一．**填空题**（每小题 4 分，共 24 分，答案写在试题后的括号内）

1．已知 $P(B)=0.4, P(B|A)=0.4, P(A|B)=0.5$ 则 $P(AB|A\cup B)=($ $\quad\quad$)。

2．X 服从均值为 2 的指数分布，则概率 $P\{X>2\}=($ $\quad\quad$)。

3．设 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$ $\quad$ σ^2 未知；$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，

则检验问题 $H_0:\mu=0$; $\quad$ $H_1:\mu\neq 0$ 通常所用的统计量（ $\quad\quad$ ）。

4．随机变量 X、Y 的方差分别为 1 和 9；关系数为 -0.5，则随机变量 $X-Y$ 的方差为（ $\quad\quad$ ）。

5．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，S^2 为样本方差

则 $D(S^2)=($ $\quad\quad$)。

6.设 $(X,\ Y)$ 服从正态分布 $N(1,0;4,4;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=($ $\quad\quad$).

二． **单项选择题**(每题 4 分,共 24 分,答案写在试题后的括号内)

1．设 $f_1(x)$ 为[0，4]上均匀分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $N(1,\ \sigma^2)$ 的概率密度

若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\le 1 \\ bf_2(x), & x>1 \end{cases}$ 为概率密度，则 a,b 应取（ $\quad\quad$ ）。

（A）$a=-1,b=3$;（B）$a=1,b=1$;（C）$a=1,b=2$;（D）$a=2,b=1$

2．设 X_1,X_2 的概率分布列都为: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，且 $P\{X_1X_2=0\}=1$

则X_1,X_2的相关系数为（　　　　）。

(A)0；　　(B)0.5；　　(C)1；　　(D)0.25。

3．随机变量X服从标准正态分布。则$E[(X-1)^2e^X]=$（　　　）。

(A) 1；　(B) $2\sqrt{e}$；　(C) $\sqrt{e}$；　(D) 2。

4．设总体X服从参数为3的泊松分布，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，则当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于（　　　）。

（A）常数12；（B）常数3；（C）常数9；（D）常数6。

5．总体X服从区间$[\theta,\ \theta+1]$上的均匀分布，θ为未知参数；$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的简单随机样本，则下面选项中**不是**统计量的是（　　　）。

（A）$\overline{X}+2$；（B）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2-D(X)$；（C）$n(\overline{X})^2$；（D）$\overline{X}+E(X)$

6．一批产品共5件,其中2件次品,从中随机抽取3次,每次抽1件,抽后不放回,则第3次才抽到次品的概率为（　　　）。

(A) 0.1；　(B) 0.2；　(C) 0.4；　(D) 0.8。

三．计算题（46分，解答写在答题纸上）

（一）（12分）设X的分布列为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=0.5$，Y服从标准正态分布，X、Y相互独立；试求$Z=Y/X$的分布密度函数$f_z(z)$。

（二）（16分）设(X,Y)服从区域D上均匀分布，D是由直线$x=0,y=0$，$x+2y=2$所围成的平面区域。

1.求(X,Y)的联合概率密度函数　　2. 求出X、Y的边际分布密度

3. 说明X、Y是否独立，为什么？　　4.求$P\{X+Y<1\}$

（三）（10分）总体X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x>0\\ 0, & 其它。\end{cases}$　$\theta>0$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本。

1. 求参数θ的极大似然估计$\hat{\theta}$。

2. 求$\hat{\theta}$的数学期望，并说明是否θ的无偏估计。

（四）（8 分）总体X的密度函数为$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本，$Y=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，

试求Y的概率密度函数。

四.（6 分）总体X服从$N(0,3^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{18}$为来自总体X的简单随机样本

记$Y=\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)}{(X_{10}^2+X_{11}^2+\cdots+X_{18}^2)^{\frac{1}{2}}}$。证明：$Y$ 服从$t(9)$

2015 秋答案

一．填空题

1． $\frac{2}{7}$；2． e^{-1}；3． $\frac{\overline{X}}{S}\sqrt{n}$； 4．13；5. $\frac{2}{n-1}\sigma^4$；6. $\frac{1}{2}$

二．单选题

1-----6 $DACADB$

三.

（一）解：记 Z 得分布函数为 $F_Z(z)$

$$则 F_Z(z)=P\left\{\frac{Y}{X}\le z\right\}=\sum_{i=1}^{2}P\left\{X=i,\frac{Y}{X}\le z\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{2}P\{X=i\}P\{Y\le iz\}=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le 2z\}$$

$$=\frac{1}{2}\Phi(z)+\frac{1}{2}\Phi(2z)$$

$$f_z(z)=\frac{1}{2}[\phi(x)+2\phi(2z)]$$

（二） （1） $p(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$

（2）X 的边际分布密度 $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}1-x/2 & 2>x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

Y 的边际分布密度

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}2-2y & 1>y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（3）$\because$ $p(x,y)\neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X、Y 不独立，

（4） $P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1}dxdy=\frac{1}{2}$

（三）

解： 1. 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \prod_{i=1}^{n} x_i$

令 $\frac{d\ \ln L}{d\theta} = 0$ 解出 $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 为 θ 的最大似然估计

2. $E(\hat{\theta}) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = \frac{1}{2}E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = 2\theta\int_0^{\infty} te^{-t}dt = 2\theta$$

$E(\hat{\theta}) = \theta$ 是 θ 的无偏估计

（四）解：（过程略）X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

Y 的概率密度函数 $p(x) = \begin{cases} ne^{-nx} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

四．证明： 略