$\Longrightarrow \forall x((x \in s \to \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge (x \in s \to \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge s \neq \varnothing$ (结论 1)

$\Longleftrightarrow \forall x((x \in s \to \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge (x \in s \to \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s)$ ($\varnothing$ 定义)

$\Longleftrightarrow \forall x((\neg x \in s \vee \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge (\neg x \in s \vee \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s)$ (蕴涵等值式)

$\Longleftrightarrow \forall x(\neg x \in s \vee (\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s)$ (命题逻辑分配律)

$\Longleftrightarrow \forall x(x \in s \to (\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s)$ (蕴涵等值式)

$\Longrightarrow (\exists x(x \in s) \to \exists x(\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge \exists x(x \in s)$ (一阶谓词推理定律)

$\Longrightarrow \exists x(\langle x, y_1\rangle \in f \wedge \langle x, y_2\rangle \in f)$ (假言推理)

$\Longrightarrow y_1 = y_2$ (f 是函数)

可见，g 是单根的。故而 g 是单射的。 □

3.12

证明: 对于任意 $x \in \mathbb{R}$，都有 $\langle\langle x, 0\rangle, x\rangle \in f$ 和 $\langle\langle x, 1\rangle, x\rangle \in g$，因此 f, g 都是满射的。

对于任意 $x \in \mathbb{R}$，都有 $\langle\langle x, 0\rangle, x\rangle \in f \wedge \langle\langle x-1, 1\rangle, x\rangle \in f \wedge x \neq x-1$ 和 $\langle\langle x, 0\rangle, 0\rangle \in g \wedge \langle\langle x+1, 0\rangle, 0\rangle \in g \wedge x \neq x-1$，因此 f, g 都不是单射的。 □

3.13

证明: 令 $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}, f(x) = A/x$。下面证明 $f(x)$ 是双射。

先证 f 是单射。

对 A 上的任意等价关系 $R, S \in \mathscr{E}$，若 $f(R) = f(S)$，则由 f 定义有 $A/R = A/S$。于是:

$\forall x, y$

$\langle x, y\rangle \in R$

$\Longleftrightarrow \exists B(x \in B \wedge y \in B \wedge B \in A/R)$ (商集定义)

$\Longleftrightarrow \exists B(x \in B \wedge y \in B \wedge B \in A/S)$ ($A/R = A/S$)

$\Longleftrightarrow \langle x, y\rangle \in S$ (商集定义)

即，$f(R) = f(S) \Rightarrow R = S$，故而 f 是单射的。

再证 f 是满射。

对于A任意划分 $\mathscr{A} \in \mathscr{F}$，令 $R_{\mathscr{A}} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge \exists B(x \in B \wedge y \in B \wedge B \in \mathscr{A})\}$。

下面证明 $R_{\mathscr{A}} \in \mathscr{E}$[1] 且 $f(R_{\mathscr{A}}) = \mathscr{A}$。

先证明 $R_{\mathscr{A}} \in \mathscr{E}$。

自反性:

$\forall x$

$x \in A$

$\Longleftrightarrow x \in \cup\mathscr{A}$ ($\mathscr{A}$ 是划分)

$\Longleftrightarrow \exists B(x \in B \wedge B \in \mathscr{A})$ (广义并定义)

$\Longleftrightarrow \exists B(x \in B \wedge x \in B \wedge B \in \mathscr{A})$ (命题逻辑幂等律)

$\Longleftrightarrow \langle x, x\rangle \in R_{\mathscr{A}}$ ($R_{\mathscr{A}}$ 定义)

对称性:

$\forall x, y$

$\langle x, y\rangle \in R_{\mathscr{A}}$

[1]即为教材定理 2.28(2)。教材将“本定理证明留读者”，故在此证明。