1998 年计算机数学基础

三、

3. 首先计算邻接矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&1&1&1\\1&1&0&0\\2&1&2&0\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}4&3&3&2\\3&2&2&1\\2&1&2&0\\3&2&3&2\end{pmatrix}$$

(1) G 中共有 $\sum\limits_{1\le i,j\le 4} a_{ij}^{(3)}=35$ 条长度等于 3 的通路，$\sum\limits_{1\le i} a_{ii}^{(3)}=10$ 条长度等于 3 的回路。

(2) 从 v_1 到 v_3 共有 $a_{13}^{(1)}+a_{13}^{(2)}+a_{13}^{(3)}=6$ 条长度小于等于 3 的通路。

(3) v_1 到自身共有 $a_{11}^{(1)}+a_{11}^{(2)}+a_{11}^{(3)}=7$ 条长度小于等于 3 的回路。

4.

证明: 考虑 G 的对偶图 G^*。由于 $\lambda\ge 2$，所以 G 中有回路，从而 G 中至少有两个面，也即，$|G^*|\ge 2$。另一方面，因为 G 中任意两个面至多有一条共同边，所以 G^* 中任意两个顶点间至多有一条边，从而 G^* 是简单图。因此，要证原命题，只需证：任意 $n(n\ge 2)$ 阶简单图中必有度数相同的顶点(从而 G^* 中有度数相同的顶点 v_i,v_j，而 $\deg(R_i)=d(v_i)=d(v_j)=\deg(R_j)$，即得原题)。

设 G 为任意 $n(n\ge 2)$ 阶简单图。令 $G[V']$ 为 G 中顶点数最多的一个连通分支(若 G 是连通图，则 $V'=V(G)$)。分两种情况讨论：

情况一：若 $|V'|=1$，则 G 为零图。由 $n\ge 2$ 可知，存在 $v_i,v_j\in V(G)$，$v_i\ne v_j$，使得 $d(v_i)=d(v_j)=0$。命题成立。

情况二：若 $|V'|=k\ge 2$，则因为 $G[V']$ 为简单连通图，所以 $\forall v_i\in V'$ 有 $1\le d(v_i)\le k-1$。由于 V' 中有 k 个顶点，却仅有 $k-1$ 种可能的取值，由鸽巢原理知，必有 $v_i,v_j\in V'\subseteq V(G)$，$v_i\ne v_j$，使得 $d(v_i)=d(v_j)$。命题依然成立。 □

四、

1. $(A-C)\cup B=A\cup B$ 的充分必要条件是 $A\cap C\subseteq B$。

证明:

$$\begin{aligned}
&(A-C)\cup B=A\cup B\\
\iff&(A\cap\sim C)\cup B=A\cup B &&\text{(补交转换律)}\\
\iff&(A\cup B)\cap(\sim C\cup B)=A\cup B &&\text{(分配律)}\\
\iff&A\cup B\subseteq\sim C\cup B &&(*)
\end{aligned}$$