$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在．从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续，当然也不可微

$\forall P\in l$ 且 $P\in U((0,0))$ 当 $P\to(0,0)$ 时，$f(P)=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{0}{\rho}=0$$

注. 1) 可微 $\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ 方向导数存在

2) 连续 $\substack{\not\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ 方向导数存在

例：$z=f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$，f在 $(0,0)$ 连续，但在 $(0,0)$ 沿任意方向的方向导数都不存在.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt[3]{xy}=0=f(0,0)$ 　f在 $(0,0)$ 连续.

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\lim_{\rho\to0}\frac{f(P)-f(0,0)}{\rho} \qquad P(x,y)$$

$$=\lim_{\rho\to0}\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ 不存在.}$$

取 $y=x(>0)$，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt2\,x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt2}\frac{1}{x^{\frac13}}=\infty$

$\boxed{\text{总结:}}$

偏导数连续 $\longrightarrow$ 函数可微 $\longrightarrow$ 函数连续

函数可微 $\longrightarrow$ 偏导数存在

函数可微 $\longrightarrow$ 方向导数存在.

2. 梯度

(1) 定义：若 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 存在所有自变量的偏导数，则称向量 $(f_x'(P_0), f_y'(P_0), f_z'(P_0))$ 为 f 在 P_0 点的梯度，记作

$$\operatorname{grad} f=(f_x'(P_0), f_y'(P_0), f_z'(P_0))$$

向量 grad f 的模为 $|\operatorname{grad} f|=\sqrt{f_x'^2(P_0)+f_y'^2(P_0)+f_z'^2(P_0)}$