第十七章　群

17.1

证明: 易于验证，$\langle G, *, \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), ^{-1}\rangle$ 同构于 Klein 四元群 $\langle G', \circ, e, ^{-1}\rangle$。从而由教材定理 15.8 知，$G$ 关于矩阵乘法构成一个群。 □

17.2

证明: 由群内乘法运算的封闭性知，$\forall a, b \in G, a \circ b = au^{-1}b \in G$，从而 $\circ$ 运算是封闭的。

由群内乘法运算的结合律知，$\forall a, b, c \in G, (a \circ b) \circ c = au^{-1}bu^{-1}c = a \circ (b \circ c) \in G$，从而 $\circ$ 运算是结合的。

对任意 $a \in G$，$u \circ a = uu^{-1}a = a$，$a \circ u = au^{-1}u = a$。从而 $\circ$ 运算有单位元 u。

对任意 $a \in G$，$(ua^{-1}u) \circ a = ua^{-1}uu^{-1}a = u$，$a \circ (ua^{-1}u) = au^{-1}ua^{-1}u = u$，从而 G 中所有元素都有关于 $\circ$ 运算的逆元。

这就证明了 G 关于 $\circ$ 运算构成群。 □

17.3　取 $u = 2$，利用上题结论即得。

17.4

证明: 由群内乘法运算的封闭性和结合律可得 $*$ 运算的封闭性和结合律。

G 中的单位元显然也是 $*$ 运算的单位元。$\forall x \in G$，$x * x^{-1} = x^{-1}x = e, x^{-1} * x = xx^{-1} = e$，从而 G 中每个元素对 $*$ 运算均有逆元。

由群的定义知，$\langle G, *\rangle$ 是群。 □

17.5

证明: 封闭性易于验证。

由矩阵乘法的性质可知结合律成立，且 $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ 是单位元。

易于验证，$\left(\begin{smallmatrix}w&0\\0&w^2\end{smallmatrix}\right)$ 与 $\left(\begin{smallmatrix}w^2&0\\0&w\end{smallmatrix}\right)$ 互逆，$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&w^2\\w&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&w\\w^2&0\end{smallmatrix}\right)$ 是 2 阶元。从而每个元素都有逆元。

由群的定义知，以上 6 个方阵对矩阵乘法构成群。 □

17.6

证明:

$$
\begin{aligned}
& (ab)^2 = a^2b^2 \\
\iff & abab = aabb && \text{(幂运算定义)} \\
\implies & ba = ab && \text{(消去律)}
\end{aligned}
$$

□

17.7