$\langle 0,2\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 但 $\langle 0,2\rangle \notin \operatorname{ran} f$，所以 f 不是满射，从而也不是双射。

$f\restriction\{0,1,2\} = \{\langle 0,\langle 0,1\rangle\rangle, \langle 1,\langle 1,2\rangle\rangle, \langle 2,\langle 2,3\rangle\rangle\}$。

3.

证明： 记 $\kappa = \operatorname{card} B, \mu = \operatorname{card}(A-B)$，由于 $B\cap(A-B)=\varnothing$，所以由基数加法的定义知，$\kappa+\mu = \operatorname{card}(B\cup(A-B)) = \operatorname{card} A = \lambda$。

另一方面，由于 $\kappa \geq \aleph_0$，由教材定理 5.24 知，$\lambda = \kappa+\mu = \max\{\kappa,\mu\}$ (教材定理 5.24 要求“其中较大的为无穷基数”，本题已知 κ 为无穷基数，若 $\mu\leq\kappa$，则 κ 就是“较大的”“无穷基数”，若 $\mu>\kappa$，则 μ 就是“较大的”“无穷基数”，从而定理的前提总成立)。由于已知 $\kappa<\lambda$，从而 $\kappa\neq\max\{\kappa,\mu\}=\lambda$，所以必有 $\operatorname{card}(A-B)=\mu=\max\{\kappa,\mu\}=\lambda$。 □

4. $|x|=3$。

证明： 首先，由于 y 是二阶元，所以有 $y^{-1}=y$。同时：

$$
\begin{aligned}
& yxy^{-1} = x^2 \\
\iff & yx = x^2y && \text{(右乘 } y) \\
\iff & x = y^{-1}x^2y && \text{(左乘 } y^{-1}) \\
\implies & x^2 = (y^{-1}x^2y)(y^{-1}x^2y) && \text{(两边取平方)} \\
\iff & x^2 = y^{-1}x^4y && (yy^{-1}=e) \\
\iff & x^2 = yx^4y^{-1} && (y=y^{-1})
\end{aligned}
$$

从而有 $yx^4y^{-1} = x^2 = yxy^{-1}$。由消去律知 $x^3=e$。从而 $|x| \mid 3$。因为 x 不是单位元，所以 $|x|\neq 1$，因此只能有 $|x|=3$。 □