2016 春答案

一．填空题

1. 0.35　　2. $e^{-2\lambda}$　　3. 0.8　　4. $P\{\widehat{\theta_1}<\theta<\widehat{\theta_2}\}\geq 0.95$

5. $C_1=\frac{1}{3}$　$C_2=\frac{2}{3}$　　6. $-\frac{1}{3}$

二．选择题　$BADDCB$

三．简答题

（1）有分布函数的定义知

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leq y\}$$

$$=P\{X\leq\sigma y+\mu\}=\int_{-\infty}^{\sigma y+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\xrightarrow{\text{令}\frac{x-\mu}{\sigma}=t}=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

即 $Y\sim N(0,1)$

（2）边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

根据条件概率的定义，得

对于 $\forall y\in(0,1)$

$$f_{X|Y}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2x}{1-y^2}, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于 $\forall x\in(0,1)$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（3）$X_1-2X_2\sim N(0,5)$　$\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{5}}\sim N(0,1)$

$3X_3-4X_4\sim N(0,25)$　$\frac{3X_3-4X_4}{5}\sim N(0,1)$

即　$a=\frac{1}{5}$　　$b=\frac{1}{25}$　　自由度为 2

四．综合题

（1）θ的极大似然估计量为$\hat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2 \cdots X_n\}$

X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$

$X_{(n)}$ 的分布函数$F_{(n)}(x)=(F(x))^n=\begin{cases}0, & x<0\\ (\dfrac{x}{\theta})^n, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$

$f_n(x)=F_{(n)}^{'}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$

要使$E(C\hat{\theta})=CE(X_{(n)})=\dfrac{nC}{n+1}\theta=\theta$ 即$C=\dfrac{n+1}{n}$

（2）1> 任意一封信投入第i号信箱都是等可能的概率为$\dfrac{1}{3}$

Y/X	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

边缘分布：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Y	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$P(X=2，Y=1)\ne P(X=2)P(Y=1)$ 即不独立

2> $D(X-Y)=DX+DY-2COV(X,Y)$ $EX=\dfrac{2}{3}$ $EX^2=\dfrac{8}{9}$ $DX=\dfrac{4}{9}$ $DY=\dfrac{4}{9}$

$COV(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$ $E(XY)=\dfrac{2}{9}$ $COV(X,Y)=-\dfrac{2}{9}$

$D(X-Y)=\dfrac{4}{3}$

3>

U	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$

一、填空题(共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

1. 三批产品，第一批优质品率为 0.2，第二批优质品率为 0.5，第三批优质品率为 0.35，现从这三批中任取一批再从该批中任取一件产品，则取到优质品的概率为____________。

2. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=i\}=a\frac{(2\lambda)^i}{i!}$ （$\lambda>0$） $i=0,1,2,3,\cdots$ 则

$a=$ ________。

3. 设X的分布律为$\begin{pmatrix} X & 0 & 1 & 2 \\ P & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$，其分布函数为 $F(x)$ ，则 $F(1.5)=$_________.

4. 设随机变量X的所有可能取值为1 和α ，且 $P\{X=1\}=0.4$，$E(X)=0.2$ ，则 $\alpha=$______

5. 设 $\widehat{\theta_1}$ 和 $\widehat{\theta_2}$ 都是总体 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数，如果满足____________ 则称随机区间 $\left[\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}\right]$是未知参数 θ 的95%的置信区间。

6. 设 $\widehat{\theta_1}$ 和 $\widehat{\theta_2}$ 是 θ 的 2 个独立的无偏估计量，且假定 $D(\widehat{\theta_1})=2D(\widehat{\theta_2})$ ，令 $\hat{\theta}=C_1\widehat{\theta_1}+C_2\widehat{\theta_2}$，若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量，又使 $D(\hat{\theta})$ 达到最小，则 $C_1=$____ $C_2=$________

二、单项选择题(共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

1. 随机事件 A 和 B ，适合 $B\subset A$ ，则以下各式错误的是（ ）。

$A.\ P(A\cup B)=P(A)$ $B.\ P(B\setminus A)=P(B)$ $C.\ P(\overline{AB})=P(\overline{A})$ $D.\ P(B)\le P(A)$

2. 当随机变量 X 的取值范围为区间（ ）时，则 $f(x)=\cos x$ 为随机变量 X 的分布密度函数。

$A.\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　$B.\ \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$　　$C.\ [0,\pi]$　　$D.\ \left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

3. 每次试验成功的概率为 $p\ (0<p<1)$，则在三次重复独立试验中至多失败两次的概率为（　）。

$A.\ 3p(1-p)^2$　　$B.\ 3p^2(1-p)$　　$C.\ 1-p^3$　　$D.\ 1-(1-p)^3$

4. 函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x\le\pi\\ 1, & x\ge\pi\end{cases}$ 是(　)。

A 某一离散型随机变量的分布函数　　B 某一连续性随机变量的分布函数

C.既不是连续性也不是离散型随机变量的分布函数　　D 不可能为某一随机变量的分布函数。

5. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X-\mu|\ge 3\sigma\}\le$(　)。

$A.\frac{1}{6}$　　$B.\ \frac{1}{3}$　　$C.\frac{1}{9}$　　$D.\ \frac{1}{27}$

6. 假设检验中，显著性水平 α 表示（　）。

A H_0为假，但接受H_0的假设的概率　　B H_0为真，但拒绝H_0的假设的概率

C H_0为假，但拒绝H_0的假设的概率　　D 可信度

三、简答题(共 3 小题，共 25 分)

1.（7 分）X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试证明 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 服从正态分布 $N(0,1)$。

2. （10 分）已知 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

试求：

（1）X,Y 的边缘概率密度；

（2）X 和 Y 的条件概率密度函数。

3.（8 分）设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，设

$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 为 χ^2 分布，试求 a,b 的值，并说明该 χ^2 分布的自由度是多少？

四、综合题（共 2 小题，共 27 分）

（一）（12 分）设随机变量 X 在区间 $[0,\ \theta]$ 上服从均匀分布，其中 θ 未知，并设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，是来自总体 X 的一个样本，试求

（1）θ 的极大似然估计；

（2）确定常数 C，使 $C\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计。

（二）（15 分）将两封信投入 3 个编号分别为 1,2,3 的信筒，设 X, Y 分别表示投入第 1,2 号信筒的数目，试求

（1） 二维随机变量 (X,Y) 的联合分布，并判断 X 和 Y 的独立性;

（2） 方差 $D(X-Y)$；

（3） $U=\max\{X,Y\}$ 的分布律。