$B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$。则 $|A|=1, |B|=0$，$A,B\in S$，但 $|A+B|=\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right|=-1$，从而 $A+B\notin S$。S 对矩阵加法不封闭。

(4) 构成群。由定义易于验证。

17.14 本题即为教材定理 17.29。证明如下：

证明: 由于 $ea=ae=a$，因此 $e\in H$，H 非空。

$\forall x,y\in H$，

$$
\begin{aligned}
xya &= xay && (ya=ay)\\
&= axy && (xa=ax)
\end{aligned}
$$

因此，$xy\in H$。

$\forall x$，

$$
\begin{aligned}
& x\in H\\
\Longleftrightarrow\ & xa=ax && (H\ \text{定义})\\
\Longleftrightarrow\ & x^{-1}xa=x^{-1}ax && (\text{两边左乘}\ x^{-1})\\
\Longleftrightarrow\ & x^{-1}xax^{-1}=x^{-1}axx^{-1} && (\text{两边右乘}\ x^{-1})\\
\Longleftrightarrow\ & ax^{-1}=x^{-1}a && (xx^{-1}=x^{-1}x=e)\\
\Longleftrightarrow\ & x^{-1}\in H && (H\ \text{定义})
\end{aligned}
$$

由子群判定定理一知，H 是 G 的子群。 □

17.15

(1) 由于对任何群 G，$\{e\}$ 和 G 本身都是 G 的子群。故，G 只有一个子群当且仅当 $G=\{e\}$。

(2) 由 Lagrange 定理可知，所有素数阶循环群都有且仅有两个子群：$\{e\}$ 和 G 本身。

(3) 由 Lagrange 定理和教材定理 17.13 可知，对所有素数 p，若 G 为 p^2 阶循环群，则 G 必有且仅有 3 个群：$\{e\}$ 、G 和一个 p 阶子群。

17.16

证明: 充分性：

若 $H_1H_2=H_2H_1$，则：由于 H_1,H_2 都是子群，所以 $e\in H_1, e\in H_2$，从而 $e=ee\in H_1H_2$。这就是说，H_1H_2 是非空的。又由 H_1H_2 的定义知，H_1H_2 中的任意元素均可写成 ab 的形式，其中 $a\in H_1, b\in H_2$。因此，任取 $x,y\in H_1H_2$，将他们写成：$x=ab, y=cd$，其中 $a,c\in H_1, b,d\in H_2$。从而 $xy^{-1}=ab(cd)^{-1}=abd^{-1}c^{-1}$。由于 $b,d\in H_2$，且 H_2 是群，故 $bd^{-1}\in H_2$。于是 $abd^{-1}\in H_1H_2=H_2H_1$，这就是说，存在 $h_2\in H_2, h_1\in H_1$，使得 $abd^{-1}=h_2h_1$。又由于 $h_1,c\in H_1$ 且 H_1 是群，所以 $h_1c^{-1}\in H_1$。从而 $xy^{-1}=abd^{-1}c^{-1}=h_2h_1c^{-1}\in H_2H_1=H_1H_2$。由子群判定定理二知，$H_1H_2$ 是 G 的子群。

必要性：

若 H_1H_2 是子群，则：由于 $\forall x\in H_1H_2$，存在 $a\in H_1, b\in H_2$，使得 $x=ab$，故：

$$
\begin{aligned}
& x\in H_1H_2\\
\Longrightarrow\ & x^{-1}\in H_1H_2 && (H_1H_2\ \text{是群})\\
\Longleftrightarrow\ & \exists a\exists b(a\in H_1\wedge b\in H_2\wedge x^{-1}=ab) && (H_1H_2\ \text{定义})
\end{aligned}
$$