第十九章　格与布尔代数

- 19.1 格的定义与性质
- 19.2 子格、格同态与格的直积
- 19.3 特殊的格
- 19.4 布尔代数

19.1 格的定义和性质

- 格的定义
- 格的基本性质
  - 对偶原理
  - 格中的基本等式与不等式
  - 格中的基本等价条件
  - 格中的算律
- 格的代数定义
- 格中的不等式

格的定义

格的偏序集定义：

$<S,\preccurlyeq>$, S 的任何二元子集都有最大下界、最小上界.

求最大下界、最小上界构成格中的运算$\wedge, \vee$

格$<L,\preccurlyeq>$与导出的代数系统$<L,\wedge,\vee>$的对应关系

格的实例：

n 的正因子格S_n

幂集格$P(B)$

子群格$L(G)$

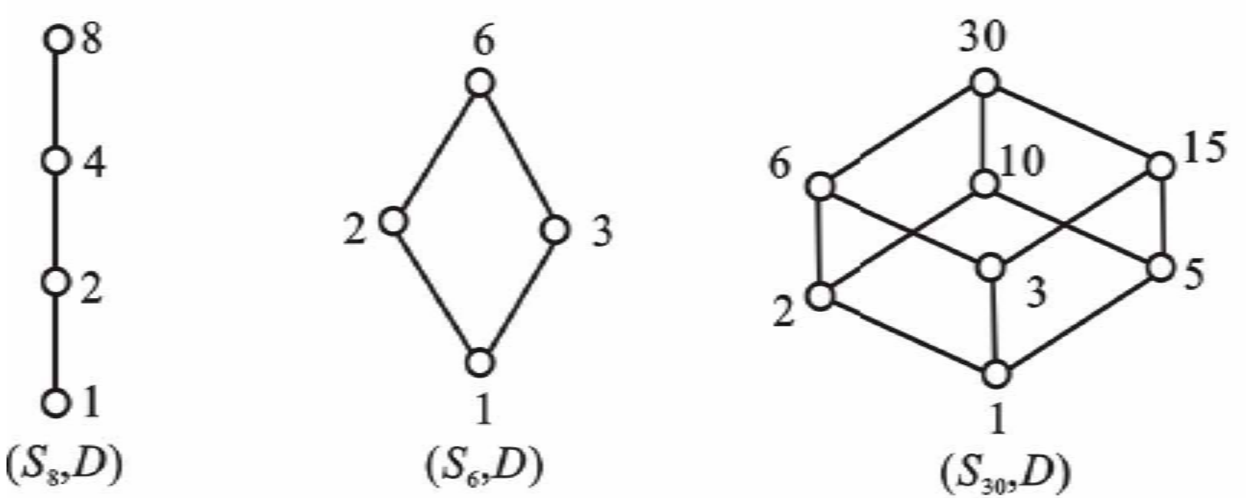
格的实例

例1 设n是正整数，S_n是n的正因子的集合. D为整除关系，则偏序集$<S_n,D>$构成格.

$\forall x,y\in S_n$，$x\vee y$ 是lcm(x,y)，即x 与y 的最小公倍数.

$x\wedge y$ 是gcd(x,y)，即x 与y 的最大公约数.

下图给出了格$<S_8,D>$，$<S_6,D>$和$<S_{30},D>$.

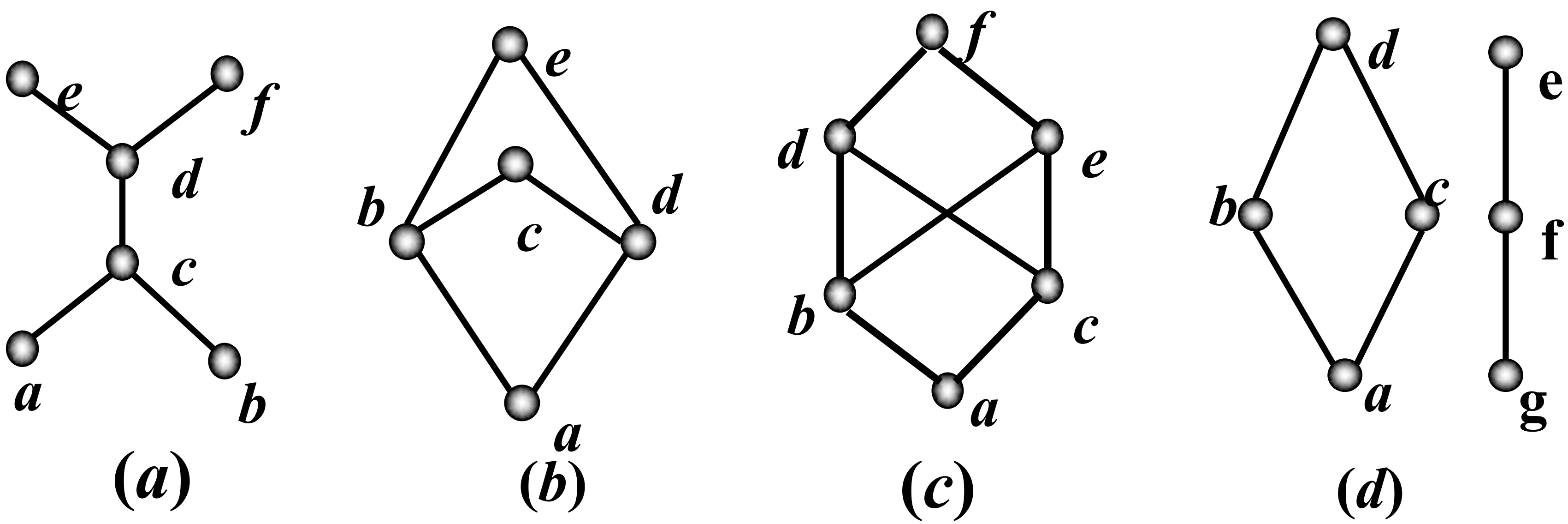


格的实例（续）

例2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) <Z, ≤>，其中Z是整数集，≤为小于或等于关系.

(2) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



(1) 是格.

(2) 都不是格.为什么？

格的性质——对偶原理

- **对偶命题**：

设P 是由格中元素,$\preccurlyeq$, $\succcurlyeq$, $=$,$\wedge$,$\vee$等表示的命题，若将P中的$\preccurlyeq$,$\succcurlyeq$,$\wedge$,$\vee$分别替换成 $\succcurlyeq$,$\preccurlyeq$, $\vee$,$\wedge$得到的命题称为P 的对偶命题，记作P^*.

实例： P: $a \wedge b = b \wedge a$

P^*：$a \vee b = b \vee a$

性质： $(P^*)^* = P$.

对偶原理： 如果P 对于一切格为真,则P^*也对一切格为真.

格的性质（续）

格中的基本不等式和等式

$$a \leqslant a$$

$$a \leqslant b,\ b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$$

$$a \wedge b \leqslant a,\ a \wedge b \leqslant b$$

$$a \leqslant a \vee b,\ b \leqslant a \vee b$$

$$a \leqslant b,\ a \leqslant c \Rightarrow a \leqslant b \wedge c$$

$$a \geqslant b,\ a \geqslant c \Rightarrow a \geqslant b \vee c$$

$$a \leqslant b,\ b \leqslant a \Rightarrow a = b$$

格的性质（续）

1）格中的基本等价条件

$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$

2）格中运算∧,∨满足交换律、结合律、幂等律、吸收律

3）格的代数定义

设<L,*,o>是具有两个二元运算的代数系统，如果运算*,o满足交换、结合、吸收律，则称<L, *,o >是格.

（运算*,o满足交换、结合、吸收律，一定满足幂等律）

格的代数定义

实例：

$<S_n, \gcd, \mathrm{lcm}>$

$\forall x, y \in Sn$,

$\gcd(x, y) = \gcd(y, x)$, $\mathrm{lcm}(x, y) = \mathrm{lcm}(y, x)$

$\gcd(x, \gcd(y, z)) = \gcd(\gcd(x, y), z)$

$\mathrm{lcm}(x, \mathrm{lcm}(y, z)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(x, y), z)$

$\gcd(x, \mathrm{lcm}(x, y)) = x$, $\mathrm{lcm}(x, \gcd(x, y)) = x$

$x \mid y \Leftrightarrow \mathrm{lcm}(x, y) = y$

$<S_n, \mid>$ 与 $<S_n, \gcd, \mathrm{lcm}>$是同一个格

格的性质（续）

格的不等式

（1）保序不等式

$$a\leqslant b, c\leqslant d \Rightarrow a\wedge c\leqslant b\wedge d,\ a\vee c\leqslant b\vee d$$

（2）分配不等式

$$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c),$$

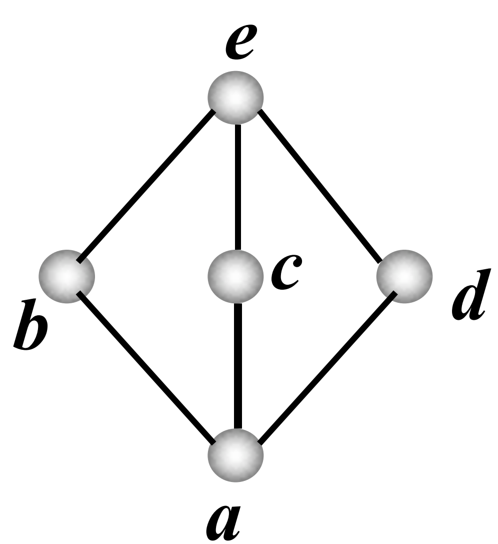
$$a\wedge(b\vee c)\geqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

（3）模不等式

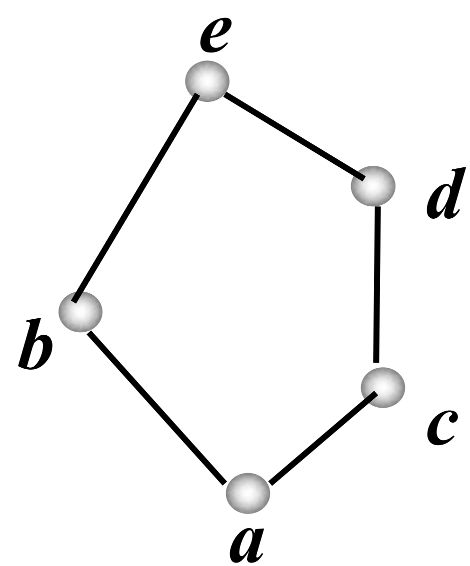
$$a\leqslant b \Leftrightarrow a\vee(c\wedge b)\leqslant(a\vee c)\wedge b$$

思考：如何证明以上不等式？

不满足分配律的格



钻石格



五角格

钻石格： $b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b$

$(b \vee c) \wedge (b \vee d) = e \wedge e = e$

思考：指出五角格不满足分配律的元素

19.2 子格、格同态、格的直积

- 子格
  - 子格定义
  - 子格判别
- 格的同态与同构
  - 格同态定义
  - 格同态的性质
  - 完备格
- 格的直积

格的子格

L 的**子格**：L 的非空子集S，且S 关于L 中$\wedge$和$\vee$运算封闭.

注意：子格元素在原来格中求最大下界和最小上界.

实例：子群格$L(G)$是格，但一定不是幂集格$P(G)$的子格.（？）

例如Klein 四元群$G=\{e, a, b, c\}$,

$L(G)=\{\langle e\rangle,\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle c\rangle,G\}$

$P(G)=\{\varnothing,\langle e\rangle,\{a\},\{b\},\{c\},\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle c\rangle,\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{a,b,e\},\{a,c,e\},\{b,c,e\},G\}$

格的同态

定义 设L_1和L_2是格, $f: L_1\to L_2$, $\forall x, y\in L_1$，有

$$f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y), f(x\vee y) = f(x)\vee f(y)$$

则称f为L_1到L_2的同态.

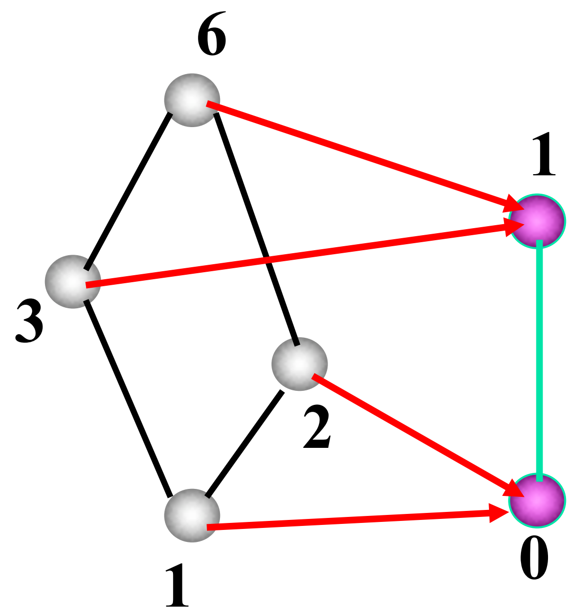
实例： $L_1 =\langle\{1,2,3,6\},|\rangle$,

$L_2=\langle\{0,1\},\leq\rangle$

$f(1)=f(2)=0$,

$f(3)=f(6)=1$

f为L_1到L_2的同态.



格同态的性质

格同态具有保序性

定理1 f 是格L_1 到L_2 的同态，则$\forall a,b\in L_1$,

$$a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$$

证： $a \leqslant b \Rightarrow a \wedge b = a$

$\Rightarrow f(a \wedge b) = f(a)$

$\Rightarrow f(a) \wedge f(b) = f(a)$

$\Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$

注意：$f(a) \leqslant f(b)$不一定推出$a \leqslant b$. 思考反例.

格同态的性质（续）

定理2 f 为双射，f 为L_1到L_2的同构当且仅当

$$\forall a,b\in L_1,\ a\leqslant b \Leftrightarrow f(a)\leqslant f(b)$$

证明同构的思路（充分性）：

(1) 由保序性证明 $f(a)\vee f(b)\leqslant f(a\vee b)$

(2) 由满射性存在d 使得$f(a)\vee f(b)=f(d)$

由$f(a)\leqslant f(d)$ 推出$a\leqslant d$, 同理$b\leqslant d$

(3) $a\vee b\leqslant d$ 推出 $f(a\vee b)\leqslant f(a)\vee f(b)$

(4) 由(1)和(3)得 $f(a)\vee f(b)=f(a\vee b)$

(5) 同理 $f(a)\wedge f(b)=f(a\wedge b)$

19.3 特殊的格

- 模格
- 分配格
- 有界格
- 有补格
- 布尔格

模格

定义 L为格，若$\forall a,b,c\in L$,

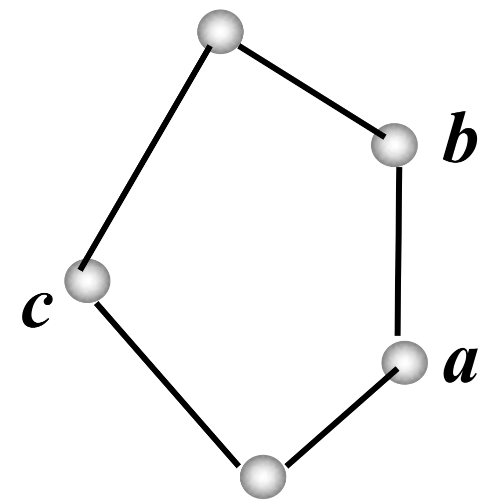
$$a\leqslant b \Rightarrow a\vee(c\wedge b)=(a\vee c)\wedge b$$

则称L为**模格**.

实例：

钻石格为模格

五角格不是模格



五角格

模格---模律： $a\leqslant b \Rightarrow a\vee(c\wedge b)=(a\vee c)\wedge b$

格--模不等式： $a\leqslant b \Rightarrow a\vee(c\wedge b)\leqslant(a\vee c)\wedge b$

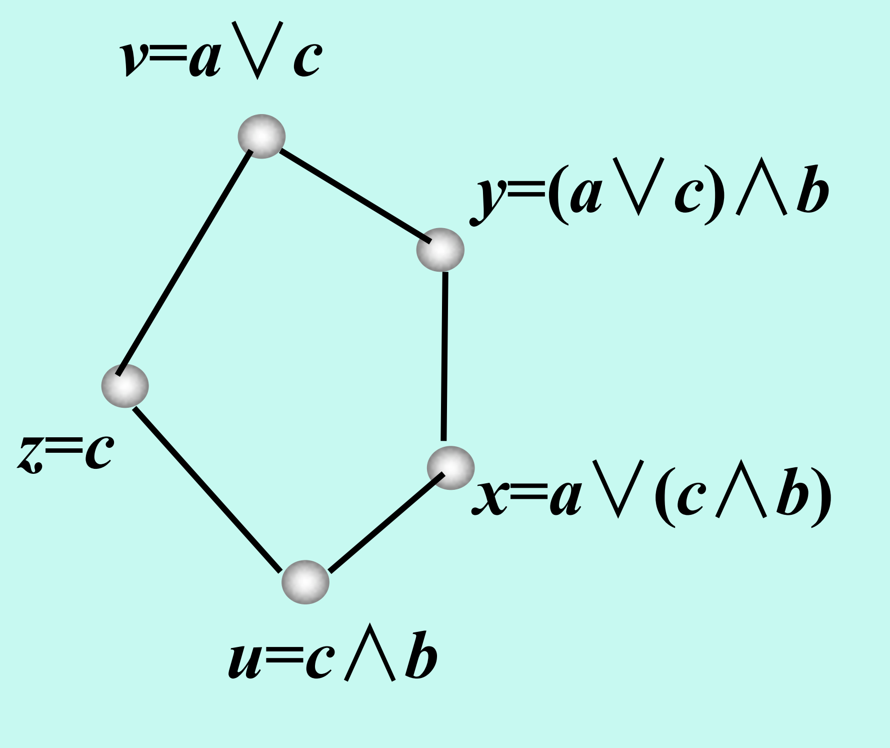
模格判别条件

L 为模格当且仅当L 不含有与五角格同构的子格.

证 充分性：假设L 不是模格，则存在$a,b,c\in L$, 使得

$$a\preccurlyeq b,\ a\vee(c\wedge b)\prec(a\vee c)\wedge b,$$

取5 个元素x, y, z, u, v 如图.



证明思路：

$u\preccurlyeq x\prec y\preccurlyeq v$， $u\preccurlyeq c\preccurlyeq v$

$x\wedge c=y\wedge c=u$， $x\vee c=y\vee c=v$

u, x, y, z, v 两两不等，

构成L 的5 元子格

模格判别条件（续）

L 为模格当且仅当

$\forall a,b,c \in L,\ a \preccurlyeq b,\ a \vee c = b \vee c,\ a \wedge c = b \wedge c \Rightarrow a = b$

证： “⇐” 若不是模格，则存在子格与五角格同构，必有a, b ,c 构成如图的子格，与条件矛盾.

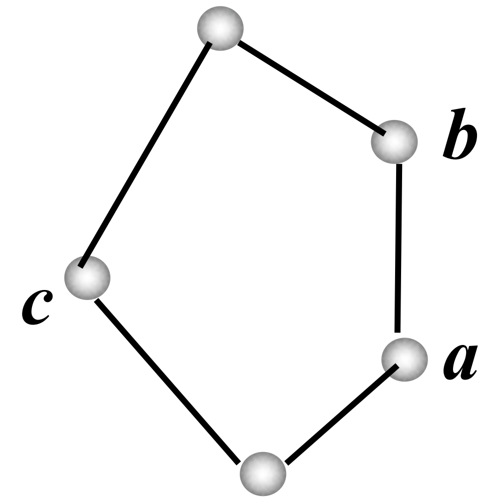
“⇒” 设L 为模格，

$\forall a,b,c \in L,\ a \preccurlyeq b,\ a \vee c = b \vee c,\ a \wedge c = b \wedge c$

$a = a \vee (a \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$

$= a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$

$= (b \vee c) \wedge b = b$



分配格

定义 设L 为格，若$\forall a,b,c\in L$ 有

$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ 或 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

则L 为分配格.

注： 在任何格中两个分配不等式是等价的.

例如 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\Rightarrow$

$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

证 $\underline{(a\vee b)}\wedge(a\vee c)$

$=((\underline{a\vee b)}\wedge a)\vee((\underline{a\vee b)}\wedge c)$ （$\wedge$对$\vee$的分配律）

$=a\vee((a\wedge c)\vee(b\wedge c))$ （吸收律, $\wedge$对$\vee$的分配律）

$=(a\vee(a\wedge c))\vee(b\wedge c)=a\vee(b\wedge c)$ （结合律, 吸收律）

反之，同理可证.

分配格判别定理

定理1 设L 为模格，L 为分配格当且仅当若$\forall a,b,c\in L$ 有

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$$

注：对于一般格，下面不等式成立

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$$

定理2 设L 为模格，L 为分配格当且仅当L不含有与钻石格同构的子格.

模格、分配格之间的关系

$$\begin{array}{l} a\wedge c=b\wedge c \\ a\vee c=b\vee c \end{array} \Rightarrow a=b$$

分配律

格 $\longrightarrow$ 模格 $\longrightarrow$ 分配格

不含与五角格同构子格

不含与钻石格同构子格

$$a\leqslant b \Rightarrow \begin{array}{l} a\wedge c=b\wedge c \\ a\vee c=b\vee c \end{array} \Rightarrow a=b$$

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a) \\ =(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$$

$$a\leqslant b,\ (a\vee c)\wedge b=a\vee(c\wedge b)$$

有界格

- 全下界0 和全上界1

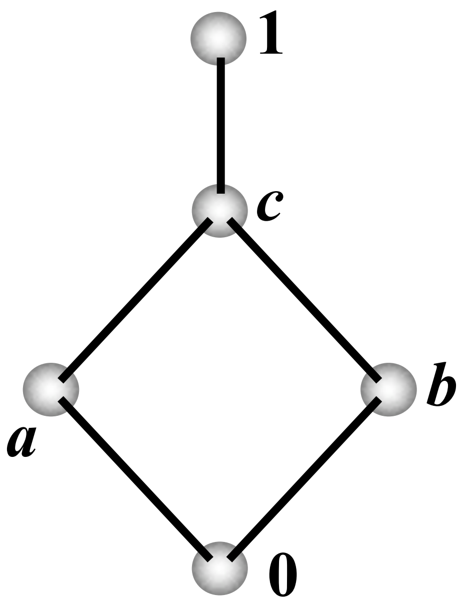
  全上界是格的最大元，全下界是格的最小元
- 有界格：存在全上界和全下界的格
- 有界格的表示： $<L, \wedge, \vee, 0, 1>$
- 有限格一定有界，无限格不一定（幂集格有界）
- 有界格的性质：

(1) $a \wedge 1 = a$, $a \vee 0 = a$, $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 0 = 0$,

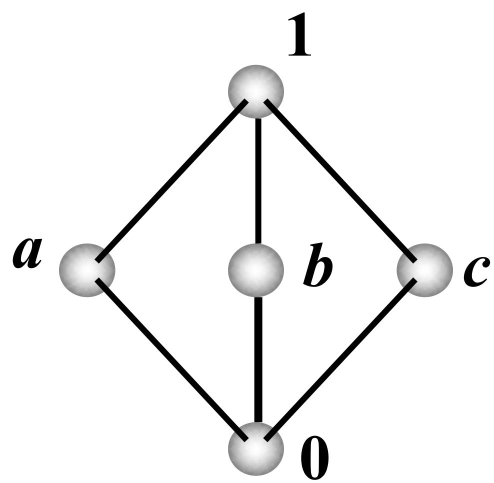
(2) 对偶命题： 如果有0,1，则0 与1 互换.

补元

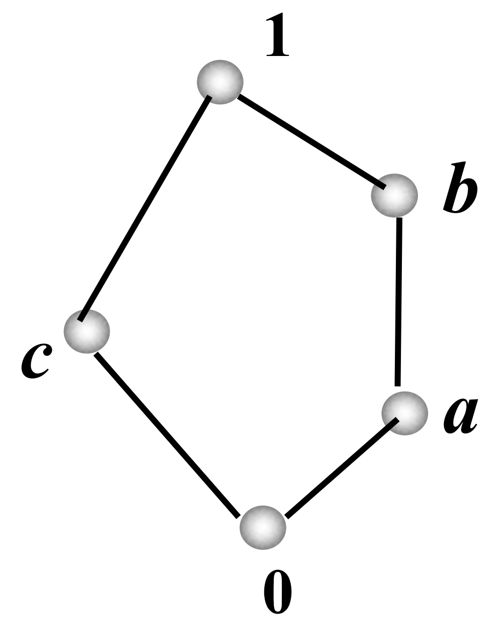
- **补元：** $a \wedge b=0$, $a \vee b=1$, 则a与b互为补元.



0与1互补
a, b, c 没补元



0与1互补
a, b, c中任两个元素都互补



0与1互补
a与b,c互补

有补格

- **补元性质：**

有界分配格中的元素x如果存在补元，则是唯一的

- **有补格：**

每个元素都有补元的有界格

思考：

求补是否为有补格上的一元运算？

求补是否为分配格上的一元运算？

19.4 布尔代数

- 布尔代数定义
- 布尔代数性质
- 布尔代数的同态
- 有限布尔代数的结构

布尔代数的定义

- **定义** 有补分配格称为**布尔格（布尔代数）**

实例： 幂集格

- **定理** 设 <B,$*$,$\circ$,Δ, a,b> 是代数系统，其中$*$,$\circ$为二元运算,Δ为一元运算，a,b 为0 元运算. 如果满足以下算律：

  交换律 $x*y=y*x$, $x\circ y=y\circ x$

  分配律 $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$ $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$

  同一律 $x*b=x$, $x\circ a=x$

  补元律 $x*\Delta x=a$, $x\circ\Delta x=b$

  则 <B,$*$,$\circ$, Δ, a,b> 构成布尔格.

布尔代数的性质

- 双重否定律 $\overline{\overline{a}} = a$
- D.M律 $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}, \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$
- 等价条件1 $a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$

  $\Leftrightarrow a \wedge \overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \vee b = 1$
- 等价条件2 $a \leq b \Leftrightarrow \overline{b} \leq \overline{a}$

布尔代数的同态

- **定义** B_1, B_2 为布尔代数，$f: B_1 \to B_2$, 若

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$$

则称f 为B_1 到B_2 的同态

同态判定：

三个等式仅需要两个，其中等式1 和2 不独立.

有限布尔代数的结构

- **定义** 设$<A, \leq>$是一个格，且具有全下界0，如果有元素a盖住0，则称元素a为**原子**。
- **有限布尔代数的表示定理**

设B是有限布尔代数，A是B的全体原子的集合，则$B \cong P(A)$同构.

- 布尔代数B的阶$|B|=2^n$,其中n是自然数.

例：存在阶为6的布尔代数吗？

格L的阶为9,则L一定不是布尔代数.

设$<A, \vee, \wedge>$是一个有限布尔代数，若b是A中任意非零元，$B=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$是A中满足$a_j \le b$的所有原子($j=1,2,\ldots,k$)组成的集合，则

(1) $b=a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$

(2) $b=a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$是把$b$表示为原子的并的唯一形式。

作业

- 复习要点

  格的两种定义、格的性质、子格的判断

  格同态的定义及其性质

  模格、分配格、有补格、布尔格定义

  以上特殊格的判别定理

  布尔代数的性质、布尔代数的同态（了解）

  有限布尔代数结构的唯一性

- 书面作业：

  习题十九，1, 3, 8,10,11,18, 27, 33.