证明: 充分性显然。

下面证必要性。

若 $f \neq g$，就有 $\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,y\rangle \notin g$ 或 $\langle x,y\rangle \notin f \wedge \langle x,y\rangle \in g$。由对称性，不妨设 $\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,y\rangle \notin g$。

由 g 是全函数知，存在 z，使得 $\langle x,z\rangle \in g$。因为 $\langle x,y\rangle \notin g$，所以 $z \neq y$。从而有：$\langle x,y\rangle \in (f\cup g) \wedge \langle x,z\rangle \in (f\cup g)$，且 $z \neq y$。这与 $f \cup g$ 是函数矛盾。

这就证明了必要性。 □

3.3 (1), (2), (6), (10) 是单射。(1), (4), (5), (6), (9), (10) 是满射。(1), (6), (10) 是双射。

3.4 令 $f = \{\langle S,F\rangle \mid \langle S,F\rangle \in \mathscr{A}\times\mathscr{B} \wedge \forall x(x\in A \to (x \in S \leftrightarrow F(x)=1))\}$。则 f 是 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的双射，f^{-1} 是 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{A}$ 的双射。

3.5 先证一个引理。

引理 3.1 $A \to B = \varnothing$ 当且仅当 $A \neq \varnothing \wedge B = \varnothing$。

证明: 由全函数定义即得充分性。

下面证必要性。

若不然，则有 $A = \varnothing \vee B \neq \varnothing$。

分别讨论 $A = \varnothing$ 和 $B \neq \varnothing$ 两种情形。

当 $A = \varnothing$ 时，有 $\varnothing \in A \to B$。即 $A \to B \neq \varnothing$。

当 $B \neq \varnothing$ 时，则存在某个元素 $a \in B$，令 $f = \{\langle x,a\rangle \mid x \in A\}$。这时无论 A 是否为空(当 A 为空时，f 是空函数 $\varnothing$，仍是 A 到 B 的全函数)，皆有 $f \in A \to B$。$A \to B$ 仍然非空。

也即：$A = \varnothing \vee B \neq \varnothing \Rightarrow A \to B \neq \varnothing$。这与前提 $A \to B = \varnothing$ 矛盾。

综上所述，有：$A \to B = \varnothing \Leftrightarrow A \neq \varnothing \wedge B = \varnothing$ □

再证原题。

证明: 由引理 3.1 可知，若 $A \to B = B \to A = \varnothing$，则有：$A \neq \varnothing \wedge B = \varnothing \wedge B \neq \varnothing \wedge A = \varnothing$。矛盾。

故有 $A \to B = B \to A \Rightarrow A \to B \neq \varnothing \wedge B \to A \neq \varnothing$。

故而存在某个 $f \in A \to B$。由 $A \to B = B \to A$ 知，$f \in B \to A$。

于是有：

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{dom} f && (f \in A \to B) \\ &= B && (f \in B \to A) \end{aligned}$$

□

3.6

证明:

$$\begin{aligned} &\forall f \\ &f \in C \to A \\ \Longleftrightarrow\ &\forall x \forall y \forall z (x \in \operatorname{dom} f \wedge y \in \operatorname{ran} f \wedge z \in \operatorname{ran} f \wedge xfy \wedge xfz \to y = z) \\ &\wedge \operatorname{dom} f = C \wedge \operatorname{ran} f \subseteq A && (\text{全函数定义}) \\ \Longrightarrow\ &\forall x \forall y \forall z (x \in \operatorname{dom} f \wedge y \in \operatorname{ran} f \wedge z \in \operatorname{ran} f \wedge xfy \wedge xfz \to y = z) \\ &\wedge \operatorname{dom} f = C \wedge \operatorname{ran} f \subseteq B && (A \subseteq B\text{ 、子集关系传递性}) \\ \Longleftrightarrow\ &f \in C \to B && (\text{全函数定义}) \end{aligned}$$