使得 $h(m)=h(0)=a$。由 $m\neq 0$ 和习题 4.3 结论(任何非 0 自然数都是某个自然数的后继)知，m 是某个自然数 n 的后继。因而 $h(m)=h(n^+)=f(h(n))=a$，这与题设 $a\in A-\operatorname{ran} f$ 矛盾。故，$0\notin S$。

若 $S\neq\varnothing$，则依 $\mathbb{N}$ 上的良序定理，S 有最小元 n_0。又由 S 的定义知，存在 $m_0\in\mathbb{N}, m_0\neq n_0$，使得 $h(m_0)=h(n_0)$。注意到，对于 m_0 而言，由于有 $n_0\in\mathbb{N}, n_0\neq m_0$ 和 $h(n_0)=h(m_0)$，因此有 $m_0\in S$。

由 $m_0, n_0\in S$ 和 $0\notin S$ 知，$m_0\neq 0, n_0\neq 0$。再由习题 4.3 结论知，存在 $m_p, n_p\in\mathbb{N}$，使 $m_0=m_p^+, n_0=n_p^+$。从而由 h 的定义知：$f(h(m_p))=h(m_p^+)=h(m_0)=h(n_0)=h(n_p^+)=f(h(n_p))$，由 f 是单射和 $f(h(m_p))=f(h(n_p))$ 知，$h(m_p)=h(n_p)$。但由教材定理 4.4 和 $m_0\neq n_0$ 知，$m_p\neq n_p$。这就表明，$n_p\in S$。但 $n_0=n_p^+>n_p$，这与 n_0 是 S 最小元矛盾。

因此，S 必为空集。也即，不存在 $n, m\in\mathbb{N}, n\neq m$，使得 $h(n)=h(m)$。这就证明了 h 是单射。 □