是可逆的。由 a 的任意性知，R^* 中任意元素皆可逆。

这就证明了 $\langle R^*, \cdot\rangle$ 是 Abel 群，从而 $\langle R, +, \cdot\rangle$ 是域。 □

再证原题。

证明： 反设存在 pq 阶整环 R，则由引理 18.1 知，R 是域。这与教材定理 18.4 矛盾。 □

18.10

证明： 要证明 $\langle S, \cdot\rangle$ 是子半群，只须证明 S 对 $\cdot$ 运算的封闭性即可。

$\forall a, b \in S, c \in R$，

$$\begin{aligned} abc = 0 &\iff bc = 0 && (a \text{ 不是零因子}) \\ &\iff c = 0 && (b \text{ 不是零因子}) \end{aligned}$$

这就证明了对任意 $a, b \in S$，ab 不是左零因子，同理可证 ab 不是右零因子，从而 $ab \in S$。□

$\langle S, +, \cdot\rangle$ 不一定是 $\langle R, +, \cdot\rangle$ 的子环。

反例：由习题 18.7 第 (3) 小题可知，若 $R = \mathbb{Z}_{18}$，则 $S = \{0, 1, 5, 7, 11, 13, 17\}$。然而 $1 + 1 = 2 \notin S$，S 对加法运算不封闭。从而 $\langle S, +, \cdot\rangle$ 不是子环。

“正例”：对任意无零因子环 R，(如 $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot\rangle$)，显然有 $S = R$ 是 R 的子环。

18.11 即为引理 18.1。

18.12

证明： 由教材定理 18.3 知，n 是素数。

由二项式定理知，$(a + b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$。当 $0 < i < n$ 时，C_n^i 的分母中没有 n，而分子中有 n，从而由 n 是素数和 C_n^i 是整数知，$C_n^i = k_i n$，$k_i \in \mathbb{Z}$，$i = 1, 2, \cdots, n - 1$。

而对任意 $a \in R, k_i \in \mathbb{Z}$，有 $kna = kn(1 \cdot a) = k(n \cdot 1)a = k(0 \cdot a) = 0$。从而

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = a^n + b^n + \sum_{i=1}^{n-1} k_i n a^{n-i} b^i = a^n + b^n.$$

□

18.13

证明： 首先证明 $T \subseteq S$。由于 $|T| \geq 2$，所以存在非零元 $a \in T$，$a \neq 0$。对任意 $x \in T$，由于 T 是子环，所以有 $xa \in T$。从而 $x = (xa)a^{-1} \in S$。由 x 的任意性知，$T \subseteq S$。

其次证明 S 是子域。由于 $T \subseteq S$，S 非空，由子域定义和子群判定定理可知，要证 S 是子域，只需证明 $\forall x, y \in S$，有 $x - y \in S$ 和 $xy^{-1} \in S^*$ 即可。

对任意 $x, y \in S$，存在 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in T$，b_1, b_2 不为零，使 $x = a_1 b_1^{-1}, y = a_2 b_2^{-1}$。从而：

$$\begin{aligned} x - y &= a_1 b_1^{-1} - a_2 b_2^{-1} && (x = a_1 b_1^{-1}, y = a_2 b_2^{-1}) \\ &= a_1 b_2 b_2^{-1} b_1^{-1} - a_2 b_1 b_1^{-1} b_2^{-1} && (b_2 b_2^{-1} = b_1 b_1^{-1} = 1) \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 b_2)^{-1} && (\text{交换律、分配律}) \end{aligned}$$

因为 T 是子环，所以 $a_1 b_2 - a_2 b_1, b_1 b_2 \in T$，又因为 F 是域且 b_1 和 b_2 都是非零元，所以 $b_1 b_2 \neq 0$。从而有 $x - y = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 b_2)^{-1} \in S$。

对任意 $x, y \in S^*$，存在 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in T$，b_1, b_2 不为零，使 $x = a_1 b_1^{-1}, y = a_2 b_2^{-1}$。从而：

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= a_1 b_1^{-1} (a_2 b_2^{-1})^{-1} && (x = a_1 b_1^{-1}, y = a_2 b_2^{-1}) \\ &= a_1 b_1^{-1} b_2 a_2^{-1} && (\text{教材定理 17.2}) \\ &= a_1 b_2 b_1^{-1} a_2^{-1} && (\text{乘法交换律}) \\ &= a_1 b_2 (a_2 b_1)^{-1} && (\text{教材定理 17.2}) \end{aligned}$$