第十七章　群

定理 17.1 设 $\langle G, \circ\rangle$ 是具有一个可结合二元运算的代数系统，若存在 $e \in G$，使得 $\forall a \in G$，有 $a \circ e = a$，且 $\forall a \in G$，存在 $a' \in G$ 满足 $a \circ a' = e$，则 G 是一个群。

定理 17.2 G 为群，$\forall a, b \in G$ 有

(1) $(a^{-1})^{-1} = a$;

(2) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

(3) $a^n a^m = a^{n+m}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$;

(4) $(a^n)^m = a^{mn}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$;

(5) 若 G 为 Abel 群，$(ab)^n = a^n b^n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

定理 17.3 G 为群，$\forall a, b \in G$，方程 $ax = b$ 和 $ya = b$ 在 G 中有解且有惟一解.

定理 17.4 设 G 是具有一个可结合的二元运算的代数系统，如果 $\forall a, b \in G$ 方程 $ax = b$ 和 $ya = b$ 在 G 中有解，则 G 是群.

定理 17.5 群中运算满足消去律.

定理 17.6 设 G 是具有一个二元运算的不含零元的有限代数系统，且该运算适合结合律和消去律，则 G 是一个群.

定理 17.7 设 $G = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 为群，则 G 的运算表的每行每列都是 G 中元素的一个置换.

定理 17.8 G 是群，$a \in G$ 且 $|a| = r$，则

(1) $a^k = e$ 当且仅当 $r \mid k$，$k \in \mathbb{Z}$;

(2) $|a| = |a^{-1}|$;

(3) 若 $|G| = n$ 则 $r \leq n$.

定理 17.9 (子群判定定理一) G 是群，H 是 G 的非空子集，则 H 是 G 的子群当且仅当

(1) $\forall a, b \in H$ 有 $ab \in H$，　(2) $\forall a \in H$ 有 $a^{-1} \in H$.

定理 17.10 (子群判定定理二) G 是群，H 是 G 的非空子集，则 H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a, b \in H$ 有

$$ab^{-1} \in H.$$

定理 17.11 (子群判定定理三) G 是群，H 是 G 的有穷非空子集，则 H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a, b \in H$ 有

$$ab \in H.$$

定理 17.12 $G = \langle a \rangle$ 是循环群.

(1) 若 G 是无限阶循环群，则 G 的生成元是 a 和 a^{-1}.