15.3 代数系统的同态与同构

- 同态映射的概念
  - 同态映射定义
  - 同态映射分类
  - 实例
- 同态映射的性质
  - 同态映射的合成仍旧是同态映射
  - 同态像是映到代数系统的子代数
  - 同态像中保持原有代数系统的运算性质

同态映射的定义

定义 设

$V_1 =< A, o_1, o_2, \ldots, o_r >$ 与 $V_2 =< B, o_1', o_2', \ldots, o_r' >$ 是同类型的代数系统，对于 i=1,2,…,r, o_i, o_i'为k_i 元运算, 函数f:$A \to B$, 如果对于所有的运算o_i与o_i', $\forall\, x_i, \ldots, x_{k_i} \in A$

$$f(o_i\,(x_i, \ldots, x_{k_i}))= o_i'\,(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{k_i}))$$

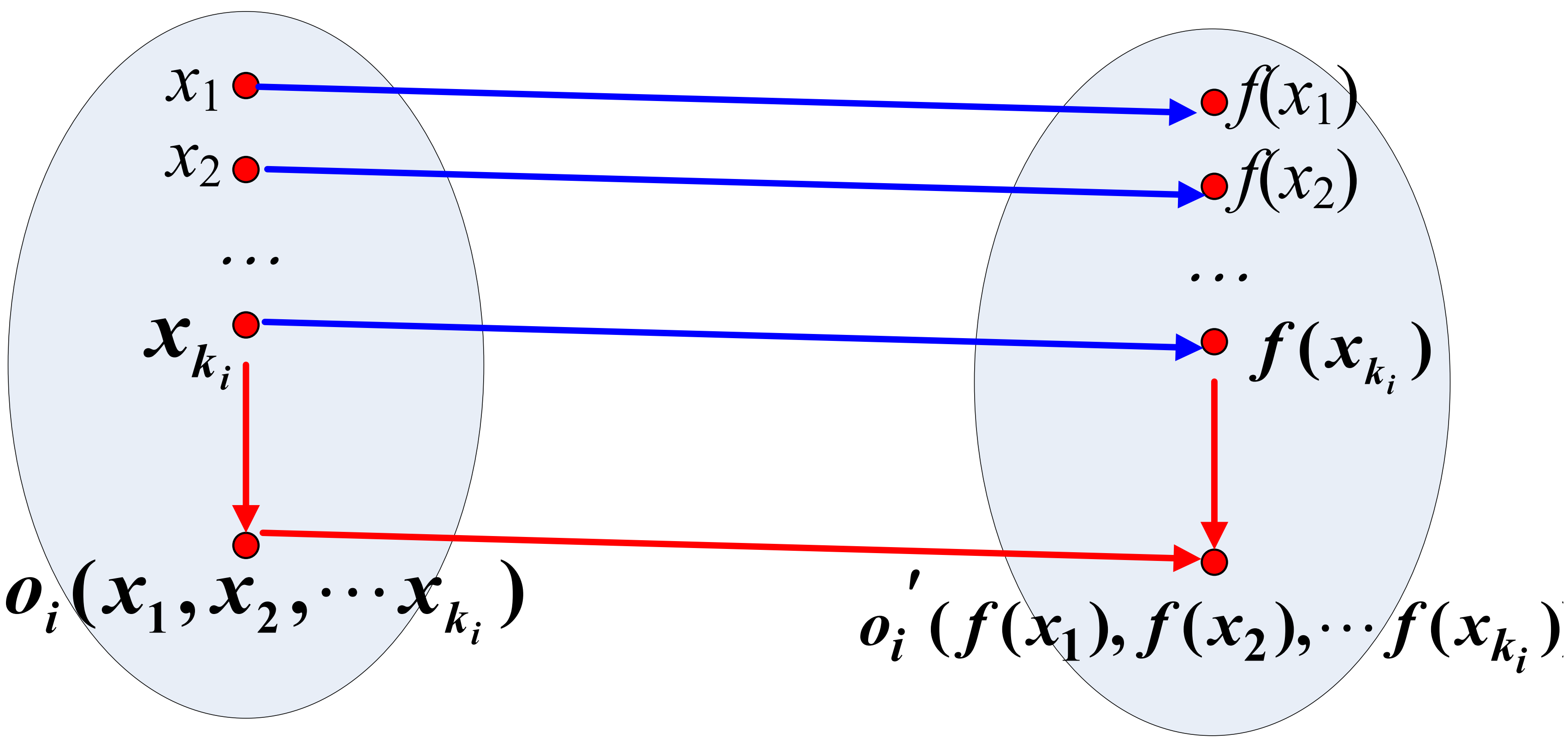
则称 f 为由V_1到V_2的一个同态映射，简称同态。

称$<A, ★>$同态于$<B,*>$，记作A~B。

称$<f(A), o_1', o_2', \ldots, o_r'>$为$<A, o_1, o_2, \ldots, o_r>$的一个同态象。

其中$f(A)=\{x|x=f(a), a \in A\} \subseteq B$

同态映射的定义（续）



x_1
x_2
$\cdots$
x_{k_i}
$o_i(x_1, x_2, \cdots x_{k_i})$
$f(x_1)$
$f(x_2)$
$\cdots$
$f(x_{k_i})$
$o_i'(f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_{k_i}))$

几点说明

1. 对于二元运算、一元运算、0元运算采用下述表示：

$f(x*y)=f(x) \bigstar f(y)$

$f(\triangle x)= \triangle' f(x)$

$f(a)= a'$

2. 同态映射必须对所有的运算保持等式，包括0元运算。例如

$$V = \left\langle A, \bullet, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$$

$$f : A \to A, \quad f(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则f不是V的自同态，因为不保持0元运算

例15.18

设代数系统V_1=<Z,+>,V_2=<Z_n,⊕>,其中Z_n={0,1,…,n-1}, ⊕是模n加法.定义φ:Z→ Z_n,$\varphi(x)=x \bmod n$,证明φ为V_1到V_2的同态.

证明 任意的$x,y\in$Z有

$$\varphi(x+y)=(x+y)\bmod n=(x)\bmod n\oplus(y)\bmod n=\varphi(x)+\varphi(y)$$

同态映射的分类

特殊的同态映射

- 按映射性质分为：

  单同态

  满同态$V_1 \sim V_2$

  同构$V_1 \cong V_2$

- 按载体分：自同态
- 综合：单自同态、满自同态、自同构

同态映射举例

例 $V = <Z,+>$, $f_c:Z\to Z$, $f_c(x) = cx$, c为给定整数

求证f_c是从V到V的同态.并分析当c取何值时f_c是自同构。

证 任取$x\in Z,y\in Z$,

$$f_c(x+y)= c(x+y)=cx+cy=f_c(x)+f_c(y)$$

故f_c是V到V的同态。

当$c = 0$, $f_c(x)=0$, 零同态;

当$c = \pm 1$, $f_c(x)= \pm x$,自同构;

其它c, 单自同态

同态映射举例(续)

例 $V = \langle Z_6, \oplus \rangle$, $f_p: Z_6 \to Z_6$, $f_p(x) = (px) \bmod 6$,

(1) 试证f_p是Z_6到Z_6的同态;

(2) 讨论$p = 0,1,2,3,4,5$时的情况

(1) **证** 任取$x \in Z_6, y \in Z_6$,

$$f_p(x \oplus y) = (p(x \oplus y)) \bmod 6$$

$$= (px) \bmod 6 \oplus (py) \bmod 6$$

$$= f_p(x) \oplus f_p(y)$$

故f_p是Z_6到Z_6的同态;

同态映射举例(续)

(2) $p = 0$, f_0 零同态;

$p = 1$, f_1 恒等映射，自同构

$p = 2$, $f_2 = \{<0,0>,<1,2>,<2,4>,<3,0>,<4,2>,<5,4>\}$,

$p = 3$, $f_3 = \{<0,0>,<1,3>,<2,0>,<3,3>,<4,0>,<5,3>\}$

$p = 4$, $f_4 = \{<0,0>,<1,4>,<2,2>,<3,0>,<4,4>,<5,2>\}$

$p = 5$, $f_5 = \{<0,0>,<1,5>,<2,4>,<3,3>,<4,2>,<5,1>\}$

自同构

可以推广到 f_p: $Z_n \to Z_n$, 恰好存在n 个自同态.

同态性质

- 同态的合成仍旧是同态
- 同态像是映到的代数系统的子代数
- 满同态映射（在同态像中）保持原代数系统的下述性质：
  - 交换、结合、幂等、分配、吸收
  - 单位元、零元、逆元
  - 消去律不一定保持

同态的合成仍旧是同态

命题 若f: $V_1 \to V_2$, g:$V_2 \to V_3$为同态映射，则$g \circ f$:$V_1 \to V_3$也为同态映射.

证 根据集合论的定理，$g \circ f$: $V_1 \to V_3$为映射.

任取V_1, V_2, V_3中一组对应的运算o_1, o_2, o_3, 设为k 元运算.

$\forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in V_1$,

$g \circ f\,(\,o_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)) = g\,(\,f(\,o_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)\,)\,)$

$= g\,(o_2(\,f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)\,)\,)$

$= o_3(\,g(f(x_1)), g(f(x_2)), \ldots, g(f(x_k))\,)$

$= o_3(\,g \circ f(x_1), g \circ f(x_2), \ldots, g \circ f(x_k)\,)$

由于运算的任意性，命题得证.

推论 代数系统的同构具有自反、对称、传递的性质.

同态像是映射到代数系统的子代数

定理1 设$V_1=\langle A, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r\rangle$与$V_2=\langle B, \circ_1', \circ_2', \ldots, \circ_r'\rangle$是同类型的代数系统,对于$i$=1,2,…,$r$，$\circ_i$与$\circ_i'$是$k_i$元运算, f:$A\rightarrow B$是V_1到V_2的同态,则$f(A)$关于V_2中的运算构成代数系统，且是V_2的子代数，称为V_1在f下的**同态像**.

证 【只需证明$f(A)$对V_2中的所有运算封闭.】

$f(A)$是B的非空子集.

若V_2中有0元运算a', 则V_1存在0元运算a, $f(a)=a'$.

因此$a'\in f(A)$.

V_2中任意非0元运算$\circ'$(k元运算).$\forall y_1, y_2, \ldots, y_k \in f(A)$，则

$\exists x_1, x_2, \ldots, x_k$使得$f(x_i)=y_i$, i=1,2,…,k, 那么

$\circ'(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \circ'(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)) = f(\circ(x_1, x_2, \ldots, x_k))$

显然$\circ'(y_1, y_2, \ldots, y_k) \in f(A)$.

满同态保持原代数性质

定理2 设 $V_1 = \langle A, o_1, o_2, \ldots, o_r \rangle$ 与 $V_2 = \langle B, o_1', o_2', \ldots, o_r' \rangle$ 是同类型的代数系统，函数 $f:A \rightarrow B$ 是 V_1 到 V_2 的满同态，

(1) V_2 中运算保持 V_1 中相应运算的下述性质：

交换、结合、幂等、分配、吸收

(2) V_2 中保持 V_1 中的单位元、零元、逆元，即

e 为 V_1 中相应运算单位元，$f(e)$ 是 V_2 中单位元

θ 为 V_1 中相应运算零元，$f(\theta)$ 是 V_2 中零元

a 的逆元是 a^{-1}, $f(a^{-1})$ 是 $f(a)$ 的逆元

几点说明

- 满同态条件重要. 如果不是满同态，有关性质只能在同态像中成立. 例如

$$V=\left\langle A,\bullet,\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle,\quad A=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in R\right\}$$

$$f:A\to A,\quad f(\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

f 不是满同态，将单位元映到 $f(A)$ 的单位元，不是 A 的单位元.

- 消去律不一定保持.

$\langle Z,\cdot\rangle$, $\langle Z_6,\otimes\rangle$, $f{:}Z\to Z_6$, $f(x)=(x) \bmod 6$

f 是满同态，$2\otimes2=2\otimes5$, 但 $2\neq5$.

15.4 同余关系与商代数

- 同余关系
  - 同余关系与同余类
  - 同余关系的实例
- 商代数
  - 商代数定义
  - 商代数性质
- 同态映射、同余关系与商代数之间的联系

同余关系与同余类

- **定义** 设 $V=<A,\mathrm{o}_1,\mathrm{o}_2,\ldots,\mathrm{o}_r>$ 是代数系统，其中 o_i 为 k_i 元运算，关系 ~为A上的等价关系，任取A上$2k_i$ 个元素 $a_1, a_2, \ldots, a_{ki}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{ki}$, 如果对于所有的 $j=1,2,\ldots,k_i$, $a_j \sim b_j$ 就有

$$\mathrm{o}_i\,(a_1,a_2, \ldots , a_{ki}) \sim \mathrm{o}_i\,(b_1,b_2, \ldots , b_{ki})$$

则称等价关系 ~ 对于运算 o_i 具有置换性质.

如果等价关系~ 对于V 中的所有运算都具有置换性质，则称~ 是V上的同余关系，称A/~的等价类为同余类.

如<Z,+>上的模p同余关系.

同余关系举例

例 设$V=<Z_4,\oplus>$, 求V上的所有同余关系。

解 Z_4上有15个等价关系，采用对应的划分表示.

{{0},{1,2,3}}对应的等价关系不是同余关系，因为1~3,3~3，但 $(1\oplus3)$ ~$(3\oplus3)$ 不成立.

同理可以验证以下11个划分对应的不是同余关系

{{1},{0,2,3}}，{{2},{1,3,0}}，{{3},{1,2,0}}，{{0,1},{2,3}}
{{0,3},{1,2}}，{{0},{1},{2,3}}，{{0},{2},{1,3}}，{{0},{3},{1,2}}

{{1},{2},{0,3}}，{{1},{3},{0,2}}，{{2},{3},{0,1}}

只有以下3个划分对应于同余关系：

{{0},{1},{2},{3}}，{{0,1,2,3}}，{ {0,2},{1,3}}

恒等关系与全域关系都是同余关系。

结论：任何代数系统都存在同余关系.如恒等关系和全域关系.

商代数定义

- 设代数系统$V=<A,\circ_1,\circ_2,\ldots,\circ_r>$,其中$\circ_i$ 为k_i 元运算,$i=1, 2, \ldots, r$. 关系R 为V上的同余关系,V关于R的商代数记作$V/R=<A/R, \bar{\circ}_1, \bar{\circ}_2,\ldots, \bar{\circ}_r>$, 其中$A/R$ 是A关于同余关系R的商集. 运算$\bar{\circ}_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$ 定义为

$$\bar{\circ}_i([a_1],[a_2],\ldots,[a_{k_i}]) = [\circ_i(a_1,a_2,\ldots,a_{k_i})]$$

- 以<Z,+>上的模3同余关系R为例（列出运算表）

商代数的良定义性

运算的良定义

运算结果与参与运算元素的表示无关

对于任意运算o_i，设为k_i 元运算，$a_j \sim b_j$, $j=1,2,\ldots,k_i$，则

$$\bar{\mathrm{o}}_i([a_1],[a_2],\ldots,[a_{k_i}])$$
$$= [\mathrm{o}_i(a_1,a_2,\ldots,a_{k_i})]$$
$$= [\mathrm{o}_i(b_1,b_2,\ldots,b_{k_i})]$$
$$= \bar{\mathrm{o}}_i([b_1],[b_2],\ldots,[b_{k_i}])$$

商代数的性质

设代数系统V, R是V上的同余关系，V 关于R 的商代数V/R，那么

(1) V/R 保持V 的下述性质：

交换、结合、幂等、分配、吸收律

(2) V/R 保持V 的单位元、零元、逆元，即

$[e]$是商代数的单位元

$[\theta]$是商代数的零元

$[a^{-1}]=[a]^{-1}$

- 注意：若V具有消去律，V/R不一定满足消去律

商代数举例

例 V= <Z,×>，其中Z是整数集，×是普通乘法运算

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 4.$$

求商代数V/R=<Z/R, ⊗>,并分析商代数是否满足消去律.

解 显然R是等价关系，下面证R是同余关系.

$xRy, uRv \Rightarrow y=x+4k_1, v=u+4k_2,$

$y\times v=(x+4k_1)(u+4k_2)=(x\times u)+4(k_1u+k_2x+4k_1k_2)=(x\times u)+4k_3$

即$(x\times u)R(y\times v)$.故R是V上的同余关系.

商代数为 $V/R=<\{[0],[1],[2],[3]\},\otimes>$.

其中，$V/R=\{[0],[1],[2],[3]\}$, $[x]\otimes[y]=[x\times y]$

因为$[2]\otimes[1]=[2\times 1]=[2],[2]\otimes[3]=[2\times 3]=[2]$,

即$[2]\otimes[1]=[2]\otimes[3]$，但是$[1]\neq[3]$. 故不满足消去律.

同态、同余关系与商代数的联系

- 同态映射导出同余关系
- 商代数是原代数的同态像

  同余关系导出同态映射——自然映射
- 同态基本定理

  代数系统的同态像同构于它的商代数

同态映射导出同余关系

定理1 设$V_1 = \langle A, o_1, o_2, \ldots, o_r \rangle$与$V_2 = \langle B, o_1', o_2', \ldots, o_r' \rangle$是同类型的代数系统，对于$i = 1, 2, \ldots, r$，$o_i$为$k_i$元运算，函数$f: A \to B$为代数系统$V_1$到$V_2$的同态映射，则由$f$导出的$A$上的等价关系为$V_1$上的同余关系.

证 $\forall x, y \in A$, $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

显然~是等价关系。

任取V_1上的运算o_i,($k_i \geq 1$),对于任意的$a_j \sim b_j$, $j = 1, 2, \ldots, k_i$,

$f(o_i(a_1, a_2, \ldots, a_{ki})) = o_i'(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{ki}))$ // f同态

$= o_i'(f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_{ki}))$ // $f(a_j) = f(b_j)$, $j = 1, 2, \ldots ki$,

$= f(o_i(b_1, b_2, \ldots, b_{ki}))$ // f同态

$o_i(a_1, a_2, \ldots, a_{ki}) \sim o_i(b_1, b_2, \ldots, b_{ki})$

~关于o_i运算具有置换性质，根据o_i的任意性，定理得证.

举例

例 $V=\langle Z_4,\oplus\rangle$, $f_i : Z_4\to Z_4$, $f_i(x) = (ix) \bmod 4$，$i = 0,1,2,3$

函数	导出的同余关系
$f_0(x)=0$, $x=0,1,2,3$	全域关系
$f_1(x)=x$, $x=0,1,2,3$	恒等关系I
$f_2(0)=f_2(2)=0$, $f_2(1)=f_2(3)=2$	$\{\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup \mathrm{I}$
$f_3(0)=0$，$f_3(1)=3$, $f(1)=2$，$f_3(3)=1$，	恒等关系I

注意： 在这个例子中，每个同态都可以导出一个同余关系；不同的同态，若同态像一样，导出的同余关系也相同.

商代数是原代数的同态像

定理2 设代数系统$V=<A,\mathrm{o}_1,\mathrm{o}_2,\ldots,o_r>$，其中$o_i$为$k_i$元运算，$i=1,2,\ldots,r$, R是V上的同余关系，则自然映射

$$g:A\rightarrow A/R,\ g(a)=[a],\ \forall a\in A,$$

是从V到V/R的同态映射.

证 设$V/R =< A/R, \bar{\mathrm{o}}_1, \bar{\mathrm{o}}_2,\ldots, \bar{\mathrm{o}}_r >$

任意k_i元运算o_i，任取$a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\in A$,

$$g(\mathrm{o}_i(a_1,a_2,\ldots,a_{k_i}))= [\mathrm{o}_i(a_1, a_2,\ldots,a_{k_i})]$$

$$= \bar{\mathrm{o}}_i([a_1],[a_2],\ldots,[a_{k_i}]) = \bar{\mathrm{o}}_i(g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_{k_i}))$$

由于o_i的任意性，定理得证。

同态基本定理

定理3 设$V_1=<A,\circ_1,\circ_2,\ldots,\circ_r>$与$V_2=<B,\circ_1',\circ_2',\ldots,\circ_r'>$是同类型的代数系统，对于$i$=1,2,…,$r$，$\circ_i$与$\circ_i'$都是$k_i$元运算，$f$:$A\to B$是$V_1$到$V_2$的同态，关系$R$是$f$导出的$V_1$上的同余关系，则$V_1$关于同余关系$R$的商代数同构于$V_1$在$f$下的同态像，即

$$V_1/R\cong<f(A),\circ_1',\circ_2',\ldots\circ_r'>$$

证明思路：

(1) 定义h：$V_1/R\to f(A)$, $h([a])=f(a)$

(2) 验证h是良定义的 $[a]=[b]\Leftrightarrow aRb\Leftrightarrow f(a)=f(b)$

(3) 验证h是双射的

(4) 验证h是同态映射

同态的验证

考虑任意运算$\bar{o}_i$，设为k_i元，$k_i>0, i=1,2,\ldots,r$，

$h(\bar{o}_i([a_1],[a_2],\ldots,[a_{ki}]))$

$= h([o_i(a_1, a_2,\ldots,a_{ki})])$ // 商代数定义

$= f(o_i(a_1,a_2,\ldots,a_{ki}))$ //h函数定义

$= o_i'(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{ki}))$ // 同态定义

$= o_i'(h([a_1]),h([a_2]),\ldots,h([a_{ki}]))$ //h函数定义

如果是0 元运算$[a]\in V_1/R$,则

$$h([a])=f(a)=a'$$

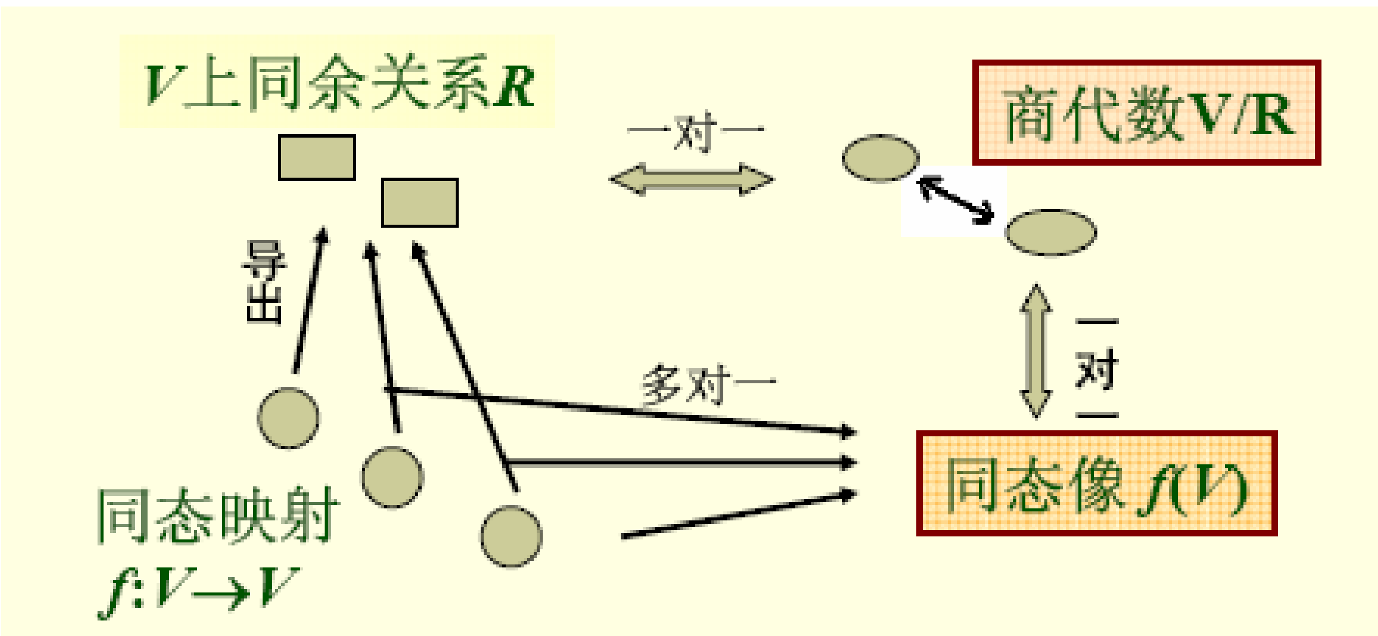
且a'是$f(A)$中对应的0 元运算。

同态、同余关系与商代数的联系

定理2 任何商代数都是同态像

定理3 任何同态像在同构意义下是商代数

同余关系、商代数、同态、同态像的对应



举例

$G_1 = \{e, a, b, c\}$, Klein四元群. $G_2 = \{e, x\}$

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$f_1: G_1 \to G_2$

$f_1 = \{<e,e>, <a,e>, <b,x>, <c,x>\}$

$f_2: G_1 \to G_2$

$f_2 = \{<e,e>, <b,e>, <a,x>, <c,x>\}$

$f_1(G_1) = f_2(G_1) = G_2$ // 同态象相同

f_1导出的同余关系R_1： $e \sim a$, $b \sim c$, $G_1/R_1 = \{[e],[b]\}$ // 商代数不同

f_2导出的同余关系R_2： $e \sim b$, $a \sim c$, $G_2/R_2 = \{[e],[a]\}$

$G_1/R_1 \cong G_2/R_2$, 对应图中的“一对一”与同构?

举例

例 设$V_1 =< A,*,\varDelta,k >$, $V_2 =< B,\mathrm{o},\Delta',k'>$ 为代数系统,

$\forall <a,b>,<c,d>\in A\times B$, $<a,b>R<c,d> \Leftrightarrow a=c$

(1)证明 R 为$V_1\times V_2$ 上的同余关系

(2)证明 $(V_1\times V_2)/R \cong V_1$

证明思路:

(1)证明R 为等价关系;证明R具有置换性质;

即令$V_1\times V_2 =<A\times B, \bullet, \lozenge,K>$,

证$<a,b> R <c,d>\wedge<a',b'> \mathrm{R} <c',d'>$

$\Rightarrow(<a,b>\bullet<a',b'>)R($

$<c,d>\bullet<c',d'>)\wedge(<a,b>\lozenge<a',b'>)R(<c,d>\lozenge<c',d'>)$

(2) 构造映射f, $f:V_1\times V_2\rightarrow V_1$, $f(<a,b>)=a$;

证明f是满同态；证明R 是f 导出的同余关系,即

$f(<a,b>)=f(<c,d>) \Leftrightarrow a=c \Leftrightarrow <a,b>R<c,d>$

举例(续)

证明 **(1)证明R 为$A\times B$上的等价关系.**

任取$<x,y> \in A\times B$, $x=x \Rightarrow <x,y>R<x,y>$, R是自反的.

任取$<<a,b> R<c.d> >$,

$<a,b>R<c.d> \Rightarrow a=c \Rightarrow c=a \Rightarrow <c.d>R<a,b>$,

故R是对称的

任取$<a,b> R<c,d>,<c,d>R<e,f>$,

$<a,b> R<c,d> \wedge <c,d>R<e,f> \Rightarrow a=c \wedge c=e \Rightarrow a=e$

$\Rightarrow <a,b> R<e,f>$, 故R是传递的

综上所述，R是$A\times B$上的等价关系。

举例(续)

证明R 具有置换性质。

令$V_1 \times V_2 = \langle A \times B, \bullet, \Diamond, K \rangle$,

任取$\langle a,b \rangle R \langle c,d \rangle, \langle e,f \rangle R \langle g,h \rangle$

$\langle a,b \rangle R \langle c,d \rangle \wedge \langle e,f \rangle R \langle g,h \rangle \Rightarrow a=c \wedge e=g$

$\langle a,b \rangle \bullet \langle e,f \rangle = \langle a*e, b\circ f \rangle$, $\langle c,d \rangle \bullet \langle g,h \rangle = \langle c*g, d\circ h \rangle$

因此有$a*e=c*g$,

故$(\langle a,b \rangle \bullet \langle e,f \rangle) R \langle c,d \rangle \bullet \langle g,h \rangle$

同理可证 $(\langle a,b \rangle \Diamond \langle a',b' \rangle) R (\langle c,d \rangle \Diamond \langle c',d' \rangle)$

因此R是$V_1 \times V_2$ 上的同余关系。

举例(续)

(3)构造映射f,

定义 $f:V_1\times V_2\to V_1$, $f(<a,b>)=a$.

证明 f 为满同态

显然f是满射的.

任取$<a,b>\in A\times B$, $<c,d>\in A\times B$,

$f(<a,b>\bullet<c,d>)=f(<a*c,b\circ d>)=a*c=f(<a,b>)*f(<c,d>)$

$f(<a,b>\Diamond<c,d>)=f(<a\Delta c,b\Delta' d>)=a\Delta c=f(<a,b>)\Delta f(<c,d>)$

因此f是满同态的,且 $f(V_1\times V_2)=V_1$

证明 R 是f 导出的同余关系

$f(<a,b>)=f(<c,d>)\Leftrightarrow a=c\Leftrightarrow <a,b>R<c,d>$

由基本同态定理得 $(V_1\times V_2)/R\cong f(V_1\times V_2)=V_1$

举例

例 $V=<S, \circ>$是半群，I是S的非空子集，且满足$IS \subseteq I$和$SI \subseteq I$，其中$SI=\{x \circ a \mid x \in S \wedge a \in I\}$, $IS=\{a \circ x \mid a \in I \wedge x \in S\}$. 在S上定义二元关系R.

$$xRy \Leftrightarrow x=y \vee (x \in I \wedge y \in I)$$

(1) 证明R是V上的同余关系

(2) 描述商代数$<S/R, \bar{\circ}>$

证

作业

- 复习要点
  - 同态的定义及其性质
  - 典型的同态实例
  - 商代数的运算是良定义的
  - 商代数与原代数的关系
  - 自然同态的概念
  - 同态基本定理的应用
  - 如何求同余关系
- 书面作业：习题十五 20,24, 27,29,30