习题2.10

1 (1) $y=1+x^2-\frac{1}{2}x^4$

$y'=2x-2x^3=2x(1-x^2)$

$y''=2-6x^2=2(1-3x^2)$

令 $y''=0$ 得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

x	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt3})$	$-\frac{1}{\sqrt3}$	$(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$	$\frac{1}{\sqrt3}$	$(\frac{1}{\sqrt3},+\infty)$
y''	+		−		+
y	凸		凹		凸

∴拐点 $(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{23}{18})$ 及 $(\frac{1}{\sqrt3},\frac{23}{18})$

凸区间: $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt3})\cup(\frac{1}{\sqrt3},+\infty)$, 凹区间 $(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$.

(4) $y=\begin{cases}\ln x-x, & x\geq 1\\ x^2-2x & x<1\end{cases}$

当 $x>1$ 时, $y'=\frac{1}{x}-1$ $\qquad y''=-\frac{1}{x^2}$

当 $x<1$ 时, $y'=2x-2$ $\qquad y''=2$

当 $x=1$ 时 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x-x-(0-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x-x+1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{1}=0$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-2x-(0-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x-2}{1}=0$

$f'_-(1)=f'_+(1)=0$ $\qquad$ ∴ $f'(1)=0$

∴ $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1, & x\geq1\\ 2x-2 & x<1\end{cases}$

当 $x=1$ 时, $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1-(1-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{1}=-1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x-2-(1-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

$f''_+(1)\neq f''_-(1)$ $\qquad$ ∴ $f'(x)$ 在 $x=1$ 不可导

∴ $f''(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}, & x>1\\ 2 & x<1\end{cases}$

∴不存在 x, $f''(x)=0$; $\quad f(x)$ 在 $x=1$ 二阶不可导.

当 $x<1$ 时, $f''(x)=2>0$, 当 $x>1$ 时, $f''(x)<0$

由拐点第一充分条件得 $(1,-1)$ 为拐点。

4. 由题意知 $(1,3)$ 在 $y=ax^3+bx^2$ 上, 故

有: $3=a+b$ $\qquad (1)$

$y''=6ax+2b$ $\quad (1,3)$ 是拐点, 故 $y''|_{x=1}=0$

有: $0=6a+2b$ $\qquad (2)$

由(1),(2)得 $a=-2$, $b=5$.

5. ②证: $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$

由极限保号性得, $\exists U(x_0)$, $\forall x\in U(x_0)$

有 $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$

当 $x<x_0$ 时, $f''(x)<0$

当 $x>x_0$ 时, $f''(x)>0$

∴ $(x_0,f(x_0))$ 是拐点.

证① $f(x)=f(x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o[(x-x_0)^3]$

∴ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^3}=\frac{f'''(x_0)}{3!}>0$ $\quad$ 由极限保号性得

$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^3}>0$, 当 $x<x_0$ 时, $f(x)<f(x_0)$

当 $x>x_0$ 时, $f(x)>f(x_0)$

∴ $f(x_0)$ 不是极值, x_0 不是极值点。

猜论③. 若 $f(x)$ 在 x_0 处存在 n 阶导数 $(n\geq3)$, 且

$\cancel{f'(x_0)}=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, ~~但 $f^{(n)}(x_0)\neq0$~~

则 (1) 当 n 为奇数时, 且在 $\mathring{U}_+(x_0)$ 和 $\mathring{U}_-(x_0)$ 内 $f^{(n)}(x)$ 符号相同, 则 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点.

(2) 当 n 为偶数时, 且在 $\mathring{U}_+(x_0)$ 和 $\mathring{U}_-(x_0)$ 内 $f^{(n)}(x)$ 符号相反, 则 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

课题2.10

证：当$n=3$时，由上面证明结论成立　(补)

当$n=4$时，假设在$\mathring{U}_+(x_0)$内$f^{(4)}(x)>0$，在$\mathring{U}_-(x_0)$内$f^{(4)}(x)<0$

$\forall x\in\mathring{U}_+(x_0)$，由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(x_0,x)$

s.t. $f''(x)-f''(x_0)=f^{(4)}(\xi)(x-x_0)$

$\because f'''(x_0)=0$　$f^{(4)}(\xi)>0$　$x>x_0$　$\therefore f''(x)>0$

同理对$\forall x\in\mathring{U}_-(x_0)$，$\exists\eta\in(x,x_0)$. s.t

$f'''(x_0)-f''(x)=f^{(4)}(\eta)(x_0-x)$

$\because f'''(x_0)=0$　$f^{(4)}(\eta)<0$，$x_0-x>0$　$\therefore f''(x)>0$

$\therefore$ $\mathring{U}_+(x_0)$，$\mathring{U}_-(x_0)$内$f''(x)$符号相同，又$\because f''(x_0)=0$

$\therefore (x_0,f(x_0))$是拐点.

当$n=3$时，假设在$\mathring{U}_+(x_0)$，$\mathring{U}_-(x_0)$内$f^{(3)}(x)>0$

由拉格朗日中值定理，对$\forall x\in\mathring{U}(x_0)$，

$f''(x)-f''(x_0)=f'''(\xi)(x-x_0)$　　$\xi\in(x_0,x)$或(x,x_0)

$\because f''(x_0)=0$，$f'''(\xi)>0$，$\therefore$当$x>x_0$时，$f''(x)>0$

当$x<x_0$时，$f''(x)<0$　由拐点判别法知$(x_0,f(x_0))$是拐点。

假设$n=k$时，结论成立，下证$n=k+1$时成立.

(1) 若k为奇数，则$k+1$为偶数.

$\forall x\in\mathring{U}_+(x_0)$，由拉格朗日定理，$\exists\xi\in(x_0,x)$

s.t. $f^{(k)}(x)-f^{(k)}(x_0)=f^{(k+1)}(\xi)(x-x_0)$

对$\forall x\in\mathring{U}_-(x_0)$，$\exists\eta\in(x,x_0)$.

s.t. $f^{(k)}(x_0)-f^{(k)}(x)=f^{(k+1)}(\eta)(x_0-x)$

$f^{(k)}(x_0)=0$　　$f^{(k+1)}(\xi)$，$f^{(k+1)}(\eta)$符号相反

$\therefore \mathring{U}_+(x_0)$，$\mathring{U}_-(x_0)$内$f^{(k)}(x)$符号相同，由假设知，$(x_0,f(x_0))$为拐点.

(2) 若k为偶数，则$k+1$为奇数

$\forall x\in\mathring{U}_+(x_0)$，$\exists\xi_1\in(x_0,x)$

s.t. $f^{(k)}(x)-f^{(k)}(x_0)=f^{(k+1)}(\xi_1)(x-x_0)$

$\forall x\in\mathring{U}_-(x_0)$，$\exists\eta_1\in(x,x_0)$

s.t. $f^{(k)}(x_0)-f^{(k)}(x)=f^{(k+1)}(\eta_1)(x_0-x)$

$\because f^{(k+1)}(\xi_1)$，$f^{(k+1)}(\eta_1)$符号相同.

且$f^{(k)}(x_0)=0$

$\therefore$ 在$\mathring{U}_+(x_0)$，$\mathring{U}_-(x_0)$内，$f^{(k)}(x)$符号相反

由假设知$(x_0,f(x_0))$为$y=f(x)$拐点.

$\boxed{结论④}$ 若$f(x)$在x_0处存在$n(\geq3)$阶导数，且

$f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$　但$f^{(n)}(x_0)\neq0$

(1) 当n为奇数时，$(x_0,f(x_0))$是曲线的拐点.

(2) 当n为偶数时，$(x_0,f(x_0))$不是曲线的拐点.

证：$f''(x)=f''(x_0)+f'''(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$

$+o[(x-x_0)^{n-2}]$

$\because f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$

$\therefore f''(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+o[(x-x_0)^{n-2}]$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{(x-x_0)^{n-2}}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}$

$\therefore$(1)当n为奇数时，$n-2$也是奇数，则在$\mathring{U}_+(x_0)$，$\mathring{U}_-(x_0)$内，$f''(x)$符号相反，$\therefore (x_0,f(x_0))$是拐点.

(2)当n为偶数时，$n-2$也是偶数，$(x-x_0)^{n-2}>0$

$f''(x)$符号相同，$\therefore (x_0,f(x_0))$不是拐点.

习题 2.10

6.(1) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$

定义域 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1$　∴ $y=1$ 水平渐近线

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2}{x^2-1}=\infty$　∴ $x=-1$ 垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{x^2-1}=\infty$　∴ $x=1$ 垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x^2-1)\cdot x}=0$　∴ 无斜渐近线.

(3) $y=xe^{\frac{1}{x}}$

定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to0^-}\frac{e^t}{t}=\infty$

无水平渐近线

$\lim\limits_{x\to0^-}xe^{\frac{1}{x}}=0$　　$\lim\limits_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$

∴ $x=0$ 垂直渐近线.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$

∴ $y=x+1$ 是斜渐近线.

(5) $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$

定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(e+\frac{1}{x})=\infty$ 无水平渐近线

$\lim\limits_{x\to0}x\ln(e+\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln(e+t)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{e+t}}{1}=0$

无垂直渐近线.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\ln(e+\frac{1}{x})}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x})-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(e+t)-1}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{e+t}=\frac{1}{e}$

∴ $y=x+\frac{1}{e}$ 斜渐近线.

习题 2.11

1(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　　$(0,0)$

$y'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$y''=\frac{-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

$K|_{(0,0)}=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}\Big|_{x=0}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}(1+\frac{1}{1+x^2})^{3/2}}\Big|_{x=0}$

$=0$

$R=\infty$.

3. $y=\ln x$　　$x>0$

$y'=\frac{1}{x}$　　$y''=-\frac{1}{x^2}$

$K(x)=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{[1+\frac{1}{x^2}]^{3/2}}=\frac{|x|}{(1+x^2)^{3/2}}$

$=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

$K'(x)=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-x\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot2x}{(1+x^2)^3}$

$=\frac{(1+x^2)-3x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}$

令 $k'(x)=0$ 得驻点 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$，唯一驻点.

习题2.11

当$x<\frac{1}{\sqrt{2}}$时 $K'(x)>0$

当$x>\frac{1}{\sqrt{2}}$时， $K'(x)<0$

$\therefore K(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 是极大值，也是最大值.

当$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$时， $y=-\ln\sqrt{2}$

曲线上曲率最大的点是$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\ln\sqrt{2})$.