第5章 一阶逻辑等值演算与推理

- 等值式
- 基本等值式

  量词否定等值式

  量词辖域收缩与扩张等值式

  量词分配等值式
- 前束范式
- 推理理论

等值式与基本等值式

定义 若$A\leftrightarrow B$为逻辑有效式，则称A与B是等值的，记作 $A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$为等值式.

基本等值式:

命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

如，$\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

$\neg(\forall xF(x)\vee\exists yG(y)) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x)\wedge\neg\exists yG(y)$ 等

消去量词等值式 设$D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

$\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$

$\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

基本等值式(续)

量词辖域收缩与扩张等值式

设$A(x)$是含x自由出现的公式，B中不含x的出现

关于全称量词的:

$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$

$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$

$\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$

$\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

关于存在量词的:

$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$

$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

$\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$

$\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

基本的等值式(续)

量词否定等值式

设$A(x)$是含x自由出现的公式

$$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow \exists x\,\neg A(x)$$

$$\neg\,\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\,\neg A(x)$$

量词分配等值式

$$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$$

注意：$\forall$对$\vee$无分配律，$\exists$对$\wedge$无分配律, 即

$\forall x(A(x)\vee B(x))\not\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$（$\Leftarrow$成立）

$\exists x(A(x)\wedge B(x))\not\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$（$\Rightarrow$成立）

例

例 将下面命题用两种形式符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 (1) 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

前束范式

定义 设A为一个一阶逻辑公式, 若A具有如下形式 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$, 则称$A$为前束范式, 其中$Q_i$ $(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，B为不含量词的公式.

例如，$\forall x\exists y(F(x)\to(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

是前束范式, 而

$\forall x(F(x)\to\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

不是前束范式.

换名规则和置换规则

换名规则: 将量词辖域中出现的某个约束出现的个体变项及对应的指导变项，改成其他辖域中未曾出现过的个体变项符号，公式中其余部分不变，则所得公式与原来的公式等值.

置换规则：见之前的定义

公式的前束范式

定理（前束范式存在定理）一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

求前束范式：使用重要等值式、置换规则、换名规则进行等值演算.

例 求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

解

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

两步结果都是前束范式，说明前束范式不惟一.

例(续)

(2) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （量词分配等值式）

或者

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ (量词辖域扩张)

例(续)

(3) $\exists xF(x)\lor\neg\forall xG(x)$

解 $\Leftrightarrow\exists xF(x)\lor\exists x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\lor\neg G(x))$

或 $\Leftrightarrow\exists xF(x)\lor\neg\exists yG(y)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\lor\exists y\neg G(y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\lor\neg G(y))$

(4) $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$

解 $\Leftrightarrow\forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$

$\Leftrightarrow\exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\land\neg H(y)))$

例(续)

(5) $\forall x(F(x,y)\to\exists y(G(x,y)\wedge H(x,z)))$

解 $\Leftrightarrow\forall x(F(x,y)\to\exists u(G(x,u)\wedge H(x,z)))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists u(F(x,y)\to G(x,u)\wedge H(x,z)))$

注意：∀与∃不能颠倒

求前束范式时,特别注意哪些既约束出现又自由出现的个体变项，需要通过换名消去既约束出现又自由出现的个体变项.

练习

求与下列公式等价的前束范式

(1) $\forall x(P(x) \rightarrow (\exists yQ(y) \rightarrow \exists yR(x,y)))$

(2) $(\neg\exists xF(x) \vee \forall yG(y)) \wedge (F(a) \rightarrow \forall zH(z))$

苏格拉底三段论的正确性

"凡是人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的."

设$F(x)$：x是人，$G(x)$：x是要死的，a：苏格拉底.

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\wedge F(a)\rightarrow G(a)$$

设前件为真，即$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$与$F(a)$都为真.

由于$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$为真，故$F(a)\rightarrow G(a)$为真.

由$F(a)$ 与$F(a)\rightarrow G(a)$为真，根据假言推理得证$G(a)$为真.

推理的形式结构

推理的形式结构

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C \qquad (1)$$

有效推理的形式结构:

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$$

$H_1, H_2, \ldots, H_n, C$是一阶逻辑公式.

(1)式为永真时,则称推理正确,否则称推理不正确.

推理规则(Rules of inference)

第一组：命题逻辑推理定律的代换实例.

如：$\forall xF(x)\wedge\forall yG(y)\Rightarrow\forall xF(x)$

$\forall xF(x) \Rightarrow\forall xF(x)\vee\forall yG(y)$

第二组：由基本等值式生成的推理定律.每个一阶逻辑等值式可以生成两个推理定律.如：

$\forall xF(x)\Rightarrow\neg\neg\forall xF(x)$

$\neg\neg\forall xF(x)\Rightarrow\forall xF(x)$

推理规则(Rules of inference)

第三组：一些常用的重要推理定律.

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall xA(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\forall xA(x) \rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\forall xA(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\exists xA(x) \rightarrow\exists xB(x)$

推理规则（续）

全称量词消去规则∀-

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

- x,y是个体变项符号，c是个体常项符号;
- 在A中x不在$\forall y$或$\exists y$的辖域内自由出现.

  如：个体域是R, $\forall x \exists y(x<y)$，设$A(x)=\exists y(x<y)$, 则$\forall x A(x)$.

  若用y取代x，$A(y)= \exists y(y<y)$。错误。
- 用y或c去取代$P(x)$中的x时，要在x出现的一切地方取代.

推理规则（续）

全称量词引入规则∀+

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$$

- y是个体变项符号，不在前提的任何公式内自由出现.
- 取代自由出现的y的x，不能在$A(y)$中约束出现.

如: 个体域是R，$F(x,y)$为$x<y$, $P(y)=\exists x F(x,y)$, 为真.如果用x来取代y，则$\forall x P(x)=\forall x\exists x(x<x)$，为假.

推理规则（续）

存在量词消去规则∃-

$$\frac{\exists x A(x) \quad A(y)\rightarrow B}{\therefore B} \quad 或 \quad \frac{A(y)\rightarrow B}{\therefore \exists x A(x)\rightarrow B}$$

$$\frac{\exists x A(x) \quad A(c)\rightarrow B}{\therefore B} \quad 或 \quad \frac{A(c)\rightarrow B}{\therefore \exists x A(x)\rightarrow B}$$

- y是个体变项符号，不在前提的任何公式和B内自由出现.
- c是个体常项符号，且不在前提的任何公式和A,B内出现.

推理规则（续）

存在量词引入规则∃+

$$\frac{A(y)}{\therefore \exists x A(x)} \quad 或 \quad \frac{B \to A(y)}{\therefore\ B \to \exists x A(x)}$$

$$\frac{A(c)}{\therefore \exists x A(x)} \quad 或 \quad \frac{B \to A(c)}{\therefore\ B \to \exists x A(x)}$$

- x,y是个体变项符号, c是个体常项符号
- 在A中y和c分别不在$\forall x,\exists x$的辖域内自由出现和约束出现.

实例

例1 判断下面的构造证明是否正确

前提： $\forall x(P(x)\to Q(x)), P(x)$

结论： $\forall x Q(x)$

① $\forall x(P(x)\to Q(x))$ 前提引入

② $P(x)\to Q(x)$ ①$\forall$-

③ $P(x)$ 前提引入

④ $Q(x)$ ②③假言推理

⑤ $\forall x Q(x)$ ④$\forall$+

实例（续）

解 不正确。

原因：⑤应用$\forall$+时$P(x)$中的x在前提中是自由出现，

不满足$\forall$+的使用条件。

解释I：个体域是整数集合Z，$P(x)$:x是偶数,$Q(x)$:x

被2整除. I下的赋值$\sigma(x)=2$.

显然,在I和σ下, $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$为真,再令$P(x)$为真,但
$\forall xQ(x)$为假.

注意：

说明

1.在使用∀-, ∀+, ∃-, ∃+时,特别留意其使用条件.如:可以对$\forall x\mathrm{F}(x)$使用∀-规则得到$F(y)$,但不能对$\forall x\exists y\mathrm{F}(x,y)$使用∀-规则得到$\exists y\mathrm{F}(y,y)$.怎样消去∀?

2. 在使用∀-, ∃-时必须是前束范式。

3. 使用附加证明法时，注意量词的辖域.比如:
结论是$\forall x(F(x)\to G(x))$,不能将$\forall xF(x)$作为附加前提.若前提是$\forall xF(x)\to G(x)$则可以把$\forall xF(x)$作为附加前提.

实例（续）

例2 在自然推理系统中, 构造下面推理的证明.

任何自然数都是整数. 存在自然数.所以,存在整数.

个体域是实数集合R.

解 设$F(x)$:x是自然数,$G(x)$:x是整数.

　　前提： $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $\exists xF(x)$

　　结论： $\exists xG(x)$

实例（续）

前提： $\forall x(F(x)\to G(x)), \exists xF(x)$

结论： $\exists xG(x)$

① $\forall x(F(x)\to G(x))$　前提引入

② $F(x) \to G(x)$　① $\forall$-

③ $F(x) \to \exists xG(x)$　② $\exists$+

④ $\exists xF(x)$　前提引入

④ $\exists xG(x)$　③④ $\exists$-

实例（续）

例3 在自然推理系统中, 构造下面推理的证明.

前提: $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \exists x(F(x)\wedge H(x))$

结论: $\exists x(G(x)\wedge H(x))$

证明:

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 前提引入

② $F(x) \rightarrow G(x)$ ① $\forall$-

③ $\neg F(x)\vee G(x)$ ② 置换

④ $\neg F(x)\vee\neg H(x)\vee G(x)$ ③ 附加

⑤ $(\neg F(x)\vee\neg H(x)\vee G(x))\wedge(\neg F(x)\vee\neg H(x)\vee H(x))$ ④置换

实例（续）

⑥ $(\neg F(x) \vee \neg \mathrm{H}(\mathrm{x}) \vee (G(x) \wedge H(x))$ ⑤置换

⑦ $F(x) \wedge H(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)$ ⑥置换

⑧ $(F(x) \wedge H(x)) \rightarrow \exists x(G(x) \wedge H(x))$ ⑦ ∃+

⑨ $\exists x(F(x) \wedge H(x))$ 前提引入

⑩ $\exists x(G(x) \wedge H(x))$ ⑨ ∃-

实例（续）

例4 在自然推理系统中, 构造下面推理的证明.

不存在能表示成分数的无理数.有理数都能表示成分数.因此,有理数都不是无理数.（个体域是实数集合）

解 设$F(x)$:x是无理数,$G(x)$:x是有理数,$H(x)$:x能表示成分数.

前提：$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$, $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x))$

前提： $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x)), \forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论： $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明：

① $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$	前提引入
② $\forall x(F(x)\rightarrow\neg H(x))$	①置换
③ $F(x)\rightarrow\neg H(x)$	② $\forall$-
④ $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
⑤ $G(x)\rightarrow H(x)$	④ $\forall$-
⑥ $H(x)\rightarrow\neg F(x)$	③置换
⑦ $G(x)\rightarrow\neg F(x)$	⑤ ⑥假言三段论
⑧ $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$	⑦ $\forall$+

例5 指出下面证明中的错误.并给出正确证明.

前提： $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x)),\ \forall x(H(x)\rightarrow G(x))$

结论： $\forall x(H(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明：

① $\forall xH(x)$	附加前提引入	⑥ $\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$	前提引入
② $H(x)$	① $\forall$-	⑦ $F(x)\rightarrow\neg G(x)$	⑥ $\forall$-
③ $\forall x(H(x)\rightarrow G(x))$	前提引入	⑧ $G(x)\rightarrow\neg F(x)$	⑦置换
④ $H(x)\rightarrow G(x)$	③ $\forall$-	⑨ $\neg F(x)$	⑤⑦假言推理
⑤ $G(x)$	②④假言推理	⑩ $\forall x\neg F(x)$	⑨ $\forall$+

例6在自然推理系统中, 构造下面推理的证明.

前提: $\exists xF(x)\to\forall xG(x)$

结论: $\forall x(F(x)\to G(x))$

证明:

① $\exists xF(x)\to\forall xG(x)$	前提引入
② $\forall x\neg F(x)\vee\forall xG(x)$	① 置换
③ $\forall x(\neg F(x)\vee G(x))$	② 推理
④ $\neg F(x)\vee G(x)$	③ $\forall$-
⑤ $F(x)\to G(x)$	④ 置换
⑥ $\forall x(F(x)\to G(x))$	⑤ $\forall$+