第九章　树

定理 9.1 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的:
(1) G 是树(连通无回路);
(2) G 中任二顶点之间存在惟一的一条路径;
(3) G 中没有圈，且 $m=n-1$;
(4) G 是连通的，且 $m=n-1$;
(5) G 是连通的，且 G 中任何边均为桥;
(6) G 中没有圈，但在 G 中任二不同顶点 u,v 之间增添边 (u,v)，所得图含惟一的一个圈.

定理 9.2 设 T 是 n 阶非平凡的无向树，则 T 至少有两个片树叶.

定理 9.3 无向图 G 具有生成树当且仅当 G 是连通的.

推论 1 设 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m\geq n-1$.

推论 2 设 T 是 n 阶 m 条边的无向连通图 G 的一棵生成树，则 T 的余树 $\overline{T}$ 中含 $m-n+1$ 条边.

推论 3 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，$\overline{T}$ 为 T 的余树，C 为 G 中任意一圈，则 $E(\overline{T})\cap E(C)\neq\varnothing$.

定理 9.4 设 T 是无向连通图 G 中的一棵生成树，e 为 T 的任意一条弦，则 $T\cup e$ 中含 G 的只含一条弦，其余边均为树枝的圈，而且不同的弦对应的圈是不同的.

定理 9.5 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，e 为 T 的一条树枝，则 G 中存在只含树枝 e，其余元素均为弦的割集. 设 e_1,e_2 是 T 的不同的树枝，则它们对应的只含一条树枝的割集是不同的.

定理 9.6 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶无向连通标定图($V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$)，则对 G 的任意非环边 e 均有 $\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\backslash e)$.

定理 9.7 $\tau(K_n)=n^{n-2}(n\geq 2)$，其中 K_n 为 n 阶标定完全图.

定理 9.8 Ω 对环和运算及数乘运算: $0\cdot G_i=\varnothing$，$1\cdot G_i=G_i$，$i=1,2,\cdots,2^m$，构成数域 $F=\{0,1\}$ 上的 m 维线性空间，其 M 为生成元集.

定理 9.9 设 T 是 n 阶 m 条边的无向连通图 G 的一棵生成树，C_k 是对应弦 e'_k 的基本回路，$k=1,2,\cdots,m-n+1$，则任意的 $r(1\leq r\leq m-n+1)$ 条弦 $e'_{i_1},e'_{i_2},\cdots,e'_{i_r}$ 均在

$$C_{i_1}\oplus C_{i_2}\oplus\cdots\oplus C_{i_r}$$

中，其中 $\oplus$ 为图之间的环和运算.

定理 9.10 设 C_1 和 C_2 是无向图 G 中的任意两个回路(初级的或简单的)，则环和 $C_1\oplus C_2$ 为 G 中环路.

推论 设 C_1,C_2 为无向图 G 中的任意两个环路，则 $C_1\oplus C_2$ 为 G 中环路(即环路对环和运算是封闭的).