第六章　序数*

定理 6.1 设 $\langle A,\prec\rangle$ 为拟线序集[1]，$\prec$ 为 $A\neq\varnothing$ 上的良序关系，当且仅当不存在函数 $f:\mathbb{N}\to A$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}$，有 $f(n^+)\prec f(n)$.

定理 6.2 设 $\langle A,\prec_1\rangle,\langle B,\prec_2\rangle,\langle C,\prec_3\rangle$ 为三个拟序集，则

(1) $\langle A,\prec_1\rangle\cong\langle A,\prec_1\rangle$;

(2) 若 $\langle A,\prec_1\rangle\cong\langle B,\prec_2\rangle$，则 $\langle B,\prec_2\rangle\cong\langle A,\prec_1\rangle$;

(3) 若 $\langle A,\prec_1\rangle\cong\langle B,\prec_2\rangle$ 且 $\langle B,\prec_2\rangle\cong\langle C,\prec_3\rangle$，则 $\langle A,\prec_1\rangle\cong\langle C,\prec_3\rangle$.

定理 6.3 设 $f:A\to B$ 且为单射，$\prec_B$ 为 B 上的拟序关系，在 A 上定义关系 $\prec_A$ 如下，对于任意的 $x,y\in A$，$x\prec_A y\Leftrightarrow f(x)\prec_B f(y)$，则

(1) $\prec_A$ 为 A 上的拟序关系;

(2) 若 $\prec_B$ 为 B 上的拟线序(拟全序)关系，则 $\prec_A$ 为 A 上的拟线序关系;

(3) 若 $\prec_B$ 为 B 上的良序关系，则 $\prec_A$ 为 A 上的良序关系.

定理 6.4 设 A,B 为二集合，且 $B\subseteq A$.

(1) 若 $\prec_A$ 为 A 上的拟序关系，则 $\prec_A\restriction B$ 为 B 上的拟序关系;

(2) 若 $\prec_A$ 为 A 上的拟线序关系，则 $\prec_A\restriction B$ 为 B 上的拟线序关系;

(3) 若 $\prec_A$ 为 A 上的良序关系，则 $\prec_A\restriction B$ 为 B 上的良序关系.

定理 6.5 (超限归纳原理) 设 $\prec$ 为 A 上的良序，B 是 A 关于 $\prec$ 的归纳子集，则 $B=A$.

定理 6.6 设 $\prec$ 为 A 上的拟线序，如果 A 上任何关于 $\prec$ 的归纳子集都与 A 是相等的，则 $\prec$ 为 A 上的良序.

超限递归定理模式 对于任意的公式 $\gamma(x,y)$，下面叙述的是一条定理:

设 $\prec$ 为集合 A 上良序，若 $\forall f\exists!y\gamma(f,y)$ 成立，则存在惟一的一个以 A 为定义域的函数 F，$\forall t\in A,\gamma(F\restriction\operatorname{seg}t,F(t))$ 成立.

定理 6.7 设 $\langle A,\prec_A\rangle,\langle B,\prec_B\rangle$ 为两个良序集，则下面三种情况至少成立其一:

(1) $\langle A,\prec_A\rangle\cong\langle B,\prec_B\rangle$;

(2) $\langle A,\prec_A\rangle\cong\langle\operatorname{seg}b,\prec_B^0\rangle,b\in B$;

[1]教材中的原文是“设 $\langle A,\prec\rangle$ 是拟序集”。然而，易于验证，若 $\langle A,\prec\rangle$ 不是拟线序集，上述定理不成立(一个最简单的反例是 $\prec=\varnothing$ 的情况，注意到，$\varnothing$ 是在任何非空集合上都是拟序，但不是拟线序，更不是良序)。为说明“拟线序”这一条件的必要性，下面再举一个 nontrivial 的反例：令 $A=\mathbb{N},\prec=\{\langle 0,x\rangle\mid x\in\mathbb{N}_+\}$。则 $\langle\mathbb{N},\prec\rangle$ 显然是拟序集，且 $\operatorname{dom}(\prec)=\{0\}$，$\operatorname{ran}(\prec)=\mathbb{N}_+$，从而 $\operatorname{dom}(\prec)\cap\operatorname{ran}(\prec)=\varnothing$，也即，对任意 $x,y,z\in\mathbb{N}$，若有 $y\prec x$ (从而 $y\in\operatorname{dom}(\prec)$)，则不可能有 $z\prec y$ (因为 $y\notin\operatorname{ran}(\prec)$)。这样一来，就不可能存在定理所描述的 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (因为无论 $f(1)$ 取何值，$f(1)\prec f(0)$ 和 $f(2)\prec f(1)$ 都不可能同时成立)。所以，$\langle\mathbb{N},\prec\rangle$ 满足定理所述的条件。但 $\mathbb{N}$ 的非空子集 $\mathbb{N}_+$ 却没有最小元，从而 $\langle\mathbb{N},\prec\rangle$ 不是良序集。(事实上，教材中此定理证明的充分性部分用到:“任取 $b_0\in B$，则 b_0 不是 B 的最小元，因而存在 $b_1\in B$，使得 $b_1\prec b_0$。”而“b_0 不是最小元”只表明“存在 $b_1\in B$，使 $b_0\neq b_1\wedge b_0\not\prec b_1$”，若 $\prec$ 不是拟线序，就不能由此推出 $b_1\prec b_0$。)