数理逻辑部分课后习题答案

第1章-1

1.将下列命题符号化

(1) 我看到的既不是小张也不是小王。

(2) 他生于1963年或1964年。

(3) 只要下雨我就带伞

(4) 只有下雨我才带伞

(5) 除非天气好，否则我是不会出去的。

第1章-1

解 （1）p：我看到的是小张，q:我看到的是小王

命题符号化为：$\neg p \wedge \neg q$

（2）p：他生于1963年，q:他生于1964年

命题符号化为：$p \vee q$ 或者 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

（3）p：下雨，q:我带伞。命题符号化为：$p \rightarrow q$

（4）p,q同上。命题符号化为： $q \rightarrow p$

（5）p：天气好，q：我出去。命题符号化为： $q \rightarrow p$

第1章-2

2. 下列句子中哪些是命题?

(1)中国有四大发明.

(2)3是素数或4是素数.

(3)$2x+3<5$.

(4)这里的风景多美啊!

(5)请保持安静!

(6)2018年元旦下大雪.

解 (1)(2)(6) 是命题.

第1章-3

3. 用真值表判断下列公式的类型

(1) $p \to (p \vee q \vee r)$

(2) $\neg(q \to r) \wedge r$

(3) $(p \to \neg p) \to \neg q$

(4) $(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

第1章-3

p	q	r	$p\to(p\vee q\vee r)$	$\neg(q\to r)\wedge r$	$(p\to\neg p)\to\neg q$	$(p\wedge r)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0

显然（1）是重言式，（2）是矛盾式，（3）、（4）是可满足式。

第1章-4

4. 在什么情况下，下面一段论述是真的：“说小王不会唱歌或小李不会跳舞是正确的，而说如果小王会唱歌，小李就会跳舞是不正确的。”

解 先找出原子命题.

设p:小王会唱歌，q:小李会跳舞，

符号化为$(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg(p\to q)$

令$(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg(p\to q)$为真,因此$(\neg p\vee\neg q)$为真和$(p\to q)$为假，所以满足条件的$p,q$的取值为1,0，显然在“小王会唱歌，而小李不会跳舞”情况下，论述是真的。

第1章22

22.已知公式$\neg(q\to p)\wedge p$是矛盾式，求公式$\neg(q\to p)\wedge p\wedge\neg r$的成真和成假赋值.

解：$\because$ $\neg(q\to p)\wedge p$是矛盾式 $\therefore$ $\neg(q\to p)\wedge p\wedge\neg r$也是矛盾式。

由此可得：该式无成真赋值。而成假赋值为：

000,001,010,011,100,101,110,111

第1章24

24.已知$(p\to(p\vee q))\wedge((p\wedge q)\to p)$ 是重言式，试判断公式$p\to(p\vee q)$ 及$(p\wedge q)\to p$的类型.

解：∵ $(p\to(p\vee q))\wedge((p\wedge q)\to p)$是重言式，而要使该式为重言式，其成真赋值只有11， ∴ $p\to(p\vee q)$ 及 $(p\wedge q)\to p$都是重言式.

习题2：3

3. 解

（1）$\neg(p\wedge q\to q)\Leftrightarrow\neg(\neg(p\wedge q)\vee q)\Leftrightarrow p\wedge q\wedge\neg q\Leftrightarrow 0$,是矛盾式

（2）$(p\to(p\vee q))\vee(p\to r)\Leftrightarrow(\neg p\vee p\vee q)\vee(p\to r)\Leftrightarrow 1\vee(p\to r)\Leftrightarrow 1$

是重言式。

（3）$(p\vee q)\to(p\wedge r)\Leftrightarrow\neg(p\vee q)\vee(p\wedge r)\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge r)$,可满足式，其真值表如下,成真赋值有000,001,101,111.

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \to (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

习题2：4

4. 证明

（1） $(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q) \Leftrightarrow p\wedge(q\vee\neg q) \Leftrightarrow p\wedge 1 \Leftrightarrow p$

（2） $(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r) \Leftrightarrow \neg p\vee(q\wedge r) \Leftrightarrow p\rightarrow(q\wedge r)$

（3） $\neg(p\leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)) \Leftrightarrow \neg(p\rightarrow q)\vee\neg(q\rightarrow p)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee p) \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q) \Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

（4） $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q) \Leftrightarrow (p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg q\vee q)$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

习题2：8（3）

8.解

（3） $\neg(r\to q)\wedge p\wedge q\Leftrightarrow\neg(\neg r\vee q)\wedge p\wedge q\Leftrightarrow(r\wedge\neg q)\wedge p\wedge q\Leftrightarrow 0$

是矛盾式，主合取范式由所有极大项构成，

$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

$\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

主析取范式为0.

习题2：12

12. 解 A的主析取范式由成真赋值对应的极小项的析取构成，因此，

A的主析取范式$\Leftrightarrow m_0 \wedge m_3 \wedge m_6 \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

A的所有成假赋值为001,010,100,101,111，对应的大项的合取构成主合取范式,因此

A的主合取范式$\Leftrightarrow M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_7$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

习题2：27（a）

27. 解

先符号化：

(1) $\neg p\wedge\neg q\wedge r$

(2) $p\wedge\neg q\wedge\neg r$

(3) $\neg p\wedge q\wedge r$

(4) $p\wedge q\wedge\neg r$

F的主析取范式为$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_4\vee m_3\vee m_6$$

习题3：6(1)

6. 解

设p:今天是星期一，q:明天是星期二，r:明天是星期三

（1）推理的形式结构为$(p\to r)\wedge p\to r$,显然,这是假言推理,所以推理正确.

方法1：等值演算法

$$(p\to r)\wedge p\to r \Leftrightarrow \neg((\neg p\vee r)\wedge p)\vee r \Leftrightarrow ((p\wedge\neg r)\vee\neg p)\vee r \Leftrightarrow \neg r\vee\neg p\vee r \Leftrightarrow 1$$

方法2：真值表

p	q	r	$p \to r$	$(p \to r) \wedge p \to r$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

习题3：6(4)

6. 解

设p:今天是星期一，q:明天是星期二，r:明天是星期三

（4）推理的形式结构为$(p\rightarrow q)\wedge\neg p\rightarrow\neg q$.

令$(p\rightarrow q)\wedge\neg p$为1,∴ $p\rightarrow q$为1, p为0, ∴ q可能为0也可能为1,当q为1时, $(p\rightarrow q)\wedge\neg p\rightarrow\neg q$为假,因此推理不成立。

方法1：等值演算法

$(p\rightarrow q)\wedge\neg p\rightarrow\neg q \Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge\neg p)\vee\neg q \Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee p)\vee\neg q$

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee\neg q)\vee p \Leftrightarrow \neg q\vee p$，因此该公式是非永真的可满足式.

方法2：真值表（略）

习题3：6(5)

6. 解

设p:今天是星期一，q:明天是星期二，r:明天是星期三

（5）推理的形式结构为$(p\to(q\vee r))\wedge p\to q$.

令$(p\to(q\vee r))\wedge p$为1,$\therefore$ $p\to(q\vee r)$为1, p为1, $\therefore$ $q\vee r$为1, $\therefore$ $q\vee r$至少一个为1, 显然q既可为1，也可为0，因此推理不成立。

方法1：主范式

$(p\to(q\vee r))\wedge p\to q\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee(q\vee r))\wedge p)\vee q \Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge\neg r))\vee\neg p\vee q$

$\neg p \Leftrightarrow \neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge(r\vee\neg r) \Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$
$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r) \Leftrightarrow m_3\vee m_2\vee m_1\vee m_0$

习题3：6(5)

$q \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge q \wedge (r \vee \neg r) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow m_3 \vee m_2 \vee m_7 \vee m_6$

$(p \to (q \vee r)) \wedge p \to q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$

成假赋值有101,因此不是重言式,推理不正确.

方法2：真值表（略）

习题3：8（2）

8. 解

原子命题符号化.设p:天气热,q:我去游泳,r:我有时间.

（2）符号化：

前提：$p\rightarrow q, \neg q$

有效结论：$\neg p$

无效结论：p

习题3：8（3）

8. 解

原子命题符号化.设p:天气热,q:我去游泳,r:我有时间.

（3）符号化：

前提：$q \rightarrow (p \wedge r)$, $\neg p \vee \neg r$

有效结论：$\neg q$

无效结论：q

习题3：9

9. 解

原子命题符号化.设p:a是奇数,q:a能被2整除,r:a是偶数.

推理的形式化结构：$((p\rightarrow\neg q)\wedge(r\rightarrow q))\rightarrow(r\rightarrow\neg p)$

等值演算：

$$((p\rightarrow\neg q)\wedge(r\rightarrow q))\rightarrow(r\rightarrow\neg p) \Leftrightarrow \neg((\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg r\vee q))\vee(\neg r\vee\neg p)$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(r\wedge\neg q)\vee\neg r\vee\neg p \Leftrightarrow(p\vee r\vee\neg r\vee\neg p)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r\vee\neg p)$$

$$\wedge(q\vee r\vee\neg r\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg q\vee\neg r\vee\neg p) \Leftrightarrow 1$$

习题3：9

主析取范式：

$((p\rightarrow\neg \mathrm{q})\wedge(r\rightarrow q))\rightarrow(r\rightarrow\neg p) \Leftrightarrow \neg((\neg p\vee\neg \mathrm{q})\wedge(\neg r\vee q))\vee(\neg r\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow(p\wedge \mathrm{q})\vee(r\wedge\neg q)\vee\neg r\vee\neg p$

$p\wedge q\Leftrightarrow p\wedge q\wedge(r\vee\neg r)\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r) \Leftrightarrow m_7\vee m_6$

$r\wedge\neg q\Leftrightarrow(p\vee\neg p)\wedge r\wedge\neg q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r) \Leftrightarrow m_5\vee m_1$

$\neg r \Leftrightarrow (p\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg q)\wedge\neg r \Leftrightarrow(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge \neg q\wedge\neg r) \Leftrightarrow m_7\vee m_4\vee m_2\vee m_0$

$\neg p \Leftrightarrow \neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge(r\vee\neg r) \Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r) \vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r) \Leftrightarrow m_3\vee m_2\vee m_1\vee m_0$

主析取范式为$m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$((p\to\neg q)\wedge(r\to q))\to(r\to\neg p)$的真值表

p q r	$(p\to\neg q)\wedge(r\to q)$	$r\to\neg p$	A
0 0 0	1	1	1
0 0 1	0	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	1	1
1 0 1	0	0	1
1 1 0	0	1	1
1 1 1	0	0	1

习题3：14（4）

（4）前提：$q \to p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$

结论：$p \wedge q$

证明

① $q \leftrightarrow s$ 前提引入

② $(q \to s) \wedge (s \to q)$ ①置换

③ $s \to q$ ②化简

④ $q \to p$ 前提引入

⑤ $s \to p$ ③④假言三段论

⑥ $s \leftrightarrow t$ 前提引入

⑦ $(s\to t)\wedge(t\to s)$	⑥置换
⑧ $t\to s$	⑦化简
⑨ $t\to p$	⑤⑧假言三段论
⑩ $t\wedge r$	前提引入
⑪ t	⑩化简
⑫ p	⑨ ⑪假言推理
⑬ s	⑧ ⑪假言推理
⑭ q	③ ⑬假言推理
⑮ $p\wedge q$	⑫⑭合取

习题3：14（6）

（6）前提：$\neg p\vee r, \neg q\vee s, p\wedge q$

结论：$t\rightarrow r\wedge s$

证明

① $p\wedge q$	前提引入	⑦ $\neg q\vee s$	前提引入
② p	① 化简	⑧ $q\rightarrow s$	⑦置换
③ q	① 化简	⑨ s	③⑧假言推理
④ $\neg p\vee r$	前提引入	⑩ $r\wedge s$	⑥⑨合取
⑤ $p\rightarrow r$	④置换	⑪ $\neg t\vee(r\wedge s)$	⑩附加
⑥ r	②⑤假言推理	⑫ $t\rightarrow r\wedge s$	⑪置换

习题3：15（1）

（1）前提：$p\rightarrow(q\rightarrow r), s\rightarrow p, q$

结论：$s\rightarrow r$

证明

① s	附加前提引入
② $s\rightarrow p$	前提引入
③ p	①②假言推理
④ $p\rightarrow(q\rightarrow r)$	前提引入
⑤ $q\rightarrow r$	③④假言推理
⑥ q	前提引入
⑦ r	⑤⑥假言推理

习题3：16（2）

（2）前提：$p\vee q, p\to r, q\to s$

结论：$r\vee s$

证明

① $\neg(r\vee s)$	附加前提引入
② $\neg r\wedge\neg s$	①置换
③ $\neg r$	②化简
④ $\neg s$	②化简
⑤ $q\to s$	前提引入
⑥ $\neg q$	④⑤拒取式
⑦ $p\vee q$	前提引入
⑧ p	⑥⑦析取三段论
⑨ $p\to r$	条件引入
⑩ r	⑧⑨假言推理
⑪ $\neg r\wedge r$	③⑩合取

习题3：17

17. 解

找出原子命题.设p:A曾到过受害者房间,q:A在11点之前离开受害者房间, r:A是谋杀犯, s:看门人看见A.

推理形式结构：

前提：$p \wedge \neg q \rightarrow r$, p, $q \rightarrow s$, $\neg s$

结论：r

证明

前提：$p\wedge\neg q\to r, p, q\to s, \neg s$

结论：r

证明

① $\neg s$	前提引入
② $q\to s$	前提引入
③ $\neg q$	①②拒取式
④ p	前提引入
⑤ $p\wedge\neg q$	③④合取
⑥ $p\wedge\neg q\to r$	前提引入
⑦ r	⑤⑥假言推理

习题4：4

4.解

（1）设F(x):x是有理数,G(x):x是分数,H(x,y):x能表示成y,

符号化为： $\neg\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow\neg H(x,y))$

或者

设F(x):x是有理数, G(x):x是能表示成分数

符号化为： $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ **或** $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

习题4：4

4.解

（2）设F(x):x是在北京买菜的人,G(x):x是外地人

符号化为： $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ **或** $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

（3）设F(x):x是乌鸦, G(x):x是黑色的

符号化为： $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

（4）设F(x):x是人, G(x):x天天锻炼身体

符号化为： $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

习题4：5

5.解

（1）设$F(x)$:x是火车,$G(x)$:x是轮船，$H(x,y)$:x比y快

符号化为： $\forall x(F(x)\rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow H(x,y)))$

或 $\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$

（2）设$F(x)$:x是火车,$G(x)$:x是汽车，$H(x,y)$:x比y快

符号化为： $\exists x(F(x)\wedge \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$ 或$\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y) \wedge H(x,y))$

习题4：5

（3）设$F(x)$:x是火车,$G(x)$:x是汽车，$H(x,y)$:x比y快

符号化为： $\neg\exists x(G(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow H(x,y)))$

或 $\forall x(G(x)\rightarrow\exists y(F(y)\wedge\neg H(x,y)))$

（4）设$F(x)$:x是火车,$G(x)$:x是汽车，$H(x,y)$:x比y慢

符号化为： $\neg\forall x(G(x)\rightarrow\forall y(F(y)\rightarrow H(x,y)))$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

习题4：8

8.解

（1）$\forall x(F(x) \to G(x,y))$

量词$\forall$的指导变元是x,辖域是$(F(x) \to G(x,y))$, x都是约束出现,y都是自由出现.

（2）$\forall xF(x,y) \to \exists yG(x,y)$

量词$\forall$的指导变元是x,辖域是$F(x,y)$,量词$\exists$的指导变元是y,辖域是$G(x,y)$,F(x,y)中的x是约束出现,y是自由出现,$G(x,y)$中的x是自由出现,y是约束出现.

习题4：8

（3）$\forall x \exists y\, (F(x,y) \wedge G(y,z)) \vee \exists x\, H(x,y,z)$

量词$\forall$的指导变元是x,辖域是$(F(x,y) \wedge G(y,z))$, 第1个$\exists$量词的指导变元是y,辖域$(F(x,y) \wedge G(y,z))$,其中的x,y都是约束出现, z是自由出现.第2个$\exists$量词的指导变元是x,辖域是$H(x,y,z)$,其中x是约束出现,y,z是自由出现.

习题4：9

9.解

（1）$\forall x(G(x,y) \to \exists yF(x,y))$ 解释为$\forall x(x<-1) \to \exists y(x=y))$,即对于任意的实数$x$,若$x<-1$,则存在实数使得$x=y$.真值为1.

（2）$\forall y(F(f(x,y),a) \to \forall xG(x,y))$ 解释为$\forall y(1-y=0 \to \forall x(x<y))$,即对于任意实数$y$,如果y=1,则对任意实数$x$,$x<y$.真值为0

（3）$\exists xG(x,y) \to \forall yF(f(x,y),a)$解释为$\exists x(x<-1) \to \forall y(1-y=0)$, 即如果存在实数$x$使得$x<-1$,则对于任意实数$y$有$y=1$.真值为0

（4） $\forall yG(f(x,y),a) \to \exists xF(x,y)$解释为$\forall y(1-y<0) \to \exists x(x=-1)$,即如果对于任意实数$y$有$y=1$,则存在实数$x$有$x=-1$.真值为1.

习题4：12

12. 解

（1）$F(x)\to\forall xF(x)$

取解释I:个体域是自然数集合N,F(x):x<2,$\sigma_1(x)$=-1, $\sigma_2(x)$=3,在I和σ_1下命题真值为0,在I和σ_2下命题真值为1,即该公式是非重言式的可满足式.

（分析：设$\forall xF(x)$为假,则有部分或全部x使$F(x)$为假,当部分x使$F(x)$为假时,当自由出现的x使$F(x)$为假时,公式真值是1,否则是假）

（2）$\exists x\mathrm{F}(x)\to F(x)$

取解释I、 σ_1、σ_2与（1）相同, I和σ_1下命题真值为1,在I和σ_2下命题真值为0,即该公式是非重言式的可满足式.（分析与上同）

习题4：12

12. 解

（3）$\forall x(F(x)\to G(x))\to(\forall xF(x)\to\forall xG(x))$

令$\forall x(F(x)\to G(x))$为1,任意的x都使$F(x)\to G(x)$为真,当存在x使$F(x)$为假时, $\forall xF(x)$为假,从而$\forall xF(x)\to\forall xG(x)$为真.当所有$x$使$F(x)$为真时, $\forall xF(x)$为真,由任意的x都使$F(x)\to G(x)$为真可知, $\forall xG(x)$为,因而$\forall xF(x)\to\forall xG(x)$为真.综上所述,公式是重言式.

习题4：12

12. 解

（4） $(\forall xF(x)\to\forall xG(x))\to\forall x(F(x)\to G(x))$

令$\forall x(F(x)\to G(x))$为0,即存在x使$F(x)\to G(x)$为假,设满足条件的x=a,则F(a)=1,G(a)=0,显然$\forall xG(x)$为0.但$\forall xF(x)$既有可能为1也可能为0,因此公式是非重言式的可满足式.

取解释I_1:个体域是自然数集合N,F(x):x是偶数,G(x):x≥0.真值为1.

解释I_2: G(x):x>2,其余相同,在此解释下真值为0.

习题5--5

5. 解

（1）$\forall x\exists yF(x,y)\Leftrightarrow\exists yF(3,y)\wedge\exists yF(4,y)$

$\Leftrightarrow(F(3,3)\vee F(3,4))\wedge(F(4,3)\vee F(4,4))\Leftrightarrow(0\vee 1)\wedge(1\vee 0)\Leftrightarrow 1$

（2）$\exists x\forall yF(x,y)\Leftrightarrow\forall yF(3,y)\vee\forall yF(4,y)$

$\Leftrightarrow(F(3,3)\wedge F(3,4))\vee(F(4,3)\wedge F(4,4))\Leftrightarrow(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\Leftrightarrow 0$

（3） $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$

$\Leftrightarrow\forall y(F(3,y)\rightarrow F(f(3),f(y)))\wedge\forall y(F(4,y)\rightarrow F(f(4),f(y)))$

$\Leftrightarrow(F(3,3)\rightarrow F(f(3),f(3)))\wedge(F(3,4)\rightarrow F(f(3),f(4)))$

$\wedge(F(4,3)\rightarrow F(f(4),f(3)))\wedge(F(4,4)\rightarrow F(f(4),f(4)))$

$\Leftrightarrow(0\rightarrow 0)\wedge(1\rightarrow 1)\wedge(1\rightarrow 1)\wedge(0\rightarrow 0)\Leftrightarrow 1$

习题5--5

5. 解

（1）$\forall x\exists yF(x,y)\Leftrightarrow\exists yF(3,y)\wedge\exists yF(4,y)$

$\Leftrightarrow(F(3,3)\vee F(3,4))\wedge(F(4,3)\vee F(4,4))\Leftrightarrow(0\vee1)\wedge(1\vee0)\Leftrightarrow1$

（2）$\exists x\forall yF(x,y)\Leftrightarrow\forall yF(3,y)\vee\forall yF(4,y)$

$\Leftrightarrow(F(3,3)\wedge F(3,4))\vee(F(4,3)\wedge F(4,4))\Leftrightarrow(0\wedge1)\vee(1\wedge0)\Leftrightarrow0$

（3） $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$

$\Leftrightarrow\forall y(F(3,y)\rightarrow F(f(3),f(y)))\wedge\forall y(F(4,y)\rightarrow F(f(4),f(y)))$

$\Leftrightarrow(F(3,3)\rightarrow F(f(3),f(3)))\wedge(F(3,4)\rightarrow F(f(3),f(4)))$

$\wedge(F(4,3)\rightarrow F(f(4),f(3)))\wedge(F(4,4)\rightarrow F(f(4),f(4)))$

$\Leftrightarrow(0\rightarrow0)\wedge(1\rightarrow1)\wedge(1\rightarrow1)\wedge(0\rightarrow0)\Leftrightarrow1$

习题5--7

7. 解

第一步丢掉了¬

第二步用错了等值式

$\forall x \exists y(F(x) \wedge (G(y) \rightarrow H(x,y))) \not\Leftrightarrow \forall x \exists y(F(x) \wedge G(y)) \rightarrow H(x,y))$

习题5--12

12. 解

（1）$\forall xF(x)\to\forall yG(x,y)\Leftrightarrow \forall zF(z)\to\forall yG(x,y)\Leftrightarrow\exists z\forall y(F(z)\to G(x,y))$

（2）$\forall x(F(x,y)\to\exists yG(x,y,z))\Leftrightarrow\forall x(F(x,y)\to\exists sG(x,s,z))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists s(F(x,y)\to G(x,s,z))$

（3）$\forall xF(x,y)\leftrightarrow\exists xG(x,y)\Leftrightarrow\forall xF(x,y)\leftrightarrow\exists zG(z,y)$

$\Leftrightarrow(\forall xF(x,y)\to\exists zG(z,y))\wedge(\exists zG(z,y)\to\forall xF(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists z(F(x,y)\to G(z,y))\wedge\forall z\forall x(G(z,y)\to F(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists z(F(x,y)\to G(z,y))\wedge\forall s\forall t(G(s,y)\to F(t,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists z\forall s\forall t((F(x,y)\to G(z,y))\wedge(G(s,y)\to F(t,y)))$

习题5--12

12. 解

（4）$\forall x_1(F(x_1)\rightarrow G(x_1,x_2))\rightarrow(\exists x_2H(x_2)\rightarrow\exists x_3L(x_2,x_3))$

$\Leftrightarrow\forall x_1(F(x_1)\rightarrow G(x_1,x_2))\rightarrow(\exists x_4H(x_4)\rightarrow\exists x_3L(x_2,x_3))$

$\Leftrightarrow\forall x_1(F(x_1)\rightarrow G(x_1,x_2))\rightarrow\forall x_4\exists x_3(H(x_4)\rightarrow L(x_2,x_3))$

$\Leftrightarrow\exists x_1\forall x_4\exists x_3((F(x_1)\rightarrow G(x_1,x_2))\rightarrow (H(x_4)\rightarrow L(x_2,x_3)))$

（5）$\exists x_1F(x_1,x_2)\rightarrow(F(x_1)\rightarrow\neg\exists x_2G(x_1,x_2))$

$\Leftrightarrow \exists y_1F(y_1,x_2)\rightarrow(F(x_1)\rightarrow\forall y_2\neg G(x_1,y_2))$

$\Leftrightarrow\forall y_1\forall y_2(F(y_1,x_2)\rightarrow (F(x_1)\rightarrow\neg G(x_1,y_2))$

习题5--15

15. 解

（1）前提：$\exists xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y)),\exists xF(x)$

结论：$\exists xR(x)$

① $\exists xF(x)$	前提引入
② $\exists xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$	前提引入
③ $\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$	①②假言推理
④ $(F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y)$	③ ∀-
⑤ $\exists xF(x)\vee\exists xG(x)$	④附加
⑥$\exists x(F(x)\vee G(x))$	⑤置换
⑦ $(F(y)\vee G(y))\rightarrow\exists xR(x)$	④ ∃+
⑧ $\exists xR(x)$	⑥⑦ ∃-

习题5--15

15. 解

（2）前提：$\forall x(F(x)\to(G(a)\wedge R(x))),\exists xF(x)$

结论：$\exists x(F(x)\wedge R(x))$

① $\exists xF(x)$	前提引入
② $\forall x(F(x)\to(G(a)\wedge R(x)))$	前提引入
③ $F(y)\to(G(a)\wedge R(y))$	② $\forall$-
④ $(F(y)\to G(a))\wedge(F(y)\to R(y))$	③ 置换
⑤ $F(y)\to R(y)$	④化简
⑥ $F(y)\to F(y)\wedge R(y)$	⑤置换
⑦ $F(y)\to \exists x(F(x)\wedge R(x))$	④ $\exists$+
⑧ $\exists x(F(x)\wedge R(x))$	①⑦ $\exists$-

习题5--15

15. 解

（3）前提：$\forall x(F(x)\vee G(x)), \neg\exists xG(x)$

结论：$\exists xF(x)$

① $\neg\exists xG(x)$	前提引入
② $\forall x\neg G(x)$	置换
③ $\neg G(x)$	② $\forall$-
④ $\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
⑤ $F(x)\vee G(x)$	④化简
⑥ $F(x)$	③ ⑤析取三段论
⑦ $\exists xF(x)$	⑥ $\exists$+

习题5--15

15. 解

（4）前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$, $\forall x(\neg G(x)\vee\neg R(x))$, $\forall xR(x)$

结论：$\forall xF(x)$

① $\forall xR(x)$	前提引入
② $\forall x(\neg G(x)\vee\neg R(x))$	前提引入
③ $R(x)$	① ∀-
④ $\neg G(x)\vee\neg R(x)$	② ∀-
⑤ $\neg G(x)$	③ ④析取三段论
⑥$\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
⑦ $F(x)\vee G(x)$	⑥ ∀-
⑧ $F(x)$	⑤ ⑦析取三段论
⑨$\forall xF(x)$	⑧ ∃+

习题5--25

25. 解

设$F(x)$:x是科学工作者,$G(x)$:x刻苦钻研,$R(x)$:x聪明,$H(x)$:x在事业中获得成功,a:王大海，推理形式化结构如下：

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $\forall x(G(x)\wedge R(x)\rightarrow H(x))$, $F(a)$,$R(a)$

结论：$H(a)$

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
② $\forall x(G(x)\wedge R(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
③ $F(a)\rightarrow G(a)$	① $\forall$-
④ $G(a)\wedge R(a)\rightarrow H(a)$	② $\forall$-
⑤ $F(a)$	前提引入
⑥ $G(a)$	③ ⑤假言推理
⑦ $R(a)$	前提引入
⑧ $G(a)\wedge R(a)$	⑥ ⑦合取
⑨$H(a)$	④ ⑧ 假言推理

①②③④⑤⑥⑦⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳ⓐ

习题5--17

17. 解

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x)), \forall x(H(x)\rightarrow G(x))$

结论：$\forall x(H(x)\rightarrow\neg F(x))$

① $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$	前提引入
② $\forall x(H(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
③ $F(y)\rightarrow\neg G(y)$	① $\forall$-
④ $H(y)\rightarrow G(y)$	② $\forall$-
⑤ $G(y)\rightarrow\neg F(y)$	③置换
⑥ $H(y)\rightarrow\neg F(y)$	④ ⑤假言三段论
⑦ $\forall x(H(x)\rightarrow\neg F(x))$	⑥ $\forall$+

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳ⓐ

习题5--17

20. 解

（1）前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$

结论：$\forall xF(x)\to\forall xG(x)$

① $\forall xF(x)$	附加前提引入
② $\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
③ $F(y)$	① $\forall$-
④ $F(y)\to G(y)$	② $\forall$-
⑤ $G(y)$	③ ④假言推理
⑥ $\forall xG(x)$	⑤ $\forall$+

习题5--17

20. 解

（2）前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$

结论：$\neg\forall xF(x)\rightarrow\exists xG(x)$

① $\neg\forall xF(x)$	附加前提引入
② $\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
③ $\exists x\neg F(x)$	① 置换
④ $F(y)\vee G(y)$	② $\forall$-
⑤ $\neg F(y)\rightarrow G(y)$	④置换
⑥ $\neg F(y)\rightarrow\exists xG(x)$	⑤ $\exists$+
⑦ $\exists xG(x)$	③ ⑥$\exists$-