环路空间和断集空间

- **1. 环路空间**
- **2. 断集空间**

9.3 环路空间

- 环路: G中圈或若干个边不重的圈的并
- 规定:∅是环路
- 圈、简单回路都是环路,但环路不一定是回路.
- $C_{环}$:G中所有环路的集合
- Ω:G的各边导出子图的集合,

$$\Omega=\{G_1, G_2,\ldots, G_{2^m}\}, m=|E(G)|$$

定理9.10

- **定理9.9** G是n阶m条边的无向连通图,T是G的生成树,$C_{基}$是T对应的基本回路系统,则对于任意的C_{i_1}, C_{i_2},…, $C_{i_r} \in C_{基}$,必有它们对应的弦e_{i_1}', e_{i_2}',…, e_{i_r}'均在$C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \dots \oplus C_{i_r}$中,其中⊕为图之间的环和运算.
- **定理9.10** 设C_1,C_2为无向图G的任意两个回路,则环和$C_1 \oplus C_2$为G中环路.
- **推论** 设C_1,C_2为无向图G的两个环路,则$C_1 \oplus C_2$为G中环路.

定理9.10的证明

证 $C_1=C_2$,则$C_1 \oplus C_2=\varnothing$, $\varnothing$是环路;

若$C_1 \neq C_2$,显然$E(C_1) \oplus E(C_2) \neq \varnothing$,从而$C_1 \oplus C_2 \neq \varnothing$,下面证明$C_1 \oplus C_2$中的各连通分支都是欧拉图,即只需证明

$\forall v \in V(C_1 \oplus C_2)$, $d_{C_1 \oplus C_2}(v)$为非零偶数.

若$v \in V(C_1) \wedge v \notin V(C_2)$或$v \notin V(C_1) \wedge v \in V(C_2)$,显$d_{C_1 \oplus C_2}(v)$为非零偶数.

若$v \in V(C_1) \wedge v \in V(C_2)$,如果$v$关联的边中有环$e$,若$e$只在$C_1$中或$C_2$中,则e作为圈在$C_1 \oplus C_2$中;若e既在$C_1$中也在$C_2$中,则e $\notin C_1 \oplus C_2$,所以不影响$d_{C_1 \oplus C_2}(v)$的奇偶性.

定理9.10的证明

如果v关联的边中无环,设 C_1中有r条边与v关联, C_2中有s条边与v关联,其中有t条边既在C_1中也在C_2中,则r,s都是偶数且$r,s \geq 2, t \leq \min\{r,s\}$,则$d_{C_1 \oplus C_2}(v) = r+s-2t > 0$且为偶数.所以$C_1 \oplus C_2$中各连通分支都是欧拉图,即各连通分支都是若干个边不重的圈的并,因此$C_1 \oplus C_2$也是若干个边不重的圈的并,即$C_1 \oplus C_2$为环路.

定理9.11

- **定理9.11** 设G为无向连通图,T是G的任意一棵生成树,则G中任一回路或为T的基本回路或为若干个基本回路的环和.
- **推论1** 无向连通图G中任一环路或为某棵生成树的基本回路或为若干个基本回路的环和.
- **推论2** 设G是n阶m条边的无向连通图,设G中有s个回路,则$m-n+1 \le s \le 2^{m-n+1}-1$.
- **推论3** 设G是n阶m条边的无向连通图,s是G中环路总数,则$s=2^{m-n+1}$.

定理9.11的证明

- 定理9.11 设G为无向连通图,T是G的任意一棵生成树,则G中任一回路或为T的基本回路或为若干个基本回路的环和.

证 设C是G中的一个回路,如果C只含T的一条弦,则C是T的一个基本回路;

如果C含有T的l条弦,分别为$e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_l}$,由定理9.9可知,这$l$条弦全部在C′=$C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \ldots \oplus C_{i_l}$中,其中$C_{i_j}$为$e_{i_j}$对应的基本回路.由定理9.10可知C′是环路,并且C’中除了弦$e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_l}$外其余的全是树枝.

若C⊕C′≠∅,则C⊕C′中全是树枝,显然C⊕C′不可能是环路,与定理9.10矛盾.因此C⊕C′=∅,即C=C′,证得.

定理9.12

- 定理9.12 设G是n阶m条边的无向连通图,则$C_{环}$是Ω的m-n+1维的子空间.
- 注： $|\Omega|=2^m$

证 只需证明两点：

(1)证明环路对环和运算是封闭的.

由定理9.10推论可知

(2) 设T是G中任意一个生成树,$C_{基}=\{C_1,C_2,\ldots,C_{m-n+1}\}$是T对应的基本回路系统,证明$C_{基}$是$C_{环}$的基.

i)任意的$C\in C_{环}$,C可由C基中元素生成.

(由定理9.11推论）

定理9.12

ii) 证$C_{基}$中元素线性无关.

若存在不全为0的$a_i \in F=\{0,1\}, i=1,2,\ldots,m-n+1$,使得

$a_1C_1 \oplus a_2C_2 \oplus \ldots \oplus a_{m-n+1}C_{m-n+1}=\varnothing$.

不妨设$a_1=1$,设弦e_1在C_1中,则$e_1 \notin E(C_i)(i \geq 2)$,上式左端含$e_1$,右端为空,矛盾.因此$C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}$线性无关.

举例

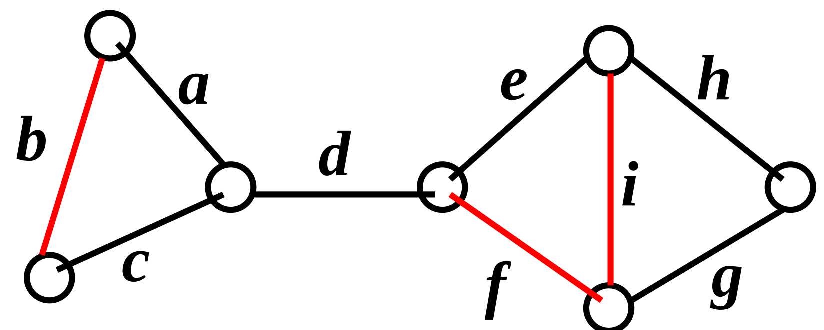
例9.5 求G的环路空间$C_{环}$,并指出其中的回路.

解 T={a,c,d,e,h,g},基本回路$C_{基}$为

$C_b = abc$

$C_f = efhg$

$C_i = hgi$



$C_b \oplus C_f = C_b \cup C_f$　　$C_b \oplus C_i = C_b \cup C_i$

$C_i \oplus C_f = fie$　　$C_b \oplus C_f \oplus C_i = C_b \cup fie$

$C_{环} = \{\varnothing, C_b, C_f, C_i, C_b \cup C_f, C_b \cup C_i, fie, C_b \cup fie\}$

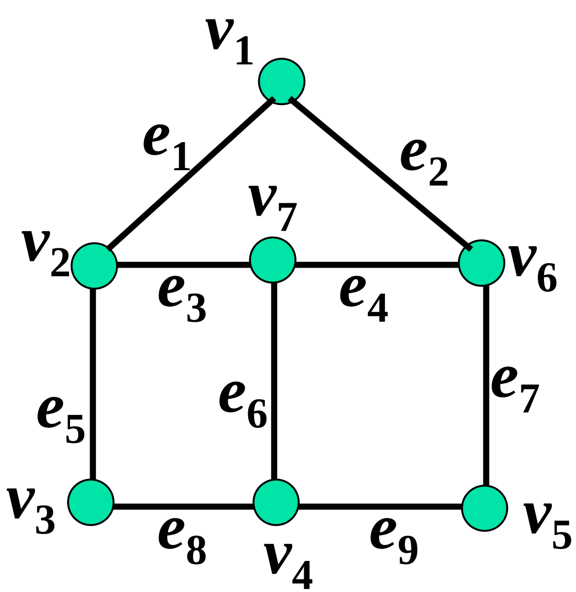
其中的回路为C_b, C_f, C_i, fie

9.4 断集空间

- **断集:** G=<V,E>为无向图,$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$,记$\overline{V}_1=V-V_1$,
  $\{(u,v) \mid u \in V_1 \wedge v \in \overline{V}_1\}$为G中的一个断集,
  记作$E(V_1 \times \overline{V}_1)$,简记$(V_1,\overline{V}_1)$.
- 割集是断集,断集不一定是割集.（为什么?）

举例

- $V_1=\{v_1\}$,则$(V_1, \overline{V_1})=\{e_1,e_2\}$,是割集
- $V_2=\{v_4,v_7\}$,则$(V_2, \overline{V_2})=\{e_3,e_4,e_8,e_9\}$,是割集
- $V_3=\{v_2,v_4\}$,则$(V_3, \overline{V_3})=\{e_1,e_3,e_5,e_9,e_6,e_8\}$,不是割集



定理9.13

- $S_{断}$:G中所有断集的导出子图和∅组成的集合;
- 定理19.3　连通图G中每个割集至少包含G的每棵生成树的一个树枝.
- 证明 (反证法)假设存在一个割集E_1不包含一棵树T中的任何树枝,则$G-E_1$中仍然包含T,那么$G-E_1$连通,与E_1是割集矛盾.

定理9.14/9.15

- **定理9.14** G是n阶m条边的无向连通图,T是G的生成树,$S_{基}$是T对应的基本割集系统,则对于任意的S_{i_1}, S_{i_2},…, $S_{i_k}\in S_{基}$,必有它们对应的树枝e_{i_1}', e_{i_2}',…, e_{i_k}'均在$S_i \oplus S_{i_2} \oplus \ldots \oplus S_{i_k}$中,其中⊕为对称差运算.

  证明 不同的基本割集对应的树枝边不同,得证.

- **定理9.15** 设S_1,S_2为无向图G的两个断集,则$S_1 \oplus S_2$为G中断集,其中⊕为对称差运算.

  证明 若$S_1=S_2$,则$S_1 \oplus S_2=\varnothing$,显然成立.

定理9.15(证明)

若$S_1 \neq S_2$,设$S_1=(V_1,\overline{V}_1)$, $S_2=(V_2,\overline{V}_2)$.

则红色虚线边既在S_1中也在S_2中,

因此它们都不在$S_1 \oplus S_2$中.

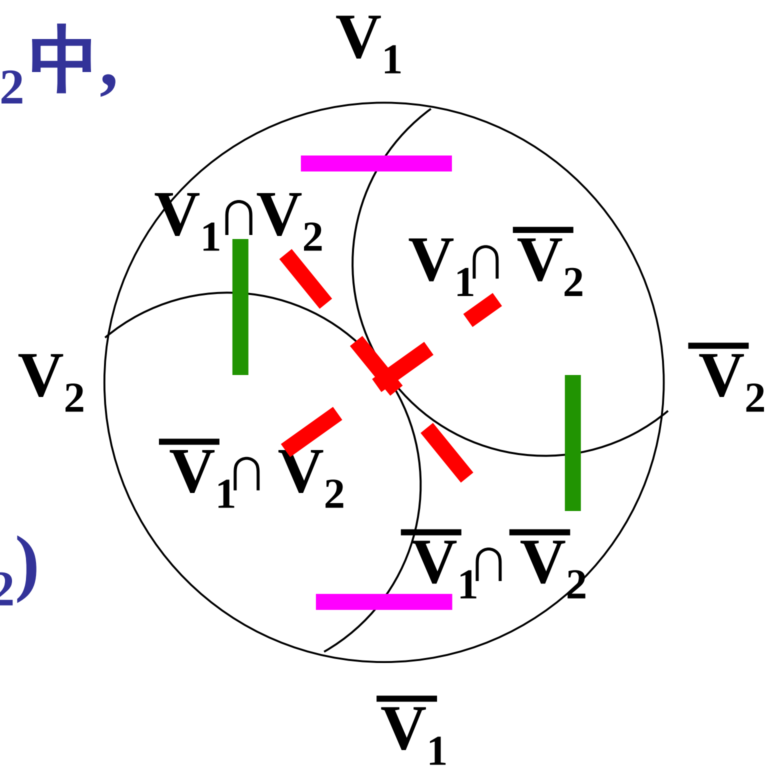
玫红色的实线边只在S_2中,

绿色的实线边只在S_1中,

故而,令$V^*=(V_1\cap V_2)\cup(\overline{V}_1\cap\overline{V}_2)$

则$\overline{V}^*=(V_1\cap\overline{V}_2)\cup(\overline{V}_1\cap V_2)$

$S_1\oplus S_2=(V^*,\overline{V}^*)$为G中的断集.



定理9.16/9.17

- 定理9.16 设G为无向连通图,T是G的任意一棵生成树,则G中任一断集或为T的基本割集或为若干个基本割集的对称差.
- 定理9.17 G是n阶m条边的无向连通图,则$S_{断}$为Ω的n-1维子空间.

定理9.16的证明

- **定理9.16** 设G为无向连通图,T是G的任意一棵生成树,则G中任一断集或为T的基本割集或为若干个基本割集的对称差.

证明 设S为G中任意一个断集,则S至少包含T的一个树枝,设S中含有r($1\le r\le n-1$)条树枝e_1',e_2',…,e_r',并设它们对应的基本割集分别是S_1,S_2,…,S_r,令$S'=S_1\oplus S_2\oplus \ldots \oplus S_r$,由定理9.15知$S'$是断集,并且$e_1'$,$e_2'$,…,$e_r'$均在$S'$中.

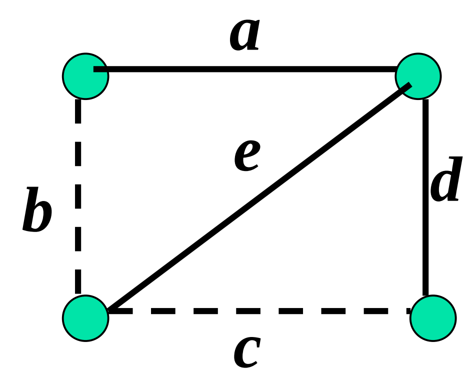
考虑$S\oplus S'$. $S\oplus S'$是断集,并且树枝e_1',e_2',…,e_r'均不在$S\oplus S'$中.若$S\oplus S'\neq\varnothing$, 则$S\oplus S'$只包含弦,与$S\oplus S'$是断集矛盾,因此$S\oplus S'=\varnothing$,所以$S=S'$.

断集举例

例9.6 求G的断集$S_{断}$,并指出其中的割集.

解 T={a,e,d}为树,对应的基本割集

$S_a=\{a,b\}$, $S_e=\{b,c,e\}$, $S_d=\{c,d\}$



$S_a \oplus S_e=\{a,c,e\}$

$S_a \oplus S_d=\{a,b,c,d\}$

$S_e \oplus S_d=\{b,e,d\}$

$S_a \oplus S_e \oplus S_d=\{a,e,d\}$

$S_{断}=\{\varnothing, S_a, S_d, S_e, S_a \oplus S_e, S_a \oplus S_d, S_e \oplus S_d, S_a \oplus S_e \oplus S_d\}$

$S_a \oplus S_d=\{a,b,c,d\}$不是割集,其余都是割集.

总结及作业

- 熟练求解环路空间和断集空间
- 了解环路空间和断集空间的维数
- 习题九: