第15章 代数系统

中国海洋大学 计算机系

2.

设A={0,1}, °为函数的合成运算,试给出A上所有的函数关于°运算的运算表.

解 $A \to A = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$，其中

$f_0=\{<0,0>,<1,1>\}, f_1=\{<0,0>,<1,0>\},$

$f_2=\{<0,1>,<1,0>\}, f_3=\{<0,1>,<1,1>\}$

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
f_2	f_2	f_3	f_0	f_1
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3

4.

(1) 封闭,满足消去律.

(2) 封闭,满足交换、结合、消去,单位元是1.

(3) 加法不封闭,乘法封闭,乘法满足交换、结合、消去,单位元是1.

(4) 矩阵加法和乘法都封闭;

加法满足交换、结合、消去,单位元是零阵;

乘法满足结合律,当n=1时,矩阵乘法还满足交换律和消去律;单位元是n阶单位阵,零元是n阶零阵.

矩阵乘法对矩阵加法满足分配律.

4(续)

(5)实可逆矩阵加法不封闭.

乘法都封闭；

乘法满足结合律,消去律.单位元是n阶单位阵,零元是n阶零阵.

当n=1时,矩阵乘法满足交换律.

(6) 加法和乘法都封闭.

加法和乘法都满足交换律、结合律与消去律；

乘法对加法满足分配律;

加法单位元是0;

乘法零元是0,仅当n=1时,乘法单位元是1.

(7) 不封闭.

4(续)

(8) 封闭;满足结合律、幂等律；

当n=1时,运算满足交换律和消去律,单位元和零元都是a_1.

(9) 合成运算封闭; 满足结合律,单位元是I_A,零元是$\varnothing$.

当|A|=0时,R(A)={$\varnothing$},合成运算满足交换律、结合律、幂等律,单位元和零元都是$\varnothing$.

当|A|=1时,R(A)={$\varnothing$, I_A},合成运算满足交换律、结合律、幂等律,单位元是I_A,零元都是$\varnothing$.

(10) 两个运算都封闭;两个运算都满足交换律、结合律和幂等律.互相可分配，满足吸收律，1是求最小公倍数运算的单位元，也是求最大公约数的零元。

Exercises 5

设A={a,b,c},a,b,c∈R.能否确定a,b,c的值，使得

（1）A对普通加法封闭；

（2）A对普通乘法封闭.

解

(1) 不能

(2) A={0,1,-1}

Exercises 7

解 能构成代数系统的充要条件是封闭性。

(1) 显然满足封闭性,所以$<Z^+,o>$构成代数系统.

满足交换律、结合律，幂等律,单位元是1,无零元.

(2) 显然满足封闭性,所以$<Z^+,o>$是代数系统.

运算o满足交换律,结合律,幂等律.零元是1,无单位元

(3) 显然满足封闭性,所以$<Z^+,o>$是代数系统.

不满足交换律、结合律、幂等律。没有单位元和零元。

因为: $2o3=2^3=8$, $3o2= 3^2=9$, $2o3\neq 3o2$

$(aob)oc=(a^b oc)= (a^b)^c=a^{bc}$ $\quad$ $ao(boc)=aob^c=a^{b^c}$

如 $(4o2)o3=4^6$， $4o(2o3)=4^{2^3}=4^8$，$2o2=2^2=4\neq 2$

Exercises 7(续)

(4) 不是代数系统. 因为运算o在Z^+上不封闭。

如：$2 \circ 3=(2/3)+(3/2) \notin Z^+$.

Exercises 8

解 交换律. $a \circ b = pa+qb+r$, $b \circ a = pb+qa+r$

显然当$p=q$时,交换律成立.

结合律. $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$,

$(a \circ b) \circ c = p(pa+qb+r)+qc+r = p2a+pqb+pr+qc+r$

$a \circ (b \circ c) = pa+q(pb+qc+r)+r = pa+pqb+q2c+qr+r$

令$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,

$p^2a+pqb+pr+qc+r = pa+pqb+q^2c+qr+r$

所以$(p^2-p)a+(q^2-q)c+(p-q)r=0$.

由于a,b,c的任意性,得

$p^2-p=0,\ q^2-q=0,\ p-q=0 \Leftrightarrow (p=1 \vee p=1) \wedge (q=0 \vee q=1) \wedge (p=q \vee r=0)$

Exercises 8（续）

因此,当(p=0,q=1,r=0)或(p=0,q=0,r任意)或(p=1,q=0,r=0)或(p=1,q=1,r任意)时,满足结合律.

幂等律.

$\forall a\in \mathbf{R}$, $a\circ a=pa+qa+r=a \Leftrightarrow (p+q-1)a+r=0$,

因为a是任意的,所以$p+q=1, r=0$时满足幂等律.

单位元.

令$a\circ e=a$，则$a\circ e=pa+qe+r=a\Leftrightarrow(p-1)a+qe+r=0$.

令$e\circ a=a$，则$e\circ a=pe+qa+r=a \Leftrightarrow(q-1)a+pe+r=0$

由a的任意性知:$p=q=1$时,$e=-r$

零元.

令$a\circ\theta=\theta$，则$a\circ\theta=pa+q\theta+r=\theta\Leftrightarrow(q-1)\ \theta+pa+r=0$

令$\theta\circ a=\theta$，则$\theta\circ a=p\theta+qa+r=\theta\Leftrightarrow(p-1)\ \theta+qa+r=0$

由a的任意性可知:$p=q=0$时, $\theta=r$.

9.

设*为有理数集Q上的二元运算, $\forall x,y\in Q$,有$x*y=x+y-xy$,说明运算*是否适合交换律，结合律和幂等律，并求出Q中关于运算*的单位元、零元及所以可逆元素的逆元。

解 1) 证明是否适合交换律

$\forall x,y\in Q$, $x*y=x+y-xy$, $y*x=y+x-yx=x+y-xy$,

所以$x*y=y*x$,适合交换律。

2) 证明是否适合结合律

$\forall x,y,z\in Q$,

$(x*y)*z=x+y-xy+z-(x+y-xy)z=x+y+z-xy-xz-yz+xyz$

$x*(y*z)=x+y+z-yz-x(y+z-yz)=x+y+z-xy-xz-yz+xyz$

所以$(x*y)*z=x*(y*z)$，适合结合律

3) $\forall x\in$ Q,令$x*x=x+x-x^2=2x-x^2=x$, 可得$x=0$或$x=1$

即0和1是幂等元。如：$2*2=0$,不适合幂等律。

4) 求单位元e

$\forall x\in$ Q,令$x*e=x$, $x+e-xe=x$, $(1-x)e=0$,所以$e=0$.

因为运算*适合交换律，所以$e*x=x$.

5) 求零元θ

$\forall x\in$ Q,令$x*\theta=\theta$, $x+\theta-x\theta=\theta$, $(1-\theta)x=0$,所以$\theta=1$.

显然$1*x=1$,所以零元是1.

6) 求所有可逆元素的逆元

$\forall x \in Q$,令$x*y=e=0$, $x*y=x+y-xy=0$, $y=\dfrac{x}{x-1}$ ，

因此，当$x\neq 1$时， $x^{-1}=\dfrac{x}{x-1}$

11.

解 任取$<a,b> \in Q\times Q, <c,d> \in Q\times Q, <e,f> \in Q\times Q$

$<a,b>\circ<c,d>=<ac,ad+b>$, $<c,d>\circ<a,b>=<ca,cb+d>$

由于$<ac,ad+b>\neq<ca,cb+d>$,故运算o不满足交换律.

$(<a,b>\circ<c,d>)\circ<c,d>=<ac,ad+b>\circ<c,d>=<acc,acd+ad+b>$

$<a,b>\circ(<c,d>\circ<c,d>)=<a,b>\circ<cc,cd+d>=<acc,a(cd+d)+b>$

$=<acc,acd+ad+b>$

故满足结合律.

任取$<x,y> \in Q\times Q$,设有$<a,b> \in Q\times Q$,使得

$<a,b>\circ<x,y>=<x,y>\Rightarrow<ax,ay+b>=<x,y>\Rightarrow ax=x,\ ay+b=y$

$\Rightarrow a=1,y=0$

$<x,y>\circ<1,0>=<x,y>$, $<1,0>\circ<x,y>=<x,y>$

所以$<1,0>$是单位元.

11 (续)

对任意的$<x,y>\in Q\times Q$,设有$<a,b>\in Q\times Q$,使得

令$<a,b>\circ<x,y>=<a,b> \Rightarrow <ax,ay+b>=<a,b>$

$\Rightarrow ax=a, ay+b=b \Rightarrow a=0$, b是任意.

因此$<0,b>$是左零元,其中b是任意的有理数.

$<x,y>\circ<0,b>=<0,b> \Rightarrow <0,bx+y>\neq<0,b>$

所以$<0,b>$不是右零元,所以不存在零元.

令$<x,y>$的逆元是$<u,v>$,有

$<x,y>\circ<u,v>=<1,0> \Rightarrow <xu,xv+y>=<1,0> \Rightarrow xu=1,\ xv+y=0$

$\Rightarrow u=1/x,\ v=-y/x$

$<1/x,-y/x>\circ<x,y>=<1,0>$

故当$x\neq 0$时,$<a,b>$可逆,逆元是$<1/x,-b/x>$.

Exercises 12（判断消去律）

(1) 满足交换律,单位元是a.

任取$x,y,z \in A$,

考察$(x \circ y) \circ z$,

a)当$z=a$时, $(x \circ y) \circ z = x \circ y = x \circ (y \circ z)$

b)当$y=a$时, $(x \circ y) \circ z = x \circ z = x \circ (y \circ z)$

c)当$z=a$时, $(x \circ y) \circ z = y \circ z = x \circ (y \circ z)$

故而运算满足结合律.

(2) 不满足交换律，满足幂等律.

没有单位元和零元.

因为a,b,c都是左单位元,也都是右零元, 所以有

$(x \circ y) \circ z = z$, $x \circ (y \circ z) = y \circ z = z$,因此满足结合律.

Exercises 12

(3) 满足交换律.

a是单位元,c是零元,考察$(x\circ y)\circ z$和 $x\circ(y\circ z)$

a) 当$z=c$时, $(x\circ y)\circ c=c$, $x\circ(y\circ c)= x\circ c=c$

b) 当$z=a$时, $(x\circ y)\circ a= x\circ y$, $x\circ(y\circ a)= x\circ y$

c) 当$z=b$时,若$x=a$,则$(x\circ y)\circ z= x\circ(y\circ z)= y\circ z$

若$x=c$,则$(x\circ y)\circ z= x\circ(y\circ z)=c$

若$x=b$,则$(x\circ y)\circ z= x\circ(y\circ z)$

故满足结合律.

(4) 满足交换律,结合律,单位元是a.

Exercises 14

解 V的所有子代数为{0},{0,2,4},{0,3},Z_6.

平凡子代数为{0}, Z_6.

真子代数是{0,2,4},{0,3},{0}.

方法:

1) 求平凡子代数

2) $\forall x\in V$,求$\langle x\rangle=\{x^k|k\in N\}$

3) $\forall x,y\in V$, 求$\langle\langle x\rangle\cup\langle y\rangle\rangle$

Exercises 15

解 积代数$V_1 \times V_2$的运算表如下

△	<1,5>	<1,6>	<2,5>	<2,6>	<3,5>	<3,6>
<1,5>	<1,5>	<1,5>	<2,5>	<2,5>	<3,5>	<3,5>
<1,6>	<1,5>	<1,6>	<2,5>	<2,6>	<3,5>	<3,6>
<2,5>	<2,5>	<2,5>	<2,5>	<2,5>	<3,5>	<3,5>
<2,6>	<2,5>	<2,6>	<2,5>	<2,6>	<3,5>	<3,6>
<3,5>	<3,5>	<3,5>	<3,5>	<3,5>	<3,5>	<3,5>
<3,6>	<3,5>	<3,6>	<3,5>	<3,6>	<3,5>	<3,6>

单位元是<1,6>,零元是<3,5>.

(2) 所有V_1子代数为{1},{1,2},{1,3},{1,2,3}

Exercises 16

解 积代数$V_1 \times V_2$的运算表如下

*	<00>	<0,1>	<1,0>	<1,1>	<2,0>	<2,1>
<0,0>	<0,0>	<0,1>	<1,0>	<1,1>	<2,0>	<2,1>
<0,1>	<0,1>	<0,0>	<1,1>	<1,0>	<2,1>	<2,0>
<1,0>	<1,0>	<1,1>	<2,0>	<2,1>	<0,0>	<0,1>
<1,1>	<1,1>	<1,0>	<2,1>	<2,0>	<0,1>	<0,0>
<2,0>	<2,0>	<2,1>	<0,0>	<0,1>	<1,0>	<1,1>
<2,1>	<2,1>	<2,0>	<0,1>	<0,0>	<1,1>	<1,0>

(2) 单位元是<0,0>,

$<0,0>^{-1}=<0,0>$, $<0,1>^{-1}=<0,1>$, $<1,0>^{-1}=<2,0>$, $<1,1>^{-1}=<2,1>$,

$<2,0>^{-1}=<1,0>$, $<2,1>^{-1}=<1,1>$

备注：直积单位元$<e_1,e_2>$, $<x,y>^{-1}=<x^{-1},y^{-1}>$,

$<a,b>*<c,d>=<ac,bd>$

其中e_1,e_2分别是V_1和V_2的单位元.

Exercises 19

证 令$f:V_1\times V_2\to V_2\times V_1, f(<x,y>)=<y,x>, x\in A, y\in B$

设$<a,b>,<c,d>\in A\times B$,令$f(<a,b>)=f(<c,d>)$,则

$<b,a>=<d,c>$,故$b=d, a=c$,因此$<a,b>=<c,d>$,f是单射的.

任取$<a,b>\in B\times A$,a存在$a\in B, b\in A$,

所以 $<b,a>\in A\times B$,且$f(<b,a>)=<a,b>$.因此f是满射的.

任取$<a,b>,<c,d>\in A\times B$,

$f(<a,b>*_1<c,d>)=f(<a\circ_1 c, b\bar{\circ}_1 d>)=<b\bar{\circ}_1 d, a\circ_1 c>$

$=<b,a>*_1'<d,c>=f(<a,b>)*_1' f(<c,d>)$

$f(<a,b>*_2<c,d>)=f(<a\circ_2 c, b\bar{\circ}_2 d>)=<b\bar{\circ}_2 d, a\circ_2 c>$

$=<b,a>*_2'<d,c>=f(<a,b>)*_2' f(<c,d>)$

故$V_1\times V_2$和$V_2\times V_1$是同构的.

Exercises 20

- 证明： $\forall X,Y\in P(\{a,b\})$,

$$\varphi(X\cup Y)=\begin{cases}1, & a\in X\vee a\in Y;\\ 0, & a\notin X\vee a\notin Y;\end{cases}$$

$$\varphi(X)+\varphi(Y)=\begin{cases}1, & a\in X\vee a\in Y;\\ 0, & a\notin X\vee a\notin Y;\end{cases}$$

所以$\varphi(X\cup Y)=\varphi(X)+\varphi(Y)$.

$$\varphi(X\cap Y)=\begin{cases}1, & a\in X\wedge a\in Y;\\ 0, & a\notin X\vee a\notin Y;\end{cases}$$

$$\varphi(X)\cdot\varphi(Y)=\begin{cases}1, & a\in X\wedge a\in Y;\\ 0, & a\notin X\vee a\notin Y;\end{cases}$$

所以$\varphi(X\cap Y)=\varphi(X)\cdot\varphi(Y)$.

Exercises 20（续）

- $\varphi(\sim\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{X}; \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}; \end{cases}$

$-\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{X}; \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}; \end{cases}$

所以$\varphi(\sim\boldsymbol{X}) = -\varphi(\mathbf{X})$.

$\varphi(\varnothing) = \mathbf{0};$

$\varphi(\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}) = \mathbf{1}$

所以φ是$\mathbf{V}_1$到$\mathbf{V}_2$的同态。

因为$\varphi(\{a\})=1, \varphi(\{b\})=0$, 显然$\varphi$是满射的。

综上所述φ是$\mathbf{V}_1$到$\mathbf{V}_2$的满同态。

Exercises 24.

设V_1=<C,•>, V_2=<R,•>是代数系统，•为普通乘法. 下面哪个函数φ是V_1到V_2的同态？如果φ是同态，求出V_1在φ下的同态像。

解

(1)不是同态;

如$z_1=1+2i$,$z_2=3+4i$,但$\varphi(z_1 \cdot z_2) \neq \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2)$

(2) 是同态,$\varphi(C)=R^+ \cup \{0\}$

(3) 是同态, $\varphi(C)=\{0\}$

(4) 不是同态.

Exercises 26

证 显然φ是满射函数.

$\forall x,y\in Z^+$, 分为四种情况讨论：

1) 当$x=y=1$时, $\varphi(x\cdot y)=\varphi(1)=1$, $\varphi(x)\cdot\varphi(y)=1\cdot 1=1$

所以$\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$

2) 当$x=1,y>1$时, $x\cdot y>1$, $\varphi(x\cdot y)=0$, $\varphi(x)\cdot\varphi(y)=1\cdot 0=0$,

所以$\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$

3)当$x>1,y=1$时, 与2)相似。

4)当$x>1,y>1$时, $x\cdot y>1$, $\varphi(x\cdot y)=0$, $\varphi(x)\cdot\varphi(y)=0\cdot 0=0$

所以$\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$

故 $\forall x,y\in Z^+$,均有$\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$， 所以$\varphi$是$V_1$到$V_2$的满同态.

Exercises 27.

设V=<Z,+>,判断下面给出的二元关系R是否为V上的同余关系，并说明理由。

解 (1)不是同余关系.

因为<3,2>∈R, <-1,-2>∈R,但<2,0>∉R.

(2)不是同余关系.

因为<7,3>∈R,<3,-1>∈R,但|(7+3)-(3-1)|>5,即<10,2> ∉R.

不具有置换性。

也不是等价关系，因为不具有传递性,如<7,3>∈R,<3,-1>∈R,但<7,-1> ∉R.

(3) R不是同余关系.因为如<-2,2> ∈R,<2,6> ∈R ,但<0,8> ∉R.

即R不具有置换性.

(4)不是同余关系.因为R不具有对称性,所以R不是等价关系。

Exercises 29

- 设V_1=<Z, Δ>, V_2=<Z_2, $\bar{\Delta}$>是含有一元运算的代数系统，其中Δ, $\bar{\Delta}$分别定义如下：

$\Delta x=x+1,\ \forall x\in Z,\ \bar{\Delta}(y)=(y+1)\mathrm{mod}2,\ \forall y\in Z_2$

令$\varphi: Z\to Z_2,\ \varphi(a)=(a)\mathrm{mod}2,\ \forall a\in Z$

(1) 证明φ是V_1到V_2的同态；

(2) 给出φ在V_1上导出的划分.

证 (1) $\forall x\in Z,\ \varphi(\Delta x)=(x+1)\mathrm{mod}2$,

$\bar{\Delta}(\varphi(x))=\bar{\Delta}((x)\mathrm{mod}2)=((x)\mathrm{mod}2+1)\mathrm{mod}2=(x+1)\mathrm{mod}2$

因此$\varphi(\Delta x)=\bar{\Delta}(\varphi(x))$，所以$\varphi$是$V_1$到$V_2$的同态。

(2) 首先给出由φ导出同余关系.

令$xRy \Leftrightarrow \varphi(x)=\varphi(y) \Leftrightarrow x\text{mod}2=y\text{mond}2$

$Z/R=\{[0],[1]\}$, 其中：$[0]=\{2k|k\in Z\}$, $[1]=\{2k+1|k\in Z\}$,

$V_1/R=<Z/R,*>$, 其中：

$*[0]=[1]$

$*[1]=[0]$

Tip：$*[x]=[\Delta x]=[x+1]$

Exercises 30.

(1) 证 任取$x_1,x_2\in A_k$, $x_1\geq k$, $x_2\geq k$,

$\varphi(x_1+x_2)=n(x_1+x_2)=nx_1+nx_2=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$

故φ是V_1到V_2的同态.

(2) 任取$x,y\in A_k$,

$x\sim y \Leftrightarrow \varphi(x)=\varphi(y)\Leftrightarrow nx=ny$.

1）若$n=0$, $x\sim y\Leftrightarrow\varphi(x)=\varphi(y)=0$,所以 $A_k/\sim=\{A_k\}$

$V_1/\sim=<\{A_k\},\oplus>$, $A_k\oplus A_k=A_k$

2）若$n\neq 0$, $x\sim y\Leftrightarrow\varphi(x)=\varphi(y)\Leftrightarrow x=y$

$V_1/\sim=<\{\{x\}|x\in A_k\},\oplus>$,

$\forall\{x\},\{y\}\in V_1/\sim$， $\{x\}\oplus\{y\}=\{x+y\}$.

Exercises 31

设代数系统V=<A, ° >,其中A={a,b,c,d}, °由运算表给出.

（1）试给出V的所有的自同态;

（2）试给出V上所有的同余关系

解 （1）由运算表可知，除了$a\circ b=a$外都是b.

且b是唯一的幂等元。

1)下面证明$f(b)=b$

设f是自同态, $f(b\circ b)=f(b)=f(b)\circ f(b)$, 显然$f(b)$是$V$上的幂等元，而$b$是$V$上的唯一幂等元，所以$f(b)=b$.

2) 考察$f(a)$的取值. $f(a\circ b)=f(a)\circ f(b)=f(a)\circ b=f(a)$

显然$f(a)=a$或b.

3) $f(c)\neq a$, 否则$f(c\circ b)=f(b)=b, f(c)\circ f(b)=a\circ b=a$,与$f$是同态矛盾。

4)当$f(a)=a$时,$f(c)\neq b$.否则$f(a\circ c)=f(b)=b$,

$f(a)\circ f(c)=a\circ b=a$,与$f$是自同态矛盾

5) c与d相同.

所以有$f(a)=a, f(b)=b, f(c)=c,d, f(d)=c,d$

$f(a)=b, f(b)=b, f(c)=b,c,d, f(d)=b,c,d$

$f_1=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>\}$

$f_2=\{<a,a>,<b,b>,<c,d>,<d,c>\}$

$f_3=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,c>\}$

$f_4=\{<a,a>,<b,b>,<c,d>,<d,d>\}$

$f_5=\{<a,b>,<b,b>,<c,b>,<d,b>\}$

$f_6=\{<a,b>,<b,b>,<c,b>,<d,c>\}$

$f_7=\{<a,b>,<b,b>,<c,b>,<d,d>\}$

$f_8=\{<a,b>,<b,b>,<c,c>,<d,b>\}$

$f_9=\{<a,b>,<b,b>,<c,c>,<d,c>\}$

$f_{10}=\{<a,b>,<b,b>,<c,c>,<d,d>\}$

$f_{11}=\{<a,b>,<b,b>,<c,d>,<d,b>\}$

$f_{12}=\{<a,b>,<b,b>,<c,d>,<d,c>\}$

$f_{13}=\{<a,b>,<b,b>,<c,d>,<d,d>\}$

(2) 上述13个自同态诱导出7个同余关系

f_1,f_2导出等价关系I_A.

f_3, f_4导出等价关系$R_1=\{<c,d>,<d,c>\} \cup I_A$.

f_5导出等价关系E_A

f_6, f_7导出等价关系$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>,<b,a>,$
$<c,a>,<c,b>\}\cup I_A$.

f_8, f_{11}出等价关系$R_3=\{<a,b>,<a,d>,<b,d>,<b,a>,$
$<d,a>,<d,b>\}\cup I_A$.

f_9, f_{13}出等价关系$R_4=\{<a,b>,<b,a>,<c,d>,<d,c>\}\cup I_A$.

f_{10}, f_{12}出等价关系$R_5=\{<a,b>,<b,a>\}\cup I_A$.