证明: φ 显然是函数。

由同余运算性质知，$\forall x, y \in \mathbb{Z}, (x+y) \bmod 2 = ((x \bmod 2) + (y \bmod 2)) \bmod 2$。从而有：

$\forall x \in \mathbb{Z}$，

$$\begin{aligned}
\varphi(\triangle x) &= \varphi(x+1) && (\triangle \text{ 定义}) \\
&= (x+1) \bmod 2 && (\varphi \text{ 定义}) \\
&= ((x \bmod 2) + (1 \bmod 2)) \bmod 2 && (\text{同余运算性质}) \\
&= ((x \bmod 2) + 1) \bmod 2 && (1 \bmod 2 = 1) \\
&= (\varphi(x) + 1) \bmod 2 && (\varphi \text{ 定义}) \\
&= \overline{\triangle}\varphi(x) && (\overline{\triangle} \text{ 定义})
\end{aligned}$$

这就证明了 φ 是 V_1 到 V_2 的同态。 □

(2) $\{\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$。

15.30

(1)

证明: φ 显然是单值的。$\forall x \in A_k$，由 A_k 定义知，$x \geq k$，由题设 $nk \geq m$，从而有 $nx \geq nk \geq m$。这就证明了 φ 确实是 A_k 到 A_m 的函数。

$\forall x, y \in A_k$，

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= n(x+y) && (\varphi \text{ 定义}) \\
&= nx + ny && (\text{乘法分配律}) \\
&= \varphi(x) + \varphi(y) && (\varphi \text{ 定义})
\end{aligned}$$

这就证明了 φ 是 V_1 到 V_2 的同态。 □

(2) 分两种情况讨论：

① $n \neq 0$。注意到，由乘法消去律知，此时的 φ 是单射。从而 $\forall x, y \in A_k, \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$。因此，$\sim = I_{A_k}$，$A_k/{\sim} = \{\{x\} \mid x \in A_k\}$。于是有：$V_1/{\sim} = \langle\{\{x\} \mid x \in A_k\}, \odot\rangle$，其中 $\odot$ 的定义为：$\{x\} \odot \{y\} = \{x+y\}, \forall x, y \in A_k$。

② $n = 0$。此时，$\varphi(x) = 0, \forall x \in A_k$。从而有 $\sim = E_{A_k}$，$A_k/{\sim} = \{A_k\}$。这时就有 $V_1/{\sim} = \langle\{A_k\}, \odot\rangle$，由于载体 $\{A_k\}$ 只有一个元素，$\odot$ 的运算表只能是：$A_k \odot A_k = A_k$。

15.31

(1) 共有 13 个自同态。

证明: 注意到，b 是幂等元，因此对 V 的任意自同态 φ，都有：

$$\begin{aligned}
\varphi(b) \circ \varphi(b) &= \varphi(b \circ b) && (\varphi \text{ 是同态}) \\
&= \varphi(b) && (b \circ b = b)
\end{aligned}$$

从而 $\varphi(b)$ 也是幂等元。而 A 中唯一的幂等元只有 b，所以对 V 的任何自同态 φ，必有 $\varphi(b) = b$。

同时，又有：

$$\begin{aligned}
\varphi(a) \circ b &= \varphi(a) \circ \varphi(b) && (\varphi(b) = b) \\
&= \varphi(a \circ b) && (\varphi \text{ 是同态}) \\
&= \varphi(a) && (a \circ b = a)
\end{aligned}$$

从而 $\varphi(a) \circ b = \varphi(a)$。而 A 中满足这一条件的元素只有 a 和 b。因而 $\varphi(a)$ 只能是 a 或 b。

下面分 $\varphi(a) = a$ 和 $\varphi(a) = b$ 两种情况讨论。