第10章 图的矩阵表示

- 关联矩阵M(D), M(G)
- 用基本联矩阵$M_f(G)$求所有生成树
- 邻接矩阵A(D), 相邻矩阵A(G)
- 用A的幂求不同长度通路(回路)总数
- 可达矩阵P(D), 连通矩阵P(G)
- 单源最短路径问题, Dijkstra算法

有向图关联矩阵

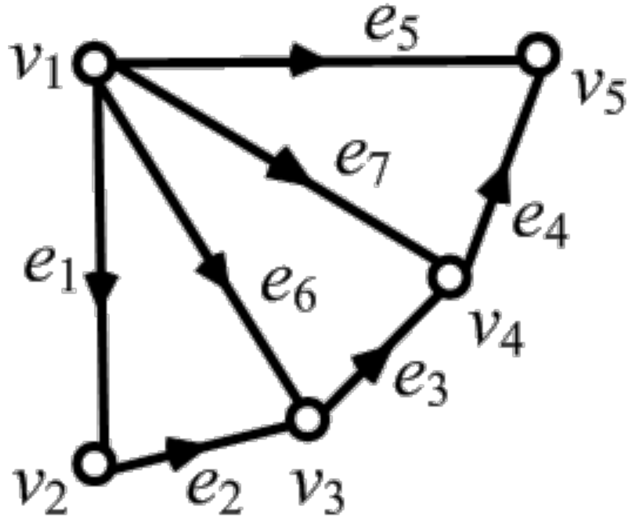
- 无环有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$,$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_q\}$, $p\times q$阶矩阵$M(D)=(m_{ij})_{p\times q}$,其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & 若v_i是e_j的起点\\ -1 & 若v_i是e_j的终点\\ 0 & 若v_i不关联e_j\end{cases}$$

称$M(D)$为G的关联矩阵。

有向图关联矩阵(例)

例 求下图的关联矩阵



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

有向图关联矩阵的性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} (m_{ij} = 1) = d^{+}(v_i),$

$\sum_{j=1}^{m} (m_{ij} = -1) = d^{-}(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$

(3) 握手定理 $\sum_{i,j} m_{ij} = 0$

(4) 平行边对应的列相同;

(5) 不能表示环.

无向图的关联矩阵

无环无向图G=<V,E>,V={$v_1,v_2,\ldots,v_p$},E={$e_1,e_2,\ldots,e_q$},

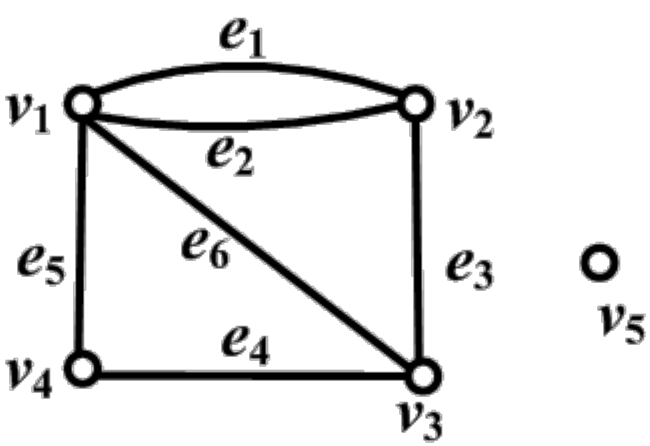
则矩阵$M(G)=[m_{ij}]_{p\times q}$,其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & 若v_i关联e_j\\ 0 & 若v_i不关联e_j\end{cases}$$

称$M(G)$为关联矩阵。

无向图关联矩阵(例)

求下图的关联矩阵.



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

无向图关联矩阵的性质

(1) 每列和等 $2:\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2(j = 1,2,\ldots,m)$

(2) 每行和为 $d(v):\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i)\ i = 1,2,\ldots,n$

(3) 每行所有1对应的边构成断集: $(\{v_i\}, \overline{\{v_i\}})$

(4) 平行边对应的列相同;

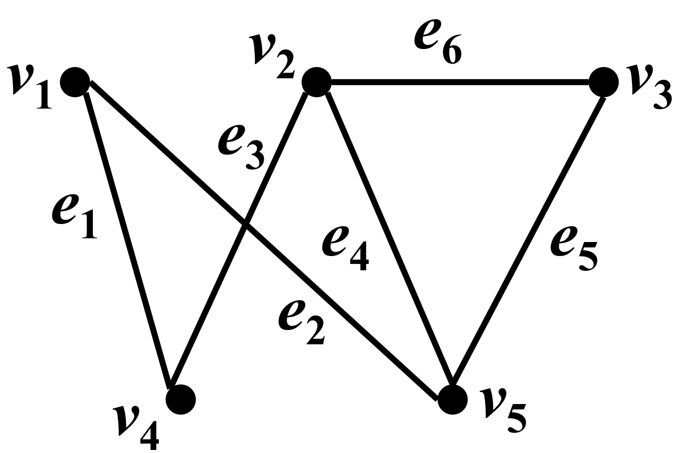
(5) 不能表示环;

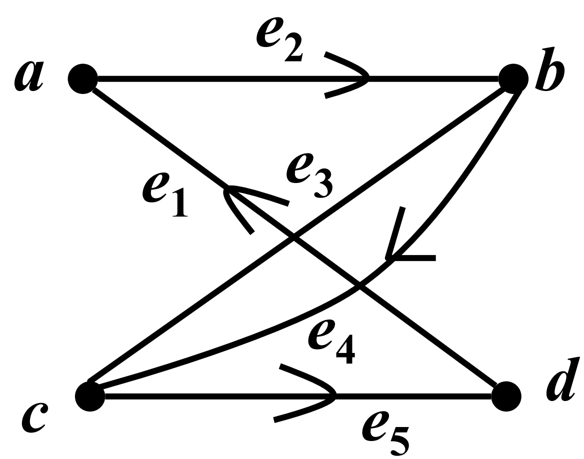
(6) 伪对角阵: 对角块是连通分支

$$\mathrm{M}(G) = \begin{bmatrix} M(G_1) & & & \\ & M(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M(G_k) \end{bmatrix}$$

举例

用关联矩阵表示下图所示的图。





结点合并运算

结论 关联矩阵中两行v_i,v_j相加运算等价于v_i,v_j的合并.

证明 关联矩阵中两行v_i,v_j相加：

(1) 对于有向图,对应分量相加;

(2) 对于无向图,对应分量的模2加法.

记为 $\vec{v}_i \oplus \vec{v}_j = \vec{v}_{ij}$

设a_{ir},a_{jr}分别是v_i,v_j的第r个分量,相加后得到的新行对应的结点为$v_{i,j}$,则

(1) $a_{ir}\oplus a_{jr}=\pm 1$时, v_i,v_j只有一个是e_r的端点,$v_{i,j}$也是e_r的端点.

结点合并(续)

(2) $a_{ir}\oplus a_{jr}=0$时,则有两种情况:

(*a*) $a_{ir}=a_{jr}=0$,即v_i,v_j都不是e_r的端点,所以$v_{i,j}$也不是e_r的端点;

(*b*) v_i,v_j都是e_r的端点,即a_{ir}与a_{jr}必然符号相反或者相同,则$v_{i,j}$既是e_r的起点,也是e_r的终点,因而e_r是$v_{i,j}$上的环,删掉.

故图G的结点v_i,v_j合并得到图G'.

$M(G)$中v_i,v_j对应行相加得到的是$M(G')$.

无向图关联矩阵的秩

- **定理10.1** 如果连通图G有n个结点,则rank $M(G)=n-1$.
- **证明:** (1) $M(G)$每行对应1个断集, 断集空间$C_{断}$的维数是n-1, 所以$r(M(G))\le n-1$.

(2) 下面证M(G)的前n-1行$M_1,M_2,\ldots,M_{n-1}$线性无关, 即 $r(M(G))\ge n-1$. (反证)否则,必存在不全为0的$k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}\in F=\{0,1\}$,在模2加法意义下,使

$\sum_{i=1}^{n-1}k_iM_i=0$(向量模2加法,0是指零向量).

不妨设$k_1=k_2=\ldots=k_s=1$, $k_{s+1}=k_{s+2}=\ldots=k_{n-1}=0$,并且$s\ne1$.

否则$M_1=0$,即v_1是孤立点,与G连通矛盾.所以$2\le s\le n-1$.

定理10.1(证明)

$\sum_{i=1}^{s} M_i=0$,即$M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_s=0_{1\times m}$,易知在M(G)子阵

$$M' = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_s \end{bmatrix}$$

中每列或有2个1或全是0.

令$V_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_s\}$, 则$(V_1,\overline{V_1})=\varnothing$, 即G不连通, 矛盾!

无向图基本关联矩阵

- 设G=<V,E>是无环无向图,V={v_1,v_2,…,v_n},

  E={e_1,e_2,…,e_m}
- 参考点: 任意1个顶点
- 基本关联矩阵(fundamental incidencematrix): 从M(G)中删除参考点对应的行, 记作M_f(G)

无向图基本关联矩阵的秩

- **定理10.2**: G连通$\Rightarrow r(\mathrm{M}_f(\mathrm{G}))=n-1$.
- **推论1**: G有p个连通分支$\Rightarrow r(\mathrm{M}_f(\mathrm{G}))=n-p$

  其中$\mathrm{M}_f(\mathrm{G})$是从M(G)的每个对角块中删除任意1行而得到的.
- **推论2**: G连通$\Leftrightarrow r(\mathrm{M}(\mathrm{G}))=r(\mathrm{M}_f(\mathrm{G}))=n-1$.

基本关联矩阵与生成树

- **定理10.3:** G连通, M'_f是$M_f(G)$中任意n-1列组成的方阵, M'_f中各列对应的边集是$\{e_{i_1}, e_{i_2},\ldots, e_{i_{n-1}}\}$, T是导出子图$G[\{e_{i_1}, e_{i_2},\ldots, e_{i_{n-1}}\}]$, 则

  T是G的生成树$\Leftrightarrow$ M'_f的行列式$|M'_f|\neq 0$

证明: $M(T) = M'_f$, T是G的生成树$\Leftrightarrow$T连通

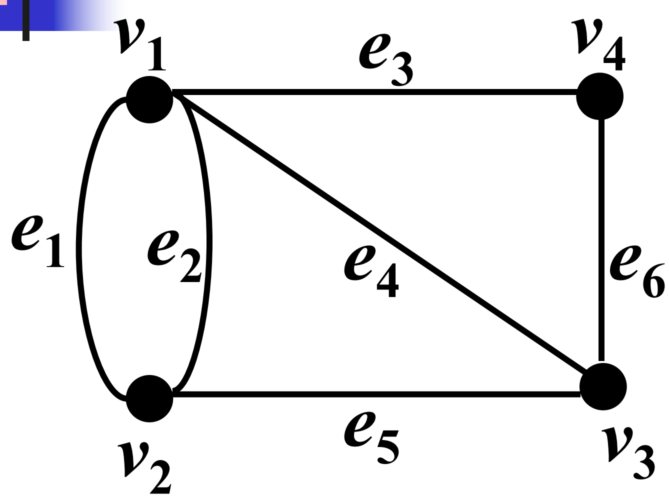
$\Leftrightarrow r(M(T))=n-1 \Leftrightarrow r(M'_f)=n-1 \Leftrightarrow M'_f$满秩$\Leftrightarrow |M'_f|\neq 0$.

- **说明:** 上述运算是在F={0,1}上进行的

用关联矩阵求所有生成树

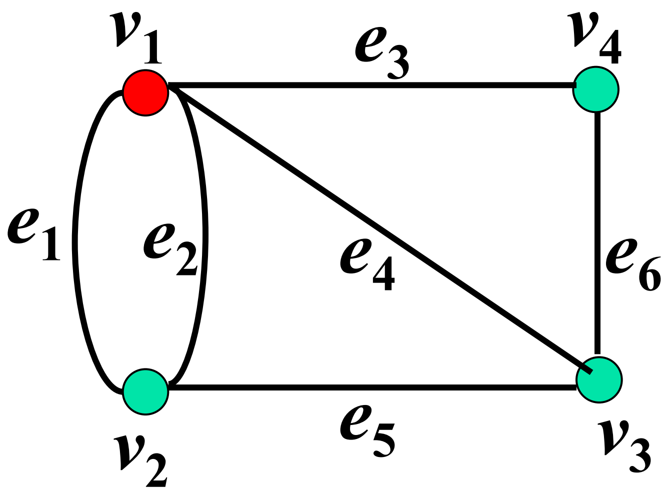
- 忽略环, 求关联矩阵
- 任选参考点, 求基本关联矩阵
- 求所有n-1阶子方阵,计算行列式,行列式非0的是生成树

求下图所有生成树(例)



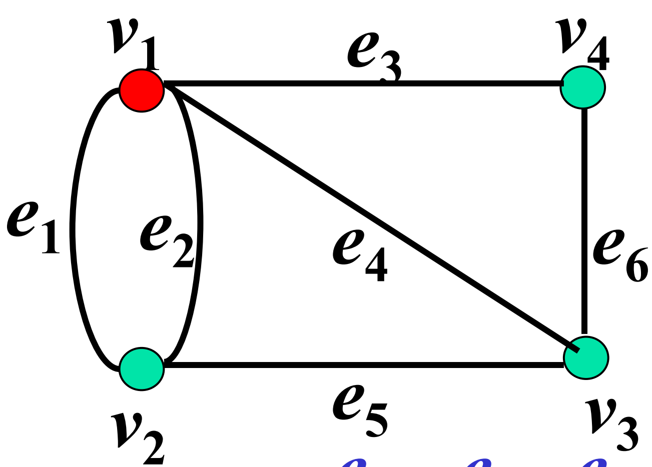
$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

求所有生成树(例,续)



$$M_f(G)=\begin{array}{c} \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

求所有生成树(例,续)



$$M_f(G)=\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

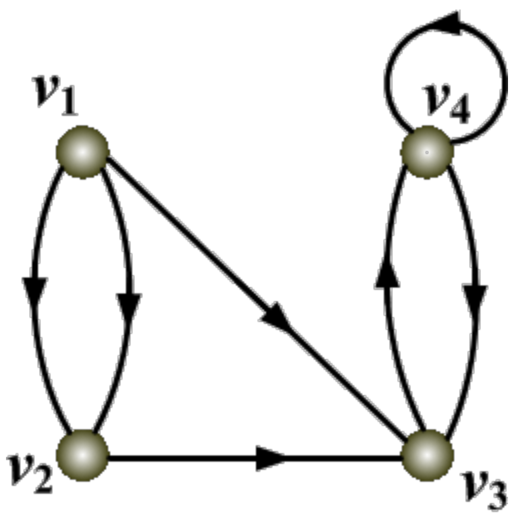
1,2,3	0	2,3,4	1
1,2,4	0	2,3,5	1
1,2,5	0	2,3,6	1
1,2,6	0	2,4,5	0
1,3,4	1	2,4,6	1
1,3,5	1	2,5,6	1
1,3,6	1	3,4,5	1
1,4,5	0	3,4,6	0
1,4,6	1	3,5,6	1
1,5,6	1	4,5,6	1

有向图邻接矩阵

设D=<V,E>是有向图,V={v_1, v_2,…,v_n}

邻接矩阵(adjacence matrix):

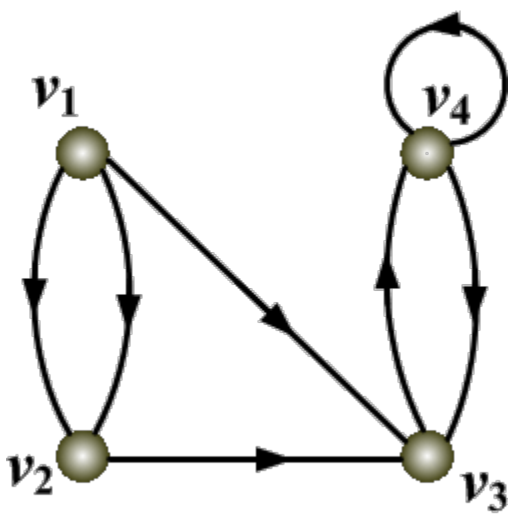
A(D)=$[a_{ij}]_{n\times n}$, a_{ij} = 从v_i到v_j的边数



$$A(D)=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

有向图邻接矩阵(性质)

- 每行和为出度: $\Sigma^n_{j=1} a_{ij} = \mathrm{d}^+(v_i)$
- 每列和为入度: $\Sigma^n_{i=1} a_{ij} = \mathrm{d}^-(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^n_{i=1} \Sigma^n_{j=1} a_{ij} = \Sigma^n_{i=1} \mathrm{d}^+(v_i) = m$
- 环个数: $\Sigma^n_{i=1} a_{ii}$



$$A(D) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵与通路数

- 设A(D)=A=$[a_{ij}]_{n\times n}$, $A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$,
  $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$, $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$

其中$a^{(r)}_{ij}=\Sigma^{n}_{t=1}a^{(r-1)}_{it}\bullet a_{tj}$

解释:

$a_{ij}=v_i$到v_j的边数,即v_i到v_j长度为1的通路条数;

$a_{it}\bullet a_{tj}=v_i$经过v_t到v_j的边数,即v_i经过v_t到v_j长度为2的通路条数;

$a^{(2)}_{ij}=\Sigma^{n}_{t=1}a_{it}\bullet a_{tj}=v_i$到$v_j$长度为2的通路条数

以此类推

邻接矩阵与通路数

- **定理4:** $a^{(r)}_{ij}$ =从v_i到v_j长度为r的通路总数

  $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}\, a^{(r)}_{ij}$ =长度为r的通路总数

  $\Sigma^n_{i=1}\, a^{(r)}_{ii}$ =长度为r的回路总数

- $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- **推论:** $b^{(r)}_{ij}$ =从v_i到v_j长度$\leq r$的通路总数

  $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}\, b^{(r)}_{ij}$ =长度$\leq r$的通路总数

  $\Sigma^n_{i=1}\, b^{(r)}_{ii}$ =长度$\leq r$的回路总数.

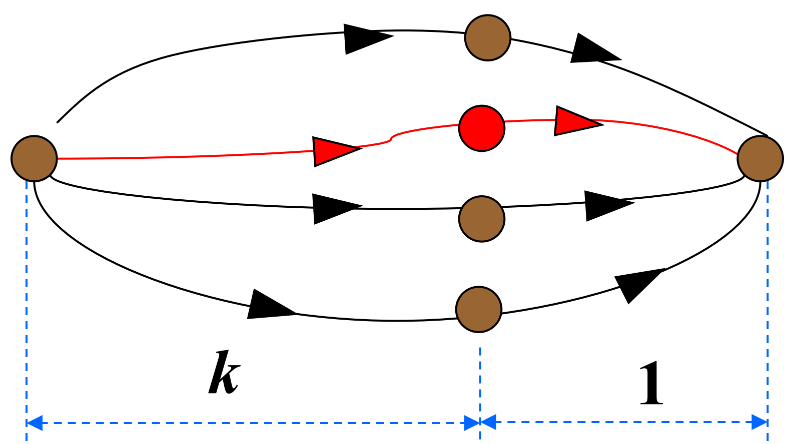
定理4(证明)

证明: (归纳法) (1)r=1: $a^{(1)}_{ij} = a_{ij}$, 结论显然.

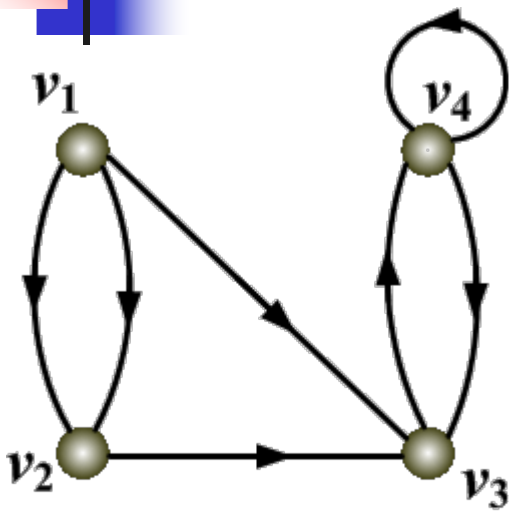
(2) 设$r \le k$时结论成立, 当$r=k+1$时,

$a^{(k)}_{it} \bullet a^{(1)}_{tj}$ =从v_i到v_j最后经过v_t的长度为k+1的通路总数,

$a^{(k+1)}_{ij} = \Sigma^{n}_{t=1}\, a^{(k)}_{it} \bullet a^{(1)}_{tj}$ =从v_i到v_j的长度为k+1的通路总数.



用邻接矩阵求通路数(例)



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}_2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B}_3=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B}_4=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

用邻接矩阵求通路数(例)

- v_2到v_4长度为3和4的通路数: 1, 2
- v_2到v_4长度≤4的通路数: 4
- v_4到v_4长度为4的回路数: 5
- v_4到v_4长度≤4的回路数: 11

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & \boxed{11} \end{bmatrix}$$

用邻接矩阵求通路数(例,续)

- 长度=4的通路(不含回路)数: 16
- 长度≤4的通路和回路数: 53, 15

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&\boxed{0}&\boxed{3}&\boxed{4}\\\boxed{0}&0&\boxed{1}&\boxed{2}\\\boxed{0}&\boxed{0}&2&\boxed{3}\\\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{3}&5\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad \mathrm{B}^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad \mathrm{B}^4=\begin{bmatrix}\boxed{0}&2&7&8\\0&\boxed{0}&3&4\\0&0&\boxed{4}&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}$$

可达矩阵

- $D=\langle V,E\rangle$是有向图, V=$\{v_1, v_2,\ldots,v_n\}$,
- 可达矩阵: P(D)=$[p_{ij}]_{n\times n}$

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从}v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{从}v_i\text{不可达}v_j\end{cases}$$

可达矩阵(性质)

- 主对角线元素都是1: $\forall v_i \in V$, 从v_i可达v_i
- 强连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的可达矩阵
- $\forall i \neq j, p_{ij}=1 \Leftrightarrow b^{(n\text{-}1)}_{ij} > 0$

$$\mathrm{P}(G)=\begin{bmatrix} \mathrm{P}(D_1) & & & \\ & P(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(D_k) \end{bmatrix}$$

计算可达矩阵的方法

- 由邻接矩阵A可直接得到可达性矩阵P，方法如下：

方法1：$B_{n-1}=A+A^2+\ldots A^{n-1}$，

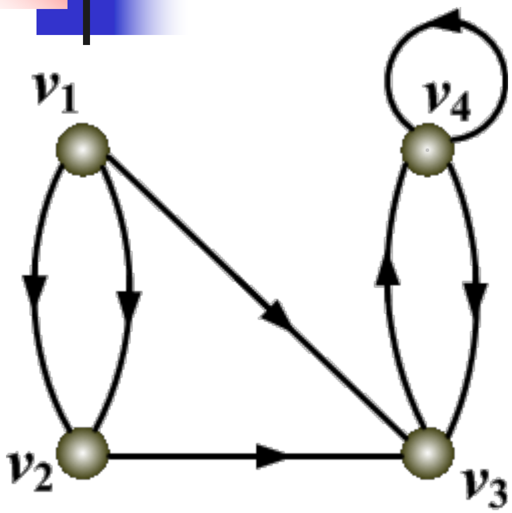
再把B_{n-1}中的非零元均改为1，零元保持不变，将主对角线上的元素改为1，得到可达性矩阵P。

方法2：把$A^i(i=1,2,\ldots,n)$中的非零元改为1，零元保持不变，得到布尔矩阵$A^{(i)}(i=1,2,\ldots,n)$，

$$P= A^{(1)} \vee A^{(2)} \vee \ldots \vee A^{(n-1)}$$

最后，将主对角线上的元素改为1，得到可达性矩阵P。

可达矩阵(例)



$$A(D)=\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\qquad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&2\\0&0&2&3\\0&0&3&5\end{bmatrix}$$

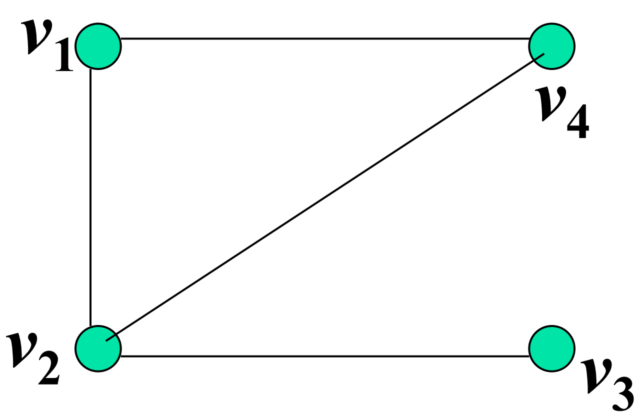
$$\mathbf{B}^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}^4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&4\\0&0&4&7\\0&0&7&11\end{bmatrix}$$

无向图相邻矩阵

设G=<V,E>是无向简单图, V={$v_1, v_2,\ldots,v_n$}

- 相邻矩阵(adjacence matrix):A(G)=$[a_{ij}]_{n\times n}$

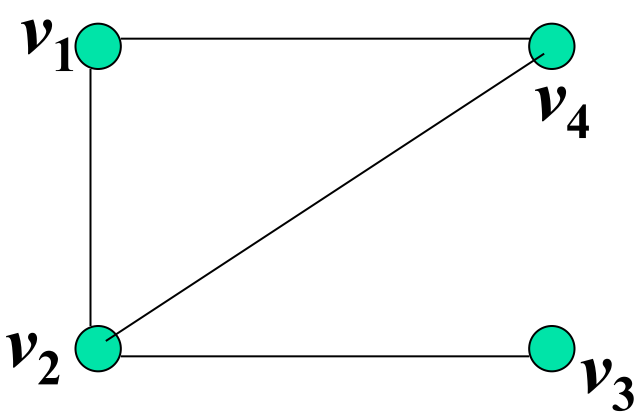
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{相邻}\\ 0, & v_i\text{与}v_j\text{不相邻}\end{cases}$$



$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

无向图相邻矩阵(性质)

- A(G)对称: $a_{ij}=a_{ji}$
- 每行(列)和为顶点度: $\Sigma^n{}_{i=1}a_{ij}=\mathrm{d}(v_j)$, $\Sigma^n{}_{j=1}a_{ij}=\mathrm{d}(v_i)$
- 握手定理: $\Sigma^n{}_{i=1}\Sigma^n{}_{j=1}a_{ij}=\Sigma^n{}_{i=1}\mathrm{d}(v_i)=2m$



$$A(D)=\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

相邻矩阵与通路数

- 设$A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$,

  $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$

- **定理5:** 在简单图中,

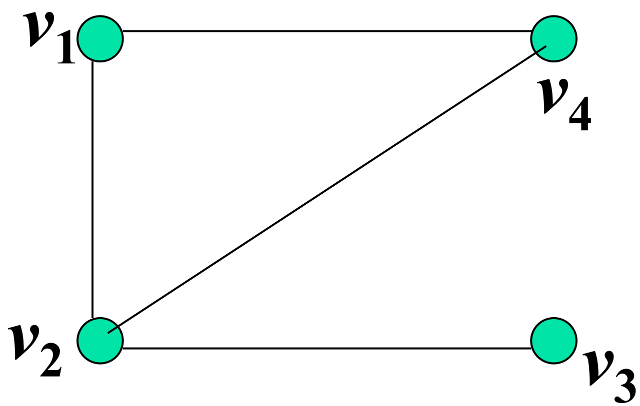
  $a^{(r)}_{ij}$ =从v_i到v_j长度为r的通路总数

  $\Sigma^n_{i=1} a^{(r)}_{ii}$ =长度为r的回路总数

证明:归纳法.

- **推论1:** $a^{(2)}_{ii}=d(v_i)$.
- **推论2:** G连通⇒距离$d(v_i, v_j)=\min\{r|\ a^{(r)}_{ij}\neq 0\}$.

用相邻矩阵求通路数(例)



$$A(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

用相邻矩阵求通路数(例,续)

- v_1到v_2长度为4的通路数: 6

  14142,14242,14232,12412,14212,12142

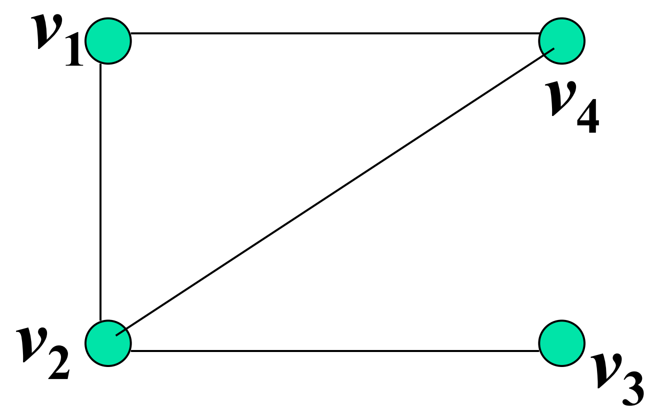
- v_1到v_3长度为4的通路数: 4

  12423,12323,14123,12123

- v_1到v_1长度为4的回路数: 7

  14141,14241,14121,12121,

  12421,12321,12141,



$$A^2=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&3&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\qquad A^3=\begin{bmatrix}2&4&1&3\\4&2&3&4\\1&3&0&1\\2&4&1&2\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}\boxed{7}&6&4&6\\\boxed{6}&11&2&6\\\boxed{4}&2&3&4\\6&6&4&7\end{bmatrix}$$

连通矩阵

- 设G=<V,E>是无向简单图, V={v_1, v_2,…,v_n}
- 连通矩阵: P(G)=$[p_{ij}]_{n\times n}$,

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{连通}\\ 0, & v_i\text{与}v_j\text{不连通}\end{cases}$$

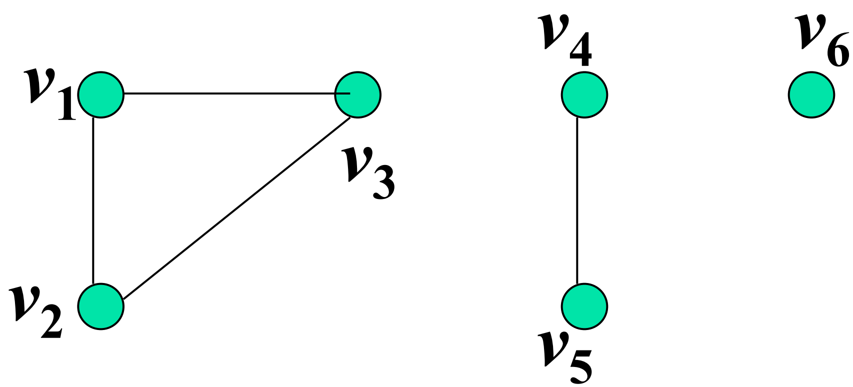
连通矩阵(性质)

- 主对角线元素都是1: $\forall v_i \in V$, v_i与v_i连通
- 连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的可达矩阵
- 设$B^r = A + A^2 + \ldots + A^r = [b^{(r)}_{ij}]_{n \times n}$

$$\forall i \neq j,\ p_{ij} = 1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij} > 0，\ p_{ii} = 1$$

$$P(G) = \begin{bmatrix} P(G_1) & & & \\ & P(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(G_k) \end{bmatrix}$$

连通矩阵(例)



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单源最短路径问题

- **单源最短路径(single-source shortestpaths)问题: 给定带权图G(有向或无向)和顶点s, 求从s到其余顶点的最短路径**
- **所有顶点之间最短路径(all-pairs shortestpaths)问题: 给定带权图G(有向或无向),求G所有顶点对之间的最短路径**
- **带权图路径长度: $W(P)=\Sigma_{e\in E(P)}W(e)$**
- **E.W.Dijkstra,1959, 理论$(m+n\log n)$,$O(m+n\sqrt{\log C})$, 实践$O(m+nC)$,$C=\max W(e)$**

Dijkstra算法

- **输入: 带权图$G=\langle V,E,W\rangle$, W非负, $s\in V$**
- **输出: 以s为根的最短路径树**
- **算法:**

d(s)=0;

pred(s)=0;

d(j)=∞ for all j∈V-{s};

LIST=V;

Dijkstra算法(续)

while LIST$\neq\varnothing$

{Vertex selection}

let i be a vertex for witch $d(i)=_{\min j\in LIST} d(j)$;

LIST=LIST-{i};

{Distance update}

for each $(i,j)\in E$

if $d(j)>d(i)+W(i,j)$ **then**

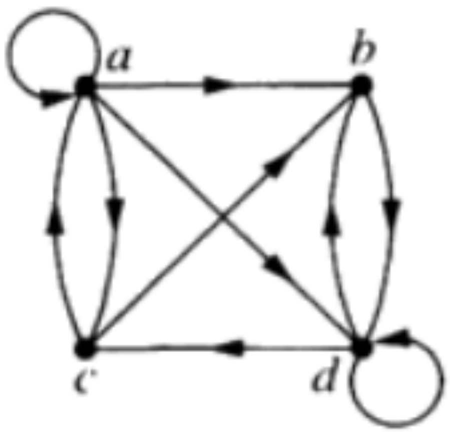
$d(j)=d(i)+W(i,j)$; pred(j)=i;

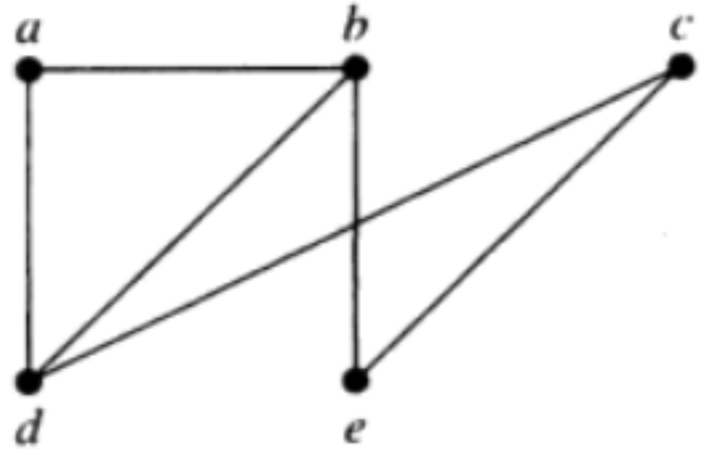
总结

- 关联矩阵M(D), M(G)
- 用基本联矩阵Mf(G)求所有生成树
- 邻接矩阵A(D), 相邻矩阵A(G)
- 用A的幂求不同长度通路(回路)总数
- 可达矩阵P(D), 连通矩阵P(G)
- 单源最短路径问题, Dijkstra算法
- 作业: p163-164, 习题十 1,2, 4

练习

1. 求出下图中图的邻接（或相邻）矩阵





练习

2.画出邻接矩阵A和关联矩阵M表示的图。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$