9.7 即为引理 7.5。

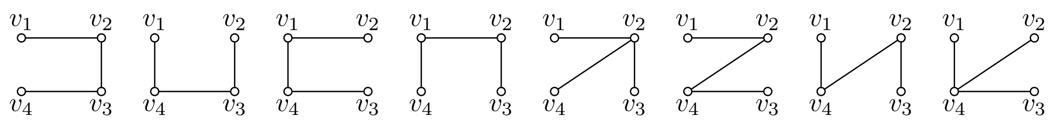
9.8

证明: 对 n 作归纳。

当 $n=2$ 时，必有 $d_1=d_2=1$，命题显然成立。

设 $n=t(t\geq 2)$ 时命题成立。当 $n=t+1$ 时，由于 $n\geq 3$，所以有 $n<\sum\limits_{i=1}^{n}d_i=2n-2<2n$，从而由鸽巢原理可知，必然存在 $1\leq i,j\leq n$，满足 $d_i>1$ 和 $d_j<2$，也即 $d_i\geq 2$ 和 $d_j=1$。不失一般性，不妨设 $i=1$，$j=n$。考虑如下 t 个正整数：$d_1-1,d_2,\cdots,d_t$，它满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{t}d_i=2t-2$，从而由归纳假设，存在一个以 $d_1-1,d_2,\cdots,d_t$ 为度数列的无向树 T。向 T 中添加一个新顶点 v，并令 v 与 T 中度数为 d_1-1 的顶点相邻。易见，如此得到的新图 T' 也是树，且以 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为度数列。这就证明了，当 $n=t+1$ 时，命题同样成立。 □

9.9 $\tau(G)=8$，全体不同的生成树为：



9.10 基本回路有：$C_a=aegdj,C_b=bgdji,C_c=cdg,C_f=fge,C_h=hij$。

基本回路系统为 $\{C_a,C_b,C_c,C_f,C_h\}$。

基本割集有：$S_d=\{a,b,c,d\},S_e=\{a,e,f\},S_g=\{a,b,c,f,g\},S_i=\{b,h,i\},S_j=\{a,b,h,j\}$。

基本割集系统为 $\{S_d,S_e,S_g,S_i,S_j\}$。

9.11

证明: 由题设，存在 $v\in V(T)$，满足 $d(v)\geq k$。设 T 中共有 t 片树叶。则 T 中除树叶和 v 外，其它 $n-t-1$ 个顶点的度数都不小于 2。从而由图论基本定理知：$2n-2=2m=\sum\limits_{v_i\in V(G)}d(v_i)\geq k+2(n-t-1)+t=2n+k-t-2$。解得 $t\geq k$。 □

9.12 首先证明下述结论：

引理 9.1 *设无向图 G 中共有 k 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k(k\geq 1)$，$u\in V(G_i)$，$v\in V(G_j)$，$(1\leq i,j\leq k)$，$e=(u,v)\notin E(G)$，$G'=G\cup e$，则*

(1) *若 $i=j$，则 $p(G')=p(G)$，且 G' 的连通分支为 $G_1,G_2,\cdots,G_i\cup e,\cdots,G_k$;*

(2) *若 $i\neq j$，则 $p(G\cup e)=p(G)-1$，且 G' 的连通分支为 $G_i\cup G_j\cup e,G_1,G_2,\cdots,G_{i-1},G_{i+1},\cdots,G_{j-1},G_{j+1},\cdots,G_k$。*

证明: 对任意 $x,y\in V(G)$，分两种情况：

情况一：若 x,y 在 G 中连通，则它们显然在 G' 中也连通。

情况二：若 x,y 在 G 中不连通，则它们属于 G 的两个不同的连通分支。下面证明，x,y 在 G' 中连通，当且仅当 $x\in V(G_i)\wedge y\in V(G_j)$ 或者 $x\in V(G_j)\wedge y\in V(G_i)$。

如果 $x\in V(G_i)\wedge y\in V(G_j)$ 或者 $x\in V(G_j)\wedge y\in V(G_i)$，则 x,y 在 G' 中显然是连通的。

反过来，如果 x,y 在 G' 中连通，则存在通路 $\Gamma=v_0v_1v_2\cdots v_t\subseteq G'$，其中 $v_0=x,v_t=y$。并且必有 $e\in E(\Gamma)$ (否则这个通路将同样出现在 G 中，矛盾)。由于 e 可能在 Γ 中多次出现，因此，假设 e 在 Γ 中的第一次出现和最后一次出现分别为 (v_r,v_{r+1}) 和 (v_s,v_{s+1})，其中 $0\leq r\leq s\leq t-1$ (若 e 只出现一次，则 $r=s$)。考虑 $\Gamma_1=v_0v_1\cdots v_r$，$\Gamma_2=v_{s+1}v_{s+2}\cdots v_t$，注意到，$\Gamma_1$ 和 Γ_2 中都不含 e，从而它们都在 G 中。而 v_r 和 v_{s+1} 都是 e 的端点，所以取值只能是 u 或 v，而且