8.3

证明: 记这 $2k$ 个奇数度顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$，令 $E' = \{(v_{2i-1}, v_{2i}) \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$，$G' = G \cup E'$。注意到，$G'$ 是连通图且每个顶点都是偶数度，由教材定理 8.1，G' 中存在欧拉回路 C'。从 C' 中删去 E'，则 C' 将被划分为 k 段(由于可能出现 E' 中的两条边在 C' 中相邻的情况，所以这 k 段中可能存在“空段”)，设其中有 t 个“非空段” $P_1, P_2, \cdots, P_t$ $(1 \leq t \leq k)$。显然，它们是 t 条边不重的简单通路，且 $E(G) = \bigcup\limits_{i=1}^{t} E(P_i)$。注意到，对任意一条简单通路 P_i，若它的长度为 n_i，则对任意正整数 $1 \leq s \leq n_i$，可以将 P_i 分割成 s 条边不重简单通路(将 P_i 的前 $s-1$ 条边看成 $s-1$ 条简单通路，剩下的 $n-s+1$ 条边看成第 s 条简单通路即可)。从而上述 t 条简单通路可以根据需要被分割成 $s(t \leq s \leq m)$ 条边不重的简单通路，其中 m 是 G 的边数。由于 G 是连通的，且 G 中至少有 $2k$ 个顶点，$k \geq 1$，所以 $m \geq n-1 \geq 2k-1 \geq k$。因此，总能将上述 t 条简单通路分割成 k 条边不重的简单通路 $P_1', P_2', \cdots, P_k'$，且有 $E(G) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} E(P_i')$。 □

8.4 首先注意到下述事实。

引理 8.2 设 G 是一个无向图，$G_1 = G[V_1]$ 是 G 的一个连通分支，则对任意 $v \in V_1$，有 $d_{G_1}(v) = d_G(v)$。

证明: 由于 $E(G_1) \subseteq E(G)$，所以显然有 $d_{G_1}(v) \leq d_G(v)$。假设 $d_{G_1}(v) < d_G(v)$，则存在某条边 $(u, v) \in E(G)$，使得 $(u, v) \notin E(G_1)$。但由于 u 与 v 之间有通路且 $v \in V_1$，所以应有 $u \in V_1$。又因为 $G_1 = G[V_1]$ 是由 V_1 生成的子图，所以应有 $(u, v) \in E(G_1)$，矛盾。 □

再证原题。

证明: 必要性。

反设 $G - v_0$ 中有圈，我们将证明 v_0 不是可以任意行遍的。

首先，由于 G 是欧拉图，由教材定理 8.1 可知，G 中每个顶点都是偶数度的。假设 $G - v_0$ 中有圈 C_0，则令 $G' = G - E(C_0)$。注意到，圈中每个顶点都是 2 度的。所以，对任意 $v_i \in V(G)$，若 $v_i \in V(C_0)$，则 v_i 在 G' 中的度数 $d_{G'}(v_i) = d_G(v_i) - 2$。若 $v_i \notin V(C_0)$，则 $d_{G'}(v_i) = d_G(v_i)$。总之，G' 中的每个顶点仍为偶数度的。特别地，由于 $v_0 \notin V(C_0)$，所以 $d_{G'}(v_0) = d_G(v_0) > 0$。

设 G_1 是 v_0 在 G' 中所处的连通分支。由引理 8.2，G_1 中每个顶点仍是偶数度的。由教材定理 8.1 可知，G_1 是欧拉图。记 C_1 是 G_1 中的一条欧拉回路，注意到，C_1 中包含了所有与 v_0 关联的边。

若在 G 中，从 v_0 出发，按 C_1 的轨迹进行行遍，则当 C_1 行遍完成，回到 v_0 时，已无可行遍的边。注意到，此时 G 中还有未被行遍的边(例如 C_0 中的边)，这就是说，按此方法行遍，得到的回路 C_1 不是 G 的一条欧拉回路。从而 v_0 不是可以任意行遍的。

充分性。

假若 v_0 不是可以任意行遍的，我们将证明，$G - v_0$ 中有圈。

由于 v_0 不是可以任意行遍的，所以存在某条行遍路线，使得行遍过程终止于顶点 v_0 (行遍过程必然终止于 v_0。若不然，假设停在某个顶点 $v_i \neq v_0$ 上，则这个行遍路线将是一条从 v_0 到 v_i 的简单路径 Γ，设 v_i 在路径上共出现过 t 次，则前 $t-1$ 次出现中，每次出现会使 v_i 在 Γ 中的度数加 2，最后一次出现则仅使 v_i 在 Γ 中的度数加 1，从而 v_i 在 Γ 中的度数是奇数。这就是说，$E(G)$ 中还有与 v_i 关联且未被行遍的边，这与行遍过程的终止条件矛盾)，构成一个简单回路 C，且 $G' = G - E(C)$ 中仍有边。注意到，G' 中各顶点的度数仍为偶数。设 G_1 是 G' 中某个非平凡的(即，有边的)连通分支，由引理 8.2，G_1 中各顶点的度数也是偶数。从而教材定理 8.1可知，G_1 是若干个边不重的圈(不妨记为 $C_1, C_2, \cdots C_k$)的并。任取一个圈 C_1，注意到，v_0 不在 C_1 中(因为 v_0 在 G' 中是孤立点)，从而 $C_1 \subseteq G - v_0$。 □