第十八章　环与域

18.1

证明: $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$，

$$
\begin{aligned}
&(a_1 * b_1) \circ (a_1 * b_2) \circ (a_2 * b_1) \circ (a_2 * b_2) \\
=&((a_1 * b_1) \circ (a_1 * b_2)) \circ ((a_2 * b_1) \circ (a_2 * b_2)) && (\circ\text{ 可结合}) \\
=&(a_1 * (b_1 \circ b_2)) \circ (a_2 * (b_1 \circ b_2)) && (*\text{ 对 }\circ\text{ 可分配}) \\
=&(a_1 \circ a_2) * (b_1 \circ b_2) && (*\text{ 对 }\circ\text{ 可分配}) \\
=&((a_1 \circ a_2) * b_1) \circ ((a_1 \circ a_2) * b_2) && (*\text{ 对 }\circ\text{ 可分配}) \\
=&((a_1 * b_1) \circ (a_2 * b_1)) \circ ((a_1 * b_2) \circ (a_2 * b_2)) && (*\text{ 对 }\circ\text{ 可分配}) \\
=&(a_1 * b_1) \circ (a_2 * b_1) \circ (a_1 * b_2) \circ (a_2 * b_2) && (\circ\text{ 可结合})
\end{aligned}
$$

□

18.2

证明: $\langle \mathbb{Z}[i], + \rangle$ 显然构成一个 Abel 群，其中 $0 = 0 + 0i$ 是加法单位元，对任意 $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$，$(-a) + (-b)i \in \mathbb{Z}[i]$ 是加法逆元。

对任意 $a + bi, c + di \in \mathbb{Z}[i]$，$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{Z}[i]$，从而 $\langle \mathbb{Z}[i], \cdot \rangle$ 构成代数系统。由复数乘法的结合律知，$\langle \mathbb{Z}[i], \cdot \rangle$ 是半群。

最后，由复数运算规律知，复数乘法对复数加法满足分配律。

从而 $\langle \mathbb{Z}[i], +, \cdot \rangle$ 是环。 □

18.3

证明: $\oplus$ 和 $\cap$ 显然都是 $\mathcal{P}(B)$ 上的二元运算。

由教材例 1.7 知，$\oplus$ 满足结合律、交换律，对 $\cap$ 可分配，$\varnothing$ 为加法单位元，所有元素都是自身的负元。

由教材中给出的“集合恒等式”知，$\cap$ 满足结合律和交换律。

从而 $\langle \mathcal{P}(B), \oplus, \cap \rangle$ 是一个可交换环。 □

18.4

证明: $*$ 和 $\circ$ 显然都是 $\mathbb{Z}$ 上的二元运算。

对任意 $a, b, c \in \mathbb{Z}$，

$$
\begin{aligned}
(a * b) * c &= (a + b - 1) + c - 1 && (*\text{ 运算定义}) \\
&= a + (b + c - 1) - 1 && (\text{加法交换律、结合律}) \\
&= a * (b * c) && (*\text{ 运算定义}) \\
(a \circ b) \circ c &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c && (\circ\text{ 运算定义})
\end{aligned}
$$