(5) $G(R)$ 的每个顶点处均有环.

定理 2.11 设 $R \subseteq A \times A$, 则下面的命题是等价的:

(1) R 是反自反的; (2) $I_A \cap R = \varnothing$;

(3) R^{-1} n是反自反的; (4) $M(R)$ 主对角线上的元素全为 0;

(5) $G(R)$ 的每个顶点处均无环.

定理 2.12 设 $R \subseteq A \times A$, 则下面的命题是等价的:

(1) R 是对称的; (2) $R^{-1} = R$;

(3) $M(R)$ 是对称的;

(4) $G(R)$ 中任何二个顶点之间若有有向边, 必有两条相反的有向边.

定理 2.13 设 $R \subseteq A \times A$, 则下面的命题是等价的:

(1) R 是反对称的; (2) $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(3) 在 $M(R)$ 中, 若任意的 $r_{ij} = 1(i \neq j)$, 则必有 $r_{ji} = 0$;

(4) 在 $G(R)$ 中, 对于任何二个顶点 $x_i, x_j(i \neq j)$, 若有有向边 $\langle x_i, x_j \rangle$, 则必没有 $\langle x_j, x_i \rangle$.

定理 2.14 设 $R \subseteq A \times A$, 则下面的命题是等价的:

(1) R 是传递的; (2) $R \circ R \subseteq R$;

(3) 在 $M(R \circ R)$ 中, 若任意的 $r'_{ij} = 1$, 则 $M(R)$ 中相应的元素 $r_{ij} = 1$;

(4) 在 $G(R)$ 中, 对于任何二个顶点 x_i, x_j, x_k, 若有有向边 $\langle x_i, x_j \rangle, \langle x_j, x_k \rangle$, 则必有有向边 $\langle x_i, x_k \rangle$ (即若从 x_i 到 x_k 有长为 2 的有向通路, 则从 x_i 到 x_k 必有长度为 1 的有向通路).

定理 2.15 设 $R_1, R_2 \subseteq A \times A$.

(1) 若 R_1, R_2 是自反的, 则 $R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1$ 也是自反的;

(2) 若 R_1, R_2 是反自反的, 则 $R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1$ 也是反自反的;

(3) 若 R_1, R_2 是对称的, 则 $R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1, \sim R_1 (= E_A - R_1), \sim R_2$ 也是对称的;

(4) 若 R_1, R_2 是反对称的, 则 $R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1$ 也是反对称的;

(5) 若 R_1, R_2 是传递的, 则 $R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cap R_2$ 也是传递的.

定理 2.16 设 A 为含 n 个元素的有穷集合, $R \subseteq A \times A$, 则存在自然数 s, t, 且满足 $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$, 使得 $R^s = R^t$.

定理 2.17 设 $R \subseteq A \times A$, m, n 为任意的自然数, 则下面的等式成立:

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$; (2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

定理 2.18 设 $R \subseteq A \times A$, 若存在自然数 $s, t(s < t)$, 使得 $R^s = R^t$, 则下面的等式成立:

(1) $R^{s+k} = R^{s+t}, \forall k \in \mathbb{N}$;

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $k, i \in \mathbb{N}, p = t - s$;

(3) 令 $S = \{R^0, R^1, \cdots, R^{t-1}\}$, 则对于任意 $q \in \mathbb{N}$, 均有 $R^q \in S$.

定理 2.19 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) R 是自反的当且仅当 $r(R) = R$;

(2) R 是对称的当且仅当 $s(R) = R$;

(3) R 是传递的当且仅当 $t(R) = R$.

定理 2.20 设集合 $A \neq \varnothing$, $R_1, R_2 \subseteq A \times A$, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$; (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$; (3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.