第十六章　半群与独异点

定理 16.1 设 $V=\langle S,\circ\rangle$ 是半群，则 $\forall x,y\in S$ 有

(1)　$x^n\circ x^m=x^{n+m}$;

(2)　$(x^n)^m=x^{nm}$.

定理 16.2 设 $\langle S,\circ\rangle$ 是半群，则可以适当地定义单位元 e，将这个半群扩张为独异点.

定理 16.3 设 S 为半群，V 为独异点，则 S 的任何子半群的非空交集仍是 S 的子半群，V 的任何子独异点的交集仍是 V 的子独异点.

定理 16.4 S 为半群，B 是 S 的非空子集. $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，令

$$B^n=\{b_1b_2\cdots b_n \mid b_i\in B, i=1,2,\cdots,n\},$$

则

$$\langle B\rangle=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}B^n.$$

定理 16.5 设 $V=\langle S,*\rangle$ 为半群，$V'=\{S^S,\circ\}$，$\circ$ 为函数的合成运算，则 V' 是半群，且存在 V 到 V' 的同态.

定理 16.6 (独异点的表示定理) 设 $V=\langle S,*,e\rangle$ 是独异点，则存在 $T\subseteq S^S$，使 $\langle T,\circ,I_S\rangle$ 同构于 $\langle S,*,e\rangle$.

定理 16.7 设 $M^*=\langle Q,\Sigma^*,\Gamma^*,\delta^*,\lambda^*\rangle$ 是扩展的有穷自动机，则 $\forall w_1,w_2\in\Sigma^*$ 有

(1)　$\delta^*(q,w_1w_2)=\delta^*(\delta^*(q,w_1),w_2)$,

(2)　$\lambda^*(q,w_1w_2)=\lambda^*(q,w_1)\lambda^*(\delta^*(q,w_1),w_2)$,

其中 w_1w_2 是 w_1 与 w_2 的连接.

定理 16.8 设 $M=\langle Q,\Sigma,\delta\rangle$ 是半自动机，$M^*=\langle Q,\Sigma^*,\delta^*\rangle$ 是 M 的扩展. 对任意的 $w\in\Sigma^*$，定义 $f_w:Q\to Q$，$f_w(q)=\delta^*(q,w)$. 令 $S=\{f_w\mid w\in\Sigma^*\}$ 是所有这样定义的函数的集合，$\circ$ 是函数的合成运算，则 $T_M=\langle S,\circ,f_\wedge\rangle$ 是一个独异点，且是 $\langle Q^Q,\circ,I_Q\rangle$ 的子独异点.

定理 16.9 设 $T=\langle S,\cdot,e\rangle$ 是独异点，则存在半自动机 M，且 M 对应的独异点 T_M 同构于 T.

定理 16.10 设 $M_1=\langle Q_1,\Sigma_1,\Gamma_1,\delta_1,\lambda_1\rangle$，$M_2=\langle Q_2,\Sigma_2,\Gamma_2,\delta_2,\lambda_2\rangle$ 是自动机. 它们分别对应独异点 T_{M_1} 和 T_{M_2}. 若 $M_1\le M_2$，则 T_{M_1} 是 T_{M_2} 的同态像.

定理 16.11 设 $M_1=\langle Q_1,\Sigma,\Gamma,\delta_1,\lambda_1\rangle$ 是有穷自动机，$M_2=\langle Q_1/\!\sim,\Sigma,\Gamma,\delta_2,\lambda_2\rangle$ 是 M_1 的商自动机，则 $M_1\sim M_2$.