证明： 首先，用归纳法证明：$\forall k \in \mathbb{Z}^+, (x^{-1}yx)^k = x^{-1}y^kx$。

当 $k = 1$ 时，命题显然成立。

设当 $k = m$ 时，命题成立。则当 $k = m + 1$ 时：

$$
\begin{aligned}
(x^{-1}yx)^{m+1} &= (x^{-1}yx)^m(x^{-1}yx) && \text{(幂运算定义)}\\
&= x^{-1}y^mx(x^{-1}yx) && \text{(归纳假设)}\\
&= x^{-1}y^myx && (xx^{-1} = e)\\
&= x^{-1}y^{m+1}x && \text{(幂运算定义)}
\end{aligned}
$$

从而证明了 $\forall k \in \mathbb{Z}^+, (x^{-1}yx)^k = x^{-1}y^kx$。由此式和消去律可证原命题的必要性，由此式和代入规则即可得证充分性。 □

17.8

(2)

证明： $\forall a, b \in G$，

$$
\begin{aligned}
b^{-1}a^{-1}ab &= b^{-1}b && (a^{-1}a = e)\\
&= e && (b^{-1}b = e)\\
abb^{-1}a^{-1} &= aa^{-1} && (b^{-1}b = e)\\
&= e && (a^{-1}a = e)
\end{aligned}
$$

由逆元的唯一性得：$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$。 □

(4) 首先证明 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ 的推广形式：

引理 17.1 设 G 为群，对任意正整数 k，有 $\forall a_1, a_2, \cdots, a_k \in G$，$(a_1a_2\cdots a_k)^{-1} = a_k^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}$。特别地，$\forall k \in \mathbb{Z}^+, \forall a \in G, (a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$。

证明： 当 $k = 1$ 时，命题显然成立。

若 $k = t$ 时命题成立。则当 $k = t + 1$ 时：

$$
\begin{aligned}
(a_1a_2\cdots a_ta_{t+1})^{-1} &= a_{t+1}^{-1}(a_1a_2\cdots a_t)^{-1} && \text{(教材定理 17.2(2))}\\
&= a_{t+1}^{-1}a_t^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1} && \text{(归纳假设)}
\end{aligned}
$$

这就证明了上述引理。令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a$，即得该引理的特殊情况 $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$。 □

再证原题。

证明： 由幂运算定义易知，若 m, n 中有一者为 0，则 $(a^n)^m = a^{nm} = e$。命题成立。

下面分四种情况讨论：

① 若 $m > 0$ 且 $n > 0$，则由教材定理 16.1(2) 即知，等式成立。

② 若 $m > 0$ 且 $n < 0$，令 $t = -n$，则有：

$$
\begin{aligned}
(a^n)^m &= (a^{-t})^m && (n = -t)\\
&= ((a^{-1})^t)^m && \text{(幂运算定义)}\\
&= (a^{-1})^{tm} && \text{(教材定理 16.1(2))}\\
&= a^{-tm} && \text{(幂运算定义)}\\
&= a^{nm} && (n = -t)
\end{aligned}
$$

③ 若 $m < 0$ 且 $n > 0$，令 $s = -m$，则有：

$$
\begin{aligned}
(a^n)^m &= (a^n)^{-s} && (m = -s)\\
&= ((a^n)^{-1})^s && \text{(幂运算定义)}
\end{aligned}
$$