再证原题：

证明： 对任何非空集合 $A \subseteq \mathbb{Z}_+$，令 $B = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$。则由 f 的定义知，$B \subseteq \mathbb{N}$，由 $\mathbb{N}$ 上的良序定理知，B 中有关于 $<$ 关系的最小元 b。记 $C = A \cap f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) = b\}$。则 $C \subseteq \mathbb{Z}_+$。从而 C 也有关于 $<$ 的最小元 c。下面证明 c 就是 A 中关于 R 的最小元。

$\forall x \in A$，若 $x \neq c$，则：由 $f(c) = b$ 是 $f(A)$ 中的最小元知，$f(c) < f(x)$ 或 $f(c) = f(x)$。若 $f(c) < f(x)$，则由 R 的定义有 cRx。若 $f(x) = f(c) = b$，则 $x, c \in f^{-1}(b)$，从而由 $x, c \in A$ 知，$x, c \in C = A \cap f^{-1}(b)$。但 c 是 C 中的最小元，且 $x \neq c$，从而必有 $c < x$。于是，由 R 的定义也有 cRx。

这就证明了 c 是 A 中关于 R 的最小元。由 A 的任意性知，$\mathbb{Z}_+$ 中任何非空集合都有最小元。从而由引理 6.1 知，$\langle \mathbb{Z}_+, R \rangle$ 是良序集。 □

6.5

证明： 记 $B = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \prec x\}$。只需证明 $B = \varnothing$。

反设 $B \neq \varnothing$，则 B 是良序集 A 的非空子集，从而存在最小元 t。由 B 的定义知，$f(t) \prec t$。由 f 的保序性知，$f(f(t)) \prec f(t)$，从而 $f(t) \in B$。但 $f(t) \prec t$，这与 t 的最小性矛盾。 □

6.6

(1) 由题设知：

$$
\begin{aligned}
F(0) &= A \cup (\cup \cup \operatorname{ran}(F \restriction (\operatorname{seg} 0))) && (\gamma \text{ 定义}) \\
&= A \cup (\cup \cup \{F(x) \mid x \in \operatorname{seg} 0\}) && (\text{值域、限制定义}) \\
&= A \cup (\cup \cup \varnothing) && (\operatorname{seg} 0 = \varnothing) \\
&= A \\
F(1) &= A \cup (\cup \cup \operatorname{ran}(F \restriction (\operatorname{seg} 1))) && (\gamma \text{ 定义}) \\
&= A \cup (\cup \cup \{F(x) \mid x \in \operatorname{seg} 1\}) && (\text{值域、限制定义}) \\
&= A \cup (\cup \cup \{F(0)\}) && (\operatorname{seg} 1 = \{0\}) \\
&= A \cup (\cup \cup \{A\}) && (F(0) = A) \\
&= A \cup (\cup A) \\
F(2) &= A \cup (\cup \cup \operatorname{ran}(F \restriction (\operatorname{seg} 2))) && (\gamma \text{ 定义}) \\
&= A \cup (\cup \cup \{F(x) \mid x \in \operatorname{seg} 2\}) && (\text{值域、限制定义}) \\
&= A \cup (\cup \cup \{F(0), F(1)\}) && (\operatorname{seg} 2 = \{0, 1\}) \\
&= A \cup (\cup \cup \{A, A \cup (\cup A)\}) && (F(0) = A, F(1) = A \cup (\cup A)) \\
&= A \cup (\cup (A \cup (A \cup (\cup A)))) && (\text{广义并定义}) \\
&= A \cup (\cup (A \cup (\cup A))) && (\text{同一律}) \\
&= A \cup (\cup A) \cup (\cup \cup A) && (\cup (A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B))
\end{aligned}
$$

下面证明，$\forall n \in \mathbb{N}, F(n^+) = A \cup (\cup F(n))$。

证明： 用强数学归纳法证明：$\forall n \in \mathbb{N}$，有 $F(n^+) = A \cup (\cup F(n))$ 和 $F(n) \subseteq F(n^+)$。

令 $S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge F(x^+) = A \cup (\cup F(x)) \wedge F(x) \subseteq F(x^+)\}$。

由于 $F(0) = A \subseteq A \cup (\cup A) = A \cup (\cup F(0)) = F(1)$，所以 $0 \in S$。

对任何 $n \in \mathbb{N}$，$n \geq 1$，若 $\forall x \in \mathbb{N}, x < n \Rightarrow x \in S$，则：

$$F(n^+) = A \cup (\cup \cup \operatorname{ran}(F \restriction (\operatorname{seg}(n^+)))) \qquad (\gamma \text{ 定义})$$