注意到，a_2, b_1 都是非零元(否则将与 $x, y \in S^*$ 矛盾)。从而由于 F 是域，有 $a_2b_1 \neq 0$，而 $a_1b_2, a_2b_1 \in T$。所以有 $a_1b_2(a_2b_1)^{-1} \in S$。同样由于 F 是域，所以有 $a_1b_2(a_2b_1)^{-1} \neq 0$，从而 $a_1b_2(a_2b_1)^{-1} \in S^*$。

这就证明了 S 是子域。

最后，设 S_1 是任意包含 T 的子域。则对所有 $a, b \in T \subseteq S_1, b \neq 0$，由于 $b \in S_1^*$，而 S_1^* 是群，所以 $b^{-1} \in S_1^* \subseteq S_1$，从而有 $ab^{-1} \in S_1$，由 a, b 的任意性知，$S \subseteq S_1$。 □

18.14

证明: 记这唯一的右单位元为 a，下面证明它也是左单位元，从而是乘法单位元。

反设 a 不是左单位元，则存在 $b \in R$，使得 $ab \neq b$。从而有 $a + ab - b \neq a$ (否则，由消去律就有 $ab - b = 0$，$ab = b$，矛盾)。记 $c = a + ab - b$，则对任意 $x \in R$，有：

$$\begin{aligned} xc &= x(a + ab - b) && (c = a + ab - b) \\ &= xa + xab - xb && (\text{分配律}) \\ &= x + xb - xb && (xa = x) \\ &= x && (xb - xb = 0) \end{aligned}$$

从而 $c \neq a$ 也是右单位元，与 a 是唯一的右单位元矛盾。这就证明了对所有的 $b \in R$，有 $ab = b$。所以 a 是 R 的左单位元，从而是单位元。 □

18.15

证明: (1) ⇒ (2)。反设 u 是可逆的，即，u 存在左逆元 a_l。则对 u 的任意右逆元 a_r、a_r'，有：

$$\begin{aligned} a_r &= a_l u a_r && (a_l u = 1) \\ &= a_l && (u a_r = 1) \\ &= a_l u a_r' && (u a_r' = 1) \\ &= a_r' && (a_l u = 1) \end{aligned}$$

从而 u 只有一个右逆元。矛盾。

(2) ⇒ (3)。由于 u 有右逆元 a_r，但 u 不可逆，所以 $a_r u \neq 1$，即有 $a_r u - 1 \neq 0$。同时，u 显然不等于 0 (否则就有 $ua_r = 0a_r = 0 \neq 1$，矛盾)。但

$$\begin{aligned} u(a_r u - 1) &= u a_r u - u && (\text{分配律}) \\ &= u - u && (u a_r = 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以 u 是左零因子。

(3) ⇒ (1)。由于 u 是左零因子，所以存在 $b_r \neq 0$，使 $ub_r = 0$。设 a_r 是 u 的一个右逆元，则：

$$\begin{aligned} u(a_r + b_r) &= u a_r + u b_r && (\text{分配律}) \\ &= 1 && (u a_r = 1, u b_r = 0) \end{aligned}$$

从而 $a_r + b_r$ 也是 u 的一个右逆元。由于 $b_r \neq 0$，所以 $a_r + b_r \neq a_r$，从而 u 有多于一个右逆元。 □

18.16

证明: 设 $a \in R$ 是一个幂零元。令 k 为使 $a^k = 0$ 的最小正整数。若 $a \neq 0$，则必有 $k \geq 2$ (否则就有 $k = 1$，$a = a^1 = 0$，矛盾)。从而由 k 的最小性知，$a^1 \neq 0, a^{k-1} \neq 0$，而 $a^k = a^1 a^{k-1} = 0$，从而 a 和 a^{k-1} 是零因子。这与 R 是整环矛盾。 □

18.17 首先证明第 24 题结论：