$\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in R \wedge \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R$

$\iff (\langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \vee (\langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge y_1 = y_2))\wedge$

$(\langle y_2, y_3\rangle \in R_2 \vee (\langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge y_2 = y_3))$ ($R$ 定义)

$\iff (\langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2)\vee$

$(\langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge y_2 = y_3)\vee$

$(\langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge y_1 = y_2 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2)\vee$

$(\langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge y_1 = y_2 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge y_2 = y_3)$ (命题逻辑分配律)

分别讨论上述 4 种情况。

对第 1 种情况，直接由 $R_2$ 的传递性得 $\langle y_1, y_3\rangle \in R_2$。

对第 2 种情况，由 $\langle y_1, y_2\rangle \in R_2$ 和 $y_2 = y_3$ 可得 $\langle y_1, y_3\rangle \in R_2$。

对第 3 种情况，由 $\langle y_2, y_3\rangle \in R_2$ 和 $y_1 = y_2$ 可得 $\langle y_1, y_3\rangle \in R_2$。

对第 4 种情况，由 $R_1$ 的传递性和 $=$ 的传递性可得 $\langle x_1, x_3\rangle \in R_1 \wedge y_1 = y_3$。

可见，由以上 4 种情况都可推出 $\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R$。即，$R$ 的传递性成立。

综上所述，有 $R$ 的拟序关系。 □

**2.50**

**证明：** 先证：$R$ 是自反的。

$\forall x, y$

$\langle x, y\rangle \in A \times B$

$\iff x \in A \wedge y \in B$ (卡氏积定义)

$\implies \langle x, x\rangle \in R_1 \wedge \langle y, y\rangle \in R_2$ ($R_1, R_2$ 是自反的)

$\iff \langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \in R$ ($R$ 定义)

再证：$R$ 是反对称的。

$\forall x_1, x_2, y_1, y_2$

$\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in R \wedge \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_1, y_1\rangle\rangle \in R$

$\iff \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle x_2, x_1\rangle \in R_1 \wedge \langle y_2, y_1\rangle \in R_2$ ($R$ 定义)

$\iff \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle x_2, x_1\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle y_2, y_1\rangle \in R_2$ (命题逻辑交换律)

$\implies x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$ ($R_1, R_2$ 是反对称的)

$\iff \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$ (教材定理 2.1)

$\iff \langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle = \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_1, y_1\rangle\rangle$ (教材定理 2.1)

最后证：$R$ 是传递的。

$\forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, x_3$

$\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in R \wedge \langle\langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R$

$\iff \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2$ ($R$ 定义)

$\iff \langle x_1, x_2\rangle \in R_1 \wedge \langle x_2, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_2\rangle \in R_2 \wedge \langle y_2, y_3\rangle \in R_2$ (命题逻辑交换律)

$\implies \langle x_1, x_3\rangle \in R_1 \wedge \langle y_1, y_3\rangle \in R_2$ ($R_1, R_2$ 是传递的)

$\iff \langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\rangle \in R$ ($R$ 定义)

故得，$R$ 是偏序关系。 □

**2.51**