第八章　欧拉图与哈密顿图

定理 8.1 设 G 是无向连通图，则下面三个命题是等价的:

(1) G 是欧拉图;

(2) G 中所有顶点的度数都是偶数;

(3) G 是若干个边不重的圈的并.

定理 8.2 设 G 是连通的无向图，G 是半欧拉图当且仅当 G 中恰有两个奇度顶点.

定理 8.3 设 D 是连通的有向图，则下面三个命题是等价的:

(1) D 是欧拉图;

(2) $\forall v \in V(D)$，$d^+(v) = d^-(v)$;

(3) D 为若干个边不重的有向初级回路的并.

定理 8.4 设 D 是连通的有向图，D 是半欧拉图当且仅当 D 中恰有两个奇度顶点，其中一个顶点入度比出度大 1，另一个顶点出度比入度大 1，而其余顶点的入度均等于出度.

定理 8.5 设 G 是无向欧拉图，则 Fleury 算法终止时得到的简单通路是欧拉回路.

定理 8.6 设无向图 $G = \langle V, E\rangle$ 是哈密顿图，则对于 V 的任意非空真子集 V_1 均有

$$p(G - V_1) \leq |V_1|$$

其中，$p(G - V_1)$ 为 $G - V_1$ 的连通分支数.

推论 设无向图 $G = \langle V, E\rangle$ 是半哈密顿图，则对于 V 的任意非空真子集 V_1 均有

$$p(G - V_1) \leq |V_1| + 1.$$

定理 8.7 设 G 是 $n(n \geq 2)$ 阶无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 v_i, v_j 均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$$

则 G 中存在哈密顿通路.

推论 1 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 v_i, v_j 均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n$$

则 G 中存在哈密顿回路，从而 G 是哈密顿图.

推论 2 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单图，若对于任意的 $v \in V(G)$，均有 $d(v) \geq \dfrac{n}{2}$，则 G 为哈密顿图.

定理 8.8 设 u, v 为无向 n 阶简单图 G 中的两个不相邻的顶点，且 $d(u) + d(v) \geq n$，则 G 为哈密顿图当且仅当 $G \cup (u, v)$ 为哈密顿图.

定理 8.9 设 D 为 $n(n \geq 2)$ 阶竞赛图，则 D 具有哈密顿通路.

推论 设 D 为 n 阶有向图，若 D 含 n 阶竞赛图作为子图，则 D 中具有哈密顿通路.

定理 8.10 强连通的竞赛图为哈密顿图.