证明: 对任意自然数 $n \in \mathbb{N}$，取 $S = \{\{\{0\}\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n-1\}\}$，则有 $\operatorname{card} S = n, S \cap \mathbb{N} = \varnothing$。

取 $f : \mathbb{N} \to S \cup \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} \{\{0\}\}, & \text{若} x = 0 \\ \{x\}, & \text{若} 0 < x < n \\ x - n, & \text{若} x \geq n \end{cases}$。

显然，f 是双射。故有 $n + \aleph_0 = \operatorname{card}(S \cup \mathbb{N}) = \operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$。 □

(2)

证明: 对任意非零自然数[1] $n \in \mathbb{N}_+$，令 $S = \{nm \mid m \in \mathbb{N}\}$。

取 $f : \mathbb{N} \to S, \forall x \in \mathbb{N}, f(x) = nx$。$f$ 显然是双射。从而有 $S \approx \mathbb{N}$。

再取 $g : (n \times S) \to \mathbb{N}, \forall \langle x, y \rangle \in (n \times S), g(\langle x, y \rangle) = x + y$，由代余除法的性质知，$g$ 是双射。从而有 $n \times S \approx \mathbb{N}$。

因此：$n \cdot \aleph_0 = \operatorname{card}(n \times S) = \operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$。 □

(3)

证明: 由教材例 5.1 知，$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{\text{偶}} \approx \mathbb{N}_{\text{奇}}$。显然有 $\mathbb{N}_{\text{偶}} \cap \mathbb{N}_{\text{奇}} = \varnothing, \mathbb{N}_{\text{偶}} \cup \mathbb{N}_{\text{奇}} = \mathbb{N}$。于是有 $\aleph_0 + \aleph_0 = \operatorname{card}(\mathbb{N}_{\text{偶}} \cup \mathbb{N}_{\text{奇}}) = \operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$。 □

(4) 由教材定理 5.1(2) 即得。

5.14

(1)

证明: 设 K 为一基数为 κ 的集合，显然有 $\operatorname{card} \varnothing = 0, K \cap \varnothing = \varnothing, K \cup \varnothing = K$。

因此有：$\kappa + 0 = \operatorname{card}(K \cup \varnothing) = \operatorname{card} K = \kappa$。 □

(2)

证明: 设 K 为一基数为 κ 的集合，则有 $K \times \varnothing = \varnothing$。

因此有：$\kappa \cdot 0 = \operatorname{card}(K \times \varnothing) = \operatorname{card} \varnothing = 0$。 □

(3)

证明: 设 K 为一基数为 κ 的集合，则有 $\operatorname{card}(\{\varnothing\}) = 1, K \approx K \times \{\varnothing\}$ (取 $f : K \to K \times \{\varnothing\}, \forall x \in K, f(x) = \langle x, \varnothing \rangle$ 即可)。

故有：$\kappa \cdot 1 = \operatorname{card}(K \times \{\varnothing\}) = \operatorname{card} K = \kappa$。 □

(4)

证明: 设 K 为一基数为 κ 的集合，由全函数定义知：$(\varnothing \to K) = \{\varnothing\}$。

即有：$\kappa \cdot 0 = \operatorname{card}(\varnothing \to K) = \operatorname{card}(\{\varnothing\}) = 1$。 □

(5)

证明: 设 K 为一基数为 κ 的集合，由 $\kappa \neq 0$ 知，$K \neq \varnothing$，全函数定义知：$(K \to \varnothing) = \varnothing$。

故：$\kappa \cdot 1 = \operatorname{card}(\varnothing^K) = \operatorname{card} \varnothing = 0$。 □

(6)

证明: 设 K_1, K_2 为两个基数为 κ 的集合，且 $K_1 \cap K_2 = \varnothing$。由基数定义知，必然存在双射 $f : K_1 \to K_2$。作 $g : K_1 \cup K_2 \to \{K_1, K_2\} \times K_2, \forall x \in K_1 \cup K_2, g(x) = \begin{cases} \langle K_1, f(x) \rangle & \text{若} x \in K_1 \\ \langle K_2, x \rangle, & \text{若} x \in K_2 \end{cases}$。

[1] 本小题 n 必须大于 0，否则就有 $\operatorname{card}(\varnothing \times \mathbb{N}) = \operatorname{card} \varnothing = 0 \neq \aleph_0$。