6. 连续的多元函数的复合函数仍连续.

(3) 多元初等函数

注：多元初等函数在其有定义的区域内是连续的.

例：证明 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处连续.

证：极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

$x^2+y^2=r^2$，$(x,y)\to(0,0) \Longleftrightarrow$ 对 $\forall\theta$，$r\to0^+$

$$0\le\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{1}{4}r^2|\sin4\theta|\le\frac{1}{4}r^2$$

$$\lim_{r\to0^+}\frac{1}{4}r^2=0 \quad \therefore \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0.$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(4) 有界闭区域上连续函数的性质.

性质1.（最大最小值定理）

性质2. 介值定理.

§6.3 偏导数和全微分

1. 偏导数

(1) 定义：设 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，$P_0(x_0,y_0)\in D$，z 在 $U(P_0)$ 内有定义，给自变量 x 在 x_0 处增量 Δx，而 $y=y_0$，相应得到函数关于 x 偏增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

若 $\boxed{\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}}$ 存在，则称此极限为

$z=f(x,y)$ 在 P_0 点对 x 的偏导数，记 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$