第十二章　图的着色

定理 12.1 $\chi(G)=1$ 当且仅当 G 为零图.

定理 12.2 $\chi(K_n)=n$.

定理 12.3 奇圈和奇数阶轮图都是 3-色图，而偶数阶轮图为 4-色图.

定理 12.4 图 G 是 2-可着色的当且仅当 G 为二部图.

推论 1 $\chi(G)=2$ 当且仅当 G 为非零图的二部图.

推论 2 图 G 是 2-可着色的当且仅当 G 中不含奇圈.

定理 12.5 对于任意的图 G，均有

$$\chi(x)\leq\Delta(G)+1.$$

定理 12.6 (Brooks) 设连通图不是完全图 $K_n(n\geq 3)$ 也不是奇圈，则

$$\chi(G)\leq\Delta(G).$$

定理 12.7 对图 G 进行 $\chi(G)$-着色，设

$$V_i=\{v\mid v\in V(G)\text{ 且 }v\text{ 涂颜色 }i\},i=1,2,\cdots,\chi(G),$$

则 $\Pi=\{V_1,V_2,\cdots,V_{\chi(G)}\}$ 是 $V(G)$ 的一个划分.

定理 12.7’ 对图 G 进行 $\chi(G)$-着色，设

$$R=\{\langle u,v\rangle\mid u,v\in V(G)\text{ 且 }u,v\text{ 涂一样颜色 }\},$$

则 R 是 $V(G)$ 上的等价关系.

定理 12.8 $f(K_n,k)=k(k-1)\cdots(k-n+1),f(N_n,k)=k^n$，其中 K_n,N_n 分别为 n 阶完全图和 n 阶零图.

推论 $f(K_n,k)=f(K_{n-1},k)(k-n+1),n\geq 2$.

定理 12.9 在无环无向图 G 中，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.

(1) $e=(v_i,v_j)\notin E(G)$，则

$$(G,k)=f(G\cup(v_i,v_j),k)+f(G\backslash(v_i,v_j),k).$$

(2) $e=(v_i,v_j)\in E(G)$，则

$$(G,k)=f(G-e,k)-f(G\backslash e,k).$$

其中，$G\backslash(v_i,v_j)$ 在这里表示将 v_i,v_j 合并成一个顶点 w_{ij}，使它关联 v_i,v_j 关联的一切边.

推论 $f(G,k)=f(K_{n_1},k)+f(K_{n_2},k)+\cdots+f(K_{n_r},k)$. 且$\chi(G)=\min\{n_1,n_2,\cdots,n_r\}$.

定理 12.10 设 V_1 是 G 的点割集，且 $G[V_1]$ 是 G 的 $|V_1|$ 阶完全子图，$G-V_1$ 有 $p(p\geq 2)$ 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_p$，则

$$f(G,k)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}(f(H_i,k))}{f(G[V_1],k)^{p-1}}.$$