图的矩阵表示

有向图关联矩阵

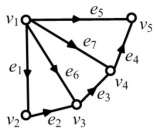
定义

■ 无环有向图D=<V,E>, V={v_1,v_2,…,v_p},E={e_1,e_2,…,e_q},
$p\times q$阶矩阵$M(D)=(m_{ij})_{p\times q}$,其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & 若v_i是e_j的起点\\ -1 & 若v_i是e_j的终点\\ 0 & 若v_i不关联e_j\end{cases}$$

称$M(D)$为G的**关联矩阵。**

点X边



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7\end{matrix}\\ \begin{matrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&1\\ -1&1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0&-1&0\\ 0&0&-1&1&0&0&-1\\ 0&0&0&-1&-1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0 \qquad (j=1,2,\dots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^{+}(v_i)$,
$\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=d^{-}(v_i), \quad i=1,2,\dots,n$

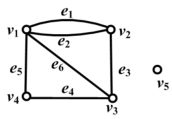
(3) 握手定理 $\sum_{i,j} m_{ij}=0$

无向图的关联矩阵

无环无向图G=<V,E>,V={v_1,v_2,…,v_p},E={e_1,e_2,…,e_q},
则矩阵$M(G)=[m_{ij}]_{p\times q}$,其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & 若v_i关联e_j\\ 0 & 若v_i不关联e_j\end{cases}$$

称$M(G)$为**关联矩阵。**



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{matrix}\\ \begin{matrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

子主题 2

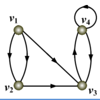
(1) 每列和等 $2:\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=2(j=1,2,\dots,m)$

(2) 每行和为 $d(v):\sum_{i=1}^{m} m_{ij}=d(v_i)\ i=1,2,\dots,n$

(3) **每行所有1对应的边构成断集: ({v_i}, $\overline{\{v_i\}}$)**

有向图邻接矩阵

设D=<V,E>是有向图,V={v1, v2,...,vn} 邻接矩阵(adjacence matrix):
A(D)=$[a_{ij}]_{n\times n}$, a_{ij} = 从v_i到v_j的边数



$$A(D)=\begin{bmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

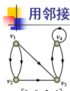
- 每行和为出度: $\Sigma^{n}_{j=1}a_{ij}=d^{+}(v_i)$
- 每列和为入度: $\Sigma^{n}_{i=1}a_{ij}=d^{-}(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^{n}_{i=1}\Sigma^{n}_{j=1}a_{ij}=\Sigma^{n}_{i=1}d^{+}(v_i)=m$
- 环个数: $\Sigma^{n}_{i=1}a_{ii}$

有向图的通路数

■ 设A(D)=A=$[a_{ij}]_{n\times n}$, $A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$,
$A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$, $B_r=A+A^2+\dots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
其中$a^{(r)}_{ij}=\Sigma^{n}_{t=1}a^{(r-1)}_{it}\bullet a_{tj}$

考试会求这个就行

用邻接矩阵求通路数(例)



$$A(D)=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4\end{matrix}\\ \begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&2\\0&0&2&3\\0&0&3&5\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B_3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B_4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&4\\0&0&4&7\\0&0&7&11\end{bmatrix}$$

- ■ **长度=4的通路(不含回路)数: 16**
- ■ **长度≤4的通路和回路数: 53, 15**

$$A^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&2\\0&0&2&3\\0&0&3&5\end{bmatrix}\qquad B^4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&4\\0&0&4&7\\0&0&7&11\end{bmatrix}$$

回路数

■ $B_r=A+A^2+\dots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$

可达矩阵

■ D=<V,E>是有向图, V={v_1, v_2,…,v_n},
■ 可达矩阵: P(D)=$[p_{ij}]_{n\times n}$

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & 从v_i可达v_j\\ 0, & 从v_i不可达v_j\end{cases}$$

知道概念基本上就行

Dijkstra算法

维护一个 list