数字逻辑第一章逻辑代数基础

信息科学与工程学院计算机系

杨永全

yangyq@ouc.edu.cn

逻辑代数基础

- 逻辑函数及标准形式
- 逻辑代数的主要定理及常用公式
- 逻辑函数的化简
  - 代数法化简
  - 卡诺图化简

逻辑代数基础

逻辑代数定义：按一定的逻辑规律进行运算的代数。由逻辑变量集K，常量0、1及与、或、非三种运算符所构成的代数系统。

又称为布尔代数，最早是由英国数学家布尔1850年提出来的，现在适用于数字系统的布尔代数是美国贝尔实验室的香农于1928年提出的，为改进的布尔代数。

逻辑代数为分析设计数字逻辑电路提供了坚实的理论基础。

逻辑函数及标准形式

1. 逻辑变量

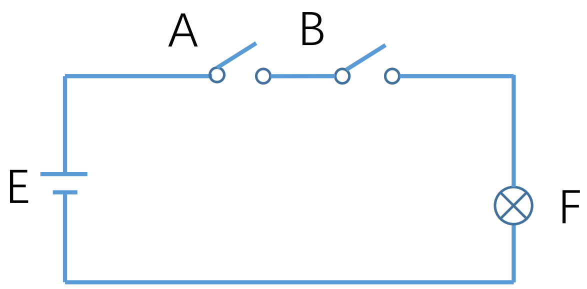
取值：逻辑0、逻辑1。逻辑0和逻辑1不代表数值大小，仅表示相互矛盾、相互对立的两种逻辑状态

2. 基本逻辑运算

- 与运算
- 或运算
- 非运算

与逻辑

只有决定某一事件的所有条件全部具备，事件才能发生

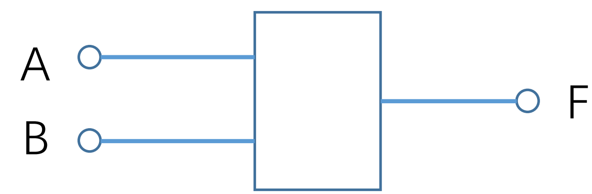


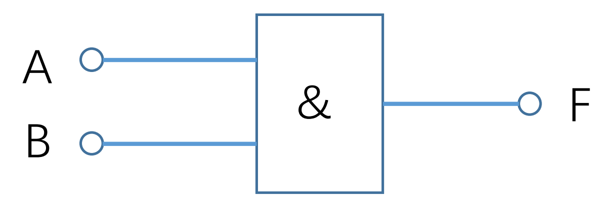
开关A	开关B	灯F	A	B	F
断	断	灭	0	0	0
断	合	灭	0	1	0
合	断	灭	1	0	0
合	合	亮	1	1	1

逻辑表达式：

$F=A\cdot B=AB$

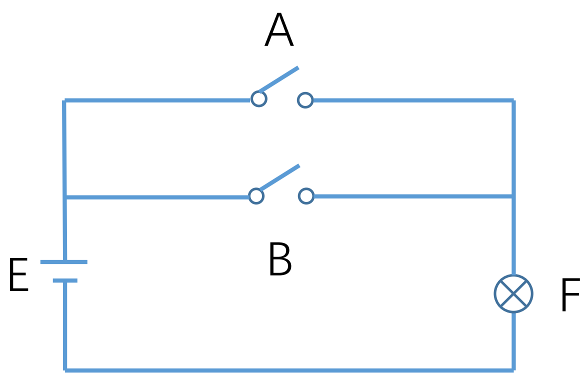
也可以使用&、∧，∩、×表示





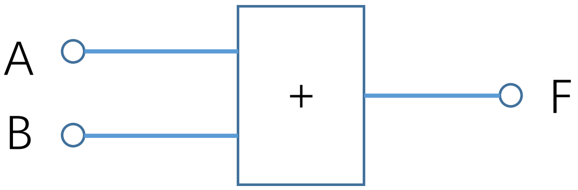
或逻辑

只要决定某一事件条件有一个及以上具备，事件就能发生



开关A	开关B	灯F	A	B	F
断	断	灭	0	0	0
断	合	亮	0	1	1
合	断	亮	1	0	1
合	合	亮	1	1	1

逻辑表达式：
F=A+B
也可以使用∨、∪表示



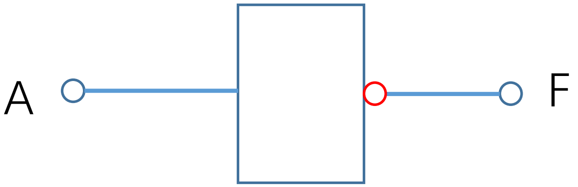
非逻辑

当决定某一事件的条件满足时，事件不发生；反之发生

A	F
0	1
1	0

逻辑表达式：

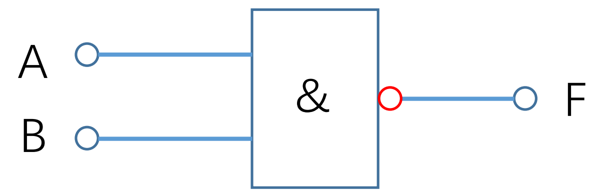
$$F = \overline{A}$$



复合逻辑

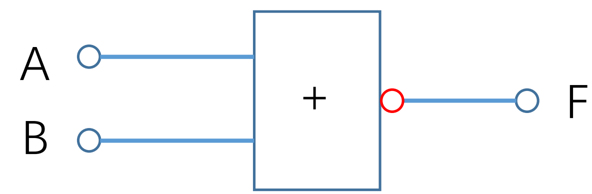
与非逻辑：

$F=\overline{AB}$



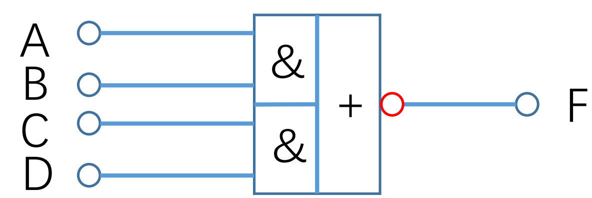
或非逻辑：

$F=\overline{A+B}$



与或非逻辑：

$F=\overline{AB+CD}$

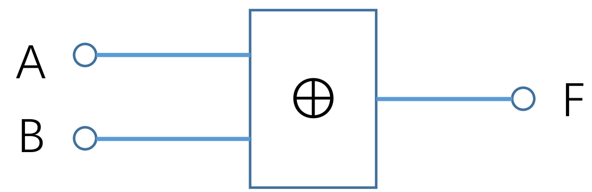


请大家写出上述复合逻辑的真值表。

复合逻辑

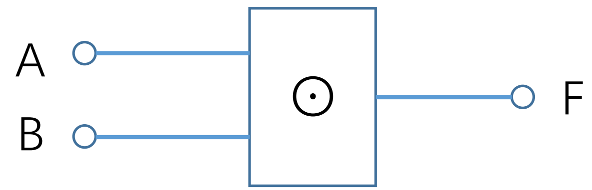
异或运算：

$F = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$



同或运算：

$F = A \odot B = \overline{A \oplus B}$



请大家写出上述复合逻辑的真值表，体会为什么叫做异或和同或。

逻辑代数基本公式

0-1律

1. $A \cdot 0 = 0 \qquad A + 1 = 1$
2. $A \cdot 1 = A \qquad A + 0 = A$
3. $0 \cdot 0 = 0 \qquad 0 + 0 = 0$
4. $1 \cdot 1 = 1 \qquad 1 + 1 = 1$
5. $0 + 1 = 1 + 0 = 1$
6. $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

逻辑代数基本公式

重叠律

1. $A \cdot A = A \qquad A + A = A$

互补律

1. $A \cdot \overline{A} = 0 \qquad A + \overline{A} = 1$

逻辑代数基本公式

对合律

1. $\overline{\overline{A}} = A$

逻辑代数基本公式

交换律

1. $A + B = B + A$
2. $A \cdot B = B \cdot A$

逻辑代数基本公式

结合律

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

逻辑代数基本公式

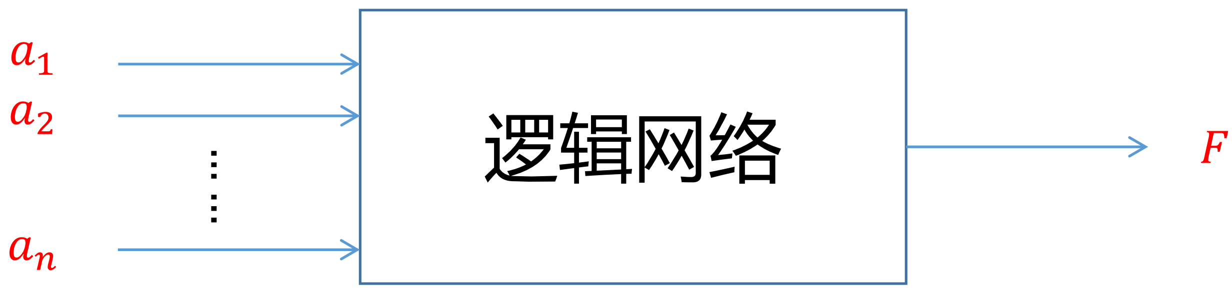
分配律

1. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
2. $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

请大家尝试证明上述第二条定律

逻辑函数及标准形式

用有限个与、或、非逻辑运算符，按某种逻辑关系将逻辑变量a_1 、a_2 、a_3、…连接起来，所得的表达式F = f（a_1 、 a_2 、 a_3 、…）称为逻辑函数。



输入变量 a_1 、a_2 、a_3、…确定后，F的值就唯一确定。

逻辑函数及标准形式

逻辑表达式

- 用逻辑符号来表示函数式的运算关系

真值表

- 输入变量不同取值组合与函数值间的对应关系列成表格

卡诺图

- 是一种几何图形，由若干个小方格构成，n个变量则有2^n 个小方格，每个小方格代表逻辑变量的一种组合，方格的排列有一定的规律性。

真值表

是一种用表格表示逻辑函数的方法。由逻辑变量的所有取值组合及对应的逻辑函数值构成表格。

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

所代表的逻辑表达式为：

F=AB

逻辑表达式

直接用逻辑变量和逻辑运算符构成。

F$= A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$

F$= A \odot B = \overline{A \oplus B}$

卡诺图

是一种几何图形，由若干个小方格构成，n个变量则有2^n个小方格，每个小方格代表逻辑变量的一种组合，方格的排列有一定的规律性。

B / A	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,B$
A	$A\overline{B}$	AB

函数值为1时，对应的小方格标1，例如F=AB可表示为：

B / A	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	0
A	0	1

最小项表达式

最大项表达式

最小项表达式

最小项：n个变量的逻辑函数中，包括全部n个变量的乘积项（每个变量必须而且只能以原变量或反变量的形式出现一次）

n个变量有2^n个最小项，记作m_i

3个变量有2^3（8）个最小项

最小项	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	$\overline{A}\,BC$	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	$A\,\overline{B}\,C$	$AB\,\overline{C}$	ABC
二进制数	000	001	010	011	100	101	110	111
十进制数	0	1	2	3	4	5	6	7
编号	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7

最小项表达式

性质：

- 任意一组变量取值，只有一个最小项的值为1，其它最小项的值均为0
- 同一组变量取值任意两个不同最小项的乘积为0。即 $m_i \times m_j = 0 \quad (i \neq j)$
- 全部最小项之和为1，即

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

最小项表达式

A	B	C	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	F
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

最小项表达式

最小项号：用m来表示最小项，把每个最小项的原变量用1表示，反变量用0表示所对应的二进制数的十进制值就是其最小项号。

例如：

ABC的最小项编号为111即7，用m_7来表示。

最小项表达式

最小项表达式

1. 定义：由最小项之和所构成的表达式.

任何一个逻辑函数都只有一个最小项表达式.

2. 怎样得到最小项表达式

方法：反复用$X = X(Y + \overline{Y})$

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= A + \overline{B}C + \overline{A}BC \\
&= A(B+\overline{B}) + \overline{B}C + \overline{A}BC \\
&= AB + A\overline{B} + \overline{B}C(A+\overline{A}) + \overline{A}BC \\
&= AB(C+\overline{C}) + A\overline{B}(C+\overline{C}) + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC \\
&= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC \\
&= \sum(1,3,4,5,6,7)
\end{aligned}
$$

最小项表达式

最小项表达式的性质

1. m_i为$F(A_1$、$A_2...A_n)$的一个最小项，则使$m_i=1$的一组变量取值使$F=1$。
2. F_1和F_2为A_1、$A_2...A_n$的函数，则$F=F_1+F_2$包含F_1和F_2中所有的最小项，$F=F_1 \cdot F_2$包含F_1和F_2中共有的最小项.。
3. 若$\overline{F}$ 是F的反函数，$\overline{F}$ 包含F所包含最小项之外的所有最小项。

最大项表达式

最大项：为一个和项，并且每个变量以原变量或反变量的形式出现一次并且只出现一次。

用M来表示最大项，把每个最大项的原变量用0表示，反变量用1表示所对应的二进制数的十进制值就是其最大项号。

三个变量的最大项包括：

$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$、$\overline{A}+\overline{B}+C$、$\overline{A}+B+\overline{C}$、$\overline{A}+B+C$、$A+\overline{B}+\overline{C}$、$A+\overline{B}+C$、

$A+B+\overline{C}$、$A+B+C$

最大项表达式

性质：

- 每一个最大项只有一组取值可以使其值为0。
- 任意两个最大项的和为1。
- n个变量的所有2^n个最大项之积为0。

最大项表达式

最大项表达式

1. 定义：由最大项之积所构成的表达式。

任何一个逻辑函数都只有一个最大项表达式。

2. 怎样得到最大项表达式

反复使用X+YZ=(X+Y)(X+Z)

F=$A\overline{C}+B\overline{C}$

=$\overline{C}(A+B)$

=$\left(\overline{C}+A\overline{A}+B\overline{B}\right)\left(A+B+C\overline{C}\right)$

=$\left(A+B+\overline{C}\right)\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)\left(\overline{A}+B+\overline{C}\right)\left(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}\right)(A+B+C)$

=$\prod(0,1,3,5,7)$

最小项与最大项的关系

相同编号的最小项和最大项存在互补关系

$$m_i = \overline{M_i}$$

若干个最小项之和表示的表达式F，其反函数F可用等同个与这些最小项相对应的最大项之积表示。

$$F = m_1 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$\overline{F} = \overline{m_1 + m_3 + m_5 + m_7}$$

$$= \overline{m_1} \cdot \overline{m_3} \cdot \overline{m_5} \cdot \overline{m_7}$$

$$= M_1 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_7$$

逻辑函数的标准形式

最小项表达式:积之和范式

最大项表达式:和之积范式

逻辑函数及标准形式

逻辑函数三种表示方法之间的关系

- 真值表：逻辑函数的本质（较为复杂）
- 逻辑表达式：逻辑函数的数学描述（便于化简、运算）
- 卡诺图：逻辑函数的图形表示（复杂，直观，可用于化简）

用例子说明

请大家将下式化简为最小项表达式：

$$F(A,B,C) = A\overline{C} + B\overline{C} + ABC$$

逻辑函数及标准形式

$$F=\sum(2,4,6,7)$$

请大家画出该函数的真值表：

逻辑函数及标准形式

$$F = \sum(2,4,6,7)$$

请大家画出该函数的真值表：

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

逻辑函数及标准形式

$$F = \sum(2,4,6,7)$$

请大家画出该函数的卡诺图：

逻辑函数及标准形式

$$F=\sum(2,4,6,7)$$

请大家画出该函数的卡诺图：

（卡诺图在后面化简时将发挥重要作用）

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$				1
A	1		1	1

逻辑函数及标准形式

三种表示法存在一一对应的关系。

逻辑函数相等的概念

两函数:

$F=f(A_1,A_2,\ldots A_n)$

$G=g(A_1,A_2,\ldots A_n)$

对任一组$A_1,A_2..A_n$的取值F=G，则两函数相等。

怎样判断（三个条件是一样的）：

1. 标准表达式相同。
2. 真值表相同。
3. 卡诺图相同。

德·摩根定理

$$\overline{X_1 + X_2 \cdots + X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdots \cdot \overline{X_n}$$

$$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdots \cdot X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} \cdots + \overline{X_n}$$

请尝试证明。

逻辑代数的主要定理及常用公式

对偶定理

对偶函数的概念：

对于任意一个逻辑函数，做如下处理：

1. 若把式中的运算符“.”换成“+”，“+”换成“.”；
2. 常量“0”换成“1”，“1”换成“0”

得到新函数式为原函数式F的对偶式F′，也称对偶函数

$$F=\overline{AB+\overline{A}C+1\cdot B}$$

的对偶函数是：

$$F'=\overline{(A+B)\cdot\left(\overline{A}+C\right)\cdot(0+B)}$$

逻辑代数的主要定理及常用公式

对偶定理

$$f'(x_1, x_2 \cdots x_n, 0,1, +,\cdot) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2} \cdots \overline{x_n}, 0,1, +,\cdot)$$

推理1：

$$(f')' = f$$

推理2：

如果：f=g，则：$f' = g'$

逻辑代数的主要定理及常用公式

对偶定理

自对偶函数：对偶函数等于函数本身。

尝试证明函数：$F=\left(A+\overline{C}\right)\overline{B}+A\left(\overline{B}+\overline{C}\right)$

是自对偶函数。

对偶定理

自对偶函数：对偶函数等于函数本身。

尝试证明函数：$F = (A + \overline{C})\overline{B} + A(\overline{B} + \overline{C})$

是自对偶函数。

$$F' = (A\overline{C} + \overline{B})(A + \overline{B}\overline{C})$$

$$= (A + \overline{B})(\overline{B} + \overline{C})(A + \overline{B})(A + \overline{C})$$

$$= A(\overline{B} + \overline{C})(A + \overline{C}) + \overline{B}(\overline{B} + \overline{C})(A + \overline{C})$$

$$= A(\overline{B} + \overline{C}) + (A + \overline{C})\overline{B}$$

逻辑代数的主要定理及常用公式

展开定理

$$f(x_1,\cdots x_i,\cdots x_n\ )=x_i\cdot f(x_1,\cdots 1\cdots x_n)+\overline{x_i}f(x_1,\cdots 0,\cdots x_n)$$

$$f(x_1,\cdots x_i,\cdots x_n)$$
$$=[x_i+f(x_1,\cdots 0\cdots x_n)][\overline{x_i}+f(x_1,\cdots 1,\cdots x_n)]$$

推理1：

$$x_i\cdot f(x_1,\cdots x_i,\cdots x_n\ )=x_i\cdot f(x_1,\cdots 1\cdots x_n)$$

$$x_i+f(x_1,\cdots x_i,\cdots x_n)=x_i+f(x_1,\cdots 0\cdots x_n)$$

推理2：

$$\overline{x_i}\cdot f(x_1,\cdots x_i,\cdots x_n\ )=\overline{x_i}f(x_1,\cdots 0,\cdots x_n)$$

$$\overline{x_i}+f(x_1,\cdots x_i,\cdots x_n)=\overline{x_i}+f(x_1,\cdots 1,\cdots x_n)$$

请尝试证明上述推论。

逻辑代数的主要定理及常用公式

吸收律

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$$

$$(A + B) \cdot \left(A + \overline{B}\right) = A$$

$$A + A \cdot B = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$A + \overline{A} \cdot B = A + B$$

$$A \cdot \left(\overline{A} + B\right) = A \cdot B$$

包含律

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

异或相关公式

$$A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$$

$$\overline{A \oplus B} = \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus \overline{A} = 1$$

$$A \oplus 0 = \mathrm{A}$$

$$A \oplus 1 = \overline{A}$$

$$A \oplus \overline{B} = \overline{A \oplus B} = A \oplus B \oplus 1$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$A \cdot (B \oplus C) = (A \cdot B) \oplus (A \cdot C)$$

逻辑函数的化简

最简式定义

1. 该式中乘积项最少
2. 每个乘积项再不能用变量更少的乘积项代替

逻辑函数的化简

代数法化简

1. 并项： 利用$AB+A\overline{B}=A$将两项并为一项，且消去一个变量B
2. 消项： 利用A + AB = A消去多余的项AB
3. 消元：利用$A+\overline{A}B=A+B$消去多余变量$\overline{A}$
4. 配项：利用$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$和互补律、重叠律先增添项，再消去多余项BC

代数法化简

例：

$$F = AC + \overline{A}D + \overline{B}D + B\overline{C}$$

$$= AC + B\overline{C} + D\left(\overline{A} + \overline{B}\right)$$

$$= AC + B\overline{C} + D\overline{AB}$$

$$= AC + B\overline{C} + AB + D\overline{AB}$$

$$= AC + B\overline{C} + AB + D$$

$$= AC + B\overline{C} + D$$

代数法化简

例：请尝试化简下列函数：

$$AB + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C}$$

逻辑函数的化简

代数法化简

例：请尝试化简下列函数：

$$AB + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C}$$

$$= AB + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C}\left(A + \overline{A}\right)$$

$$= AB + \overline{A}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

$$= AB + \overline{A}\,\overline{C}$$

代数法化简

例：请尝试化简下列函数：

$$F = \overline{AB + \overline{C}} + A\overline{C} + B$$

代数法化简

例：请尝试化简下列函数：

$$F = \overline{AB + \overline{C}} + A\overline{C} + B$$

$$= \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot C + A\overline{C} + B$$

$$= \overline{A}C + \overline{B}C + A\overline{C} + B$$

$$= B + C + \overline{A}C + A\overline{C}$$

$$= B + C + A\overline{C}$$

$$= B + C + A$$

代数法化简

例：请尝试化简下列函数：

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}$$

代数法化简

例：请尝试化简下列函数：

$$F = AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}$$

$$= A\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{C}$$

$$= \overline{C} + \overline{A}BC$$

$$= \overline{C} + \overline{A}B$$

代数法化简

例：请尝试化简下列函数：

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$=\overline{A}\left(\overline{B}+B\overline{C}\right)+A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}$$

逻辑函数的化简

卡诺图化简

利用布尔代数可以把逻辑函数变为较简单的形式，但要求对公式熟悉并准确，特别是无法判断是否最简，卡诺图可简便地得到最简式。

卡诺图的构成

逻辑函数的最小项表达式：

一个逻辑函数有n个变量，则有 2^n个最小项；

卡诺图化简

有一个逻辑函数：

$$F(A,B,C)=AB+\overline{A}C$$

$$=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}C$$

$$=\sum(1,3,6,7)$$

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$		1	3	
A			7	6

卡诺图化简

卡诺图（K图）：图中的一小格对应真值表中的一行，即对应一个最小项，又称真值图。

A	B	C	F
0	0	0	m_0
0	0	1	m_1
0	1	0	m_2
0	1	1	m_3
1	0	0	m_4
1	0	1	m_5
1	1	0	m_6
1	1	1	m_7

	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	0	1	3	2
A	4	5	7	6

	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	m_0	m_1	m_3	m_2
A	m_4	m_5	m_7	m_6

卡诺图化简

请大家听我的，把这两个卡诺图记住

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	m_0	m_1	m_3	m_2
A	m_4	m_5	m_7	m_6

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	m_0	m_1	m_3	m_2
$\overline{A}B$	m_4	m_5	m_7	m_6
AB	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\overline{B}$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

卡诺图化简

0表式反变量，1表示原变量。每个小方格的编号与其最小项的编号一致

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	0	1	3	2
A	4	5	7	6

数字有效位分配给变量的方法也一致，A为高位，C为低位。

卡诺图化简

卡诺图化简函数规则：

几何相邻的2^i（i = 1、2、3…n）个小格可合并在一起构成正方形或矩形圈，消去i个变量，而用含（n - i）个变量的积项标注该圈。

逻辑函数的化简

卡诺图化简

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	m_0	m_1	m_3	m_2
$\overline{A}B$	$\boxed{m_5\ \ m_7}$			m_6
AB	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\overline{B}$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

两个相邻格圈在一起，结果消去一个变量

$\overline{A}BD$

逻辑函数的化简

卡诺图化简

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	m_0	m_1	m_3	m_2
$\overline{A}B$	m_4	m_5	m_7	m_6
AB	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\overline{B}$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

四个相邻格圈在一起，结果消去两个变量

BD

卡诺图化简

	$\bar{C}\,\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\,\bar{B}$	m_0	m_1	m_3	m_2
$\bar{A}B$	m_4	m_5	m_7	m_6
AB	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
$A\bar{B}$	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$\rightarrow D$

八个相邻格圈在一起，结果消去三个变量

逻辑函数的化简

卡诺图化简

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$				1
$\overline{A}B$				
AB		1	1	
$A\overline{B}$				1

$$F = AB\overline{C}D + ABCD$$
$$= ABD$$
$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,C\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$$
$$= \overline{B}C\overline{D}$$

1. 任两个相邻单元可以形成一个圆，消去一个变量

逻辑函数的化简

卡诺图化简

	$\bar{C}\,\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\,\bar{B}$				
$\bar{A}B$		1	1	
AB		1	1	
$A\bar{B}$				

$$
\begin{aligned}
F &= AB\bar{C}D + ABCD \\
&+ \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD \\
&= \bar{A}B\left(\bar{C}D + CD\right) \\
&+ AB\left(\bar{C}D + CD\right) = \mathrm{BD}
\end{aligned}
$$

2. 任四个相邻单元可以形成一个圆，消去两个变量

卡诺图化简

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$		1	1	
$\overline{A}B$		1	1	
AB		1	1	
$A\overline{B}$		1	1	

$$F = \mathrm{D}$$

3. 任八个相邻单元可以形成一个圆，消去三个变量

逻辑函数的化简

卡诺图化简

总结： N变量的卡诺图 2^M个相邻单元，可消去M个变量，乘积项由N-M个变量组成

逻辑函数的化简

卡诺图化简

几个概念：

- 蕴涵项：F表示为积之和式，则任一乘积项称为蕴含项。
- 素项：某蕴涵项不是其他蕴涵项的子集，则为素项。
- 实质素项：某一函数的素项所包含的至少一个最小项不是其他任何素项的子集

卡诺图化简

举例说明一下：

$$F = \sum(0,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 14,\ 15)$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0			
$\bar{A}B$		5	7	
AB			15	14
$A\bar{B}$	8	9	11	10

$A = \sum(0,8)$
$B = \sum(5,7)$
$C = \sum(7,15)$
$D = \sum(10,11,14,15)$
$E = \sum(8,9,10,11)$
$F = \sum(8,9)$
$G = \sum(10,11)$
$H = \sum(14,15)$

A-H都是蕴含项，A-E为素项，ABDE为实质素项

卡诺图化简

化简步骤

1. 作出卡诺图，找出全部素项
2. 找出实质素项
3. 求出最简素项集（保证覆盖所有最简项）

逻辑函数的化简

卡诺图化简

例1 化简逻辑函数：

$$F(A,B,C)=\sum(0,1,2,4,5,7)$$

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$	0	1		2
A	4	5	7	

$$F=\overline{B}+AC+\overline{A}\,\overline{C}$$

卡诺图化简

例2试用卡诺图将：

$$Y=\prod(4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11)$$

化简为最简或与式。

卡诺图化简

例2试用卡诺图将：

$$Y=\prod(4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11)$$

化简为最简或与式。

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$				
$\overline{A}B$	4	5	7	6
AB				
$A\overline{B}$		9	11	

根据最大项和最小项的性质：

$$\overline{Y}=\sum(4,5,6,7,9,11)$$

$$\overline{Y}=\overline{A}B+A\overline{B}D$$

$$Y=\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B+\overline{D}\right)$$

卡诺图化简

例3 化简：

$$F(A,B,C,D)=\sum(0,2,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15)$$

逻辑函数的化简

卡诺图化简

例3 化简:

$$F(A,B,C,D)=\sum(0,2,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15)$$

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1		1	1
$\overline{A}B$		1		1
AB	1	1	1	1
$A\overline{B}$	1	1	1	1

$$F = A + C\overline{D} + \overline{B}C + \overline{B}\,\overline{D} + B\overline{C}D$$

卡诺图化简

我们来总结一下

1. 画出卡诺图
2. 先画大圈，再画小圈，直到所有的内容都覆盖
3. 根据每一个圈，写出化简后的表达式

卡诺图化简

八个连在一起的情况：

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$				
$\overline{A}B$				
AB	1	1	1	1
$A\overline{B}$	1	1	1	1

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1	1	1
$\overline{A}B$	1	1	1	1
AB				
$A\overline{B}$				

卡诺图化简

八个连在一起的情况：

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1		
$\overline{A}B$	1	1		
AB	1	1		
$A\overline{B}$	1	1		

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$			1	1
$\overline{A}B$			1	1
AB			1	1
$A\overline{B}$			1	1

卡诺图化简

八个连在一起的情况：

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$		1	1	
$\overline{A}B$		1	1	
AB		1	1	
$A\overline{B}$		1	1	

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$				
$\overline{A}B$	1	1	1	1
AB	1	1	1	1
$A\overline{B}$				

逻辑函数的化简

卡诺图化简

八个连在一起的情况：

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1			1
$\overline{A}B$	1			1
AB	1			1
$A\overline{B}$	1			1

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1	1	1
$\overline{A}B$				
AB				
$A\overline{B}$	1	1	1	1

卡诺图化简

四个连在一起的情况：

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1			
$\overline{A}B$	1			
AB	1			
$A\overline{B}$	1			

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1	1	1
$\overline{A}B$				
AB				
$A\overline{B}$				

卡诺图化简

四个连在一起的情况：

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1		
$\overline{A}B$	1	1		
AB				
$A\overline{B}$				

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1		
$\overline{A}B$				
AB				
$A\overline{B}$	1	1		

逻辑函数的化简

卡诺图化简

四个连在一起的情况：

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$				
$\overline{A}B$	1			1
AB	1			1
$A\overline{B}$				

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1			1
$\overline{A}B$				
AB				
$A\overline{B}$	1			1

卡诺图化简

化简结果并不唯一：

请大家看下面的情况，如何化简，结果又是什么？

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$		1	1	1
A	1	1		1

逻辑函数的化简

卡诺图化简

卡诺图化简的优势与劣势

优势：

1. 简单，直观
2. 能够画成最简

劣势：

1. 操作步骤繁琐，慢
2. 适用于4个变量以下