引理 3.4 设 A 是一集合，则对任意 $f \in A \to A$，有 $f^n \in A \to A\ (n \in \mathbb{N})$。

证明： 对 n 作归纳。

若 $n = 0$，则由二元关系幂运算定义知，$f^n = f^0 = I_A \in A \to A$。

设当 $n = k\ (k \geq 0)$ 时命题成立，则当 $n = k + 1$ 时有：

$$
\begin{aligned}
f^{k+1} &= f^k \circ f && \text{(幂运算定义)} \\
&\in A \to A && \text{(教材定理 3.3)}
\end{aligned}
$$

□

再证原题。

证明： 由 I_A 定义和双射定义易知，I_A 是双射的。

由关系幂运算定义和合成运算结合律有：$f^n = f^{n-1} \circ f = f \circ f^{n-1} = I_A$。

由题设知，n 是正整数，即 $n \geq 1$。因而有 $n - 1 \geq 0$ (且为整数)，即 $(n - 1) \in \mathbb{N}$。

因而由引理 3.4 知，$f^{n-1} \in A \to A$。

由 $f^{n-1} \circ f = I_A$ 是双射的和教材定理 3.5(3) 知，f 是单射的。

又由 $f \circ f^{n-1} = I_A$ 是双射的和教材定理 3.5(3) 知，f 是满射的。

综合得，f 是双射的。 □

3.24

证明： 由教材定理 2.9(3) 可知：$f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$。

下面证明 $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$：

$$
\begin{aligned}
& \forall x \\
& x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) && \text{(集合交定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in X \wedge f(x) \in A \wedge x \in X \wedge f(x) \in B && \text{(原象定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in X \wedge f(x) \in A \wedge f(x) \in B && \text{(命题逻辑交换律、幂等律)} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in X \wedge f(x) \in A \cap B && \text{(集合交定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in f^{-1}(A \cap B) && \text{(原象定义)}
\end{aligned}
$$

综合得，$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$。 □