序关系

偏序

定义: 设$R \subseteq A \times A$ 且$A \neq \varnothing$, 若R是自反的, 反对称的, 传递的, 则称R为偏序关系.

通常用$\preccurlyeq$表示偏序关系,读作“小于等于”
$\langle x,y \rangle \in R \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow x \preccurlyeq y$

偏序集(poset): $\langle A,\preccurlyeq \rangle$, $\preccurlyeq$是A上偏序关系 注意:此处的符号“$\preccurlyeq$”表示序关系, 大小无关.

偏序集$\langle A,\leq \rangle$, $\langle A,\geq \rangle$, $\langle A,| \rangle$

偏序集$\langle A,\leq \rangle$, $\langle A,\geq \rangle$, $\langle A,| \rangle$
- $\varnothing \neq A \subseteq R$
  $\leq = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge x \leq y \}$,
  $\geq = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge x \geq y \}$,
- $\varnothing \neq A \subseteq Z^+ = \{ x \mid x \in Z^+ \wedge x>0 \}$
  $| = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge x|y \}$

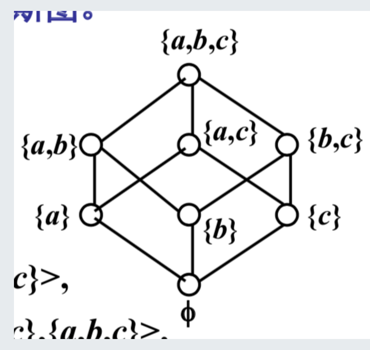
偏序集$\langle A,\subseteq \rangle$
- $B \subseteq P(A)$, $\subseteq = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in B \wedge x \subseteq y \}$
- 设$A=\{a,b\}$, $B_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$, $B_2=\{\{a\},\{a,b\}\}$,
  $B_3=P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,则
  $\subseteq_1 = I_{B_1} \cup \{ \langle \varnothing,\{a\} \rangle, \langle \varnothing,\{b\} \rangle \}$
  $\subseteq_2 = I_{B_2} \cup \{ \langle \{a\},\{a,b\} \rangle \}$
  $\subseteq_3 = I_{B_3} \cup \{ \langle \varnothing,\{a\} \rangle, \langle \varnothing,\{b\} \rangle, \langle \varnothing,\{a,b\} \rangle, \langle \{a\},\{a,b\} \rangle, \langle \{b\},\{a,b\} \rangle \}$

偏序集$\langle \pi,\preccurlyeq_{加细} \rangle$
- $A \neq \varnothing$, $\pi=\{x \mid x是A的划分\}$
  $\preccurlyeq_{加细} = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in \pi \wedge x是y的加细\}$
  设$A=\{a,b,c\}$, $A_1=\{\{a,b,c\}\}$, $A_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$,
  $A_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$, $A_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$, $A_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$
  取$\pi_1=\{A_1,A_2\}$, $\pi_2=\{A_2,A_3\}$, $\pi_3=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$
  $\preccurlyeq_1 = I_{\pi_1} \cup \{ \langle A_2,A_1 \rangle \}$, $\preccurlyeq_2 = I_{\pi_2}$,
  $\preccurlyeq_3 = I_{\pi_3} \cup \{ \langle A_2,A_1 \rangle, \langle A_3,A_1 \rangle, \langle A_4,A_1 \rangle, \langle A_5,A_1 \rangle, \langle A_5,A_2 \rangle, \langle A_5,A_3 \rangle, \langle A_5,A_4 \rangle \}$.

考点

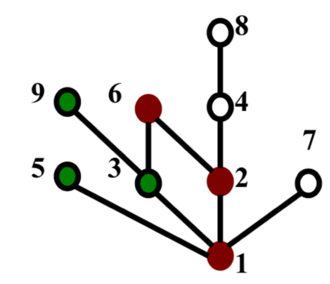
偏序关系中的特殊元素
- 最大元, 最小元
- 极大元, 极小元
- 上界, 下界
- 最小上界(上确界), 最大下界(下确界)

考试考点



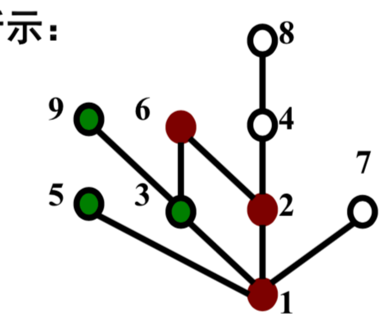
设$\langle A,\preccurlyeq \rangle$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$
B的最大元(maximum/greatest element):
y是B的最大元$\Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ B的最小元
(minimum/least element):
y是B的最小元$\Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$

解 $\langle A, | \rangle$的哈斯图如下图所示.
B_1的最大元是 6, 最小元是 1,
B_2的最大元: 无, 最小元: 无,
B_3的最大元: 无, 最小元是 1。



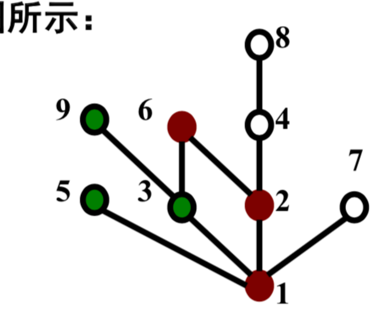
设$\langle A,\preccurlyeq \rangle$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$ B的极大元
(maximal element):
y是B的极大元$\Leftrightarrow \forall x(x \in B \wedge y \preccurlyeq x \rightarrow x=y)$
⇔¬$x(xÎBÙx≠yÙy£x)
B的极小元(minimal element):
y是B的极小元$\Leftrightarrow \forall x(x \in B \wedge x \preccurlyeq y \rightarrow x=y)$
⇔¬$x(xÎBÙx≠yÙx£y)

解 偏序集的哈斯图如右图所示:
B_1的极大元是 6;
B_1的极小元是 1;
B_2的极大元是 5, 9;
B_2的极小元: 3, 5;
B_3的极大元是 5,9,6,8,7;
B_3的极小元是 1



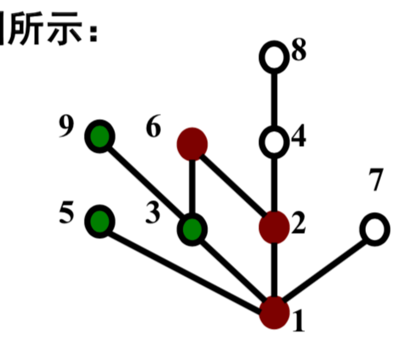
设$\langle A,\preccurlyeq \rangle$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$ B的上界
(upper bound):
y是B的上界$\Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ B的下界
(lower bound):
y是B的下界$\Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$

解 偏序集的哈斯图如右图所示:
B_1的上界是 4,8, 下界是 1;
B_2的上界: 无, 下界: 1,
B_3的上界: 无, 下界是 1。



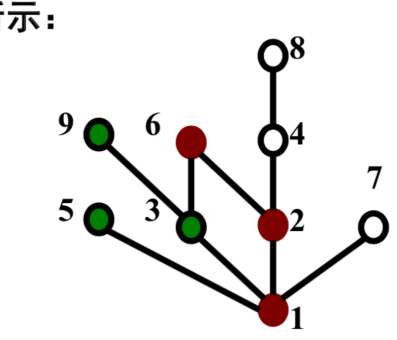
设$\langle A,\preccurlyeq \rangle$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$ B的上界
(upper bound):
y是B的上界$\Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ B的下界
(lower bound):
y是B的下界$\Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$

解 偏序集的哈斯图如右图所示:
B_1的上界是 4,8, 下界是 1;
B_2的上界: 无, 下界: 1,
B_3的上界: 无, 下界是 1。



设$\langle A,\preccurlyeq \rangle$为偏序集, $B \subseteq A$
B的最小上界(least upper bound):
设$C = \{ y \mid y是B的上界\}$, C的最小元称为B的最小上界, 或上确界.
B的最大下界(greatest lower bound): 设$C = \{ y \mid y是B的下界\}$,
C的最大元称为B的最大下界, 或下确界.

解 偏序集的哈斯图如右图所示:
B_1的最小上界是 4;
B_1的最大下界是 1,
B_2的最小上界: 无,
B_2的最大下界: 1,
B_3的最小上界: 无,
B_3的最大下界是 1。



良序

定义: 设$\langle A,\prec \rangle$为拟全序集, 若A的任何非空子集B均有最小元,则称$\prec$为良序关系, $\langle A,\prec \rangle$为良序集.
例: $\langle N,\lt \rangle$是良序集, $\langle Z,\lt \rangle$不是良序集
良序原理(well-ordering principle):
每一个集合都可以良序化(建立良序关系). 良序原理等价于选择公理.
良序集可做超限(transfinite)归纳证明.

良序归纳法则(Principle of well-ordered induction) 假设A是良序集
归纳步骤: 对所有的$y \in A$, 如果对任意$x \in A$且$x \prec y$, $P(x)$成立, 那么$P(y)$成立。

线序

定义: 若偏序集$\langle A,\preccurlyeq \rangle$满足 $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \rightarrow x与y可比)$
则称$\preccurlyeq$为全序关系, 称$\langle A,\preccurlyeq \rangle$为全序集 全序关系亦称线序(linear order)关系 例: $\langle A,\leq \rangle$, $\langle A,\geq \rangle$

自然数集合

拟序

- 拟序关系: 设$R \subseteq A \times A$ 且$A \neq \varnothing$, 若R是反自反的, 传递的, 则称R为拟序关系.

通常用$\prec$表示拟序关系(对比:“严格小于”).
- 反自反性与传递性蕴涵了反对称性, 因此拟序关系是反自反的、反对称的和传递的
- 拟序集: $\langle A,\prec \rangle$, $\prec$是A上拟序关系
- 例子: 设$\varnothing \neq A \subseteq R$, $\varnothing \neq B \subseteq Z_+$
  $\langle A,\lt \rangle$, $\langle A,\gt \rangle$, $\langle B,|' \rangle$, $\langle A,\subset \rangle$
  $|' = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in B \wedge x|y \wedge x \neq y\}$

偏序关系减去恒等关系

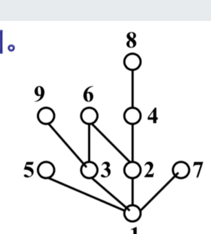
哈斯图

哈斯图(Hasse diagram)

(1) 省去关系图中的每个顶点处的环;

(2)若$x \prec y$且y覆盖x,代表x的顶点画在代表y的顶点下方,并 且在x与y之间画无向边;若$x \prec y$且y不覆盖x, 则省略掉x与 y之间的边.

例2.16 画出下列偏序关系的哈斯图。
(1) $\langle \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}, | \rangle$
解 (1) 偏序集的覆盖为:
$\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,5 \rangle, \langle 1,7 \rangle, \langle 2,4 \rangle,$
$\langle 2,6 \rangle, \langle 3,6 \rangle, \langle 3,9 \rangle, \langle 4,8 \rangle$
因此其哈斯图如右图所示.



注意: 哈斯图中边的条数=覆盖中有序对的个数.

在同一层次不可比

链

设$\langle A,\preccurlyeq \rangle$为偏序集, $B \subseteq A$, 链(chain): B是A中的链
$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in B \wedge y \in B \rightarrow x与y可比)$ $|B|$称为链的长度
反链(antichain): B是A中的反链
$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in B \wedge y \in B \wedge x \neq y \rightarrow x与y不可比)$
$|B|$称为反链的长度

定理2.31: 设$\langle A,\preccurlyeq \rangle$为偏序集, A中最长链的长度为n, 则
(1) A中存在极大元
(2) A存在包含n个划分块的划分, 每个划分块都是反链(即A划分成n个互不相交的反链)

推论: 设$\langle A,\preccurlyeq \rangle$为偏序集, 若$|A|=mn+1$,则$A$中要么存在 长度为$m+1$的反链, 要么存在长度为$n+1$的链.