证明： 由定义显然有 $A/B \subseteq R/B$。

由于 $B \in A/B$，所以 A/B 非空。

对任意 $\bar{x}, \bar{y} \in A/B$，有 $x, y \in A$，从而 $x - y \in A$，$\bar{x} - \bar{y} = \overline{x-y} \in A/B$ ($\bar{x} - \bar{y} = \overline{x-y}$ 是因为 $-y \in \overline{-y}$，从而 $0 \in \bar{y} + \overline{-y}$，$\bar{y} + \overline{-y} = \bar{0}$。这就是说 $\overline{-y} = -\bar{y}$，从而 $\bar{x} - \bar{y} = \bar{x} + \overline{-y} = \overline{x + (-y)} = \overline{x-y}$)。

对任意 $\bar{x} \in A/B$，$\bar{y} \in R/B$，有 $x \in A, y \in R$，从而有 $xy \in A$ 和 $yx \in A$。因此有 $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy} \in A/B$，$\bar{y} \cdot \bar{x} = \overline{yx} \in A/B$。

这就证明了 A/B 是 R/B 的理想。

作 $\varphi : R/B \to R/A$，$\forall x + B \in R/B$，令 $\varphi(x + B) = x + A$。

首先证明 φ 是函数。对任意 $x, y \in R/B$，

$x + B = y + B$

$\iff -x + y \in B$ (教材定理 17.25(4))

$\implies -x + y \in A$ ($B \subseteq A$)

$\iff x + A = y + A$ (教材定理 17.25(4))

$\iff \varphi(x + B) = \varphi(y + B)$ (φ 定义)

这就证明了 φ 是函数。

对任意 $x + A \in R/A$，有 $x + B \in R/B$，$\varphi(x + B) = x + A$，从而 φ 是满射。

由除环运算定义可知，φ 是同态，且为满同态。

由教材定理 17.25(4) 知，$\varphi(x + B) = x + A = A$ 当且仅当 $x \in A$。从而 $\ker\varphi = \{x + B \mid x \in A\} = A/B$。由环同态基本定理知，$R/B\big/(A/B) \cong R/A$。 □

18.32

证明： 对任意 $x \in R_1$，

$x \in \varphi^{-1}(\varphi(S))$

$\iff \exists y(y \in \varphi(S) \land \varphi(x) = y)$ (φ^{-1} 定义)

$\iff \exists y \exists z(z \in S \land y = \varphi(z) \land \varphi(x) = y)$ ($\varphi(S)$ 定义)

$\implies \exists z(z \in S \land \varphi(x) = \varphi(z))$ (等量代换)

$\iff \exists z(z \in S \land x + \ker\varphi = z + \ker\varphi)$ (教材定理 17.36(2))

$\iff \exists z(z \in S \land x \in z + \ker\varphi)$ (教材定理 17.25(4))

$\implies x \in S + \ker\varphi$ ($S + \ker\varphi$ 定义)

$\iff x \in \ker\varphi + S$ ($\ker\varphi$ 是正规的)

这就证明了 $x \in \varphi^{-1}(\varphi(S)) \subseteq \ker\varphi + S$。

反之，对任意 $x \in R_1$，

$x \in \ker\varphi + S$

$\iff \exists y \exists s(y \in \ker\varphi \land s \in S \land x = y + s)$ ($\ker\varphi + S$ 定义)

$\implies \exists y \exists s(y \in \ker\varphi \land s \in S \land \varphi(x) = \varphi(y) + \varphi(s))$ (φ 是同态)

$\implies \exists y \exists s(y \in \ker\varphi \land s \in S \land \varphi(x) = \varphi(s))$ ($y \in \ker\varphi$)

$\implies \exists s(s \in S \land \varphi(x) = \varphi(s))$ ($\exists$消去)

$\implies \varphi(x) \in \varphi(S)$ ($\varphi(S)$ 定义)

$\iff x \in \varphi^{-1}(\varphi(S))$ (φ^{-1} 定义)