相同的。由“阶”的定义知，$|b^{-1}ab| = |a|$。 □

(2)
证明： 由归纳法易证：对群中任意元素 $a, b \in G$，有 $(ab)^k a = a(ba)^k, \forall k \in \mathbb{Z}$。

从而，$\forall k \in \mathbb{Z}$，

$$
\begin{aligned}
& (ab)^k = e \\
\iff & (ab)^k a = a && \text{(代入规则、消去律)} \\
\iff & a(ba)^k = a && ((ab)^k a = a(ba)^k) \\
\iff & (ba)^k = e && \text{(代入规则、消去律)}
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\{k \mid k \in \mathbb{Z}^+ \wedge (ab)^k = e\} = \{k \mid k \in \mathbb{Z}^+ \wedge (ba)^k = e\}$，从而它们的最小元也是相同的。由“阶”的定义知，$|ab| = |ba|$。 □

(3) 利用第 2 小题结论立即得证。

17.10
证明： 设 $|G| = 2k$。作图 $H = \langle V, E\rangle$，其中 $V = G$，为 G 中所有元素，令 $E = \{(x, y) \mid x, y \in G \wedge xy = e\}$。由逆元的唯一性知，$\forall x \in G$，存在唯一的 y，使 $(x, y) \in E$。从而，对 $V = G$ 中的一切顶点 x，顶点的度 $d_H(x) = \begin{cases} 2, & \text{若} x^{-1} = x; \\ 1, & \text{否则.} \end{cases}$。注意到，$d_H(e) = 2$。若 G 中不存在二阶元，则 e 是 H 中唯一的 2 度顶点。从而 H 中有 $|G| - 1 = 2k - 1$ 个奇数度顶点。这与图论基本定理矛盾。 □

17.11
证明： 若不然，由习题 16.6 结论就有 $\forall a \in G, aa = a$。由消去律得：$\forall a \in G, a = e$。也就是说，$G = \{e\}$ 是平凡群。然而，平凡群是交换群。这与题设“G 是非交换群”矛盾。 □

17.12
证明： 由于 $(p, q) = 1$，故存在 $m, n \in \mathbb{Z}$，使得 $mp + nq = 1$，也即，$mp = -nq + 1$。从而有：

$$
\begin{aligned}
& u_1^{mp} = u_2^{mp} = v_1^{-nq} = v_2^{-nq} = e && (e^m = e, e^n = e) \\
\implies & u_1^{mp} v_1^{-nq} = u_2^{mp} v_2^{-nq} = e && (ee = e) \\
\iff & u_1 u_1^{-nq} v_1^{-nq} = u_2 u_2^{-nq} v_2^{-nq} = e && (mp = -nq + 1) \\
\iff & u_1 (u_1 v_1)^{-nq} = u_2 (u_2 v_2)^{-nq} && (u_1 v_1 = v_1 u_1 \text{、} u_2 v_2 = v_2 u_2) \\
\iff & u_1 = u_2 && (u_1 v_1 = u_2 v_2 \text{、消去律})
\end{aligned}
$$

□

17.13
(1) 构成群。由定义易于验证。
(2) 构成群。由定义易于验证。

(3) 不构成群。记 $S \subseteq M_n(\mathbb{R})$ 为全体行列式 ≥ 0 的矩阵集合，令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 和