第一编 集合论
第5章习题分析

中国海洋大学 计算机系

Exercises 2

设集$A\neq\phi$,在$(A\to A)$上定义二元关系R如下：

$R=\{<f, g>|f, g\in (A\to A) \wedge ran\ f=ran\ g\}$

(1)证明R是$A\to A$上的等价关系；

(2) 商集$(A\to A)/R \approx P(A)-\{\phi\}$

证明：(1) $\forall f \in (A\to A)$, 显然$ran\ f=ran\ f$,所以fRf. R是自反的.

$\forall<f,g> \in R\Rightarrow ran\ f=ran\ g\Rightarrow ran\ g=ran\ f\Rightarrow<g,f> \in R$

R是对称的。

$\forall<f,g> \in R\wedge<g,h> \in R\Rightarrow ran\ f=ran\ g=ran\ h\Rightarrow<f,h> \in R$. R是传递的。

综上所述，R是$A\to A$上的等价关系。

(2) 构造函数φ：$(A\to A)/R\to P(A)-\{\phi\}$，

$\forall[f]\in(A\to A)/R$, $\varphi([f])=ran\ f$.

下面证明φ是双射函数。

证明φ是良定义的。

$\forall[f],[g]\in(A\to A)/R$,

$[f]=[g]\ \Rightarrow fRg\Rightarrow ran\ f=ran\ g\Rightarrow\varphi([f])=\varphi([g])$

且$\text{dom}\varphi=(A\to A)/R$, $\varphi([f])=ran\ f\neq\phi$

因此φ是$(A\to A)/R\to P(A)-\{\phi\}$的函数.

证明φ是单射的。

$\forall[f],[g]\in(A\to A)/R$,

令$\varphi([f])=\varphi([g])\ \Rightarrow ran\ f=ran\ g\Rightarrow fRg\Rightarrow[f]=[g]$

因此φ是单射函数

证明φ是满射的。

$\forall Y\in P(A)-\{\phi\}, Y\neq\phi$,那么存在$a\in Y$,

定义函数$g: A\to A$, $\forall x\in A$, $g(x)=\begin{cases} x & x\in Y \\ a & x\notin Y \end{cases}$

显然$ran\ g=Y$,

因此$\varphi([g])=ran\ g=Y$.

φ是满射函数。

综上所述，$(A\to A)/R\approx P(A)-\{\phi\}$

Ch 5 Exercises 3

3. 设 a,b为任意实数,且$a<b$, 证明 $[0,1] \approx [a,b] \approx R$.

证明:

先证 $[0,1] \approx [a,b]$， 构造双射函数。

$f:[a,b] \to [0,1], f(x)=(x-a)/(b-a)$.

$f(x)$是双射， 故$[0,1] \approx [a,b]$ 。

因此$[0,1] \approx [a,b]$.

再证$[0,1] \approx (0,1)$,构造两个单射函数

h_1: $[0,1] \to (0,1)$, $h_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

h_2: $(0,1) \to [0,1]$, $h_2(x)=x$

所以$[0,1] \approx (0,1)$

最后证(0,1) ≈R

存在函数g: (0,1) → R, $g(x)= tg\dfrac{2x-1}{2}\pi \quad \forall x\in(0,1)$

显然$g(x)$是双射,所以(0,1) ≈R.

因此得到[0,1] ≈[a,b], [0,1] ≈(0,1), (0,1) ≈R,

所以[0,1] ≈R，从而有[0,1] ≈[a,b] ≈R

Exercises 11

设A={n^7|n ∈N , n≠0}, B={n^{109}|n ∈N , n≠0},求

(1)card A; (2) card B; (3) card(A∪B); (4) card(A∩B)

解(1) 令 f: $N \to A$; $f(n)=(n+1)^7$, $n \in$ N .

显然 f是双射， 故 $N \approx A$. card A= $\aleph_0$

(2)令g: $N \to B$; $f(n)=(n+1)^{109}$, $n \in$ N .

显然 g是双射， 故 $N \approx B$

card B= $\aleph_0$

(3) A⊆A∪B⊆N,

故card A ≤card A∪B ≤card N.

$\aleph_0 \leq$cardA∪B $\leq \aleph_0$.

card A∪B =$\aleph_0$

(4) 设$C=\{(n^{7\times 109} | n \in N, n\neq 0\}$,

则$C \subseteq A\cap B$且$card C=\aleph_0$

所以$card\ A\cap B \geq \aleph_0$

$A\cap B \subseteq A$

$card\ A\cap B \leq card\ A=\aleph_0$.

所以$\aleph_0 \leq card\ A\cap B \leq \aleph_0$.

则$card\ A\cap B =\aleph_0$

Exercises 12.

设A,B为两集合,证明:如果A≈B,则cardP(A)=cardP(B).

证 因为$A \approx B$,故存在双射函数f:$A \rightarrow B$.

构造双射函数h:$P(A) \rightarrow P(B)$

$\forall X \in P(A), h(X)=\{f(x)|x \in X\}$

显然h(X)=f(X)∈P(B)。

证明h是双射函数.

$\forall A_1, A_2 \in P(A)$, 若$A_1 \neq A_2$，由于$f$是$A$到$B$的双射函数，

因而A_1和A_2在f下的像不等，即$f(A_1) \neq f(A_2)$

因此h在A_1和A_2下的函数值$h(A_1) \neq h(A_2)$,所以h是单射的.

证明h是满射.

$\forall Y \in P(B)$,因为f是双射，所以f^{-1}是B到A的双射，

Y在f^{-1}下的像$f^{-1}(Y)\in P(A)$,

因而h在$f^{-1}(Y)$ 下的函数值是$h(f^{-1}(Y))=f(f^{-1}(Y))=Y$.

所以h是满射.

证明[a,b] ≈(a,b) ≈(a,b] ≈[a,b)

证明： （可以按照直线来构造单射）

(1) f: [a,b]→(a,b)，$f(x)$＝x/2+ (a+b) /4

g: (a,b)→[a,b]，g(x)＝x

f, g都是入射，∴ [a,b] ≈(a,b)

(2) f: (a,b)→(a,b]，$f(x)$＝x

g: (a,b]→(a,b)，$g(x)$＝ x/2+ (a+b) /4

f, g都是入射，∴ (a,b) ≈(a,b]

(3) f: (a,b]→[a,b)，$f(x)$＝ x/2+ (a+b) /4

g: [a,b)→ (a,b] ，$g(x)$＝ x/2+ (a+b) /4

f, g都是入射，∴ (a,b] ≈[a,b)

(4)) f: [a,b)→[a,b]，$f(x)$＝x

g: [a,b]→[a,b)，$g(x)$＝ x/2+ (a+b) /4

f, g都是入射，∴ [a,b) ≈[a,b]

课外题

- 课外题：判断下面的集合是否是有穷集、可数无穷集、不可数集？如果是可数无穷集，在自然数集合合与该集合之间构建双射函数。

  a) A= ｛n|n<0,n是整数｝； b) B={n|n是偶数}；c) C={小于100的整数集合}；d) D=(0,1/2)；e) E={n|n<1000000000,且n是正整数}；f)F={7k|k是整数}

解：a)是可数无穷集，f_1: A→N, $f_1(x)=|x|$

或者 f_1: N→A, $f_1(x)=-(x+1)$

b)是可数无穷集，f_2: N→B, $f_2(x)=x$ x是偶数

$f_2(x)=-x-1$ x是奇数

c)是可数无穷集，f_3: N→C, $f_3(x)=99-x$

d)不可数集；e) 有穷集

f)是可数无集，f_4: F→N, $f_4(x)=(2/7)x-1 \quad x>0$

$f_4(x)=(2/7)|x| \quad x\le 0$

或者

f_4: N→F, $f_4(x)=-7[(x+1)/2]$ x是奇数

$f_4(x)=7(x/2)$ x 是偶数