定理 5.12 (Schröder-Bernstein 定理)

(1) 设 A, B 为二集合，若 $A \preccurlyeq\cdot B$ 且 $B \preccurlyeq\cdot A$，则 $A \approx B$;

(2) 设 κ, λ 为二基数，若 $\kappa \leq \lambda$ 且 $\lambda \leq \kappa$，则 $\kappa = \lambda$.

定理 5.13 $\mathbb{R} \approx (\mathbb{N} \to 2)$，其中 $\mathbb{N} \to 2 = 2^{\mathbb{N}}$.

定理 5.14

(1) 设 A 为任意的无穷集合，则 $\mathbb{N} \preccurlyeq\cdot A$;

(2) 设 κ 为任意的无穷基数，则 $\aleph_0 \leq \kappa$.

推论 1 设 κ 为任意的基数，$\kappa < \aleph_0$ 当且仅当 κ 是有穷基数.

推论 2 有穷集合的子集一定是有穷集合.

推论 3 设 A 是 $\mathbb{N}$ 的无穷子集，则 $\operatorname{card} A = \aleph_0$.

定理 5.15 集合 A 是无穷可数集当且仅当 A 可以写成如下形式:

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

定理 5.16 可数集的子集是可数集.

定理 5.17 可数个可数集的并集是可数集.

定理 5.18 设 A 为无穷集，则 $\mathcal{P}(A)$ 不是可数集.

定理 5.19 设 K_1, K_2, L_1, L_2 为 4 个集合，若 $K_1 \approx K_2, L_1 \approx L_2$，则

(1) 如果 $K_1 \cap L_1 = K_2 \cap L_2 = \varnothing$，则 $K_1 \cup L_1 \approx K_2 \cup L_2$;

(2) $K_1 \times L_1 \approx K_2 \times L_2$;

(3) $L_1 \to K_1 \approx L_2 \to K_2$.

定理 5.20

(1) 设 A 为一集合，则 $2^{\operatorname{card} A} = \operatorname{card} \mathcal{P}(A)$;

(2) 设 κ 为一基数，则 $\kappa < 2^{\kappa}$.

推论 (1) $\operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$; (2) $\operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph}$; (3) $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

定理 5.21 设 κ, λ, μ 是三个任意的基数，则

(1) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$; (2) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$, $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$

(3) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$; (4) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$;

(5) $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$; (6) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

推论 设 κ, λ 为任意二基数，则

(1) $\kappa + (\lambda + 1) = (\kappa + \lambda) + 1$; (2) $\kappa \cdot (\lambda + 1) = \kappa \cdot \lambda + \kappa$; (3) $\kappa^{\lambda+1} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa$

定理 5.22 设 κ, λ, μ 为三个基数，若 $\kappa \leq \lambda$，则

(1) $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$; (2) $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$;

(3) $\kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$; (4) $\mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}$，$\kappa, \mu$ 不同时为 0.

定理 5.23 设 κ 为任意的无穷基数，则 $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

定理 5.24 设 κ, λ 为二基数，其中较大的为无穷基数，较小的不为 0，则

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

推论 设 κ 为一无穷基数，则 $\kappa + \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

定理 5.25 设 κ 为无穷基数，则 $\kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}$.