一．填空题（每小题 4 分，共 24 分，答案写在试题后的括号内）

1．已知 $P(A)=0.4, P(B|A)=0.8, P(A|B)=0.5$ 则 $P(AB|A\cup B)=$(　　　)。

2．随机变量 X 服从参数为1的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$（　　　）。

3．在区间（0，1）上任取两个点，则两点之差绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为（　　　）。

4．设 X 服从 $N(\mu,2^2)$，$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，则参数检验问题 $H_0:\mu=0;\quad H_1:\mu\neq 0$ 通常所用的统计量（　　　）。

5．随机变量 X、Y 的方差分别为 4 和 9，相关系数为0.5，则随机变量 $X-2Y$ 的方差为（　　　）。

6．随机变量 X 服从标准正态分布。则 $E[Xe^{2X}]=$（　　　）。

二．　单项选择题(每题 4 分,共 24 分,答案写在试题后的括号内)

1．设事件 A,B 互不相容，　则　（　　　）。

(A) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0$；　　(B) $P(AB) = P(A)P(B)$；

(C) $P(\overline{A}) = 1 - P(B)$；　　(D) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$。

2. 设 X_1, X_2 是相互独立的随机变量，其分布列分别为: $X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ $X_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

则 $P\{X_1 + X_2 = 2\} = ($　　　$)$。

(A) $\frac{1}{12}$；　(B) $\frac{1}{8}$；　(C) $\frac{1}{6}$；　(D) $\frac{1}{2}$。

3. 若 X 的分布列为 $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = 0.5$，$Y$ 服从标准正态分布，

X、Y 相互独立；则 $Z = XY$ 的分布函数 $F_z(z)$ 的间断点个数为（　　　）。

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3。

4. 设总体 X 服从参数为 1 的泊松分布，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的简单

随机样本， 则当 $n \to \infty$ 时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于（　　　）。

（A）常数 2；（B）常数 3；（C）常数 4；（D）常数 6。

5. 总体 X 的方差 $DX = \sigma^2 > 0$，$X_1, X_2 \cdots, X_n$ $n > 3$ 为来自总体 X 简单随机样本，

则在总体均值 μ 下列无偏估计中，最有效的是（　　　）。

(A) $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} iX_i$；　　(B) $\frac{1}{7}(X_1 + 3X_2 + 3X_3)$；

(C) $\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$；　　(D) $\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$。

6. X 和 Y 的相关系数为 0.3，$U = 2X + 1, V = 1 - Y$ 则 U 和 V 的相关系数为（　　　）

(A) 0.3；　(B) −0.3；　(C) 0.6；　(D) −0.6。

三. 计算题（47 分，解答写在答题纸上）

（一）（12 分）甲、乙、丙三个袋子中各装有 10 件同样产品，其中的次品数分别为 0、1、2。先随机选取一个袋子，然后从中随机抽取一件产品检验；由于技术原因正品被误判为次品的概率为 2%，次品被误判为正品的概率为 5%；

1. 求抽取的待检验产品为正品的概率。

2. 求抽取的产品被检验为正品的概率。

（二）（16 分）设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx, 0<x<1, 0<y<x, \\ 0，其它。\end{cases}$$

1.求常数 c　　2. 求出 X 、Y 的边际分布密度

3. 说明 X 、Y 是否独立，为什么？　4.求 $P\{X+Y<1\}$

（三）（12 分）总体 X 的概率密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases} \dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}} & x>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，$\theta>0$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

1. 求参数 θ 的矩估计，并说明它是否无偏估计？ $E(X)=\theta$　$\hat{\theta}_{矩}=\bar{X}$　是无偏

2. 求参数 θ 的极大似然估计。 $\hat{\theta}_{MLE}=\dfrac{2n}{\sum X_i^{-1}}$

（四）（7 分）在区间[0，1]上随机取 n 个点，坐标记为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$；

令 $Y=\max\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$，　试求 Y 的概率密度函数和数学期望。

四.（5 分）总体 X 服从 $N(0,2^2)$ ，$X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本

记 $Y=\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$。证明：$Y$ 服从 $F(10,5)$

一．填空题

1． $\frac{4}{9}$；2． e^{-1}；3． $\frac{\overline{X}}{2}\sqrt{n}$；4． $\frac{3}{4}$； 5． 28；6. $2e^2$

二．单选题 $DCBADB$

三.

（一）解：设 A_i 分别表示选中甲、乙、丙袋 ，i=0,1,2。

A={ 产品被判为合格} B={取出的待检产品为正品}

则有 $P(A_i)=(\frac{1}{3})$ i=0,1,2。 $P(A|B)$=98% $P(A|\overline{B})$=5%

$$P(B|A_0)=\frac{10}{10}=1 \quad P(B|A_1)=\frac{9}{10} \quad P(B\mid A_2)=\frac{8}{10}$$

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{10}=0.9$$

$$\therefore\ P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.9\times 98\%+0.1\times 5\%=0.887$$

即产品被判为合格的概率为 88.7%

（二）解

（1） $\because\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$ $\therefore c=3$

（2） X 的边际分布密度 $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

Y 的边际分布密度

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2) & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（3） $\because\ p(x,y)\neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X、Y 不独立，

（4） $P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1}p(x,y)dxdy=\frac{3}{8}$

（三）

解： 1. X 的分布密度 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

计算得 $E(X)=\theta$，令 $\theta=\overline{X}$　得 $\theta=\overline{X}$　所以 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1=\overline{X}$

因为 $E(\hat{\theta}_1)=E(\overline{X})=\theta$，所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计；2.似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}}$

$$\mathrm{Ln}L(\theta)=2n\ln\theta-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i^3-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}$$

令 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta}=0$　解得 $\theta=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$　时 $L(\theta)$ 达到最大值

所以 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$ 为 θ 的最大似然估计

（四）解：（过程略）Y 的分布密度 $p(x)=\begin{cases}nx^{n-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$EY=\frac{n}{n+1}$$

四. 证明：　$X_i/2$　都服从　$N(0,1)$　　所以　$\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{4}$ 服从 $\chi^2(10)$

所以 $\dfrac{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}{4}$ 服从 $\chi^2(5)$

显然上两个随机变量相互独立

所以 $Y=\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从 $F(10,5)$