序关系的主要内容

- 偏序,线序,拟序,良序
- 哈斯图
- 特殊元素: 最大(小)元, 极大(小)元,上(下)界,上(下)确界
- (反)链

偏序(partial order)关系

- **定义**: 设$R\subseteq A\times A$ 且$A\neq\varnothing$, 若R是自反的, 反对称的, 传递的, 则称R为偏序关系.
- 通常用$\preccurlyeq$表示偏序关系,读作“小于等于”

  $<x,y>\in R \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow x\preccurlyeq y$
- “严格小于”: $x\prec y \Leftrightarrow x\preccurlyeq y \wedge x\neq y$
- **偏序集(poset):** $<A,\preccurlyeq>$, $\preccurlyeq$是A上偏序关系

注意：此处的符号“$\preccurlyeq$”表示序关系，大小无关.

偏序集<A,≤>, <A,≥>, <A,|>

- $\varnothing \neq A \subseteq R$

  $\leq = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge x \leq y \}$,

  $\geq = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge x \geq y \}$,

- $\varnothing \neq A \subseteq Z^{+} = \{ x \mid x \in Z^{+} \wedge x > 0 \}$

  $| = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge x | y \}$

偏序集$<A,\subseteq>$

- $B \subseteq \mathrm{P}(A)$, $\subseteq = \{ <x,y> \mid x,y \in B \wedge x \subseteq y \}$
- 设$A=\{a,b\}$, $B_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$, $B_2=\{\{a\},\{a,b\}\}$,

  $B_3=P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,则

  $\subseteq_1 = I_{B_1} \cup \{ <\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}> \}$

  $\subseteq_2 = I_{B_2} \cup \{ <\{a\},\{a,b\}> \}$

  $\subseteq_3 = \mathrm{I}_{B_3} \cup \{ <\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>, <\varnothing,\{a,b\}>,$

  $<\{a\},\{a,b\}>, <\{b\},\{a,b\}> \}$

偏序集$<\pi,\preccurlyeq_{加细}>$

- $A\neq\varnothing$, $\pi=\{x|x$是A的划分$\}$

  $\preccurlyeq_{加细}=\{<x,y>\mid x,y\in\pi \wedge x$是$y$的加细$\}$

设$A=\{a,b,c\}$, $A_1=\{\{a,b,c\}\}$,$A_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$,

  $A_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$,$A_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$,$A_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

取$\pi_1=\{A_1,A_2\}$,$\pi_2=\{A_2,A_3\}$,$\pi_3=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$

$\preccurlyeq_1=I_{\pi_1}\cup\{<A_2,A_1>\}$, $\preccurlyeq_2=\mathrm{I}_{\pi_2}$,

$\preccurlyeq_3=\mathrm{I}_{\pi_3}\cup\{<A_2,A_1>,<A_3,A_1>,<A_4,A_1>,<A_5,A_1>,$

$<A_5,A_2>,<A_5,A_3>,<A_5,A_4>\}$.

哈斯图(Hasse diagram)

设$<A,\preccurlyeq>$是偏序集, $x,y\in A$

- 可比(comparable):

  x与y可比$\Leftrightarrow x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x$

- 覆盖(cover):

  y覆盖$x \Leftrightarrow x\prec y \wedge \neg\exists z(z\in A \wedge x\prec z\prec y)$

- 哈斯图: 对偏序关系的关系图进行了如下简化

(1) 省去关系图中的每个顶点处的环;

(2)若$x\prec y$且y覆盖x,代表x的顶点画在代表y的顶点下方,并且在x与y之间画无向边;若$x\prec y$且y不覆盖x,则省略掉x与y之间的边.

例2.16

例2.16 画出下列偏序关系的哈斯图。

(1) $<\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, |>$

(2) $<P(\{a, b, c\}), \subseteq>$

(3) $<\pi, \leqslant_{加细}>$, $\pi=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$,

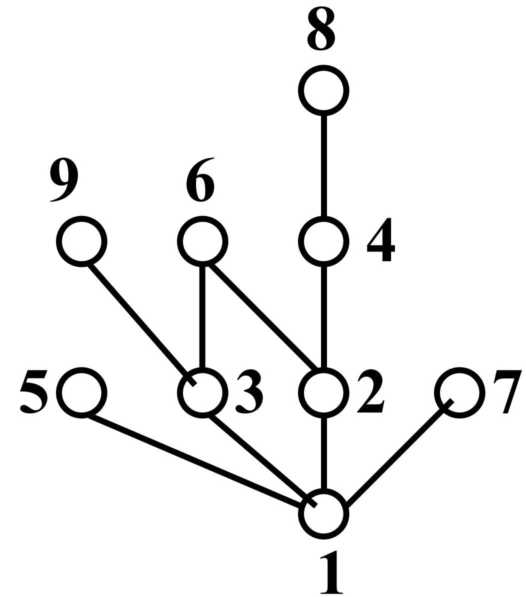
设$A=\{a,b,c\}$, $A_1=\{\{a,b,c\}\}$, $A_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$,

$A_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$, $A_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$, $A_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

例2.16

例2.16　画出下列偏序关系的哈斯图。

(1) <{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, |>



解 (1) 偏序集的覆盖为：

<1,2>,<1,3>,<1,5>,<1,7>,<2,4>,

<2,6>,<3,6>,<3,9>,<4,8>

因此其哈斯图如右图所示.

注意：哈斯图中边的条数=覆盖中有序对的个数.

例2.16 (2)的解

例2.16 画出下列偏序关系的哈斯图。

(2) $<P(\{a, b, c\}), \subseteq>$

解 偏序集的覆盖为：

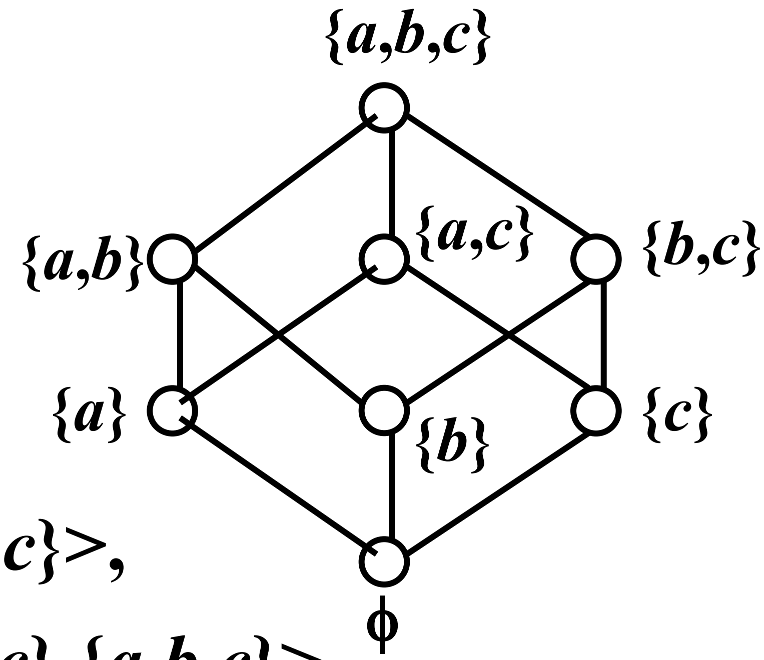
$<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{c\}>,$

$<\{a\},\{a,b\}>,<\{a\},\{a,c\}>,$

$<\{b\},\{a,b\}>, <\{b\},\{b,c\}>,<\{c\},\{a,c\}>,$

$<\{c\},\{b,c\}>,<\{a,b\},\{a,b,c\}>, <\{a,c\},\{a,b,c\}>,$

$<\{b,c\},\{a,b,c\}>$



因此其哈斯图如右图所示.

例16(3)

(3) $<\pi, \preccurlyeq_{加细}>$, $\pi=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$,

设$A=\{a,b,c\}$, $A_1=\{\{a,b,c\}\}$, $A_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$,

$A_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$, $A_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$, $A_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

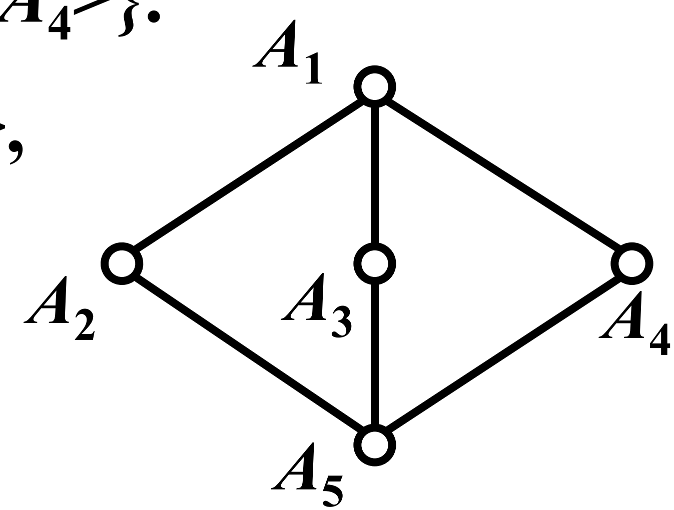
解 $\preccurlyeq_{加细} = I_\pi \cup \{ <A_2, A_1>, <A_3, A_1>, <A_4, A_1>,$

$<A_5, A_1>, <A_5, A_2>, <A_5, A_3>, <A_5, A_4> \}$.

$\preccurlyeq_{加细}$ 的覆盖有$<A_5, A_2>$, $<A_5, A_3>$,

$<A_5, A_4>$, $<A_2, A_1>$, $<A_3, A_1>$,

$<A_4, A_1>$



偏序关系中的特殊元素

- 最大元, 最小元
- 极大元, 极小元
- 上界, 下界
- 最小上界(上确界), 最大下界(下确界)

最大元, 最小元

设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$

- B的最大元(maximum/greatest element):

  y是B的最大元$\Leftrightarrow \forall x(x\in B \rightarrow x\preccurlyeq y)$

- B的最小元(minimum/least element):

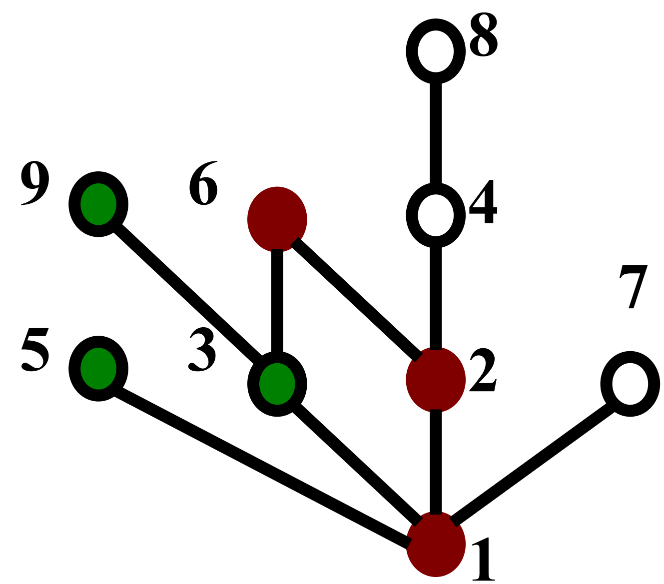
  y是B的最小元$\Leftrightarrow \forall x(x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x)$

例

例 偏序集$<A, |>$，A={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 },

求B_1={1,2,6}, B_2={3,5,9}, $B_3=A$ 的最大元和最小元。

解 $<A, |>$的哈斯图如下图所示.



B_1 的最大元是 6，最小元是 1,

B_2 的最大元：无，最小元: 无,

B_3 的最大元：无，最小元是 1。

极大元,极小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$
- **B的极大元(maximal element):**

  y是B的极大元$\Leftrightarrow \forall x(\, x\in B \wedge y\preccurlyeq x \rightarrow x=y\,)$

  $\Leftrightarrow \neg\exists x(x\in \mathrm{B}\wedge x\neq y\wedge y\leq x)$
- **B的极小元(minimal element):**

  y是B的极小元$\Leftrightarrow \forall x(\, x\in B \wedge x\preccurlyeq y \rightarrow x=y\,)$

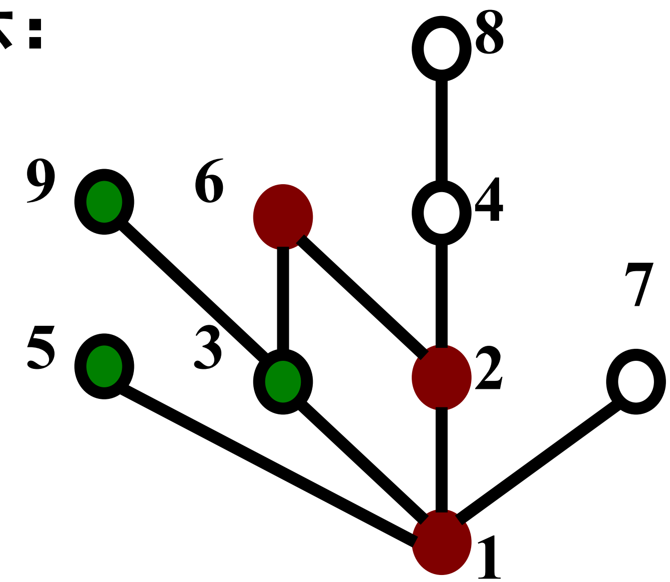
  $\Leftrightarrow \neg\exists x(x\in \mathrm{B}\wedge x\neq y\wedge x\leq y)$

例

例 偏序集$<A, |>$，$A=\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$,

求 $B_1=\{1,2,6\}$, $B_2=\{3,5,9\}$, $B_3=A$ 的极大元和极小元。

解 偏序集的哈斯图如右图所示：



B_1 的极大元是 6；

B_1 的极小元是 1；

B_2 的极大元是 5, 9；

B_2 的极小元：3, 5；

B_3 的极大元是 5,9,6,8,7；

B_3 的极小元是 1

上界, 下界

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in A$
- **B的上界**(upper bound):

  y是B的上界$\Leftrightarrow \forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$
- **B的下界**(lower bound):

  y是B的下界$\Leftrightarrow \forall x(x\in \mathrm{B}\rightarrow y\preccurlyeq x)$

例

例 偏序集<*A*, |>，A={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 },

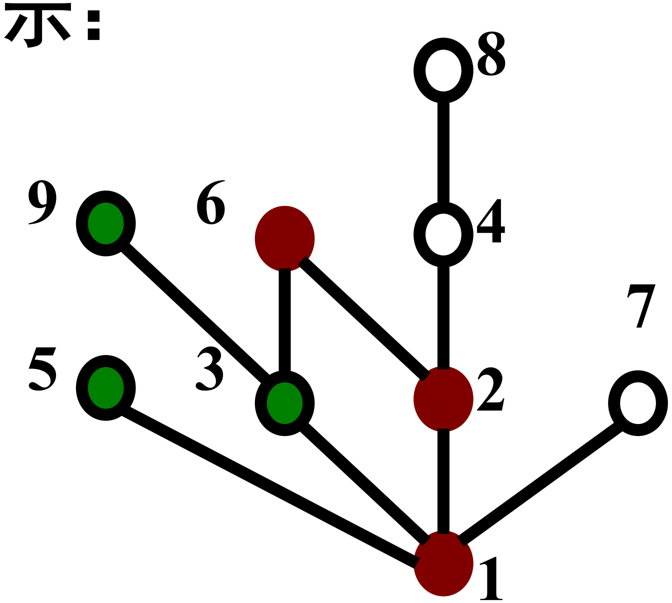
求 $B_1=\{1,2,6\}$, $B_2=\{3,5,9\}$, $B_3=A$ 的上界和下界。

解 偏序集的哈斯图如右图所示：

B_1 的上界是 4,8，下界是 1；

B_2 的上界：无， 下界：1,

B_3 的上界：无，下界是 1。



最小上界, 最大下界

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$
- **B的最小上界**(least upper bound):

  设$C=\{y \mid y$是B的上界$\}$,

  C**的最小元**称为B的最小上界, 或**上确界**.
- **B的最大下界**(greatest lower bound):

  设$C=\{y \mid y$是B的下界$\}$,

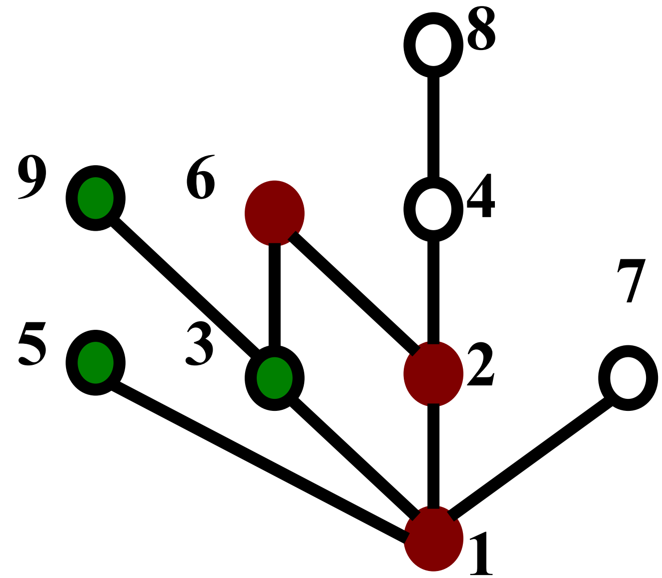
  C**的最大元**称为B的最大下界, 或**下确界**.

例

例 偏序集<A, |>，A={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 },

求 B_1={1,2,6}, B_2={3,5,9}, B_3=A 的最小上界、最大下界。

解 偏序集的哈斯图如右图所示：



B_1 的最小上界是 4;

B_1 的最大下界是 1,

B_2 的最小上界：无,

B_2 的最大下界：1,

B_3 的最小上界：无,

B_3 的最大下界是 1。

特殊元素比较

	一定存在(B非空有穷)	一定存在(B无穷)	若存在则唯一	∈B或∈A
最大元	×	×	√	∈B
最小元	×	×	√	∈B
极大元	√	×	×	∈B
极小元	√	×	×	∈B
上界	×	×	×	∈A
下界	×	×	×	∈A
上确界	×	×	√	∈A
下确界	×	×	√	∈A

链(chain), 反链(antichain)

设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$,

- 链(chain): B是A中的链

  $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x\in B \land y\in B \to x$与$y$可比$)$

  $|B|$称为链的长度

- 反链(antichain): B是A中的反链

  $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x\in B \land y\in B \land x\neq y \to x$与$y$不可比$)$

  $|B|$称为反链的长度

例 链,与反链

设偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$如图所示, $A=\{a,b,\ldots,k\}$.

$B_1=\{a,c,d,e\}$是长为4的链

上界$\{e,f,g,h\}$, 上确界$\{e\}$

下界$\{a\}$, 下确界$\{a\}$

$B_2=\{a,e,h\}$是长为3的链

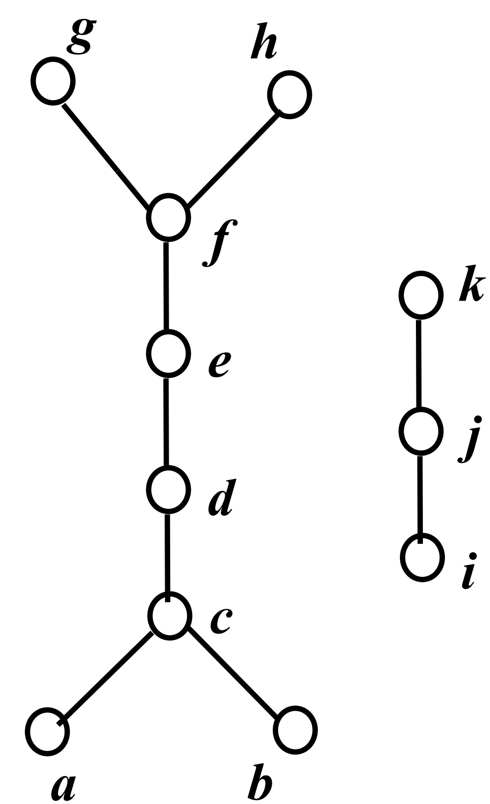
$B_3=\{b,g\}$是长为2的链

$B_4=\{g,h,k\}$是长为3的反链

其上界,下界,上确界,下确界: 无

$B_5=\{a\}$是长为1的链和反链

$B_6=\{a,b,g,h\}$既非链,亦非反链



定理2.31

定理2.31: 设$<A,\leqslant>$为偏序集, A中最长链的长度为n, 则

(1) A中存在极大元

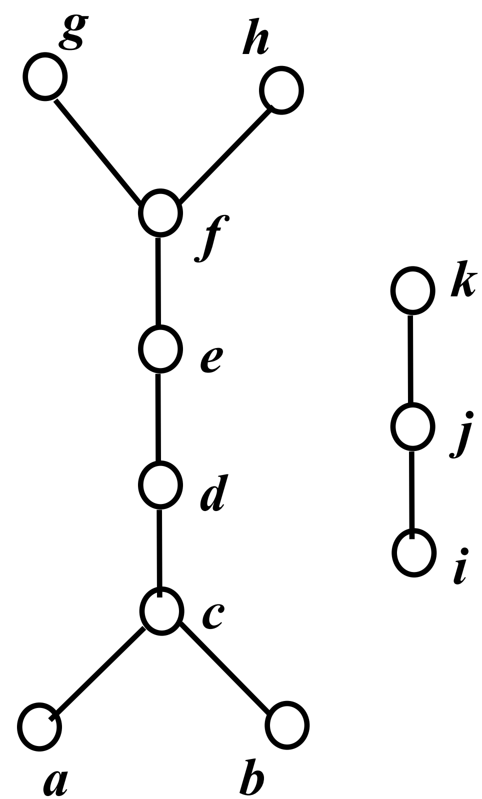
(2) A存在包含n个划分块的划分, 每个划分块都是反链(即A划分成n个互不相交的反链)

推论: 设$<A,\leqslant>$为偏序集, 若$|A|=mn+1$,则A中要么存在长度为$m+1$的反链, 要么存在长度为$n+1$的链.

例 验证定理2.31

偏序集的哈斯图如右图所示. 最长链长度为6, 如

$B_1=\{a,c,d,e,f,h\}$, $B_2=\{a,c,d,e,f,g\}$都是最长链.



$A=\{a,b,\ldots,k\}$可以划分为

$A_1=\{\{g,h,k\}, \{f,j\}, \{e,i\}, \{d\}, \{c\},\{a,b\}\}$,

$A_2=\{ \{a,b\}, \{c,i\}, \{d,j\}, \{e,k\}, \{f\}, \{g,h\} \}$

$|A|=11=2\times5+1$,

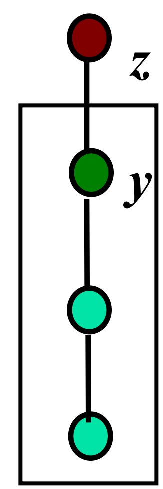
A中既有长度为2+1=3的反链,

也有长度为5+1=6的链

定理2.31(1)的证明

- **定理31: 设<A,≼>为偏序集, A中最长链的长度为n, 则(1) A中存在极大元**

证明: (1) 设B是A中长度为n的最长链, B有极大元(也是最大元)y, 则y也是A的极大元, 否则A中还有比y"大"的元素z, B就不是最长链.



定理2.31(2)的证明

定理31: 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, A中最长链的长度为n, 则

(2) A存在n个划分块的划分,每个划分块都是反链(即A划分成n个互不相交的反链)

证明:

$A_1 = \{ x \mid x$是A中的极大元$\}$,

$A_2 = \{ x \mid x$是$(A-A_1)$中的极大元$\}$,…

$A_n = \{ x \mid x$是$(A-A_1-\ldots-A_{n-1})$中的极大元$\}$,

则$A = \{ A_1, A_2,\ldots, A_n \}$是满足要求的划分.

定理31(证明(2):举例)

最长链长度为6,

$A_1 = \{ g, h, k \}$,

$A_2 = \{ f, j \}$,

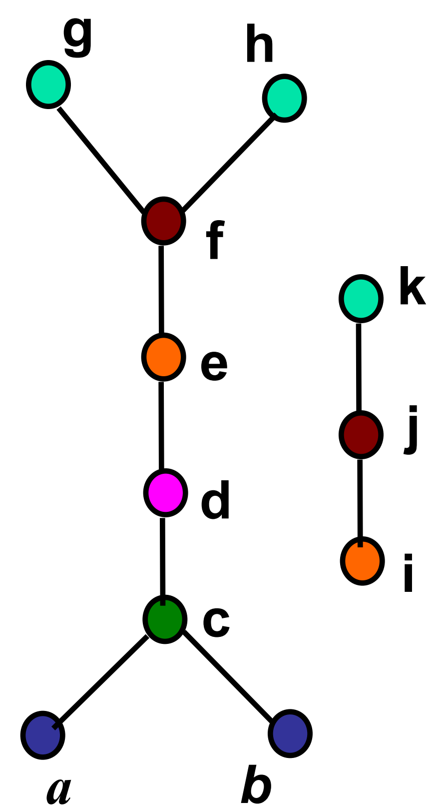
$A_3 = \{ e, i \}$,

$A_4 = \{ d \}$,

$A_5 = \{ c \}$,

$A_6 = \{ a, b \}$,

$A = \{ \{a,b\}, \{c\}, \{d\}, \{e,i\}, \{f,j\}, \{g,h,k\} \}$



定理2.31(2)的证明 续

证明(续):

[1] $A_1 = \{ x \mid x$是A中的极大元$\}$, 极大元互相之间不可比, 所以A_1是反链, 同理$A_2,\ldots,A_n$都是反链.

[2] 显然$A_1,A_2,\ldots,A_n$互不相交.

[3] 最长链上的元素分属$A_1,A_2,\ldots,A_n$, 所以$A_1,A_2,\ldots,A_n$都非空.

[4] 假设$z \in A\text{-}A_1\text{-}\ldots\text{-}A_n$,则最长链上的元素加上$z$就是长度为$n$+1的链, 矛盾!

所以 $A=A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

综上所述, $A=\{ A_1,A_2,\ldots,A_n \}$确是所求划分. #

定理2.31推论的证明

- **推论**: 设$<A,\leqslant>$为偏序集, 若$|A|=mn+1$,则A中要么存在长度为$m+1$的反链, 要么存在长度为$n+1$的链.

证明: (反证)假设A中既没有长度为$m+1$的反链, 也没有长度为$n+1$的链, 则按照定理31(2)中要求来划分A, A至多划分成n块,每块至多m个元素, 于是A中至多有mn个元素, 这与$|A|=mn+1$矛盾! #

全序(total order)关系

- **定义：若偏序集$<A,\preccurlyeq>$满足 $\forall x\forall y(x\in A\land y\in A\rightarrow x$与$y$可比$)$**

则称$\preccurlyeq$为全序关系, 称$<A,\preccurlyeq>$为全序集

全序关系亦称线序(linear order)关系

例: $<A,\leq>$, $<A,\geq>$

拟序(quasi-order)关系

- **拟序关系**: 设$R\subseteq A\times A$ 且$A\neq\varnothing$, 若R是**反自反的**, **传递的**, 则称R为拟序关系.

通常用$\prec$表示拟序关系(对比:“严格小于”).

- 反自反性与传递性**蕴涵了反对称性，**因此拟序关系是反自反的、反对称的和传递的
- 拟序集: $<A,\prec>$, $\prec$是A上拟序关系
- 例子: 设$\varnothing\neq A\subseteq R$, $\varnothing\neq B\subseteq Z_+$

  $<A,<>,<A,>>,<B,|'>,<A,\subset>$

  $|' = \{ <x,y> \mid x,y\in B \wedge x|y \wedge x\neq y\}$

定理2.29

定理29:设$\leqslant$是非空集合A上偏序关系,$<$是A上拟序关系,则

(1) $<$ 是反对称的;

(2) $\leqslant -I_A$ 是A上拟序关系;

(3) $< \cup I_A$ 是A上偏序关系.

证明: (1) $x<y \wedge y<x \Rightarrow x<x$, 矛盾.

(2)(3) 显然.

定理2.30

- **定理2.30**:设$\prec$是非空集合A上拟序关系,则

(1) $x \prec y, x=y, y \prec x$中至多有一式成立;

(2) $(x \prec y \lor x=y) \land (y \prec x \lor x=y) \Rightarrow x=y$.

证明:

(1) 两式以上成立导致$x \prec x$, 矛盾.

(2) $x \neq y \Rightarrow (x \prec y) \land (y \prec x)$, (由已知条件)

与(1)矛盾. #

三歧性(trichotomy)

- **三歧性**: 设 $<$ 是非空集合A上拟序关系,

  若$x<y, x=y, y<x$中有且仅有一式成立,

  则称 $<$ 具有三歧性.

- **拟全序关系**:设$<$是非空集合A上拟序关系,

  若$<$具有三歧性, 则称$<$为拟全序关系,

  或拟线序关系,称$<A,<>$为**拟线序集**.

良序(well-order)

- **定义**: 设<A,<>为拟全序集, 若A的任何非空子集B均有最小元,则称<为**良序关系**, <A,< >为**良序集**.
- **例**: <*N*,< >是良序集, <*Z*,< >不是良序集
- **良序原理**(well-ordering principle):

  每一个集合都可以良序化(建立良序关系).

  良序原理等价于选择公理.

  良序集可做超限(transfinite)归纳证明.

良序归纳

良序归纳法则(Principle of well-ordered induction)

假设A是良序集

归纳步骤：对所有的$y\in A$，如果对任意$x\in A$且$x<y$，$P(x)$ 成立，那么$P(y)$成立。

注：1. 良序归纳法则是数学归纳法成立的基础。

2. 良序归纳法则中没有对$P(x_0)$的验证，

因为不存在$x\in A$且$x<x_0$，所以$P(x_0)$成立。

偏序关系的实际应用1

应用一：字典序（Lexicographic order）

给定两个偏序集$<A_1, \preccurlyeq_1>$， $<A_2, \preccurlyeq_2>$，定义在$A_1 \times A_2$上的$\prec$，

$$<a_1, b_1> \prec <a_2, b_2> \Leftrightarrow a_1 \prec_1 a_2, \text{或} a_1 = a_2 \text{ and } b_1 \prec_2 b_2$$

将=添加到$A_1 \times A_2$上的$\prec$，得到$A_1 \times A_2$上的$\preccurlyeq$。

考虑字符串的字典序，对定义在S上的字串$a_1 a_2 \ldots a_m$ $b_1 b_2 \ldots b_n$，$t=\min(m,n)$, 那么

$$a_1 a_2 \ldots a_m \prec b_1 b_2 \ldots b_n \Leftrightarrow a_1 a_2 \ldots a_m \prec b_1 b_2 \ldots b_n$$

$$\text{或} a_1 a_2 \ldots a_t = b_1 b_2 \ldots b_t \text{并且} m<n.$$

$\prec$是定义在S^t上的字典序。

偏序关系的实际应用2

应用二： 拓扑排序（Toplological sorting）

如果只有一台处理器，调度有限个任务时，需要根据偏序要求对所有的任务安排一个执行顺序。 $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x=y$ **or** y**必须在**x**完成后执行。用集合论的术语讲，就是把原来的偏序集扩张成全序集，这种方法称为拓扑排序。**

Algorithm 1 Topological sorting

Procedure topological soring (<S, $\preccurlyeq$ >: finite poset)

k:=1

While S≠∅

Begin

  a_k:=S的极小元

  S:=S-{a_k}

  k:=k+1

end   **{a_1, a_1, …a_n is a compatibal total ordering of S}**

总结

- 等价关系,
- 等价类,商集,
- 划分
- 偏序,线序,拟序,良序
- 哈斯图,
- 特殊元素,
- (反)链
- 作业：p56, 习题二 44,45,46,47,50

课堂练习

1、偏序集<{2,4,5,10,12,20,25},|>的哪些元素是最大元，最小元、极大元、极小元？求{2,4,10}的上界、下界、上确界和下确界