第13章 习题讲解

中国海洋大学

计算机系

Ch13: 1

- [知识点]α_0,β_0 , α_1,β_1 ,γ_0的求法.
- 解 (1)极小支配集

$\Pi_{v\in V}(v+\Sigma_{u\in\Gamma(v)}u)$

$=(v_1+v_2+v_4+v_5)(v_2+v_1+v_3)(v_3+v_2+v_4)(v_4+v_3+v_1)(v_5+v_1+v_3)$

$=v_1v_3+v_1v_2+v_1v_4+v_1v_5+v_2v_3+v_3v_4+v_3v_5+v_2v_4v_5$

$\gamma_0=2$.

(2) 极小覆盖集：$\Pi_{(a,b)\in E}(a+b)= v_1v_3+v_2v_4v_5$, $\alpha_0=2$

(3) 由定理13.3知,极大独立集为$\{v_2 ,v_4 ,v_5\}$，$\{v_1,v_3\}$, $\beta_0=3$.

(4) 极大匹配有$\{a,c\},\{a,f\},\{b,d\},\{b,f\},\{c,e\}$, $\{d,e\}$, $\beta_1=2$.

(5) 极小边覆盖有$\{a,c,e\}$, $\{a,c,f\}$, $\{a,b,f\}$, $\{b,d,e\},\{b,d,f\}$,

$\{c,d,e\}$, $\alpha_1=3$

Ch13: 2

方法一：有定理8.11可知：完全图$K_{2k}(k\geq 1)$中含有k-1条边不重的哈密顿回路，且删除k-1条边不重的哈密顿回路后剩余k条彼此不相邻的边。每条哈密顿回路上存在2个边重的完美匹配，k-1条边不重的哈密顿回路共有2(k-1)个完美匹配，而$K_{2k}^{2(k-1)}$中删除这2(k-1)个完美匹配后剩余的k条边彼此不相邻，构成一个完美匹配，因此共有2(k-1)+k=2k-1个完美匹配。

方法二

$\chi'(K_{2k})=2k-1(k\geq 1)$,将$K_{2k}$用$(2k-1)$种颜色着色,同色边集合分别为$E_1,E_2,\ldots,E_{2k-1}$,显然这些集合都是边不重的匹配。下面证明Ei是完美匹配，即$|E_i|=k,i\leq 2k-1$.

由于$|V(K_{2k})|=2k$,因此$|E_i|\leq k$, $0\leq i\leq 2k-1$.假设$\exists E_s$, $|E_i|<k$,则

$$\sum_{i=1}^{2k-1}|E_i| < k(2k-1) = m = \frac{2k(2k-1)}{2}$$

m是K_{2k}的边数,这意味着K_{2k}中有未着色的边,与$\chi'(K_{2k})=2k-1$矛盾。

Ch13:3

3.证明：对于任意无向图G，有$\alpha_0 \geq \delta(G)$。

[分析]利用定理13.3及其推论证明

证明 反证法.

假设$\alpha_0<\delta$, 设V^*是G的最小点覆盖集,则$|V^*|=\alpha_0<\delta$, 由定理13.3知,$V-V^*$是G的最大独立集,从而$\forall v\in V-V^*$,v的邻域$N(v)\subseteq V^*$,所以$|N(v)| \leq |V^*|=\alpha_0<\delta$,即$d(v)<\delta$,这与$d(v) \geq \delta$矛盾.

Ch13: 4

[分析]只需证明不存在完美匹配,利用定理13.10

证明：构造无向图$G=\langle V,E\rangle$

$V=\{v|v$位于棋盘的一个1×1的方格内$\}$

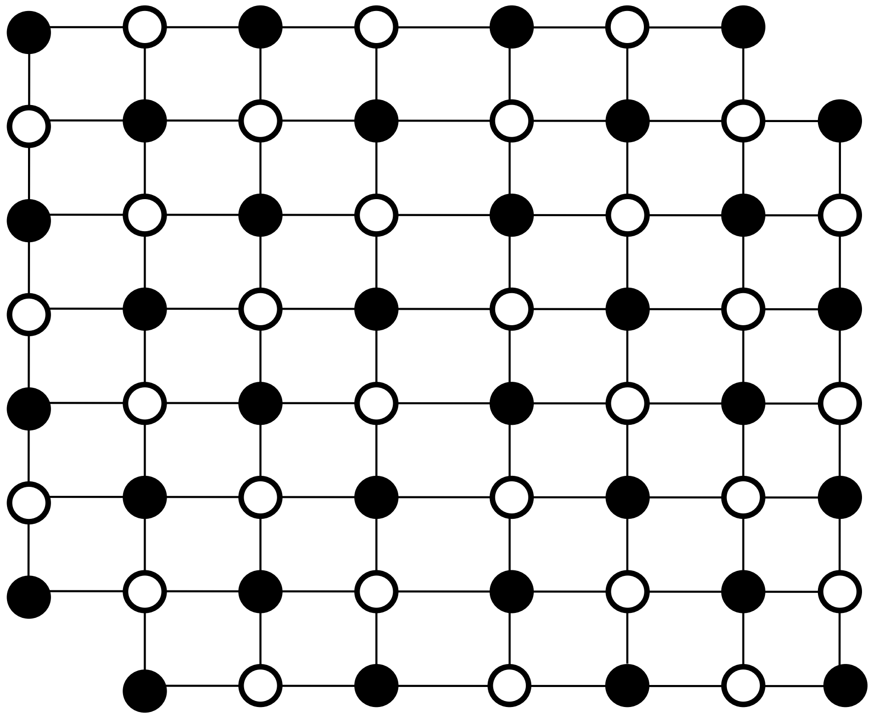
$E=\{(u,v)|u,v\in V,u,v$所在的方格相邻$\}$

故1×2的方格代表一条边,那么问题就转换为图G是否存在完美匹配.

由题意可知$|V|=62$.令$V^*=\{v|v$位于棋盘的白格中$\}$,

则$|V^*|=30$,$p_{奇}(G-V^*)=32>|V^*|$,所以G中不存在完美匹配,因而命题得证.

题4的图



Ch13：5

- [分析]利用完美匹配的定义
- 证明 (⇒)反证法.假设第1个人得胜且G中有完美匹配M.不妨设第一取点的人为甲,令一个人为乙.因为存在完美匹配,无论甲如何取v_0点, v_0一定是饱和点,那么存在边$(v_0, v_1)\in M$,乙可取点v_1.无论甲如何取点v_2,$(v_1, v_2)\in E-M$,又v_2是M的饱和点,故存在v_3使得$(v_2, v_3) \in M$,依次进行下去,乙是最后取点的人,即乙获胜,与甲得胜矛盾.

题5续

- (⇐)G中不存在完美匹配,设M是G的最大匹配,则G中一定存在M的非饱和点.甲先选取非饱和点v_0,乙无论如何选择v_1,总有$(v_0, v_1)\in E-M$.甲再选点时,由于M是最大匹配,故总能选到饱和点v_2,使得$(v_1, v_2)\in M$,乙再选点v_3,一定有$(v_2, v_3)\in E-M$.依次进行下去,因为G中无M的增广路径，故最后选点的人一定是甲,故甲得胜.

Ch13：7

7. [分析]判断是否存在完美匹配,应用t条件

解 构造无向图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$,

$V_1=\{v|v$是小伙子$\}$

$V_2=\{v|v$是姑娘$\}$

$E=\{(u,v)|u\in V_1, v\in V_2$,且$u$与$v$互相认识$\}$

由题意知,$\forall u \in V_1$, $d(u)\geq 2$,而$\forall v \in V_2$, $d(v)\leq 2$.所以G满足t条件,故存在完备匹配M,由于$|V_1|=|V_2|$,所以M也是完美匹配.按M中边关联的结点配对即可.

Ch13：8

8.[分析]求二部图的完备匹配问题.

解　构造二部图$G=<V_1,V_2,E>$,

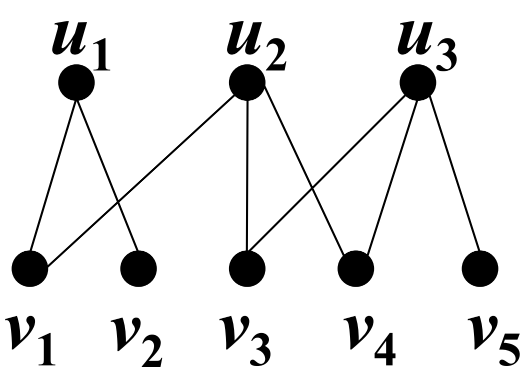
$V_1=\{u_1,u_2,u_3\}$, u_1是物理组, u_2是化学组, u_3是生物组.

$V_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$, v_1:张, v_2:王, v_3:李, v_4:赵, v_1:陈.

$E=\{(u,v)|u\in V_1, v\in V_2$,且$v$是$u$的成员$\}$

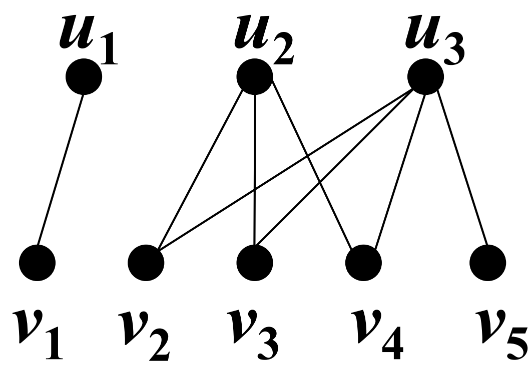
根据(1)(2)(3)的条件,分别画出二部图,然后证明是否存在完备匹配.

(1)其二部图如右图,满足t=2的t条件,故存在完备匹配,所以可以选取3名不兼职的组长,共有11种不同的方案,即有11中不同的完备匹配.

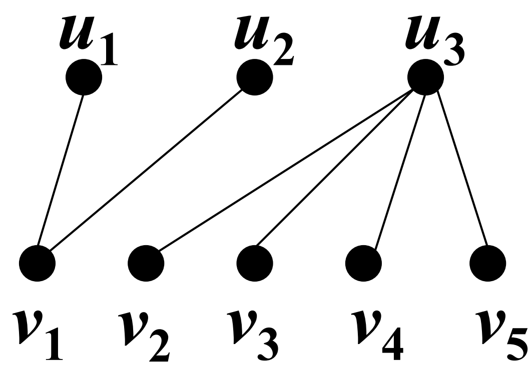


题8续

(2)右图满足相异性条件,故存在完备匹配,共有9种.所以可以选取3名不兼职的组长,共有9种不同的方案.



(3) $S=\{u_1, u_2\}$,$|N(S)|=|\{v_1\}|=1<|S|$,
因此二部图不满足相异性条件,所以不存在完备匹配,因此不能选出3名不兼职的组长.



补充题

$$\beta_1(W_n)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{2} & n\ is\ odd\\[2ex] \dfrac{n}{2} & n\ is\ even\end{cases}\qquad \alpha_0(W_n)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & n\ is\ odd\\[2ex] \dfrac{n}{2}+1 & n\ is\ even\end{cases}$$

$$\beta_1(C_n)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\quad \alpha_0(C_n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$$