$\iff x \in A \vee x \in \{A\}$ (集合并定义)

$\iff x \in A \vee x = A$ ($\in$ 性质)

$\implies x \subseteq A \vee x = A$ (教材定理 4.10)

$\implies x \subseteq A \vee x \subseteq A$ ($x = A \Rightarrow x \subseteq A$)

$\iff x \subseteq A$ (命题逻辑幂等律)

$\implies x \subseteq A \vee x \subseteq \{A\}$ (命题逻辑附加律)

$\iff x \subseteq A \cup \{A\}$ (集合并定义)

$\iff x \subseteq A^+$ (后继函数定义)

由教材定理 4.10 知，A^+ 是传递集。 □

4.6

(1)

证明： 若 $\mathscr{A}$ 的每个元素都是传递集，则：

$\forall x$,

$x \in \cup\mathscr{A}$

$\iff \exists y(y \in \mathscr{A} \wedge x \in y)$ (广义并定义)

$\implies \exists y(y \in \mathscr{A} \wedge x \subseteq y)$ (y 是传递集、教材定理 4.10)

$\implies \exists y(y \subseteq \cup\mathscr{A} \wedge x \subseteq y)$ (广义并性质)

$\implies x \subseteq \cup\mathscr{A}$ (子集关系传递性)

由教材定理 4.10 知，$\cup\mathscr{A}$ 是传递集。 □

(2)

证明： 若 $\mathscr{A}$ 非空，且 $\mathscr{A}$ 的每个元素都是传递集，则：

$\forall x$,

$x \in \cap\mathscr{A}$

$\iff \forall y(y \in \mathscr{A} \to x \in y)$ (广义交定义)

$\implies \forall y(y \in \mathscr{A} \to x \subseteq y)$ (y 是传递集、教材定理 4.10)

$\iff \forall y(y \in \mathscr{A} \to \forall z(z \in x \to z \in y))$ (子集关系定义)

$\iff \forall y \forall z(y \in \mathscr{A} \to (z \in x \to z \in y))$ (量词辖域扩张等值式)

$\iff \forall y \forall z(\neg y \in \mathscr{A} \vee (\neg z \in x \vee z \in y))$ (蕴涵等值式)

$\iff \forall y \forall z(\neg z \in x \vee (\neg y \in \mathscr{A} \vee z \in y))$ (命题逻辑交换律、结合律)

$\iff \forall y \forall z(z \in x \to (y \in \mathscr{A} \to z \in y))$ (蕴涵等值式)

$\iff \forall z(z \in x \to \forall y(y \in \mathscr{A} \to z \in y))$ (量词辖域收缩等值式)

$\iff \forall z(z \in x \to z \in \cap\mathscr{A})$ (广义交定义)

$\iff x \subseteq \cap\mathscr{A}$ (子集关系定义)

由教材定理 4.10 知，$\cap\mathscr{A}$ 是传递集。 □

4.7

证明： 令 $S = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \exists m(m \in \mathbb{N} \wedge m \neq n \wedge h(m) = h(n))\}$。

注意到，$0 \notin S$。这是因为：若 $0 \in S$，则由集合 S 和函数 h 的定义知，存在 $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$，