17.41

证明： 由定义显然有 $C \leqslant N(a)$。由教材定理 17.30 和习题 17.32 结论有：$k = [G : N(a)] = [G : N(a)] \mid [G : N(a)][N(a) : C] = [G : C] = \dfrac{n}{c}$。 □

17.42

证明： 由于循环群是 Abel 群，而对于任何 Abel 群 G 及其子群 H，有：$\forall g \in G$，对任何 $x \in gH$，存在 $h \in H$，使 $x = gh$。由于 G 是 Abel 群，故有 $x = hg \in Hg$。从而有 $gH \subseteq Hg$。同理可证 $Hg \subseteq gH$。 □

17.43

证明： 习题 17.28 已经证明，对任意 $g = \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$，$gH = \{\left(\begin{smallmatrix} r & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{Q}\}$。而对于 Hg，有 $Hg = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{Q}\} = \{\left(\begin{smallmatrix} r & s+t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{Q}\}$。因为 $s,t \in \mathbb{Q}$，故有 $s+t \in \mathbb{Q}$，因此有 $Hg = \{\left(\begin{smallmatrix} r & s+t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{Q}\} \subseteq \{\left(\begin{smallmatrix} r & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{Q}\} = gH$。对任意 $\{\left(\begin{smallmatrix} r & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\} \in gH$，令 $t' = t - s$，则有 $\{\left(\begin{smallmatrix} r & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\} = \{\left(\begin{smallmatrix} r & s+t' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\} \in Hg$。从而有 $gH = Hg$。由 g 的任意性知，H 是正规子群。 □

17.44

证明： 由题设知，$K \subseteq H$，$N \subseteq H$，从而由 H 对群乘法的封闭性即有 $KN \subseteq H$。

由于 N 是 H 的正规子群，故对所有 $h \in H$，有 $hN = Nh$。从而有 $KN = NK$。由习题 17.16 结论知，KN 是 G 的子群。由生成子群的定义知，$H \subseteq KN$。

这就证明了 $H = KN$。 □

17.45

证明： 由于 $|N| = 2$ 和 $e \in N$，不妨记 $N = \{e, a\}$。

$e \in C$ 是显然的。由 $N \trianglelefteq G$ 和教材定理 17.32 知，$\forall g \in G$，有 $gNg^{-1} = N$，即 $\{geg^{-1}, gag^{-1}\} = \{a, e\}$。而对任意 $g \in G$，都有 $geg^{-1} = gg^{-1} = e$。所以有 $gag^{-1} = a$。即 $ga = ag$。因此有 $a \in C$。这就证明了 $N = \{e, a\} \subseteq C$。 □

17.46

(1)

证明： 对任意 $g \in G, h \in H$，由题设知，$|g| \neq 0, |h| > 0$。注意到，$|ghg^{-1}| = |g||h||g^{-1}| = |g||g^{-1}||h| = |g \cdot g^{-1}||h| = |h| > 0$，从而有 $ghg^{-1} \in H$。由教材定理 17.32 知，$H \trianglelefteq G$。 □

(2) 令 $a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，显然有 $|a| = -1$，$a^2 = E$。对所有 $h \in H$ 都有 $|ah| = -|h| < 0$，$ah \notin H$。这就是说，$aH \neq H$。

对任意 $g \in G$，若 $g \in H$，则 $gH = H$。反之，若 $g \notin H$，则有 $|g| < 0$，而 $g = a(ag)$，其中 $|ag| = -|g| > 0$，$ag \in H$。也就是说，$gH = aH$。

这就证明了，G 有且仅有 H 和 aH 这两个陪集，从而有 $[G : H] = 2$。

17.47

(1)

证明： 由矩阵乘法的性质知，$\forall a, b \in G_1, \varphi(ab) = |ab| = |a||b| = \varphi(a)\varphi(b)$。从而 φ 是 G_1 到 G_2 的同态。 □