

推论 2 阶为素数的群是循环群.

定理 17.27 群 G 上的共轭关系是 G 上的等价关系.

定理 17.28 G 是群, C 是 G 的中心, 则 $\forall a \in G$ 有

$$a \in C \Leftrightarrow \bar{a} = \{a\}.$$

定理 17.29 G 是群, 则 $\forall a \in G$, $N(a)$ 是 G 的子群.

定理 17.30 G 是有限群, 则 $\forall a \in G$ 有

$$|\bar{a}| = [G : N(a)].$$

定理 17.31 (群的分类方程) G 是有限群, C 是 G 的中心. 设 G 中至少含有两个元素的共轭类有 k 个, 且 a_1, a_2, \dots, a_k 分别为这 k 个共轭类的代表元素, 则

$$|G| = |C| + [G : N(a_1)] + [G : N(a_2)] + \dots + [G : N(a_k)].$$

定理 17.32 N 是群 G 的子群, 则下列条件互相等价.

- (1) $N \trianglelefteq G$;
- (2) $\forall g \in G$ 有 $gNg^{-1} = N$;
- (3) $\forall g \in G, \forall n \in N$ 有 $gng^{-1} \in N$.

定理 17.33 设 φ 是群 G_1 到 G_2 的同态, 则 φ 为单同态当且仅当

$$\ker \varphi = \{e_1\}.$$

定理 17.34 $G_1 = \langle a \rangle$ 是循环群, φ 是 G_1 到 G_2 的满同态, 则 G_2 也是循环群.

定理 17.35 设 φ 是群 G_1 到 G_2 的同态.

- (1) 若 H 是 G_1 的子群, 则 $\varphi(H)$ 是 G_2 的子群.
- (2) 若 H 是 G_1 的正规子群, 且 φ 是满同态, 则 $\varphi(H)$ 是 G_2 的正规子群.

定理 17.36 设 φ 是群 G_1 到 G_2 的同态, 则

- (1) $\ker \varphi$ 是 G_1 的正规子群;
- (2) $\forall a, b \in G_1, \varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow a \ker \varphi = b \ker \varphi$.

定理 17.37 (群同态基本定理) 设 G 是群, H 是 G 的正规子群, 则 G 的商群 G/H 是 G 的同态像. 若 G' 是 G 的同态像, $G \cong G'$, 则

$$G/\ker \varphi \cong G'.$$

定理 17.38 G 是群, 则 $\text{End } G$ 关于映射的合成运算构成一个独异点, $\text{Aut } G$ 关于映身的合成运算构成一个群.

定理 17.39 G 是群, 则 $\text{Inn } G \trianglelefteq \text{Aut } G$.

定理 17.40 设 G 是群, K 和 L 是 G 的子群, 则 $G = K \times L$ 当且仅当下面的条件成立:

- (1) $K \trianglelefteq G, L \trianglelefteq G$;
- (2) $K \cap L = \{e\}$;
- (3) $G = KL$.

定理 17.41 设 G 是群, G_1, G_2, \dots, G_n 是 G 的子群, 则 $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ 当且仅当以下条件成立:

- (1) $G_i \trianglelefteq G, i = 1, 2, \dots, n$;
- (2) $G_i \cap G_1 G_2 \dots G_{i-1} G_{i+1} \dots G_n = \{e\}, i = 1, 2, \dots, n$;
- (3) $G = G_1 G_2 \dots G_n$.

定理 17.42 用 r -电路计算一个 m 元函数至少需要 $\lceil \log_r m \rceil$ 个时间单位.

定理 17.43 设 $\langle \mathbb{Z}_n, \otimes \rangle$ 是群, 若存在 $a \in \mathbb{Z}_n, a \neq 0$, 且 a 属于 \mathbb{Z}_n 的每一个非平凡的子群, 则对于任意的模 n 加法器 T , 总存在着某个输入, 使得 T 至少依赖于输入的 $2 \lceil \log_2 n \rceil$ 位.