轮换 $\sigma_j = (i_{j_1}i_{j_2}\cdots i_{j_m})$ 和 $\sigma_k = (i_{k_1}i_{k_2}\cdots i_{k_r})$，$1 \le j < k \le t$，由引理 17.3 知，$\sigma_j' = (\tau(i_{j_1})\tau(i_{j_2})\cdots\tau(i_{j_m}))$，$\sigma_k' = (\tau(i_{k_1})\tau(i_{k_2})\cdots\tau(i_{k_r}))$。由于 τ 是一一映射且 σ_j, σ_k 不相交，所以 σ_j' 与 σ_k' 也不相交。而：

$$\begin{aligned}
\tau\sigma\tau^{-1} &= \tau\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t\tau^{-1} && (\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t)\\
&= \tau\sigma_1\tau^{-1}\tau\sigma_2\tau^{-1}\cdots\tau\sigma_t\tau^{-1} && (\tau^{-1}\tau = 1)\\
&= \sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_t' && (\sigma_i' = \tau\sigma_i\tau^{-1})
\end{aligned}$$

由上面的讨论和轮换指数的定义知，$\tau\sigma\tau^{-1}$ 与 σ 具有相同的轮换指数。 □

17.35 $\sigma = (12354)$，轮换指数为 5^1；$\tau = (15423)$，轮换指数也是 5^1。

17.36 见习题 17.14。

17.37 不是。因为共轭关系对群乘法一般不具有置换性质。以 S_3 为例，令 $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_1 = (12), \tau_2 = (13)$。显然，$\sigma_1$ 与 τ_1 共轭，σ_2 与 τ_2 共轭，但 $\sigma_1\tau_1 = (1)$，而 $\sigma_2\tau_2 = (123)$，不是共轭的。

17.38

(1) 由于循环群都是 Abel 群，所以 $\forall x \in G$，都有 $xax^{-1} = xx^{-1}a = a$。这就是说，$\forall x \in G, \overline{x} = \{x\}$。$G$ 的共轭类分别是：$\overline{e} = \{e\}$；$\overline{a} = \{a\}$；$\overline{a^2} = \{a^2\}$；$\overline{a^3} = \{a^3\}$。

(2) Klein 四元群也是 Abel 群，从而也有 $\forall x \in G, \overline{x} = \{x\}$，Klein 四元群的共轭类分别是：$\overline{e} = \{e\}$；$\overline{a} = \{a\}$；$\overline{b} = \{b\}$；$\overline{c} = \{c\}$。

17.39

证明： $\forall y \in G$，

$$\begin{aligned}
& y \in N(x^{-1}ax) \\
\iff & yx^{-1}ax = x^{-1}axy && (N(x^{-1}ax)\text{ 定义})\\
\iff & yx^{-1}a = x^{-1}axyx^{-1} && (\text{右乘 } x^{-1})\\
\iff & xyx^{-1}a = axyx^{-1} && (\text{左乘 } x)\\
\iff & xyx^{-1} \in N(a) && (N(a)\text{ 定义})\\
\iff & y \in x^{-1}N(a)x && (x^{-1}N(a)x\text{ 定义})
\end{aligned}$$

□

17.40

证明： 由教材定理 17.30 可知，$|\overline{a}| = [G : N(a)]$，$|\overline{a^n}| = [G : N(a^n)]$。由教材定理 17.29 可知，$N(a) \leqslant G$，$N(a^n) \leqslant G$。下面若能证明 $N(a) \subseteq N(a^n)$，就可以证明 $N(a) \leqslant N(a^n) \leqslant G$，从而习题 17.32 结论得证：$|\overline{a^n}| = [G : N(a^n)] \mid [G : N(a^n)][N(a^n) : N(a)] = [G : N(a)] = |\overline{a}|$。

下面对 n 归纳，证明 $\forall n \in \mathbb{N}_+, N(a) \subseteq N(a^n)$。

当 $n = 1$ 时，命题显然成立。

设 $n = k(k \le 1)$ 时命题成立，则当 $n = k + 1$ 时，$\forall x \in N(a)$，

$$\begin{aligned}
xa^{k+1} &= xa^k a && (\text{幂运算定义})\\
&= a^k xa && (\text{归纳假设})\\
&= aa^k x && (xa = ax)\\
&= a^{k+1}x && (\text{幂运算定义})
\end{aligned}$$

从而有 $x \in N(a^{k+1})$。即有：$N(a) \subseteq N(a^{k+1})$。 □