$$
\begin{aligned}
&\iff I_B \circ g(x) \prec_B I_B \circ g(y) && \text{(教材定理 3.6)}\\
&\iff (f \circ f^{-1}) \circ g(x) \prec_B (f \circ f^{-1}) \circ g(y) && (f \circ f^{-1} = I_B)\\
&\iff f(f^{-1} \circ g(x)) \prec_B f(f^{-1} \circ g(y)) && \text{(教材定理 2.5、教材定理 3.3)}\\
&\iff f^{-1} \circ g(x) \prec_A f^{-1} \circ g(y) && (f\ \text{是同构})
\end{aligned}
$$

从而有 $\forall x, y, x \prec_A y \Rightarrow f^{-1} \circ g(x) \prec_A f^{-1} \circ g(y)$。由习题 6.5 的结论知，对任意 $x \in A$，有 $x \preccurlyeq_A f^{-1} \circ g(x)$，于是有 $f(x) \preccurlyeq_B f(f^{-1} \circ g(x)) = g(x)$。同理可证，$g(x) \preccurlyeq f(x), \forall x \in A$。这就证明了 $f(x) = g(x), \forall x \in A$，也即，$f = g$ 是 $\langle A, \prec_A\rangle$ 到 $\langle B, \prec_B\rangle$ 上唯一的同构。 □

6.9[1]

证明: 由定义知，F 是函数，且为满射。

对任意 $a, b \in A$，若 $a \neq b$，分两种情况讨论：

情况一：若 $a \prec b$ (或 $b \prec a$)，则有 $a \in F(b)$ (或 $b \in F(a)$)，但 $b \notin F(a)$ (或 $a \notin F(b)$)，从而有 $F(a) \neq F(b)$。

情况二：若既无 $a \prec b$ 也无 $b \prec a$，则 $a \in F(a)$ 但 $b \notin F(a)$，从而也有 $F(a) \neq F(b)$。

这就证明了 F 是单射，从而是双射。

同时，对任意 $a, b \in A$，若 $a \prec b$，则：

$\forall x$，

$$
\begin{aligned}
x \in F(a) &\iff x \prec a \vee x = a && (F(a)\ \text{定义})\\
&\implies x \prec b && (a \prec b\text{、拟序关系传递性})\\
&\implies x \in F(b) && (F(b)\ \text{定义})
\end{aligned}
$$

从而 $F(a) \subseteq F(b)$。注意到，由于 $b \in F(b) \wedge b \notin F(a)$，所以 $F(a) \subset F(b)$。

反之，若 $F(a) \subset F(b)$，则由于 $a \in F(a) \subset F(b)$，所以有 $a \preccurlyeq b$。同时，由于 F 是单射，所以 $F(a) \subset F(b) \Rightarrow F(a) \neq F(b) \Rightarrow a \neq b$。这就证明了 $a \prec b$。

从而 $a \prec b \Leftrightarrow F(a) \subset F(b)$。由同构定义知，$F$ 是 $\langle A, \prec\rangle$ 到 $\langle S, \subset\rangle$ 上的同构。 □

6.10

证明: 若不然，由序数的三歧性就有 $\alpha \in \beta$。又由于序数是传递集，所以有 $\alpha \subseteq \beta$。

记 $\langle A, \prec\rangle$ 到 $\langle \alpha, \in_\alpha\rangle$ 的同构为 $f : A \to \alpha$，记 $\langle B, \prec^0\rangle$ 到 $\langle \beta, \in_\beta\rangle$ 的同构为 $g : B \to \beta$。注意到，因为 $B \subseteq A$，所以有 $g^{-1} : \beta \to A$。同理，由于 $\alpha \subseteq \beta$，所以有 $f : A \to \beta$。从而有 $f \circ g^{-1} : \beta \to \beta$。容易证明 $f \circ g^{-1}$ 是保序的：

$\forall x, y \in \beta$，

$$
\begin{aligned}
x \in y &\iff I_\beta(x) \in I_\beta(y) && (I_\beta\ \text{是恒等函数})\\
&\iff g \circ g^{-1}(x) \in g \circ g^{-1}(y) && (g \circ g^{-1} = I_\beta)\\
&\iff g(g^{-1}(x)) \in g(g^{-1}(y)) && \text{(教材定理 3.3)}\\
&\iff g^{-1}(x) \prec^0 g^{-1}(y) && (g\ \text{是同构})\\
&\implies g^{-1}(x) \prec g^{-1}(y) && (\prec^0 \subseteq \prec)\\
&\iff f(g^{-1}(x)) \in f(g^{-1}(y)) && (f\ \text{是同构})
\end{aligned}
$$

这就证明了 $f \circ g^{-1}$ 的保序性。

由习题 6.5 的结论应有 $x \underline{\in} f \circ g^{-1}(x), \forall x \in \beta$。又由于 $\alpha \in \beta$，所以应有 $\alpha \underline{\in} f \circ g^{-1}(\alpha)$。但由 g^{-1} 的定义知，$g^{-1}(\alpha) \in B \subseteq A$，由 f 的保序性知，$f \circ g^{-1}(\alpha) \in \alpha$。矛盾。 □

[1]题目中"证明 F 是 $\langle A, \prec\rangle$ 与 $\langle S, \subseteq\rangle$ 之间的同构"应为"证明 F 是 $\langle A, \prec\rangle$ 与 $\langle S, \subset\rangle$ 之间的同构"。否则一个是拟序，一个是偏序，不同构。