这就证明了 V 是独异点。 $\square$

16.3

(1)

证明: $\forall x, y, z \in S$，

$$
\begin{aligned}
(x \circ y) \circ z &= x \circ z && (\circ \text{ 定义}) \\
&= x && (\circ \text{ 定义}) \\
&= x \circ (y \circ z) && (\circ \text{ 定义})
\end{aligned}
$$

从而 $\langle S, \circ \rangle$ 是半群。 $\square$

(2) 令 $S' = S \cup \{e\}$，$\circ' : S' \times S' \to S', x \circ' y = \begin{cases} y, & 若 x = e \\ x, & 否则 \end{cases}$，依教材定理 16.2，$\langle S', \circ', e \rangle$ 是一个独异点。

16.4

证明:

$$
\begin{aligned}
(a \circ b) \circ c &= a \circ (b \circ c) && (\text{结合律}) \\
&= a \circ (c \circ b) && (b, c \text{ 可交换}) \\
&= (a \circ c) \circ b && (\text{结合律}) \\
&= (c \circ a) \circ b && (a, c \text{ 可交换}) \\
&= c \circ (a \circ b) && (\text{结合律})
\end{aligned}
$$

$\square$

16.5

(1)

证明:

$$
\begin{aligned}
a * b &= a * (a * a) && (a * a = b) \\
&= (a * a) * a && (\text{结合律}) \\
&= b * a && (a * a = b)
\end{aligned}
$$

$\square$

(2)

证明: 由于 V 的载体 $\{a, b\}$ 只有 a, b 两个元素，故分 $a * b = a$ 和 $a * b = b$ 两种情况讨论。

① 若 $a * b = a$，则:

$$
\begin{aligned}
b * b &= (a * a) * b && (a * a = b) \\
&= a * (a * b) && (\text{结合律}) \\
&= a * a && (a * b = a) \\
&= b && (a * a = b)
\end{aligned}
$$

② 若 $a * b = b$，则:

$$
\begin{aligned}
b * b &= (a * a) * b && (a * a = b) \\
&= a * (a * b) && (\text{结合律}) \\
&= a * b && (a * b = b)
\end{aligned}
$$