$\circ$ 的运算表如下：

$\circ$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 2,1\rangle$
$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 2,1\rangle$
$\langle 0,1\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 2,0\rangle$
$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$
$\langle 1,1\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 0,0\rangle$
$\langle 2,0\rangle$	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$
$\langle 2,1\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 2,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 1,0\rangle$

(2) $V_1 \times V_2$ 的单位元是 $\langle 0,0\rangle$。$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ 中每一个元素都有逆元。

其中：$\langle 0,0\rangle$ 与 $\langle 0,0\rangle$ 互逆。$\langle 0,1\rangle$ 与 $\langle 0,1\rangle$ 互逆。$\langle 1,0\rangle$ 与 $\langle 2,0\rangle$ 互逆。$\langle 1,1\rangle$ 与 $\langle 2,1\rangle$ 互逆。

15.17 由积代数定义和教材定理 2.1 立即得证。

15.18

证明： 将复数加法运算和乘法运算分别记作 $+_{\mathbb{C}}$ 和 $\cdot_{\mathbb{C}}$。

作 $\varphi : \mathbb{C} \to B, \forall a+bi \in \mathbb{C}, \varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$，显然 φ 是双射。

下面证 φ 是同态映射。

$\forall a+bi, c+di \in \mathbb{C}$，

$$\begin{aligned}
\varphi((a+bi) +_{\mathbb{C}} (c+di)) &= \varphi((a+c)+(b+d)i) && \text{(复数加法定义)} \\
&= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} && \text{(φ 定义)} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & b \end{pmatrix} && \text{(矩阵加法定义)} \\
&= \varphi(a+bi) + \varphi(c+di) && \text{(φ 定义)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi((a+bi) \cdot_{\mathbb{C}} (c+di)) &= \varphi((ac-bd)+(bc+ad)i) && \text{(复数乘法定义)} \\
&= \begin{pmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{pmatrix} && \text{(φ 定义)} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & b \end{pmatrix} && \text{(矩阵乘法定义)} \\
&= \varphi(a+bi) \cdot \varphi(c+di) && \text{(φ 定义)}
\end{aligned}$$

这就证明了 φ 是 $\langle \mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}} \rangle$ 到 $\langle B, +, \cdot \rangle$ 的同态映射，且为双射。

从而有：$\langle \mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}} \rangle \overset{\varphi}{\cong} \langle B, +, \cdot \rangle$。 □

15.19

证明： 将积代数 $V_1 \times V_2$ 和 $V_2 \times V_1$ 分别记为 $\langle A \times B, *_1, *_2 \rangle$ 和 $\langle B \times A, \bar{*}_1, \bar{*}_2 \rangle$。

作 $\varphi : A \times B \to B \times A, \forall \langle x,y \rangle \in A \times B, \varphi(\langle x,y \rangle) = \langle y,x \rangle$。显然 φ 是双射。

下面证 φ 是同态映射。

$\forall \langle x_1,y_1 \rangle, \langle x_2,y_2 \rangle \in A \times B, \forall i \in 1,2$，

$$\varphi(\langle x_1,y_1 \rangle *_i \langle x_2,y_2 \rangle) = \varphi(\langle x_1 \circ_i x_2, y_1 \circ_i y_2 \rangle) \qquad \text{(积代数定义)}$$