

□

(1) 答: $(A - B) \cup (A - C) = A$ 当且仅当 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 。

证明:

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (A - C) = A &\iff A - (B \cap C) = A && \text{(德·摩根律)} \\ &\iff A \cap (B \cap C) = \emptyset && \text{(习题 1.11 结论)} \\ &\iff A \cap B \cap C = \emptyset && \text{(结合律)} \end{aligned}$$

□

(2) 答: $(A - B) \cup (A - C) = \emptyset$ 当且仅当 $A \subseteq (B \cap C)$ 。

证明:

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (A - C) = \emptyset &\iff A - (B \cap C) = \emptyset && \text{(德·摩根律)} \\ &\iff A \subseteq (B \cap C) && \text{(引理 1.1)} \end{aligned}$$

□

(3) 答: $(A - B) \cap (A - C) = \emptyset$ 当且仅当 $A \subseteq (B \cup C)$ 。

证明:

$$\begin{aligned} (A - B) \cap (A - C) = \emptyset &\iff A - (B \cup C) = \emptyset && \text{(德·摩根律)} \\ &\iff A \subseteq (B \cup C) && \text{(引理 1.1)} \end{aligned}$$

□

(4) 答: $(A - B) \cap (A - C) = A$ 当且仅当 $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ 。

证明:

$$\begin{aligned} (A - B) \cap (A - C) = A &\iff A - (B \cup C) = A && \text{(德·摩根律)} \\ &\iff A \cap (B \cup C) = \emptyset && \text{(习题 1.11 结论)} \end{aligned}$$

□

1.13

(1) 先证两个引理:

引理 1.2 对任意集合 A 和 B , 有: $A \cap B \subseteq A$ 和 $A \cap B \subseteq B$ 。

证明: $\forall x$,

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B && \text{(集合交定义)} \\ &\implies x \in A && \text{(命题逻辑化简律)} \end{aligned}$$

故有, $A \cap B \subseteq A$ 。同理可证: $A \cap B \subseteq B$ 。

□

引理 1.3 对任意集合 A 和 B , 有: $A \subseteq A \cup B$ 和 $B \subseteq A \cup B$ 。

证明: $\forall x$,

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \in A \vee x \in B && \text{(命题逻辑附加律)} \\ &\iff x \in A \cup B && \text{(集合并定义)} \end{aligned}$$

故有, $A \subseteq A \cup B$ 。同理可证: $B \subseteq A \cup B$ 。

□

再证原题:

证明:

$$\begin{aligned} (A - B) - C &= (A \cap \sim B) \cap \sim C && \text{(补交转换律)} \\ &\subseteq A \cap \sim B && \text{(引理 1.2)} \end{aligned}$$