证明： 由于 $e_1 \in H_1, e_2 \in H_2$，所以 $\langle e_1, e_2\rangle \in H_1 \times H_2$，$H_1 \times H_2$ 非空。

对任意 $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in H_1 \times H_2$，

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle^{-1} &= \langle a,b\rangle\langle c^{-1},d^{-1}\rangle && (\text{教材定理 15.6(5)})\\ &= \langle ac^{-1}, bd^{-1}\rangle && (\text{积代数定义})\\ &\in H_1 \times H_2 && (a,c \in H_1,\ b,d \in H_2)\end{aligned}$$

由子群判定定理二知，$H_1 \times H_2 \leqslant G_1 \times G_2$。 □

17.68

证明： 令 $\varphi : G \to G/H \times G/K$，$\forall g \in G$，$\varphi(g) = \langle Hg, Kg\rangle$。$\varphi$ 显然是函数，且为同态。下面证明 φ 是单射。

对任意 $a, b \in G$，

$$\begin{aligned}&\varphi(a) = \varphi(b)\\ \iff& \langle Ha, Ka\rangle = \langle Hb, Kb\rangle && (\varphi \text{ 定义})\\ \iff& Ha = Hb \wedge Ka = Kb && (\text{教材定理 2.1})\\ \iff& ab^{-1} \in H \wedge ab^{-1} \in K && (\text{教材定理 17.22})\\ \iff& ab^{-1} \in H \cap K && (\text{集合交定义})\\ \iff& ab^{-1} = e && (H \cap K = \{e\})\\ \iff& a = b && (\text{右乘 } b)\end{aligned}$$

因此 φ 是 G 到 $\varphi(G)$ 的双射，从而是同构。

由于 G 是群，所以 $\varphi(G) \cong G$ 也是群，且为 $G/H \times G/K$ 的子群。 □

17.69 作 $\varphi_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$，$\forall\langle g_1, g_2\rangle \in G_1 \times G_2$，$\varphi_1(\langle g_1, g_2\rangle) = g_1$；$\varphi_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$，$\forall\langle g_1, g_2\rangle \in G_1 \times G_2$，$\varphi_2(\langle g_1, g_2\rangle) = g_2$。

φ_1 和 φ_2 显然是同态，且为满同态。取 $N_1 = \ker\varphi_1 = \{\langle e_1, g_2\rangle \mid g_2 \in G_2\}, N_2 = \ker\varphi_2 = \{\langle g_1, e_2\rangle \mid g_1 \in G_1\}$，由群同态基本定理知，$G_1 \times G_2 \big/ N_1$ 和 $G_1 \times G_2 \big/ N_2$ 满足题目要求。