于是，$v_0, v_1, \ldots, v_i, v_0$ 是一个长度为 $i+1$ 的圈，$v_0, v_1, \ldots, v_j, v_0$ 是一个长度为 $j+1$ 的圈，$v_0, v_i, \ldots, v_j, v_0$ 是一个长度为 $j-i+2$ 的圈。

令 d 为 G 中各圈长度的最大公约数。则有 $d \mid i+1$、$d \mid j+1$ 和 $d \mid j-i+2$，于是有 $d \mid (i+1)+(j-i+2)-(j+1)=2$ (d 的倍数的和、差仍是 d 的倍数)。

由 $d \mid 2$ 和因子的定义可知 d 等于 1 或 2。 □

7.17

证明： 若 G 不连通，则由定义知 $\kappa(G)=0$。由习题 7.18 第 (1) 小题结论可知，$n-2 \le \delta(G) < \dfrac{n}{2}$，从而有 $2n-4<n$，即 $n<4$。由于 G 不连通，所以 $p(G) \ge 2$。

反设 G 中没有孤立顶点，则 G 的每个连通支都将有 2 个或 2 个以上顶点，从而 $n \ge 2p(G) \ge 4$，这与 $n<4$ 矛盾。这就是说，G 中必有孤立顶点。从而 $\delta(G)=\kappa(G)=0$。命题成立。

若 G 为连通图，则由简单图性质知，$\delta(G) \le \Delta(G) \le n-1$。结合题设可知，$\delta(G)$ 只有两个可能的取值：$n-1$ 和 $n-2$。

当 $\delta(G)=n-1$ 时，易证 G 是完全图。由定义知，$\kappa(G)=\delta(G)=n-1$。命题成立。

当 $\delta(G)=n-2$ 时，由教材定理 7.10 知 $\kappa(G) \le \delta(G)=n-2$，又由教材定理 7.13 知 $\kappa(G) \ge 2\delta(G)-n+2=n-2$，综合即得 $\kappa(G)=\delta(G)=n-2$。命题依然成立。 □

7.18

(1)

证明： 注意到，对任意 $v \in V(G)$，v 所在的连通分支至少有 $d(v)+1 \ge \delta(G)+1$ 个顶点。若 G 不连通，则 G 至少有 $p(G)=k \ge 2$ 个连通分支 $V_1, V_2, \cdots, V_k$，从而

$$
\begin{aligned}
|V(G)| &= \sum_{i=1}^{k} |V_i| && \text{(连通分支是 } V(G) \text{ 的划分)}\\
&\ge k(\delta(G)+1) && (|V_i| \ge \delta(G)+1)\\
&\ge k(\frac{n}{2}+1) && \text{(题设)}\\
&\ge 2(\frac{n}{2}+1) && (k \ge 2\text{、}\frac{n}{2}+1 \ge 0)\\
&= n+2 && \text{(乘法分配律)}\\
&> n
\end{aligned}
$$

矛盾。从而必有 $k=1$，G 是连通图。 □

(2)

证明： 设 V_1 是 G 的最小点割集，记 $t=|V_1|$。

注意到，由于 G 是简单图，所以从 G 中每删去一个顶点，最多使 G 中剩余各顶点的度数减 1。从而

$$\delta(G-V_1) \ge \delta(G) - |V_1| \ge \frac{n+k-1}{2} - t$$

另一方面，由 $G-V_1$ 不连通和第 (1) 小题结论应有

$$\delta(G-V_1) < \frac{|V(G-V_1)|}{2} = \frac{n-t}{2}$$

综合两式可得：

$$\frac{n+k-1}{2} - t < \frac{n-t}{2}$$

即，$t > k-1$，$t \ge k$。由定义知，G 是 k-连通图。 □