第七章　图

7.1　由图论基本定理知，该图所有顶点度数之和应为 $2*16=32$。已知的 7 个顶点度数和为 24。由题设，其余各顶点的度数至多为 2，故至少还要有 4 个顶点才能使顶点度数之和等于 32。即，G 中至少有 11 个顶点。

7.2　由图论基本定理知，图中必有偶数个奇度顶点。结合题设可知，只可能有如下几种情况：

(1)　9 个 6 度顶点；

(2)　7 个 6 度顶点和 2 个 5 度顶点；

(3)　5 个 6 度顶点和 4 个 5 度顶点；

(4)　3 个 6 度顶点和 6 个 5 度顶点；

(5)　1 个 6 度顶点和 8 个 5 度顶点。

逐一验证即证原题。

7.3　将每个面看作顶点，将相邻两面的棱看作边。由图论基本定理即证原题。

7.4　先证一个引理。

引理 7.1　(**a**) *设 G 为一个无向简单图，则 G 的每一个非平凡(顶点数大于 1)的连通分支 G_i 中必存在顶点 $v_i, v_j \in V(G_i) \wedge v_i \neq v_j \wedge d(v_i) = d(v_j)$。* (**b**) *若 $|V(G)| \geq 2$，则 G 中必存在 $v_i, v_j \in V(G) \wedge v_i \neq v_j \wedge d(v_i) = d(v_j)$。*

证明: 先证 (a)。

对 G 的任意一个非平凡的连通分支 G_i，设 $|V(G_i)| = n_i$。

由 G 是简单图知，$\forall v \in V(G_i), d(v) \leq n_i - 1$。又由于 G_i 是连通的和非平凡的，所以有：$d(v) \geq 1$。从而 $\forall v \in V(G_i)$，$d(v)$ 只能有 $n_i - 1$ 种取值。但 G_i 有 n_i 个顶点，由鸽巢原理可知 (a) 成立。

再证 (b)。

若 G 中存在非平凡的连通分支，则由 (a) 知，命题成立。若不然，则 G 的每个连通分支都是平凡的，从而每个连通分支中只有一个顶点，且度数为 0。由于 G 为非平凡的，所以 G 中至少有两个这样的顶点，命题同样成立。 □

再证原题。

证明:

证法一：将选手看作图的顶点，将“u 与 v 下一盘棋”看作边 (u, v)，则每名选手所下的盘数即为该顶点的度。易于验证所构成的图是无向简单图，由引理 7.1 即证原题。

证法二：[1]将每位选手抽象为一个顶点，令两个顶点相邻当且仅当它们对应的选手之间下过一盘

[1]感谢 xbz 网友给出这一证法。