第一编 集合论
第3章习题分析

中国海洋大学 计算机系

Exercises 1.

解答 属于$A \nrightarrow B$的有：R_2, R_3, R_6, R_7

属于$A \to B$的有：R_2，R_6

Exercises 2.

2.设$f,g\in$ A→B,且$f\cap g\neq\varnothing$, $f\cap g$,$f\cup g$还是函数吗？如果是函数，还属于A→B吗？

解：$f\cap g$是函数,不一定属于$A\rightarrow B$, $f\cup g$不一定是函数。

先证明$f\cap g$是函数.

任意$x\in$ A,设存在$y_1\in$ B,$y_2\in$ B使得$y_1=f\cap g(x)$, $y_2=f\cap g\ (x)$,

$\Rightarrow\langle x,y_1\rangle\in f\cap g\wedge\langle x,y_2\rangle\in f\cap g$

$\Rightarrow\langle x,y_1\rangle\in f\wedge\langle x,y_1\rangle\in g\wedge\langle x,y_2\rangle\in f\wedge\langle x,y_2\rangle\in g$

$\Rightarrow y_1=y_2$

所以$f\cap g$是单值的,是函数. $f\cap g$不一定属于$A\rightarrow B$.

反例

比如：

$A=\{a,b,c\},B=\{1,2,3\}$

$f=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\},g=\{<a,1>,<b,3>,<c,2>\}$

$f\cap g=\{<a,1>,<c,2>\}$是函数，但不属于$A\to B$。

$f\cup g=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>,<b,3>\}$不是函数。

Exercises 3

- 解答

只是单射函数：(2) ((1), (6) (10))

只是满射函数：(4) (5) (9) ((1), (6) (10))

只是双射函数：(1), (6) (10)

Exercises 11.

- 设$f:A\to B$,定义$g:B\to P(A)$如下: 对于任意的$b\in B$, $g(b)=\{x|x\in \mathrm{A} \wedge f(x)=b\}$,试证明当$f$为满射时,$g$为单射.
- 解：因为 f 满射，$\forall b\in B$，$\exists x\in A$，$f(x)=b$,

设$\forall\ b_1,b_2\in \mathrm{B}$，令$g(b_1)=g(b_2)$,

$$g(b_1)=\{x|\ x\in A\wedge f(x)=b_1\}$$

$$g(b_2)=\{x|\ x\in A\wedge f(x)=b_2\},$$

因为$\mathrm{g}(b_1)=\mathrm{g}(b_2)$, f满射，则$\mathrm{g}(b_1)=\mathrm{g}(b_2)\neq\varnothing$,

$\forall x,(x\in \mathrm{g}(b_1)\Leftrightarrow x\in \mathrm{g}(b_2)\Rightarrow f(x)=b_1\wedge f(x)=b_2\Rightarrow b_1=b_2$

故 g为单射.

Exercise 12.

证：先证f,g都是满射.

任取$y\in R$,$<y,0>\in R\times R$, 使得$f(<y,0>)=y$(或者$<<y,0>,y>\in f$),

因此f是满射.

任取$y\in R$,$<y,1>\in R\times R$, 使得$g(<y,1>)=y$(或者$<<y,1>,y>\in g$), 因此g是满射.

$\forall <x,y>\in R\times R$,且$x\neq y$,都有$f(<x,y>)=f(<y,x>)$和$g(<x,y>)=g(<y,x>)$, 因此$f,g$都不是单射

(或者:$<<x,0>,x>\in f$, $<<x-1,1>,x>\in f$; $<<x,1>,x>\in g$, $<<1,x>,x>\in g$)

比如：

$f(<2,3>)=f(<1,4>)=f<3,2>=f<4,1>=5$

$g(<4,4>)=g(<2,8>)=16$

14.

证明 先证明S具有自反性.

任意$f\in A$, $\forall x\in[0,1]$,$f(x)-f(x)=0$,因此<f,f>∈S.

再证S具有反对称性.

设任意$<f,g>\in S$, $<g,f>\in S$. 则由S的定义知, $\forall x\in[0,1]$,$f(x)-g(x)\ge 0$且$g(x)-f(x)\ge 0$,

即$f(x)\ge g(x)$且$g(x)\ge f(x)$.

所以$\forall x\in[0,1]$, $f(x)=g(x)$,即$f=g$,所以S具有反对称性.

最后证S具有传递性.

设任意$<f,g>\in S$, $<g,h>\in S$. 则由S的定义知, $\forall x\in[0,1]$,$f(x)-g(x)\ge 0$且$g(x)-h(x)\ge 0$,所以$f(x)-h(x)\ge 0$.

即$<f,h>\in S$,S具有传递性.

综上所述,S是A上的偏序关系

下面说明S不是全序关系.

令f:[0,1]→R, $f(x)=x$, g:[0,1]→R, $g(x)=1-x$;

$f(0)-g(0)=-1<0$

$f(1)-g(1)=1>0$

因此，$\forall x\in[0,1]$，$f(x)-g(x)$既有可能大于0，也可能小于0，

所以f和g不可比。

15.

15. 由 $f: A\to B$ 导出的A上的等价关系定义为

$$R = \{\langle x,y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge f(x)=f(y)\},$$

设$f_1, f_2, f_3, f_4 \in N\to N$, R_i为f_i导出的N上的等价关系，

$f_1(n)=n$;　(N上的恒等关系：I_N)

$f_2(n)=1$　n为奇数

0，n为偶数;

$f_3(n)=j$,　$n=3k+j, j=0,1,2, k \in N$;　（模3同余关系）

$f_4(n)=j$,　$n=6k+j, j=0,1, \ldots 5, k\in N$;（模6同余关系）

(1) 求商集N/R_i ,i=1,2,3,4；

(2) 画出偏序集<{N/R_1 ,N/R_2 , N/R_3 , N/R_4 },≼>的哈斯图，其中≼为加细关系。

(3) 求H ={$10k$|k ∈ N}在f_1, f_2, f_3, f_4下的像。

Exercises 15.

解 (1) $R_1=\{<x,y>|f_1(x)=f_1(y)\}=\{<x,y>|x=y\}$

即$<x,y>\in R_1\Leftrightarrow x=y$,显然$R_1$是恒等关系.

$N/R_1=\{\{k\}|\ k\in \mathrm{N}\}$

$<x,y>\in R_2\Leftrightarrow x$与$y$同为奇数或者同为偶数.

$\mathrm{N}/R_2=\{\{x|x=2k,\ k\in\mathrm{N}\},\ \{x|x=2k+1,\ k\in\mathrm{N}\}\}$

$<x,y>\in R_3\Leftrightarrow f_3(x)=f_3(y)\ \Leftrightarrow x\mathrm{mod}3=y\mathrm{mod}3$

$\mathrm{N}/R_3=\{\{x|x=3k,\ k\in\mathrm{N}\},\ \{x|x=3k+1,\ k\in\mathrm{N}\},\ \{x|x=3k+2,\ k\in\mathrm{N}\}\}$,

$<x,y>\in R_4\Leftrightarrow f_4(x)=f_4(y)\ \Leftrightarrow x\mathrm{mod}6=y\mathrm{mod}6$

$\mathrm{N}/R_4=\{\{x|x=6k,\ k\in\mathrm{N}\},\ \{x|x=6k+1,\ k\in\mathrm{N}\},\ \{x|x=6k+2,\ k\in\mathrm{N}\}\}$,
$\{x|x=6k+3,\ k\in\mathrm{N}\},\ \{x|x=6k+4,\ k\in\mathrm{N}\},\ \{x|x=6k+5,\ k\in\mathrm{N}\}\}$

(2)画出偏序集<{N/R_1,N/R_2 ,N/R_3 ,N/R_4 }, ≼ >的哈斯图，其中≼为加细关系.

解：N/R_1={{0},{1}, …,{k}, …}, k∈N

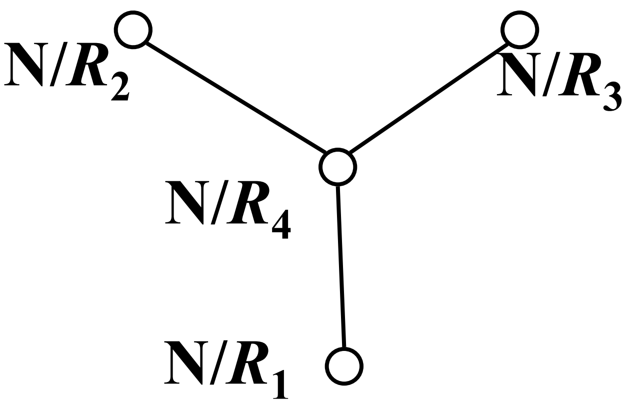
N/R_2={{0,2,4, …}, {1,3,5, …}}

N/R_3={{0, 3, 6, …}, {1, 4, 7, …}, {2, 5, 8, …}}

N/R_4={{0, 6, 12, …}, {1, 7, 13, …},

{2, 8, 14, …},{3, 9, 15, …},

{4,10, 16, …}, {5, 11, 17, …}}



(3)求$\mathrm{H}=\{10k|k\in\mathrm{N}\}$在$f_1, f_2, f_3, f_4$下的像。

解： $f_1(\mathrm{H})=\mathrm{H}$,

$f_2(\mathrm{H})=\{0\}$;

$f_3(\mathrm{H})=\{0,1,2\}$

$f_4(\mathrm{H})=\{0,2,4\}$

Exercises16.

解

$g\circ f(x)=x^2+2$，显然$g\circ f$既不是满射也不是单射;

$f\circ g(x)=x^2+8x+14$，显然$f\circ g$既不是满射也不是单射;

f既不是满射也不是单射,故不存在反函数;

g是双射, $g^{-1}(x)=x-4$

h是双射, $h^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$

Exercises17.

解：一般情况下，自然映射是满射但不一定是单射，所以不是双射。

如果R是恒等关系，则$A/R=\{\{x\}|x\in A\}$,则自然映射

$f:A\rightarrow A/R$, $f(x)=\{x\}$是单射是满射，故而是双射，因此 f有反函数，

$f^{-1}:A/R\rightarrow R$, 任意$\{x\}\in A/R$, $f^{-1}(\{x\})=x$

Exercises19

设 f: N→N，$f(x)=x+1$, $x=0,1,2,3$

$f(x)=0$, $x=4$

$f(x)=x$, $x\geq 5$，

g: N→N，$g(x)=x/2$, x为偶数

$g(x)=3$, x为奇数

(1)设$A_1=\{0,1,2\}$, $B_1=\{0,1,5,6\}$,求 $f(A_1)$, $f^{-1}(B_1)$

(2)设$A_2=\{x|x\in N, x为偶数\}$, $B_2=\{3\}$,求 $g(A_2)$, $g^{-1}(B_2)$

解：(1) $f(A_1)=\{1,2,3\}$, $f^{-1}(B_1)=\{4,0,5,6\}$

(2) $g(A_2)=N$, $g^{-1}(B_2)=N_{奇}\cup\{6\}$

19(3)

(3) f 与 g 都有反函数吗？

解：f是双射，故有反函数.

设： $f^{-1}:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$， $f^{-1}(x)=4$, $x=0$,

$f^{-1}(x)= x-1$, $x=1,2,3,4$

$f^{-1}(x)= x$, $x \geq 5$,

g不是双射(不是单射，是满射)，故g无反函数。

20

- 设 g: A→B，f:B→C,

(1) 已知 $f \circ g$是单射，且g是满射，证明 f是单射。

证明： [欲证明： $\forall x_1,x_2 \in$B, 若$f(x_1)=f(x_2)$,证明$x_1=x_2$]

设$f(x_1)=f(x_2)$, g为满射，则存在a_1，$a_2 \in$A，令

$$g(a_1)=x_1,\ g(a_2)=x_2,$$

即$f \circ g\ (a_1)= f \circ g(a_2)$，因为$f \circ g$是从A到C的单射函数，则一定有 $a_1=a_2$。

故 $g(a_1)=g(a_2)$, 即 $x_1=x_2$。

或 假设 f 不是单射，则与$f \circ g$是单射矛盾。

20(2)

设 $g: A\to B$，$f:B\to C$,

(2)已知 $f\circ g$是满射，且f是单射，证明 g是满射。

证明： 假设g不是满射，则$\exists b\in B$，不存在$x\in A$使得$g(a)=b$,

f为单射，对b，存在唯一的c，$f(b)=c$,

$f\circ g$是满射，故 $\exists a\in A$ 使得$f\circ g(a)=c$,

即有 $f(b)=f(g(a))=c$,

f为单射，故$b=g(a)$, 这与假设矛盾，故g为满射。

或 任取$b\in B$， 证存在$a\in A$使得$g(a)=b$.

Ch 5 Exercises 3

- 3. 设 a,b为任意实数,且$a<b$, 证明 $[0,1] \approx [a,b] \approx \mathbb{R}$.
- 证明:

先证 $[0,1] \approx [a,b]$ ，构造双射函数。

$f:[a,b] \to [0,1]$, $f(x)=(x-a)/(b-a)$.

$f(x)$是双射，故$[0,1] \approx [a,b]$ 。

因此$[0,1] \approx [a,b]$.

再证$[0,1] \approx (0,1)$,构造两个单射函数

h_1: $[0,1] \to (0,1)$, $h_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

h_2: $(0,1) \to [0,1]$, $h_2(x)=x$

所以$[0,1] \approx (0,1)$

最后证(0,1) ≈R

存在函数g: (0,1) → R， $g(x)=tg\frac{2x-1}{2}\pi \quad \forall x\in(0,1)$

显然*g(*x)是双射,所以(0,1) ≈R.

因此得到[0,1] ≈[*a*,*b*], [0,1] ≈(0,1), (0,1) ≈R,

所以[0,1] ≈R，从而有[0,1] ≈[*a*,*b*] ≈R

Exercises 11

11. 设$A=\{n^7|n \in N , n\neq 0\}$, $B=\{n^{109}|n \in N , n\neq 0\}$,求(1)card A; (2) card B; (3) card($A\cup B$); (4) card($A\cap B$)

解(1) (2) 令 $f: N\to A; f(n)=(n+1)^7, n\in N$.

$g: N\to B; f(n)=(n+1)^{109}, n\in N$.

f, g 双射，故 $N\approx A\approx B$, card A= card B= $\aleph_0$

(3) $A\subseteq A\cup B\subseteq N$,故card A ≤card $A\cup B$ ≤card N.

$\aleph_0\leq$card $A\cup B\leq\aleph_0$. card $A\cup B=\aleph_0$

(4) 设$C=\{(n^{7\times 109}|n \in N , n\neq 0\}$,则$C \subseteq A\cap B$且cardC=$\aleph_0$,所以card $A\cap B\geq\aleph_0$ 。

$A\cap B\subseteq A$, card $A\cap B\leq$card $A=\aleph_0$.

card $A\cap B\leq\aleph_0$. 则 card $A\cap B=\aleph_0$

Exercises 12.

- 设A,B为两集合,证明:如果$A\approx B$,则 $\mathrm{card}P(A)=\mathrm{card}P(B)$.
- 证 分析：构造双射函数h:$P(A)\to P(B)$

由于$A\approx B$,故存在双射函数f:$A\to B$.

令h:$P(A)\to P(B)$,$\forall X\in P(A)$,$h(X)=\{f(x)|x\in X\}$

显然$h(X)=f(X)\in P(B)$,下面证明h是双射函数.

$\forall A_1,A_2\in P(A)$,令$h(A_1)=h(A_2)$,

$\forall x\in A_1\Leftrightarrow f(x)\in f(A_1)\Leftrightarrow f(x)\in h(A_1)\Leftrightarrow f(x)\in h(A_2)$

$\Leftrightarrow f(x)\in f(A_2)\Leftrightarrow x\in A_2$.

故$A_1=A_2$.因此h是单射的.

- $\forall Y \in P(B)$,令$X=\{x\in A \mid \exists y(y\in Y \wedge f(x)=y)\}=f^{-1}(Y)$

因为f是双射，故$h(X)=h(f^{-1}(Y))=f(f^{-1}(Y))=Y$.

所以h是满射.

证明[a,b] ≈(a,b) ≈(a,b] ≈[a,b)

证明: （可以按照直线来构造单射）

(1) f: $[a,b]\to(a,b)$，$f(x)=x/2+(a+b)/4$

g: $(a,b)\to[a,b]$，$g(x)=x$

f, g都是入射，∴ $[a,b]\approx(a,b)$

(2) f: $(a,b)\to(a,b]$，$f(x)=x$

g: $(a,b]\to(a,b)$，$g(x)=x/2+(a+b)/4$

f, g都是入射，∴ $(a,b)\approx(a,b]$

(3) f: $(a,b]\to[a,b)$，$f(x)=x/2+(a+b)/4$

g: $[a,b)\to(a,b]$，$g(x)=x/2+(a+b)/4$

f, g都是入射，∴ $(a,b]\approx[a,b)$

(4)) f: $[a,b)\to[a,b]$，$f(x)=x$

g: $[a,b]\to[a,b)$，$g(x)=x/2+(a+b)/4$

f, g都是入射，∴ $[a,b)\approx[a,b]$