证明： ① 若 $\circ_i$ 是可交换的，则：任取 $x, y \in B$，因 φ 是满射，所以存在 $a, b \in A$，使 $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y$。从而有：

$$\begin{aligned}
x\bar{\circ}_i y &= \varphi(a)\bar{\circ}_i\varphi(b) && (\varphi(a) = x, \varphi(b) = y)\\
&= \varphi(a \circ_i b) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= \varphi(b \circ_i a) && (\circ_i \text{ 是可交换的})\\
&= \varphi(b)\bar{\circ}_i\varphi(a) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= y\bar{\circ}_i x && (\varphi(a) = x, \varphi(b) = y)
\end{aligned}$$

因此 $\bar{\circ}_i$ 也是可交换的。

② 若 $\circ_i$ 是可结合的，则：任取 $x, y, z \in B$，因 φ 是满射，所以存在 $a, b, c \in A$，使 $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y, \varphi(c) = z$。从而有：

$$\begin{aligned}
(x\bar{\circ}_i y)\bar{\circ}_i z &= (\varphi(a)\bar{\circ}_i\varphi(b))\bar{\circ}_i\varphi(c) && (\varphi(a) = x, \varphi(b) = y, \varphi(c) = z)\\
&= (\varphi(a \circ_i b))\bar{\circ}_i\varphi(c) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= \varphi((a \circ_i b) \circ_i c) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= \varphi(a \circ_i (b \circ_i c)) && (\circ_i \text{ 是可结合的})\\
&= \varphi(a)\bar{\circ}_i\varphi(b \circ_i c) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= \varphi(a)\bar{\circ}_i(\varphi(b)\bar{\circ}_i\varphi(c)) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= x\bar{\circ}_i(y\bar{\circ}_i z) && (\varphi(a) = x, \varphi(b) = y, \varphi(c) = z)
\end{aligned}$$

因此 $\bar{\circ}_i$ 也是可结合的。

③ 若 $\circ_i$ 是幂等的，则：任取 $x \in B$，因 φ 是满射，所以存在 $a \in A$，使 $\varphi(a) = x$。从而有：

$$\begin{aligned}
x\bar{\circ}_i x &= \varphi(a)\bar{\circ}_i\varphi(a) && (\varphi(a) = x)\\
&= \varphi(a \circ_i a) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= \varphi(a) && (\circ_i \text{ 是幂等的})\\
&= x && (\varphi(a) = x)
\end{aligned}$$

因此 $\bar{\circ}_i$ 也是幂等的。 □

(2)

证明： 若 $\circ_i$ 对 $\circ_j$ 是可分配的，则：任取 $x, y, z \in B$，因 φ 是满射，所以存在 $a, b, c \in A$，使 $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y, \varphi(c) = z$。从而有：

$$\begin{aligned}
x\bar{\circ}_i(y\bar{\circ}_j z) &= \varphi(a)\bar{\circ}_i(\varphi(b)\bar{\circ}_j\varphi(c)) && (\varphi(a) = x, \varphi(b) = y, \varphi(c) = z)\\
&= \varphi(a)\bar{\circ}_i\varphi(b \circ_j c) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= \varphi(a \circ_i (b \circ_j c)) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= \varphi((a \circ_i b) \circ_j (a \circ_i c)) && (\circ_i \text{ 对 } \circ_j \text{ 是可分配的})\\
&= \varphi(a \circ_i b)\bar{\circ}_j\varphi(a \circ_i c) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= (\varphi(a)\bar{\circ}_i\varphi(b))\bar{\circ}_j(\varphi(a) \circ_i \varphi(c)) && (\varphi \text{ 是同态映射})\\
&= (x\bar{\circ}_i y)\bar{\circ}_j(x\bar{\circ}_i z) && (\varphi(a) = x, \varphi(b) = y, \varphi(c) = z)
\end{aligned}$$

同理可证 $(y\bar{\circ}_j z)\bar{\circ}_i x = (y\bar{\circ}_i x)\bar{\circ}_j(z\bar{\circ}_i x)$。

从而 $\bar{\circ}_i$ 对 $\bar{\circ}_j$ 也是可分配的。 □

(3)

证明： 若 $\circ_i, \circ_j$ 是可吸收的，则：由吸收律定义知，$\circ_i$ 和 $\circ_j$ 满足交换律，从而由第 (1) 小题