第十章 波动

波动是振动的传播过程。

波源：激发波动的振动系统

机械波：机械振动在介质中的传播过程

电磁波：变化的电场和变化的磁场在空间的传播过程。

波动是一切微观粒子的属性，与微观粒子对应的波称为物质波。

10.1 机械波的几个概念

一、机械波产生的条件

1、有作机械振动的物体，即波源

2、有连续的介质

如果波动中使介质各部分振动的回复力是弹性力，则称为弹性波。

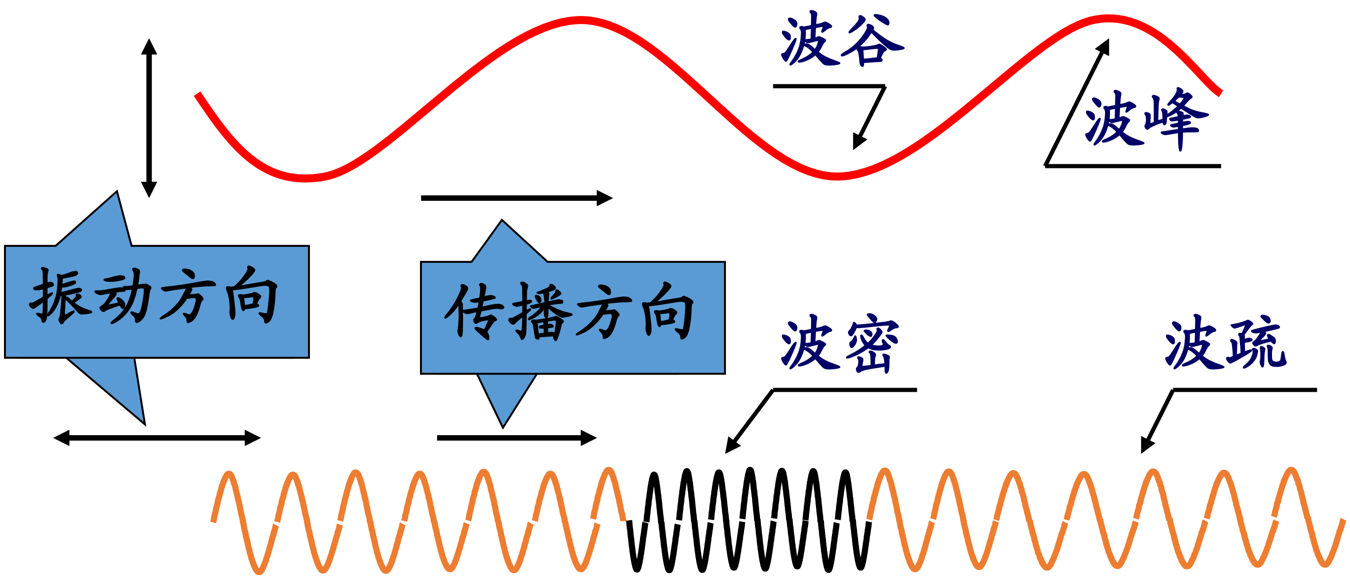
注意

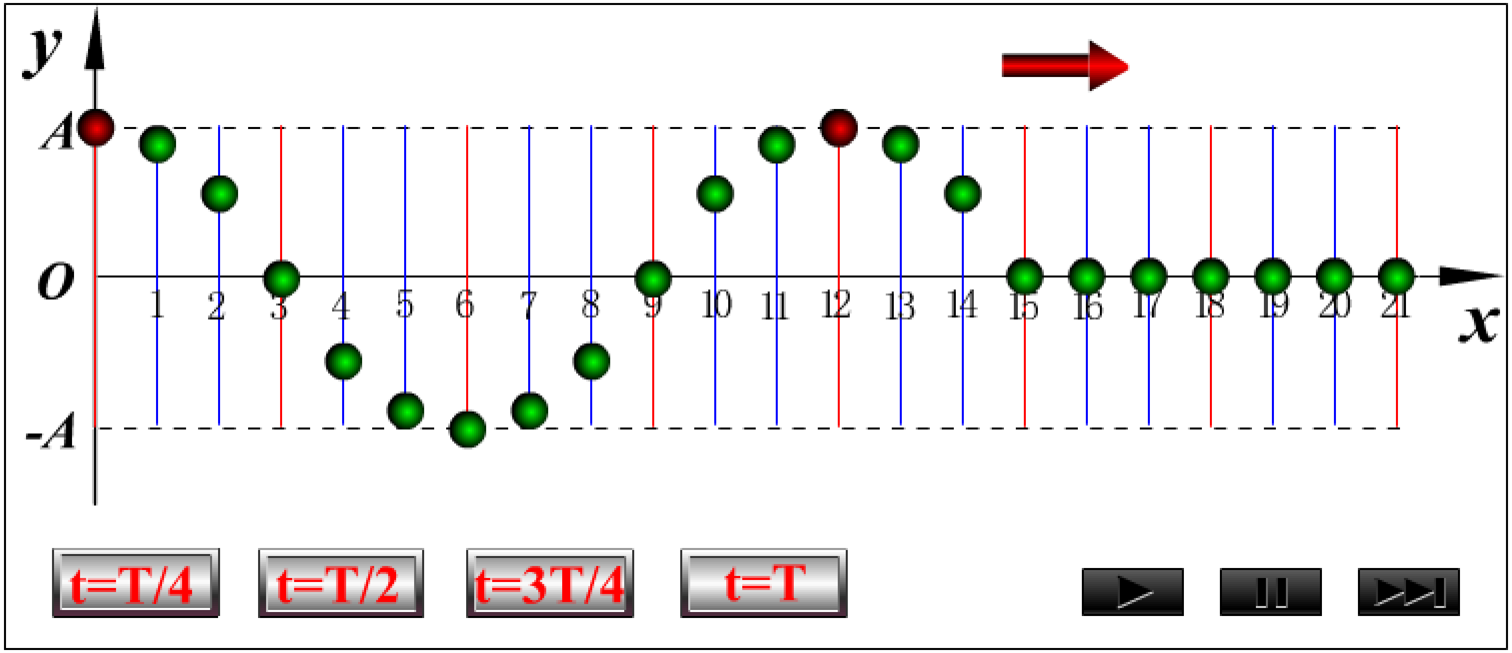
波是运动状态的传播，介质的质点并不随波传播.

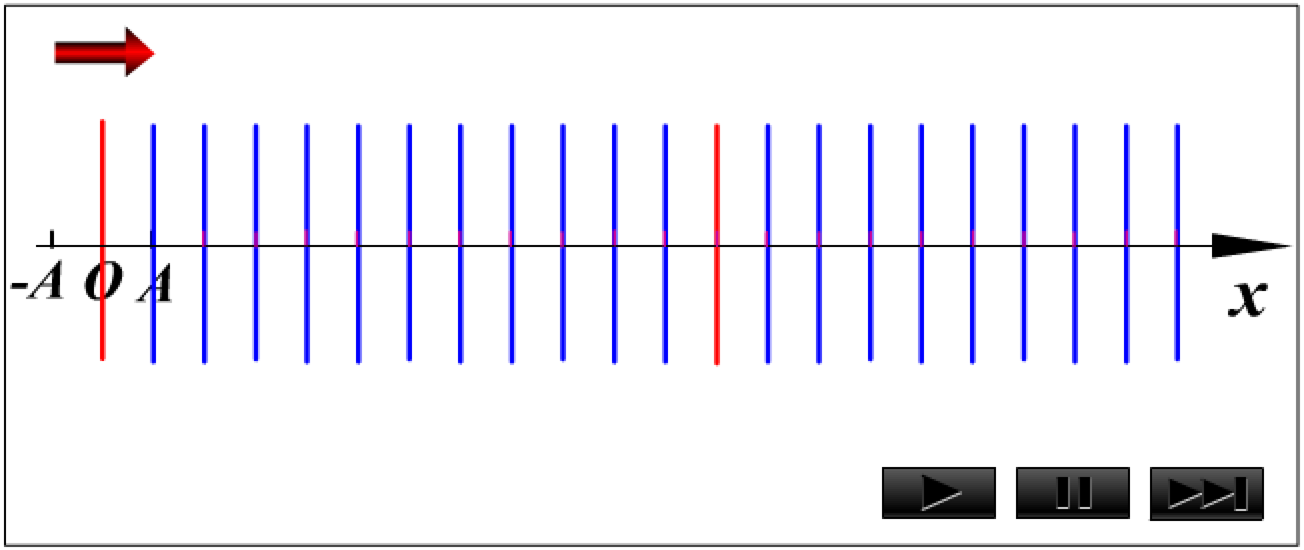
二 .横波和纵波

横波： 质点的振动方向和波的传播方向垂直。

纵波： 质点的振动方向和波的传播方向平行。




y
A
O
-A
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
x
t=T/4
t=T/2
t=3T/4
t=T


-A
O
A
x

横波在介质中传播时，产生机械横波需要与传播方向垂直的切向力，因此只能在固体中传播。

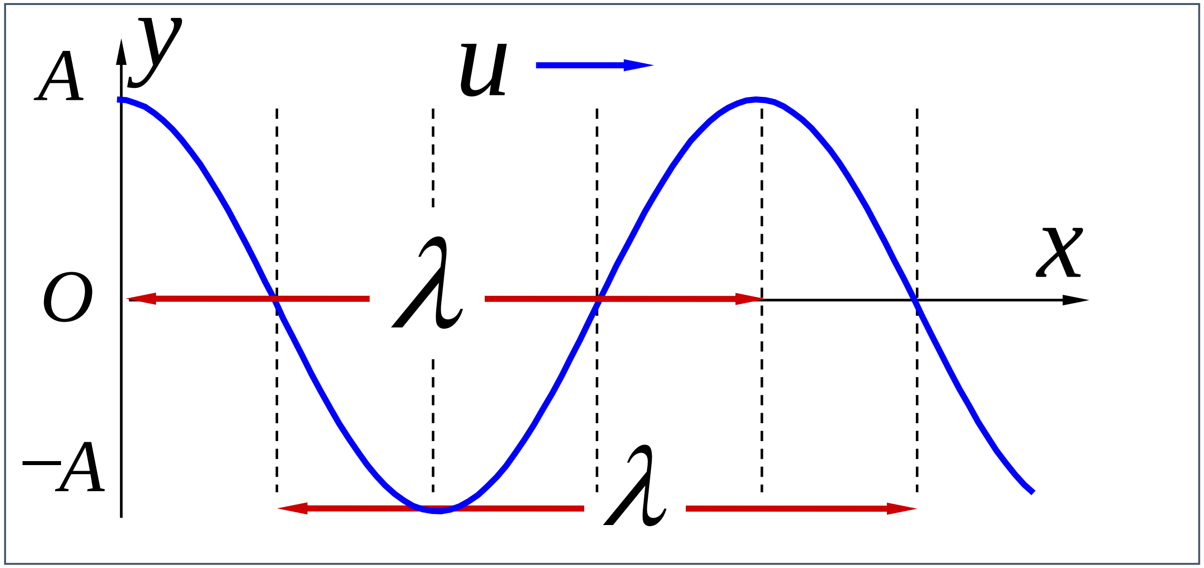
纵波在介质中传播时，产生机械纵波需要介质的压缩和伸张，因此可以在固体、液体和气体中传播。

结论：机械波向外传播的是波源（及各质点）的振动状态和能量，介质的质点并不随波前进

三、描述波动的几个物理量

1.波长

波传播方向上相邻两振动状态完全相同的质点间（相位差为2π）的距离（一完整波的长度）.



2、波的周期和频率

波的周期：一个完整波形通过介质中某固定点所需的时间，用T表示。

$$T=\frac{\lambda}{u}$$

波的频率：单位时间内通过介质中某固定点完整波的数目，用ν表示。

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{u}{\lambda}$$

3.波速u

波在介质中传播的速度，也称为相速。

例如，声波在空气中 $340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

水　中 $1\,500\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

钢铁中 $5\,000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

决定于介质的性质（弹性模量和密度）

在固体媒质中横波波速为 $u_{\perp} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

在固体媒质中纵波波速为 $u_{//} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

G、E为媒质的切变弹性模量和杨氏弹性模量
ρ为介质的密度

在同一种固体媒质中，横波波速比纵波波速小些

四个物理量的联系

$$\nu = 1/T$$

$$\lambda = T \cdot u = \frac{u}{\nu}$$

u 介质决定

ν 波源决定

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

注意

周期或频率只决定于波源的振动

波速只决定于介质的性质

四、波线和波面

波场--波传播到的空间。

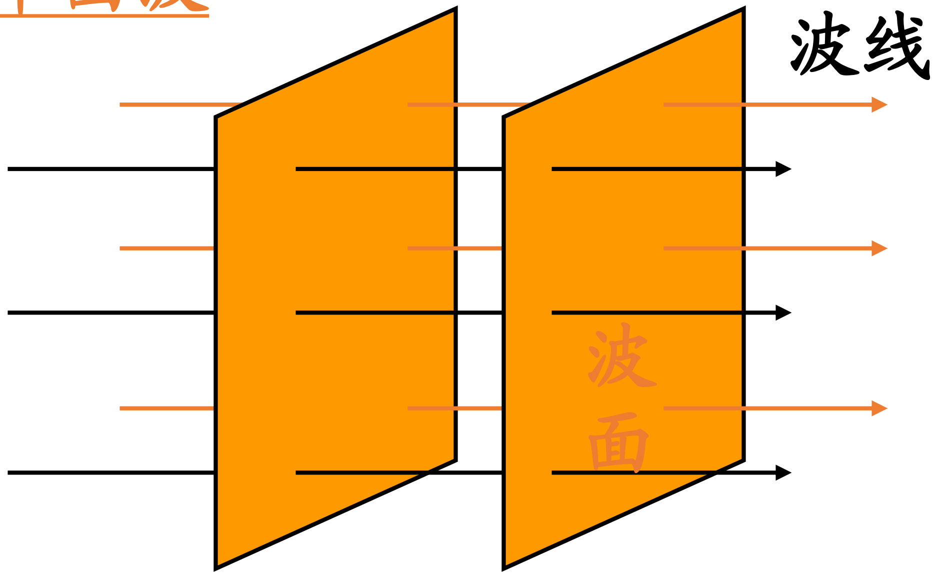
波线（波射线）--代表波的传播方向的射线。

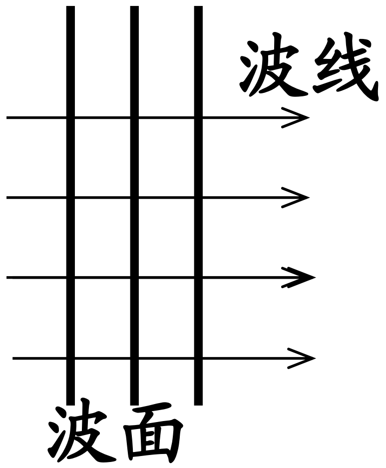
波面--波场中同一时刻振动相位相同的点的轨迹。

波前--某时刻波源最初的振动状态传到的波面。

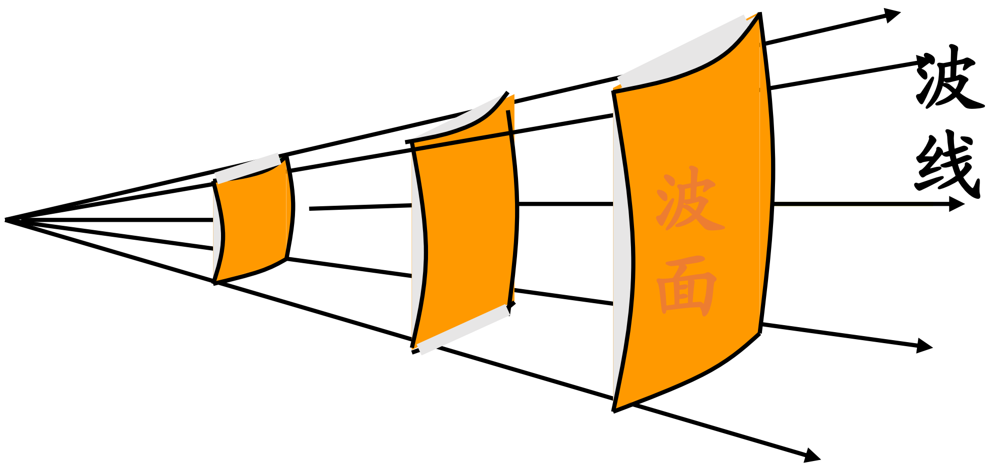
在任何时刻，波面有无数多个，最前方的波面即是波前。波前只有一个。

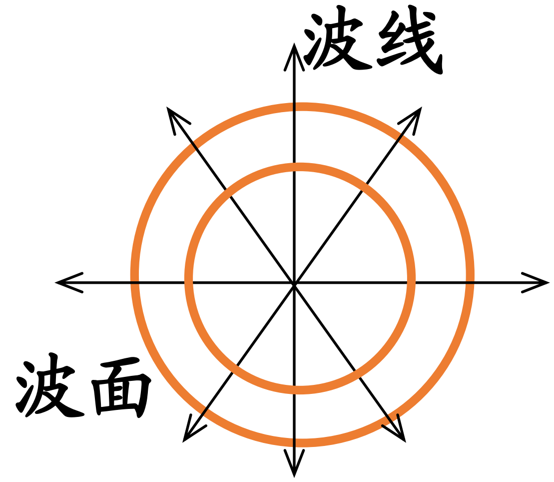
平面波





球面波





各向同性均匀介质中，波线恒与波面垂直.

沿波线方向各质点的振动相位依次落后。

在远离波源的球面波波面上的任何一个小部份，都可视为平面波。

波源以及介质中各个质点也作简谐振动，这时的波动称为简谐波

任何复杂的波都可以看成若干个简谐波叠加而成

简谐波只能发生于各向同性、均匀、无限大、无吸收的连续介质中

波长是在波传播方向上相邻两个______的距离？

A 位移相同点

B 运动速度相同点

C 振动相位相同点 ✓

当波动从一种介质透入到另一种介质中，哪些物理量不变？

A 波长

B 频率 ✓

C 波速

例10.1.1 频率为*3000Hz*的声波，以*1560m/s*的传播速度沿一波线传播，经过波线上的A点后，再经*13cm*而传至B点。求(1) B点的振动比A点落后的时间。(2) 波在A、B两点振动时的相位差是多少? (3) 设波源作简谐振动，振幅为*1mm*，求振动速度的幅值，是否与波的传播速度相等?

解 (1) 波的周期 $T=\dfrac{1}{\nu}=\dfrac{1}{3000}\,\mathrm{s}$

波长 $\lambda=\dfrac{u}{\nu}=\dfrac{1.56\times10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{3000\,\mathrm{s^{-1}}}=0.52\,\mathrm{m}=52\,\mathrm{cm}$

B点比A点落后的时间为

$$\frac{0.13\mathrm{m}}{1.56\times10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}=\frac{1}{12000}\mathrm{s}$$ 即$\dfrac{T}{4}$

(2) A、B两点相差$\dfrac{13}{52}=\dfrac{\lambda}{4}$， B点比A点落后的相差为

$$\frac{\lambda}{4}\times 2\pi=\frac{\pi}{2}$$

(3) 振幅A=1mm，则振动速度的幅值为

$$v_m=A\omega=0.1\text{cm}\times 3000\text{s}^{-1}\times 2\pi$$

$$=1.88\times 10^3\ \text{cm/s}=18.8\,\text{m/s}$$

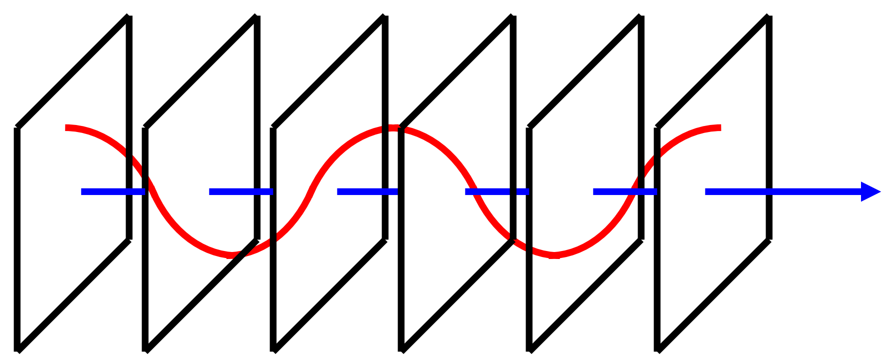
振动速度是交变的，其幅值为18.8m/s，远小于波速

10.2 平面简谐波的波函数

波动方程：描述介质中各质点的位移随时间的变化关系。

平面简谐波传播时，介质中各质点都作简谐振动，在任一时刻，各点的振动相位、位移一般不同。据波面的定义可知，任一时刻在同一波面上的各点有相同的相位，相同的位移。可用其中一根波线为代表研究平面波的传播规律

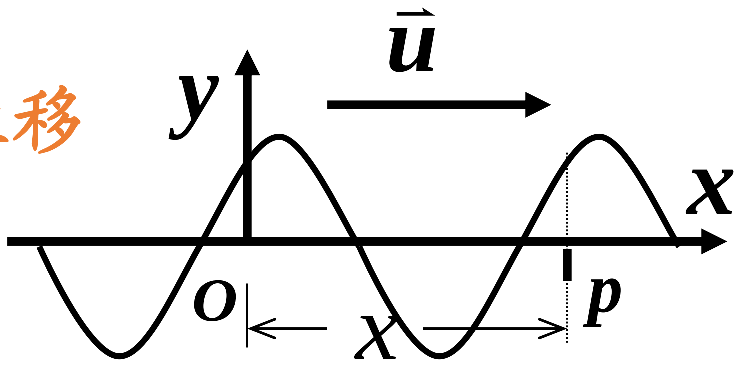
平面简谐波



一、平面简谐波的波动方程

一平面简谐波在理想介质中沿x轴正向传播，x轴即为某一波线

设原点振动表达式： $y_0 = A\cos\omega t$

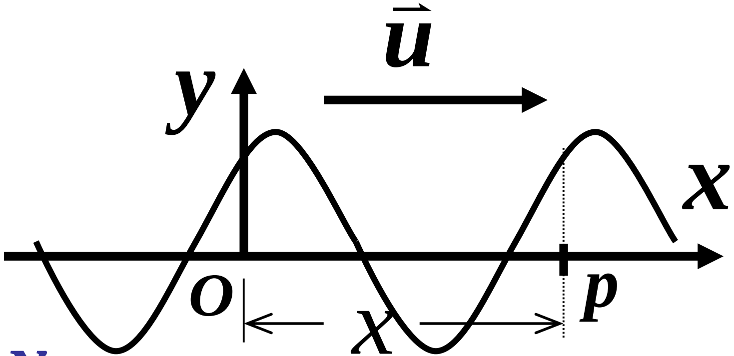


y表示该处质点偏离平衡位置的位移

x为p点在x轴的坐标

O点振动状态传到p点需用 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$

t 时刻p处质点的振动状态重复



$t-\dfrac{x}{u}$ 时刻O处质点的振动状态

p点的振动方程：$y=A\cos\omega(t-\dfrac{x}{u})$

沿x轴正向传播的平面简谐波的波动方程

沿着波传播方向，各质点的振动依次落后于波源振动

$-\dfrac{x}{u}$ 为p点的振动落后于原点振动的时间

沿x轴负向传播的平面简谐波的波动方程

$$y=A\cos\omega(t+\frac{x}{u})$$

若波源（原点）振动初位相不为零 $y_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

或

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

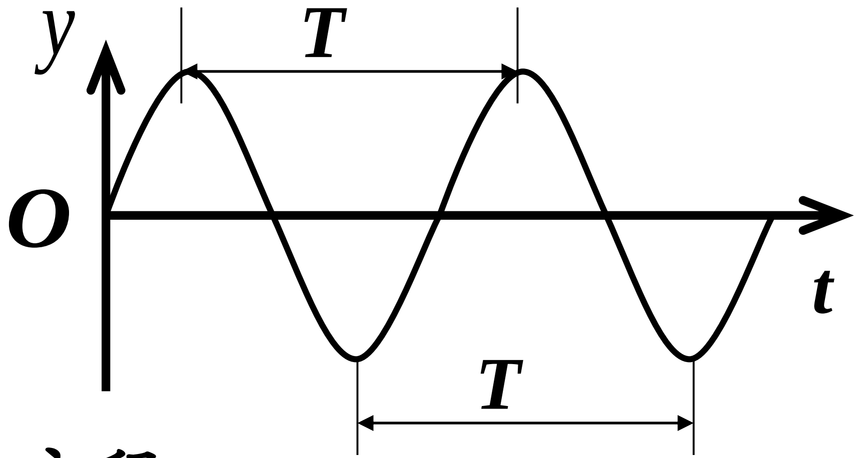
$$y = A\cos[2\pi \nu t \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0]$$

$$y = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi_0)$$

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ <u>波矢</u>，表示在2π长度内所具有的完整波的数目。

二、波动方程的物理意义

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$



1、如果给定x，即$x=x_0$

则$y=y(t)$ 为x_0处质点的振动方程

$$y(t) = A\cos(\omega t - \frac{2\pi x_0}{\lambda} + \varphi_0)$$

x_0处质点的振动初相为 $-\frac{2\pi x_0}{\lambda}+\varphi_0$

$\frac{2\pi x_0}{\lambda}$ 为x_0处质点落后于原点的相位

若$x_0=\lambda$ 则 x_0处质点落后于原点的相位为2π

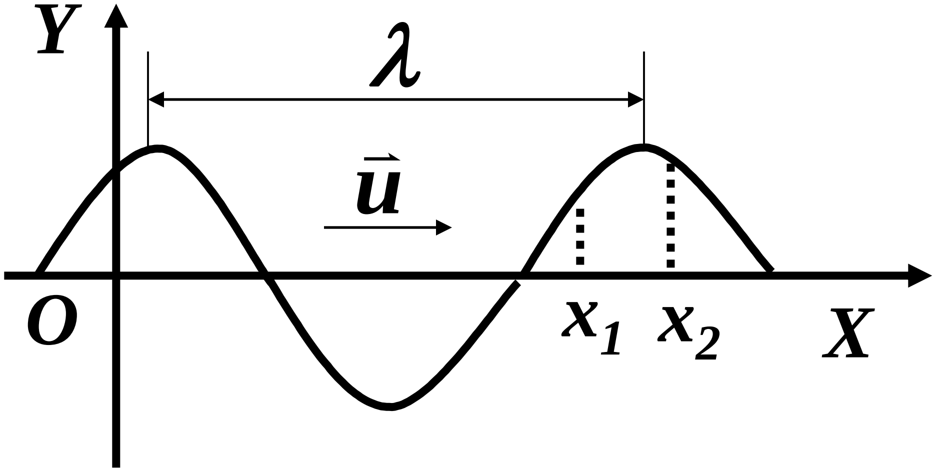
λ是波在空间上的周期性的标志

同一波线上任意两点的振动位相差

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-\frac{x_2-x_1}{\lambda}2\pi=-\frac{\Delta x}{\lambda}2\pi$$

2、如果给定t，即$t=t_0$ 则$y=y(x)$

$$y=A\cos[\omega(t_0-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$



表示给定时刻波线上各质点在同一时刻的位移分布，即给定了t_0时刻的波形

同一质点在相邻两时刻的振动位相差

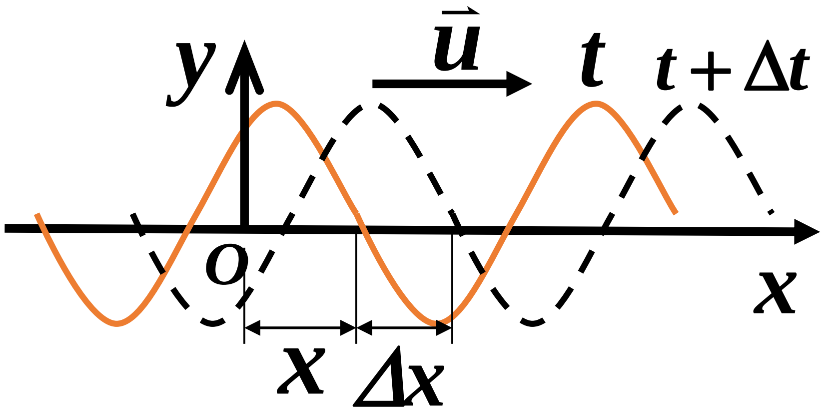
$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\omega(t_2-t_1)=\frac{\Delta t}{T}2\pi$$

T是波在时间上的周期性的标志

3.如x,t 均变化y=y(x,t)包含了不同时刻的波形

t时刻的波形方程

$$y(x)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$



$t+\Delta t$时刻的波形方程

$$y(x)=A\cos[\omega(t+\Delta t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

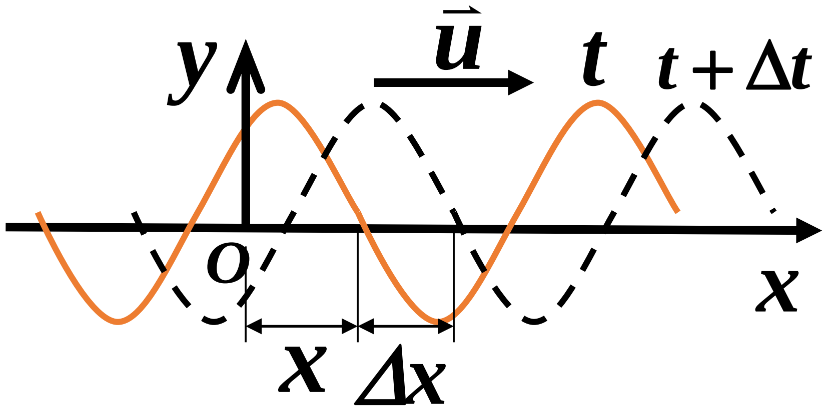
t时刻,x处的某个振动状态经过Δt，传播了Δx的距离

$$y(x+\Delta x,t+\Delta t)=A\cos[\omega(t+\Delta t-\frac{x+u\Delta t}{u})+\varphi_0]$$
$$=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$y(x+\Delta x,t+\Delta t)=y(x,t)\quad y(x+u\Delta t,t+\Delta t)=y(x,t)$$

$$y(x+\Delta x, t+\Delta t) = y(x,t)$$

$$y(x+u\Delta t, t+\Delta t) = y(x,t)$$



在时间Δt内整个波形沿波的传播方向平移了一段距离Δx

$$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

P点振动比O点超前了 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$

$$y_P(t) = y_0(t+\Delta t) = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

例10.2.1 一平面简谐波沿Ox轴正方向传播， 已知振幅$A=1.0m$,周期$T=2.0s$，波长$\lambda=2.0m$. 在$t=0$时坐标原点处的质点在平衡位置沿Oy轴正方向运动．求：(1)波动方程； (2)$t=1.0s$时的位移，并画出该时刻的波形图（3）$x=0.5m$处质点的振动规律并作图.

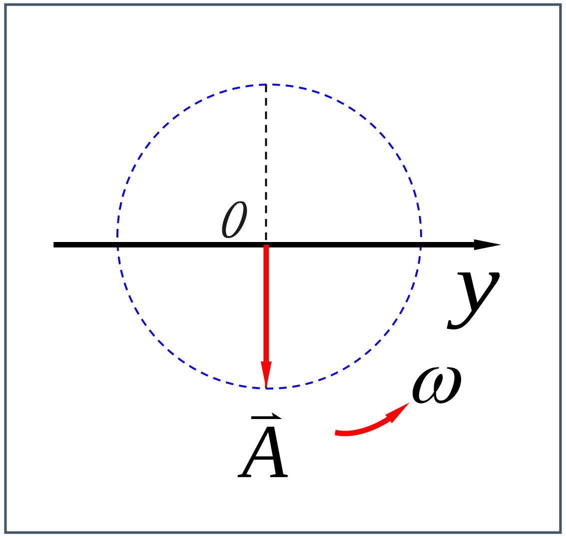
解 (1) 写出波动方程的标准式

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$t=0 \quad x=0$$

$$y=0, v=\frac{\partial y}{\partial t}>0$$

$$\boxed{\varphi=-\frac{\pi}{2}}$$



$$y=\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}] \text{ (m)}$$

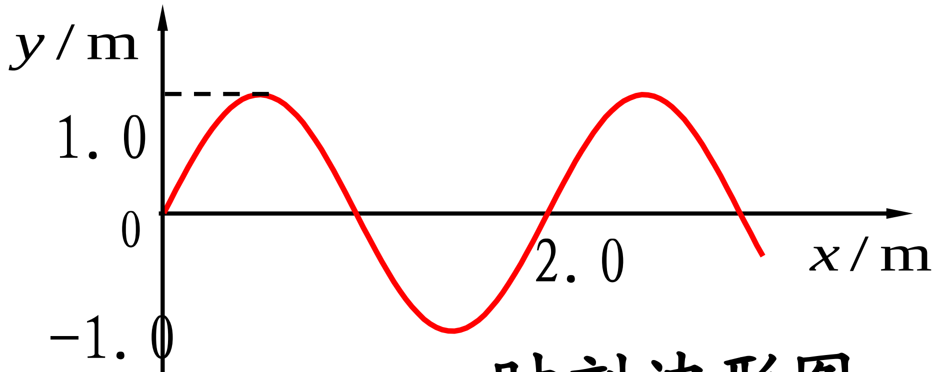
(2) 求t=1.0s时波形图

$$y = 1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}) - \frac{\pi}{2}]$$

$$y = 1.0\cos[\frac{\pi}{2} - \pi x]$$

$$= \sin \pi x \quad (\mathrm{m})$$

t=1.0s时波形方程



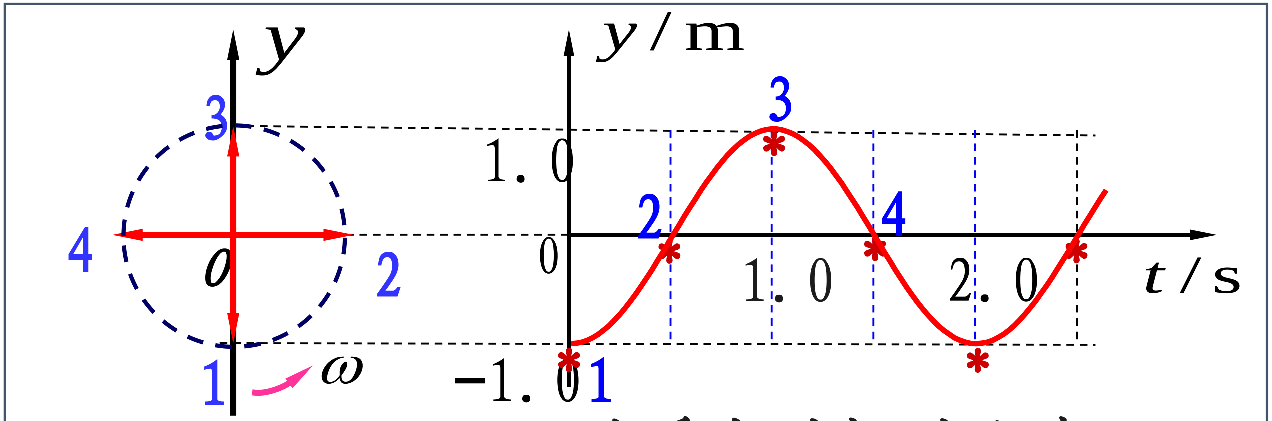
$t = 1.0\,\mathrm{s}$ 时刻波形图

(3)*x*=0.5m处质点的振动规律并作图

$$y = 1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}) - \frac{\pi}{2}]$$

x=0.5m处质点的振动方程

$$y = \cos[\pi t - \pi] \quad (\mathrm{m})$$



$x = 0.5\,\mathrm{m}$ 处质点的振动曲线

练10.2.1 已知波动方程为求 $y = 0.1\cos\frac{\pi}{10}(25t - x)\quad SI$

（1）振幅、波长、周期、波速 （2）距原点8m和10m两点振动的相位差 （3）波线上某质点在时间间隔0.2s内的相位差

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad y = 0.1\cos\frac{25\pi}{10}\left(t - \frac{x}{25}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.8s\,,\ \lambda = uT = 20m$$

$$\Delta\varphi = -\frac{x_2 - x_1}{\lambda}2\pi = -\frac{2}{20}2\pi = -\frac{\pi}{5}$$

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \frac{\pi}{2}$$

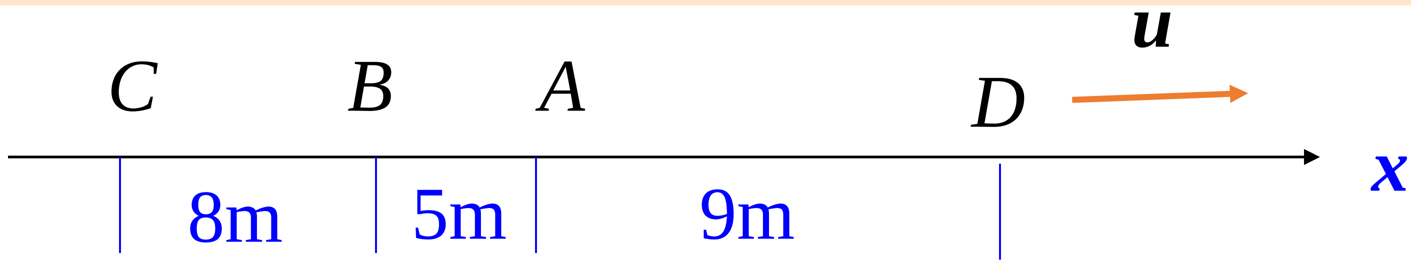
例10.2.2 一平面波在介质中以速度u=20m/s沿直线传播，已知在传播路径上某点A的振动方程为$y_A = 3\cos 4\pi t$

1）A为坐标原点，波动方程以及C D两点振动方程

2）若B为坐标原点，波动方程以及C D两点振动方程

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.5s$$

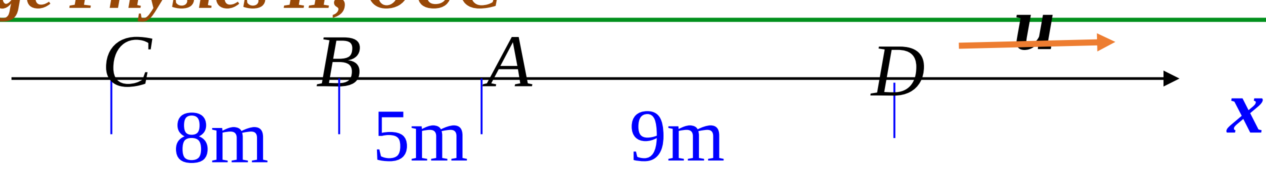
$$\lambda = uT = 10m$$



$$y_0 = y_A = 3\cos 4\pi t \qquad y = 3\cos 4\pi (t - \frac{x}{20})$$

A为原点， x_C=−13m， x_D=9m

$$y_C = 3\cos 4\pi (t - \frac{x_C}{20}) = 3\cos 4\pi (t + \frac{13}{20})$$



$$y_D = 3\cos 4\pi\left(t - \frac{x_D}{20}\right) = 3\cos 4\pi\left(t - \frac{9}{20}\right)$$

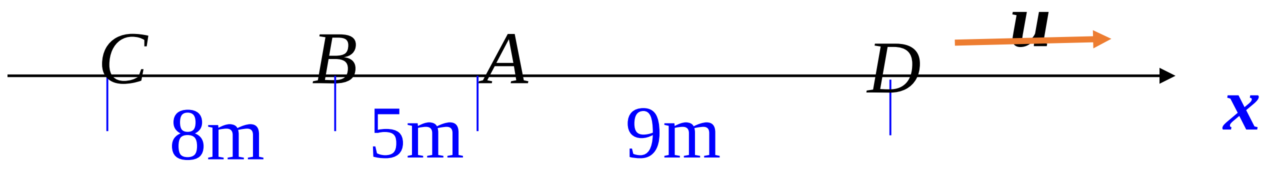
2）若B为原点，设 $y_0 = y_B = 3\cos(4\pi t + \varphi_0)$

$$y = 3\cos\left[4\pi\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$y_A = 3\cos\left[4\pi\left(t - \frac{x_A}{20}\right) + \varphi_0\right] = 3\cos\left[4\pi\left(t - \frac{5}{20}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= 3\cos 4\pi t \Rightarrow \varphi_0 = \pi$$

$$y = 3\cos\left[4\pi\left(t - \frac{x}{u}\right) + \pi\right]$$



$$y(x+\Delta x, t+\Delta t) = y(x,t)$$

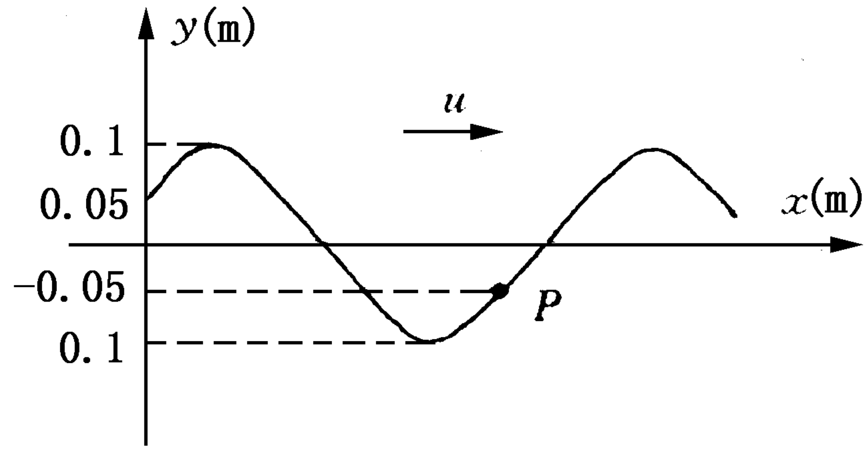
由B点向A点传播 $\quad y(x_A, t+\Delta t) = y(x_B, t)$

$$y_0 = y_B(t) = y_A(t+\Delta t) = 3\cos 4\pi(t+0.25) = 3\cos(4\pi t+\pi)$$

$$y_C = 3\cos\left[4\pi(t-\frac{x_C}{20})+\pi\right] = 3\cos(4\pi t+\frac{13}{5}\pi)$$

$$y_D = 3\cos\left[4\pi(t-\frac{x_D}{20})+\pi\right] = 3\cos(4\pi t-\frac{9}{5}\pi)$$

练10.2.2一列机械波沿轴正向传播，*t=0*时的波形如图所示，已知波速为*10 m/s*，波长为*2m*，求：(1)波动方程； (2)p点的振动方程 (3)p点的坐标； (4)p点回到平衡位置所需的最短时间.



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi u}{\lambda} = 10\pi$$

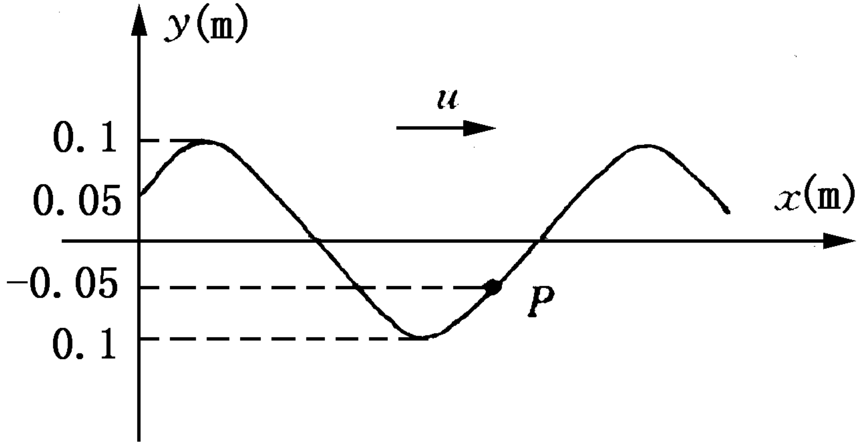
$$\boldsymbol{y_0 = 0.1\cos(10\pi t + \frac{\pi}{3})}$$

$$y = 0.1\cos[10\pi(t - \frac{x}{10}) + \frac{\pi}{3}]$$

(2)由图知， $t = 0$ $\quad y_P = -\frac{A}{2}, v_P < 0 \quad \phi_P = \frac{-4\pi}{3}$

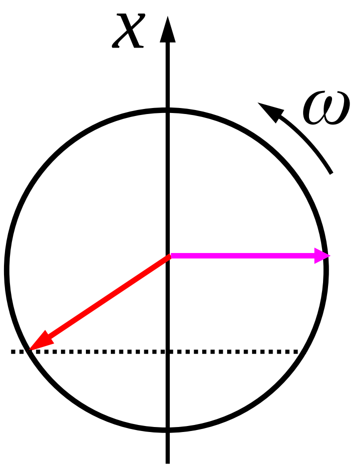
$$y_p = 0.1\cos(10\pi t - \frac{4}{3}\pi)$$

$$\left[10\pi\left(t-\frac{x}{10}\right)+\frac{\pi}{3}\right]_{t=0}=-\frac{4}{3}\pi$$



$$x=\frac{5}{3}=1.67m$$

$$\Delta\phi=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{6}\pi$$



$$\Delta t=\frac{\Delta\phi}{\omega}=\frac{5\pi/6}{10\pi}=\frac{1}{12}s$$

作业：8 10 13 14 15 16 17

作业(五)：6 8 10 11 12 13 14

10.3 波的能量 能流密度

波不仅是振动状态的传播，而且也是伴随着振动能量的传播。

一、波的能量和能量密度

有一平面简谐波 $y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

在x处取一体积元dV 质量为$dm=\rho dV$

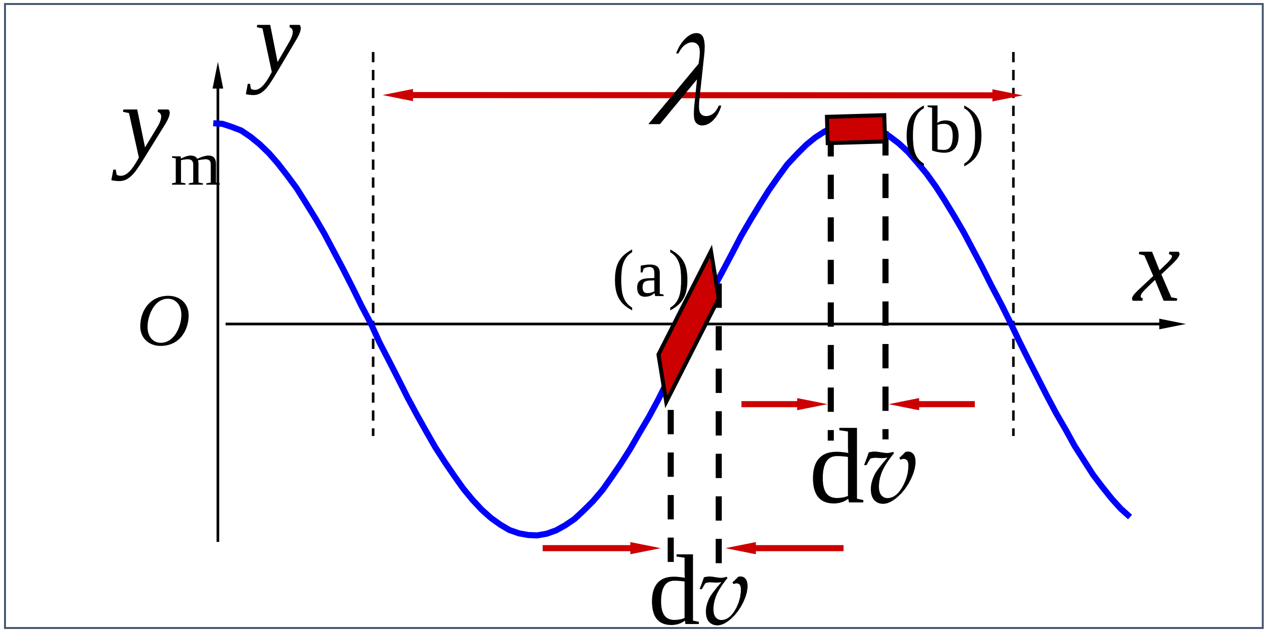
质点的振动速度 $v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

体积元内媒质质点动能为

$$dE_k=\frac{1}{2}v^2dm=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]dV$$

弹性势能

$$dW_p = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]dV$$



体积元内媒质质点的总能量为：

$$dE = dE_k + dE_p = \rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]dV$$

1）在波动的传播过程中，任意时刻的动能和势能不仅大小相等而且相位相同，同时达到最大，同时等于零。

- ✓ 体积元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大.
- ✓ 体积元在位移最大处时，三者均为零.

2）在波传动过程中，任意体积元的能量不守恒。

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$dE = \rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]dV$$

能量密度　单位体积介质中所具有的波的能量。

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

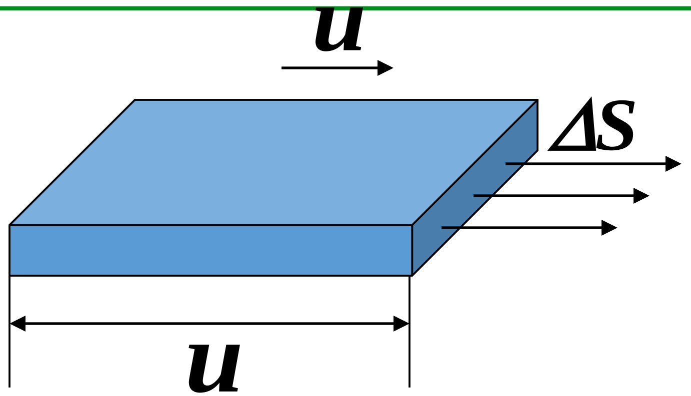
平均能量密度　一个周期内能量密度的平均值。

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w dt = \frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]dt$$

$$T = \pi/\omega \qquad \int_0^\pi \sin^2\theta\cdot d\theta = 1/2$$

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

二、波的能流和能流密度



能流: 单位时间内通过介质中某一截面的能量。 $p = wu\Delta S$

平均能流: 在一个周期内能流的平均值。

$$\overline{p} = \overline{wu\Delta S} = \overline{w}u\Delta S$$

能流密度（波的强度）:

通过垂直于波动传播方向的单位面积的平均能量。

$$I = \frac{\overline{p}}{\Delta S} = \overline{w}u \qquad I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$$

单位: 瓦•米$^{-2}$

分析平面波和球面波的振幅

例 试证明在均匀不吸收能量的媒质中传播的平面波在行进方向上振幅不变，球面波的振幅与离波源的距离成反比。

证明：对平面波：

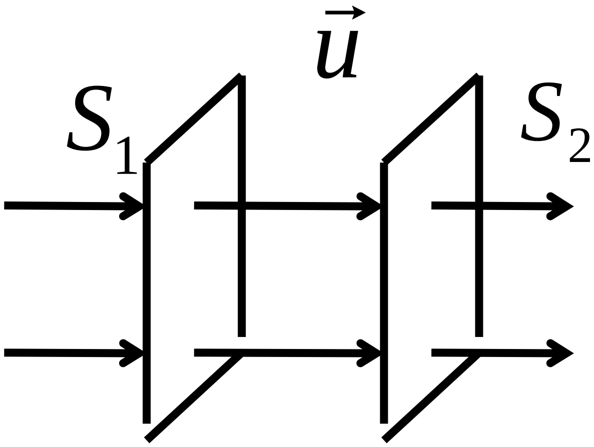
在一个周期T内通过S_1和S_2面的能量应该相等

$$\because I_1S_1T = I_2S_2T,$$

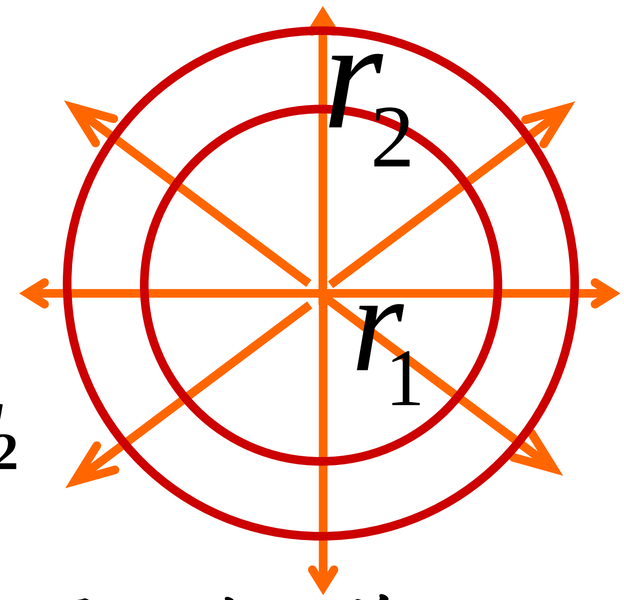
$$S_1 = S_2 = S$$

$$\frac{1}{2}\rho u\omega^2A_1^2S_1T = \frac{1}{2}\rho u\omega^2A_2^2S_2T$$

所以，平面波振幅相等。 $A_1 = A_2$



对球面波:



$$\because \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^2 S_1 T = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^2 S_2 T$$

$$S_1 = 4\pi r_1^2;\quad S_2 = 4\pi r_2^2 \quad \therefore A_1 r_1 = A_2 r_2$$

所以振幅与离波源的距离成反比。如果距波源单位距离的振幅为A则距波源r处的振幅为A/r

由于振动的相位随距离的增加而落后的关系，与平面波类似，球面简谐波的波函数:

$$y = \frac{A}{r}\cos[\omega(t - \frac{r}{u}) + \varphi_0]$$

三、波的吸收

波在实际介质中，由于波动能量总有一部分会被介质吸收，波的机械能不断减少，波强亦逐渐减弱。

波通过厚度为dx的介质，其振幅衰减量为$-dA$

$$-dA = \alpha A dx \qquad A = A_0 e^{-\alpha x}$$

A_0、A分别是$x=0$和$x=x$处的波振幅

α是介质的吸收系数

波强的衰减规律:

$$I = I_0 e^{-2\alpha x}$$

I_0、I 分别是$x=0$和$x=x$处波的强度

例10.3.1 空气中声波的吸收系数为$\alpha_1=2\times10^{-11}v^2\ m^{-1}$，钢中的吸收系数为$\alpha_2=4\times10^{-7}v\ m^{-1}$，式中$v$代表声波频率的数值。问$5MHz$的超声波透过多少厚度的空气或钢后，其声强减为原来的1%?

解 据题意，空气和钢的吸收系数分别为

$$\alpha_1=2\times10^{-11}\times(5\times10^6)^2\mathrm{m}^{-1}=500\mathrm{m}^{-1}$$

$$\alpha_2=4\times10^{-7}\times(5\times10^6)\,\mathrm{m}^{-1}=2\mathrm{m}^{-1}$$

把α_1、α_2分别代入$I=I_0e^{-2\alpha x}$或下式，

$$x=(1/2\alpha)\ln(I_0/I)$$

据题意有 $I_0/I=100$，得空气的厚度

$$x_1=\frac{1}{1000}\ln 100\,\mathrm{m}=0.0046\,\mathrm{m}$$

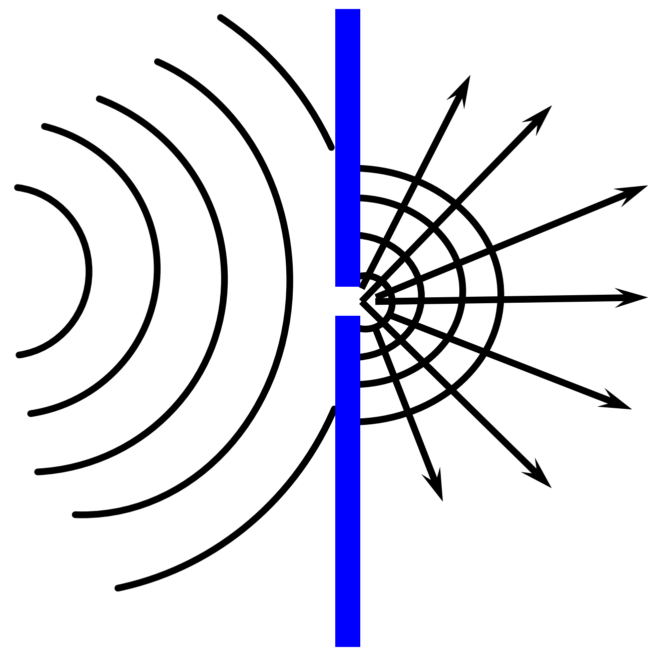
钢的厚度为

$$x_2=\frac{1}{4}\ln 100\,\mathrm{m}=1.15\,\mathrm{m}$$

可见高频超声波很难透过气体，但极易透过固体。

10.4 惠更斯原理 波的衍射和干涉

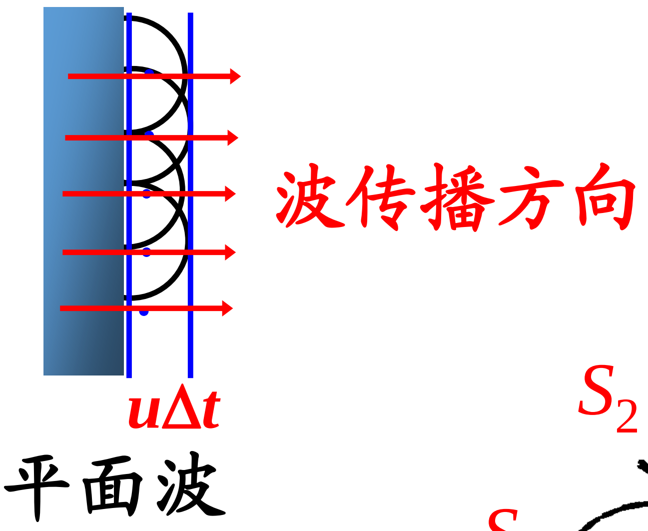
一、惠更斯原理

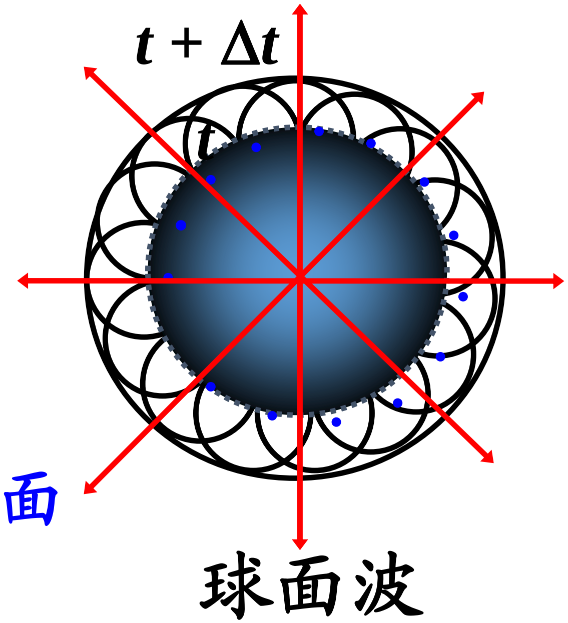


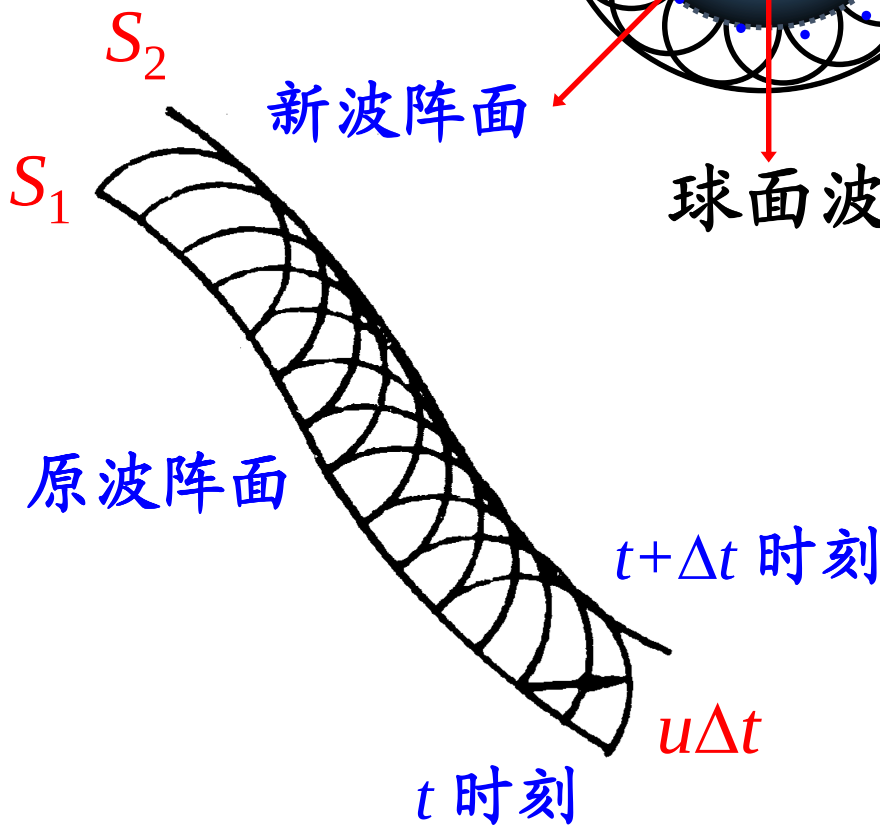
惠更斯原理:
介质中波阵面（波前）上的各点，都可以看作为发射子波的波源，其后一时刻这些子波的包迹便是新的波阵面。

障碍物的小孔成为新的波源

t时刻波面→ $t+\Delta t$时刻波面→波的传播方向



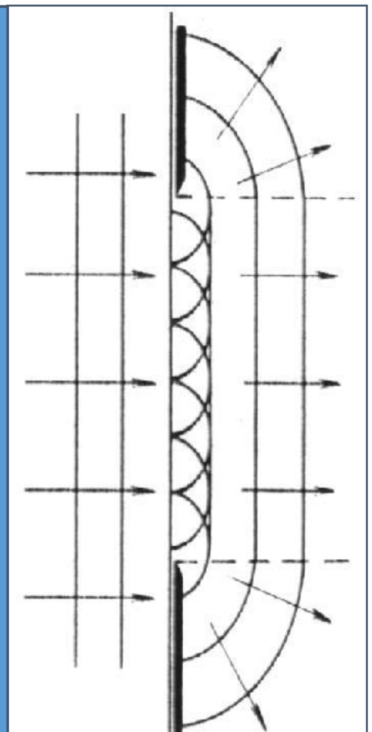




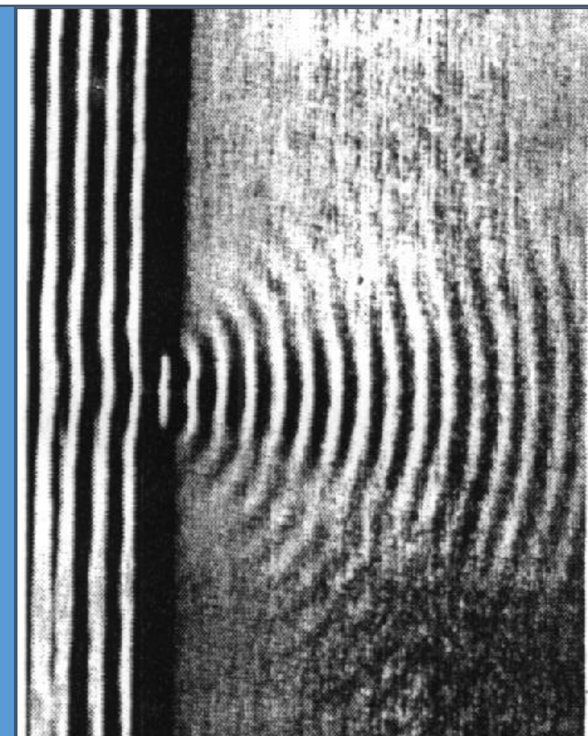
二 波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播.

波的衍射



水波的衍射



三、波的干涉

波传播的独立性原理或波的叠加原理:

各列波在相遇前和相遇后都保持原来的特性（频率、波长、振动方向、传播方向等）不变，与各波单独传播时一样，而在相遇处各质点的振动则是各列波在该处引起的振动的合成

能分辨不同的声音正是这个原因

说明:

振动的叠加仅发生在单一质点上

波的叠加发生在两波相遇范围内的许多质点上

PHYCAI

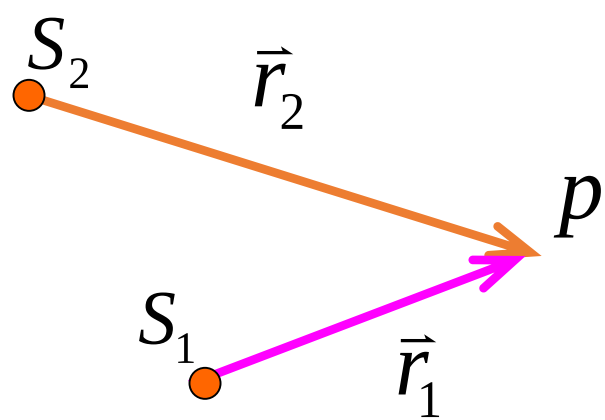
两列波若频率相同、振动方向相同、在相遇点的位相相同或位相差恒定，则合成波场中会出现某些点的振动始终加强，另一点的振动始终减弱（或完全抵消），这种现象称为波的干涉。

相干条件

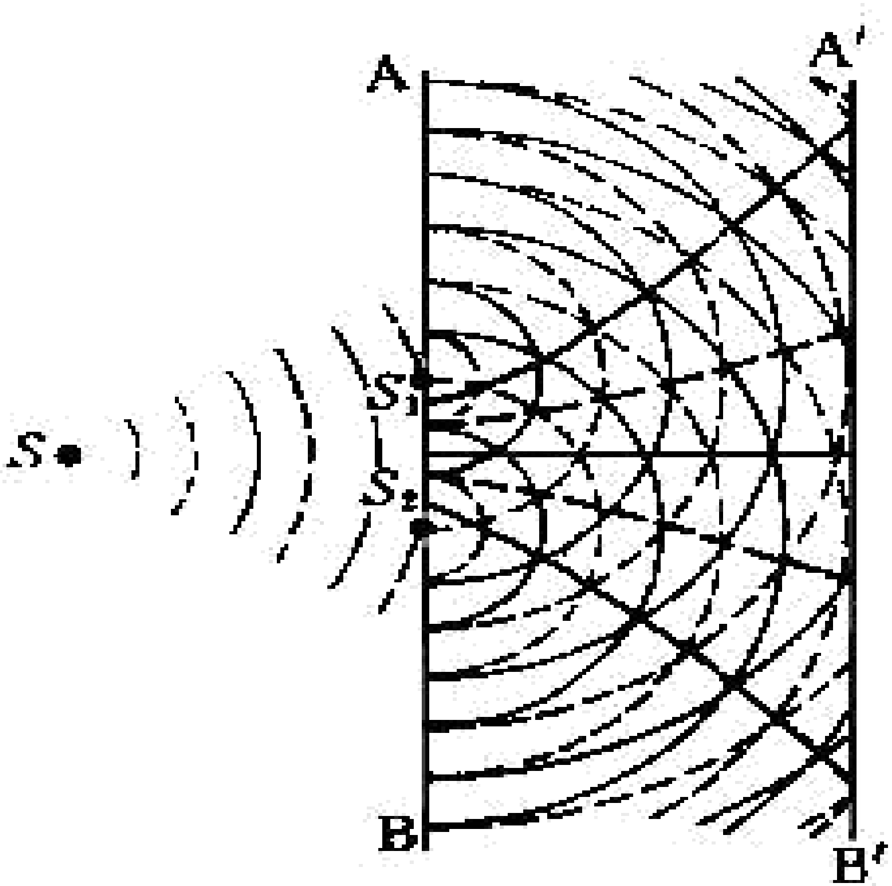
两波源具有相同的频率

振动方向相同

具有恒定的相位差



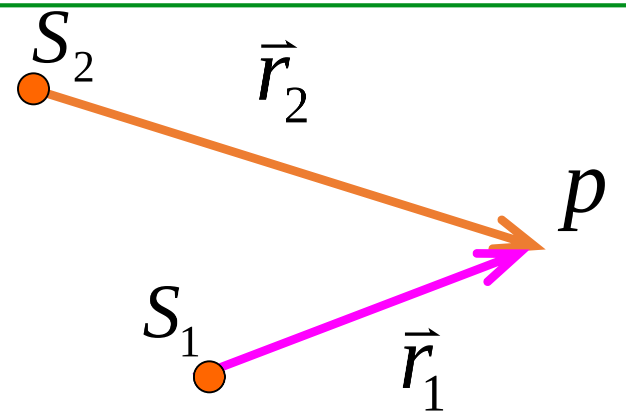
满足相干条件的波源称为相干波源。



干涉现象的强度分布

PHYCAI

设有两个相干波源S_1和S_2发出的简谐波在空间p点相遇。



$$y_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_{20})$$

在p点的振动为同方向同频率振动的合成。

传播到p点引起的振动分别为:

$$y_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda}r_1)$$

$$y_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi}{\lambda}r_2)$$

合成振动为:

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中： $$\tan\varphi_0 = \frac{A_1\sin(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\sin(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1\cos(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\sin(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

由于波的强度正比于振幅的平方，所以合振动的强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$

其中： $$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

对空间不同的位置，都有恒定的$\Delta\varphi$，因而合强度在空间形成稳定的分布，即有干涉现象。

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \qquad \boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi}$$

相长干涉的条件:

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi\cdot\frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

$$A = A_{max} = A_1 + A_2 \qquad I = I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$$

相消干涉的条件:

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \pm(2k+1)\pi \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

$$A = A_{min} = |A_1 - A_2| \qquad I = I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}$$

$$\Delta\varphi=(\varphi_{20}-\varphi_{10})-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

当两相干波源为同相波源时，相干条件写为

$$-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\pm k\cdot 2\pi \qquad \delta=r_2-r_1=\pm k\lambda, \qquad k=0,1,2,3,\ldots$$

相长干涉

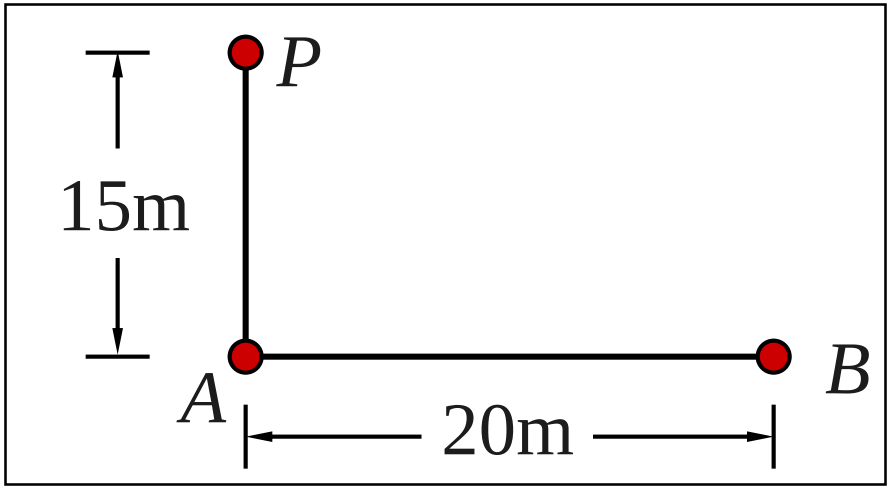
$$-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\pm(2k+1)\cdot\pi \qquad \delta=r_2-r_1=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad k=0,1,2,3,\ldots$$

相消干涉

δ 称为波程差

波的非相干叠加 $\qquad I=I_1+I_2$

例10.4.1 如图所示，A、B 两点为同一介质中两相干波源.其振幅皆为5cm，频率皆为100Hz，但当点 A 为波峰时，点B 适为波谷.设波速为10m/s，试写出由A、B发出的两列波传到点P 时干涉的结果.



解 $BP=\sqrt{15^2+20^2}\,\text{m}=25\,\text{m}$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{10}{100}\,\text{m}=0.10\,\text{m}$$

设 A 的相位较 B 超前，则 $\varphi_A-\varphi_B=\pi$.

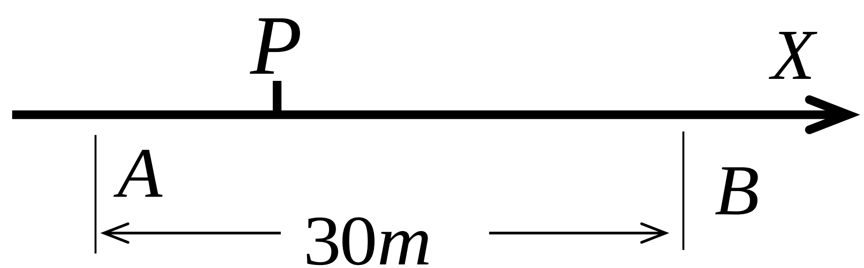
$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{BP-AP}{\lambda}=-\pi-2\pi\frac{25-15}{0.1}=-201\pi$$

点P 合振幅 $$A=|A_1-A_2|=0$$

练10.4.1 位于A、B两点的两个波源，振幅相等，频率都是100赫兹，相位差为π，其A、B相距30米，波速为400米/秒，求:A、B连线上因干涉而静止的各点的位置。

解：如图所示，设AB连线上任意一点P与A，B两点的距离分别是r_A, r_B.，要使P点静止，即满足干涉相消

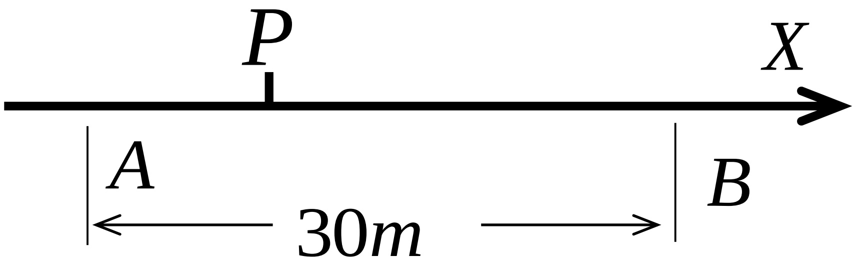
设 $\varphi_{B0} - \varphi_{A0} = \pi$



$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$= (\varphi_{B0} - \varphi_{A0}) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A) = \pm(2k+1)\pi$$

$$r_B - r_A = \pm k\lambda$$



$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 4m$$

1）若p点在A左侧，则r_A-r_B=-30m，不满足要求

2）若p点在B右侧，则r_A-r_B=30m，不满足要求

3）若P点在AB之间

$$r_A - r_B = 2r_A - (r_A + r_B) = 2r_A - 30$$

即 $2r_A - 30 = \pm \mathrm{k}\lambda \qquad k = 0,1,2\ldots$

$$r_A = 1,3,5,7,9,\ldots\ldots 25,27,29m$$

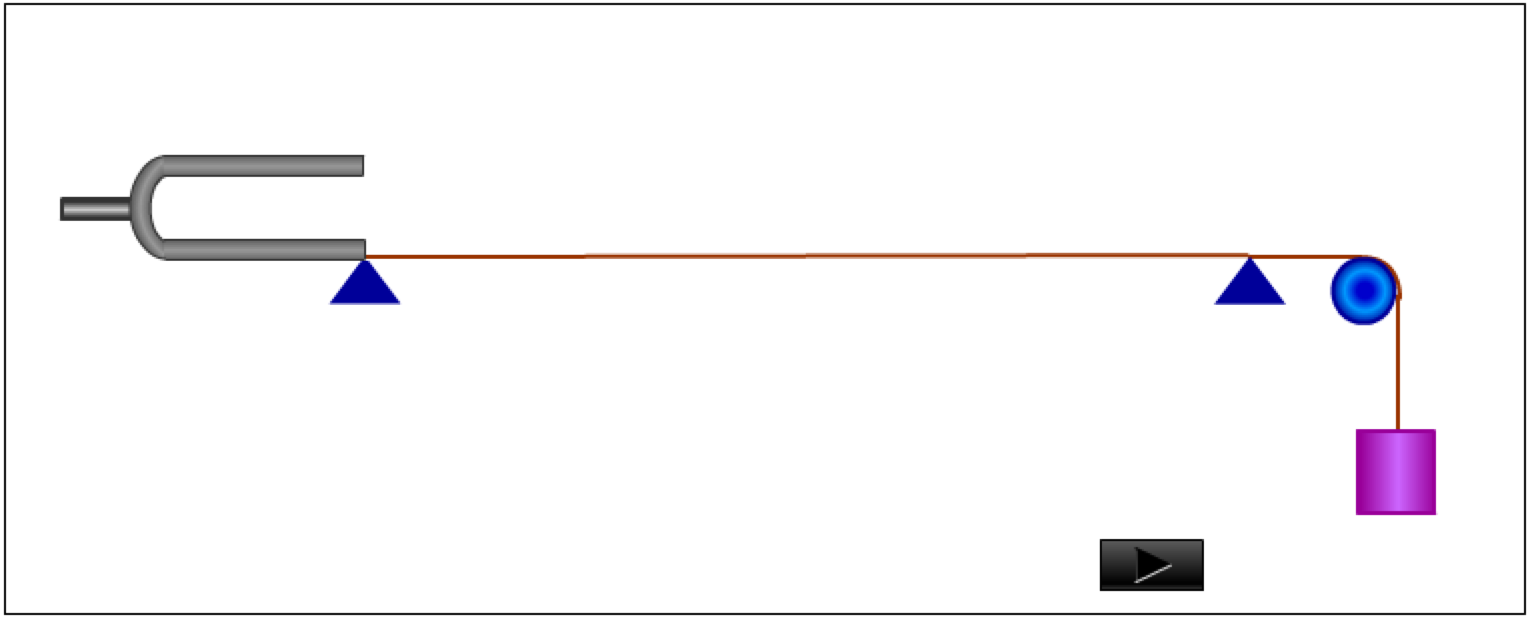
作业：21　22　23　25

作业(五)：18　19　20　22

10.5 驻波

驻波是两列振幅相同的相干波在同一条直线上沿相反方向传播时叠加而成的特殊的干涉现象。

一、驻波的产生



二、驻波方程

$$y_1 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}) \qquad y_2 = A\cos(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t$$

$$\boxed{\text{振幅} = \left| 2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|}$$

$$y = 2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$$

$$y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos\omega t$$

函数不满足 $y(t+\Delta t, x+u\Delta t) = y(t, x)$ 它不是行波

它表示各点都在作简谐振动，各点振动的频率相同，是原来波的频率。但各点振幅随位置的不同而不同。

驻波的特点：不是振动的传播，而是媒质中各质点都作稳定的振动。

$$y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos\omega t \qquad A(x) = \left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$$

驻波的特点

1、波腐与波节　驻波振幅分布特点

$$\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 1 \qquad A(x) = 2A$$ 振幅最大，波腹

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm k\pi \qquad x = \pm k\frac{\lambda}{2} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

$$\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 0 \qquad A(x) = 0$$ 振幅最小，波节

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(k+\frac{1}{2})\pi \qquad x = \pm(k+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

波腹 $x=\pm k\dfrac{\lambda}{2}\quad k=0,1,2,\cdots$　波节 $x=\pm(k+\dfrac{1}{2})\dfrac{\lambda}{2}\quad k=0,1,2,\cdots$

相邻波腹间的距离为： $\Delta x=\Delta k\,\lambda/2\,|_{\Delta k=1}=\lambda/2$

相邻波节间的距离为： $\Delta x=\lambda/2$

相邻波腹与波节间的距离为： $\lambda/4$

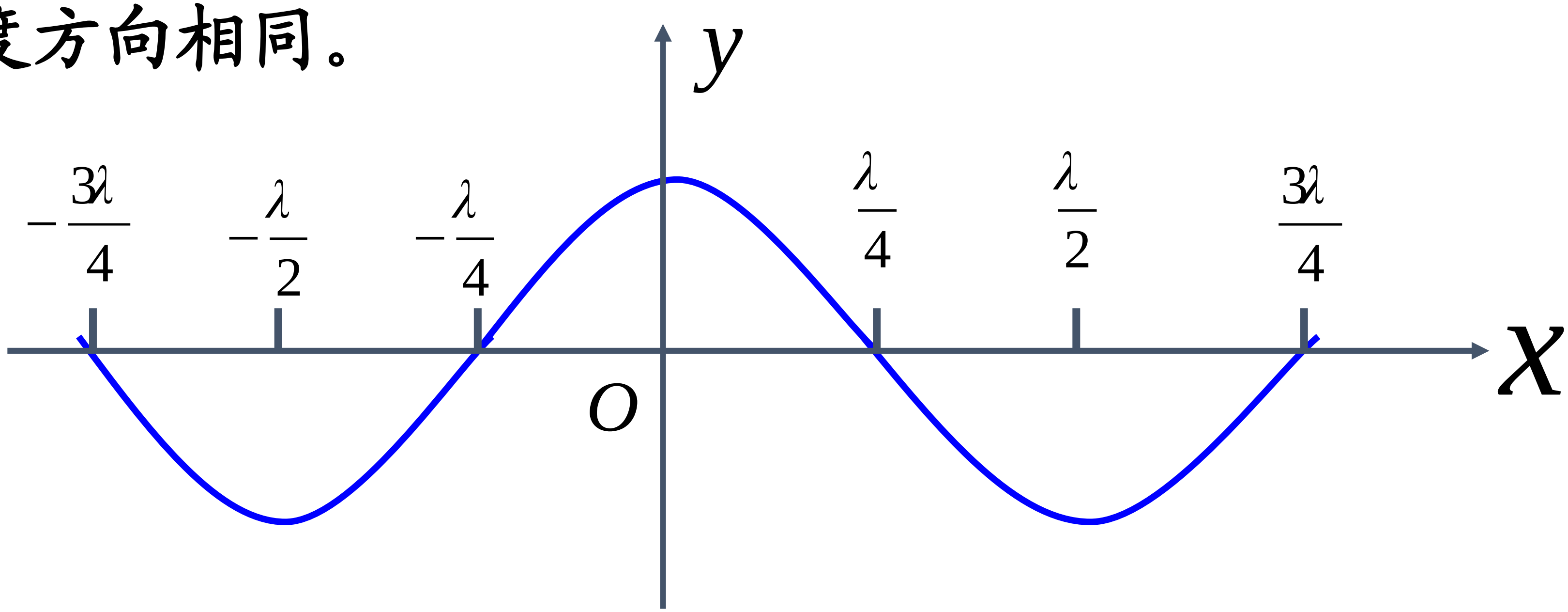
因此可用测量波腹间的距离，来确定波长。

2、驻波的位相的分布特点

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t$$

时间部分提供的相位对于所有的 x是相同的，而空间变化振幅项可正可负，带来的相位是不同的。

在波节两侧点的振动相位相反。同时达到反向最大或同时达到反向最小。速度方向相反。两个波节之间的点其振动相位相同。同时达到最大或同时达到最小。速度方向相同。



相位分布图

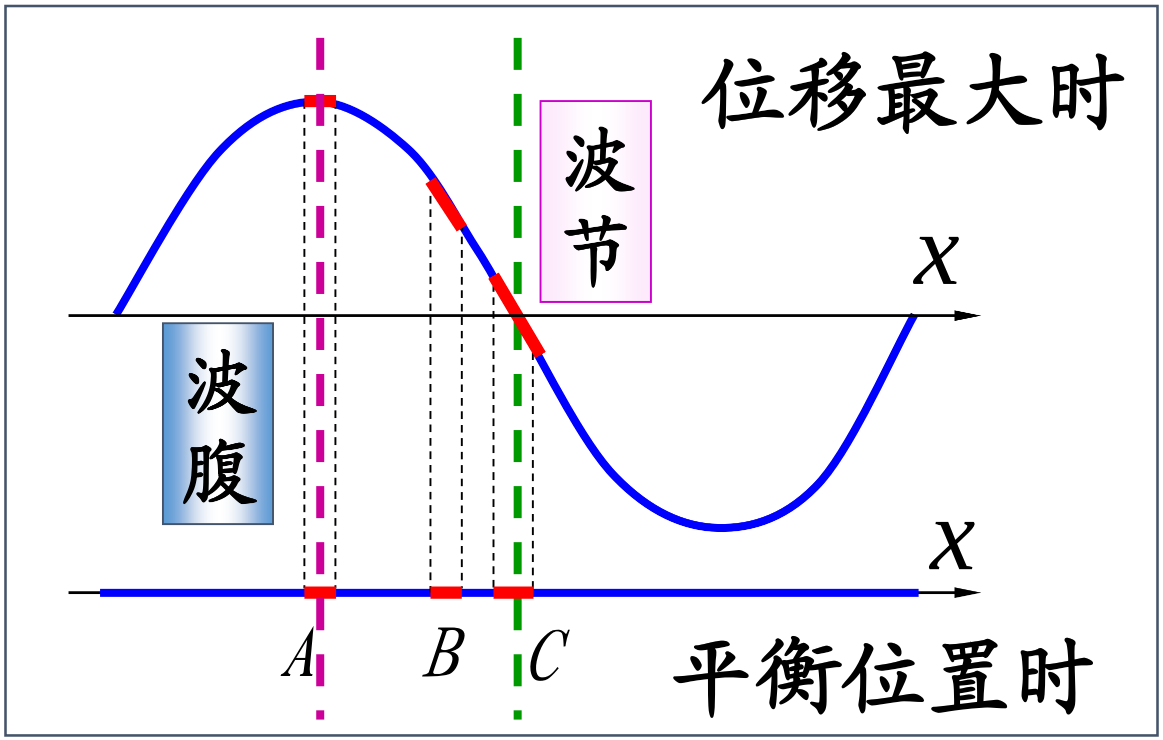
3、驻波能量

驻波振动中无位相传播，也无能量的传播

一个波段内不断地进行动能与势能的相互转换，
并不断地分别集中在波腹和波节附近而不向外传播。

位移为零时，能量集中在?

位移最大时，能量集中在?



$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

三、相位跃变（半波损失）

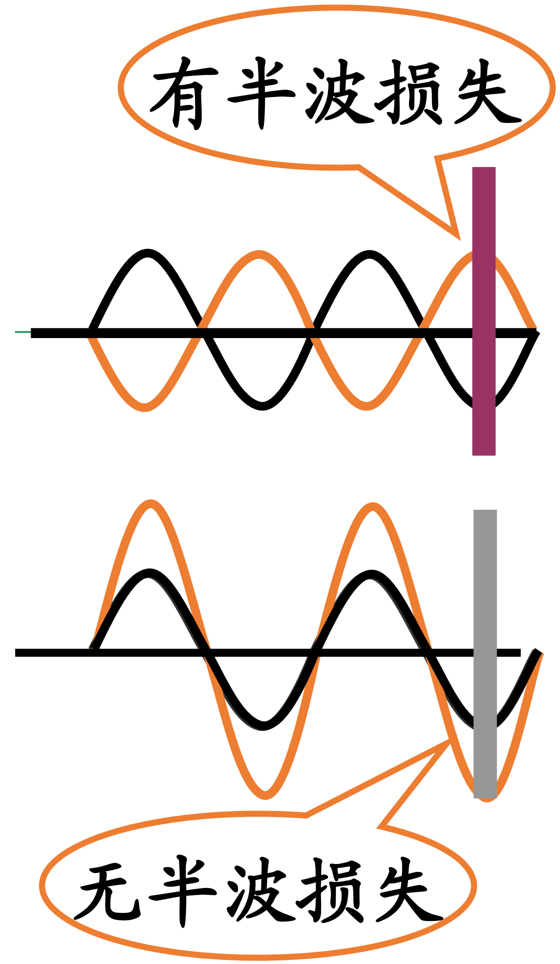
入射波在反射时发生反相的现象称为半波损失。

波阻ρu较大的媒质称为波密媒质;

波阻ρu较小的媒质称为波疏媒质.

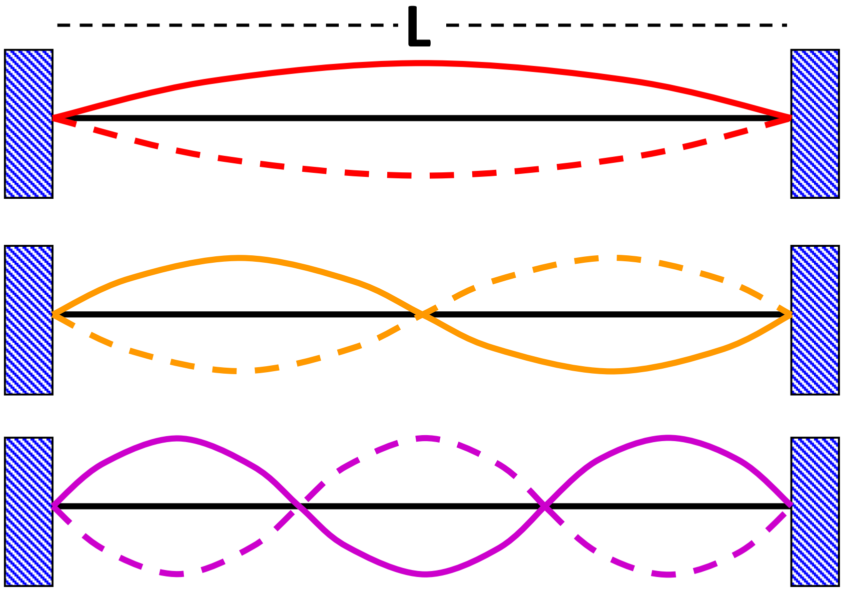
当波从波疏媒质垂直入射到波密媒质界面上反射时，有半波损失，形成的驻波在界面处是波节。(反射点是固定端)

当波从波密媒质垂直入射到波疏媒质界面上反射时，无半波损失，界面处出现波腹。（反射点是自由端）



四 振动的简正模式

两端固定的弦线形成驻波时，波长λ_n和弦线长l应满足



$$L=\frac{\lambda_1}{2}$$

$$L=2\cdot\frac{\lambda_2}{2}$$

$$L=3\cdot\frac{\lambda_3}{2}$$

$$L=n\cdot\frac{\lambda_n}{2}$$

n取自然数

$$\nu_n=\frac{u}{\lambda_n}$$

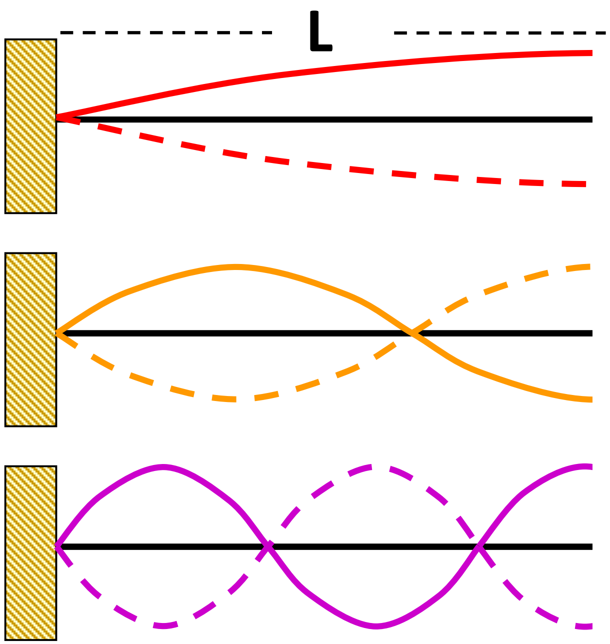
$$\boxed{\lambda_n=\frac{2L}{n}}$$

谐振 (共振) 频率

$$\boxed{\nu_n=n\cdot\frac{u}{2L}=n\nu_1}$$

谐振数 n； 基频, n=1

一端固定一端自由的弦振动的简正模式



$$L = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$L = 3 \cdot \frac{\lambda_3}{4}$$

$$L = 5 \cdot \frac{\lambda_5}{4}$$

$$L = (2n-1) \cdot \frac{\lambda_n}{4}$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}}$$

$$\boxed{\nu_n = (2n-1) \cdot \frac{u}{4L} = (2n-1)\nu_1}$$

n, 自然数

练10.5.1 一段开口一段封闭的长管，基频是343Hz。声音在管中传播的速度是343 m/s.

1.管的长度是?

2.此管下一级高阶谐频的频率是?

3.如果长管是两段开口的，上述两问是?

$$\nu_1 = \frac{u}{4L} \Rightarrow L = \frac{u}{4\nu_1} = 0.25m$$

$$\nu_n = (2n-1)\nu_1 = 3\nu_1 = 1029Hz$$

$$\nu_1 = \frac{u}{2L} \Rightarrow L = \frac{u}{2\nu_1} = 0.5m$$

$$\nu_n = n\nu_1 = 2\nu_1 = 686Hz$$

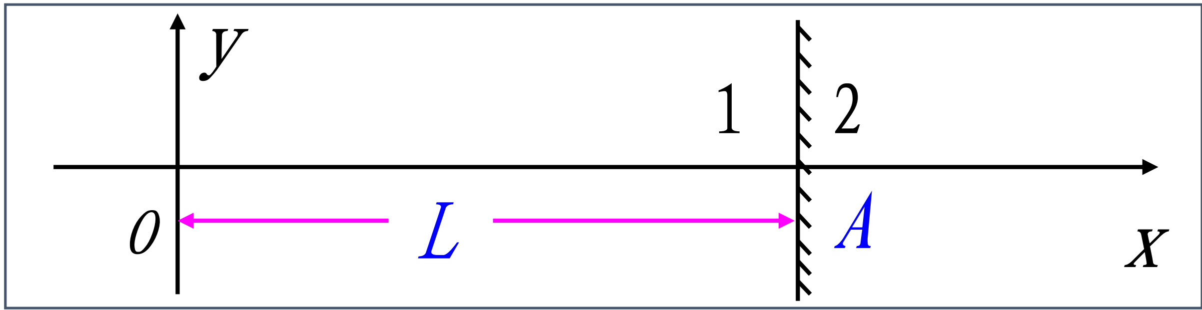
例10.5.1如图，一列沿x轴正向传播的简谐波方程为 $y=10^{-3}\cos[200\pi(t-x/200)]$ (SI)(1)，在1，2两种介质分界面上点A与坐标原点O相距L=2.25 m.已知介质2的波阻大于介质1的波阻，反射波与入射波的振幅相等，求（1）反射波方程；（2）驻波方程；（3）在OA之间波节和波腹的位置坐标

解：(1) 设反射波方程为 $y_2 = 10^{-3}\cos[200\pi(t+\frac{x}{200})+\varphi_0]$ （2）

由式（1）得A点的反射振动方程

$$y_{1A} = 10^{-3}\cos[200\pi(t-\frac{L}{200})+\pi]$$ （3）

半波损失



$$y_{1A}=10^{-3}\cos[200\pi(t-\frac{L}{200})+\pi] \qquad (3)$$

由式（2）得A点的反射振动方程

$$y_{2A}=10^{-3}\cos[200\pi(t+\frac{L}{200})+\varphi_0] \qquad (4)$$

由式（3）和式（4）得:

舍去

$$\varphi_0=-2\pi L+\pi=-3.5\pi=-4\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_0=\frac{\pi}{2}$$

所以反射波方程为:

$$y_2=10^{-3}\cos[200\pi(t+\frac{x}{200})+\frac{\pi}{2}] \quad (\mathrm{m})$$

（2）$y = y_1 + y_2 = 2\times10^{-3}\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})\cos(200\pi t + \frac{\pi}{4})$

（3） 令 $\cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) = 0$

得波节坐标 $x = n + \frac{1}{4} \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$

$x \leqslant 2.25\,\text{m} \qquad x = 0.25\,\text{m}, 1.25\,\text{m}, 2.25\,\text{m}$

令 $\left|\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})\right| = 1$

得波腹坐标 $x = n - \frac{1}{4} \qquad (n = 1,2,\cdots)$

$x \leqslant 2.25\,\text{m} \qquad x = 0.75\,\text{m}, 1.75\,\text{m}$

练10.5.2 一驻波方程为*y=0.02cos20xcos750t* (SI)，求:

(1)形成此驻波的两列行波的振幅和波速;

(2)相邻两波节间距离.

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cdot\cos\omega t = 0.02\cos 20x\cos 750t$$

$$\therefore A = \frac{0.02}{2} = 0.01 \quad \omega = 750 \qquad \frac{2\pi}{\lambda} = 20 \Rightarrow \lambda = 0.1\pi = 0.314m$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = 0.1\pi\times\frac{750}{2\pi} = 37.5m/s$$

$$\text{相邻波节间距离}\Delta\mathrm{x} = \frac{\lambda}{2} = 0.157m$$

作业：27　31

作业(五)：24　25

10.6 多普勒效应

一、多普勒效应

波源或观察者相对于介质运动，使观察者接收到的波的频率发生变化的现象，称为多普勒效应。

选介质为参考系

波源和观察者的运动在两者的连线上

$$\nu'_B = \frac{u'}{\lambda'}$$

$\mathbf{v}_B$——表示观察者相对于介质的运动速度。

$\mathbf{v}_S$——表示波源相对于介质的运动速度。

ν_S——波源的频率　　“趋近为正，背离为负”

ν_B——观察者接受到的频率

u——波在介质中的速度　　“恒为正”

1、波源不动，观察者以速度v_B 相对于介质运动

$$v_S = 0, v_B \neq 0$$

$$\nu_B' = \frac{u'}{\lambda} = \frac{u+v_B}{uT} = \frac{u+v_B}{u/\nu} = \frac{u+v_B}{u}\nu$$

若观察者以速度v_B迎着波运动时，观察者接受到的频率为波源频率的$(1+\frac{|v_B|}{u})$倍。 频率升高

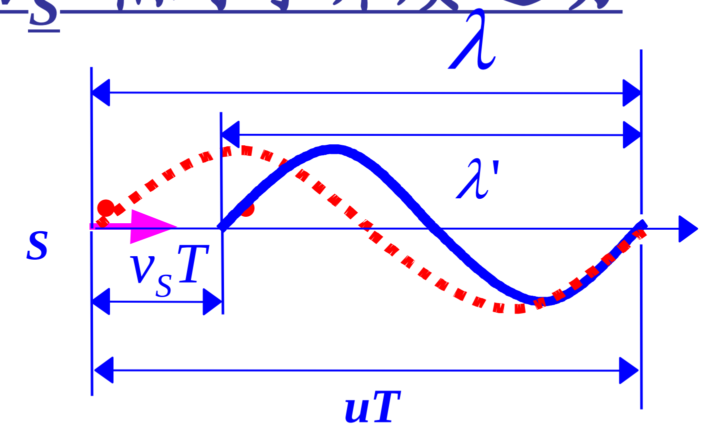
若观察者以速度v_B远离波源运动，观察者接受到的频率为波源频率的$(1-\frac{|v_B|}{u})$倍。 频率降低

2、观察者不动，波源以速度v_S相对于介质运动

$$v_S \neq 0, v_B = 0$$

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - v_S T}$$

$$= \frac{u}{uT - v_S T} = \frac{u}{u - v_S}\nu$$



S 运动的前方波长缩短

若波源向着观察者运动时，观察者接受到的频率为波源频率的 $\dfrac{u}{u-v_s}$ 倍。 频率升高

若波源远离观察者运时$v_s<0$，观察者接受到的频率小于波源的振动频率。 频率降低

3、波源和观察者同时相对于介质运动

$$v_S \neq 0, v_B \neq 0$$

相对于观察者，波速 $u' = u + v_B$

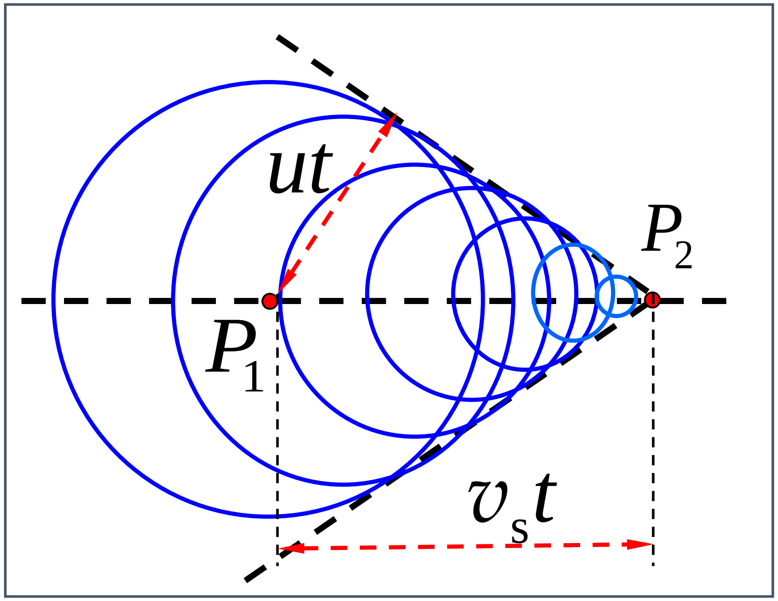
相对于观察者，波长 $\lambda' = \lambda - v_S T$

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u + v_B}{u - v_S}\nu$$

波源和观察者接近时，$\nu' > \nu$

波源和观察者背离时，$\nu' < \nu$

当 $v_s >> u$ 时，所有波前将聚集在一个圆锥面上，波的能量高度集中形成冲击波或激波，如核爆炸、超音速飞行等.



例10.6.1 A、B 为两个汽笛，其频率皆为500 Hz，A 静止，B 以60m/s的速率向右运动. 在两个汽笛之间有一观察者O，以 30m/s的速度也向右运动. 已知空气中的声速为330m/s,求(1)观察者听到来自A的频率；(2)观察者听到来自B的频率；(3)观察者听到的拍频.

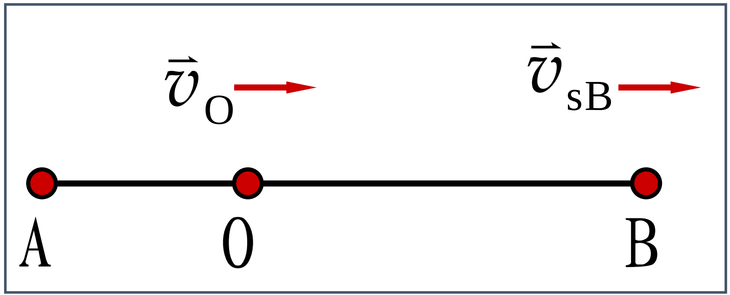
解 （1）$v_{sA}=0, v_0=-30\text{m/s}$(远离为负)

$$\nu'=\frac{u'}{\lambda'}=\frac{u+v_0}{u-v_S}\nu=\frac{330-30}{330}*500=454.5Hz$$

（2）$v_{sB}=-60\text{m/s}, v_0=30\text{m/s}$ (趋近为正，远离为负)

$$\nu'=\frac{u+v_0}{u-v_S}\nu=\frac{330+30}{330-(-60)}*500=461.5Hz$$

$$\Delta\nu=\left|\nu'-\nu''\right|=7\ \text{Hz}$$

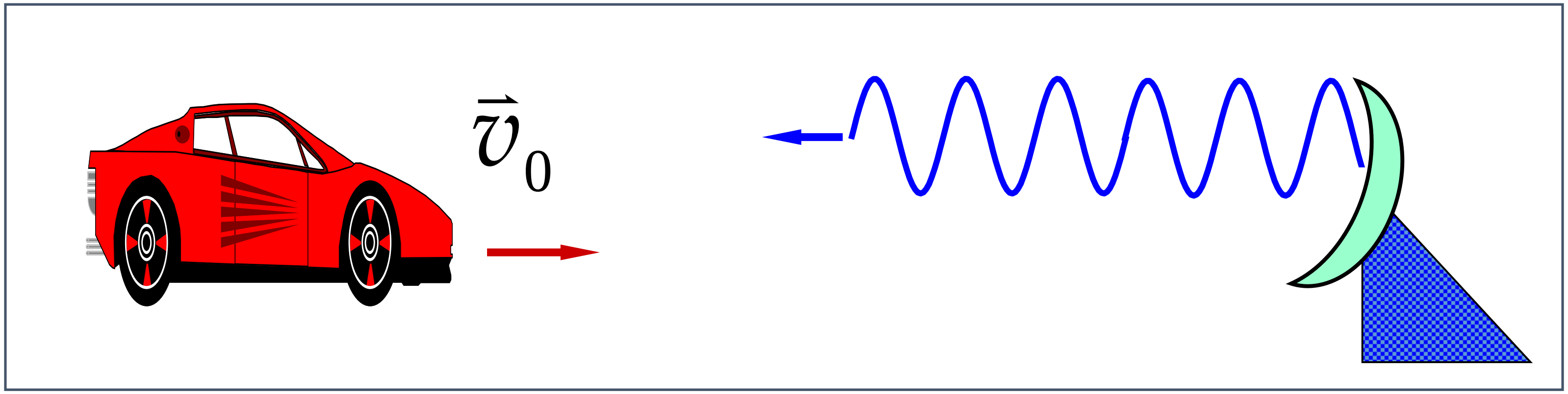


例10.6.2 利用多普勒效应监测车速，固定波源发出频率为100kHz的超声波，当汽车向波源行驶时，与波源安装在一起的接收器接收到从汽车反射回来的波的频率为110kHz.已知空气中的声速330m/s，求车速.

解 过程1，车为接收器 $$\nu' = \frac{u+v_B}{u-v_S}\nu = \frac{u+v_0}{u}\nu$$

过程2，车为波源 $$\nu'' = \frac{u+v_B}{u-v_S}\nu' = \frac{u}{u-v_0}\nu' = \frac{u+v_0}{u-v_0}\nu$$

v_0=15.7m/s



练10.6.1 车上一警笛发射频率为*1500Hz*的声波,该车以*20m/s*的速度向某方向运动，某人以*5m/s*的速度跟踪其后，已知空气声速为*330m/s*。求该人听到的警笛发声频率以及在警笛后方空气中声波的波长。

解：由已知条件得

$$\nu = 1500\,\mathrm{Hz} \qquad u = 330\,\mathrm{m/s} \qquad v_B = 5\,\mathrm{m/s} \qquad v_S = -20\,\mathrm{m/s}$$

人听到的频率为：

$$\nu' = \frac{u + v_B}{u - v_S}\nu = \frac{330+5}{330+20} \times 1500 = 1436(\mathrm{Hz})$$

警笛后方的空气不随波前进，即有$v_R = 0$。

$$\nu' = \frac{u + v_R}{u - v_S}\nu = \frac{330 + 0}{330 + 20} \times 1500 = 1414(\mathrm{Hz})$$

空气中波长:

$$\lambda' = \frac{u}{\nu'} = \frac{330}{1414} = 0.233(\mathrm{m})$$

作业：29　30

作业(五)：29　30