第十三章　支配集、覆盖集、独立集与匹配

定理 13.1 设无向图 G 中无孤立顶点，V_1^* 为 G 的一个极小支配集，则 G 中存在另一个极小支配集 V_2^*，使得 $V_1^* \cap V_2^* = \varnothing$.

定理 13.2 设无向图 G 中无孤立顶点，V^* 为 G 中极大独立集，则 V^* 是 G 中极小支配集.

定理 13.3 设无向图 $G = \langle V, E\rangle$ 中无孤立顶点，$V^* \subset V$，则 V^* 为 G 的点覆盖集当且仅当 $\overline{V}^* = V - V^*$ 为 G 的点独立集.

推论 设 G 是 n 阶无孤立点的无向图. V^* 是 G 的极小(最小)点覆盖集当且仅当 $\overline{V}^* = V(G) - V^*$ 为 G 的极大(最大)点独立集. 从而有

$$\alpha_0 + \beta_0 = n.$$

定理 13.4 设 G 是 n 阶无向图，V^* 为 G 中团当且仅当 V^* 为 $\overline{G}$ 中的独立集.

推论 设 G 是 n 阶无向图，V^* 为 G 中极大(最大)团当且仅当 V^* 为 $\overline{G}$ 中的极大(最大)独立集，从而 $\nu_0(G) = \beta_0(\overline{G})$.

定理 13.5 设 G 为无孤立点的 n 阶无向图.

(1) 设 M 为 G 中一个最大匹配，对于每个 M 非饱和点 v，取一条关联 v 的边组成边集 N，则 $W = M \cup N$ 为 G 中一个最小边覆盖集.

(2) 设 W_1 为 G 中一个最小边覆盖集，若 W_1 中存在相邻的边就移去其中的一条边，继续这一过程，直到无相邻的边为止，设移去的边组成的集合为 N_1，则 $M_1 = W_1 - N_1$ 为 G 中一个最大匹配.

(3) $\alpha_1 + \beta_1 = n$.

推论 设 G 为 n 阶无孤立点的无向图，M 为 G 中一个匹配，W 为 G 中一个边覆盖，则

$$|M| \le |W|.$$

等号成立时，M 为 G 中完美匹配且 W 为 G 中的最小边覆盖.

定理 13.6 设 G 为无孤立点的 n 阶无向图，M 为 G 中一个匹配，N 为 G 中一个点覆盖，Y 为 G 中一个点独立集，W 为 G 中一个边覆盖，则

(1) $|M| \le |N|$,

(2) $|Y| \le |W|$,

等号成立时，M, N, Y, W 分别为 G 中最大匹配、最小点覆盖集，最大点独立集、最小边独立集.

推论 设 G 为无孤立顶点的 n 阶无向图，则

$$\beta_1 \le \alpha_0, \quad \beta_0 \le \alpha_1.$$

定理 13.7 设 M_1, M_2 为 G 中两个不同的匹配，则 $G[M_1 \oplus M_2]$ 的每个连通分支或为由 M_1, M_2 中的边组成的交错圈，或为交错路径.