数都不超过 $\dfrac{4m}{n}$，所以：

$$
\begin{aligned}
|N_g(V^*) \cup V^*| \leq & |N_g(V^*)| + |V^*| && \text{(容斥原理)} \\
\leq & \frac{4m}{n}k + k && (|V^*| = k) \\
\leq & k(1 + 4m/n)
\end{aligned}
$$

反设 $k < \dfrac{n/2}{1+4m/n}$，则有 $|N_g(V^*) \cup V^*| < \dfrac{n}{2}$，由第 (1) 小题结论，$V(G) - V^*$ 中仍有度数不超过 $\dfrac{4m}{n}$ 且与 V^* 中任何顶点都不相邻的顶点。这与 V^* 的选择方式矛盾。 □

四、

1.

证明： $\forall a, b \in G$，

$$
\begin{aligned}
aba^{-1}b^{-1} \in & Naba^{-1}b^{-1} \\
= & Na \circ Nb \circ Na^{-1} \circ Nb^{-1} && \text{(商群运算定义)} \\
= & Na \circ Na^{-1} \circ Nb \circ Nb^{-1} && (G/N \text{ 是 Abel 群}) \\
= & N(aa^{-1}bb^{-1}) && \text{(商群运算定义)} \\
= & Ne && (aa^{-1}bb^{-1} = e) \\
= & N && \text{(陪集定义)}
\end{aligned}
$$

□

2.

证明： 由鸽巢原理知，存在 $1 \leq i, j \leq 8$，使第 i 行各项之和 $S_i \geq 7$，第 j 行各项之和 $S_j \geq 7$，从而第 i 行与第 j 列各项之和等于 $S_i + S_j - a_{ij} \geq 7 + 7 - 1 = 13$。 □

3. 题目中的要求已经决定大多数运算的值，仅有 $a * c = c * a$ 的值是可以自由决定的。这里令 $a * c = c * a = a$，使 c 成为单位元。运算表如下：

$*$	a	b	c
a	a	c	a
b	c	b	b
c	a	b	c

注意到，由于 $ab = ba = cc = c$，所以每个元素都可逆。假设 $*$ 运算是可结合的，则 $\langle A, * \rangle$ 将构成一个 3 阶循环群(素数阶群必是循环群)，而这是不可能的(因为 a, b 都是 2 阶元，不可能是生成元)。所以 $*$ 运算一定不是可结合的(反例如，$(a * a) * b = a * b = c \neq a * (a * b) = a * c = a$)。

4. 根据各数除以 3 所得的余数，将这 20 个数分成 3 类：$S_k = \{3n + k \mid n \in \mathbb{N} \wedge 3n + k \leq 20\}(k = 1, 2, 3)$。显然，$|S_1| = |S_2| = 7, |S_3| = 6$。而三个数之和为 3 的倍数当且仅当这三个数分别来自 S_1, S_2, S_3 或三个数全部来自同一个 $S_i(1 \leq i \leq 3)$。从而共有 $7 \cdot 7 \cdot 6 + 2 \cdot C_7^3 + C_6^3$ 种选法。