由引理 3.3 和 $f\circ h_2=g\circ h_2$ 知，$\forall x(x\in B\to f\circ h_2(x)=g\circ h_2(x))$。于是：

$\forall x$

$x\in B$

$\Longrightarrow f\circ h_2(x)=g\circ h_2(x)\wedge x\in X$ (前提)

$\Longleftrightarrow f(h_2(x))=g(h_2(x))\wedge x\in X$ (教材定理 3.3)

$\Longleftrightarrow f(x)=g(x)\wedge x\in X$ $(h_2(x)=x)$

$\Longleftrightarrow x\in A$ (A 定义)

故有：$B\subseteq A$。 □

3.22 先证第一部分，即：$\forall f,g\in(X\to X)(h\circ f=h\circ g\to f=g)\Leftrightarrow h$是单射的。

证明: 先证必要性。

若 h 不是单射的，则存在 $x_1,x_2\in X$，有 $x_1\neq x_2\wedge h(x_1)=h(x_2)$。

令 $f:X\to X,f(x)=x_1$， $g:X\to X,g(x)=x_2$。则 $h\circ f=h\circ g$，但 $f\neq g$。与前提 $h\circ f=h\circ g\to f=g$ 矛盾。故有：$h\circ f=h\circ g\to f=g\Rightarrow h$是单射的。

再证充分性。

若 h 是单射的，则由教材定理 3.10(1) 知，h 存在左逆。令 h' 为 h 的左逆。

对任意函数 $f,g\in(X\to X)$，若 $h\circ f=h\circ g$ 则：

$f=I_X\circ f$ (教材定理 3.6)

$=h'\circ h\circ f$ (h' 是 h 的左逆)

$=h'\circ h\circ g$ $(h\circ f=h\circ g)$

$=I_X\circ g$ (h' 是 h 的左逆)

$=g$ (教材定理 3.6)

综合得：对任意的 $f,g\in(X\to X)$，只要 $h\circ f=h\circ g$ 就有 $f=g$ 当且仅当 h 是单射的。 □

再证第二部分，即：$\forall f,g\in(X\to X)(f\circ h=g\circ h\to f=g)\Leftrightarrow h$是满射的。

证明: 先证必要性。

若 h 不是满射的，则存在 $a\in X$，有 $\forall x(x\in X\to h(x)\neq a)$ (由此可知，$h(a)\neq a$)。

令 $f:X\to X,f(x)=x$， $g:X\to X,g(x)=\begin{cases}x & x\neq a\\ h(a) & x=a\end{cases}$。则 $f\circ h=g\circ h$，但 $f\neq g$。与前提 $f\circ h=g\circ h\to f=g$ 矛盾。故有：$f\circ h=g\circ h\to f=g\Rightarrow h$是满射的。

再证充分性。

若 h 是满射的，则由教材定理 3.10(2) 知，h 存在右逆。令 h' 为 h 的右逆。

对任意函数 $f,g\in(X\to X)$，若 $f\circ h=g\circ h$ 则：

$f=f\circ I_X$ (教材定理 3.6)

$=f\circ h\circ h'$ (h' 是 h 的右逆)

$=g\circ h\circ h'$ $(h\circ f=h\circ g)$

$=g\circ I_X$ (h' 是 h 的右逆)

$=g$ (教材定理 3.6)

综合得：对任意的 $f,g\in(X\to X)$，只要 $f\circ h=g\circ h$ 就有 $f=g$ 当且仅当 h 是满射的。 □

3.23 先证一个引理。