第二章 数值积分习题

高云

例题1

试检查下列求积公式的代数精度：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$$

解 直接检查易知，原式对于 $f=1,x,x^2,x^3$ 准确成立，但当 $f=x^4$ 时其左端=1/5，而

$$右端= \frac{2}{3}(\frac{1}{4})^4 - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^4 + \frac{2}{3}(\frac{3}{4})^4$$

左右两端不相等，故所给求积公式仅有三阶精度。

例题2

试构造下列求积公式，使其代数精度尽量高，并证明所构造出的求积公式是插值型的：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(\frac{1}{4}) + A_1 f(\frac{3}{4})$$

例题2

解　令原式对于 f=1,f=x 准确，可列出方程

$$A_0 + A_1 = 1$$

$$\frac{1}{4}A_0 + \frac{3}{4}A_1 = \frac{1}{2}$$

解之得

$$A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$$

这样构造出的求积公式是

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}f(\frac{3}{4})$$

注意到节点 $x_0=\frac{1}{4}, x_1=\frac{3}{4}$ 的拉格朗日插值基函数

$$l_0(x)=-2x+\frac{3}{2}, l_1(x)=2x-\frac{1}{2}$$

直接计算知

$$\int_0^1 l_0(x)dx=\int_0^1 l_1(x)dx=\frac{1}{2}$$

故所构造出的求积公式是插值型的。

例题3

构造下列形式的插值型求积公式，并指明该求积公式所具有的代数精度：

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(\frac{1}{4}) + A_1 f(\frac{1}{2}) + A_2 f(\frac{3}{4})$$

解　按题设原式是插值型的，故有

$$A_0 = \int_0^1 \frac{(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})}{(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})} dx = \frac{2}{3}$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{(x-\frac{1}{4})(x-\frac{3}{4})}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})(\frac{1}{2}-\frac{3}{4})} dx = -\frac{1}{3}$$

考虑到对称性，显然有 $A_0=A_2$，于是有求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]-\frac{1}{3}f(\frac{1}{2})$$

由于原式含有 3 个节点，按定理 1 它至少有 2 阶精度。

考虑到其对称性，可以猜到它可能有 3 阶精度。事实上，

对于 $f=x^3$ 原始左右两端相等。此外，容易原式对于

$f=x^4$ 不准确，故所构造出的求积公式确实有 3 阶精度。

求积公式的设计

试设计求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(\frac{1}{4}) + A_1 f(\frac{1}{2}) + A_2 f(\frac{3}{4})$$

解 令原式对于$f=1,x,x^2$准确成立，可列出方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ \dfrac{1}{4}A_0 + \dfrac{1}{2}A_1 + \dfrac{3}{4}A_2 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{16}A_0 + \dfrac{1}{4}A_1 + \dfrac{9}{16}A_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

考虑到对称性，令$A_0 = A_2$，则下列前两个方程是同解方程：

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 + \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8}A_0 + \frac{1}{4}A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

解之得

$$A_0 = A_2 = \frac{2}{3}, A_1 = -\frac{1}{3}$$

这样所构造的插值公式是

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$$

当 $f = x^4$ 时上式左端=1/5，而

$$右端=\frac{2}{3}(\frac{1}{4})^4 - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^4 + \frac{2}{3}(\frac{3}{4})^4$$

其左右两端不相等，故所构造出的求积公式具有 3 阶精度。

例题2

试设计求积公式

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx h[A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)]$$

解　不妨令 h=1,否则作变换 x=ht,原式化为

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx A_{-1}f(-1) + A_0 f(0) + A_1 f(1)$$

考虑到求积公式内在的对称性，显然有$A_{-1}=A_1$，这时对奇函数的$f=x,x^3$自然准确；令对$f=1,x^2$准确成立，可列出方程

$$\begin{cases} 2A_1 + A_0 = 4 \\ 2A_1 = \dfrac{16}{3} \end{cases}$$

因之有

$$A_{-1} = A_1 = \frac{8}{3}, A_0 = -\frac{4}{3}$$

这样构造出的求积公式是

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx h[\frac{8}{3}f(-h) - \frac{4}{3}f(0) + \frac{8}{3}f(h)]$$

易知它对于$f = x^4$不准确，故所构造出的求积公式具有 3 阶精度。

例题3

试设计求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_2 f^{'}(0)$$

解　　令对 $f=1,x,x^2$ 准确，可列出方程

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_1 + B_0 = \dfrac{1}{2} \\ A_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

解之有

$$A_0 = \frac{2}{3}, A_1 = \frac{1}{3}, B_0 = \frac{1}{6}$$

于是有求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0)$$

易知它对于 $f = x^3$ 不准确，故该求积公式仅有 2 阶精度。

例题4

试设计求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(a) + A_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_2 f(b) + B_2 f'(a)$$

$$+ B_1 f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + B_2 f'(b)$$

解　引进变换 $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$ 将求积区间[a,b]变到[0，1]，则原式化为如下形式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-1)+A_1 f(0)+A_2 f(1)+B_2 f'(-1)+$$

$$B_1 f'(0)+B_2 f'(1)$$

这一求积公式含有 6 个待定系数，考虑到对称性有 $A_0 = A_2, B_0 = -B_2, B_1 = 0$ 这时对 $f = x, x^3, x^5$ 自然准确；再令对于 $f = 1, x^2, x^4$ 准确，可列出方程组

$$\begin{cases} 2A_0 + A_1 = 2 \\ 2A_0 - 4B_0 = \dfrac{2}{3} \\ 2A_0 - 8B_0 = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

解之得

$$A_0 = A_2 = \frac{7}{15}, A_1 = \frac{16}{15}, B_0 = -B_2 = \frac{1}{15}, B_1 = 0$$

于是这样设计出的求积公式是

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{30}[7f(a)+16f(\frac{a+b}{2})+7f(b)]+\frac{(b-a)^2}{60}[f'(a)-f'(b)]$$

易知它对于 $f = x^6$ 不准确，故所设计的求积公式有

5 阶精度。

例题5

试设计求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(1)$$

解　令原式对于$f=1,x,x^2,x^3$准确，可列出方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 x_1 + A_2 = \dfrac{1}{2} \\ A_1 x_1^2 + A_2 = \dfrac{1}{3} \\ A_1 x_1^3 + A_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

考虑到高精度的求积公式具有内在的对称性，试令 $x_1 = \frac{1}{2}, A_0 = A_2$，则上述方程组内仅含两个待定系数 A_0, A_1 而具有形式

$$
\begin{cases}
2A_0 + A_1 = 1 \\
A_0 + \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2} \\
A_0 + \frac{1}{4}A_1 = \frac{1}{3} \\
A_0 + \frac{1}{8}A_1 = \frac{1}{4}
\end{cases}
$$

解之得

$$A_0 = A_2 = \frac{1}{6}, A_1 = \frac{2}{3}$$

这样构造出的求积公式是

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)]$$

它具有 3 阶精度。

例题6

验证下列数值微分公式是插值型的：

$$f'(a) \approx \frac{1}{6h}[-11f(a)+18f(a+h)-9f(a+2h)+2f(a+3h)]$$

例题6

证　为简化分析，令 a=0,h=1，否则施行变换 $x = a + th$，则原式化为

$$f'(0) \approx \frac{1}{6}[-11f(0) + 18f(1) - 9f(2) + 2f(3)]$$

试以 x=0,1,2,3 为节点构作拉格朗日插值多项式

$$p(x) = l_0(x)f(0) + l_1(x)f(1) + l_2(x)f(2) + l_3(x)f(3)$$

式中 $l_i(x)$ 是拉格朗日插值基函数

注意到

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}$$

易知

$$l_0'(0)=-\frac{11}{6}$$

同理有

$$l_1'(0)=\frac{18}{6},\ l_2'(0)=-\frac{9}{6},\ l_3'(0)=\frac{2}{6}$$

故有

$$p'(0)=\frac{1}{6}[-11f(0)+18f(1)-9f(2)+2f(3)]\approx f'(0)$$

第三章 常微分方程的差分方法

高 云

问题的提出

实际中，很多问题的数学模型都是微分方程。我们可以研究它们的一些性质。但是，只有极少数特殊的方程有解析解。对于绝大部分的微分方程是没有解析解的。

常微分方程作为微分方程的基本类型之一，在自然界与工程界有很广泛的应用。很多问题的数学表述都可以归结为常微分方程的定解问题。很多偏微分方程问题，也可以化为常微分方程问题来近似求解。

常微分方程的定解问题

考虑一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \quad x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

只要 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times R^1$ 上连续，且关于 y 满足 Lipschitz 条件，即存在与 x,y 无关的常数 L 使 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$ 对任意定义在 $[a,b]$ 上的 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都成立，则上述问题存在唯一解。

差分方法

要计算出解函数 $y(x)$ 在一系列节点 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ 处的近似值 $y_i \approx y(x_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$

节点间距 $h_i = x_{i+1} - x_i \ (i = 0, \ldots, n-1)$ 为步长，通常采用**等距节点**，即取 $h_i = h$ (常数)。

在这些节点上采用离散化方法，（通常用数值积分、微分、泰勒展开等）将上述初值问题化成关于离散变量的相应问题。把这个相应问题的解 y_n 作为 $y(x_n)$ 的近似值。这样求得的 y_n 就是上述初值问题在节点 x_n 上的数值解。一般说来，不同的离散化导致不同的方法。

精确解和数值解

用数值方法求解初值问题，不是求出它的解析解或其近似解析式，而是给出它的解在某些离散节点上的近似值

$y(x_0)$， $y(x_1)$, $y(x_N)$ 表示解$y(x)$在节点x_0, x_1, …, x_N处的准确值

y_0, y_1, …, y_N表示数值解，即问题(1)，(2)的解$y(x)$ 在相应节点处的近似值，

单步法和多步法

单步法：在计算y_{i+1}时只利用y_i

多步法：在计算y_{i+1}时不仅利用y_i，还要利用y_{i-1}, y_{i-2},…,

k步法：在计算y_{i+1}时要用到y_i, y_{i-1}, …, y_{i-k+1}

显式计算公式可写成: $y_{k+1}=y_k+h\Phi_f(x_k, y_k; h)$

隐式格式: $y_{k+1}=y_k+h\Phi_f(x_k, y_k, y_{k+1}; h)$

它每步求解y_{k+1}需要解一个隐式方程

欧拉公式

Euler方法是一种最简单的单步法

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{N-1} < x_N = b,$$

$$x_j = x_0 + jh, h = \frac{b-a}{N}, j = 1, 2, \cdots, N.$$

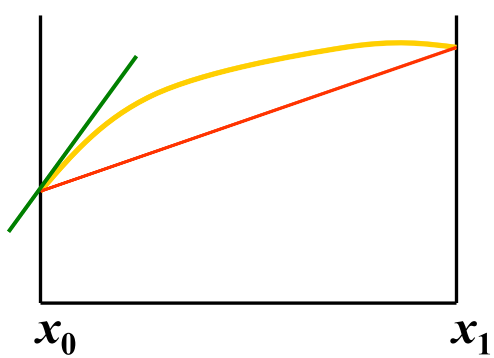
欧拉公式

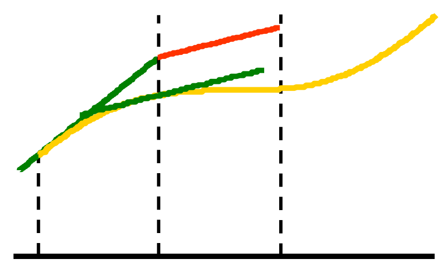
向前差商近似导数 ➡ $y'(x_0) \approx \dfrac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$

亦称为欧拉折线法

$$y(x_1) \approx y(x_0) + h\,y'(x_0) = y_0 + h\,f(x_0, y_0) \overset{记为}{=\!=} y_1$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i) \quad (i = 0, \ldots, n-1)$$





局部截断误差

定义 在假设 $y_i = y(x_i)$，即第 i 步计算是精确的前提下，考虑的截断误差 $R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$ 称为局部截断误差

对于数值方法

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h),$$

局部截断误差定义为:

$$e_{i+1} = y(x_{i+1}) - [y(x_i) + h\phi(x_i, y(x_i), h)]$$

假定 "$y_i = y(x_i)$"称为局部化假定

欧拉格式的误差

定义 若某算法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，则称该算法有 p 阶精度。

R_i 的主项

☞ 欧拉法的局部截断误差：

$$R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = [\cancel{y(x_i)} + h\cancel{y'(x_i)} + \tfrac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3)] - [\cancel{y_i} + h\cancel{f(x_i, y_i)}]$$

$$= \tfrac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3)$$ 欧拉法具有 1 阶精度。

例题1

已知 $\begin{cases} y' = x + y \quad (0 < x < 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

则欧拉公式为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(x_n + y_n)$$

如何求解此问题？

隐式欧拉格式

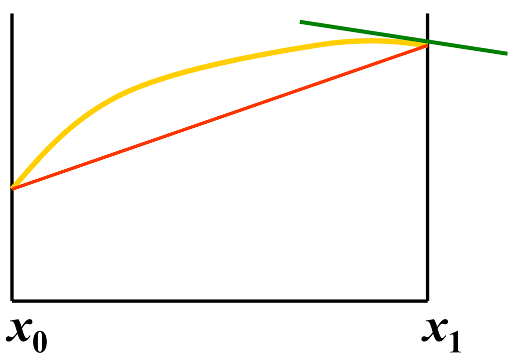
向后差商近似导数 → $y'(x_1) \approx \dfrac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$

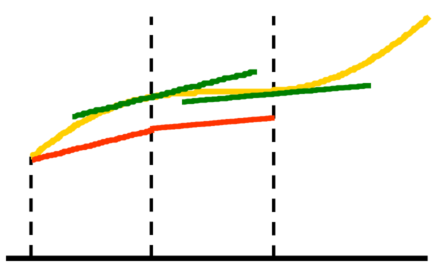
→ $y(x_1) \approx y_0 + h\, f(x_1, y(x_1))$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_{i+1}, y_{i+1}) \quad (i = 0, \ldots, n-1)$$

隐式欧拉格式的代数精度是几阶的？

由于未知数 y_{i+1} 同时出现在等式的两边，不能直接得到，故称为隐式 /* implicit */ 欧拉公式，而前者称为显式 /* explicit */ 欧拉公式。





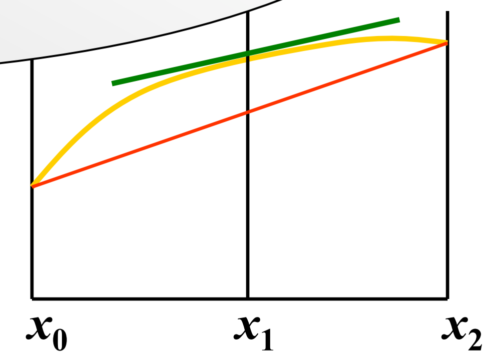
两步

需要2个初值 y_0和 y_1来启动递推过程，这样的算法称为双步法 /* double-step method */，而前面的三种算法都是单步法 /* single-step method */。

中心差商近似导数 →

$$2h$$

→ $y(x_2) \approx y(x_0) + 2 \ \ (x_1, y(x_1))$



$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h\, f(x_i, y_i) \quad i = 1, \ldots, n-1$$

假设 $y_{i-1} = y(x_{i-1})$, $y_i = y(x_i)$，则可以导出 $R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = O(h^3)$
即中点公式具有 **2** 阶精度。

初值问题的积分形式

一阶方程的初值问题与积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$ 是等价的

当$x = x_1$时，

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t))dt$$

借助于数值积分，求$y(x_1)$的值

用矩形公式

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t))dt \approx f(x_0, y(x_0))(x_1 - x_0)$$

$$y(x_1) \approx y_0 + f(x_0, y(x_0))(x_1 - x_0)$$
$$= y_0 + hf(x_0, y_0)$$

梯形公式

用梯形公式

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t,y(t))dt \approx \frac{1}{2}\{f(x_0,y(x_0))+f(x_1,y(x_1))\}(x_1-x_0)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h[f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1)]$$

同理

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

各种方法的比较

方　法		
显式欧拉	简单	精度低
隐式欧拉	稳定性最好	精度低，计算量大
梯形公式	精度提高	计算量大
中点公式	精度提高，显式	多一个初值， 可能影响精度