《离散数学教程》[1]

习题解答[2]

($beta\ 4++$)[3]

WORKED OUT AND TEXIFIED
BY

肖新攀[4]

(E-mail: xiaoxinpan@163.com)

HONORED REVIEWER

底素然

(chouxiaoya@bbs.pku.edu.cn)

September 1, 2004

深深感谢 南京大学计算机系 胡海星 大侠……
感谢他长期以来给予我热情的鼓励和无私的帮助。
Thanks a trillion!!! Bow ……

[1]《离散数学教程》，耿素云、屈婉玲、王捍贫，北京大学出版社，2002年6月第1版，2003年1月第2次印刷

[2]注意：此"习题解答"系 肖新攀 个人作品，供学习交流之用，并非官方解答。如发现解答有错误，或与官方解答(教材、原作者、课堂讲授等)有出入，烦请email告知作者。谢谢！

[3]版本说明：beta后的数字该版本所包含答案的章数，数字后的符号(如果有的话)为"+"，表示该版本是修订版，"+"的数量=修订次数；符号为"−"表示是该章的"预发行版"，通常只包含部分习题的答案("−"的数量≈缺题数∗10)。

[4]感谢南京大学02CS 赖江山 同学提供的大量有益的建议和证明思路。感谢北大未名BBS上的chouxiaoya、tedy、akaru、yitianxing、xuening等网友提出了大量宝贵的勘误意见、合理化建议和新的证明方法。谢谢你们！

Contents

Chapter 1

集合

1.
(1) $\{2\}$;
(2) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196\}$;
(3) $\{1, 8, 27, 64\}$;
(4) $\{0, 1, 2, ...\}$;
(5) $\{2, 3\}$;
(6) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$.

2.
(1) $\{(x, y)|x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 < 1\}$;
(2) $\{\theta|\theta = \pi/4 + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$;
(3) $\{x|x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$;
(4) $\{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{N} \wedge x^2 + y^2 = z^2\}$;
(5) $\{x|x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 5x + 6 = 0\}$.

3. $(1), (4), (5), (6), (8), (9)$正确，其余不正确。

4.
(1) 成立。
Proof:

$$
\begin{aligned}
& A \in B \wedge B \subseteq C \\
\iff & A \in B \wedge \forall x(x \in B \to x \in C) && \text{(子集定义)} \\
\implies & A \in B \wedge (A \in B \to A \in C) && \text{(x/A)} \\
\implies & A \in C && \text{(假言推理)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(2) 不成立。举反例如下：令$A = \{a\}, B = \{\{a\}\}, C = \{\{a\}, \{b\}\}$，则有$A \in B \wedge B \subseteq C$，但$A \notin C$。

(3) 不成立。举反例如下：令$A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$，则有$A \subseteq B \wedge B \in$

C，但$A \notin C$。

(4) 不成立。举反例如下：令$A=\{a\}, B=\{a,b\}, C=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$，则有$A \subseteq B \wedge B \in C$，但$A \nsubseteq C$。

5. 令$A=\{a\}, B=\{\{a\}\}, C=\{\{\{a\}\}\}$，则有$A \in B \wedge B \in C$，但$A \notin C$。

6.
(1)
0元集：$\emptyset$
1元集：$\{a\},\{b\},\{c\}$
2元集：$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$
3元集：$\{a,b,c\}$
幂集：$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

(2)
0元集：$\emptyset$
1元集：$\{1\},\{\{2,3\}\}$
2元集：$\{\{1\},\{2,3\}\}$
幂集：$\{\emptyset,\{1\},\{\{2,3\}\},\{\{1\},\{2,3\}\}\}$

(3)
0元集：$\emptyset$
1元集：$\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}$
2元集：$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$
幂集：$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$

(4)
0元集：$\emptyset$
1元集：$\{\{1,2\}\}$
幂集：$\{\emptyset,\{\{1,2\}\}\}$

(5)
0元集：$\emptyset$
1元集：$\{\{\emptyset,1\}\},\{1\}$
2元集：$\{\{\emptyset,1\},1\}$
幂集：$\{\emptyset,\{\{\emptyset,1\}\},\{1\},\{\{\emptyset,1\},1\}\}$

7. 略。

8.
(1) $\{4\}$;
(2) $\{1,3,5\}$;
(3) $\{2,3,4,5\}$;
(4) $\{2,3,4,5\}$;
(5) $\{\emptyset,\{4\}\}$;
(6) $\{\{1\},\{1,4\}\}$.

9.
(1) $\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,21,24,27,30,32,64\}$;
(2) $\emptyset$;
(3) $\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,4,5\}$;
(4) $\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,3,4,5,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$.

10. 因为$P(A)=\{\emptyset,\{a\}\}$，$PP(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\emptyset,\{a\}\}\}$，故$(1),(2),(4),(5)$成立，其余不成立。

11.

Proof:

必要性:

若$A-B=A$，则有:

$$\begin{aligned}
A\cap B &= (A-B)\cap B && (A-B=A)\\
&= (A\cap\sim B)\cap B && (\text{补交转换律})\\
&= A\cap(\sim B\cap B) && (\text{结合律})\\
&= A\cap\emptyset && (\text{矛盾律})\\
&= \emptyset && (\text{零律})
\end{aligned}$$

充分性:

若$A\cap B=\emptyset$，则有:

$$\begin{aligned}
A &= A\cap E && (\text{同一律})\\
&= A\cap(B\cup\sim B) && (\text{排中律})\\
&= (A\cap B)\cup(A\cap\sim B) && (\text{分配律})\\
&= \emptyset\cup(A\cap\sim B) && (A\cap B=\emptyset)\\
&= A\cap\sim B && (\text{同一律})\\
&= A-B && (\text{补交转换律})
\end{aligned}$$

综上所述，可知:

$$A-B=A\Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$$

Q.E.D.

12. 先证两个引理。

Lemma 1.1 对任意集合A和B，有$A-B=A\Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$。

Proof:

见第11题。

Q.E.D.

Lemma 1.2 对任意集合A和B，有$A-B=\emptyset\Leftrightarrow A\subseteq B$。

Proof:

$$A-B=\emptyset \iff \neg\exists x(x\in(A-B)) \qquad (\emptyset\text{定义})$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall x \neg(x \in (A-B)) && \text{(量词否定等值式)}\\
&\iff \forall x \neg(x \in A \wedge x \notin B) && \text{(相对补定义)}\\
&\iff \forall x \neg(x \in A \wedge \neg x \in B) && \text{(}\notin\text{定义)}\\
&\iff \forall x(\neg x \in A \vee x \in B) && \text{(命题逻辑德·摩根律)}\\
&\iff \forall x(x \in A \to x \in B) && \text{(蕴涵等值式)}\\
&\iff A \subseteq B && \text{(子集定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(1) 答：$(A-B)\cup(A-C)=A$ 当且仅当 $A\cap B\cap C=\emptyset$ 。

Proof:

$$
\begin{aligned}
(A-B)\cup(A-C)=A &\iff A-(B\cap C)=A && \text{(德·摩根律)}\\
&\iff A\cap(B\cap C)=\emptyset && \text{(Lemma 1.1)}\\
&\iff A\cap B\cap C=\emptyset && \text{(结合律)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(2) 答：$(A-B)\cup(A-C)=\emptyset$ 当且仅当 $A\subseteq(B\cap C)$。

Proof:

$$
\begin{aligned}
(A-B)\cup(A-C)=\emptyset &\iff A-(B\cap C)=\emptyset && \text{(德·摩根律)}\\
&\iff A\subseteq(B\cap C) && \text{(Lemma 1.2)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(3) 答：$(A-B)\cap(A-C)=\emptyset$ 当且仅当 $A\subseteq(B\cup C)$。

Proof:

$$
\begin{aligned}
(A-B)\cap(A-C)=\emptyset &\iff A-(B\cup C)=\emptyset && \text{(德·摩根律)}\\
&\iff A\subseteq(B\cup C) && \text{(Lemma 1.2)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(4) 答：$(A-B)\cap(A-C)=A$ 当且仅当 $A\cap(B\cup C)=\emptyset$。

Proof:

$$
\begin{aligned}
(A-B)\cap(A-C)=A &\iff A-(B\cup C)=A && \text{(德·摩根律)}\\
&\iff A\cap(B\cup C)=\emptyset && \text{(Lemma 1.1)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

13.

(1) 先证两个引理:

Lemma 1.3 对任意集合A和B，有：$A\cap B\subseteq A$ 和 $A\cap B\subseteq B$

Proof:

对于任意x，

$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$ (集合交定义)

$\implies x \in A$ (命题逻辑化简律)

故有，$A \cap B \subseteq A$。同理可证：$A \cap B \subseteq B$。

Q.E.D.

Lemma 1.4 对任意集合A和B，有：$A \subseteq A \cup B$ 和 $B \subseteq A \cup B$

Proof:

对于任意x，

$x \in A \implies x \in A \vee x \in B$ (命题逻辑附加律)

$\iff x \in A \cup B$ (集合并定义)

故有，$A \subseteq A \cup B$。同理可证：$B \subseteq A \cup B$。

Q.E.D.

再证原题:

Proof:

$$
\begin{aligned}
(A - B) - C &= (A \cap \sim B) \cap \sim C && \text{(补交转换律)} \\
&\subseteq A \cap \sim B && \text{(Lemma 1.3)} \\
&\subseteq (A \cap \sim B) \cup (A \cap C) && \text{(Lemma 1.4)} \\
&= A \cap (\sim B \cup C) && \text{(分配律)} \\
&= A \cap \sim (B \cap \sim C) && \text{(德·摩根律)} \\
&= A - (B - C) && \text{(补交转换律)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(2) 答：当且仅当 $A \cap C = \emptyset$ 时，(1) 中等号成立。

Proof:

先证充分性。当 $A \cap C = \emptyset$ 时:

$$
\begin{aligned}
(A - B) - C &= (A \cap \sim B) \cap \sim C && \text{(补交转换律)} \\
&= (A \cap \sim C) \cap \sim B && \text{(结合律、交换律)} \\
&= (A - C) \cap \sim B && \text{(补交转换律)} \\
&= A \cap \sim B && \text{(Lemma 1.1)} \\
&= (A \cap \sim B) \cup \emptyset && \text{(同一律)} \\
&= (A \cap \sim B) \cup (A \cap C) && (A \cap C = \emptyset) \\
&= A \cap (\sim B \cup C) && \text{(分配律)} \\
&= A \cap \sim (B \cap \sim C) && \text{(德·摩根律)} \\
&= A - (B - C) && \text{(补交转换律)}
\end{aligned}
$$

再证必要性。若不然，则存在x，使得$x \in A \wedge x \in C$。此时，无论x是否属于B，均有$x \notin (A - B) - C$ 和 $x \in A - (B - C)$。这与假设：$(A - B) - C = A - (B - C)$矛盾。

Q.E.D.

14.

Proof:

$$
\begin{aligned}
B &= E \cap B && \text{(同一律)} \\
&= (A \cup \sim A) \cap B && \text{(排中律)} \\
&= (A \cap B) \cup (\sim A \cap B) && \text{(分配律)} \\
&= (A \cap C) \cup (\sim A \cap C) && \text{(前提)} \\
&= (A \cup \sim A) \cap C && \text{(分配律)} \\
&= E \cap C && \text{(排中律)} \\
&= C && \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

15. $A = B = D = G$、$C = F = H$。

16.

(1) $\{3, 4, \{3\}, \{4\}\}$;

(2) $\emptyset$;

(3) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

17.

(1) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$;

(2) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$;

(3) $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$;

18.

(1) $\{\emptyset, 1, 2, 3\}$;

(2) $\emptyset$;

(3) $\emptyset$;

(4) $\emptyset$.

19.

(1) $A \cup B$;

(2) A;

(3) B.

20. 先证两个引理。

Lemma 1.5 对任意集合A, B, C, D，有$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$

Proof:

对于任意x，

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup C &\iff x \in A \vee x \in C && \text{(集合并定义)}\\
&\iff (x \in A \vee x \in C) \wedge \\
&\quad\ (x \in A \to x \in B \wedge x \in C \to x \in D) && \text{(前提\&子集定义)}\\
&\implies x \in B \vee x \in D && \text{(构造性二难)}\\
&\iff x \in B \cup D && \text{(集合并定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Lemma 1.6 对任意集合A, B, C, D，有$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$

Proof:

对于任意x，

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap C &\iff x \in A \wedge x \in C && \text{(集合交定义)}\\
&\implies x \in B \wedge x \in C && \text{(前提\&子集定义)}\\
&\implies x \in B \wedge x \in D && \text{(前提\&子集定义)}\\
&\iff x \in B \cap D && \text{(集合交定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

再证原题。

Proof:

$$
\begin{aligned}
A &= A \cap E && \text{(同一律)}\\
&= A \cap (C \cup \sim C) && \text{(排中律)}\\
&= (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) && \text{(分配律)}\\
&\subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C) && \text{(题设\&Lemma 1.5)}\\
&= B \cap (C \cup \sim C) && \text{(分配律)}\\
&= B \cap E && \text{(排中律)}\\
&= B && \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

21.

(1) 答: $A \cap B = A$ 当且仅当 $A \subseteq B$。

Proof:

$$
\begin{aligned}
& A \cap B = A \\
\iff & \forall x(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A) && \text{(等号定义)}\\
\iff & \forall x((x \in A \wedge x \in B) \leftrightarrow x \in A) && \text{(集合交定义)}\\
\iff & \forall x(((x \in A \wedge x \in B) \to x \in A) \wedge (x \in A \to (x \in A \wedge x \in B))) && \text{(等价联结词定义)}\\
\iff & \forall x((\neg(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in A) \wedge (\neg x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B))) && \text{(蕴涵等值式)}\\
\iff & \forall x((\neg x \in A \vee \neg x \in B \vee x \in A) \wedge (\neg x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B))) && \text{(命题逻辑德·摩根律)}\\
\iff & \forall x((\neg x \in A \vee x \in A \vee \neg x \in B) \wedge (\neg x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B))) && \text{(命题逻辑交换律)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall x((\neg x \in A \vee x \in A \vee \neg x \in B) \wedge \\
&\qquad ((\neg x \in A \vee x \in A) \wedge (\neg x \in A \vee x \in B))) && \text{(命题逻辑分配律)} \\
&\iff \forall x((1 \vee \neg x \in B) \wedge (1 \wedge (\neg x \in A \vee x \in B))) && \text{(命题逻辑排中律)} \\
&\iff \forall x(1 \wedge (1 \wedge (\neg x \in A \vee x \in B))) && \text{(命题逻辑零律)} \\
&\iff \forall x(\neg x \in A \vee x \in B) && \text{(命题逻辑同一律)} \\
&\iff \forall x(x \in A \to x \in B) && \text{(蕴涵等值式)} \\
&\iff A \subseteq B && \text{(子集定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(2) 答： $A \cup B = A$ 当且仅当 $B \subseteq A$。

Proof:

$$
\begin{aligned}
&\quad A \cup B = A \\
&\iff \forall x(x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A) && \text{(等号定义)} \\
&\iff \forall x((x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow x \in A) && \text{(集合并定义)} \\
&\iff \forall x(((x \in A \vee x \in B) \to x \in A) \wedge (x \in A \to (x \in A \vee x \in B))) && \text{(等价联结词定义)} \\
&\iff \forall x((\neg(x \in A \vee x \in B) \vee x \in A) \wedge (\neg x \in A \vee x \in A \vee x \in B)) && \text{(蕴涵等值式)} \\
&\iff \forall x(((\neg x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in A) \wedge (\neg x \in A \vee x \in A \vee x \in B)) && \text{(命题逻辑德·摩根律)} \\
&\iff \forall x(((\neg x \in A \vee x \in A) \wedge (\neg x \in B \vee x \in A)) \wedge \\
&\qquad (\neg x \in A \vee x \in A \vee x \in B)) && \text{(命题逻辑分配律)} \\
&\iff \forall x((1 \wedge (\neg x \in B \vee x \in A)) \wedge (1 \vee x \in B)) && \text{(命题逻辑排中律)} \\
&\iff \forall x((1 \wedge (\neg x \in B \vee x \in A)) \wedge 1) && \text{(命题逻辑零律)} \\
&\iff \forall x(\neg x \in B \vee x \in A) && \text{(命题逻辑同一律)} \\
&\iff \forall x(x \in B \to x \in A) && \text{(蕴涵等值式)} \\
&\iff B \subseteq A && \text{(子集定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(3) 答： $A \oplus B = A$ 当且仅当 $B = \emptyset$。

Proof:

充分性。若$B = \emptyset$，则

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= A \oplus \emptyset && (B = \emptyset) \\
&= A && \text{(教材例1.7(4))}
\end{aligned}
$$

必要性。若$A \oplus B = A$，则

$$
\begin{aligned}
B &= \emptyset \oplus B && \text{(教材例1.7(4))} \\
&= (A \oplus A) \oplus B && \text{(教材例1.7(5))} \\
&= A \oplus (A \oplus B) && \text{(教材例1.7(2))} \\
&= A \oplus A && (A \oplus B = A) \\
&= \emptyset && \text{(教材例1.7(5))}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(4) 答：$A \cap B = A \cup B$ 当且仅当 $A = B$。

Proof:

充分性。若$A = B$，则

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= A \cap A && (A = B)\\
&= A && (\text{幂等律})\\
&= A \cup A && (\text{幂等律})\\
&= A \cup B && (A = B)
\end{aligned}
$$

必要性。若$A \cap B = A \cup B$，则

$$
\begin{aligned}
A &= A \cup (A \cap B) && (\text{吸收律})\\
&= A \cup (A \cup B) && (A \cap B = A \cup B)\\
&= (A \cup A) \cup B && (\text{结合律})\\
&= A \cup B && (\text{幂等律})\\
&= A \cup (B \cup B) && (\text{幂等律})\\
&= (A \cup B) \cup B && (\text{结合律})\\
&= (A \cap B) \cup B && (A \cap B = A \cup B)\\
&= B && (\text{吸收律})
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

22.

(1) 即为Lemma 1.5和Lemma 1.6。

(2) 答：不一定。令$A = \{a\}, C = \{b\}, B = D = \{a, b\}$，则有$A \subset B \wedge C \subset D$，但$A \cup B \not\subset C \cup D$。又令$A = C = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}, D = \{a, b, d\}$，则有$A \subset B \wedge C \subset D$，但$A \cap B \not\subset C \cap D$

23.

Proof:

若不然，则存在$x \in B \wedge x \notin C$或$x \notin B \wedge x \in C$。不妨设$x \in B \wedge x \notin C$，此时，若$x \in A$则有$x \notin A \oplus B$和$x \in A \oplus C$，这与前提：$A \oplus B = A \oplus C$矛盾。若$x \notin A$则有$x \in A \oplus B$和$x \notin A \oplus C$，这同样与前提：$A \oplus B = A \oplus C$矛盾。

对$x \notin B \wedge x \in C$的情况亦有类似讨论。

综上所述，有：

$$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$$

Q.E.D.

24. 分别证：$(A - B) - C = (A - C) - B$、$(A - B) - C = A - (B \cup C)$和$(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$。

先证：$(A - B) - C = (A - C) - B$。

Proof:

$$\begin{aligned}(A-B)-C &= (A\cap\sim B)\cap\sim C && \text{(补交转换律)}\\ &= A\cap(\sim B\cap\sim C) && \text{(结合律)}\\ &= A\cap(\sim C\cap\sim B) && \text{(交换律)}\\ &= ((A\cap\sim C)\cap\sim B) && \text{(结合律)}\\ &= (A-C)-B && \text{(补交转换律)}\end{aligned}$$

Q.E.D.

再证：$(A-B)-C=A-(B\cup C)$。

Proof:

$$\begin{aligned}(A-B)-C &= (A\cap\sim B)\cap\sim C && \text{(补交转换律)}\\ &= A\cap(\sim B\cap\sim C) && \text{(结合律)}\\ &= A\cap\sim(B\cup C) && \text{(德·摩根律)}\\ &= A-(B\cup C) && \text{(补交转换律)}\end{aligned}$$

Q.E.D.

最后证：$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$。

Proof:

$$\begin{aligned}(A-B)-C &= (A\cap\sim B)\cap\sim C && \text{(补交转换律)}\\ &= (A\cap\sim B\cap\sim C)\cup\emptyset && \text{(同一律)}\\ &= (A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(A\cap\emptyset) && \text{(零律)}\\ &= (A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim C\cap C) && \text{(矛盾律)}\\ &= (A\cap\sim C\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C\cap C) && \text{(交换律)}\\ &= (A\cap\sim C)\cap(\sim B\cup C) && \text{(分配律)}\\ &= (A\cap\sim C)\cap\sim(B\cap\sim C) && \text{(德·摩根律)}\\ &= (A-C)-(B-C) && \text{(补交转换律)}\end{aligned}$$

Q.E.D.

25.

(1) A;

(2) $A-B$;

(3) $B-A$.

26.

(1)

Proof:

先证必要性。若已知$A\subseteq C\land B\subseteq C$，则，对于任意$x$，

$$\begin{aligned}x\in A\cup B &\iff x\in A\lor x\in B && \text{(子集定义)}\\ &\iff (x\in A\lor x\in B)\land\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& (x \in A \to x \in C) \wedge (x \in B \to x \in C) && \text{(前提\&子集定义)} \\
\Longrightarrow\ & (x \in C) \vee (x \in C) && \text{(构造性二难)} \\
\Longrightarrow\ & x \in C && \text{(命题逻辑幂等律)}
\end{aligned}
$$

再证充分性。若已知$A \cup B \subseteq C$，则，对于任意x，

$$
\begin{aligned}
x \in A \ \Longrightarrow\ & x \in A \vee x \in B && \text{(命题逻辑附加律)} \\
\Longrightarrow\ & x \in C && \text{(前提\&子集定义)}
\end{aligned}
$$

于是有$A \subseteq C$。同理可证：$B \subseteq C$。

Q.E.D.

(2)

Proof:

先证必要性。若已知$C \subseteq A \wedge C \subseteq B$，则，对于任意$x$，

$$
\begin{aligned}
x \in C \ \Longleftrightarrow\ & (x \in C) \wedge (x \in C) && \text{(命题逻辑幂等律)} \\
\Longrightarrow\ & (x \in A) \wedge (x \in B) && \text{(前提\&子集定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \cap B && \text{(集合交定义)}
\end{aligned}
$$

再证充分性。若已知$C \subseteq A \cap B$，则，对于任意x，

$$
\begin{aligned}
x \in C \ \Longrightarrow\ & x \in A \cap B && \text{(前提\&子集定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \wedge x \in B && \text{(集合交定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

27.

Proof:

对于任意集合A，有：

$$
\begin{aligned}
& \emptyset \subseteq A && \text{(教材定理1.1)} \\
\Longleftrightarrow\ & \emptyset \in PA && \text{(幂集定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & \{\emptyset\} \subseteq PA \wedge \emptyset \subseteq PA && \text{(子集定义\&教材定理1.1)} \\
\Longleftrightarrow\ & \{\emptyset\} \in PPA \wedge \emptyset \in PPA && \text{(幂集定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq PPA && \text{(子集定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in PPPA && \text{(幂集定义)}
\end{aligned}
$$

于是得到，$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in PPPA$。

由于上述证明中的A为任意集合，只需将A替换成PA，则证明的倒数第二行即为待证的第二部分：$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq PPPA$。

Q.E.D.

28. 只需分别证 $(1) \iff (2), (1) \iff (3), (1) \iff (4), (1) \iff (5)$ 即可。

先证：$(1) \leftrightarrow (2)$，即$A \subseteq B \iff \sim B \subseteq \sim A$。

Proof:

$$
A \subseteq B \ \Longleftrightarrow\ \forall x (x \in A \to x \in B) \qquad \text{(子集定义)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall x(\neg(x \in B) \to \neg(x \in A)) && \text{(命题逻辑假言易位)}\\
&\iff \forall x(x \notin B \to x \notin A) && (\notin\text{定义})\\
&\iff \forall x(x \in \sim B \to x \in \sim A) && \text{(绝对补定义)}\\
&\iff \ \sim B \subseteq \sim A && \text{(子集定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

再证：$(1) \leftrightarrow (3)$，即$A \subseteq B \iff \sim A \cup B = E$。

Proof:

$$
\begin{aligned}
A \subseteq B &\iff \forall x(x \in A \to x \in B) && \text{(子集定义)}\\
&\iff \forall x(\neg(x \in A) \vee (x \in B)) && \text{(蕴涵等值式)}\\
&\iff \forall x(x \notin A \vee x \in B) && (\notin\text{定义})\\
&\iff \forall x(x \in \sim A \vee x \in B) && \text{(绝对补定义)}\\
&\iff \forall x(x \in \sim A \cup B) && \text{(集合并定义)}\\
&\iff \ \sim A \cup B = E && \text{(全集定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

下面证[1]$(1) \leftrightarrow (4)$，即$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B \subseteq \sim A$。

Proof:

$$
\begin{aligned}
A - B \subseteq \sim A &\iff \forall x(x \in A - B \to x \in \sim A) && \text{(子集定义)}\\
&\iff \forall x((x \in A \wedge x \notin B) \to x \in \sim A) && \text{(相对补定义)}\\
&\iff \forall x(\neg(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in \sim A) && \text{(蕴涵等值式)}\\
&\iff \forall x((\neg x \in A \vee \neg x \notin B) \vee x \in \sim A) && \text{(命题逻辑德·摩根律)}\\
&\iff \forall x((\neg x \in A \vee \neg x \notin B) \vee x \notin A) && \text{(绝对补定义)}\\
&\iff \forall x((\neg x \in A \vee \neg\neg x \in B) \vee \neg x \in A) && (\notin\text{定义})\\
&\iff \forall x((\neg x \in A \vee x \in B) \vee \neg x \in A) && \text{(命题逻辑双重否定律)}\\
&\iff \forall x(\neg x \in A \vee \neg x \in A \vee x \in B) && \text{(命题逻辑结合律、交换律)}\\
&\iff \forall x(\neg x \in A \vee x \in B) && \text{(命题逻辑幂等律)}\\
&\iff \forall x(x \in A \to x \in B) && \text{(蕴涵等值式)}\\
&\iff A \subseteq B && \text{(子集定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

最后证：$(1) \leftrightarrow (5)$，即$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B \subseteq B$。

Proof:

$$
\begin{aligned}
A - B \subseteq B &\iff \forall x(x \in A - B \to x \in B) && \text{(子集定义)}\\
&\iff \forall x((x \in A \wedge x \notin B) \to x \in B) && \text{(相对补定义)}\\
&\iff \forall x(\neg(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B) && \text{(蕴涵等值式)}\\
&\iff \forall x((\neg x \in A \vee \neg x \notin B) \vee x \in B) && \text{(命题逻辑德·摩根律)}
\end{aligned}
$$

[1]感谢北大未名BBS的chouxiaoya网友提供$(1) \Leftrightarrow (4)$和$(1) \Leftrightarrow (5)$的形式化证明。

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall x((\neg x \in A \vee \neg\neg x \in B) \vee x \in B) && (\notin\text{定义})\\
&\iff \forall x((\neg x \in A \vee x \in B) \vee x \in B) && (\text{命题逻辑双重否定律})\\
&\iff \forall x(\neg x \in A \vee x \in B) && (\text{命题逻辑结合律、幂等律})\\
&\iff \forall x(x \in A \to x \in B) && (\text{蕴涵等值式})\\
&\iff A \subseteq B && (\text{子集定义})
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

29.

Proof:

对于任意x，

$$
\begin{aligned}
&\quad\ x \in (\cap\mathscr{A}) \cap (\cap\mathscr{B}) &&\\
&\iff x \in (\cap\mathscr{A}) \wedge x \in (\cap\mathscr{B}) && (\text{集合交定义})\\
&\iff \forall z(z \in \mathscr{A} \to x \in z) \wedge \forall z(z \in \mathscr{B} \to x \in z) && (\text{广义交定义})\\
&\iff \forall z((z \in \mathscr{A} \to x \in z) \wedge (z \in \mathscr{B} \to x \in z)) && (\text{量词分配等值式})\\
&\implies \forall z(z \in \mathscr{A} \to x \in z) && (\text{命题逻辑化简律})\\
&\implies \forall z((z \in \mathscr{A} \to x \in z) \vee (z \in \mathscr{B} \to x \in z)) && (\text{命题逻辑附加律})\\
&\iff \forall z((\neg(z \in \mathscr{A}) \vee (x \in z)) \vee (\neg(z \in \mathscr{B}) \vee (x \in z))) && (\text{蕴涵等值式})\\
&\iff \forall z((\neg(z \in \mathscr{A}) \vee \neg(z \in \mathscr{B})) \vee (x \in z) \vee (x \in z)) && (\text{命题逻辑结合律、交换律})\\
&\iff \forall z((\neg(z \in \mathscr{A}) \vee \neg(z \in \mathscr{B})) \vee (x \in z)) && (\text{命题逻辑幂等律})\\
&\iff \forall z(\neg(z \in \mathscr{A} \wedge z \in \mathscr{B}) \vee x \in z) && (\text{命题逻辑德·摩根律})\\
&\iff \forall z(z \in \mathscr{A} \wedge z \in \mathscr{B} \to x \in z) && (\text{蕴涵等值式})\\
&\iff \forall z(z \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \to x \in z) && (\text{集合交定义})\\
&\iff x \in \cap(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) && (\text{广义交定义})
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

30.

(1)

Proof:

对于任意集合x，

$$
\begin{aligned}
x \in P(A) \cap P(B) &\iff x \in P(A) \wedge x \in P(B) && (\text{集合交定义})\\
&\iff x \subseteq A \wedge x \subseteq B && (\text{幂集定义})\\
&\iff x \subseteq A \cap B && (\text{第26题第(2)小题结论})\\
&\iff x \in P(A \cap B) && (\text{幂集定义})
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(2) 先证两个引理。

Lemma 1.7 对任意集合A, B, C，有:

$$C \subseteq A \Rightarrow C \subseteq A \cup B$$

$$C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cup B$$

Proof:

$$\begin{aligned} C \subseteq A &\iff C \subseteq A \wedge A \subseteq A \cup B && \text{(Lemma 1.4)} \\ &\implies C \subseteq A \cup B && \text{(子集关系性质)} \end{aligned}$$

同理可证：$C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cup B$。

Q.E.D.

Lemma 1.8 对任意集合A, B, C，有：$C \subseteq A \vee C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cup B$。

Proof:

$$\begin{aligned} C \subseteq A \vee B &\iff (C \subseteq A \vee C \subseteq B) \wedge (C \subseteq A \to C \subseteq A \cup B) \\ &\qquad \wedge (C \subseteq B \to C \subseteq A \cup B) && \text{(Lemma 1.7)} \\ &\implies (C \subseteq A \cup B) \vee (C \subseteq A \cup B) && \text{(构造性二难)} \\ &\iff C \subseteq A \cup B && \text{(命题逻辑幂等律)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

再证原题。

Proof:

对于任意集合x，

$$\begin{aligned} x \in P(A) \cup P(B) &\iff x \in P(A) \vee x \in P(B) && \text{(集合并定义)} \\ &\iff x \subseteq A \vee x \subseteq B && \text{(幂集定义)} \\ &\implies x \subseteq A \cup B && \text{(Lemma 1.8)} \\ &\iff x \in P(A \cup B) && \text{(幂集定义)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

31. 193。

32. 10。

注意：55并不是$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$的值，而是$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C|$的值。

另，此题似乎有失严密。题中隐含地假定了任何儿童参加同一项游戏项目至多一次，而这一假定并未在题中明确给出。

33. 收敛。

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} A_k = \underline{\lim_{k \to \infty}} A_k = [0, 1]$$

34.

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} B_k = [0, 1], \qquad \underline{\lim_{k \to \infty}} B_k = \emptyset$$

35.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = [0,\infty], \qquad \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \{0\}$$

36.
先证一个引理。

Lemma 1.9 对任意谓词公式F和G，有[②]:

$$\begin{aligned}
&\exists n(n \in N_+ \land \forall k(k \in N_+ \land k \geq n \to (F(k) \land G(k))))\\
\iff &\exists n_1(n_1 \in N_+ \land \forall k(k \in N_+ \land k \geq n_1 \to F(k)))\\
&\land \exists n_2(n_2 \in N_+ \land \forall k(k \in N_+ \land k \geq n_2 \to G(k)))
\end{aligned}$$

Proof:
必要性：由一阶谓词推理规则$\exists x(A(x) \land B(x)) \implies \exists x A(x) \land \exists x B(x)$和变元换名规则立即可得。
充分性：令$n = \max(n_1, n_2)$，则有$\forall k(k \in N_+ \land k \geq n \to (k \geq n_1 \land k \geq n_2))$。再由“假言三段论”推理规则，即可得证。
Q.E.D.

再证原题:

(1) 先证第一个包含关系：

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k \cup \underline{\lim_{k\to\infty}} B_k \subseteq \underline{\lim_{k\to\infty}} (A_k \cup B_k)$$

Proof:
对于任意x，

$$\begin{aligned}
&x \in \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k \cup \underline{\lim_{k\to\infty}} B_k\\
\iff &x \in \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k \lor x \in \underline{\lim_{k\to\infty}} B_k && \text{(集合并定义)}\\
\iff &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \land \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0 \to x \in A_k))\lor\\
&\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \land \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0 \to x \in B_k)) && \text{(下极限定义)}\\
\iff &\exists n_0((n_0 \in \mathbb{N}_+ \land \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0 \to x \in A_k))\lor\\
&\quad (n_0 \in \mathbb{N}_+ \land \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0 \to x \in B_k))) && \text{(量词分配等值式)}\\
\iff &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \land (\forall k(k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0 \to x \in A_k))\lor\\
&\quad (\forall k(k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0 \to x \in B_k))) && \text{(命题逻辑分配律)}\\
\implies &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \land \forall k((k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0 \to x \in A_k)\lor\\
&\quad (k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0 \to x \in B_k))) && \text{(一阶谓词推理定律)}\\
\iff &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \land \forall k(\neg(k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0) \lor x \in A_k)\lor\\
&\quad (\neg(k \in \mathbb{N}_+ \land k \geq n_0) \lor x \in B_k)) && \text{(蕴涵等值式)}
\end{aligned}$$

[②] 这个引理的纯形式化十分繁琐(主要是充分性的证明，要利用三歧性定理、分别讨论$n_1 > n_2, n_1 = n_2, n_1 < n_2$三种情况，最后合并)。故这里只给出非形式化证明(实际上是形式化证明的一个outline)。

$\iff \exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(\neg(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0) \vee (x \in A_k \vee x \in B_k)))$ (结合、交换、幂等)
$\iff \exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to (x \in A_k \vee x \in B_k)))$ (蕴涵等值式)
$\iff \exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in A_k \cup B_k))$ (集合并定义)
$\iff x \in \varliminf_{k\to\infty}(A_k \cup B_k)$ (下极限定义)
Q.E.D.

再证第二个包含关系:

$$\varliminf_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) \subseteq \varliminf_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

和

$$\varliminf_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf_{k\to\infty} B_k$$

Proof:
对于任意$x \in \varliminf_{k\to\infty}(A_k \cup B_k)$，只有下面两种可能:
(1) x属于几乎所有的A_k，即存在$n_0(x)$，使得当$k \geq n_0(x)$后，$x \in A_k$，于是$x \in \varliminf_{k\to\infty} A_k$
(2) 当(1)不成立时，必有无限个$\{A_k\}$中的集合不含x，但由于$x \in \varliminf_{k\to\infty}(A_k \cup B_k)$，即，只有有限个k，使得$x \notin (A_k \cup B_k)$，于是，必有无限个$k$，使得$x \in B_k$，即有$x \in \varlimsup_{k\to\infty} B_k$。
综合得:

$$\varliminf_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) \subseteq \varliminf_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

同理可证:

$$\varliminf_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf_{k\to\infty} B_k$$

Q.E.D.

下面证:

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

和

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

Proof:
由Lemma 1.5和教材定理1.4(1)立即得证。
Q.E.D.

最后，只需证:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(A_k\cup B_k)=\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\cup\overline{\lim_{k\to\infty}}B_k$$

即可完成本小题。

Proof:
先证:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(A_k\cup B_k)\subseteq\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\cup\overline{\lim_{k\to\infty}}B_k$$

用反证法。由上极限定义可知，对任意$x\in\overline{\lim}_{k\to\infty}(A_k\cup B_k)$，必存在无限多个$k$，使得$x\in A_k\vee x\in B_k$。若$x\notin\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k\cup\overline{\lim}_{k\to\infty}B_k$，即$x\notin\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k\wedge x\notin\overline{\lim}_{k\to\infty}B_k$，则$\{A_k\}$和$\{B_k\}$中都至多只有有限个集合，使得$x\in A_k\vee x\in B_k$。这与$x\in\overline{\lim}_{k\to\infty}(A_k\cup B_k)$矛盾。故有:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(A_k\cup B_k)\subseteq\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\cup\overline{\lim_{k\to\infty}}B_k$$

再证:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\cup\overline{\lim_{k\to\infty}}B_k\subseteq\overline{\lim_{k\to\infty}}(A_k\cup B_k)$$

对于任意x，有:

$$\begin{aligned}
&x\in\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\cup\overline{\lim_{k\to\infty}}B_k\\
\iff&x\in\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k\vee x\in\overline{\lim_{k\to\infty}}B_k && \text{(集合并定义)}\\
\iff&\forall n(n\in\mathbb{N}_+\to(\exists k(k\in\mathbb{N}_+\wedge k\ge n\wedge x\in A_k)))\vee\\
&\forall n(n\in\mathbb{N}_+\to(\exists k(k\in\mathbb{N}_+\wedge k\ge n\wedge x\in B_k))) && \text{(上极限定义)}\\
\implies&\forall n(n\in\mathbb{N}_+\to(\exists k(k\in\mathbb{N}_+\wedge k\ge n\wedge x\in A_k)\vee\\
&\qquad\exists k(k\in\mathbb{N}_+\wedge k\ge n\wedge x\in B_k))) && \text{(一阶谓词推理定律)}\\
\iff&\forall n(n\in\mathbb{N}_+\to\exists k((k\in\mathbb{N}_+\wedge k\ge n\wedge x\in A_k)\vee\\
&\qquad(k\in\mathbb{N}_+\wedge k\ge n\wedge x\in B_k))) && \text{(量词分配等值式)}\\
\iff&\forall n(n\in\mathbb{N}_+\to\exists k(k\in\mathbb{N}_+\wedge k\ge n\wedge(x\in A_k\vee x\in B_k))) && \text{(命题逻辑分配律)}\\
\iff&\forall n(n\in\mathbb{N}_+\to\exists k(k\in\mathbb{N}_+\wedge k\ge n\wedge x\in A_k\cup B_k)) && \text{(集合并定义)}\\
\iff&x\in\overline{\lim_{k\to\infty}}(A_k\cup B_k) && \text{(上极限定义)}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

(2) 与(1)类似且录入繁琐。暂时略。

(3)

Proof:

$$\begin{aligned}
&\forall x\\
&x\in\overline{\lim_{k\to\infty}}(A_k-B_k)\\
\iff&\forall n(n\in N_+\to\exists k(k\in N_+\wedge k\ge n\wedge x\in(A_k-B_k))) && \text{(上极限定义)}\\
\iff&\forall n(n\in N_+\to\exists k(k\in N_+\wedge k\ge n\wedge x\in A_k\wedge x\notin B_k)) && \text{(相对补定义)}\\
\iff&\forall n(n\in N_+\to\exists k(k\in N_+\wedge k\ge n\wedge x\in A_k\wedge
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \notin B_k)) && \text{(命题逻辑幂等律、交换律)}\\
\Longrightarrow\ & \forall n(n \in N_+ \to (\exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k) \wedge \\
&\qquad\qquad \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \notin B_k))) && \text{(一阶谓词推理定律)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in N_+ \vee (\exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k) \wedge \\
&\qquad\qquad \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \notin B_k))) && \text{(蕴涵等值式)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n((\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
&\qquad (\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \notin B_k))) && \text{(命题逻辑分配律)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \notin B_k)) && \text{(量词分配等值式)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge \neg x \in B_k)) && \text{(}\notin\text{定义)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(\neg\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n) \wedge \neg x \in B_k)) && \text{(命题逻辑双重否定律)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k \neg(\neg(k \in N_+ k \geq n) \vee x \in B_k)) && \text{(命题逻辑德·摩根律)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \forall n(\neg n \in N_+ \vee \neg\forall k(\neg(k \in N_+ k \geq n) \vee x \in B_k)) && \text{(量词否定等值式)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \forall n \neg(n \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ k \geq n) \vee x \in B_k)) && \text{(命题逻辑德·摩根律)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \neg\exists n(n \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ k \geq n) \vee x \in B_k)) && \text{(量词否定等值式)}\\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(n \in N_+ \to \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \neg\exists n(n \in N_+ \wedge \forall k(k \in N_+ k \geq n \to x \in B_k)) && \text{(蕴涵等值式)}\\
\Longleftrightarrow\ & x \in \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \wedge \neg x \in \underline{\lim_{k\to\infty}} B_k && \text{(上、下极限定义)}\\
\Longleftrightarrow\ & x \in \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \wedge x \notin \underline{\lim_{k\to\infty}} B_k && \text{(}\notin\text{定义)}\\
\Longleftrightarrow\ & x \in \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k - \underline{\lim_{k\to\infty}} B_k && \text{(相对补定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

(4)

Proof:

$$
\begin{aligned}
& \forall x \\
& x \in \underline{\lim_{k\to\infty}} (A_k - B_k) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists n_0(n_0 \in N_+ \wedge \forall k(k \in N_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in (A_k - B_k))) && \text{(下极限定义)}\\
\Longleftrightarrow\ & \exists n_0(n_0 \in N_+ \wedge \forall k(k \in N_+ \wedge k \geq n_0 \to (x \in A_k \wedge x \notin B_k))) && \text{(相对补定义)}\\
\Longleftrightarrow\ & \exists n_0(n_0 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_0) \vee (x \in A_k \wedge x \notin B_k))) && \text{(蕴涵等值式)}\\
\Longleftrightarrow\ & \exists n_0(n_0 \in N_+ \wedge \forall k((\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_0) \vee x \in A_k) \wedge
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad (\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_0) \vee x \notin B_k))) && \text{(命题逻辑分配律)}\\
\iff & \exists n_0(n_0 \in N_+ \wedge (\forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_0) \vee x \in A_k)\wedge \\
&\qquad\qquad \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_0) \vee x \notin B_k))) && \text{(量词分配等值式)}\\
\iff & \exists n_1(n_1 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_1) \vee x \in A_k)\wedge \\
& \exists n_2(n_2 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_2) \vee x \notin B_k))) && \text{(Lemma 1.9)}\\
\iff & \exists n_1(n_1 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_1) \vee x \in A_k)\wedge \\
& \exists n_2(n_2 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_2) \vee \neg x \in B_k))) && \text{(}\notin\text{定义)}\\
\iff & \exists n_1(n_1 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_1) \vee x \in A_k)\wedge \\
& \exists n_2(n_2 \in N_+ \wedge \forall k \neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_2 \wedge x \in B_k))) && \text{(命题逻辑德·摩根律)}\\
\iff & \exists n_1(n_1 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_1) \vee x \in A_k)\wedge \\
& \exists n_2(n_2 \in N_+ \wedge \neg\exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n_2 \wedge x \in B_k))) && \text{(量词否定等值式)}\\
\iff & \exists n_1(n_1 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_1) \vee x \in A_k)\wedge \\
& \exists n_2(\neg\neg n_2 \in N_+ \wedge \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n_2 \wedge x \in B_k))) && \text{(命题逻辑双重否定律)}\\
\iff & \exists n_1(n_1 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_1) \vee x \in A_k)\wedge \\
& \exists n_2 \neg(\neg n_2 \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n_2 \wedge x \in B_k))) && \text{(命题逻辑德·摩根律)}\\
\iff & \exists n_1(n_1 \in N_+ \wedge \forall k(\neg(k \in N_+ \wedge k \geq n_1) \vee x \in A_k)\wedge \\
& \neg\forall n_2(\neg n_2 \in N_+ \vee \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n_2 \wedge x \in B_k))) && \text{(量词否定等值式)}\\
\iff & \exists n_1(n_1 \in N_+ \wedge \forall k(k \in N_+ \wedge k \geq n_1 \to x \in A_k)\wedge \\
& \neg\forall n_2(n_2 \in N_+ \to \exists k(k \in N_+ \wedge k \geq n_2 \wedge x \in B_k))) && \text{(蕴涵等值式)}\\
\iff & x \in \varliminf_{k\to\infty} A_k \wedge \neg x \in \varliminf_{k\to\infty} B_k && \text{(上、下极限定义)}\\
\iff & x \in \varliminf_{k\to\infty} A_k \wedge x \notin \varliminf_{k\to\infty} B_k && \text{(}\notin\text{定义)}\\
\iff & x \in \varliminf_{k\to\infty} A_k - \varliminf_{k\to\infty} B_k && \text{(相对补定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Chapter 2

二元关系

1. $\langle a,b,c\rangle = \langle\langle a,b\rangle,c\rangle = \{\{\{\{a\},\{a,b\}\}\},\{\{\{a\},\{a,b\}\},c\}\}$

2.
(1) $\langle a,b\rangle \cup \langle c,d\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\} \cup \{\{c\},\{c,d\}\} = \{\{a\},\{a,b\},\{c\},\{c,d\}\}$;
(2) $\langle a,b\rangle \cap \langle c,d\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\} \cap \{\{c\},\{c,d\}\} = \emptyset$;
(3) $\langle a,b\rangle \oplus \langle c,d\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\} \oplus \{\{c\},\{c,d\}\} = \{\{a\},\{a,b\},\{c\},\{c,d\}\}$;
(4) $\cap\,\langle a,b\rangle = \cap\{\{a\},\{a,b\}\} = \{a\} \cap \{a,b\} = \{a\}$;
(5) $\cap\,\{\langle a,b\rangle\} = \langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$;
(6) $\cap\,\langle a,b,c\rangle = \cap\langle\langle a,b\rangle,c\rangle = \{\langle a,b\rangle\} = \{\{\{a\},\{a,b\}\}\}$;
(7) $\cap\cap\{\langle a,b\rangle\} = \cap\langle a,b\rangle = \{a\}$;
(8) $\cap\cap\cap\,\{\langle a,b\rangle\}^{-1} = \cap\cap\cap\{\langle b,a\rangle\} = \cap\cap\,\langle b,a\rangle = \cap\{b\} = b$;

3. 不成立。因为：$\langle a,\langle b,c\rangle\rangle = \{\{a\},\{a,\{\{b\},\{b,c\}\}\}\}$
$\neq \langle a,b,c\rangle = \{\{\{\{a\},\{a,b\}\}\},\{\{\{a\},\{a,b\}\},c\}\}$

4. 因为$\langle\emptyset,\emptyset\rangle = \{\{\emptyset\},\{\emptyset,\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}\}$； $\langle a,\{a\}\rangle = \{\{a\},\{a,\{a\}\}\}$，故(3), (5), (7)成立，其它不成立。

5.
(1) $A=\emptyset \vee B=\emptyset$;
(2) $A=B \vee A=\emptyset \vee B=\emptyset$;
(3) $A=\emptyset \vee B=\emptyset \vee C=\emptyset$;

6.
(1)
Proof:

$$\begin{aligned}
&\forall x,y\\
&\langle x,y\rangle \in (A\times C)\cup(B\times D)\\
\iff &(x\in A \wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in D) && \text{(定义)}
\end{aligned}$$

$\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee y \in D) \wedge$

$(y \in C \vee x \in B) \wedge (y \in C \vee y \in D)$ (命题逻辑分配律)

$\implies (x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in C \vee y \in D)$ (命题逻辑化简律)

$\iff x \in (A \cup B) \times (C \cup D)$ (定义)

故有：$(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$。

Q.E.D.

(2)

Proof:

$\forall x, y$

$\langle x, y \rangle \in (A - B) \times (C - D)$

$\iff x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C \wedge y \notin D$ (定义)

$\iff x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B \wedge y \notin D$ (命题逻辑交换律)

$\implies x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B$ (命题逻辑化简律)

$\implies (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin D)$ (命题逻辑附加律)

$\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee \notin D)$ (命题逻辑分配律)

$\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge (\neg(x \in B) \wedge (y \in D))$ ($\notin$定义)

$\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge y \in D)$ (命题逻辑德·摩根律)

$\iff (\langle x, y \rangle \in A \times C) \wedge \neg(\langle x, y \rangle \in B \times D)$ (卡氏积定义)

$\iff (\langle x, y \rangle \in A \times C) \wedge (\langle x, y \rangle \notin B \times D)$ ($\notin$定义)

$\iff \langle x, y \rangle \in (A \times C) - (B \times D)$ (相对补定义)

故有：$(A - B) \times (C - D) \subseteq (A \times C) - (B \times D)$。

Q.E.D.

7. (1)

Proof:

$\forall x, y$

$\langle x, y \rangle \in (A - B) \times C$

$\iff x \in (A - B) \wedge y \in C$ (卡氏积定义)

$\iff x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C$ (相对补定义)

$\iff x \in A \wedge \neg x \in B \wedge y \in C$ ($\notin$定义)

$\iff (x \in A \wedge \neg x \in B \wedge y \in C) \vee 0$ (命题逻辑同一律)

$\iff (x \in A \wedge \neg x \in B \wedge y \in C) \vee (x \in A \wedge 0)$ (命题逻辑零律)

$\iff (x \in A \wedge \neg x \in B \wedge y \in C) \vee (x \in A \wedge \neg y \in C \wedge y \in C)$ (命题逻辑矛盾律)

$\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge (\neg x \in B \vee \neg y \in C)$ (命题逻辑分配律)

$\iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge y \in C)$ (命题逻辑德·摩根律)

$\iff (\langle x, y \rangle \in A \times C) \wedge \neg(\langle x, y \rangle \in B \times C)$ (卡氏积定义)

$\iff (\langle x, y \rangle \in A \times C) \wedge (\langle x, y \rangle \notin B \times C)$ ($\notin$定义)

$\iff \langle x, y\rangle \in (A\times C)-(B\times C)$ (相对补定义)

故有：$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$。

Q.E.D.

(2)

Proof:

$$
\begin{aligned}
(A\oplus B)\times C =& ((A-B)\cup(B-A))\times C && \text{(对称差性质)}\\
=& ((A-B)\times C)\cup((B-A)\times C) && \text{(卡氏积性质)}\\
=& ((A\times C)-(B\times C))\cup((B\times C)-(A\times C)) && \text{(上题结论)}\\
=& (A\times C)\oplus(B\times C) && \text{(对称差性质)}
\end{aligned}
$$

注：证明中所述“性质”均出现的课本中的关于“定义”之后。若要严格起见，可仿上题，用命题逻辑证明。或用lemma的形式把用到的几个“性质”证一遍(此处从略)。

Q.E.D.

8. 答：当$A=\emptyset\vee B=\emptyset$时，有$A\times B\subseteq A$。当$A=\emptyset$时，等号成立。

9. 答：由于A到B的一个二元关系就是$A\times B$的一个子集。故，从A到B上不同二元关系的数量就是$A\times B$上不同的子集的数量。即为$2^{|A\times B|}=2^{mn}$个。

从A到B的关系有：

$R_1=\emptyset$;

$R_2=\{\langle a,1\rangle\}$;

$R_3=\{\langle b,1\rangle\}$;

$R_4=\{\langle c,1\rangle\}$;

$R_5=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$;

$R_6=\{\langle a,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$;

$R_7=\{\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$;

$R_8=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$;

从B到A的关系有：

$R_1=\emptyset$;

$R_2=\{\langle 1,a\rangle\}$;

$R_3=\{\langle 1,b\rangle\}$;

$R_4=\{\langle 1,c\rangle\}$;

$R_5=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle\}$;

$R_6=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,c\rangle\}$;

$R_7=\{\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle\}$;

$R_8=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle\}$;

10.[①]

Proof:

$\forall a\in\cup\cup R$

$\iff \exists S(S\in\cup R\wedge a\in S)$ (广义并定义)

① 感谢南京大学计算机系胡海星(starfish@bbs.nju.edu.cn)大侠提供此题的解答。

$\iff \exists S'\exists S(S' \in R \land S \in S' \land a \in S)$ (广义并定义)

$\iff \exists\{\{x\},\{x,y\}\}\exists S(\{\{x\},\{x,y\}\} \in R \land S \in \{\{x\},\{x,y\}\} \land a \in S)$ (R是二元关系)

$\iff \exists\{\{x\},\{x,y\}\}\exists S(\{\{x\},\{x,y\}\} \in R \land (S = \{x\} \lor S = \{x,y\})$
$\land a \in S)$ ($\in$性质)

$\iff \exists\{\{x\},\{x,y\}\}(\{\{x\},\{x,y\}\} \in R\land$
$(S = \{x\} \land a \in S) \lor (S = \{x,y\} \land a \in S))$ (命题逻辑德·摩根律)

$\iff \exists\{\{x\},\{x,y\}\}(\{\{x\},\{x,y\}\} \in R \land (a = x \lor (a = x \lor a = y)))$ ($\in$性质)

$\iff \exists\{\{x\},\{x,y\}\}(\{\{x\},\{x,y\}\} \in R \land (a = x \lor a = y)$ (命题逻辑结合律、幂等律)

$\iff a \in \text{dom}R \lor a \in \text{ran}R$ (定义域、值域定义)

$\iff a \in \text{fld}R$ (域定义)

故有fld$R = \cup\cup R$.

Q.E.D.

11.

(1)

$R_1 \cup R_2 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,d\rangle\}$

$R_1 \cap R_2 = \{\langle b,d\rangle\}$

$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,d\rangle\}$

(2)

dom$R_1 = \{a,b,c\}$

dom$R_2 = \{a,b,d\}$

dom$(R_1 \cup R_2) =$ dom$R_1 \cup$ dom$R_2 = \{a,b,c,d\}$

(3)

ran$R_1 = \{b,c,d\}$

ran$R_2 = \{b,c,d\}$

ran$R_1 \cap$ ran$R_2 = \{b,c,d\}$

(4)

$R_1 \restriction A = \{\langle a,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$R_1 \restriction \{c\} = \{\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$(R_1 \cup R_2) \restriction A = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$R_2 \restriction A = \{\langle a,c\rangle\}$

(5)

$R_1[A] = \{b,c,d\}$

$R_2[A] = \{c\}$

$(R_1 \cap R_2)[A] = \emptyset$

(6)

$R_1 \circ R_2 = \{\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle d,d\rangle\}$

$R_2 \circ R_1 = \{\langle a,d\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$R_1 \circ R_1 = \{\langle a,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

12.

(1) $R^{-1} = \{\langle\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\emptyset\rangle,\langle\emptyset,\{\emptyset\}\rangle,\langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$;

(2) $R \circ R = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \langle\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\rangle, \langle\{\emptyset\},\emptyset\rangle, \langle\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\rangle\}$;
(3)
$R \upharpoonright \emptyset = \emptyset$;
$R \upharpoonright \{\emptyset\} = \{\langle\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\rangle, \langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$;
$R \upharpoonright \{\{\emptyset\}\} = \{\langle\{\emptyset\},\emptyset\rangle\}$;
$R \upharpoonright \{\emptyset,\{\emptyset\}\} = R = \{\langle\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\rangle, \langle\{\emptyset\},\emptyset\rangle, \langle\emptyset,\emptyset\rangle\}$;
(4)
$R[\emptyset] = \emptyset$;
$R[\{\emptyset\}] = \{\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\emptyset\}$;
$R[\{\{\emptyset\}\}] = \{\emptyset\}$;
$R[\{\emptyset,\{\emptyset\}\}] = \text{ran}R = \{\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\emptyset\}$;
(5)
$\text{dom}R = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$;
$\text{ran}R = \{\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\emptyset\}$;
$\text{fld}R = \text{dom}R \cup \text{ran}R = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$;

13.
(1)
Proof:
由R是二元关系，易知$R \cup R^{-1}$也是二元关系。
由Lemma 1.4知，$R \subseteq R \cup R^{-1}$，即$R \cup R^{-1}$包含$R$。
而对任意$\langle x,y\rangle$，有:

$$
\begin{aligned}
& \langle x,y\rangle \in R \cup R^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x,y\rangle \in R \vee \langle x,y\rangle \in R^{-1} && \text{(集合并定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle y,x\rangle \in R^{-1} \vee \langle y,x\rangle \in R && \text{(逆关系定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle y,x\rangle \in R^{-1} \cup R && \text{(集合并定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle y,x\rangle \in R \cup R^{-1} && \text{(交换律)}
\end{aligned}
$$

可知，$R \cup R^{-1}$是对称的。
对任意包含R的对称二元关系R'，有:

$$
\begin{aligned}
& \forall\langle x,y\rangle \\
& \langle x,y\rangle \in R \cup R^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x,y\rangle \in R \vee \langle x,y\rangle \in R^{-1} && \text{(集合并定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x,y\rangle \in R \vee \langle y,x\rangle \in R && \text{(逆关系定义)} \\
\Longrightarrow\ & \langle x,y\rangle \in R' \vee \langle y,x\rangle \in R' && (R \subseteq R') \\
\Longleftrightarrow\ & (\langle x,y\rangle \in R' \wedge \langle x,y\rangle \in R') \vee (\langle y,x\rangle \in R' \wedge \langle y,x\rangle \in R') && \text{(命题逻辑幂等律)} \\
\Longleftrightarrow\ & (\langle x,y\rangle \in R' \wedge \langle x,y\rangle \in R' \wedge 1) \vee (\langle y,x\rangle \in R' \wedge \langle y,x\rangle \in R' \wedge 1) && \text{(命题逻辑同一律)} \\
\Longleftrightarrow\ & (\langle x,y\rangle \in R' \wedge (\langle x,y\rangle \in R' \wedge (\langle x,y\rangle \in R' \to \langle y,x\rangle \in R'))) \vee \\
& (\langle y,x\rangle \in R' \wedge (\langle y,x\rangle \in R' \wedge (\langle y,x\rangle \in R' \to \langle x,y\rangle \in R'))) && (R'\text{是对称的}) \\
\Longrightarrow\ & (\langle x,y\rangle \in R' \wedge \langle y,x\rangle \in R') \vee (\langle x,y\rangle \in R' \wedge \langle y,x\rangle \in R') && \text{(假言推理)} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x,y\rangle \in R' \wedge \langle y,x\rangle \in R' && \text{(命题逻辑幂等律)}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R'$ (命题逻辑化简律)

即有$R \cup R^{-1} \subseteq R'$。

综上所述，得$R \cup R^{-1}$是包含R的最小的对称二元关系。

Q.E.D.

14.

(1) $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$;

(2)

Proof:

$$\begin{aligned}
& R^2 \cap R = \emptyset \\
\iff & \neg\exists x\exists z(\langle x,z\rangle \in R^2 \wedge \langle x,z\rangle \in R) && (\emptyset\text{定义}) \\
\iff & \forall x\forall z\neg(\langle x,z\rangle \in R^2 \wedge \langle x,z\rangle \in R) && (\text{量词否定等值式}) \\
\iff & \forall x\forall z(\neg\langle x,z\rangle \in R^2 \vee \neg\langle x,z\rangle \in R) && (\text{命题逻辑德·摩根律}) \\
\iff & \forall x\forall z(\neg(\exists y(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R)) \vee \neg\langle x,z\rangle \in R) && (\text{关系合成定义}) \\
\iff & \forall x\forall z(\forall y(\neg(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R)) \vee \neg\langle x,z\rangle \in R) && (\text{量词否定等值式}) \\
\iff & \forall x\forall z\forall y(\neg(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R) \vee \neg\langle x,z\rangle \in R) && (\text{量词辖域扩张等值式}) \\
\iff & \forall x\forall y\forall z(\neg(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R) \vee \neg\langle x,z\rangle \in R) && (\text{全称量词交换律}^{②}) \\
\iff & \forall x\forall y\forall z((\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R) \to \neg\langle x,z\rangle \in R) && (\text{蕴涵等值式}) \\
\iff & R\text{是反传递的。} && (\text{反传递定义})
\end{aligned}$$

Q.E.D.

15.

若A非空，则:

R有如下性质:

非自反：对任意x，有$x \not\subset x$，故$\langle x,x\rangle \notin R$。
反自反：对任意x，有$\langle x,x\rangle \notin R$。
非对称：不存在$\emptyset, A \in P(A) \wedge \emptyset \subset A$但$A \not\subset \emptyset$。
反对称：由于不存在$x, y \in P(A)$使得$\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R$，故$\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R \to x = y$恒成立。
传递：真子集性质。

S有如下性质:

非自反：由于A非空，则故有$A \in P(A) \wedge A \neq \emptyset$，于是$A \cap A = A \neq \emptyset \implies \langle A,A\rangle \notin S$。
非反自反：$\emptyset \in P(A) \wedge \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \implies \langle \emptyset,\emptyset\rangle \in S$。
对称：集合交性质。
非反对称：有$\langle \emptyset, A\rangle \in S \wedge \langle A,\emptyset\rangle \in S$，但$A \neq \emptyset$。
非传递：有$\langle A,\emptyset\rangle \in S \wedge \langle \emptyset,A\rangle \in S$，但$\langle A,A\rangle \notin S$。

② 参见教材例27.8。

T有如下性质:

非自反: 有$\langle\emptyset,\emptyset\rangle \notin T$。
非反自反: 有$A \in P(A) \wedge A \cup A = A \implies \langle A, A\rangle \in T$。
对称: 集合并性质。
非反对称: 有$\langle\emptyset, A\rangle \in T \wedge \langle A, \emptyset\rangle \in T$，但$A \neq \emptyset$。
非传递: 有$\langle\emptyset, A\rangle \in T \wedge \langle A, \emptyset\rangle \in T$，但$\langle\emptyset,\emptyset\rangle \notin T$。

若A为空，则:

R有如下性质:

非自反: $\emptyset \not\subset \emptyset$。
反自反: 不存在x，使$\langle x, x\rangle \in R$。
对称: 不存在$x, y \in P(A)$使得$\langle x, y\rangle \in R$，故$xRy \to yRx$恒成立。
反对称: 由于不存在$x, y \in P(A)$使得$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R$，故$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \to x = y$恒成立。
传递: 因为$\emptyset$有真子集，故R为空关系。故不存在x, y, z，使得$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$。所以蕴涵式: $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \in R$永真。

S有如下性质:

自反: $\langle\emptyset,\emptyset\rangle \in S$。
非反自反: $\langle\emptyset,\emptyset\rangle \in S$。
对称: 集合交性质。
反对称: $\forall x \forall y(\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, x\rangle \in S \Rightarrow x = \emptyset \wedge y = \emptyset \Rightarrow x = y)$。
传递: $\forall x \forall y \forall z(\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in S \Rightarrow x = \emptyset \wedge y = \emptyset \wedge z = \emptyset \implies \langle x, z\rangle \in S)$。

T有如下性质:

自反: $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset = A \implies \langle\emptyset,\emptyset\rangle \in T$。
非反自反: $\langle\emptyset,\emptyset\rangle \in T$。
对称: 集合并性质。
反对称: $\forall x \forall y(\langle x, y\rangle \in T \wedge \langle y, x\rangle \in T \Rightarrow x = \emptyset \wedge y = \emptyset \Rightarrow x = y)$
传递: $\forall x \forall y \forall z(\langle x, y\rangle \in T \wedge \langle y, z\rangle \in T \Rightarrow x = \emptyset \wedge y = \emptyset \wedge z = \emptyset \implies \langle x, z\rangle \in T)$。

16.
(1)
$R = \{\langle 0,10\rangle, \langle 1,9\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,4\rangle, \langle 7,3\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 9,1\rangle, \langle 10,0\rangle\}$;
$S = \{\langle 0,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 9,1\rangle, \langle 12,0\rangle\}$.

(2)

R有如下性质:

非自反: $\langle 0,0\rangle \notin R$。
非反自反: 使$\langle 5,5\rangle \in R$。
对称: 加法性质。
非反对称: $\langle 0,10\rangle \in R \wedge \langle 10,0\rangle$，但$0 \neq 10$。

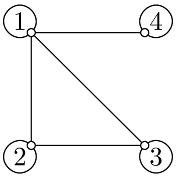
非传递：$\langle 0,10\rangle \in R \wedge \langle 10,0\rangle$，但$\langle 0,0\rangle \notin R$。

S有如下性质：

非自反：$\langle 0,0\rangle \notin S$。
非反自反：$\langle 3,3\rangle \in S$。
非对称：$\langle 0,4\rangle \in S$，但$\langle 4,0\rangle \notin S$。
反对称：不存在$x,y \in A$使得$\langle x,y\rangle \in S \wedge \langle y,x\rangle \in S$。
非传递：$\langle 12,0\rangle \in S \wedge \langle 0,4\rangle \in S$，但$\langle 12,4\rangle \notin S$。

17.

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$G(R)$

R有如下性质：

非自反：有$\langle 3,3\rangle \notin R$。
非反自反：有$\langle 1,1\rangle \in R$。
对称：定义。
非反对称：有$\langle 1,2\rangle \in R \wedge \langle 2,1\rangle \in R$但$1 \neq 2$。
非传递：有$\langle 2,0\rangle \in R \wedge \langle 0,3\rangle \in R$但$\langle 2,3\rangle \notin R$。

18.

$R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$;
$R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle\}$;
$R_3 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle\}$;
$R_4 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$;

$$M(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} M(R_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M(R_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M(R_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_1的性质：

自反：易于验证。
非反自反：$\langle a,a\rangle \in R_1$。
非对称：$\langle a,b\rangle \in R_1$，但$\langle b,a\rangle \notin R_1$。
反对称：易于验证。

传递：易于验证。

R_2的性质：

非自反：$\langle a,a\rangle \notin R_2$
反自反：易于验证。
非对称：$\langle a,b\rangle \in R_2$，但$\langle b,a\rangle \notin R_2$。
反对称：易于验证。
非传递：$\langle a,b\rangle \in R_2 \wedge \langle b,c\rangle \in R_2$，但$\langle a,c\rangle \notin R_2$。

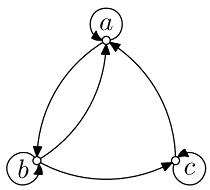
R_3的性质：

非自反：$\langle a,a\rangle \notin R_3$
反自反：易于验证。
非对称：$\langle a,b\rangle \in R_3$，但$\langle b,a\rangle \notin R_3$。
非反对称：$\langle a,c\rangle \in R_3 \wedge \langle c,a\rangle \in R_3$，但$a \neq c$
非传递：$\langle a,c\rangle \in R_3 \wedge \langle c,a\rangle \in R_3$，但$\langle a,a\rangle \notin R_3$。

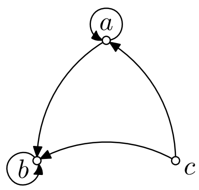
R_4的性质：

自反：易于验证。
非反自反：$\langle a,a\rangle \in R_4$。
对称：易于验证。
反对称：易于验证。
传递：易于验证。

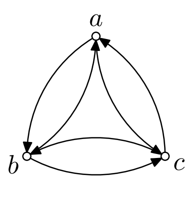
19.
$R_1 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$;
$R_2 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$;
$R_3 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$;
$R_4 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$;



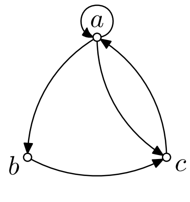
$G(R_1)$



$G(R_2)$



$G(R_3)$



$G(R_4)$

R_1的性质：

自反：易于验证。
非反自反：$\langle a,a\rangle \in R_1$。
非对称：$\langle c,a\rangle \in R_1$，但$\langle a,c\rangle \notin R_1$。
非反对称：$\langle a,b\rangle \in R_1 \wedge \langle b,a\rangle \in R_1$，但$a \neq b$
非传递：$\langle c,a\rangle \in R_1 \wedge \langle a,b\rangle \in R_1$，但$\langle c,b\rangle \notin R_1$。

R_2的性质：

非自反：$\langle c,c\rangle \notin R_2$
非反自反：$\langle a,a\rangle \in R_2$
非对称：$\langle a,b\rangle \in R_2$，但$\langle b,a\rangle \notin R_2$。
反对称：易于验证。
传递：易于验证。

R_3的性质：

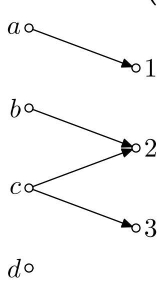
非自反：$\langle a,a\rangle \notin R_3$
反自反：易于验证。
对称：易于验证。
非反对称：$\langle a,b\rangle \in R_3 \wedge \langle b,a\rangle \in R_3$，但$a \neq b$
非传递：$\langle a,b\rangle \in R_3 \wedge \langle b,a\rangle \in R_3$，但$\langle a,a\rangle \notin R_3$。

R_4的性质：

非自反：$\langle b,b\rangle \notin R_4$。
非反自反：$\langle a,a\rangle \in R_4$。
非对称：$\langle a,b\rangle \in R_4$，但$\langle b,a\rangle \notin R_4$。
非反对称：$\langle a,c\rangle \in R_4 \wedge \langle c,a\rangle \in R_4$，但$a \neq c$
非传递：$\langle c,a\rangle \in R_4 \wedge \langle a,b\rangle \in R_4$，但$\langle c,b\rangle \notin R_4$。

20.

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$G(R_1)$

21.

$M(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M(R_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M(R_2 \circ R_1) = M(R_1) \cdot M(R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

得：$R_2 \circ R_1 = \{\langle 1, \beta \rangle\}$。

22.

Proof:

由教材定理2.19 (3)与定理2.24知：

$R = t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots$

由上式和Lemma 1.4知，$R \circ R = R^2 \subseteq R$。

下面证：$R \subseteq R \circ R$:

$\forall x, y$

$\langle x, y \rangle \in R$

$\iff 1 \wedge \langle x, y \rangle \in R$ (命题逻辑同一律)

$\iff \langle x, x \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R$ (R是自反的)

$\implies \exists z(\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in R)$ ($\exists$引入)

$\iff \langle x, y \rangle \in R \circ R$ (合成运算定义)

于是有：$R \subseteq R \circ R$。

综合，得：$R \circ R = R$。

Q.E.D.

举反例证明逆定理不成立。

Proof:

令$A = \{a, b\}$，$R = \{\langle a, a \rangle\}$，则有$R \circ R = \{\langle a, a \rangle\} = R$，但$\langle b, b \rangle \notin R$，因而$R$不是自反的。

故有，$R \circ R = R \not\Leftarrow R$是自反的$\wedge R$是传递的。

Q.E.D.

23.

Proof:

先证必要性。

若$R \circ S$具有对称性，则：

$\forall x, y$

$\langle x, y \rangle \in R \circ S$

$\implies \langle y, x \rangle \in R \circ S$ ($R \circ S$是对称的)

$\iff \exists z(\langle y, z \rangle \in S \wedge \langle z, x \rangle \in R)$ (合成运算定义)

$\Longrightarrow \exists z(\langle z,y\rangle \in S \wedge \langle x,z\rangle \in R)$ (R和S都是对称的)
$\Longleftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in R \wedge \langle z,y\rangle \in S)$ (命题逻辑交换律)
$\Longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in S\circ R$ (合成运算定义)
于是有$R\circ S \subseteq S\circ R$。
同理可证：$S\circ R \subseteq R\circ S$。
于是证得：若$R\circ S$具有对称性，则$R\circ S = S\circ R$。
下面证充分性。
若$R\circ S = S\circ R$，则：

$\forall x,y$

$\langle x,y\rangle \in R\circ S$

$\Longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in S\circ R$ ($R\circ S = S\circ R$)
$\Longleftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in R \wedge \langle z,y\rangle \in S)$ (合成运算定义)
$\Longrightarrow \exists z(\langle z,x\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in S)$ (R和S都是对称的)
$\Longleftrightarrow \exists z(\langle y,z\rangle \in S \wedge \langle z,x\rangle \in R)$ (命题逻辑交换律)
$\Longleftrightarrow \langle y,x\rangle \in R\circ S$ (合成运算定义)
充分性得证。
综合即得原题。
Q.E.D.

24.
$R_1 = \emptyset$
$R_2 = \{\langle 1,1\rangle\}$
$R_3 = \{\langle 2,2\rangle\}$
$R_4 = \{\langle 1,2\rangle\}$
$R_5 = \{\langle 2,1\rangle\}$
$R_6 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$
$R_7 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle\}$
$R_8 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
$R_9 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$
$R_{10} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
$R_{11} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
$R_{12} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$
$R_{13} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
$R_{14} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
$R_{15} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
$R_{16} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$
其中：
$R_8, R_{13}, R_{14}, R_{16}$是自反的。
R_1, R_4, R_5, R_9是反自反的。
$R_1, R_2, R_3, R_8, R_9, R_{12}, R_{15}, R_{16}$是对称的。
$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_{10}, R_{11}, R_{13}, R_{14}$是反对称的。

$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_{10}, R_{11}, R_{13}, R_{14}, R_{16}$是传递的。
R_1是空关系。
R_8是恒等关系。
R_{16}是全域关系。
R_{13}是小于等于关系。
R_4是小于关系。
R_{14}是大于等于关系。
R_5是大于关系。
R_{13}是整除关系。

25.

先证：$I_{\mathrm{dom}R} \subseteq R^{-1} \circ R$。

Proof:

$\forall x, y$

$\langle x, y \rangle \in I_{\mathrm{dom}R}$

$\iff x = y \land x \in \mathrm{dom}R$ (恒等关系定义)

$\iff x = y \land \exists z(\langle x, z \rangle \in R)$ (定义域定义)

$\iff x = y \land \exists z(\langle x, z \rangle \in R \land \langle z, x \rangle \in R^{-1})$ (逆关系定义)

$\iff x = y \land \langle x, x \rangle \in R^{-1} \circ R$ (合成运算定义)

$\iff \langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle \land \langle x, x \rangle \in R^{-1} \circ R$ (教材定理2.1)

$\implies \langle x, y \rangle \in R^{-1} \circ R$ (等号性质)

Q.E.D.

再证：$I_{\mathrm{ran}R} \subseteq R \circ R^{-1}$。

Proof:

$\forall x, y$

$\langle x, y \rangle \in I_{\mathrm{ran}R}$

$\iff x = y \land x \in \mathrm{ran}R$ (恒等关系定义)

$\iff x = y \land \exists z(\langle z, x \rangle \in R)$ (值域定义)

$\iff x = y \land \exists z(\langle z, x \rangle \in R \land \langle x, z \rangle \in R^{-1})$ (逆关系定义)

$\iff x = y \land \exists z(\langle x, z \rangle \in R^{-1} \land \langle z, x \rangle \in R)$ (命题逻辑交换律)

$\iff x = y \land \langle x, x \rangle \in R \circ R^{-1}$ (合成运算定义)

$\iff \langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle \land \langle x, x \rangle \in R \circ R^{-1}$ (教材定理2.1)

$\implies \langle x, y \rangle \in R \circ R^{-1}$ (等号性质)

Q.E.D.

26.

(1)

$$M(R)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M(R^2)=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M(R^3)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得：$R^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$，$R^3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$
(2) $m=2,n=4$;
(3) 略。

27.
先证几个引理。

Lemma 2.1 对任意二元关系R_1,R_2，有$\mathrm{fld}(R_1\circ R_2)\subseteq \mathrm{fld}R_1\cup\mathrm{fld}R_2$

Proof:

$$\begin{aligned}
&\forall x\\
&x\in\mathrm{fld}(R_1\circ R_2)\\
\Longleftrightarrow\ &x\in\mathrm{dom}(R_1\circ R_2)\vee x\in\mathrm{ran}(R_1\circ R_2) && \text{(fld定义)}\\
\Longleftrightarrow\ &\exists y(\langle x,y\rangle\in(R_1\circ R_2))\vee\exists y(\langle y,x\rangle\in(R_1\circ R_2)) && \text{(dom、ran定义)}\\
\Longleftrightarrow\ &\exists y(\langle x,y\rangle\in(R_1\circ R_2)\vee\langle y,x\rangle\in(R_1\circ R_2)) && \text{(量词分配等值式)}\\
\Longleftrightarrow\ &\exists y(\exists z(\langle x,z\rangle\in R_2\wedge\langle z,y\rangle\in R_1)\vee\\
&\quad\exists z(\langle y,z\rangle\in R_2\wedge\langle z,x\rangle\in R_1)) && \text{(合成运算定义)}\\
\Longrightarrow\ &\exists z(\langle x,z\rangle\in R_2\wedge\langle z,y\rangle\in R_1)\vee\\
&\exists z(\langle y,z\rangle\in R_2\wedge\langle z,x\rangle\in R_1) && \text{(}\exists\text{消去)}\\
\Longrightarrow\ &x\in\mathrm{fld}R_2\vee x\in\mathrm{fld}R_1 && \text{(命题逻辑化简律、fld定义)}\\
\Longleftrightarrow\ &x\in\mathrm{fld}R_1\cup\mathrm{fld}R_2 && \text{(集合并定义)}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 2.2 对任意二元关系R，有$\mathrm{fld}R^m\subseteq\mathrm{fld}R,m\in N_+$

Proof:
当$m=1$时，命题显然成立。
设$m=k$时，命题成立。即有：$\mathrm{fld}R^k\subseteq\mathrm{fld}R$，则当$m=k+1$时：

$$\begin{aligned}
\mathrm{fld}R^{k+1}&=\mathrm{fld}(R^k\circ R) && \text{(幂运算定义)}\\
&\subseteq\mathrm{fld}R^k\cup\mathrm{fld}R && \text{(Lemma 2.1)}\\
&\subseteq\mathrm{fld}R\cup\mathrm{fld}R && \text{(归纳前提\&Lemma 1.5)}\\
&=\mathrm{fld}R && \text{(幂等律)}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 2.3 对任意二元关系R_1,R_2，若$\mathrm{fld}R_1\cap\mathrm{fld}R_2=\emptyset$，则有$R_1\circ R_2=\emptyset$

Proof:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{fld}R_1 \cap \mathrm{fld}R_2 = \emptyset \\
\iff & \neg\exists y(y \in \mathrm{fld}R_1 \wedge y \in \mathrm{fld}R_2) && (\emptyset\text{定义，集合交定义}) \\
\iff & \neg\exists y((y \in \mathrm{dom}R_1 \vee y \in \mathrm{ran}R_1) \wedge (y \in \mathrm{dom}R_2 \vee y \in \mathrm{ran}R_2)) && (\mathrm{fld}\text{定义}) \\
\iff & \neg\exists y((y \in \mathrm{dom}R_1 \wedge y \in \mathrm{dom}R_2) \vee (y \in \mathrm{dom}R_1 \wedge y \in \mathrm{ran}R_2) \vee \\
& \qquad (y \in \mathrm{ran}R_1 \wedge y \in \mathrm{dom}R_2) \vee (y \in \mathrm{ran}R_1 \wedge y \in \mathrm{ran}R_2)) && (\text{命题逻辑分配律}) \\
\iff & \forall y \neg((y \in \mathrm{dom}R_1 \wedge y \in \mathrm{dom}R_2) \vee (y \in \mathrm{dom}R_1 \wedge y \in \mathrm{ran}R_2) \vee \\
& \qquad (y \in \mathrm{ran}R_1 \wedge y \in \mathrm{dom}R_2) \vee (y \in \mathrm{ran}R_1 \wedge y \in \mathrm{ran}R_2)) && (\text{量词否定等值式}) \\
\Longrightarrow & \neg((y \in \mathrm{dom}R_1 \wedge y \in \mathrm{dom}R_2) \vee (y \in \mathrm{dom}R_1 \wedge y \in \mathrm{ran}R_2) \vee \\
& \quad (y \in \mathrm{ran}R_1 \wedge y \in \mathrm{dom}R_2) \vee (y \in \mathrm{ran}R_1 \wedge y \in \mathrm{ran}R_2)) && (\forall\text{消去}) \\
\iff & \neg(y \in \mathrm{dom}R_1 \wedge y \in \mathrm{dom}R_2) \wedge \neg(y \in \mathrm{dom}R_1 \wedge y \in \mathrm{ran}R_2) \wedge \\
& \neg(y \in \mathrm{ran}R_1 \wedge y \in \mathrm{dom}R_2) \wedge \neg(y \in \mathrm{ran}R_1 \wedge y \in \mathrm{ran}R_2) && (\text{命题逻辑德·摩根律}) \\
\Longrightarrow & \neg(y \in \mathrm{dom}R_1 \wedge y \in \mathrm{ran}R_2) && (\text{命题逻辑化简律}) \\
\iff & \neg(y \in \mathrm{ran}R_2 \wedge y \in \mathrm{dom}R_1) && (\text{命题逻辑交换律}) \\
\iff & \neg(\exists x(\langle x, y\rangle \in R_2) \wedge \exists z(\langle y, z\rangle \in R_1)) && (\text{dom、ran定义}) \\
\iff & \neg\exists x\exists z(\langle x, y\rangle \in R_2 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1) && (\text{量词辖域扩张等值式}) \\
\iff & \forall x\forall z\neg(\langle x, y\rangle \in R_2 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1) && (\text{量词否定等值式}) \\
\iff & \forall y\forall x\forall z\neg(\langle x, y\rangle \in R_2 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1) && (\forall\text{引入}) \\
\iff & \forall x\forall z\forall y\neg(\langle x, y\rangle \in R_2 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1) && (\text{全称量词交换律}) \\
\iff & \forall x\forall z\neg\exists y(\langle x, y\rangle \in R_2 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1) && (\text{量词否定等值式}) \\
\iff & \forall x\forall z\neg(\langle x, z\rangle \in R_1 \circ R_2) && (\text{合成运算定义}) \\
\iff & R_1 \circ R_2 = \emptyset && (\emptyset\text{定义})
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 2.4 对任意二元关系R_1, R_2，若$\mathrm{fld}R_1 \cap \mathrm{fld}R_2 = \emptyset$，则有$R_1^m \circ R_2 = \emptyset$和$R_2^m \circ R_1 = \emptyset$，其中$m$是任意非负整数。

Proof:

由Lemma 2.3知，$m = 1$时命题成立。

又由Lemma 2.2知，$\mathrm{fld}R_1^m \subseteq \mathrm{fld}R_1$，故有：

$$\begin{aligned}
& \forall x(x \in \mathrm{fld}R_1^m \to x \in \mathrm{fld}R_1) \wedge \forall x\neg(x \in \mathrm{fld}R_1 \wedge x \in \mathrm{fld}R_2) && (\text{题设\&Lemma 2.2}) \\
\iff & \forall x(x \in \mathrm{fld}R_1^m \to x \in \mathrm{fld}R_1 \wedge \neg(x \in \mathrm{fld}R_1 x \in \wedge \mathrm{fld}R_2)) && (\text{量词分配等值式}) \\
\iff & \forall x(x \in \mathrm{fld}R_1^m \to x \in \mathrm{fld}R_1 \wedge (\neg x \in \mathrm{fld}R_1 \vee \neg x \in \mathrm{fld}R_2)) && (\text{命题逻辑德·摩根律}) \\
\iff & \forall x(x \in \mathrm{fld}R_1^m \to x \in \mathrm{fld}R_1 \wedge (x \in \mathrm{fld}R_1 \to \neg x \in \mathrm{fld}R_2)) && (\text{蕴涵等值式}) \\
\Longrightarrow & \forall x(x \in \mathrm{fld}R_1^m \to \neg x \in \mathrm{fld}R_2) && (\text{假言三段论}) \\
\iff & \forall x\neg(x \in \mathrm{fld}R_1^m \wedge x \in \mathrm{fld}R_2) && (\text{蕴涵等值式、德·摩根律}) \\
\iff & \neg\exists x(x \in \mathrm{fld}R_1^m \wedge x \in \mathrm{fld}R_2) && (\text{量词否定等值式}) \\
\iff & \mathrm{fld}R_1^m \cap \mathrm{fld}R_2 = \emptyset && (\text{集合并定义、}\emptyset\text{定义})
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow R_1^m \circ R_2 = \emptyset$ (Lemma 2.3)

同理可证：$R_2^m \circ R_1 = \emptyset$。

Q.E.D.

下面证原题。

Proof:

用归纳法证明。

当$m = 0$时：

由于$R_1 \cup R_2$仍是A上的二元关系。故有：

$$
\begin{aligned}
(R_1 \cup R_2)^0 &= I_A && \text{(幂运算定义)}\\
&= I_A \cup I_A && \text{(幂等律)}\\
&= R_1^0 \cup R_2^0 && \text{(幂运算定义)}
\end{aligned}
$$

当$m = 1$时：

$$
\begin{aligned}
(R_1 \cup R_2)^1 &= R_1 \cup R_2 && \text{(幂运算定义)}\\
&= R_1^1 \cup R_2^1 && \text{(幂运算定义)}
\end{aligned}
$$

设$m = k$时$(k \geq 1)$，等式成立，即有：$(R_1 \cup R_2)^k = R_1^k \cup R_2^k$。

则，当$m = k + 1$时：

$$
\begin{aligned}
(R_1 \cup R_2)^{k+1} &= (R_1 \cup R_2)^k \circ (R_1 \cup R_2) && \text{(幂运算定义)}\\
&= (R_1^k \cup R_2^k) \circ (R_1 \cup R_2) && \text{(归纳前提)}\\
&= (R_1^k \cup R_2^k) \circ R_1 \cup (R_1^k \cup R_2^k) \circ R_2 && \text{(教材定理2.6(1))}\\
&= (R_1^k \circ R_1) \cup (R_2^k \circ R_1) \cup (R_1^k \circ R_2) \cup (R_2^k \circ R_2) && \text{(教材定理2.6(2))}\\
&= R_1^{k+1} \cup (R_2^k \circ R_1) \cup (R_1^k \circ R_2) \cup R_2^{k+1} && \text{(幂运算定义)}\\
&= R_1^{k+1} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup R_2^{k+1} && \text{(Lemma 2.4)}\\
&= R_1^{k+1} \cup R_2^{k+1} && \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

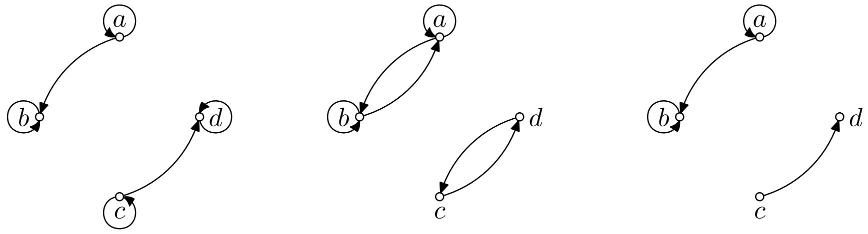
28. $m = 1, n = 16$。

29.

$r(R) = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, d\rangle\}$;

$s(R) = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}$;

$t(R) = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, d\rangle\}$。



$r(R)$ $s(R)$ $t(R)$

30.

(1)

Proof:

由传递闭包的定义知，$R^+ = t(R)$是传递的。又由教材定理2.19(3)知，$(R^+)^+ = t(R^+) = R^+$。

Q.E.D.

(2)

Proof:

由教材定理2.22和2.24知，$R^\oplus = rt(R)$。又由教材定理2.25(3)知，$R^\oplus$是自反的和传递的。再由教材定理2.19(3)知，$trt(R) = rt(R)$。最后由教材定理2.19(1)和2.25(3)知，$rtrt(R) = trt(R)$。于是，$(R^\oplus)^\oplus = rtrt(R) = trt(R) = rt(R) = R^\oplus$。

Q.E.D.

(3)

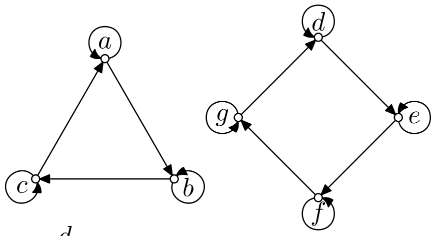
Proof:

$$
\begin{aligned}
R \circ R^\oplus &= R \circ \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i && \text{(定义)} \\
&= \bigcup_{i=0}^{\infty} R \circ R^i && \text{(教材定理2.6(1))} \\
&= \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{i+1} && \text{(教材定理2.17(1))} \\
&= \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i && (i := i+1) \\
&= t(R) && \text{(教材定理2.24)} \\
&= R^+ && \text{(定义)}
\end{aligned}
$$

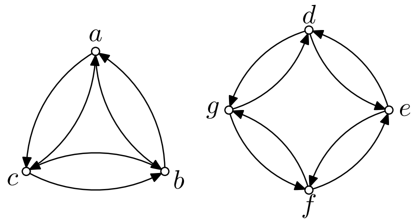
同理可证：$R^+ = R^\oplus \circ R$。

Q.E.D.

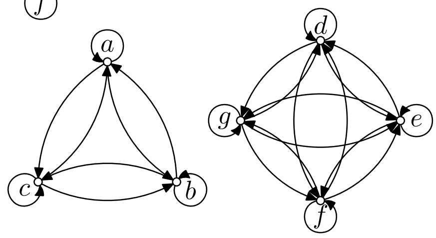
31.



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

32.

Proof:

由$A = I \cdot A \cdot I$可得三种关系的自反性。

分别由$B = P \cdot A \cdot Q \rightarrow A = P^{-1} \cdot B \cdot Q^{-1}$、$B = P \cdot A \cdot P^{-1} \rightarrow A = P \cdot B \cdot P^{-1}$和$B = P \cdot A \cdot P^T \rightarrow A = P^{-1} \cdot B \cdot (P^T)^{-1}$，得三种关系的对称性。

再由$B = P_1 \cdot A \cdot Q_1 \wedge C = P_2 \cdot B \cdot Q_2 \rightarrow C = P_2 \cdot P_1 \cdot A \cdot Q_1 \cdot Q_2$、$B = P \cdot A \cdot P^{-1} \wedge C = Q \cdot B \cdot Q^{-1} \rightarrow C = Q \cdot P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot Q^{-1}$和$B = P \cdot A \cdot P^T \wedge C = Q \cdot B \cdot Q^T \rightarrow C = Q \cdot P \cdot A \cdot P^T \cdot Q^T$，得三种关系的传递性。

综合得，三种关系皆为等价关系。

Q.E.D.

33.

Proof:

自反性。对任意$a + bi \in C^*$，由a是实数和$a \neq 0$得：$a^2 > 0$。从而有$\langle a + bi, a + bi \rangle \in R$。

对称性。对任意$\langle a + bi, c + di \rangle \in R$，由定义得：$a + bi \in C^* \wedge c + di \in C^* \wedge ac > 0$，由逻辑与运算交换律和实数乘法交换律得：$c + di \in C^* \wedge a + bi \in C^* \wedge ca > 0$，于是得$\langle c + di, a + bi \rangle \in R$。

传递性。对任意$\langle a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i \rangle, \langle a_2 + b_2 i, a_3 + b_3 i \rangle \in R$，推得$a_1 + b_1 i \in C^* \wedge a_3 + b_3 i \in C^* \wedge a_1 a_2 > 0 \wedge a_2 a_3 > 0$。由乘法性质知，$ab > 0 \Leftrightarrow sgn(a) = sgn(b)$，于是有：[3]

$$
\begin{aligned}
& a_1 a_2 > 0 \wedge a_2 a_3 \\
\Longleftrightarrow\ & sgn(a_1) = sgn(a_2) \wedge sgn(a_2) = sgn(a_3) && \text{(乘法性质)} \\
\Longrightarrow\ & sgn(a_1) = sgn(a_3) && \text{(等号传递性)} \\
\Longleftrightarrow\ & a_1 a_3 > 0 && \text{(乘法性质)}
\end{aligned}
$$

故有$\langle a_1 + b_1 i, a_3 + b_3 i \rangle \in R$。

综合得，R是等值关系。

Q.E.D.

$C^*/R = \{\{a + bi | a + bi \in C^* \wedge a > 0\}, \{a + bi | a + bi \in C^* \wedge a < 0\}\}$;

R可以看作复平面内一切与y轴没有公共点的有向线段的集合。C^*/R的性质则说明：一个有向线段具有这样的性质(与y轴没有公共点)当且仅当线段的两个端点皆在y轴的同一侧。

34.
(1) 不是。

Proof:
令任意等价关系$R_1(R_2)$，必有$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \in R_1(R_2))$，由绝对补运算定义可知，$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \notin \sim R_1(\sim R_2))$。而$A$非空，即存在$x \in A$但$\langle x,x\rangle \notin \sim R_1(\sim R_2)$，于是$\sim R_1(\sim R_2)$不是自反关系，因而也不是等价关系。

Q.E.D.

(2) 不是。

Proof:
令任意等价关系R_1, R_2，必有$\forall x(x \in A \rightarrow (\langle x,x\rangle \in R_1 \land \langle x,x\rangle \in R_2))$，由相对补运算定义可知，$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \notin R_1 - R_2)$。而$A$非空，即存在$x \in A$但$\langle x,x\rangle \notin R_1 - R_2$，于是$R_1 - R_2$不是自反关系，因而也不是等价关系。

同理可证：$R_2 - R_1$不是等价关系。

Q.E.D.

(3) 不一定。

Proof:
反例：令$A = \{a,b,c\}, R_1 = E, R_2 = \{\langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup I_A$，易见$R_1$和$R_2$都是等价关系。但对$r(R_1 - R_2) = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\} \cup I_A$，有$\langle a,b\rangle \in r(R_1 - R_2) \land \langle b,c\rangle \in r(R_1 - R_2)$，但$\langle a,c\rangle \notin r(R_1 - R_2)$。$r(R_1 - R_2)$不是传递的，因而不是等价关系。由对称性可证：$r(R_2 - R_1)$的情况。

“正例”：令$R_1 = R_2 = I_A$，则$R_1 = R_2 = r(R_1 - R_2) = r(R_2 - R_1) = I_A$都是等价关系。

可见，当R_1和R_2都是等价关系时，$r(R_1 - R_2)$或$r(R_2 - R_1)$不一定是等价关系。

Q.E.D.

(4) 不一定。

Proof:
反例：令$A = \{a,b,c\}, R_1 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\} \cup I_A, R_2 = \{\langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup I_A$，易见$R_1$和$R_2$都是等价关系。但$R_1 \circ R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle\} \cup I_A$不是对称的(有$\langle c,b\rangle \in R_1 \circ R_2$但$\langle b,c\rangle \notin R_1 \circ R_2$)，因而不是等价关系。由对称性可证：$R_2 \circ R_1$的情况。

“正例”：令$R_1 = R_2 = I_A$，$R_1 = R_2 = R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 = I_A$都是等价关系。

可见，当R_1和R_2都是等价关系时，$R_1 \circ R_2$或$R_2 \circ R_1$不一定是等价关系。

Q.E.D.

---

③ sgn是“符号函数”—$signum$的缩写，定义为$sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

35.

Proof:

先证明R是对称的。

$$
\begin{aligned}
& \forall x, y \in A \\
& \langle x, y\rangle \in R \\
\iff & \langle x, y\rangle \in R \land 1 && \text{(命题逻辑同一律)} \\
\iff & \langle x, y\rangle \in R \land \langle x, x\rangle \in R && \text{(R是自反的)} \\
\implies & \langle y, x\rangle \in R && \text{(题设(2))}
\end{aligned}
$$

证明R是传递的。

$$
\begin{aligned}
& \forall x, y, z \in A \\
& \langle x, y\rangle \in R \land \langle y, z\rangle \in R \\
\implies & \langle y, x\rangle \in R \land \langle y, z\rangle \in R && \text{(R是对称的)} \\
\implies & \langle x, z\rangle \in R && \text{(题设(2))}
\end{aligned}
$$

综上所述，可知R是自反的、对称的和传递的，故R是A上的等价关系。

Q.E.D.

36.

Proof:

(1) 由B_{i_k}的选择方式知$\emptyset \notin \pi_2$。

(2) 对任意$j, k \in \{1, 2, \ldots, m\} \land j \neq k$，有:

$$
\begin{aligned}
B_{i_j} \cap B_{i_k} &= (A_{i_j} \cap B) \cap (A_{i_k} \cap B) && \text{(定义)} \\
&= A_{i_j} \cap A_{i_k} \cap B \cap B && \text{(结合律、交换律)} \\
&= \emptyset \cap B \cap B && \text{(π_1是划分)} \\
&= \emptyset && \text{(零律)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \cup\pi_1 \cap B && \text{(π_1是A的划分)} \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B && \text{(广义并定义)} \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) && \text{(分配律)} \\
&= \bigcup_{k=1}^{m} (A_{i_k} \cap B) && \text{($A_i \cap B$中有m个非空的)} \\
&= \bigcup_{k=1}^{m} B_{i_k} && \text{(定义)} \\
&= \cup\pi_2 && \text{(广义并定义)}
\end{aligned}
$$

综上所述，π_2满足教材定义2.17中的全部条件。故π_2是$A \cap B$的一个划分。

Q.E.D.

37

Proof:

由模运算立即得证。

Q.E.D.

$A/R = \{\{1,6,11,16\},\{2,7,12,17\},\{3,8,13,18\},\{4,9,14,19\},\{5,10,15,20\}\}$

38

Proof:

(1) 由$\mathscr{A}$的定义知，$\emptyset \notin \mathscr{A}$。

(2)

$$
\begin{aligned}
&\forall A_{i_1} \cap B_{j_1}, A_{i_2} \cap B_{j_2} \in \mathscr{A} \\
&A_{i_1} \cap B_{j_1} \cap A_{i_2} \cap B_{j_2} \neq \emptyset \\
\iff & \exists x(x \in A_{i_1} \cap B_{j_1} \cap A_{i_2} \cap B_{j_2}) && (\emptyset\text{定义}) \\
\iff & \exists x(x \in A_{i_1} \wedge x \in B_{j_1} \wedge x \in A_{i_2} \wedge x \in B_{j_2}) && (\text{交集定义}) \\
\iff & \exists x(x \in A_{i_1} \wedge x \in A_{i_2} \wedge x \in B_{j_1} \wedge x \in B_{j_2}) && (\text{命题逻辑交换律}) \\
\implies & \exists x(x \in A_{i_1} \wedge x \in A_{i_2}) \wedge \exists x(x \in B_{j_1} \wedge x \in B_{j_2}) && (\text{一阶谓词推理定律}) \\
\iff & \exists x(x \in A_{i_1} \cap A_{i_2}) \wedge \exists x(x \in B_{j_1} \cap B_{j_2}) && (\text{交集定义}) \\
\iff & A_{i_1} \cap A_{i_2} \neq \emptyset \wedge B_{j_1} \cap B_{j_2} \neq \emptyset && (\emptyset\text{定义}) \\
\implies & A_{i_1} = A_{i_2} \wedge B_{j_1} = B_{j_2} && (\pi_1, \pi_2\text{是划分}) \\
\implies & A_{i_1} \cap B_{j_1} = A_{i_2} \cap B_{j_2} && (\text{交集定义、外延公理})
\end{aligned}
$$

可见，对任意$A_{i_1} \cap B_{j_1}, A_{i_2} \cap B_{j_2} \in R$，若$A_{i_1} \cap B_{j_1} \neq A_{i_2} \cap B_{j_2}$，则$A_{i_1} \cap B_{j_1} \cap A_{i_2} \cap B_{j_2} = \emptyset$。

(3)

$$
\begin{aligned}
A &= A \cap A && (\text{幂等律}) \\
&= (\cup \pi_1) \cap (\cup \pi_2) && (\pi_1, \pi_2\text{是划分}) \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) && (\pi_1, \pi_2\text{定义}) \\
&= \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (A_i \cap B_j) && (\text{分配律}) \\
&= \cup \mathscr{A} && (\mathscr{A}\text{定义})
\end{aligned}
$$

综上所述，有$\mathscr{A}$是划分。

下面证明$\mathscr{A}$既是π_1的加细又是π_2的加细。

对任意$A_i \cap B_j \in \mathscr{A}$，由Lemma 1.3知，有$A_i \cap B_j \subseteq A_i$和$A_i \cap B_j \subseteq B_j$。即，$\mathscr{A}$中的每一个划分块都含于$\pi_1$和$\pi_2$的某个划分块中。由加细定义知，$\mathscr{A}$既是$\pi_1$ 的加细又是π_2的加细。

Q.E.D.

39.
(1)
$R_\pi = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\} \cup I_A$;
$A/R_\pi = \pi = \{\{1,2,3\},\{4\}\}$;
(2)
$\pi_1 = A/R_{\pi_1} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$;
$R_{\pi_1} = I_A$;
$\pi_2 = A/R_{\pi_2} = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$;
$R_{\pi_2} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} \cup I_A$;
$\pi_3 = A/R_{\pi_3} = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$;
$R_{\pi_3} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\} \cup I_A$;
$\pi_4 = A/R_{\pi_4} = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$;
$R_{\pi_4} = \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\} \cup I_A$;
$\pi_5 = A/R_{\pi_5} = \pi$;
$R_{\pi_5} = R_\pi = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\} \cup I_A$;

40.
Proof:
必要性:
由加细定义有，$\forall \mathscr{A}(\mathscr{A} \in A/R_1 \to \exists \mathscr{B}(\mathscr{B} \in A/R_2 \wedge \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}))$，故有:

$$
\begin{array}{ll}
\quad \forall x, y \in A & \\
\quad \langle x,y\rangle \in R_1 & \\
\Longleftrightarrow \exists \mathscr{A}(\mathscr{A} \in A/R_1 \wedge x \in \mathscr{A} \wedge y \in \mathscr{A}) & \text{(商集定义)} \\
\Longrightarrow \mathscr{A} \in A/R_1 \wedge x \in \mathscr{A} \wedge y \in \mathscr{A} & (\exists\text{消去}) \\
\Longleftrightarrow \mathscr{A} \in A/R_1 \wedge x \in \mathscr{A} \wedge y \in \mathscr{A} \wedge \exists \mathscr{B}(\mathscr{B} \in A/R_2 \wedge \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}) & \text{(前提)} \\
\Longleftrightarrow \exists \mathscr{B}(\mathscr{A} \in A/R_1 \wedge x \in \mathscr{A} \wedge y \in \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \in A/R_2 \wedge \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}) & \text{(量词辖域扩张等值式)} \\
\Longrightarrow \mathscr{A} \in A/R_1 \wedge x \in \mathscr{A} \wedge y \in \mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \in A/R_2 \wedge \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} & (\exists\text{消去}) \\
\Longrightarrow \mathscr{B} \in A/R_2 \wedge x \in \mathscr{A} \wedge y \in \mathscr{A} \wedge \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} & \text{(命题逻辑化简律、交换律)} \\
\Longrightarrow \mathscr{B} \in A/R_2 \wedge x \in \mathscr{B} \wedge y \in \mathscr{B} & \text{(子集定义)} \\
\Longrightarrow \exists \mathscr{B}(B \in A/R_2 \wedge x \in \mathscr{B} \wedge y \in \mathscr{B}) & (\exists\text{引入}) \\
\Longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_2 & \text{(商集定义)}
\end{array}
$$

充分性:
只需证明$\forall \mathscr{A} \forall x \forall y(\mathscr{A} \in A/R_1 \wedge x \in \mathscr{A} \wedge y \in \mathscr{A} \to \exists \mathscr{B}(\mathscr{B} \in A/R_2 \wedge x \in \mathscr{B} \wedge y \in \mathscr{B}))$。

$$
\begin{array}{ll}
\quad \forall \mathscr{A}, x, y & \\
\quad \mathscr{A} \in A/R_1 \wedge x \in \mathscr{A} \wedge y \in \mathscr{A} & \\
\Longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1 & \text{(商集定义)} \\
\Longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1 \wedge R_1 \subseteq R_2 & \text{(前提)} \\
\Longrightarrow \langle x,y\rangle \in R_2 & \text{(子集定义)}
\end{array}
$$

$\iff \exists \mathscr{B}(\mathscr{B} \in A/R_2 \wedge x \in \mathscr{B} \wedge y \in \mathscr{B})$ (商集定义)
Q.E.D.

41.
Proof:
先证：R_3是自反的。
$\forall x, y$
$\langle x, y\rangle \in A \times B$
$\iff x \in A \wedge y \in B$ (卡氏积定义)
$\implies \langle x, x\rangle \in R_1 \wedge \langle y, y\rangle \in R_2$ (R_1, R_2是自反的)
$\iff \langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \in R_3$ (R_3定义)
再证：R_3是对称的。
$\forall x_1, x_2, y_1, y_2$
$\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in R_3$
$\iff \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2$ (R_3定义)
$\implies \langle x_2, x_1\rangle \in R_1 \wedge \langle y_2, y_1\rangle \in R_2$ (R_1, R_2是对称的)
$\iff \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_1, y_1\rangle\rangle \in R_3$ (R_3定义)
最后证：R_3是传递的。
$\forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$
$\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in R_3 \wedge \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R_3$
$\iff \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2$ (R_3定义)
$\iff \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2$ (命题逻辑交换律)
$\implies \langle x_1, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_3\rangle \in R_2$ (R_1, R_2是传递的)
$\iff \langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R_3$ (R_3定义)
故得，R_3是等价关系。
Q.E.D.

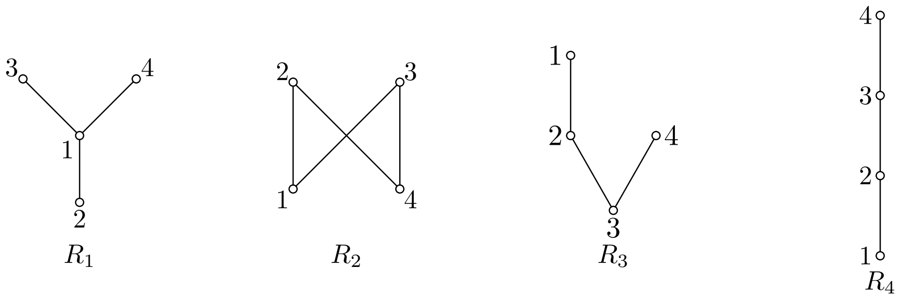
42. 商集为二元集说明该关系对应的划分有两个划分块。这样的划分有$\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 2^3 - 1 = 7$个。找出对应的等价关系：
$R_1 = \{\langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, c\rangle\} \cup I_A$;
$R_2 = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, c\rangle\} \cup I_A$;
$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, d\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle\} \cup I_A$;
$R_4 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle\} \cup I_A$;
$R_5 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\} \cup I_A$;
$R_6 = \{\langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, d\rangle, \langle d, b\rangle\} \cup I_A$;
$R_7 = \{\langle a, d\rangle, \langle d, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\} \cup I_A$;

43.

$$\begin{Bmatrix}5\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}5\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}5\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}5\\4\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}5\\5\end{Bmatrix} \begin{aligned}&=1+(2^4-1)+\left(3\begin{Bmatrix}4\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix}\right)+C_5^2+1\\&=1+(2^4-1)+(3*C_4^2+2^3-1)+C_5^2+1\\&=1+2^4-1+3*6+8-1+10+1\\&=52\end{aligned}$$

44.

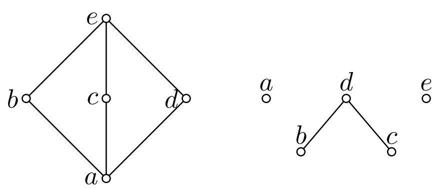
(1)



R_1 R_2 R_3 R_4

(2) R_4是全序关系。

45.

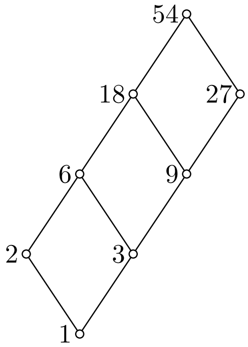


$\preccurlyeq_1$ $\preccurlyeq_2$

(1) 对于$\langle A,\preccurlyeq_1\rangle$，$e$是最大元，也是唯一极大元。$a$是最小元，也是唯一的极小元。
(2) 对于$\langle A,\preccurlyeq_2\rangle$，不存在最大元和最小元。$a,d,e$是极大元，$a,b,c,e$是极小元。

46. B的上界集合为：$\{k*lcm(1,2,\ldots,10)|k\in\mathbb{N}^+\}$，上确界为$lcm(1,2,\ldots,10)=2520$。1是$B$唯一的下界，也是它的下确界。

47.



$\preccurlyeq$

A中有四条最长链:
$B_1 = 1, 2, 6, 18, 54$;
$B_2 = 1, 3, 9, 27, 54$;
$B_3 = 1, 3, 6, 18, 54$;
$B_4 = 1, 3, 9, 18, 54$。
由教材定理2.31(2)得，A中元素至少可以划分成5个不相交的反链。
由划分定义与反链定义可知，A中元素至多可以划分成8个不相交的反链。

48.
(1)
Proof:
先证：$R \upharpoonright B$是反自反的。

$\forall x$

$x \in B$

$\Longrightarrow x \in A$ ($B \subseteq A$)

$\Longrightarrow \langle x, x\rangle \notin R$ (R是反自反的)

$\Longleftrightarrow \neg\langle x, x\rangle \in R$ ($\notin$定义)

$\Longrightarrow \neg\langle x, x\rangle \in R \vee \neg\langle x, x\rangle \in B \times B$ (命题逻辑附加律)

$\Longleftrightarrow \neg(\langle x, x\rangle \in R \wedge \langle x, x\rangle \in B \times B)$ (命题逻辑德 · 摩根律)

$\Longleftrightarrow \neg(\langle x, x\rangle \in R \cap B \times B)$ (集合交定义)

$\Longleftrightarrow \neg(\langle x, x\rangle \in R \upharpoonright B)$ ($R \upharpoonright B$定义)

$\Longleftrightarrow \langle x, x\rangle \notin R \upharpoonright B$ ($\notin$定义)

再证：$R \upharpoonright B$是传递的。

$\forall x, y, z$

$\langle x, y\rangle \in R \upharpoonright B \wedge \langle y, z\rangle \in R \upharpoonright B$

$\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \cap B \times B \wedge \langle y, z\rangle \in R \cap B \times B$ ($R \upharpoonright B$定义)

$\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in B \times B \wedge$
$\langle y, z\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in B \times B$ (集合交定义)

$\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge x \in B \wedge y \in B \wedge$
$\langle y, z\rangle \in R \wedge y \in B \wedge z \in B$ (卡氏积定义)

$\iff \langle x,y\rangle \in R \land \langle y,z\rangle \in R \land x \in B \land y \in B \land z \in B$ (命题逻辑交换律、幂等律)

$\implies \langle x,z\rangle \in R \land x \in B \land y \in B \land z \in B$ (R是传递的)

$\implies \langle x,z\rangle \in R \land x \in B \land z \in B$ (命题逻辑化简律)

$\iff \langle x,z\rangle \in R \land \langle x,z\rangle \in B \times B$ (卡氏积定义)

$\iff \langle x,z\rangle \in R \upharpoonright B$ ($R \upharpoonright B$定义)

综上所述，可知$R \upharpoonright B$是拟序关系。

Q.E.D.

(2)

Proof:

先证：$R \upharpoonright B$是自反的。

$\forall x$

$x \in B$

$\iff x \in B \land x \in B$ (命题逻辑幂等律)

$\implies x \in A \land x \in B$ ($B \subseteq A$)

$\implies \langle x,x\rangle \in R$ (R是自反的)

$\iff \langle x,x\rangle \in R \land \langle x,x\rangle \in B \times B$ (卡氏积定义)

$\iff \langle x,x\rangle \in R \cap B \times B$ (集合交定义)

$\iff \langle x,x\rangle \in R \upharpoonright B$ ($R \upharpoonright B$定义)

再证：$R \upharpoonright B$是反对称的。

$\forall x, y$

$\langle x,y\rangle \in R \upharpoonright B \land \langle y,x\rangle \in R \upharpoonright B$

$\iff \langle x,y\rangle \in R \cap B \times B \land \langle y,x\rangle \in R \cap B \times B$ ($R \upharpoonright B$定义)

$\iff \langle x,y\rangle \in R \land \langle x,y\rangle \in B \times B \land \langle y,x\rangle \in R \land \langle y,x\rangle \in B \times B$ (集合交定义)

$\iff \langle x,y\rangle \in R \land x \in B \land y \in B \land \langle y,x\rangle \in R \land y \in B \land x \in B$ (卡氏积定义)

$\iff \langle x,y\rangle \in R \land \langle y,x\rangle \in R$ (命题逻辑化简律)

$\implies x = y$ (R是反对称的)

最后证：$R \upharpoonright B$是传递的。(证明同(1)，略)

综上所述，可知$R \upharpoonright B$是偏序关系。

Q.E.D.

(3)

Proof:

由(2)知，$R \upharpoonright B$是偏序关系。现只需证任意$x, y \in B$在$R \upharpoonright B$下皆可比。

$\forall x, y$

$x \in B \land y \in B$

$\iff x \in B \land y \in B \land x \in B \land y \in B$ (命题逻辑幂等律)

$\implies x \in A \land y \in A \land x \in B \land y \in B$ ($B \subseteq A$)

$\Longrightarrow (\langle x,y\rangle \in R \vee \langle y,x\rangle \in R) \wedge x \in B \wedge y \in B$ (R是全序关系)

$\Longleftrightarrow (\langle x,y\rangle \in R \wedge x \in B \wedge y \in B) \vee$

$(\langle y,x\rangle \in R \wedge y \in B \wedge x \in B)$ (命题逻辑分配律、交换律)

$\Longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \upharpoonright B \vee \langle y,x\rangle \in R \upharpoonright B$ ($R \upharpoonright B$定义)

故有，$R \upharpoonright B$是全序关系。

Q.E.D.

(4)

Proof:

由(3)知，$R \upharpoonright B$是全序关系。现只需证明任意$C \subseteq B$在$R \upharpoonright B$下皆有最小元。

对任意$C \subseteq B$，由$B \subseteq A$和$\subseteq$的传递性可知，$C \subseteq A$。由R是A上的是良序关系知，$\exists y(y \in C \wedge \forall x(x \in C \wedge \langle y,x\rangle \in R))$。由于$C \subseteq B$，故对前式中的$x, y$ 有$x \in B \wedge y \in B$。于是有$\langle y,x\rangle \in R \upharpoonright B$。故得，$R \upharpoonright B$是$B$上的良序关系。

Q.E.D.

49.

Proof:

先证：R是反自反的。

$\forall x, y$

$\langle x,y\rangle \in A \times B$

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge y \in B$ (卡氏积定义)

$\Longrightarrow \neg\langle y,y\rangle \in R_2 \wedge \neg\langle x,x\rangle \in R_1$ (R_1, R_2是反自反的)

$\Longrightarrow \neg\langle y,y\rangle \in R_2 \wedge (\neg\langle x,x\rangle \in R_1 \vee y = y)$ (命题逻辑附加律)

$\Longleftrightarrow \neg\langle y,y\rangle \in R_2 \wedge \neg(\langle x,x\rangle \in R_1 \wedge y = y)$ (命题逻辑德·摩根律)

$\Longleftrightarrow \neg(\langle y,y\rangle \in R_2 \vee (\langle x,x\rangle \in R_1 \wedge y = y))$ (命题逻辑德·摩根律)

$\Longleftrightarrow \neg(\langle\langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle\rangle \in R)$ (R定义)

$\Longleftrightarrow \langle\langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle\rangle \notin R$ ($\notin$定义)

再证：R是传递的。

$\forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$

$\langle\langle x_1,y_1\rangle, \langle x_2,y_2\rangle\rangle \in R \wedge \langle\langle x_2,y_2\rangle, \langle x_3,y_3\rangle\rangle \in R$

$\Longleftrightarrow (\langle y_1,y_2\rangle \in R_2 \vee (\langle x_1,x_2\rangle \in R_1 \wedge y_1 = y_2)) \wedge$

$(\langle y_2,y_3\rangle \in R_2 \vee (\langle x_2,x_3\rangle \in R_1 \wedge y_2 = y_3))$ (R定义)

$\Longleftrightarrow (\langle y_1,y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle y_2,y_3\rangle \in R_2) \vee$

$(\langle y_1,y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle x_2,x_3\rangle \in R_1 \wedge y_2 = y_3) \vee$

$(\langle x_1,x_2\rangle \in R_1 \wedge y_1 = y_2 \wedge \langle y_2,y_3\rangle \in R_2) \vee$

$(\langle x_1,x_2\rangle \in R_1 \wedge y_1 = y_2 \wedge \langle x_2,x_3\rangle \in R_1 \wedge y_2 = y_3)$ (命题逻辑分配律)

分别讨论上述4种情况。

对第1种情况，直接由R_2的传递性得$\langle y_1,y_3\rangle \in R_2$。

对第2种情况，由$\langle y_1, y_2\rangle \in R_2$和$y_2 = y_3$可得$\langle y_1, y_3\rangle \in R_2$。
对第3种情况，由$\langle y_2, y_3\rangle \in R_2$和$y_1 = y_2$可得$\langle y_1, y_3\rangle \in R_2$。
对第4种情况，由R_1的传递性和=的传递性可得$\langle x_1, x_3\rangle \in R_1 \wedge y_1 = y_3$。
可见，由以上4种情况都可推出$\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R$。即，$R$的传递性成立。
综上所述，有R的拟序关系。
Q.E.D.

50.
Proof:
先证：R是自反的。

$$\begin{aligned}
&\forall x, y \\
&\langle x, y\rangle \in A \times B \\
\iff & x \in A \wedge y \in B && \text{(卡氏积定义)} \\
\implies & \langle x, x\rangle \in R_1 \wedge \langle y, y\rangle \in R_2 && (R_1, R_2\text{是自反的}) \\
\iff & \langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \in R && (R\text{定义})
\end{aligned}$$

再证：R是反对称的。

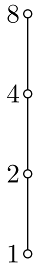
$$\begin{aligned}
&\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \\
&\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in R \wedge \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_1, y_1\rangle\rangle \in R \\
\iff & \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle x_2, x_1\rangle \in R_1 \wedge \langle y_2, y_1\rangle \in R_2 && (R\text{定义}) \\
\iff & \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle x_2, x_1\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle y_2, y_1\rangle \in R_2 && \text{(命题逻辑交换律)} \\
\implies & x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 && (R_1, R_2\text{是反对称的}) \\
\iff & \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle && \text{(教材定理2.1)} \\
\iff & \langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle = \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_1, y_1\rangle\rangle && \text{(教材定理2.1)}
\end{aligned}$$

最后证：R是传递的。

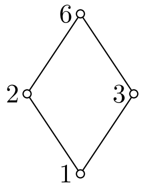
$$\begin{aligned}
&\forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, x_3 \\
&\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in R \wedge \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R \\
\iff & \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2 && (R\text{定义}) \\
\iff & \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2 && \text{(命题逻辑交换律)} \\
\implies & \langle x_1, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_3\rangle \in R_2 && (R_1, R_2\text{是传递的}) \\
\iff & \langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R && (R\text{定义})
\end{aligned}$$

故得，R是偏序关系。
Q.E.D.

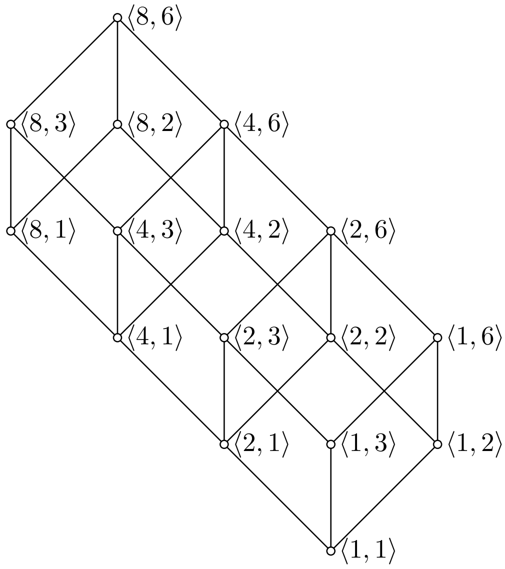
51.



R_1



R_2



R

52. 19个。

53. 先证一个常用的结论。

Lemma 2.5 对任意集合族$\mathscr{A}$，$\subseteq$是$\mathscr{A}$上的偏序关系。

Proof:

自反性:

$\quad \forall A \in \mathscr{A}$

$\quad x \in A \vee \neg x \in A$ (命题逻辑排中律)

$\iff x \in A \to x \in A$ (蕴涵等值式)

$\iff \forall x(x \in A \to x \in A)$ ($\forall$引入)

$\iff A \subseteq A$ ($\subseteq$定义)

反对称性:

$\quad \forall A, B \in \mathscr{A}$

$\quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\iff \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x(x \in B \to x \in A)$ ($\subseteq$定义)

$\iff \forall x((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A))$ (量词分配等值式)

$\iff \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ ($\leftrightarrow$定义)

$\iff A = B$ (集合相等定义)

传递性:

$\quad \forall A, B, C \in \mathscr{A}$

$\quad A \subseteq B \wedge B \subseteq C$

$\iff \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x(x \in B \to x \in C)$ ($\subseteq$定义)

$\iff \forall x((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in C))$ (量词分配等值式)

$\Longrightarrow \forall x(x \in A \to x \in C)$ (假言三段论)

$\Longleftrightarrow A \subseteq C$ ($\subseteq$定义)

综上所述，$\subseteq$是$\mathscr{A}$上的偏序关系。

Q.E.D.

再证原题。

Proof:

由第40题结论知，$\forall x, y \in X(x$是y的加细 $\Longleftrightarrow R_x \subseteq R_y)$，其中$R_x$和$R_y$分别为$x$和$y$对应的等价关系。令$R_X$为$A$上所有等价关系的集合。由第40题结论和教材2.28知，要证原题只需证$\subseteq$是R_X上的偏序关系即可，利用Lemma 2.5立即可得此结论。

Q.E.D.

Chapter 3

函数

1. $R_2, R_3, R_6, R_7 \in A \nrightarrow B$，其中$R_2, R_6 \in A \to B$。

2. 先证两个引理。

Lemma 3.1 对任意函数f，有：$|f| = |\mathrm{dom} f|$。
Proof:
先证：$|f| \geq |\mathrm{dom} f|$。
由dom定义可知，对每一个$x \in \mathrm{dom} f$，至少存在一个y，使得$\langle x, y\rangle \in f$。
由教材定理2.1知，对于不同的$x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$，无论与之对应的$y_1$、$y_2$是否相同，都有$\langle x_1, y_1\rangle \neq \langle x_2, y_2\rangle$。
因此，f中至少有$|\mathrm{dom} f|$个不同的有序对。即，$|f| \geq |\mathrm{dom} f|$。
再证：$|\mathrm{dom} f| \geq |f|$。
若不然，则有$|\mathrm{dom} f| < |f|$。由鸽巢原理知，必存在两个有序对$\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle \in f$，其中$x_1 = x_2$但$\langle x_1, y_1\rangle \neq \langle x_2, y_2\rangle$。由教材定理2.1知，必有$y_1 \neq y_2$。这与$f$是函数矛盾。
因此，必有$|f| \leq |\mathrm{dom} f|$。
综合得：$|f| = |\mathrm{dom} f|$。
Q.E.D.

Lemma 3.2 对任意集合A, B，有：

$$A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow |A \cap B| = |A \cup B|$$

首先证：$A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$。
Proof:
先证：$A = B \Rightarrow A \cap B = A \cup B$。
若$A = B$，则：

$A \cap B = A \cap A$ $\qquad (A = B)$
$\quad = A$ $\qquad$ (幂等律)

$= A \cup A$ (幂等律)

$= A \cup B$ $(A = B)$

于是证得：$A = B \Rightarrow A \cap B = A \cup B$。

下面证：$A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$。

若$A \cap B = A \cup B$，则：

由Lemma 1.3知，$A \cap B \subseteq A$。

又由Lemma 1.4和题设知，$A \subseteq A \cup B = A \cap B$。

于是有：$A = A \cap B$。同理可得：$B = A \cap B$。

从而有：$A = B$。

于是证得：$A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$。

综合，得：$A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$。

Q.E.D.

下面证：$A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow |A \cap B| = |A \cup B|$。

Proof:

由集合基数定义可知：$A \cap B = A \cup B \Rightarrow |A \cap B| = |A \cup B|$。

下面证：$|A \cap B| = |A \cup B| \Rightarrow A \cap B = A \cup B$。

若$|A \cap B| = |A \cup B|$，则：

由Lemma 1.3和Lemma 1.4以及子集关系的传递性可知：$A \cap B \subseteq A \cup B$。

由相对补运算定义易证：

$$((A \cup B) - (A \cap B)) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

和

$$((A \cup B) - (A \cap B)) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

于是有：

$$\begin{aligned}
|A \cup B| = {} & |(A \cup B) - (A \cap B)| + |A \cap B| \\
& - |((A \cup B) - (A \cap B)) \cap (A \cap B)| && \text{(教材定理1.3)} \\
= {} & |(A \cup B) - (A \cap B)| + |A \cap B| - 0 && (((A \cup B) - (A \cap B)) \cap (A \cap B) = \emptyset) \\
= {} & |A \cap B| && \text{(题设)}
\end{aligned}$$

解得：$|(A \cup B) - (A \cap B)| = 0$。

也即$(A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset$ (由外延公理，$\emptyset$是唯一基数为0的集合)。

由Lemma 1.2得：$A \cup B \subseteq A \cap B$。

结合前面的$A \cap B \subseteq A \cup B$，得到：$A \cup B = A \cap B$。

Q.E.D.

再解原题：

结论1：$f \cap g$仍是函数。

Proof:

由$f,g\in A\to B$，得:

$$
\begin{aligned}
&\forall x,y,z\\
&\langle x,y\rangle\in f\cap g\wedge\langle x,z\rangle\in f\cap g\\
\iff&\langle x,y\rangle\in f\wedge\langle x,y\rangle\in g\wedge\langle x,z\rangle\in f\wedge\langle x,z\rangle\in g && \text{(集合交定义)}\\
\implies&\langle x,y\rangle\in f\wedge\langle x,z\rangle\in f && \text{(命题逻辑化简律)}\\
\implies&y=z && \text{(}f\text{是函数)}
\end{aligned}
$$

也即，$f\cap g$符合函数的定义，是一个函数。

Q.E.D.

结论2：$f\cap g\in A\to B$当且仅当$f=g$。

Proof:

充分性显然。

下面证必要性。

若$f\cap g\in A\to B$，则:

由教材定理1.3可知：$|f\cup g|=|f|+|g|-|f\cap g|$。

由Lemma 3.1和$f,g,f\cap g\in A\to B$知：$|f|=|g|=|f\cap g|=|A|$。代入上式，得：$|f\cup g|=|f\cap g|=|A|$。

由Lemma 3.2得：$f=g$。

Q.E.D.

结论3：$f\cup g$是函数$\Leftrightarrow f\cup g\in A\to B\Leftrightarrow f=g$。

先证：$f\cup g$是函数$\Leftrightarrow f\cup g\in A\to B$。

Proof:

先证充分性。

由全函数即得充分性，即：$f\cup g\in A\to B\Rightarrow f\cup g$是函数。

再证必要性。

若$f\cup g$是函数，则:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f\cup g)&=\mathrm{dom}f\cup\mathrm{dom}g && \text{(教材定理2.3(1))}\\
&=A\cup A && (f,g\in A\to B)\\
&=A && \text{(幂等律)}
\end{aligned}
$$

由全函数定义有：$f\cup g\in A\to B$。

故有：$f\cup g$是函数$\Rightarrow f\cup g\in A\to B$。

综合得：$f\cup g$是函数$\Leftrightarrow f\cup g\in A\to B$。

Q.E.D.

再证：$f\cup g\in A\to B\Leftrightarrow f=g$。

Proof:

先证充分性。

若$f = g$则：

$$
\begin{aligned}
f \cup g &= f \cup f && (f = g) \\
&= f && (\text{幂等律}) \\
&\in A \to B && (\text{题设})
\end{aligned}
$$

即有：$f = g \Rightarrow f \cup g \in A \to B$。

再证必要性。

若$f \cup g \in A \to B$，则：

$$
\begin{aligned}
|f \cup g| &= |\mathrm{dom}(f \cup g)| && (\text{Lemma 3.1}) \\
&= |A| && (f \cup g \in A \to B)
\end{aligned}
$$

同理有$|f| = |g| = |A|$。

由教材定理1.3可知：$|f \cup g| = |f| + |g| - |f \cap g|$。代入前面的结论，得：$|f \cup g| = |f \cap g| = |A|$。

由Lemma 3.2即得：$f = g$。

即：$f \cup g \in A \to B \Rightarrow f = g$。

综合得：$f \cup g \in A \to B \Leftrightarrow f = g$。

Q.E.D.

3. (1), (2), (6), (10)是单射。(1), (4), (5), (6), (9), (10)是满射。(1), (6), (10)是双射。

4. 令$f = \{\langle S, F\rangle | \langle S, F\rangle \in \mathscr{A} \times \mathscr{B} \wedge \forall x(x \in A \to (x \in S \leftrightarrow F(x) = 1))\}$。则$f$是$\mathscr{A}$到$\mathscr{B}$的双射，$f^{-1}$是$\mathscr{B}$到$\mathscr{A}$的双射。

5. 先证一个引理。

Lemma 3.3 $A \to B = \emptyset$当且仅当$A \neq \emptyset \wedge B = \emptyset$。

Proof:

由全函数定义即得充分性。

下面证必要性。

若不然，则有$A = \emptyset \vee B \neq \emptyset$。

分别讨论$A = \emptyset$和$B \neq \emptyset$两种情形。

当$A = \emptyset$时，有$\emptyset \in A \to B$。即$A \to B \neq \emptyset$。

当$B \neq \emptyset$时，则存在某个元素$a \in B$，令$f = \{\langle x, a\rangle | x \in A\}$。这时无论$A$是否为空(当$A$为空时，$f$是空函数$\emptyset$，仍是$A$到$B$的全函数)，皆有$f \in A \to B$。$A \to B$仍然非空。

也即：$A = \emptyset \vee B \neq \emptyset \Rightarrow A \to B \neq \emptyset$。这与前提$A \to B = \emptyset$矛盾。

综上所述，有：$A \to B = \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge B = \emptyset$

Q.E.D.

再证原题。

Proof:

由Lemma 3.3可知，若$A \to B = B \to A = \emptyset$，则有：$A \neq \emptyset \wedge B = \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A = \emptyset$。矛盾。
故有$A \to B = B \to A \Rightarrow A \to B \neq \emptyset \wedge B \to A \neq \emptyset$。
故而存在某个$f \in A \to B$。由$A \to B = B \to A$知，$f \in B \to A$。
于是有：

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{dom} f && (f \in A \to B) \\ &= B && (f \in B \to A) \end{aligned}$$

Q.E.D.

6.
Proof:

$$\begin{aligned} & \forall f \\ & f \in C \to A \\ \iff & \forall x \forall y \forall z (x \in \mathrm{dom} f \wedge y \in \mathrm{ran} f \wedge z \in \mathrm{ran} f \wedge x f y \wedge x f z \to y = z) \\ & \wedge \mathrm{dom} f = C \wedge \mathrm{ran} f \subseteq A && \text{(全函数定义)} \\ \implies & \forall x \forall y \forall z (x \in \mathrm{dom} f \wedge y \in \mathrm{ran} f \wedge z \in \mathrm{ran} f \wedge x f y \wedge x f z \to y = z) \\ & \wedge \mathrm{dom} f = C \wedge \mathrm{ran} f \subseteq B && (A \subseteq B\text{\&子集关系传递性}) \\ \iff & f \in C \to B && \text{(全函数定义)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

7. 先证一个引理(即为本章第10题)。

Lemma 3.4 设$f, g \in A \nrightarrow B$，已知$f \subseteq g$且$\mathrm{dom} g \subseteq \mathrm{dom} f$，则$f = g$。
Proof:
由题设知$f \subseteq g$，现只需证：$g \subseteq f$。

$$\begin{aligned} & \forall x, y \\ & \langle x, y \rangle \in g \\ \implies & x \in \mathrm{dom} g && \text{(dom定义)} \\ \implies & x \in \mathrm{dom} f && (\mathrm{dom} g \subseteq \mathrm{dom} f) \\ \iff & \exists z (\langle x, z \rangle \in f) && \text{(dom定义)} \\ \iff & \exists z (\langle x, z \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f) && \text{(命题逻辑幂等律)} \\ \implies & \exists z (\langle x, z \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in g) && (f \subseteq g) \\ \implies & \exists z (\langle x, z \rangle \in f \wedge z = y) && (g\text{是函数\&}\langle x, y \rangle \in g) \\ \implies & \langle x, y \rangle \in f && \text{(外延公理)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

再证原题。
Proof:
由Lemma 3.4立即得证。

Q.E.D.

8. 由Lemma 3.4立即得证。

9. 令$A = \mathbb{N}, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x + 1, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$，则：由加法性质知$f$是单射的，但$f$不是满射的(因为$0 \in \mathbb{N}$，但$0 \notin \text{ran} f$)。对任意$k \in \mathbb{N}$，有$\langle 2k, k\rangle \in g$，故$g$是满射的，但对任意$k \in \mathbb{N}$，有$\langle 2k, k\rangle \in g \wedge \langle 2k+1, k\rangle \in g \wedge 2k \neq 2k+1$，故而$g$不是单射的。

10. 即为Lemma 3.4。

11.
Proof:
首先证明一个结论。
结论1：$\forall y(y \in \text{dom} g \to g(y) \neq \emptyset)$。
Proof:

$$
\begin{array}{ll}
& \forall y \\
& y \in \text{dom} g \\
\iff & y \in B \qquad (\text{dom} g = B) \\
\implies & \exists x(x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in f) \qquad (f\text{是满射}) \\
\iff & \exists x(x \in g(y)) \qquad (g\text{定义}) \\
\iff & g(y) \neq \emptyset \qquad (\emptyset\text{定义})
\end{array}
$$

Q.E.D.
下面证明g是单射的。

$$
\begin{array}{ll}
& \forall y_1, y_2 \in B, s \in P(A) \\
& \langle y_1, s\rangle \in g \wedge \langle y_2, s\rangle \in g \\
\implies & \forall x(x \in s \to \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge \forall x(x \in s \to \langle x, y_2\rangle \in f) \wedge s = g(y_1) \qquad (g\text{定义}) \\
\iff & \forall x((x \in s \to \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge (x \in s \to \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge s = g(y_1) \qquad (\text{量词分配等值式}) \\
\implies & \forall x((x \in s \to \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge (x \in s \to \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge s \neq \emptyset \qquad (\text{结论1}) \\
\iff & \forall x((x \in s \to \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge (x \in s \to \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s) \qquad (\emptyset\text{定义}) \\
\iff & \forall x((\neg x \in s \vee \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge (\neg x \in s \vee \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s) \qquad (\text{蕴涵等值式}) \\
\iff & \forall x(\neg x \in s \vee (\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s) \qquad (\text{命题逻辑分配律}) \\
\iff & \forall x(x \in s \to (\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s) \qquad (\text{蕴涵等值式}) \\
\implies & (\exists x(x \in s) \to \exists x(\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s) \qquad (\text{一阶谓词推理定律}) \\
\implies & \exists x(\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f) \qquad (\text{假言推理}) \\
\implies & y_1 = y_2 \qquad (f\text{是函数})
\end{array}
$$

可见，g是单根的。故而g是单射的。
Q.E.D.

12.

Proof:

对于任意$x \in \mathbb{R}$，都有$\langle\langle x, 0\rangle, x\rangle \in f$和$\langle\langle x, 1\rangle, x\rangle \in g$，因此$f, g$都是满射的。

对于任意$x \in \mathbb{R}$，都有$\langle\langle x, 0\rangle, x\rangle \in f \wedge \langle\langle x-1, 1\rangle, x\rangle \in f \wedge x \neq x-1$和$\langle\langle x, 0\rangle, 0\rangle \in g \wedge \langle\langle x+1, 0\rangle, 0\rangle \in g \wedge x \neq x-1$，因此$f, g$都不是单射的。

Q.E.D.

13.

Proof:

令$f: \mathscr{E} \to \mathscr{F}, f(x) = A/x$。下面证明$f(x)$是双射。

先证f是单射。

对A上的任意等价关系$R, S \in \mathscr{E}$，若$f(R) = f(S)$，则由f定义有$A/R = A/S$。于是:

$$
\begin{aligned}
& \forall x, y \\
& \langle x, y\rangle \in R \\
\iff & \exists B(x \in B \wedge y \in B \wedge B \in A/R) && \text{(商集定义)} \\
\iff & \exists B(x \in B \wedge y \in B \wedge B \in A/S) && (A/R = A/S) \\
\iff & \langle x, y\rangle \in S && \text{(商集定义)}
\end{aligned}
$$

即，$f(R) = f(S) \Rightarrow R = S$，故而$f$是单射的。

再证f是满射。

对于A任意划分$\mathscr{A} \in \mathscr{F}$，令$R_{\mathscr{A}} = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge \exists B(x \in B \wedge y \in B \wedge B \in \mathscr{A})\}$。

下面证明$R_{\mathscr{A}} \in \mathscr{E}$①且$f(R_{\mathscr{A}}) = \mathscr{A}$。

先证明$R_{\mathscr{A}} \in \mathscr{E}$。

自反性:

$$
\begin{aligned}
& \forall x \\
& x \in A \\
\iff & x \in \cup\mathscr{A} && (\mathscr{A}\text{是划分}) \\
\iff & \exists B(x \in B \wedge B \in \mathscr{A}) && \text{(广义并定义)} \\
\iff & \exists B(x \in B \wedge x \in B \wedge B \in \mathscr{A}) && \text{(命题逻辑幂等律)} \\
\iff & \langle x, x\rangle \in R_{\mathscr{A}} && (R_{\mathscr{A}}\text{定义})
\end{aligned}
$$

对称性:

$$
\begin{aligned}
& \forall x, y \\
& \langle x, y\rangle \in R_{\mathscr{A}} \\
\iff & \exists B(x \in B \wedge y \in B \wedge B \in \mathscr{A}) && (R_{\mathscr{A}}\text{定义}) \\
\iff & \exists B(y \in B \wedge x \in B \wedge B \in \mathscr{A}) && \text{(命题逻辑交换律)} \\
\iff & \langle y, x\rangle \in R_{\mathscr{A}} && (R_{\mathscr{A}}\text{定义})
\end{aligned}
$$

传递性:

$$
\begin{aligned}
& \forall x, y, z \\
& \langle x, y\rangle \in R_{\mathscr{A}} \wedge \langle y, z\rangle \in R_{\mathscr{A}}
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow \exists B(x \in B \wedge y \in B \wedge B \in \mathscr{A}) \wedge \exists B(y \in B \wedge z \in B \wedge B \in \mathscr{A})$ ($R_{\mathscr{A}}$定义)

$\Longrightarrow x \in B_1 \wedge y \in B_1 \wedge B_1 \in \mathscr{A} \wedge y \in B_2 \wedge z \in B_2 \wedge B_2 \in \mathscr{A}$ ($\exists$消去)

$\Longrightarrow x \in B_1 \wedge B_1 \in \mathscr{A} \wedge z \in B_2 \wedge B_2 \in \mathscr{A} \wedge y \in B_1 \wedge y \in B_2$ (命题逻辑交换律)

$\Longrightarrow x \in B_1 \wedge B_1 \in \mathscr{A} \wedge z \in B_2 \wedge B_2 \in \mathscr{A} \wedge y \in B_1 \cap B_2$ (集合交定义)

$\Longrightarrow x \in B_1 \wedge B_1 \in \mathscr{A} \wedge z \in B_2 \wedge B_2 \in \mathscr{A} \wedge B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ($\emptyset$定义)

$\Longrightarrow x \in B_1 \wedge B_1 \in \mathscr{A} \wedge z \in B_2 \wedge B_2 \in \mathscr{A} \wedge B_1 = B_2$ ($B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \to B_1 = B_2$[②])

$\Longrightarrow x \in B_1 \wedge z \in B_2 \wedge B_1 \in \mathscr{A}$ (外延公理)

$\Longrightarrow \exists B(x \in B \wedge z \in B \wedge B \in \mathscr{A})$ ($\exists$引入)

$\Longleftrightarrow \langle x, z\rangle \in R_{\mathscr{A}}$ ($R_{\mathscr{A}}$定义)

于是有$R_{\mathscr{A}} \in \mathscr{E}$。

由$R_{\mathscr{A}}$和商集定义立即得：$f(R_{\mathscr{A}}) = \mathscr{A}$。

故而f是满射的。

综合得，f是双射的。

Q.E.D.

14.

Proof:

先证：S是自反的。

$\forall f$

$f \in \mathscr{A}$

$\Longrightarrow \forall x(x \in [0,1] \to (f(x) - f(x)) = 0)$ ($f \in [0,1] \to \mathbb{R}$)

$\Longrightarrow \forall x(x \in [0,1] \to (f(x) - f(x)) \geq 0)$ ($\geq$定义)

$\Longleftrightarrow \langle f, f\rangle \in S$ (S定义)

再证：S是反对称的。

$\forall f, g$

$\langle f, g\rangle \in \mathscr{A} \wedge \langle g, f\rangle \in \mathscr{A}$

$\Longleftrightarrow \forall x(x \in [0,1] \to (f(x) - g(x)) \geq 0) \wedge$
$\quad \forall x(x \in [0,1] \to (g(x) - f(x)) \geq 0)$ (S定义)

$\Longleftrightarrow \forall x((x \in [0,1] \to (f(x) - g(x)) \geq 0) \wedge$
$\quad (x \in [0,1] \to (g(x) - f(x)) \geq 0))$ (量词分配等值式)

$\Longleftrightarrow \forall x((\neg x \in [0,1] \vee (f(x) - g(x)) \geq 0) \wedge$
$\quad (\neg x \in [0,1] \vee (g(x) - f(x)) \geq 0))$ (蕴涵等值式)

$\Longleftrightarrow \forall x(\neg x \in [0,1] \vee ((f(x) - g(x)) \geq 0 \wedge (g(x) - f(x)) \geq 0))$ (命题逻辑分配律)

$\Longleftrightarrow \forall x(\neg x \in [0,1] \vee ((f(x) - g(x)) = 0))$ (等号定义)

$\Longleftrightarrow \forall x(x \in [0,1] \to ((f(x) - g(x)) = 0))$ (蕴涵等值式)

---

①即为教材定理2.28(2)。教材将"本定理证明留读者"，故在此证明。

②这是划分定义第(2)项的逆否命题。由"假言易位"等值式知，它是永真命题。

$\iff f = g$ (函数相等定义)

下面证：S是传递的。

$$
\begin{aligned}
& \forall f, g, h \\
& \langle f, g\rangle \in \mathscr{A} \land \langle g, h\rangle \in \mathscr{A} \\
\iff & \forall x(x \in [0,1] \to (f(x) - g(x)) \geq 0) \land \\
& \quad \forall x(x \in [0,1] \to (g(x) - h(x)) \geq 0) && (S\text{定义}) \\
\iff & \forall x((x \in [0,1] \to (f(x) - g(x)) \geq 0) \land \\
& \quad (x \in [0,1] \to (g(x) - h(x)) \geq 0)) && (\text{量词分配等值式}) \\
\iff & \forall x((\neg x \in [0,1] \lor (f(x) - g(x)) \geq 0) \land \\
& \quad (\neg x \in [0,1] \lor (g(x) - h(x)) \geq 0)) && (\text{蕴涵等值式}) \\
\iff & \forall x(\neg x \in [0,1] \lor ((f(x) - g(x)) \geq 0 \land (g(x) - h(x)) \geq 0)) && (\text{命题逻辑分配律}) \\
\iff & \forall x(\neg x \in [0,1] \lor ((f(x) - h(x)) \\
& \quad = (f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x)) \geq 0)) && (\text{加法性质}) \\
\iff & \forall x(x \in [0,1] \to ((f(x) - h(x)) \geq 0)) && (\text{蕴涵等值式}) \\
\iff & \langle f, g\rangle \in \mathscr{A} && (S\text{定义})
\end{aligned}
$$

综上所述，有S是偏序关系。

下面举反例说明S不是全序关系。

令$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$和$g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = 1 - x$，则：$0, 1 \in [0,1] \land f(0) - g(0) < 0 \land g(1) - f(1) < 0$。于是有：$\langle f, g\rangle \notin S \land \langle g, f\rangle \notin S$。故$S$不是全序关系。

Q.E.D.

15.

(1)

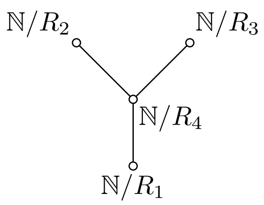
$\mathbb{N}/R_1 = \{\{x\} | x \in \mathbb{N}\}$;

$\mathbb{N}/R_2 = \{\{2k | k \in \mathbb{N}\}, \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}\}$;

$\mathbb{N}/R_3 = \{\{3k | k \in \mathbb{N}\}, \{3k + 1 | k \in \mathbb{N}\}, \{3k + 2 | k \in \mathbb{N}\}\}$;

$\mathbb{N}/R_4 = \{\{6k | k \in \mathbb{N}\}, \{6k + 1 | k \in \mathbb{N}\}, \{6k + 2 | k \in \mathbb{N}\}, \{6k + 3 | k \in \mathbb{N}\}, \{6k + 4 | k \in \mathbb{N}\}, \{6k + 5 | k \in \mathbb{N}\}\}$.

(2)



(3)

$f_1(H) = H$;

$f_2(H) = \{0\}$;

$f_3(H) = \{0, 1, 2\}$;

$f_4(H) = \{0, 2, 4\}$;

16.
$g \circ f(x) = x^2 + 2$，既不是满射的也不是单射的。
$f \circ g(x) = x^2 + 4x + 14$，既不是满射的也不是单射的。
f不是双射，因而没有反函数。g, h是双射，有反函数。
$g^{-1}(x) = x - 4$; $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$。

17.
结论1：对任意非空集合A和A上的等价关系R，自然映射$f: A \to A/R$有反函数当且仅当$R = I_A$。
Proof:
充分性显然。
下面证必要性。
由反函数的定义知，f有反函数当且仅当f是双射的。因此：

$$
\begin{aligned}
& \forall x, y \in A \\
& \langle x, y \rangle \in R \\
\Longrightarrow\ & [x]_R = [y]_R && \text{(教材定理2.27(2))} \\
\Longleftrightarrow\ & f(x) = f(y) && (f\text{定义}) \\
\Longleftrightarrow\ & x = y && (f\text{是双射}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x, y \rangle \in I_A
\end{aligned}
$$

可知$R \subseteq I_A$。又由R是等价关系知，$I_A \subseteq R$。于是有$R = I_A$。
Q.E.D.

结论2：当$R = I_A$时，f有反函数$f^{-1}: A/R \to A, f^{-1}([x]) = x$。
Proof:
由教材定理3.9、3.10和结论1立即可得。
Q.E.D.

18.
(1)
$\mathrm{dom}f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
$\mathrm{ran}f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
$\mathrm{dom}g = \mathbb{R}$;
$\mathrm{ran}g = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} - \mathbb{R}^- = [0, +\infty)$;
$\mathrm{dom}h = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} - \mathbb{R}^- = [0, +\infty)$;
$\mathrm{ran}h = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} - \mathbb{R}^- = [0, +\infty)$;
(2) 分别令$\mathrm{dom}f, \mathrm{dom}g, \mathrm{dom}h$为$f, g, h$的前域即可。

19.
(1) $f(A_1) = \{1, 2, 3\}$; $f^{-1}(B_1) = \{0, 4, 5, 6\}$.
(2) $g(A_2) = \mathbb{N}$; $g^{-1}(B_2) = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \cup \{6\}$.
(3) f是双射的，有反函数。g不是双射的，没有反函数。

20.
(1)
Proof:
由$f\circ g$是单射的和教材定理3.5(2)可知，g是单射的。由题设，g是满射的。因而，g是双射的。
由教材定理3.9、3.10和g是双射的可知，g^{-1}也是双射的，而且既是g的左逆又是g的右逆。因此，$f=f\circ I_B=f\circ g\circ g^{-1}$。
因为$f\circ g$和g^{-1}都是单射的，由教材定理3.4(2)得，$f=f\circ g\circ g^{-1}$也是单射的。
Q.E.D.

(2)
Proof:
由$f\circ g$是满射的和教材定理3.5(1)可知，f是满射的。由题设，f是单射的。因而，f是双射的。
由教材定理3.9、3.10和f是双射的可知，f^{-1}也是双射的，而且既是f的左逆又是f的右逆。因此，$g=I_B\circ g=f^{-1}\circ f\circ g$。
因为f^{-1}和$f\circ g$都是满射的，由教材定理3.4(1)得，$g=f^{-1}\circ f\circ g$也是满射的。
Q.E.D.

21. 先证一个引理。

Lemma 3.5 对任意函数$f,g\in A\to B$，$f=g$当且仅当$\forall x(x\in A\to f(x)=g(x))$。
Proof:
先证必要性。
若$f=g$，则:

$$
\begin{array}{lr}
\quad \forall x & \\
\quad x\in A & \\
\iff \exists y(\langle x,y\rangle\in f) & (f\in A\to B)\\
\implies \langle x,a\rangle\in f & (\exists\text{消去})\\
\iff f(x)=a & (f(x)\text{定义})\\
\iff f(x)=a\wedge f(x)=a & (\text{命题逻辑幂等律})\\
\iff f(x)=a\wedge\langle x,a\rangle\in f & (f(x)\text{定义})\\
\iff f(x)=a\wedge\langle x,a\rangle\in g & (f=g)\\
\iff f(x)=a\wedge g(x)=a & (g(x)\text{定义})\\
\iff f(x)=g(x) & (\text{等号传递性})
\end{array}
$$

于是有：$f=g\Rightarrow\forall x(x\in A\to f(x)=g(x))$。
再证充分性。
若$\forall x(x\in A\to f(x)=g(x))$，则:

$\forall x,y$

$$\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in f \\
\iff & f(x) = y && (f(x)\text{定义}) \\
\iff & g(x) = y && (f(x) = g(x)) \\
\iff & \langle x, y\rangle \in g && (g(x)\text{定义})
\end{aligned}$$

于是有：$\forall x(x \in A \to f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g$。
综合即得原题。
Q.E.D.

再证原题。
Proof:
先证：$f \circ h_1 = g \circ h_1$。
由教材定理3.3知，dom$(f \circ h_1) =$ dom$(g \circ h_1) =$ dom$h_1 = A$。
由Lemma 3.5知，欲证：$f \circ h_1 = g \circ h_1$，只需证：$\forall x(x \in A \to f \circ h_1(x) = g \circ h_1(x))$。
由A定义知，对于任意$x \in A$，有$x \in X \wedge f(x) = g(x)$。于是:
$\forall x \in A$,

$$\begin{aligned}
f \circ h_1(x) &= f(h_1(x)) && (\text{教材定理3.3}) \\
&= f(x) && (h_1(x) = x) \\
&= g(x) && (f(x) = g(x)) \\
&= g(h_1(x)) && (h_1(x) = x) \\
&= g \circ h_1(x) && (\text{教材定理3.3})
\end{aligned}$$

从而证得原题。
下面证：$B \subseteq A$。
由Lemma 3.5和$f \circ h_2 = g \circ h_2$知，$\forall x(x \in B \to f \circ h_2(x) = g \circ h_2(x))$。于是:

$$\begin{aligned}
& \forall x \\
& x \in B \\
\Longrightarrow & f \circ h_2(x) = g \circ h_2(x) \wedge x \in X && (\text{前提}) \\
\iff & f(h_2(x)) = g(h_2(x)) \wedge x \in X && (\text{教材定理3.3}) \\
\iff & f(x) = g(x) \wedge x \in X && (h_2(x) = x) \\
\iff & x \in A && (A\text{定义})
\end{aligned}$$

故有：$B \subseteq A$。
Q.E.D.

22. 先证第一部分，即：$\forall f, g \in (X \to X)(h \circ f = h \circ g \to f = g) \Leftrightarrow h$是单射的。
Proof:
先证必要性。
若h不是单射的，则存在$x_1, x_2 \in X$，有$x_1 \neq x_2 \wedge h(x_1) = h(x_2)$。
令$f : X \to X, f(x) = x_1$，$g : X \to X, g(x) = x_2$。则$h \circ f = h \circ g$，但$f \neq g$。与前提$h \circ f = h \circ g \to f = g$矛盾。故有：$h \circ f = h \circ g \to f = g \Rightarrow h$是单射的。

再证充分性。
若h是单射的，则由教材定理3.10(1)知，h存在左逆。令h'为h的左逆。
对任意函数$f, g \in (X \to X)$，若$h \circ f = h \circ g$则：

$$\begin{aligned}
f &= I_X \circ f && \text{(教材定理3.6)} \\
&= h' \circ h \circ f && (h'\text{是}h\text{的左逆}) \\
&= h' \circ h \circ g && (h \circ f = h \circ g) \\
&= I_X \circ g && (h'\text{是}h\text{的左逆}) \\
&= g && \text{(教材定理3.6)}
\end{aligned}$$

综合得：对任意的$f, g \in (X \to X)$，只要$h \circ f = h \circ g$就有$f = g$当且仅当h是单射的。
Q.E.D.

再证第二部分，即：$\forall f, g \in (X \to X)(f \circ h = g \circ h \to f = g) \Leftrightarrow h$是满射的。
Proof:
先证必要性。
若h不是满射的，则存在$a \in X$，有$\forall x(x \in X \to h(x) \neq a$(由此可知，$h(a) \neq a$)。
令$f : X \to X, f(x) = x$，$g : X \to X, g(x) = \begin{cases} x & x \neq a \\ h(a) & x = a \end{cases}$。则$f \circ h = g \circ h$，但$f \neq g$。
与前提$f \circ h = g \circ h \to f = g$矛盾。故有：$f \circ h = g \circ h \to f = g \Rightarrow h$是满射的。
再证充分性。
若h是满射的，则由教材定理3.10(2)知，h存在右逆。令h'为h的右逆。
对任意函数$f, g \in (X \to X)$，若$f \circ h = g \circ h$则：

$$\begin{aligned}
f &= f \circ I_X && \text{(教材定理3.6)} \\
&= f \circ h \circ h' && (h'\text{是}h\text{的右逆}) \\
&= g \circ h \circ h' && (h \circ f = h \circ g) \\
&= g \circ I_X && (h'\text{是}h\text{的右逆}) \\
&= g && \text{(教材定理3.6)}
\end{aligned}$$

综合得：对任意的$f, g \in (X \to X)$，只要$f \circ h = g \circ h$就有$f = g$当且仅当h是满射的。
Q.E.D.

23. 先证一个引理。

Lemma 3.6 设A是一集合，则对任意$f \in A \to A$，有$f^n \in A \to A$ $(n \in \mathbb{N})$。
Proof:
对n作归纳。
若$n = 0$，则由二元关系幂运算定义知，$f^n = f^0 = I_A \in A \to A$。
设当$n = k$ $(k \geq 0)$时命题成立，则当$n = k + 1$时有：

$$\begin{aligned}
f^{k+1} &= f^k \circ f && \text{(幂运算定义)} \\
&\in A \to A && \text{(教材定理3.3)}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

再证原题。

Proof:

由I_A定义和双射定义易知，I_A是双射的。

由关系幂运算定义和合成运算结合律有：$f^n = f^{n-1} \circ f = f \circ f^{n-1} = I_A$。

由题设知，n是正整数，即$n \geq 1$。因而有$n - 1 \geq 0$(且为整数)，即$(n-1) \in \mathbb{N}$。

因而由Lemma 3.6知，$f^{n-1} \in A \to A$。

由$f^{n-1} \circ f = I_A$是双射的和教材定理3.5(3)知，f是单射的。

又由$f \circ f^{n-1} = I_A$是双射的和教材定理3.5(3)知，f是满射的。

综合得，f是双射的。

Q.E.D.

24.

Proof:

由教材定理2.9(3)可知：$f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$。

下面证明$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$

$$\begin{array}{lll} & \forall x & \\ & x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) & \\ \iff & x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) & \text{(集合交定义)} \\ \iff & x \in X \wedge f(x) \in A \wedge x \in X \wedge f(x) \in B & \text{(原象定义)} \\ \iff & x \in X \wedge f(x) \in A \wedge f(x) \in B & \text{(命题逻辑交换律、幂等律)} \\ \iff & x \in X \wedge f(x) \in A \cap B & \text{(集合交定义)} \\ \iff & x \in f^{-1}(A \cap B) & \text{(原象定义)} \end{array}$$

综合得，$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$。

Q.E.D.

Chapter 7

图

1. 由握手定理知，该图所有顶点度数之和应为$2*16=32$。已知的7个顶点度数和为24。由题设，其余各顶点的度数至多为2，故至少还要有4个的顶点才能使顶点度数之和等于32。即，G中至少有11个顶点。

2. 由握手定理知，图中必有偶数个奇度顶点。结合题设可知，只可能有如下几种情况:
(1) 9个6度顶点;
(2) 7个6度顶点和2个5度顶点;
(3) 5个6度顶点和4个5度顶点;
(4) 3个6度顶点和6个5度顶点;
(5) 1个6度顶点和8个5度顶点。
验证即得原题。

3.

Proof:

将每个面看作顶点，将相邻两面的棱看作边。由握手定理即证原题。

Q.E.D.

4. 先证一个简单而常用的结论。

Lemma 7.1 (**a**) 设G为一个无向简单图，则G的每一个非平凡(顶点数大于1)的连通分支G_i中必存在结点$v_i, v_j \in V(G_i) \wedge v_i \neq v_j \wedge d(v_i) = d(v_j)$。(**b**) 若$|V(G)| \geq 2$，则$G$中必存在$v_i, v_j \in V(G) \wedge v_i \neq v_j \wedge d(v_i) = d(v_j)$。

Proof:

先证**(a)**。

对G的任意一个非平凡的连通分支G_i，设$|V(G_i)| = n_i$。

由于G是简单图，对任意$v \in V(G_i)$，v不能与自己相邻，且v与G_i中其它$n_i - 1$个顶点中每一个也至多只"相邻"一次。因而有$d(v) \leq n_i - 1$。又由G_i的连通性和非平凡性知：$d(v) \geq 1$。而$G\{V_i\}$有n个顶点，其度数列中便有n_i个数。n_i个数只能有$n_i - 1$种可能的取值，由鸽巢原理可知**(a)**成立。

再证**(b)**。
对于任意非平凡图G本身，若它所有的连通分支都是平凡的，则由G为非平凡知，G至少有2个连通分支，且这两个分支都是孤立点(顶点度为0),于是这两个孤立点即为所证。
若G中存在某个非平凡子图，则由**(a)**知，命题成立。

Q.E.D.

再证原题。

Proof:
将选手看作图的顶点，将"u与v下一盘棋"看作边(u, v)，则每名选手所下的盘数即为该顶点的度。易于验证所构成的图是无向简单图，由Lemma 7.1即证原题。

Q.E.D.

5. G有2种非同构的情况。证明如下。

先证两个引理。

Lemma 7.2 对任意简单图G_1, G_2，有$G_1 \cong G_2$当且仅当$\overline{G}_1 \cong \overline{G}_2$。

Proof:

选用同一个同构映射函数f，由同构和同构映射函数定义立即得证。

Q.E.D.

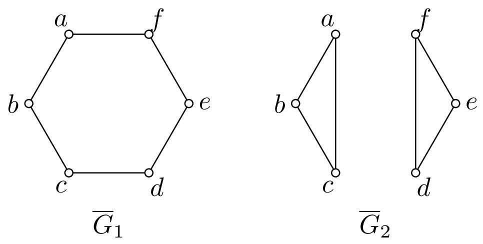
Lemma 7.3 给定r个整数$n_1, n_2, \ldots, n_r (r \geq 1)$，则在同构意义下，完全$r$部图$K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$是唯一的。

Proof:
任意两个完全r部图$G = \langle V_1, V_2, \ldots, V_r, E \rangle$和$G' = \langle V_1', V_2', \ldots, V_r', E \rangle$，若满足$|V_i| = |V_i'| = n_i (i = 1, 2, \ldots, r)$，则由集合等势的定义和性质(两集合等势，当且仅当它们之间存在双射函数)知，存在双射函数$f : V(G) \to V(G')$，满足$f(x) \in V_i' \leftrightarrow x \in V_i (i = 1, 2, \ldots, r)$。
易于验证，这样的f满足同构映射的定义，故有，$G \cong G'$。
由G和G'选择的任意性知，当$n_1, n_2, \ldots, n_r$确定时，所有完全r部图$K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$皆同构。也即，在同构意义下，完全$r$部图$K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$是唯一的。

Q.E.D.

再证原题。

由握手定理和G是3-正则图知：$2m = 3n$。代如原式，解得$n = 6$。
由Lemma 7.2可知，要考虑G的同构情况，可以考虑G的补图的同构情况。
由于G是6阶3-正则图，G的补图必为6阶2-正则图。下面证明任意6阶2-正则图必与以下两个图之一同构，从而证明任意6阶3-正则图必与以下两个图的补图(即G_1和G_2)之一同构。



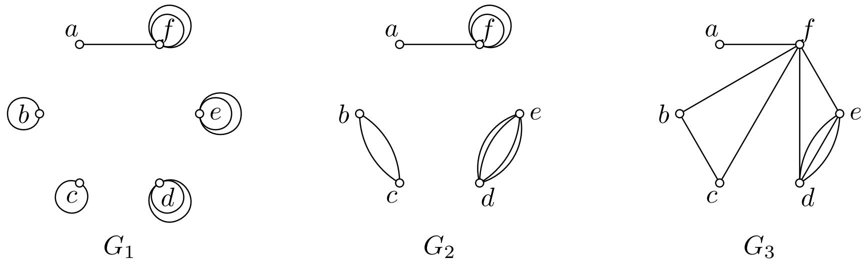
Proof:

以上两图显然互不同构。

现考虑任意6阶2-正则图G'，
若G'是连通的，则任取一个顶点$v_1 \in V(G')$，令$f(v_1) = a$，并从v_1的任意一条边出发，沿通路(由G'为2正则图知，这样的通路是唯一的)依次将通路上的顶点映射为b, c, d, e, f。易于验证，$G' \cong \overline{G}_1$。
若G'不是连通的，则它至少有两个连通分支。又由于G'是简单图且每个顶点的度为2知，每个连通分支至少有3个顶点。结合$|V(G)| = 6$，得，G'有且仅有两个连通分支，且这两个连通分支都是K_3。由Lemma 7.3和这两个连通分支的对称性易知，$G' \cong \overline{G}_2$。
综上所述，我们有：任意6阶3-正则图的补图必为6阶2-正则图，任意6阶2-正则图必与$\overline{G}_1$和$\overline{G}_2$之一同构。由Lemma 7.2可知，任意6阶3-正则图必与G_1或G_2同构。

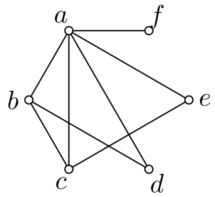
Q.E.D.

6.
(1) 度数和为偶数，可图化。
(2) 度数和为奇数，不可图化。



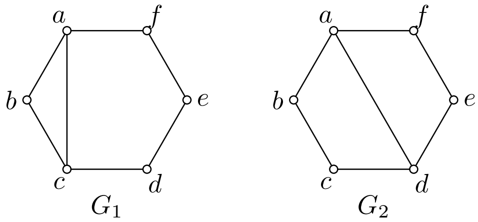
题7.6 (1)图

7.
(1) $(6, 6, 5, 5, 3, 3, 2) \Leftrightarrow (5, 4, 4, 2, 2, 1) \Leftrightarrow (3, 3, 1, 1, 0) \Leftrightarrow (2, 0, 0, 0)$，不可简单图化。
(2) $(5, 3, 3, 2, 2, 1) \Leftrightarrow (2, 2, 1, 1, 0) \Leftrightarrow (1, 0, 1, 0) \Leftrightarrow (1, 1, 0, 0)$，可简单图化(但只有一个非同构图)。
(3) $(3, 3, 2, 2, 2, 2) \Leftrightarrow (2, 1, 1, 2, 2) \Leftrightarrow (2, 2, 2, 1, 1) \Leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$，可简单图化。



G

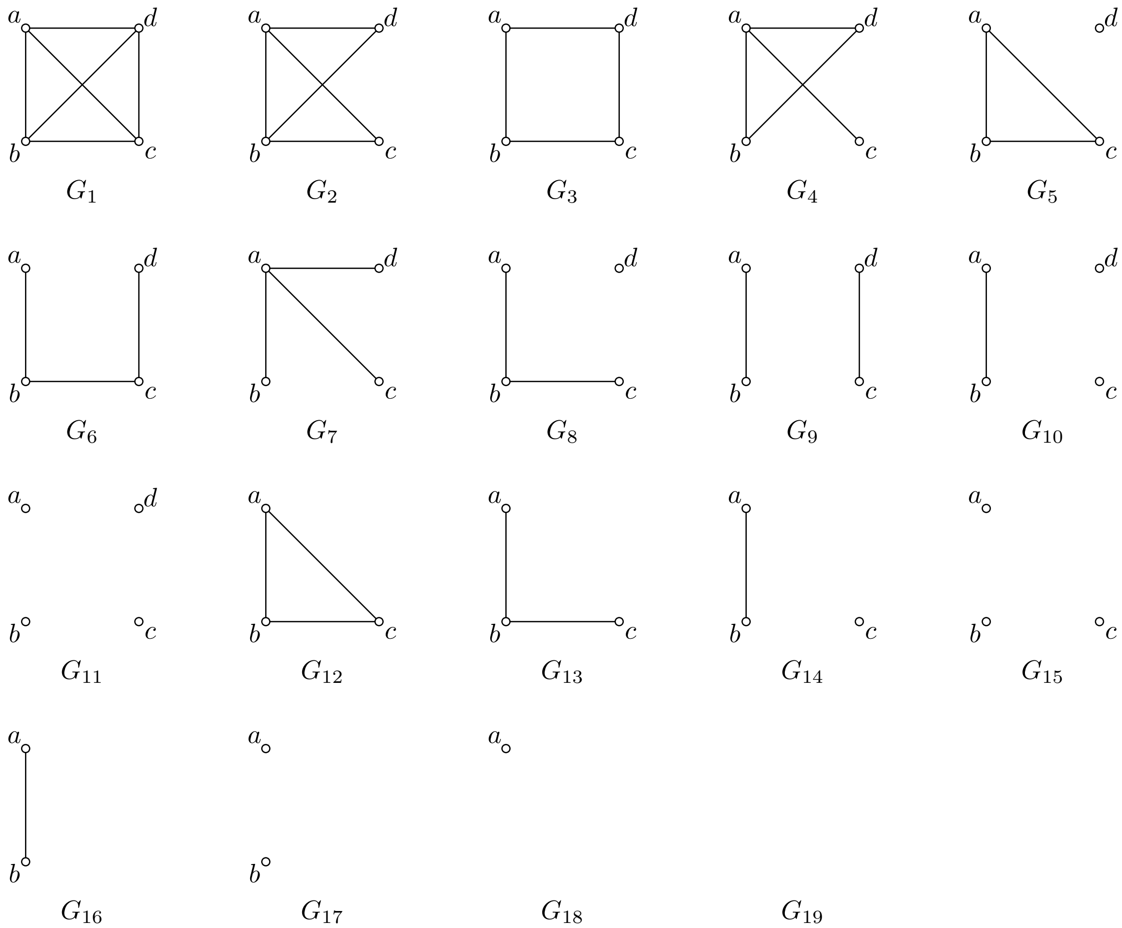
题7.7(2)图



G_1 G_2

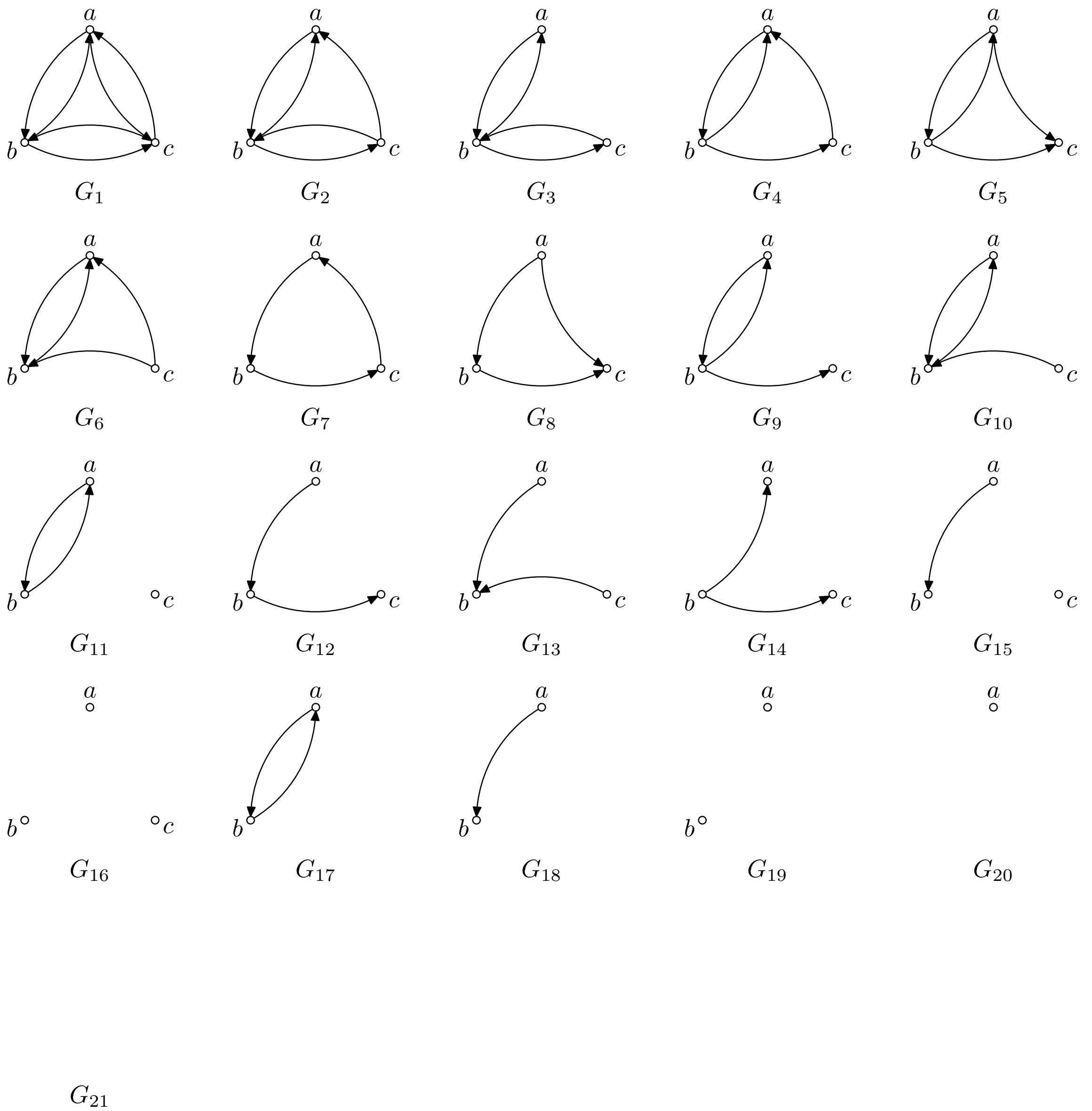
题7.7(3)图

8.



其中G_1到G_{11}是K_4的生成子图。G_6, G_{18}, G_{19}是自补图。

9.



其中G_1到G_{16}是生成子图。$G_7, G_9, G_{10}, G_{18}, G_{20}, G_{21}$是自补图。

10.

Proof:

由第8题结论知，3条边的非同构4阶无向简单图只有3个。由鸽巢原理知，原题成立。

Q.E.D.

11.

Proof:

由自补图定义、同构性质和简单图性质知，$|E(\overline{G})| = |E(G)|$以及$E(\overline{G})| + |E(G)| = |E(K_n)| = n(n-1)/2$。

令$|E(G)|=m$，则$n(n-1)=4m$。也即$4|n(n-1)$。由于n和$n-1$必有一个是奇数，其因子不含2，可知4必是另一个数因子。

故有$4|n$或$4|n-1$，即$n=4k$或$n=4k+1$。

Q.E.D.

注：本题题目缺少条件："G为无向图"。当G为有向图时，上述结论不成立(因为有向完全图的边数为$n(n-1)$而非$n(n-1)/2$)。

12.

Proof:

从G中任选一个顶点，记为v_1。由鸽巢原理知，G的其它5个顶点中，要么至少有3个与v_1相邻，要么至少有3个与v_1不相邻(即，在$\overline{G}$中v_1与它们相邻)。

由对称性，不妨设至少有3个顶点在G中与v_1相邻，将这3个顶点分别记为v_2,v_3,v_4。

若这3个顶点互不相邻，则这3个顶点在$\overline{G}$中就是彼此相邻的3个顶点。所证命题成立。

若这3个顶点中有相邻的顶点，则这对相邻的顶点与v_1一起就构成了彼此相邻的3个顶点。亦有命题成立。

综上所述，原命题成立。

Q.E.D.

13.

Proof:

若不然，这两个奇度顶点必分属两个不同的连通分支。而连通分支也是图，同样服从握手定理。然而G中唯一的两个奇度顶点却分属的两个连通分支，即这两个连通分支各自都只有一个奇度顶点，这和握手定理是矛盾的。

故有，这两个奇度顶点必属于同一个连通分支，因而是连通的。

Q.E.D.

14. 先证一个引理。

Lemma 7.4 对任意图(有向或无向)G，若有$\forall u,v,w\in V(G),(u,v),(v,w)\in E(G)\rightarrow(u,w)\in E(G)$ (若为有向图，则将本引理及证明中的无序对换成有序对即可)，则该图的每一个(强)连通分支都是完全图。

Proof:

只需证：$\forall u,v\in V(G),u\neq v\wedge u\sim v\rightarrow(u,v)\in E(G)$为永真即可。

对$d(u,v)$做归纳。

当$d(u,v)=1$时，由$d(u,v)$和通路定义直接得$(u,v)\in E(G)$。

设$d(u,v)=i$时，命题成立。即，对所有$u,v\in V(G)$，若$d(u,v)=i$，则$(u,v)\in E(G)$。下面证明当$d(u,v)=i+1$时，命题同样成立。

当$d(u,v)=i+1$时，有$\exists w_1,w_2,\ldots,w_i((u,w_1),(w_1,w_2),\ldots,(w_{i-1},w_i),(w_i,v)\in E(G))$。

由归纳前提有，$(u,w_i)\in E(G)$，又由(w_i,v)和题设推得$(u,v)\in E(G)$。

即，若$d(u,v)=i$时命题成立，则$d(u,v)=i+1$时命题同样成立。

由此证得原题。

上述证明中并未用到无序对的交换律，故该证明对有序对(有向图)的情形同样有效。

Q.E.D.

再证原题。

Proof:
若不然，由G是连通图和Lemma 7.4即得G是完全图，与题设“G不是完全图”矛盾。故得，原命题成立。

Q.E.D.

15.

Proof:
构造一“极大路径”$\Gamma = v_0, v_1, \ldots, v_l$。由$\Gamma$是极大路径知，$v_0$的所有邻接点都在$\Gamma$上。由$\delta(G)$定义知，至少存在$\delta(G)$个顶点$v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{\delta(G)}}(i_1 < i_2 < \ldots < i_{\delta}(G))$ 与v_0相邻。且由$\delta(G) \geq 2$知，$\delta(G) \neq 1$。从而由Γ是初级通路知，$v_{i_1} \neq v_{i_{\delta(G)}}$。于是有$(v_{i_{\delta(G)}}, v_0)$不在$\Gamma$上。因此，$v_0, v_1, \ldots, v_{i_{\delta(G)}}, v_0$即为一个长度大于等于$\delta(G)$+1的圈(因为它包含了$v_0$和$v_0$的所有邻接点，而$v_0$邻接点的个数不少于$\delta(G)$)。

由此可知，原命题成立。

Q.E.D.

16.

Proof:

构造一个“极大路径”$\Gamma = v_0, v_1, \ldots, v_l$。

由Γ是极大路径知，v_0的所有邻接点都在Γ上。

由$\delta(G) \geq 3$可知，除v_1外，至少还有两个顶点$v_i, v_j (2 \leq i < j \leq l)$与$v_0$相邻。

于是，$v_0, v_1, \ldots, v_i, v_0$是一个长度为$i$+1的圈，$v_0, v_1, \ldots, v_j, v_0$是一个长度为$j$+1的圈，$v_0, v_i, \ldots, v_j, v_0$是一个长度为$j - i + 2$的圈。

令d为G中各圈长度的最大公约数。则有$d|i + 1$、$d|j + 1$和$d|j - i + 2$，于是有$d|(i + 1) + (j - i + 2) - (j + 1) = 2$ (d的倍数的和、差仍是d的倍数)。

由$d|2$得到$d \leq 2$(因子总小于它的倍数)，进而由d是正整数(公因子的定义)得d等于1或2。

Q.E.D.

17.

Proof:
由简单图性质知，$\delta(G) \leq \Delta(G) \leq n - 1$。结合题设可知，$\delta(G)$只有两个可能的取值：$n - 1$和$n - 2$。

现分别进行讨论。

当$\delta(G) = n - 1$时，易证G是完全图。由$\kappa(G)$定义知，$\kappa(G) = n - 1$。命题成立。

当$\delta(G) = n - 2$时，由教材定理7.10知$\kappa(G) \leq \delta(G) = n - 2$，又由教材定理7.13知$\kappa(G) \geq 2\delta(G) - n + 2 = n - 2$，综合即得$\kappa(G) = n - 2$。命题依然成立。

Q.E.D.

18.
(1)
Proof:
由连通图定义知，当n等于0或1时，G是连通图的。
当$n \geq 2$时，有$\delta(G) \geq \frac{1}{2}n \geq 1$，再由教材定理7.12(1)知，$\lambda(G) = \delta(G) \geq 1$，即$G$至少是1边-连通图，因而也是连通图。
Q.E.D.

(2)
Proof:
若不然，令V_1是G的最小点割集，则$|V_1| < k$(即$|V_1| \leq k-1$)，于是有$\delta(G-V_1) \geq \frac{1}{2}(n+k-1)-(k-1) = \frac{1}{2}(n-k+1) > \frac{1}{2}(n-k)$(这是由于从$G$中删去一个顶点，至多使$G$中其它顶点减少1度。现在从$G$中至多删去$k-1$个点，故$\delta(G-V_1)$不会少于$\frac{1}{2}(n+k-1)-(k-1)$)。
而$|G-V_1| = n-k$，即，图$G-V_1$满足(1)小题所述的条件，因而是连通的，这与V_1是G的点割集矛盾。
由此可知，原命题成立。
Q.E.D.

19.[1]
(1)
Proof:
任取一顶点$v_1 \in V(G)$，从$N_G(v_1)$任取另一顶点v_2。则$N_G(v_1) \cap N_G(v_2) = \emptyset$(若不然，则它们交集中的顶点将与$v_1$和$v_2$构成一个长度为3的圈，这与$G$的围长是4矛盾)，而$|N_G(v_1)| = |N_G(v_2)| = k$，故$G$中至少有$|N_G(v_1) \cap N_G(v_2)| = |N_G(v_1)| + |N_G(v_2)| - |N_G(v_1) \cap N_G(v_2)| = 2k$个顶点。
Q.E.D.

(2)
Proof:
先证明G是完全二部图$K_{k,k}$。
按(1)中所述的方法选择v_1, v_2并构造$N_G(v_1), N_G(v_2)$。
用(1)的结论，我们知道，$N_G(v_1) \cap N_G(v_2) = \emptyset$且$|N_G(v_1)| = |N_G(v_2)| = k$，于是有$|N_G(v_1) \cup N_G(v_2)| = |N_G(v_1)| + |N_G(v_2)| = 2k = |V(G)|$。也即，$N_G(v_1) \cup N_G(v_2)$包括了$G$中所有顶点。
现在证明，在同一顶点集中的两个顶点不相邻。
若不然，则有两个相邻的u_1, u_2属于同一个$N_G(v_i)(i = 1, 2)$。由对称性，不妨设$u_1, u_2 \in N_G(v_1)$，则由它们在$N_G(v_1)$知它们都于v_1相邻，而它们之间也相邻，则v_1, u_1, u_2, v_1就是一个长度为3的圈，这与G的围长为4矛盾。

[1]感谢南京大学02级计算机系 赖江山 同学提供第19题、第20题的美妙证明。

可见，同一个$N_G(v_i)(i=1,2)$都不相邻。但由G是k-正则图知，每个顶点都有k邻接点，结合上述两个条件知，$N_G(v_1)$中的每一个顶点都是$N_G(v_2)$中的每一个顶点相邻，反之亦然。
由上述论证可知，G是完全二部图$K_{k,k}$。再由Lemma 7.3知，这样的G在同构意义下是唯一的。

Q.E.D.

20.
Proof:

令v是G中度最大的顶点。

由$\Delta(G)=n-2$知，G中有一个顶点与v不相邻，将这个顶点记作u。

由$d(G)=2$知，G中的任何一个顶点，至多只需途经一个顶点就可以到达u。而途经的这一个顶点不可能是v(因为u与v之间没有边)。也就是说，G中的任何一个顶点都可以不经过v而到达u。
令$G'=G-v$，则G'是连通的(因为G'中所有的顶点都有到达u的通路，且这个通路不因v的删除而中断)，由教材定理7.9可知，$|E(G')\geq|V(G')|-1=n-2$，而G'比G少$n-2$个边。于是有$m=|E(G)|=E(G')+n-2\geq 2n-4$。

Q.E.D.

21. 先证一个引理。

Lemma 7.5 若一个n阶无向图G不含圈，则必有$|E(G)|=n-p(G)$，其中$p(G)$是G中的连通分支数。

Proof:

对n做归纳。

当$n=1$时，命题显然成立。

设$n=i$时，命题成立，下面证明$n=i+1$时命题也成立。

设$|V(G)|=i+1$，且G不含圈。令$x=|E(G)|+p(G)$，下面证明$x=i+1$。
任取一个顶点$v\in V(G)$，令$G'=G-I_G(x)$，即，令G'为从G删去所有与v关联的边后所得的图。由G中无圈和教材定理7.18知，G中任何一个边都是桥，故删去的边数恰好等于增加的连通分支数。于是有$x=|E(G)|+p(G)=|E(G')|+p(G')$。再从$G'$中删去$v$，得到$G''$。注意到，$v$在$G'$中是孤立顶点。因此，删去$v$会使$G'$的连通分支数减1，而边数不变。即$E(G'')=E(G'),p(G'')=p(G')-1$。而$|V(G'')|=i$，由归纳假设知$E(G'')=i-p(G'')$。代入前式，即得$x=E(G')+p(G')=E(G'')+p(G'')+1=i+1$。于是有$|E(G)|+p(G)=x=i+1$，即$|E(G)|=(i+1)-p(G)$。可见，若$n=i$时命题成立，则当$n=i+1$时，命题依然成立。

Q.E.D.

再证原题。

Proof:

若G为空图，则命题显然成立。若G非空，则至少存在一个连通分支，由Lemma 7.5可知，G中若不含圈，则至多有$n-1$个边，即有$m<n$，这与题设$m \geq n$矛盾。故，G中必含圈。

Q.E.D.

22.

Proof:

暂缺。敬盼做过此题的学友提供好的证明方法。

Q.E.D.

23.

Proof:

令$n=2r, \delta=s, \lambda=r, \kappa=1$，则由教材定理7.14(1)立即得证。

Q.E.D.

24.

(1)

Proof:

将12题的G和$\overline{G}$换成红、蓝两色边即可得证。

Q.E.D.

(2)

Proof:

直接利用第12题结论即可。

Q.E.D.

(3)

Proof:

将这个"与6条或更多条红色边关联"的顶点记作v_1，这6条边的另一端所连接的6个端点构成一个K_6子图。

由(1)的结论有，这个K_6中必有红色的K_3或蓝色的K_3。

若存在蓝色的K_3，则命题成立。

若存在红色的K_3，则这个K_3中的3个顶点与v_1的边都是红色的，于是这3个顶点和v_1一起构成红色的K_4，命题仍然成立。

Q.E.D.

25.

Proof:

由Lemma 7.4知，若D是强连通的，则D是有向完全图。这与题设"D为竞赛图"矛盾。故得，原命题成立。

Q.E.D.