关系的幂运算

定义 关系的n次幂(nth power): 设R $\subseteq A\times A$, $n\in$N,

则R的n次幂记作R^n，其中

相当与含幺半群的单位元

(1) $R^0 = I_A$;

$R^n = R\circ R\circ\ldots\circ R$ 表示n个R的合成

幂的求法

G'的顶点集与G相同.考察G的每个顶点x_i,如果在G中从x_i出发经过n步长的路径到达顶点x_j,则在G'中加一条从x_i到x_j的边.找到所有这样的边，就得到图G'.其中

n步长的路径是指该路径中包含n条首尾相连的边。

例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$, 求$R,R^2,R^3,R^4$, 分别用矩阵和关系图表示.

解

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

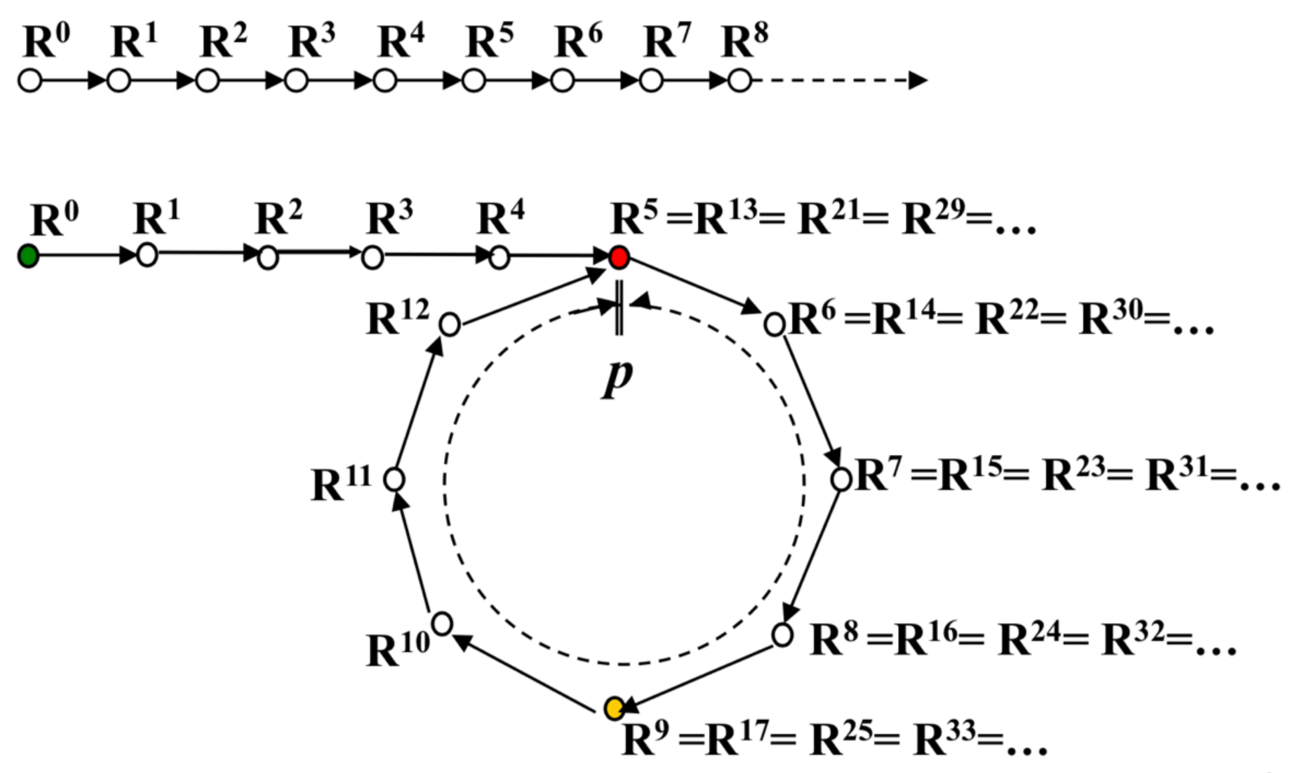
$$M(R^3)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$M(R^{2k})=M(R^2), k\geq 1, k\in N$

$M(R^{2k+1})=M(R^1), k\in N$

$R^0,R^1,R^2,R^3,\ldots$是否互不相等?



定理2.16 指数运算的周期性

定理16: 设$|A|=n$, $R\subseteq A\times A$, 则 $\exists\, s, t\in N$, $0\leq s<t\leq 2^{n^2}$, 使得$R^s=R^t$.

证明: $P(A\times A)$对幂运算是封闭的, 即

$\forall R$, $R\in P(A\times A) \Rightarrow R^k\in P(A\times A)$, $(k\in N)$. $|P(A\times A)| = 2^{n^2}$, 根据鸽巢原理, 在$R^0,R^1,R^2,\ldots, R^{2^{n^2}}$这$2^{n^2}+1$ 个集合中, 必有两个是相同的. 所以存在$s,t\in N$,并且$0\leq s<t\leq 2^{n^2}$,使得$R^s=R^t$.

定理18: 设$R\subseteq A\times A$, 若$\exists s,t\in N$ $(s<t)$,使得 $R^s = R^t$, 则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$;

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i\in$N, $p=t-s$;

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q\in$N, $R^q\in$S.

泵(pumping): $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$ $(p=t-s)$