1991 年计算机数学基础

七、

1.

(1) $(A-C)\cup B=A\cup B$ 的充分必要条件是 $A\cap C\subseteq B$。(证明见 1998 年第四题第 1 小题)。

(2) 首先证明如下结论[1]。

结论一：集合 A 满足方程 $\cup A=A$ 的充分必要条件是：A 是传递集且对任意 $x\in A$，存在 $y\in A$，使得 $x\in y$。

证明：必要性。若 $\cup A=A$，则 $\cup A\subseteq A$。由教材定理 4.10 可知，A 是传递集。另一方面，由于 $A=\cup A$，从而对任意 $x\in A$，有 $x\in\cup A$，由 $\cup A$ 定义就有，存在 $y\in A$，使得 $x\in y$。

充分性。若 A 是传递集，则有 $\cup A\subseteq A$。同时，对任意 $x\in A$，由于存在 $y\in A$，使得 $x\in y$，所以有 $x\in\cup A$。由 x 的任意性可知 $A\subseteq\cup A$。从而就有 $\cup A=A$。 □

由结论一可知：

① $A=\varnothing$ 是方程 $\cup A=A$ 的一个解，且方程 $\cup A=A$ 不存在其它有限解。

证明：由定义立即有 $A=\varnothing$ 是方程 $\cup A=A$ 的解。

下面说明，若 A 是 $\cup A=A$ 的解且 $A\neq\varnothing$，则 A 必是无限集。

若 $A\neq\varnothing$，则存在 $x_0\in A$。由结论一可知，存在 $x_1\in A$，使得 $x_0\in x_1$，再由结论一可知，存在 $x_2\in A$，使得 $x_1\in x_2$，从而存在集合列 $x_0,x_1,\cdots$，满足 $x_i\in x_{i+1}\wedge x_i\in A(i=0,1,\cdots)$。由正则公理[2] 可知，这些 x_i 是互异的。这就是说，A 中至少有可数无穷个元素，从而 A 是无穷集。 □

② 若 A 是极限序数，则 A 是方程的一个解(极限序数的定义见教材定义 6.8)。

证明：若 A 为一极限序数，则由序数性质知，A 是传递集，所以有 $\cup A\subseteq A$。下面证明 $A\subseteq\cup A$。

首先证明，对任意 $x\in A$，必有 $x^+\in A$：若不然，由序数三歧性有 $A\in x^+$ 或 $A=x^+$。若 $A\in x^+=x\cup\{x\}$，则有 $A=x$ 或 $A\in x$，这与 $x\in A$ 矛盾。若 $A=x^+$，则与 A 是极限序数矛盾。这就证明了对任意 $x\in A$，有 $x^+\in A$。　　另一方面，由 x^+ 定义知，$x\in x^+$，从而对任意 $x\in A$，有 $x\in x^+\in A$，$x\in\cup A$。即 $A\subseteq\cup A$。

综合得，$A=\cup A$。 □

③ 对任意传递集 B，$A=B\cup\{B,\{B\},\{\{B\}\},\cdots\}$ 是方程的一个解。

证明：由结论一立即可得。 □

上面已经给出 $\cup A=A$ 的一些解的形式，但仍不能证明是否 $\cup A=A$ 的所有解都具有上述三种形式的一种。

---

[1]感谢北京大学计算机系刘田教授给予的提示!

[2]正则公理可以表述为“若 S 为一个非空集合，则必然存在 $x\in S$，使得 $x\cap S=\varnothing$”。由正则公理可以证明：不存在集合 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，满足 $x_0\in x_1\in x_2\in\cdots\in x_n\in x_0$。有关内容详见《公理集合论导引》(张锦文)第一章第11节。