第六章 习题解答

1．用最小二乘法求解超定方程组

$$\begin{cases} 2x+4y=11 \\ 3x-5y=3 \\ x+2y=6 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$$

解：超定方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

将方程两端同乘以系数矩阵的转置矩阵，可得正规方程组

$$\begin{bmatrix} 30 & 3 \\ 3 & 49 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 93 \\ 69 \end{bmatrix}$$

解之，得 $x = 2.9774$，$y = 1.2259$。

2．观测一个作直线运动的物体，测得以下数据：

时间 t	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 S	0	10	30	50	80	110

在表中，时间单位为秒，距离单位为米。假若加速度为常数，求这物体的初速度和加速度。

解：设物体运动的初速度和加速度分别为 v_0 和 a，初始时刻距离为 0，则距离函数为

$$S(t)=v_0 t+\frac{1}{2}at^2$$

用后 5 个点的数据作曲线拟合

t	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
S	10	30	50	80	110

可得，$v_0 =$ 10.6576，$a =$ 4.6269

3．用最小二乘法求一个形如 $y = A e^{Bx}$ 的经验公式，使与下列数据相拟合

x	1	2	3	4
y	60	30	20	15

解：令 $z = \ln y$，则 $z = \ln A + Bx$。数据变换如下

x	1	2	3	4
$z = \ln y$	4.0943	3.4012	2.9957	2.7081

由最小二乘法作线性拟合得，$\ln A = 4.4409$，$B = -0.4564$。所以 $A = 84.8528$。故，所求经难公式为 $= 84.25\, e^{-0.4564x}$ 。

4 已知实验观测数据$(x_i，y_i)$ （$i = 1，2，\cdots，m$)。令

$$\varphi_0(x)=1，\varphi_1(x)=x-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i$$

取拟合函数为

$$\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)$$

试利用曲线拟合的最小二乘法确定组合系数 a_0，a_1 （推导出计算公式）。

解：记

$$\vec{\varphi}_0=[\varphi_0(x_1)\quad \varphi_0(x_2)\quad \cdots\quad \varphi_0(x_m)]^T$$
$$\vec{\varphi}_1=[\varphi_1(x_1)\quad \varphi_1(x_2)\quad \cdots\quad \varphi_1(x_m)]^T$$
$$\vec{y}=[y_1\quad y_2\quad \cdots\quad y_m]^T$$

显然，$\vec{\varphi}_0$ 是元素全为“ 1 ”的列向量。将所有实验数据的 X 坐标代入拟合函数，并令其分别等于实验数据的 Y 坐标值，得超定方程组

$$[\vec{\varphi}_0\quad \vec{\varphi}_1]\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\vec{y}$$

将方程组两端同乘以矩阵$[\vec{\varphi}_0\quad \vec{\varphi}_1]^T$，得正规方程组

$$\begin{bmatrix}(\vec{\varphi}_0\,,\vec{\varphi}_0) & (\vec{\varphi}_0\,,\vec{\varphi}_1)\\(\vec{\varphi}_1\,,\vec{\varphi}_0) & (\vec{\varphi}_1\,,\vec{\varphi}_{10})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\vec{\varphi}_0\,,\vec{y})\\(\vec{\varphi}_1\,,\vec{y})\end{bmatrix}$$

记 $\bar{x}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}x_i$ ，由于系数矩阵中两个非对角元素为

$$(\vec{\varphi}_0\,,\vec{\varphi}_1)=(\vec{\varphi}_1\,,\vec{\varphi}_0)=\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{m}x_i-m\bar{x}=0$$

所以

$$a_0=\frac{(\vec{\varphi}_0\,,\vec{y})}{(\vec{\varphi}_0\,,\vec{\varphi}_0)},\quad a_1=\frac{(\vec{\varphi}_1\,,\vec{y})}{(\vec{\varphi}_1\,,\vec{\varphi}_1)}$$

5．对某个物体的长度测量 n 次后，得 n 个近似值 x_1，x_2，……x_m，通常取平均值作为所求长度的值。试用最小二乘法原理说明其理由。

解：利用最小二乘原理，设物体的长度为 x，记

$$\delta_k = x - x_k\ (\ k = 1，2，\cdots\cdots，m)$$

则残差平方和为

$$\boldsymbol{S(x)=\sum_{k=1}^{m}(x-x_k)^2}$$

为了求上面函数极小值，由极值必要条件，令 $S'(x) = 0$，得

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{m}(x-x_k)=0}$$

由此得

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_k}$$

6．求 $f(x) = e^x$ 在区间[–1，1]上的三次最佳逼近多项式。

解：利用勒让德多项式作基函数，即 $P(x) = a_0\,p_0(x) + a_1\,p_1(x) + a_2\,p_2(x) + a_3\,p_3(x)$，其中

$$p_0(x) = 1，\ p_1(x) = x，$$

$$p_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}, \quad p_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

利用正交性，得系数为

$$a_n=\frac{(p_n,f)}{(p_n,p_n)}=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}p_n(x)f(x)dx \; (n=0，1，2，3)$$

而

$$\int_{-1}^{1}p_0(x)f(x)dx=\int_{-1}^{1}e^x dx=e-e^{-1}$$

$$\int_{-1}^{1}p_1(x)f(x)dx=\int_{-1}^{1}xe^x dx=2e^{-1}$$

$$\int_{-1}^{1}p_2(x)f(x)dx=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})e^x dx=e-7e^{-1}$$

$$\int_{-1}^{1}p_3(x)f(x)dx=\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)e^x dx=37e^{-1}-5e$$

$$a_0=\frac{1}{2}\times(e-e^{-1})\approx 1.1752，\; a_1=\frac{3}{2}\times 2e^{-1}\approx 1.1036，$$

$$a_2=\frac{5}{2}\times(e-7e^{-1})\approx 0.3578，\; a_3=\frac{7}{2}\times(37e^{-1}-5e)\approx 0.0705$$

所以，

$$P(x)=1.1752+1.1036\,x+0.3578(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})+0.0705(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)$$
$$=0.9963+0.9978\,x+0.5367\,x^2+0.1762\,x^3$$

7．在著名的高次插值的龙格反例中，$f(x)=\dfrac{1}{5+x^2}$ 在区间[–5，5]上的 10 次拉格朗日插值出现振荡现象。为了使插值余项极小化，可以利用切比雪夫多项式的极性。试推导 11 次切比雪夫多项式零点所对应[–5，5]的上的插值结点。

解：由 11 次切比雪夫多项式零点，得

$$x_k=5\cos(\frac{2k+1}{11}\frac{\pi}{2}) \; (k=0，1，2，\cdots\cdots，10)$$