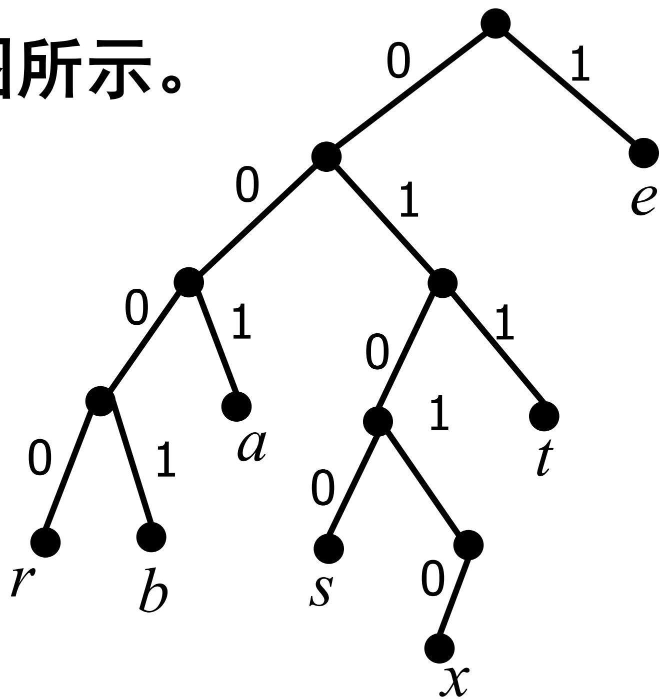


习题九:

1. 构造编码方案a：001，b：0001，e：1，r：0000，s：0100，t：011，x：01010对应的前缀码的二叉树；并找出位串01110100011表示的单词。

解 与编码方案对应的二叉树如右图所示。

位串01110100011表示的单词是test



习题九:

2.以如下两种不同的方式用Huffman编码来编码具有这些频率的符号：*a*：0.4，*b*：0.2，*c*：0.2，*d*：0.1，*e*：0.1，并分别求出平均码字长度。

1）在算法的每个阶段从权最小的树中选择顶点数最多的两个树来组合；

2）在每个阶段从权最小的树中选择顶点数最少的两个树来组合；

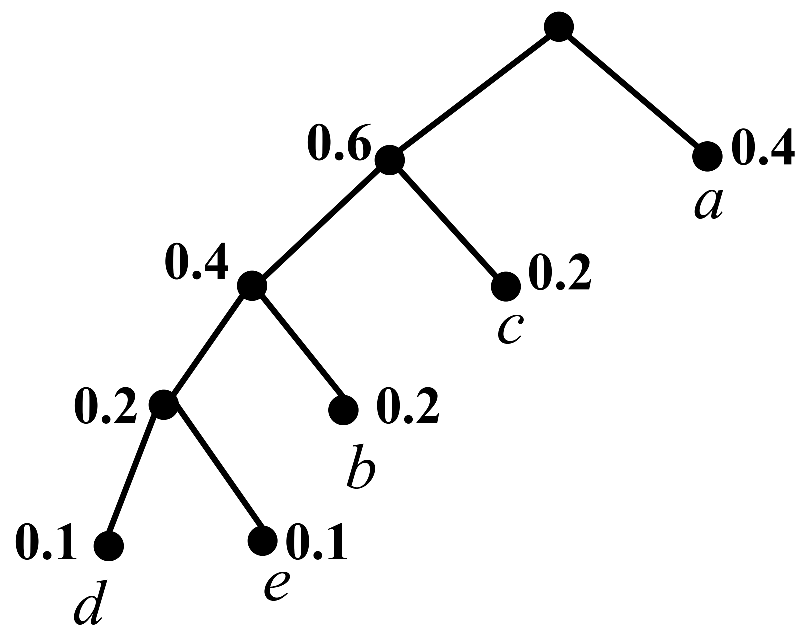
习题九:

2. 解：按照1）得到最优二叉树如下图所示。

编码方案：*a*：1，*b*：001，*c*：01，*d*：0000，*e*：0001

平均码字长度

=0.4*1+0.2*3+0.2*2+0.1*4+0.1*4=2.2



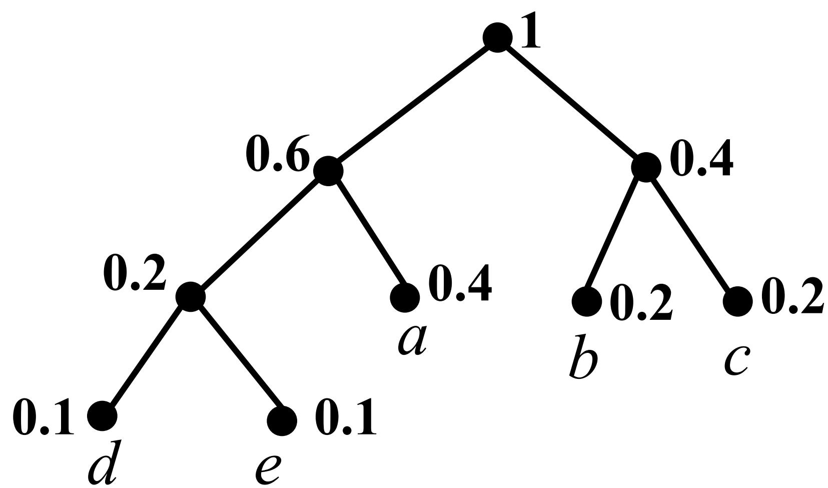
习题九:

2. 解：按照2）得到最优二叉树如下图所示。

编码方案：a：01，b：10，c：11，d：000，e：001

平均码字长度

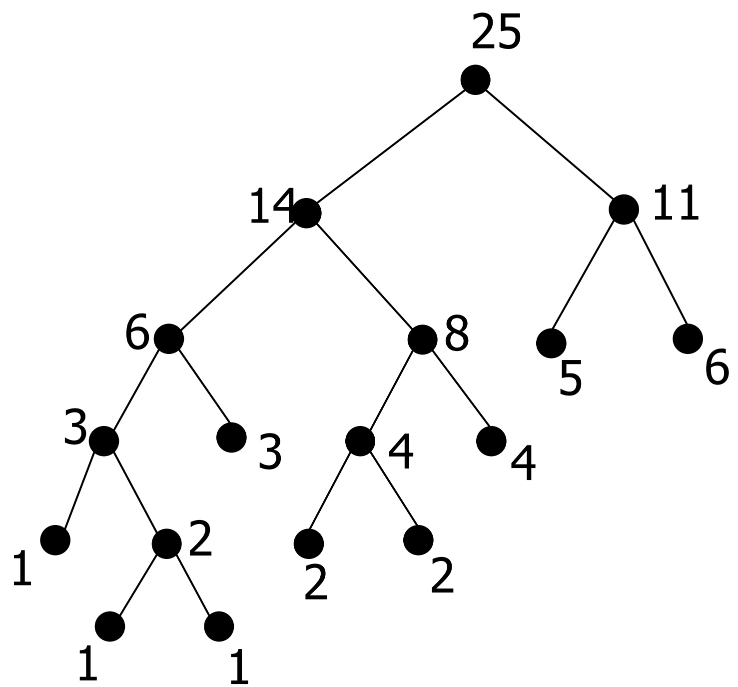
=0.4*2+0.2*2+0.2*2+0.1*3+0.1*3=2.2



习题十四:11

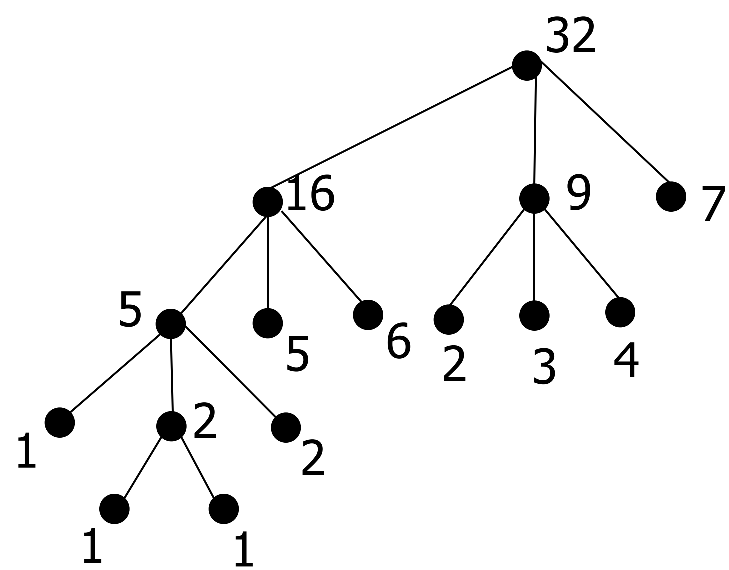
11.[分析]用huffman算法和$(r-1)i=t-1$

(1)

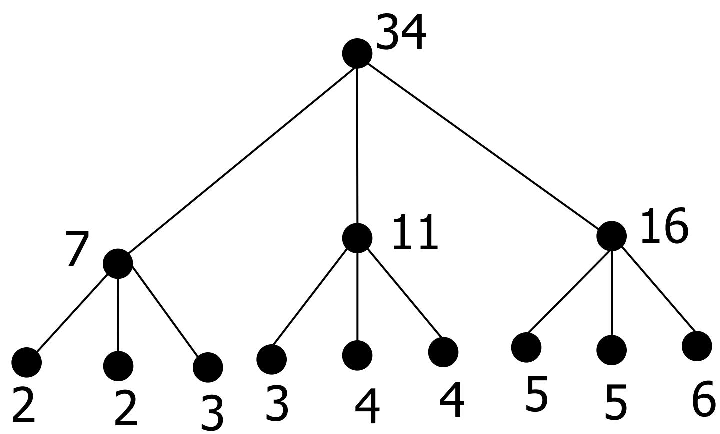


(2) t-1=s(mod(r-1)),其中t=10,r=3, 所以s=1

将2个较小权对应的树叶为兄弟，放在最高层上，他们的双亲带权w_1+w_2. 然后类似Huffman算法



(3) t-1=s(mod(r-1)),其中t=9,r=3, 所以s=0,故此最优树为正则3叉树。然后类似Huffman算法



习题十四:12

- 12.[分析]用Huffman算法
- 解 用Huffman编码求最优2叉树.

最佳前缀码为:

a:10, b:01, c:110, d:111,

e:0010,f:0011, g:0000,h:0001