反设还存在另一个块 $B_t \in \mathscr{B}$，$B_t \neq B_s$ 且 $H \subseteq B_s \cap B_t$，则由 $|V(H)| \geq 2$ 可知，$|V(B_s) \cap V(B_t)| \geq 2$。这与结论 (3) 矛盾。这就是说，$H$ 只会被包含在唯一的一个块中。

(5) 对任意 $e = (x, y) \in E_i \cap E_j$，应有 $x, y \in V_i \cap V_j$，但由结论 (3) 可知，$V_i \cap V_j$ 中至多有 1 个顶点。所以就有 $x = y$。也即，$e = (x, x)$ 是环。反过来，设 $v \in V_i \cap V_j$，由结论 (1) 可知，若 $(v, v) \in E(G)$，则有 $(v, v) \in E_i \cap E_j$。

(6) $\cup\mathscr{B} \subseteq G$ 是显然的。下面证 $G \subseteq \cup\mathscr{B}$。

首先证明 G 中每一条非环的边都在 $\cup\mathscr{B}$ 中。对任意非环的边 $e = (u, v) \in E(G)$，$u \neq v$，由 (u, v) 导出的子图 $H = G[\{(u, v)\}$ 是 2 阶图，且没有割点，从而由结论 (4) 可知，H 在 G 的某个块 B_s 中，从而 $e \in E(B_s) \subseteq E(\cup\mathscr{B})$。

下面证明 $V(G) \subseteq V(\cup\mathscr{B})$。由于 G 是连通图，所以 G 中每个顶点 v 至少与一个非环的边相关联，而前面已经证明，每条非环的边都在 $\cup\mathscr{B}$ 中，从而 v 也在 $\cup\mathscr{B}$ 中。这就证明了 $V(G) \subseteq V(\cup\mathscr{B})$。

最后说明，G 中的每一个环也在 $\cup\mathscr{B}$ 中。设 $(v, v) \in E(G)$ 是 G 中任意一个环。前面已知，$v \in V(\cup\mathscr{B})$，也即，存在某个 $B_s \in \mathscr{B}$，使得 $v \in V(B_s)$。由结论 (1) 即有，$(v, v) \in E(B_s) \subseteq E(\cup\mathscr{B})$。。

这就证明了 $G \subseteq \cup\mathscr{B}$，从而有 $G = \cup\mathscr{B}$。 □

再证原题。

证明： 充分性。

不妨设 G 中共有 k 个块，分别是 $B_1, B_2, \cdots, B_k$。若 G 的每个块都是欧拉图，则由教材定理 8.1 可知，对 G 的每一个块 B_i，都存在若干个边不重的圈 $S_i = \{C_{i_1}, C_{i_2}, \cdots, C_{i_{n_i}}\}$，使得 $B_i = \cup S_i$。令 $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$，由引理 8.1(6) 可知，$G = \cup S$。下面证明，$S$ 中的各圈也是边不重的。

设 $C_{i_j}, C_{s_t} \in S$，$C_{i_j} \neq C_{s_t}$ 是 S 中两个不同的圈。若 $i = s$，则 C_{i_j} 和 C_{s_t} 同属一个块，而由前提，它们应该是边不重的。若 $i \neq s$，则由引理 8.1(5) 可知，若它们有公共边，则公共边只能是环。但，如果一个圈 C' 中含有环 (x, x)，则 C' 只能是环本身，即 $C' = (x, x)$ (否则，x 将在 C' 中连续出现两次，这与圈的定义矛盾)。这就是说，如果 C_{i_j} 与 C_{s_t} 有公共边 e，则 $e = (x, x)$ 必为环，且 $C_{i_j} = C_{s_t} = G[\{e\}]$。这与前提 $C_{i_j} \neq C_{s_t}$ 矛盾。

这就证明了 $G = \cup S$ 是若干个边不重的圈的并，从而由教材定理 8.1 可知，G 是欧拉图。

必要性。

若 G 是欧拉图，则由教材定理 8.1 可知，G 是若干个边不重的圈的并，记这些圈为 $S = \{C_1, C_2, \cdots C_r\}$。设 B_i 为 G 的任意一个块，令 $S_i = \{C_j \mid C_j \in S \wedge E(C_j) \cap E(B_i) \neq \varnothing\}$。显然，$S_i$ 中的圈都是边不重的。下面证明 $B_i = \cup S_i$。

首先证明 $B_i \subseteq \cup S_i$。这是因为，B_i 的每条边 $e \in E(B_i)$ 都在某个圈 C_j 中(因为 $G = \cup S$)，而由定义有 $C_j \in S_i$。所以有 $e \in E(C_j) \subseteq E(\cup S_i)$。这就是说，$E(B_i) \subseteq \cup S_i$。而 B_i 是连通的，所以每个顶点 v 至少关联于一条边 $e \in E(B_i) \subseteq E(\cup S_i)$，从而有 $v \in V(\cup S_i)$。也即 $V(B_i) \subseteq V(\cup S_i)$。这就证明了 $B_i \subseteq \cup S_i$。

下面证明 $\cup S_i \subseteq B_i$。若不然，就存在 $C_j \in S_i$，且 $C_j \not\subseteq B_i$。由 S_i 的定义，应当存在某条边 $e = (u, v) \in E(C_j) \cap E(B_i)$。注意到 e 不可能是环(因为如果 e 是环，则必有 $C_j = e$。从而由 $C_j \cap B_i \neq \varnothing$ 可知，$e \in E(B_i)$，$\{e\} = C_j \subseteq B_i$，矛盾)，所以必有 $u \neq v$。由引理 8.1(6) 可知，C_j 应当在某个块 B_s 之中(显然，$B_s \neq B_i$)，从而有 $(u, v) \in E(B_i) \cap E(B_s)$，$u, v \in V(B_i) \cap V(B_s)$，而这与引理 8.1(3) 矛盾。

这就证明了 $B_i = \cup S_i$ 是若干个不相交的圈的并。由 B_i 的任意性和教材定理 8.1 可知，G 的每一个块都是欧拉图。 □