(2) 若 G 是 n 阶循环群，则 G 有 $\phi(n)$ 个生成元. 当 $n=1$ 时，$G=\langle e\rangle$ 的生成元是 e，当 $n>1$ 时，对每一个不大于等于 n 的正整数 r，a^r 是 G 的生成元当且仅当 $(n,r)=1$.

定理 17.13 $G=\langle a\rangle$ 是循环群，那么

(1) G 的子群也是循环群;

(2) 若 G 是无限阶的，则 G 的子群除 $\{e\}$ 以外仍是无限阶的;

(3) 若 G 是 n 阶的，则 G 的子群的阶是 n 的因子，对于 n 的每个正因子 d，在 G 中有且仅有一个 d 阶子群.

定理 17.14 设 $E(A)$ 是 A 上的全体一一变换构成的集合，则 $E(A)$ 关于变换的乘法构成一个群.

定理 17.15 设 $\sigma,\tau\in S_n$，若 σ 与 τ 是不相交的，则 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

定理 17.16 任何 n 元置换都可以表成不相交的轮换之积，并且表法是惟一的.

定理 17.17 设 $\sigma=(i_1i_2\cdots i_k)$ 是 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的 k 阶轮换，$k>1$，则

$$\sigma=(i_1i_k)(i_1i_{k-1})\cdots(i_1i_2).$$

定理 17.18 $\sigma\in S_n$ 且 $\sigma(j)=i_j$，$j=1,2,\cdots,n$，则在 σ 的对换表示中对换个数的奇偶性与排列 $\pi=i_1i_2\cdots i_n$ 中的逆序数的奇偶性一致.

定理 17.19 G 是 n 元置换群.

(1) $\sigma\in G$，$\sigma=(i_1i_2\cdots i_k)$，则 $|\sigma|=k$.

(2) $\tau\in G$，$\tau=\tau_1\tau_2\cdots\tau_l$ 是不相交轮换的分解式，若 τ_i 是 k_i 阶轮换，$i=1,2,\cdots,l$，则 τ 的阶是 $k_1,k_2,\cdots,k_l$ 的最小公倍数，即 $|\tau|=[k_1,k_2,\cdots,k_l]$.

定理 17.20 设 G 是群，H 是 G 的子群，则

(1) $He=H$; (2) $\forall a\in G, a\in Ha$.

定理 17.21 设 G 是群，H 是 G 的子群，则 $\forall a\in G, Ha\approx H$.

定理 17.22 G 是群，H 是 G 的子群，$\forall a,b\in G$ 有

$$a\in Hb\Leftrightarrow Ha=Hb\Leftrightarrow ab^{-1}\in H.$$

定理 17.23 G 是群，H 是 G 的子群，在 G 上定义二元关系 R，$\forall a,b\in G$ 有

$$aRb\Leftrightarrow ab^{-1}\in H,$$

则R为 G 上的等价关系，则 $[a]_R=Ha$.

定理 17.24 G 是群，H 是 G 的子群，则

$$\forall a,b\in G, Ha\cap Hb=\varnothing \text{ 或 } Ha=Hb\text{，且 } \bigcup_{a\in G}Ha=G.$$

定理 17.25 设 G 是群，H 是 G 的子群，则

(1) $eH=H$;

(2) $\forall a\in G, a\in aH$;

(3) $\forall a\in G, aH\approx H$;

(4) $\forall a,b\in G, a\in bH\Leftrightarrow aH=bH\Leftrightarrow a^{-1}b\in H$;

(5) 在 G 上定义二元关系 R，$\forall a,b\in G$，$aRb\Leftrightarrow a^{-1}b\in H$，则 R 为 G 上的等价关系，且 $[a]_R=aH$;

(6) $\forall a,b\in G, aH\cap bH=\varnothing$ 或 $aH=bH$，且 $\bigcup\limits_{a\in G}aH=G$.

定理 17.26 (Lagrange 定理) 设 G 是有限群，H 是 G 的子群，则

$$|G|=[G:H]|H|.$$

推论 1 G 是 n 阶群，则 G 中每个元素的阶是 n 的因子，且 $\forall a\in G$ 有 $a^n=e$.