(2)

证明： 由教材定理 19.1 可知，$a \wedge b \preccurlyeq a \preccurlyeq a \vee b$，$a \wedge b \preccurlyeq b \preccurlyeq b \vee c$，$a \wedge b \preccurlyeq a \preccurlyeq c \vee a$，从而由教材定理 19.1(3) 得 $a \wedge b \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$。同理可证 $b \wedge c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ 和 $c \wedge a \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$。由教材定理 19.1(4) 即有 $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$。□

19.5

证明： 充分性显然。下面证必要性。

对任意 $1 \leq i \leq n$，有：

$$
\begin{aligned}
a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n &\preccurlyeq a_i && \text{(交换律、教材定理 19.1(1))} \\
&\preccurlyeq a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n && \text{(交换律、教材定理 19.1(2))} \\
&= a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n && \text{(前提)}
\end{aligned}
$$

从而有 $a_i = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$。由 i 的任意性可知，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$。□

19.6

证明： 充分性。

若 a 与 b 不可比，则有 $a \not\preccurlyeq b$ 和 $b \not\preccurlyeq a$。由教材定理 19.2 即有 $a \wedge b \neq a$ 和 $a \wedge b \neq b$。但由定义有 $a \wedge b \preccurlyeq a$ 和 $a \wedge b \preccurlyeq b$，从而有 $a \wedge b \prec a$ 和 $a \wedge b \prec b$。

必要性。

若 $a \wedge b \prec a$，则有 $a \wedge b \neq a$。由教材定理 19.2 即有 $a \not\preccurlyeq b$。同理可证 $b \not\preccurlyeq a$。因此，a 与 b 不可比。□

19.7

(1) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$；

(2) $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$；

(3) $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \succcurlyeq (a \wedge c) \vee (b \wedge d)$；

(4) $(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$；

其中命题 (4) 是自对偶的(若考虑字母间的对称性，则命题 (2) 和 (3) 也是自对偶的)。

19.8 L_1 的三元子格有 $\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,b,e\}$，$\{a,c,e\}$，$\{a,d,e\}$，$\{b,c,e\}$，$\{b,d,e\}$。

L_1 的四元子格有 $\{a,b,c,e\}$，$\{a,b,d,e\}$，$\{b,c,d,e\}$。

L_1 的五元子格只有 L_1 本身。

L_2 的三元子格有 $\{a,b,e\}$，$\{a,b,g\}$，$\{a,c,f\}$，$\{a,c,g\}$，$\{a,d,e\}$，$\{a,d,f\}$，$\{a,d,g\}$，$\{a,e,g\}$，$\{a,f,g\}$，$\{b,e,g\}$，$\{c,f,g\}$，$\{d,e,g\}$，$\{d,f,g\}$。

L_2 的四元子格有 $\{a,b,c,g\}$，$\{a,b,d,e\}$，$\{a,b,e,g\}$，$\{a,b,f,g\}$，$\{a,c,d,f\}$，$\{a,c,e,g\}$，$\{a,c,f,g\}$，$\{a,d,e,g\}$，$\{a,d,f,g\}$，$\{d,e,f,g\}$。

L_2 的五元子格有 $\{a,b,c,e,g\}$，$\{a,b,c,f,g\}$，$\{a,b,d,e,g\}$，$\{a,c,d,f,g\}$，$\{a,d,e,f,g\}$。

19.9

证明： 对任意 $x,y \in L_1$，由定义有 $x,y \in L$，$x \preccurlyeq a$ 和 $y \preccurlyeq a$。由于 L 是格，所以有 $x \wedge y, x \vee y \in L$。又由教材定理 19.1(1) 有 $x \wedge y \preccurlyeq x \preccurlyeq a$，且由教材定理 19.1(4) 有 $x \vee y \preccurlyeq a$。所以有 $x \wedge y, x \vee y \in L_1$。由定义，$L_1$ 是 L 的子格。

对任意 $x,y \in L_2$，由定义有 $x,y \in L$，$a \preccurlyeq x$ 和 $a \preccurlyeq y$。由于 L 是格，所以有 $x \wedge y, x \vee y \in L$。又由教材定理 19.1(3) 有 $a \preccurlyeq x \wedge y$，且由教材定理 19.1(2) 有 $a \preccurlyeq x \preccurlyeq x \vee y$。所以有 $x \wedge y, x \vee y \in L_2$。由定义，$L_2$ 是 L 的子格。

易见，$L_3 = L_1 \cap L_2$，而若干子格的交仍是子格(这是因为：设 $A = \{L_i \mid i = 1, 2, \cdots k\}$ 是