$\square$

2.41

证明: 先证：R_3 是自反的。

$$\begin{aligned}
&\forall x, y \\
&\langle x, y\rangle \in A \times B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \wedge y \in B && \text{(卡氏积定义)} \\
\Longrightarrow\ & \langle x, x\rangle \in R_1 \wedge \langle y, y\rangle \in R_2 && (R_1, R_2 \text{ 是自反的}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \in R_3 && (R_3 \text{ 定义})
\end{aligned}$$

再证：R_3 是对称的。

$$\begin{aligned}
&\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \\
&\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in R_3 \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 && (R_3 \text{ 定义}) \\
\Longrightarrow\ & \langle x_2, x_1\rangle \in R_1 \wedge \langle y_2, y_1\rangle \in R_2 && (R_1, R_2 \text{ 是对称的}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_1, y_1\rangle\rangle \in R_3 && (R_3 \text{ 定义})
\end{aligned}$$

最后证：R_3 是传递的。

$$\begin{aligned}
&\forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \\
&\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in R_3 \wedge \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R_3 \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2 && (R_3 \text{ 定义}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2 && \text{(命题逻辑交换律)} \\
\Longrightarrow\ & \langle x_1, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_3\rangle \in R_2 && (R_1, R_2 \text{ 是传递的}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R_3 && (R_3 \text{ 定义})
\end{aligned}$$

故得，R_3 是等价关系。 $\square$

2.42 商集为二元集说明该关系对应的划分有两个划分块。这样的划分有 $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 2^3 - 1 = 7$ 个。找出对应的等价关系：

$R_1 = \{\langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, c\rangle\} \cup I_A$；
$R_2 = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, c\rangle\} \cup I_A$；
$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, d\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle\} \cup I_A$；
$R_4 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle\} \cup I_A$；
$R_5 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\} \cup I_A$；
$R_6 = \{\langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, d\rangle, \langle d, b\rangle\} \cup I_A$；
$R_7 = \{\langle a, d\rangle, \langle d, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\} \cup I_A$。

2.43

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix}5\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}5\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}5\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}5\\4\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}5\\5\end{Bmatrix} &= 1 + (2^4 - 1) + \left(3\begin{Bmatrix}4\\3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix}\right) + C_5^2 + 1 \\
&= 1 + (2^4 - 1) + (3 * C_4^2 + 2^3 - 1) + C_5^2 + 1 \\
&= 1 + 2^4 - 1 + 3 * 6 + 8 - 1 + 10 + 1 \\
&= 52
\end{aligned}$$

2.44