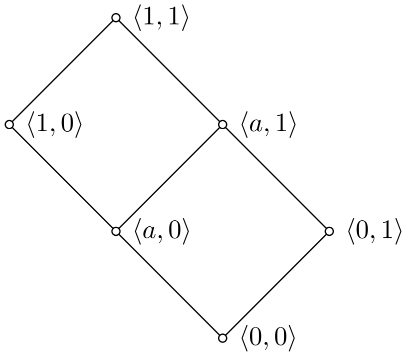
对任何 $x \in I$，显然有 $x \preccurlyeq a$，从而 $x \in \varphi(a)$。也就是说，$I \subseteq \varphi(a)$。

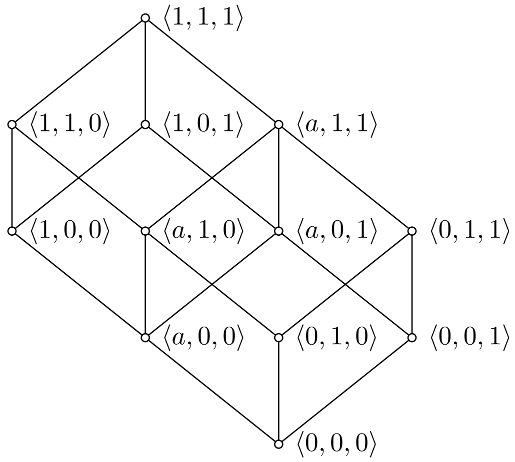
而对任何 $x \in \varphi(a)$，由 $\varphi(a)$ 的定义知，$x \preccurlyeq a$。由于 $x \in L$，$a \in I$，而 I 是理想，所以 $x \in I$。从而有 $\varphi(a) \subseteq I$。也即 $\varphi(a) = I$。

这就证明了 $\varphi(L) = I(L)$，φ 是 L 到 $I(L)$ 的满同态，从而是同构。 □

19.25



$L_1 \times L_2$



$L_1 \times L_2 \times L_2$

19.26

证明: $\forall a, b \in B$，

$$
\begin{aligned}
a \vee (\bar a \wedge b) &= (a \vee \bar a) \wedge (a \vee b) && \text{(分配律)}\\
&= 1 \wedge (a \vee b) && \text{(补元定义)}\\
&= a \vee b && (a \vee b \preccurlyeq 1\text{、教材定理 19.2})\\
a \wedge (\bar a \vee b) &= (a \wedge \bar a) \vee (a \wedge b) && \text{(分配律)}\\
&= 0 \vee (a \wedge b) && \text{(补元定义)}\\
&= a \wedge b && (a \wedge b \preccurlyeq 0\text{、教材定理 19.2})
\end{aligned}
$$

□

19.27 首先证明如下结论：

引理 19.2 设 $\langle B, \wedge, \vee, {}^{-}, 0, 1\rangle$ 是布尔代数，则 $\forall a, b \in B$，有

$$\overline{(a \wedge \bar b) \vee (\bar a \wedge b)} = (\bar a \wedge \bar b) \vee (a \wedge b).$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\overline{(a \wedge \bar b) \vee (\bar a \wedge b)} &= \overline{a \wedge \bar b} \wedge \overline{\bar a \wedge b} && \text{(教材定理 19.23(2))}\\
&= (\bar a \vee \bar{\bar b}) \wedge (\bar{\bar a} \vee \bar b) && \text{(教材定理 19.23(2))}\\
&= (\bar a \vee b) \wedge (a \vee \bar b) && \text{(教材定理 19.23(1))}\\
&= (\bar a \wedge (a \vee \bar b)) \vee (b \wedge (a \vee \bar b)) && \text{(分配律)}\\
&= (\bar a \wedge a) \vee (\bar a \wedge \bar b) \vee (b \wedge a) \vee (b \wedge \bar b) && \text{(分配律)}\\
&= 0 \vee (\bar a \wedge \bar b) \vee (b \wedge a) \vee 0 && \text{(补元定义)}\\
&= (\bar a \wedge \bar b) \vee (b \wedge a) && \text{(0 是全下界、教材定理 19.2)}\\
&= (\bar a \wedge \bar b) \vee (a \wedge b) && \text{(交换律)}
\end{aligned}
$$

□