第三章 动量守恒定律和能量守恒定律

3.1 动量定理 动量守恒定律

三大守恒定律：
- 动量守恒定律
- 动能转换与守恒定律
- 角动量守恒定律

物理学大厦的基石

一、质点的动量定理

由 $\vec{F} = m\vec{a}$ 可得: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$$\int_0^t \vec{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 \qquad \vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

作用于物体上的合外力的冲量等于物体动量的增量

——<u>质点的动量定理</u>

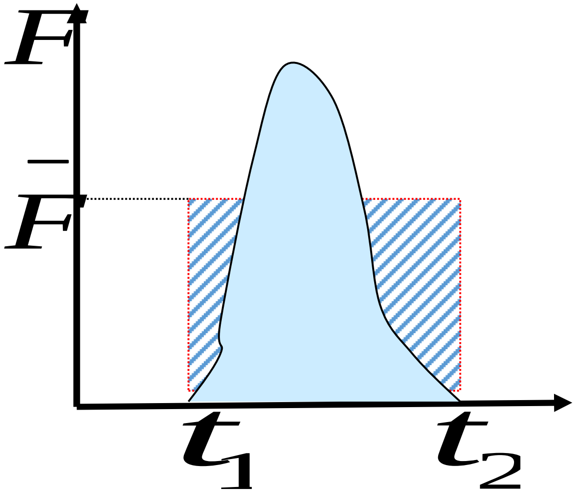
(1)间接求矢量积分

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t \qquad \vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

不管过程中动量变化细节，冲量的大小和方向总等于物体始末动量的差

(2) 动量定理在打击或碰撞问题中用来求平均力。

打击或碰撞，力$\vec{F}$的方向保持不变，曲线与t轴所包围的面积就是t_1到t_2这段时间内力$\vec{F}$的冲量的大小，根据改变动量的等效性，得到平均力。



(3) 变质量问题

生活中变质量问题，雪球越滚越大，冰雹降落，洒水车等

$\vec{F} = m\vec{a}$不再适用

(4) 惯性系

牛顿力学在惯性系中成立

不同的惯性系，物体的动量不同，但动量定理的形式不变

物体的始末动量用同一个惯性系确定

直角坐标系中

$$\vec{I} = I_x \vec{i} + I_y \vec{j} + I_z \vec{k} \quad \begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

二、质点系的动量定理

第i个质点受到的合外力为 $\vec{F}_{i外}+\sum_{j=1}^{n-1}\vec{f}_{ji}$

对第i个质点运用动量定理有：

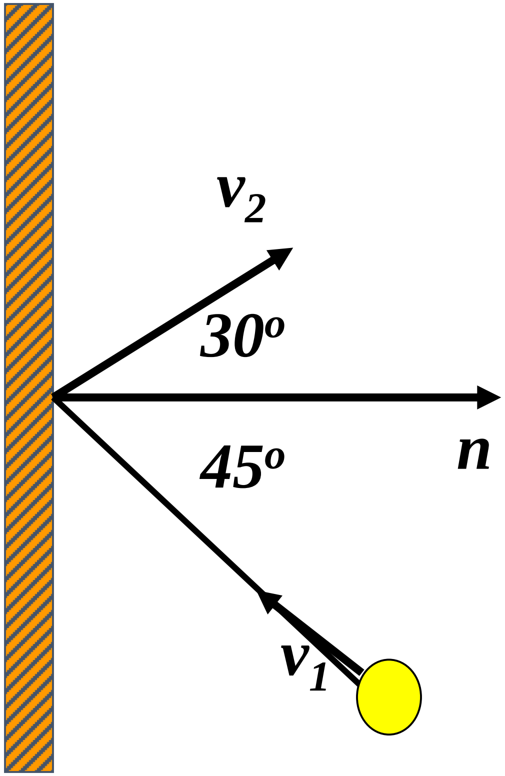
$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_{i外}+\sum_{j=1}^{n-1}\vec{f}_{ji}\right)dt=m_i\vec{v}_{i2}-m_i\vec{v}_{i1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\vec{f}_{ij}\right)dt=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i1}$$

因为： $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\vec{f}_{ij}=0$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\right)dt=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i1}$$

例3.1.1 质量为2.5g的乒乓球以20m/s的速率飞来，被板推挡后，又以10m/s的速率飞出。设两速度在垂直于板面的同一平面内，且它们与板面法线的夹角分别为45º和30º，求：（1）乒乓球得到的冲量；（2）若撞击时间为0.01s，求板施于球的平均冲力的大小和方向。



解：取挡板和球为研究对象，由于作用时间很短，忽略重力影响。设挡板对球的冲力为$\vec{F}$则有：

$$\vec{I} = \int \vec{F} \cdot dt$$

$$= m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

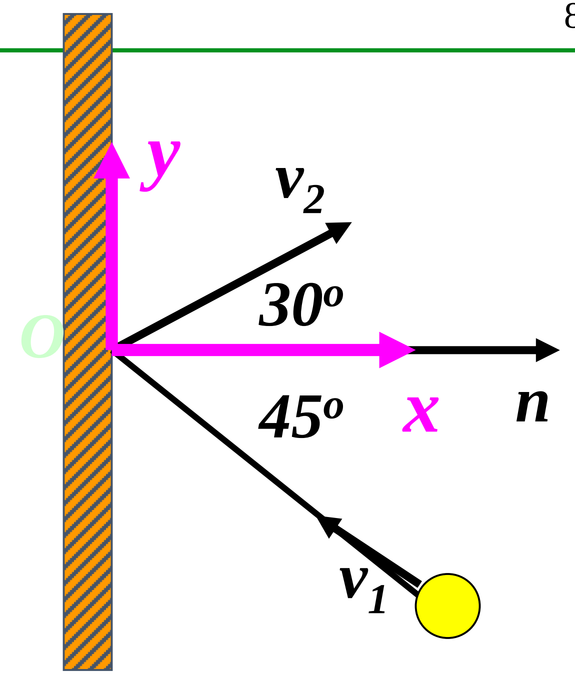
取坐标系，将上式投影，有：

$$I_x = \int F_x dt = mv_2 \cos 30^\circ - (-mv_1 \cos 45^\circ)$$

$$= \overline{F}_x \Delta t$$

$$I_y = \int F_y dt = mv_2 \sin 30^\circ - mv_1 \sin 45^\circ$$

$$= \overline{F}_y \Delta t$$



$$\Delta t = 0.01\mathrm{s} \quad v_1 = 20\mathrm{m/s} \quad v_2 = 10\mathrm{m/s} \quad m = 2.5\mathrm{g}$$

$$\vec{I} = I_x \vec{i} + I_y \vec{j} = 0.057\vec{i} - 0.023\vec{j} \ N \cdot s$$

$$\overline{F}_x = 5.7\mathrm{N} \quad \overline{F}_y = -2.3\mathrm{N} \quad F = \sqrt{\overline{F}_x^2 + \overline{F}_y^2} = 6.15\mathrm{N}$$

$$\tan\alpha = \overline{F}_y / \overline{F}_x = -0.0526 \quad \alpha = -22^\circ$$

α为平均冲力与x方向的夹角。

用矢量法解

$$|\vec{I}| = |\overline{\vec{F}}\Delta t|$$

$$= \sqrt{m^2 v_1^2 + m^2 v_2^2 - 2m^2 v_1 v_2 \cos 105^\circ}$$

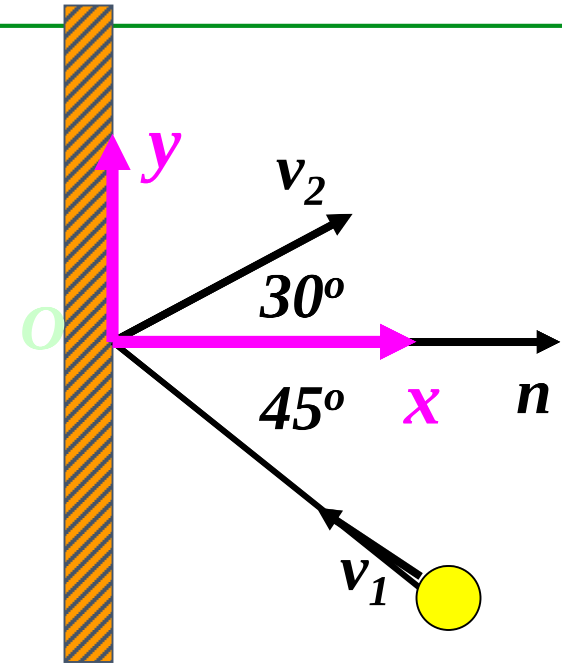
$$= 6.15\times 10^{-2}\ \mathrm{Ns}$$

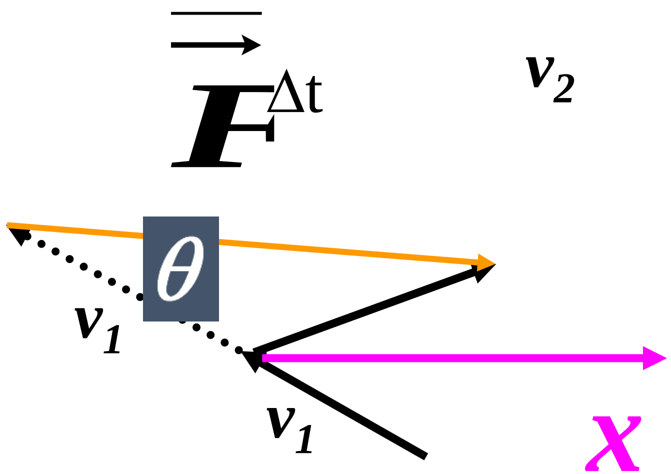
$$|\overline{\vec{F}}| = \left|\frac{\vec{I}}{\Delta t}\right| = 6.15\mathrm{N}$$

$$\frac{m v_2}{\sin\theta} = \frac{\overline{F}\Delta t}{\sin 105^\circ}$$

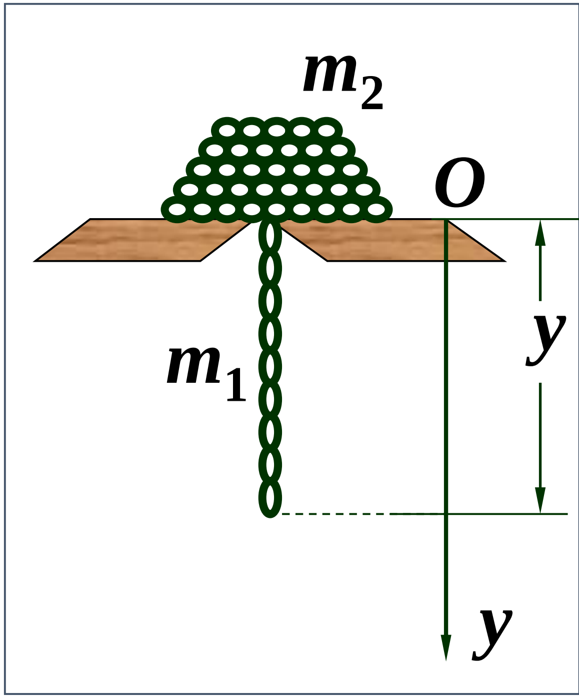
$$\sin\theta = 0.3927 \qquad \theta = 23^\circ$$

$$\therefore \alpha = 23^\circ - 45^\circ = -22^\circ$$





例3.1.2 一柔软链条长为l，单位长度的质量为λ，链条放在有一小孔的桌上，链条一端由小孔稍伸下，其余部分堆在小孔周围．由于某种扰动,链条因自身重量开始下落.求链条下落速度v与y之间的关系．设各处摩擦均不计，且认为链条软得可以自由伸开



解　以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统，建立坐标系

则 $F^{\mathrm{ex}} = m_1 g = \lambda y g$

由质点系动量定理得　$F^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}p$

因$\mathrm{d}p = \mathrm{d}(\lambda y v) = \lambda\,\mathrm{d}(yv)$

$$\therefore\ \lambda y g\mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{d}(yv) \qquad yg = \frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$$

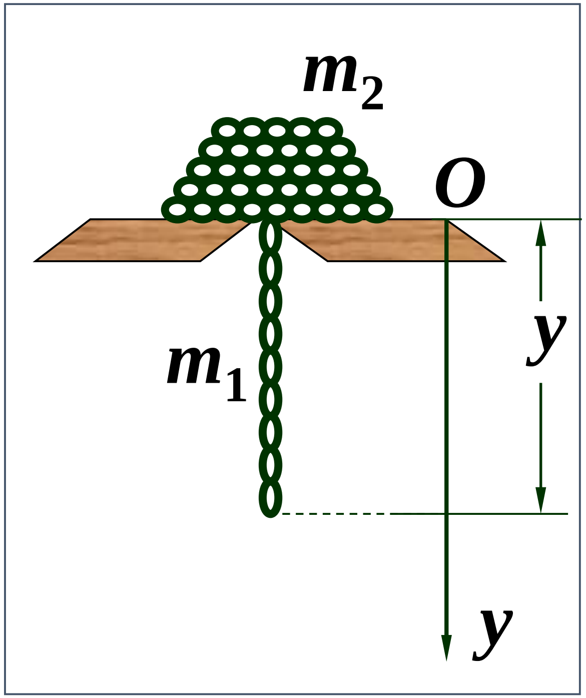
$$yg = \frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{dt}}$$

两边同乘以 $y\,\mathrm{d}y$ 则

$$y^2 g\mathrm{d}y = y\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{dt}} = yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$g\int_0^y y^2\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{yv} yv\,\mathrm{d}(yv)$$

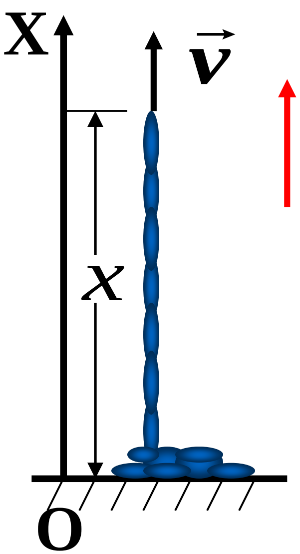
$$\frac{1}{3}gy^3 = \frac{1}{2}(yv)^2 \qquad v = \left(\frac{2}{3}gy\right)^{1/2}$$



练3.1.1 一长为l，密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为λ，将其卷成一堆放在地面上，如图所示。若用手握住链条的一端，以加速度a从静止匀加速上提。当链条端点离地面的高度为x时，求手提力的大小。

解：以链条为系统，向上为X正向，地面为原点建立坐标系。

t时刻，系统总动量 $P = \lambda x v$



$$\frac{dP}{dt} = \frac{d(\lambda x v)}{dt} = \lambda v \frac{dx}{dt} + \lambda x \frac{dv}{dt}$$

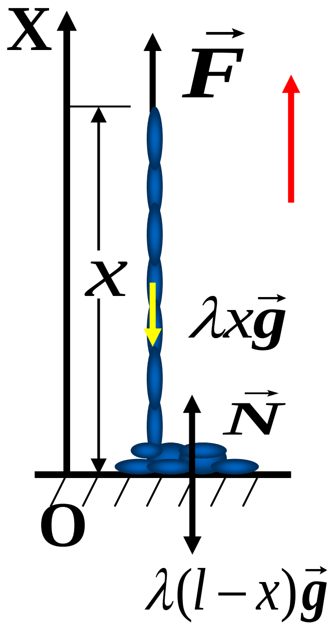
$$= \lambda v^2 + \lambda a x$$

系统动量对时间的变化率为:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 2\lambda ax + \lambda ax = 3\lambda ax$$

t时刻，系统受合外力

$$F - \lambda xg + N - \lambda(l-x)g = F - \lambda xg$$



根据动量定理，得到

$$F - \lambda xg = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 3\lambda ax$$

$$F = \lambda xg + 3\lambda xa$$

三、动量守恒定律

若 $\sum F_{i外}=0$ 则有 $$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i1}=0$$

一个孤立的力学系统（系统不受外力作用）或合外力为零的系统，系统内各质点间动量可以交换，但系统的总动量保持不变。即：动量守恒定律。

1. 在系统外力比内力小得多的情况下，可以近似地应用动量守恒定律。例如，碰撞、爆炸。

2. 如果系统沿某方向所受合外力为零，则可以在此方向应用动量守恒定律。例如，若 $F_x=0$，则 $p_x=$ 常量。

3. 动量守恒定律适用在同一惯性系

碰撞

弹性碰撞

动能守恒

非弹性碰撞

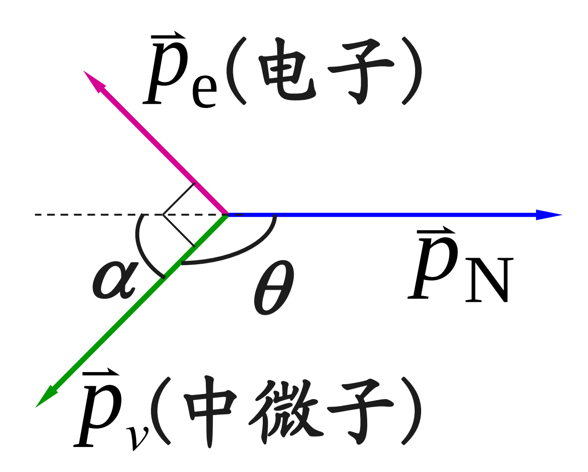
一般非弹性碰撞

完全非弹性碰撞

碰撞后速度相同

动量守恒

例3.1.3　设有一静止的原子核，衰变辐射出一个电子和一个中微子后成为一个新的原子核．已知电子和中微子的运动方向互相垂直，且电子动量为1.2×10^{-22} kg m s^{-1}，中微子的动量为6.4×10^{-23} kg m s^{-1}．问新的原子核的动量的值和方向如何?



解　$\vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_N = 0 \qquad \vec{p}_e \perp \vec{p}_\nu$

$$\therefore p_N = (p_e^2 + p_\nu^2)^{1/2}$$

$$= 1.36\times10^{-22}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

图中 $\alpha = \arctan\dfrac{p_e}{p_\nu} = 61.9^\circ$

或　$\theta = 180^\circ - 61.9^\circ = 118.1^\circ$

Two masses moving along the coordinate axes as shown collide at the origin and stick to each other. What is the angle θ that the final velocity makes with the x-axis?

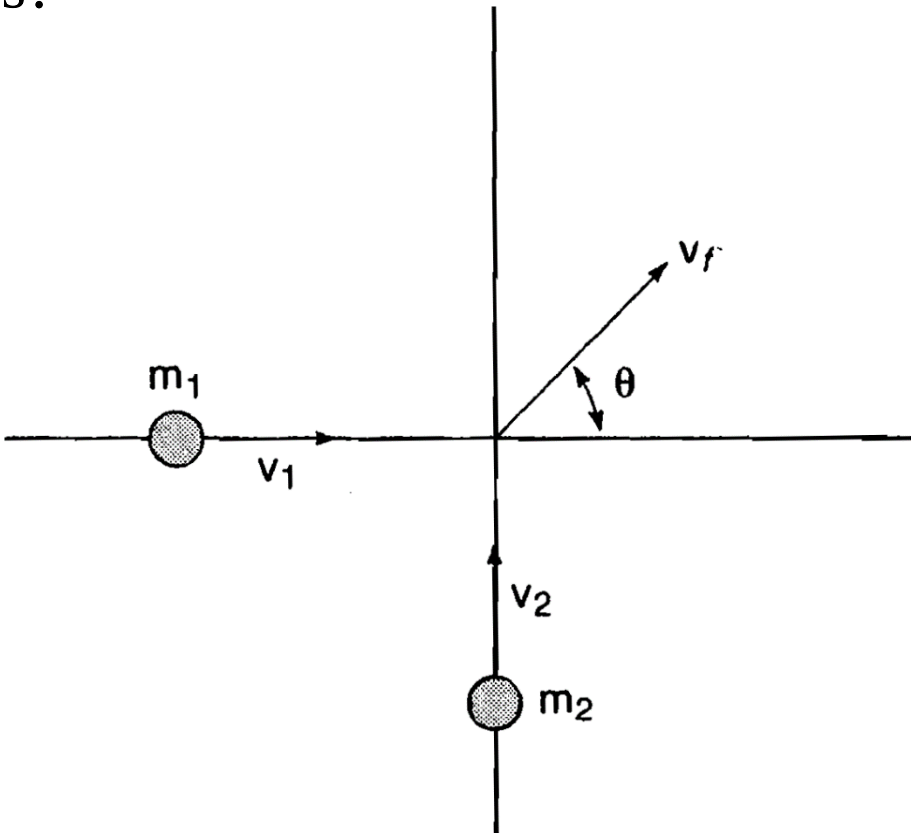
(A) $\tan^{-1}(v_2/v_1)$

(B) $\tan^{-1}[m_1v_1/(m_1 + m_2)]$

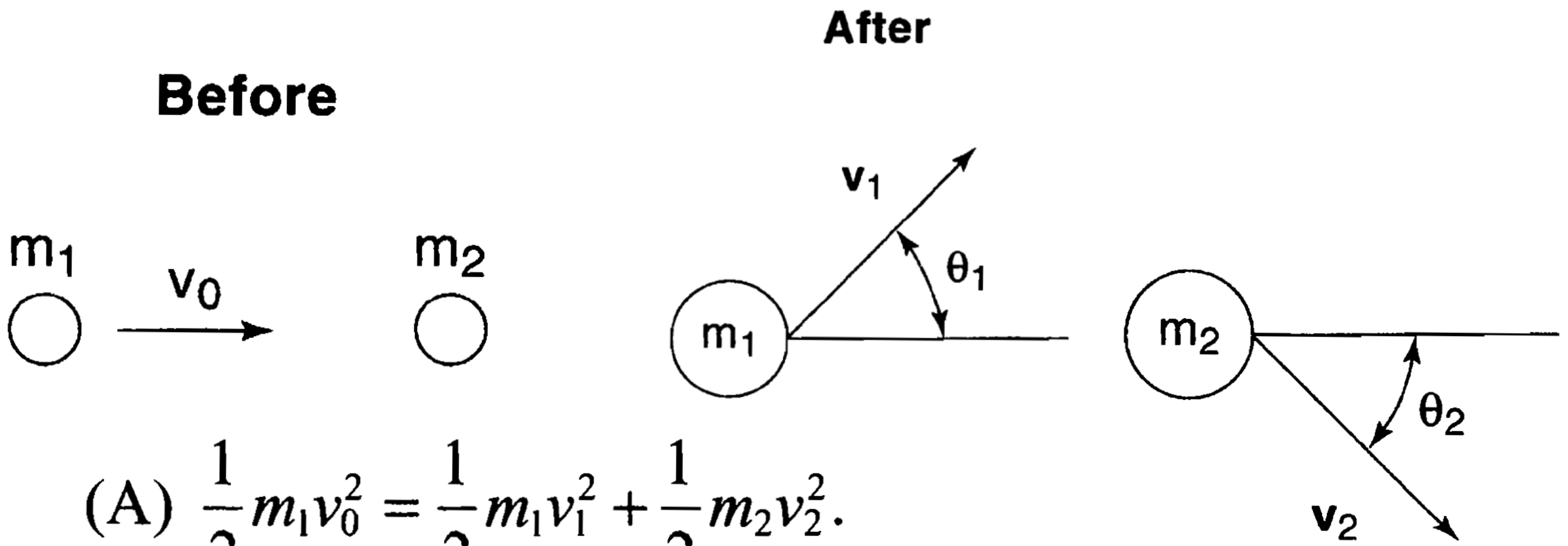
(C) $\tan^{-1}(m_1v_2/m_2v_1)$

(D) $\tan^{-1}(m_2v_2^2/m_1v_1^2)$

(E) $\tan^{-1}(m_2v_2/m_1v_1)$



Mass m_1 moving with initial speed v_0 has a glancing collision with a second mass m_2 initially at rest, as shown in Figure 6.7. Which of the following statements is necessarily true?



(A) $\frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$.

(B) If $v_1 < v_2$, then $\theta_1 < \theta_2$.

(C) If $m_1v_1 < m_2v_2$, then $\theta_1 < \theta_2$.

(D) If $m_1v_1 < m_2v_2$, then $\theta_2 < \theta_1$.

(E) None of the above are true.

A mass m_1 initially moving at a speed v_0 collides with and sticks to a spring attached to a second, initially stationary mass m_2 (Figure 6.8). The two masses continue to move to the right on a frictionless surface as the length of the spring oscillates. At the instant that the spring is maximally extended, the velocity of the first mass is

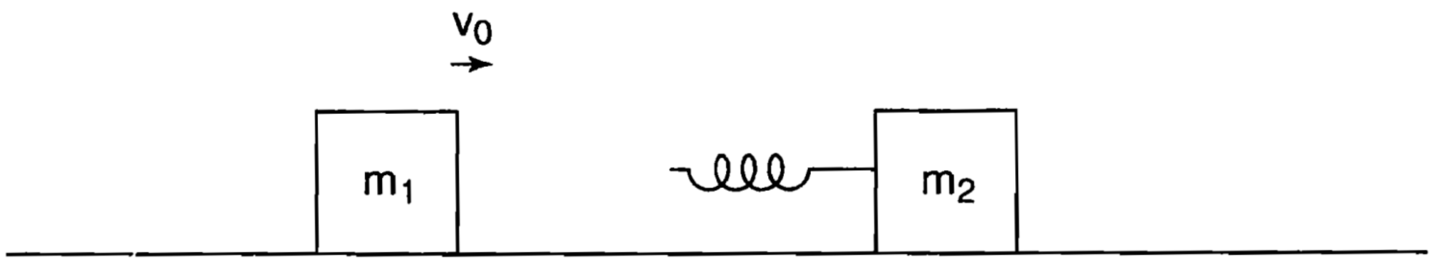


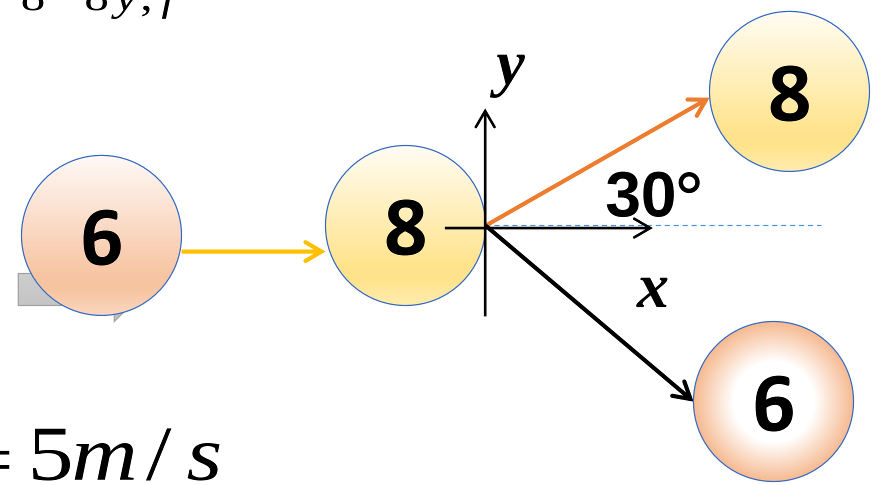
Figure 6.8

(A) v_0
(B) $m_1^2 (v_0)/(m_1 + m_2)^2$
(C) $m_2(v_0)/m_1$
(D) $m_1(v_0)/m_2$
(E) $m_1(v_0)/(m_1 + m_2)$

练3.1.2 在台球桌上，六号球以10m/s 的速度和静止的八号球发生弹性碰撞，碰撞后八号球运动方向如图所示，求碰撞后六号球运动的方向和大小?

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_6 v_{6,0}{}^2 + \frac{1}{2}m_8 v_{8,0}{}^2 = \frac{1}{2}m_6 v_{6,f}{}^2 + \frac{1}{2}m_8 v_{8,f}{}^2 \\ m_6 v_{6x,0} + m_8 v_{8x,0} = m_6 v_{6x,f} + m_8 v_{8x,f} \\ m_6 v_{6y,0} + m_8 v_{8y,0} = m_6 v_{6y,f} + m_8 v_{8y,f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10^2 = v_{6,f}{}^2 + v_{8,f}{}^2 \\ 10 = v_{6,f}\cos\theta + v_{8,f}\cos 30° \\ 0 = v_{6,f}\sin\theta - v_{8,f}\sin 30° \end{cases}$$



$$\begin{cases} v_{6,f} = 5m/s \\ \theta = 60° \end{cases}$$

作业：8 15

作业(五)：8 13

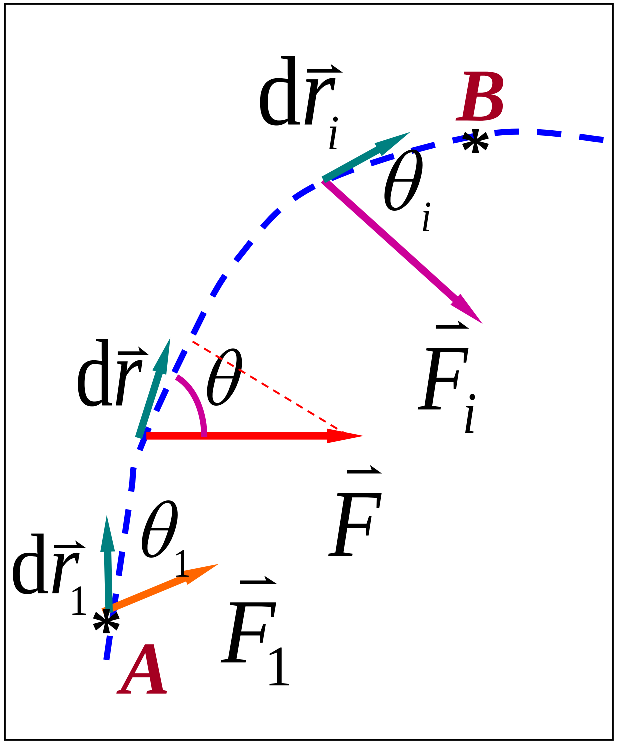
3.4 动能定理

一、功、功率

1、功

力对质点所作的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积.（功是标量，过程量）

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\cos\theta \mathrm{d}s$$

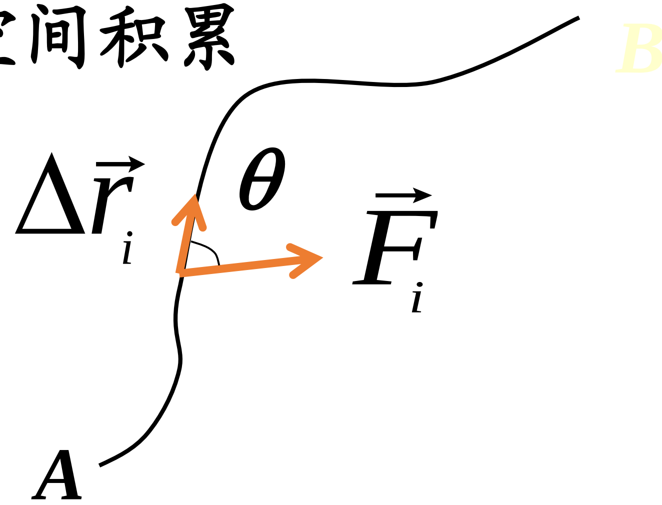


$$0° < \theta < 90°, \quad \mathrm{d}W > 0$$

$$90° < \theta < 180°, \quad \mathrm{d}W < 0$$

$$\theta = 90° \quad \vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r} \quad \mathrm{d}W = 0$$

$$W = \int_{\Gamma} dW = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ 功——力的空间积累



直角坐标系中

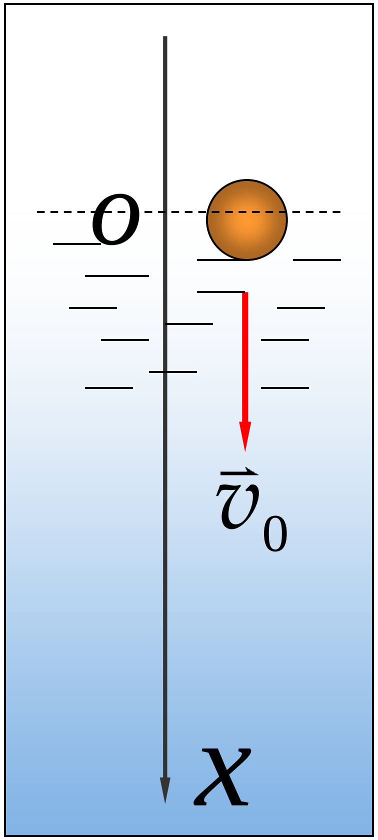
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$W = \int_a^b \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

$$= \int_{x_0}^{x} F_x dx + \int_{y_0}^{y} F_y dy + \int_{z_0}^{z} F_z dz$$

例3.4.1一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为 v_0．设此球在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力为 $F_r=-bv$，b 为一常量．求阻力对球作的功与时间的函数关系．



解　建立如右图所示的坐标系

$$W=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int -bv\,\mathrm{d}x=-\int bv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=-b\int v^2\mathrm{d}t$$

又由 2 - 4 节例 5 知　$v=v_0\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}$

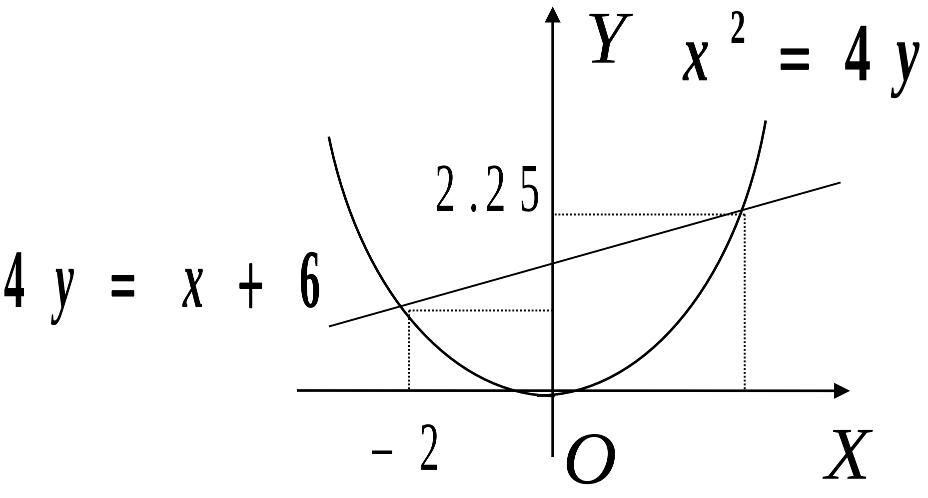
$$\therefore W=-bv_0^2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}\mathrm{d}t$$

$$W=\frac{1}{2}mv_0^2(\mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}-1)$$

练3.4.1 作用在质点上的力为$\vec{F} = 2y\vec{i} + 4\vec{j}\,(N)$在下列情况下求质点从$x_1 = -2\,(m)$处运动到$x_2 = 3\,(m)$处 该力做的功:

1. 质点的运动轨道为抛物线 $x^2 = 4y$

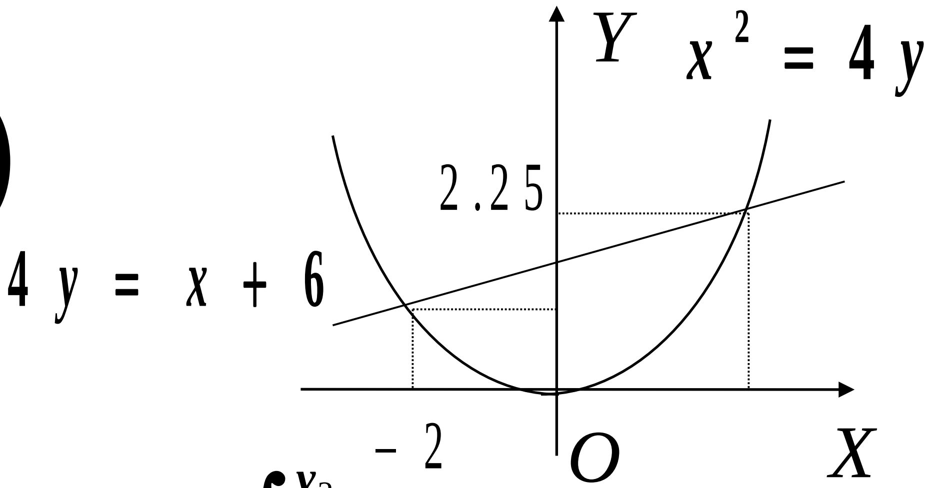
2. 质点的运动轨道为直线 $4y = x + 6$



$$W = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$= \int_a^b \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)$$

$$\vec{F} = 2y\vec{i} + 4\vec{j}(N)$$



$$W_1 = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} (F_x dx + F_y dy) = \int_{x_1}^{x_2} 2y dx + \int_{y_1}^{y_2} 4dy$$

$$= \int_{-2}^{3} \frac{x^2}{2} dx + \int_{1}^{9/4} 4dy = 10.8J$$

$$W_2 = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} (F_x dx + F_y dy) = \int_{x_1}^{x_2} 2y dx + \int_{y_1}^{y_2} 4dy$$

$$= \int_{-2}^{3} \frac{1}{2}(x+6) dx + \int_{1}^{9/4} 4dy = 21.25J$$

做功与路径有关

2、功率 力在单位时间内所作的功

平均功率：$\overline{P} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$

瞬时功率：$P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \dfrac{dW}{dt}$

$\therefore dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\therefore P = \vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

瞬时功率等与力与物体速度的标积

单位：瓦特 W

二、动能定理

$$\boxed{W=\int dW=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=m\vec{a}\cdot d\vec{r}=m(a_x dx+a_y dy+a_z dz)$$

$$=m(\frac{dv_x}{dt}dx+\frac{dv_y}{dt}dy+\frac{dv_z}{dt}dz)$$

$$=m(v_x dv_x+v_y dv_y+v_z dv_z)$$

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int m(v_x dv_x+v_y dv_y+v_z dv_z)$$

$$=m[\frac{v_x^2}{2}+\frac{v_y^2}{2}+\frac{v_z^2}{2}]_{v_1}^{v_2}$$

$$\boxed{W=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}}$$

$$W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int F\cos\theta\left|d\vec{r}\right|=\int F_{\tau}\left|d\vec{r}\right|=\int F_{\tau}ds$$

$$F_{\tau}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{W}=\int_{1}^{2}\boldsymbol{m}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}}\mathbf{d}\boldsymbol{s}=\int_{v_1}^{v_2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}\mathbf{d}\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}_2^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}_1^2$$

质点的动能 $$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

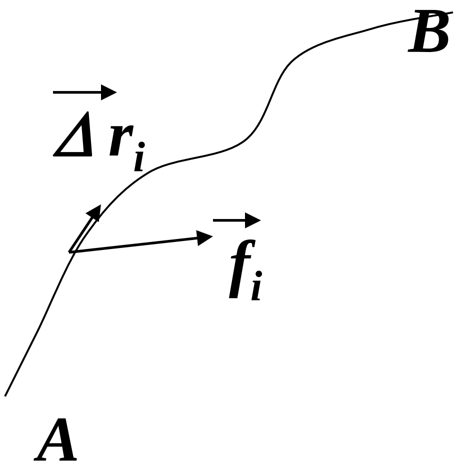
质点系统的动能

$$E_k=\sum_i E_{ki}=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2 \qquad i=1,2,\dots,n$$

质点的动能定理

物体受外力作用 → 运动状态变化 → 动能变化

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。



$$W_{1-2}=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

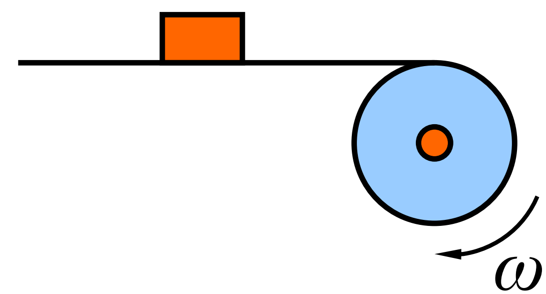
$$=\underbrace{\frac{1}{2}mv_2^{\ 2}}_{\text{末态动能}}-\underbrace{\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}}_{\text{初态动能}}=E_{K2}-E_{K1}$$

功是质点动能变化的量度

功 ⇓ 过程量

动能 ⇓ 状态量

选择：一水平传送皮带受电动机驱动匀速运动，在传送带上轻轻放置一砖块，则在砖刚被放到皮带上到与传送带共同运动的过程中，

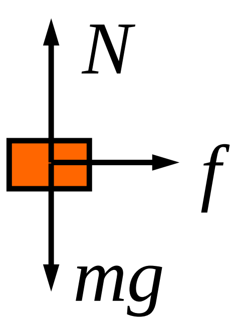


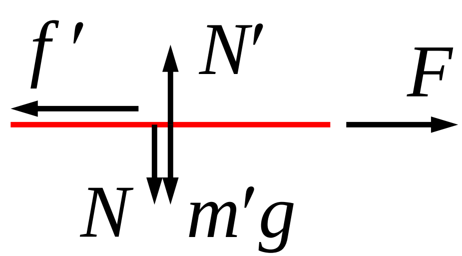
A. 摩擦力对皮带做的功与摩擦力对砖块做的功等值反号。

B. 驱动力的功与摩擦力对砖块做的功之和等于砖块获得的动能。

C. 驱动力的功与摩擦力对皮带的功之和为零。

D. 驱动力的功等于砖块获得的动能。





$$f=-f' \qquad W_f=E_{\text{k砖}}$$

$$|W_f|=|f\Delta s|<|f'\Delta s'|=|W_{f'}|$$

$$W_F+W_{f'}=\Delta E_{\text{k皮带}}=0$$ 选 C.

练3.4.2 质量为2kg的质点在力 $\vec{F}=12t\vec{i}$ (SI),的作用下，从静止出发，沿x轴正向作直线运动。求前三秒内该力所作的功。

解：（一维运动可以用标量）

$$W=\int \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int 12tvdt$$

$$v=v_0+\int_0^t adt=0+\int_0^t \frac{F}{m}dt=\int_0^t \frac{12t}{2}dt=3t^2$$

$$\therefore W=\int_0^3 12t\cdot 3t^2dt=\int_0^3 36t^3dt=9t^4=729J$$

$$t=3,\quad v_2=27;t=0,\quad v_1=0$$

$$\therefore W=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=\frac{1}{2}\times 2\times 27^2=729J$$

3.5 保守力与非保守力 势能

一 保守力 非保守力

1、保守力

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

某些力对质点做功的大小只与质点的始末位置有关，而与路径无关。这种力称为保守力。

典型的保守力：　重力、万有引力、弹性力

与保守力相对应的是耗散力

典型的耗散力：　摩擦力

2、重力的功

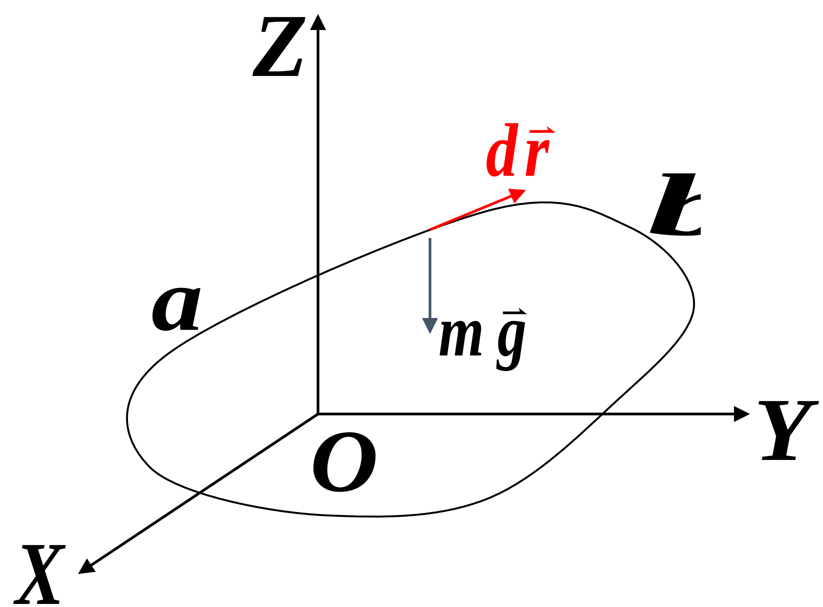
m在重力作用下由a运动到b，取地面为坐标原点.

$$W_G = \int_a^b m\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_a^b (-mg)\vec{k}\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= \int_{z_a}^{z_b} -mg\,dz$$

$$= \underbrace{mgz_a}_{\text{初态量}} - \underbrace{mgz_b}_{\text{末态量}}$$



可见，重力是保守力。

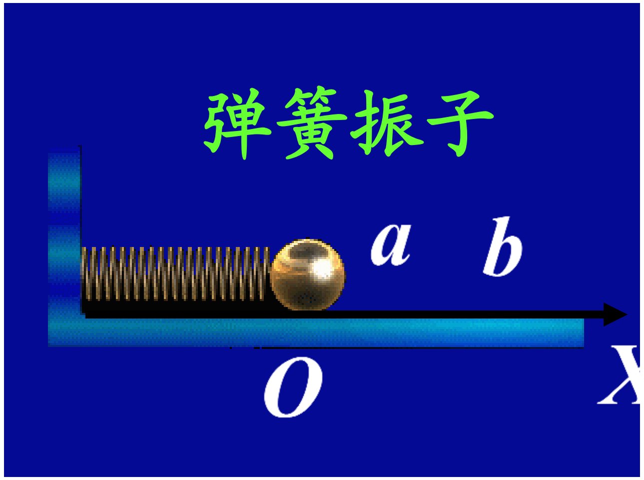
3、弹力的功

$$F = -kx$$

$$W = \int_{x_a}^{x_b} -kx dx = -(\frac{1}{2}k{x_b}^2 - \frac{1}{2}k{x_a}^2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}k{x_a}^2}_{\text{初态量}} - \underbrace{\frac{1}{2}k{x_b}^2}_{\text{末态量}}$$

可见，弹性力是保守力。



4、引力的功

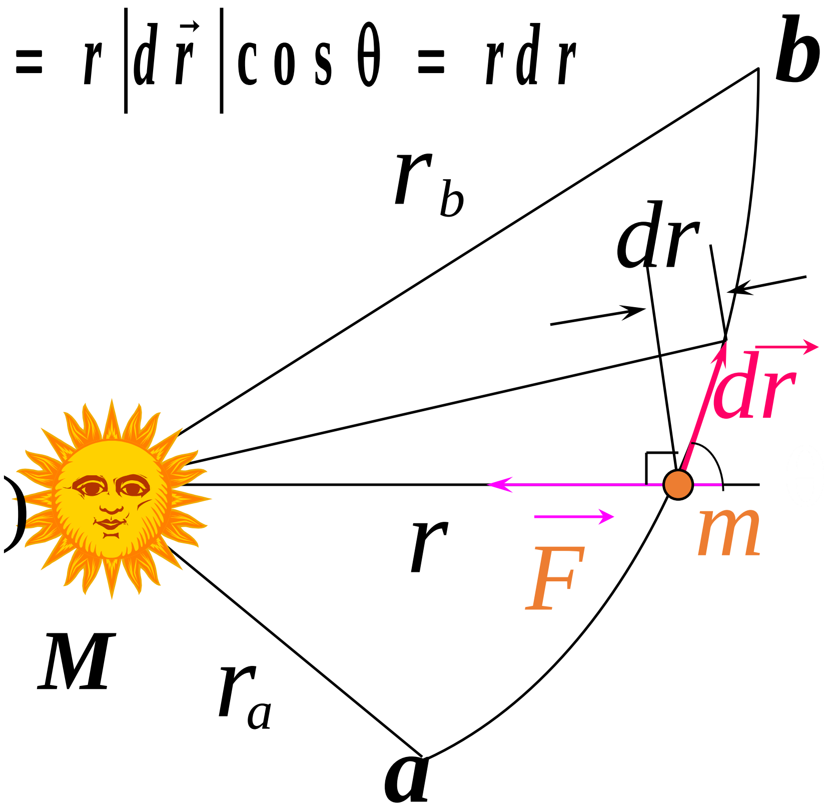
两个质点之间在引力作用下相对运动时，以M所在处为原点,M指向m的方向为矢径的正方向。m受的引力方向与矢径方向相反。

$$W=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{r}\cdot d\vec{r}=r\left|d\vec{r}\right|\cos\theta=r\,dr$$

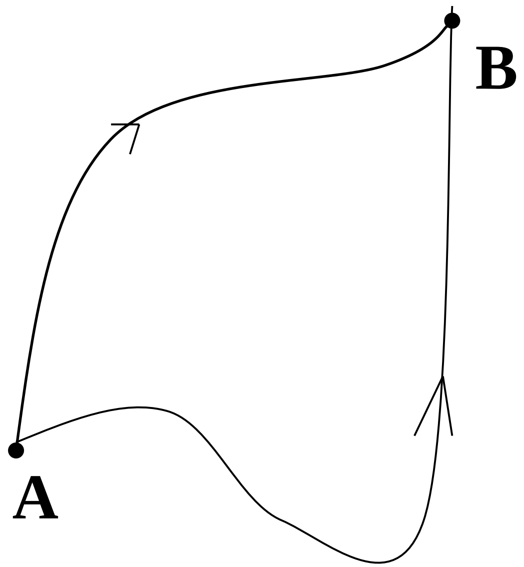
$$=\int_{r_a}^{r_b}-GMm\frac{1}{r^2}dr$$

$$=-GMm\frac{1}{r_a}-(-GMm\frac{1}{r_b})$$



可见万有引力是保守力。

二 势能、势函数



在受保守力的作用下，质点从$A \rightarrow B$，所做的功与路径无关，而只与这两点的位置有关。可引入一个只与位置有关的函数，A点的函数值减去B点的函数值，定义为从$A \rightarrow B$保守力所做的功，该函数就是势能函数。

$$W_{AB} = E_{PA} - E_{PB}$$ 定义了势能差

选参考点（势能零点），设 $E_{PB} = 0$ $W_{AB} = E_{PA}$

$$\boxed{E_{pA} = \int_{A}^{\text{势能零点}} \vec{F}_{\text{保}} \bullet d\vec{r}}$$

$$\left.\begin{aligned} W_G &= mgz_a - mgz_b \\ W_f &= (-G\frac{Mm}{r_a}) - (-G\frac{Mm}{r_b}) \\ W_s &= \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} W_{保} &= \int_a^b \vec{F}_{保} \bullet d\vec{r} \\ &= E_{p_a} - E_{p_b} \\ &= -\Delta E_p \end{aligned}$$

保守力<u>做正功</u>等于相应势能的<u>减少</u>;

保守力<u>做负功</u>等于相应势能的<u>增加</u>。

比较

$$W = \frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = E_{KB} - E_{KA} = \Delta E_K$$

外力<u>做正功</u>等于相应动能的<u>增加</u>;

外力<u>做负功</u>等于相应动能的<u>减少</u>。

重力势能（以地面为零势能点）

$$E_p = \int_y^0 -mg\,dy = -mg(0-y) = mgy$$

弹性势能（以弹簧原长为零势能点）

$$E_p = \int_x^0 -kx \cdot dx = -(0-\frac{1}{2}kx^2) = \frac{1}{2}kx^2$$

引力势能（以无穷远为零势能点）

$$E_P = \int_r^\infty -G\frac{Mm}{r^2}dr = -GMm\frac{1}{r}$$

势能只具有相对意义

质点在某一点的势能大小等于在相应的保守力的作用下，由所在点移动到零势能点时保守力所做的功。

系统的机械能 $E = E_k + E_p$

注意：

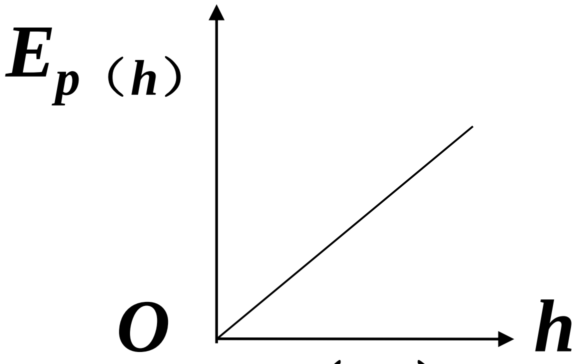
1、计算势能必须规定零势能参考点。势能是相对量，其量值与零势能点的选取有关。

2、势能函数的形式与保守力的性质密切相关，对应于一种保守力的函数就可以引进一种相关的势能函数。

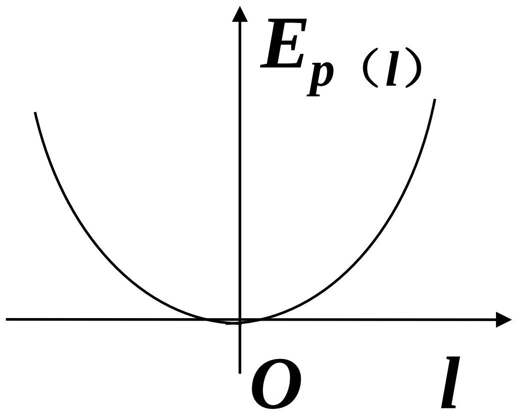
3、势能是属于以保守力形式相互作用的物体系统所共有的。

4、对保守力的功等于相关势能增量的负值。因此，保守力做正功时，系统势能减少；保守力做负功时，系统势能增加。

三、势能曲线

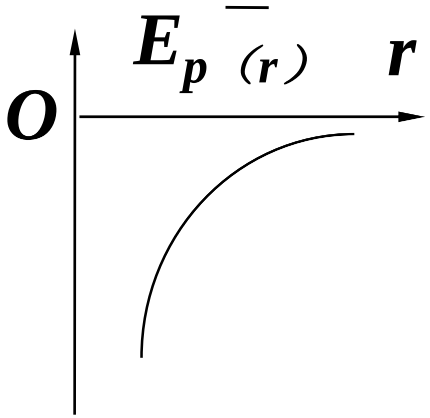


（a）



（b）

1 2 E_p



（c）

几种典型的势能曲线

势能曲线:势能随位置变化的曲线

（a）重力势能曲线

（b）弹性势能曲线

（c）引力势能曲线

势能曲线提供的信息

1、质点在轨道上任意位置时，
质点系所具有的势能值。

2、势能曲线上任意一点的斜率 $\left(dE_p/dl\right)$ 的负值，
表示质点在该处所受的保守力

练3.5.1 由万有引力做功导出重力势能函数 $Ep = mgh$ 。

解:

取地表为势能零点，则

$$E_{\mathrm{pA}} = W_{\mathrm{A}\to\text{势能零点}} = \int_{\mathrm{A}}^{\text{势能零点}} -\frac{GmM}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{R+h}^{R} -\frac{GmM}{r^2}dr = \frac{GmM}{R} - \frac{GmM}{R+h}$$

$$= GmM\frac{h}{R(R+h)} \approx \frac{GmMh}{R^2} = mgh$$

其中用到 $h << R$，并且重力加速度 $g = \dfrac{GM}{R^2}$ 。

练3.5.2 一特种弹簧，当其从平衡位置被拉伸长度为*x*时回复力大小表达式为*F*=-*ax*-*bx*², a、b都是正常数，求这个弹簧势能的表达式。

$$\boxed{E_{pA} = \int_{A}^{\text{势能零点}} \vec{F}_{\text{保}} \bullet d\vec{r}}$$

$$E_{pA} = \int_{A}^{\text{势能零点}} \vec{F}_{\text{保}} \bullet d\vec{r} = \int_{x}^{0} (-ax - bx^2)\vec{i} \bullet dx\vec{i}$$

$$= \int_{x}^{0} -(ax + bx^2) \bullet dx$$

$$= \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}bx^3$$

作业： 19 22

作业(五)： 17 19

3.6 功能原理 机械能守恒 能量守恒

一、质点系的动能定理与功能原理

对第*i*质点运用动能定理:

$$\int_1^2 \vec{F}_{i外} \bullet d\vec{r}_i + \int_1^2 \vec{f}_{ij} \bullet d\vec{r}_i = \frac{1}{2}m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i1}^2$$

对所有质点求和可得:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_1^2 \vec{F}_{i外} \bullet d\vec{r} + \sum_{i=1}^{n}\int_1^2 \vec{f}_{ij} \bullet d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_{i2}^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_{i1}^2$$

注意: 不能先求合力，再求合力的功;

只能先求每个力的功，再对这些功求和。

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{1}^{2}\vec{F}_{i外}\bullet d\vec{r}+\sum_{i=1}^{n}\int_{1}^{2}\vec{f}_{ij}\bullet d\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_{i2}^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_{i1}^2$$

<u>质点系的动能定理</u> $W_{外}+W_{内非}+W_{内保}=E_{K2}-E_{K1}$

质点系总动能的增量等于外力的功与质点系内保守力的功和质点系内非保守力的功三者之和。

$$W_{内保}=-(E_{P2}-E_{P1})=-\Delta E_P$$

$W_{外}+W_{内非}\neq 0$ $W_{外}+W_{内非}=(E_{K2}-E_{K1})+(E_{P2}-E_{P1})$

$$W_{外}+W_{内非}=E_2-E_1$$

外力对系统和系统非保守内力做功之和等于系统机械能的增量。

二、机械能守恒定律

若$W_{外}+W_{内非}>0$ 系统的机械能增加

若$W_{外}+W_{内非}<0$ 系统的机械能减少

若$W_{外}+W_{内非}=0$ 系统的机械能保持不变

当$W_{外}=0$时：

若$W_{内非}>0$ 系统的机械能增加

若$W_{内非}<0$ 系统的机械能减少

若$W_{内非}=0$ 系统的机械能保持不变

当外力对系统做功为零和系统非保守内力做功为零时，系统的机械能守恒。

- 一个质点

$$W_{net} = \int \vec{F}_{net} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{net} = -\Delta E_p = \Delta E_k$$

$$E = E_k + E_p$$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

所有的力都是保守力

$$\Delta E = W_{\text{非保守力}}$$

$$\boxed{\mathrm{E}_{k1} + E_{p1} + W_{\text{非保守力}} = \mathrm{E}_{k2} + E_{p2}}$$

功–能量原理，适用所有情况

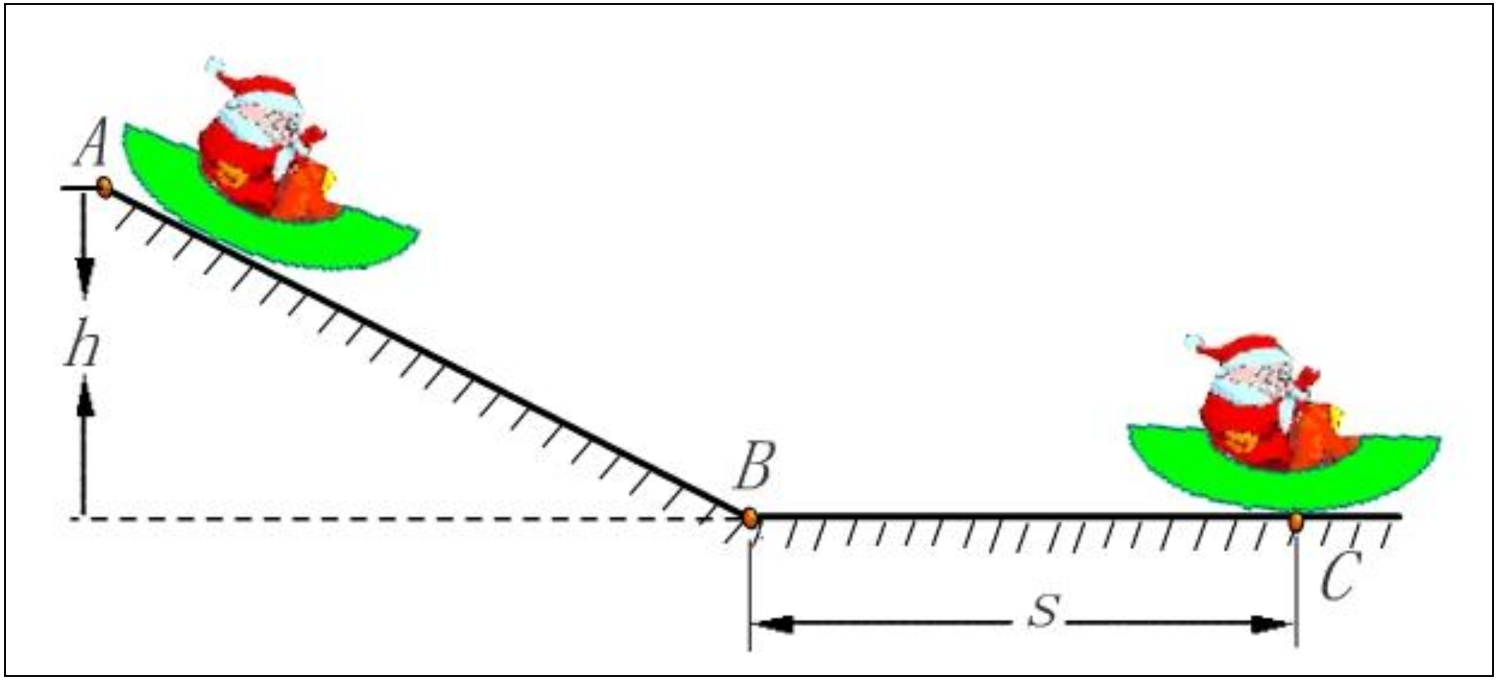
三 能量转换与守恒定律:

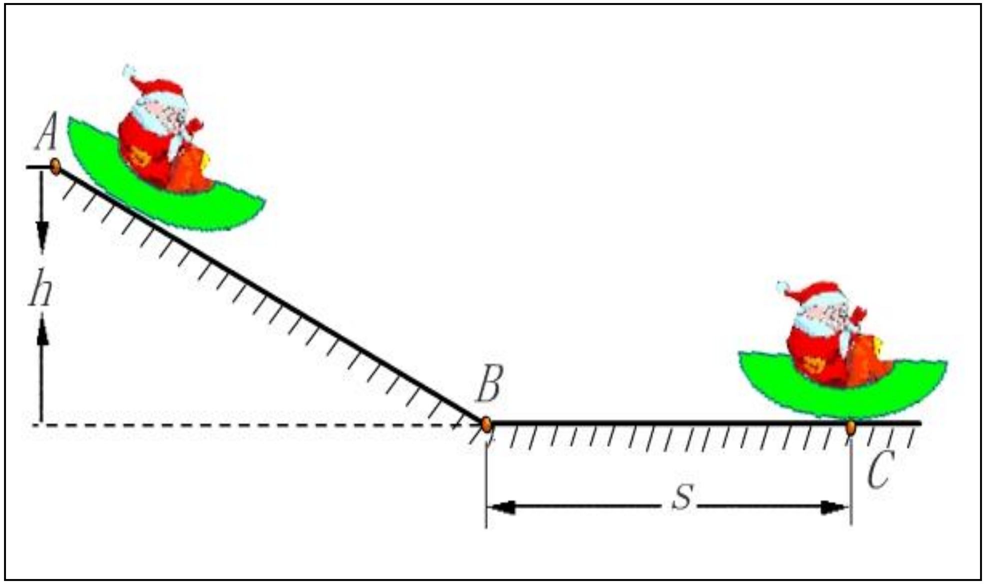
能量不能消失，也不能凭空产生，只能从一种形式转化为另一种形式，或从一个物体传到另一个物体。

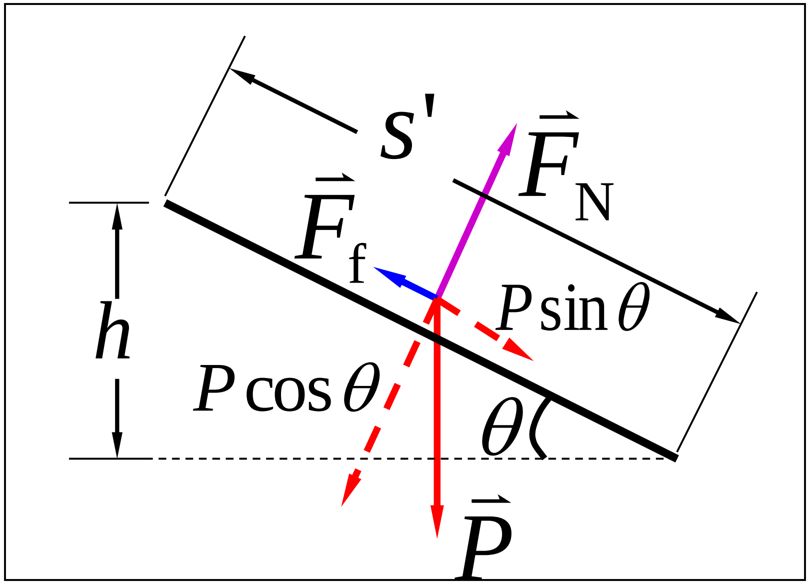
(1) 功是能量转化的手段，而能量是系统对外做功的本领。能量是与系统状态相联系的，而做功是与系统变化过程相联系的。

(2) 与外界没有任何联系的系统称为封闭系统(或孤立系统)。封闭系统所有能量的总和是守恒的。

例 3.6.1 一雪橇从高度为50m 的山顶上点A沿冰道由静止下滑,山顶到山下的坡道长为500m . 雪橇滑至山下点B后,又沿水平冰道继续滑行,滑行若干米后停止在C处 . 若摩擦因数为0.050 . 求此雪橇沿水平冰道滑行的路程 . (点B附近可视为连续弯曲的滑道.忽略空气阻力 .)







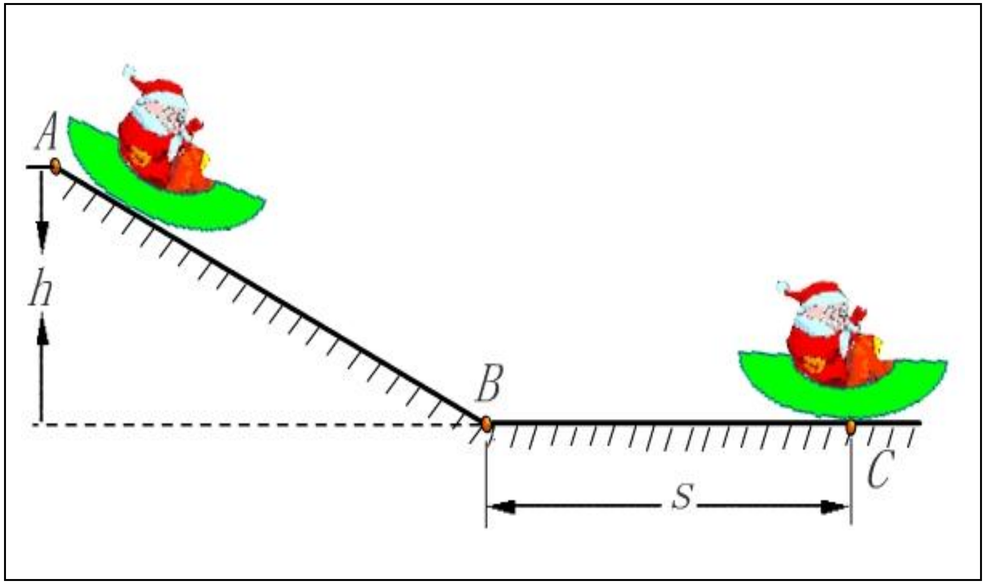
已知 $h = 50\mathrm{m}$, $\mu = 0.050$, $s' = 500\mathrm{m}$, 求 s.

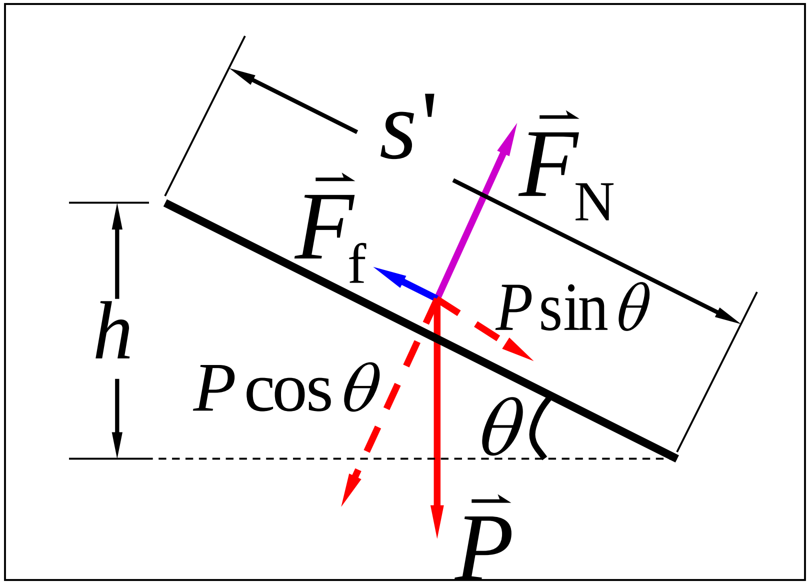
解 以雪橇、冰道和地球为一系统，由功能原理得

$$W_{\mathrm{f}} = E_2 - E_1$$

$$\because \quad W_{\mathrm{f}} = -\mu mg\cos\theta\, s' - \mu mgs \approx -\mu mg(s'+s)$$

又 $$\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1 = (0+0) - (0+\boldsymbol{mgh}) = -\boldsymbol{mgh}$$





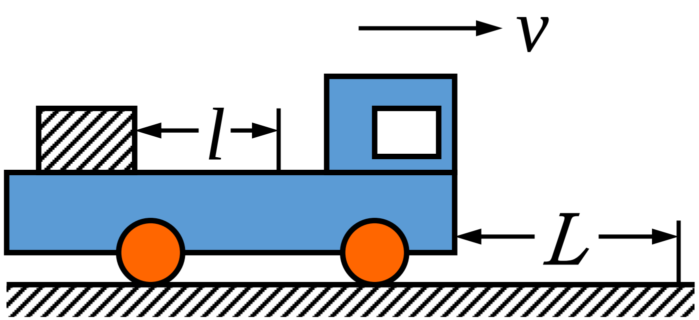
$$h = 50\mathrm{m}\,,\ \mu = 0.050\,,\ s' = 500\mathrm{m}\,,\ W_{\mathrm{f}} \approx -\mu mg(s'+s)$$

由功能原理 $$W_{\mathrm{f}} = E_2 - E_1$$

可得 $$-\mu mg(s'+s) = -mgh$$

代入已知数据有 $$s = h/\mu - s' = 500\mathrm{m}$$

练3.6.1　卡车 M 载着木箱 m 以速度 v 沿平直路面行驶。突然刹车，车轮立即停止转动，卡车向前滑行了一段距离 L，同时木箱也相对于卡车滑行了距离 l 后才停下来。已知木箱与卡车间、卡车与地面间的滑动摩擦系数分别为 μ_1 和 μ_2，试求卡车滑行的距离 L。



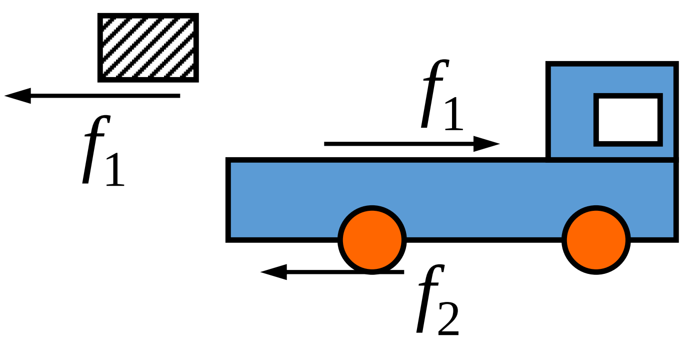
解：把卡车和木箱作为质点系

内力和外力的功等于动能增量

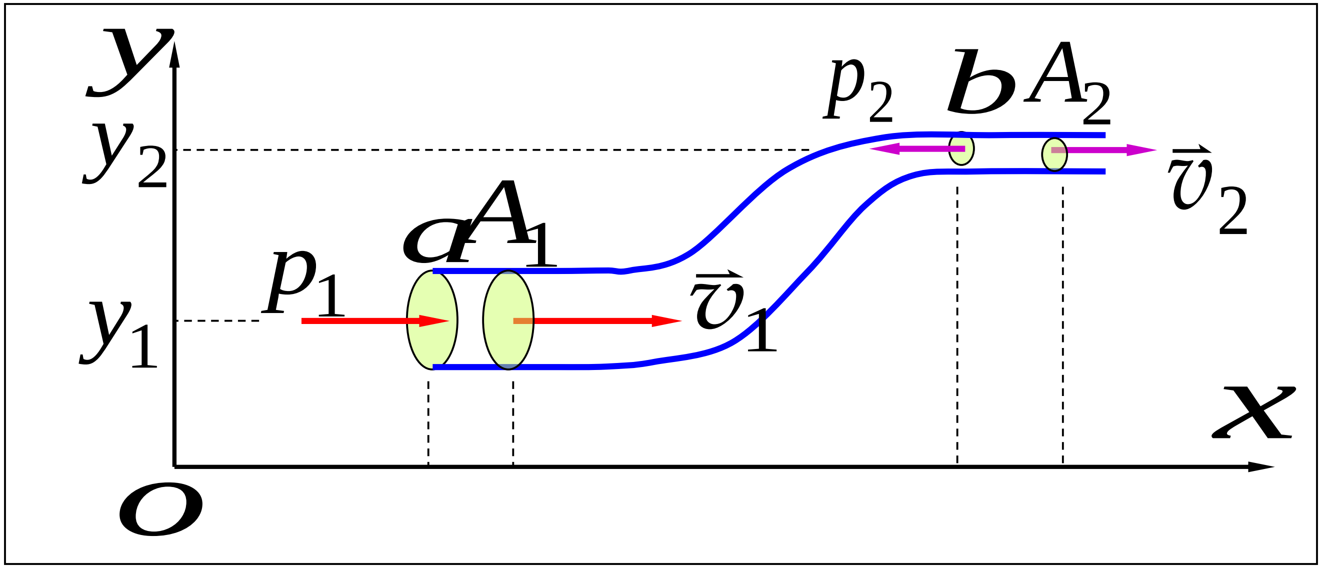
$$-f_1 l - f_2 L = -\frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$L = \frac{\frac{1}{2}(m+M)v^2 - f_1 l}{f_2}$$

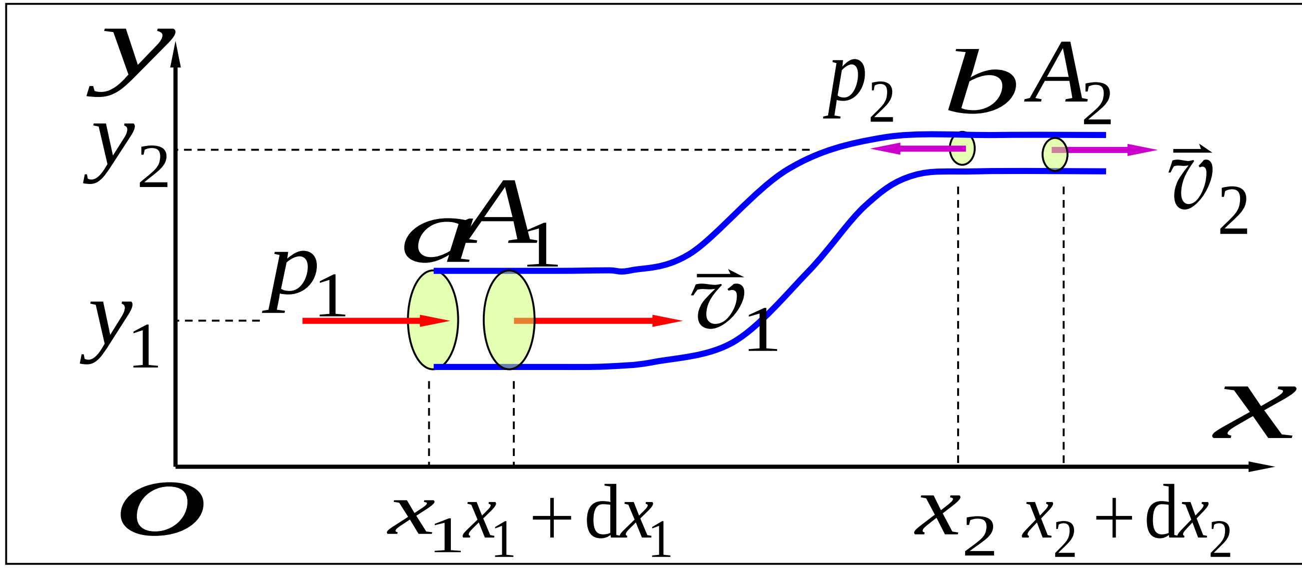
$$= \frac{\frac{1}{2}(m+M)v^2 - \mu_1 mgl}{\mu_2(m+M)g}$$



例3.6.2　如图，在一弯曲管中，稳流着不可压缩的密度为 ρ 的流体. $p_a = p_1, S_a = A_1$, $p_b = p_2$, $S_b = A_2$, $v_a = v_1, v_b = v_2$ 求流体的压强 p 和速率 v 之间的关系.



解 取如图所示坐标，在dt时间内a,b处流体分别移动dx_1,dx_2



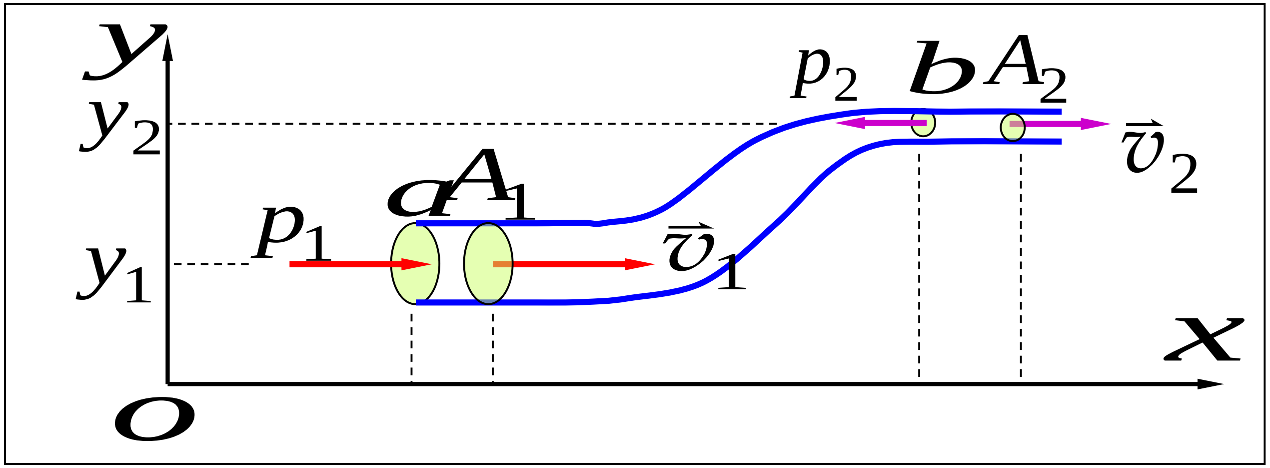
$$\mathrm{d}W_p = p_1A_1\mathrm{d}x_1 - p_2A_2\mathrm{d}x_2 \qquad A_1\mathrm{d}x_1 = A_2\mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}V$$

$$\therefore \mathrm{d}W_p = (p_1 - p_2)\mathrm{d}V$$

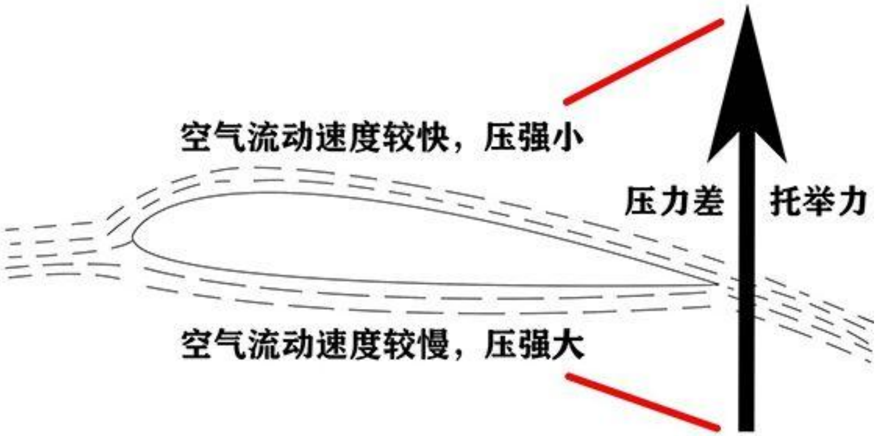
$$\mathrm{d}\boldsymbol{W}_g = -\mathrm{d}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1) = -\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{V}$$

$$(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\mathbf{d}\boldsymbol{V}-\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1)\mathbf{d}\boldsymbol{V} = \frac{1}{2}(\rho\mathrm{d}V)v_2^2 - \frac{1}{2}(\rho\mathrm{d}V)v_1^2$$

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \text{常量}$$



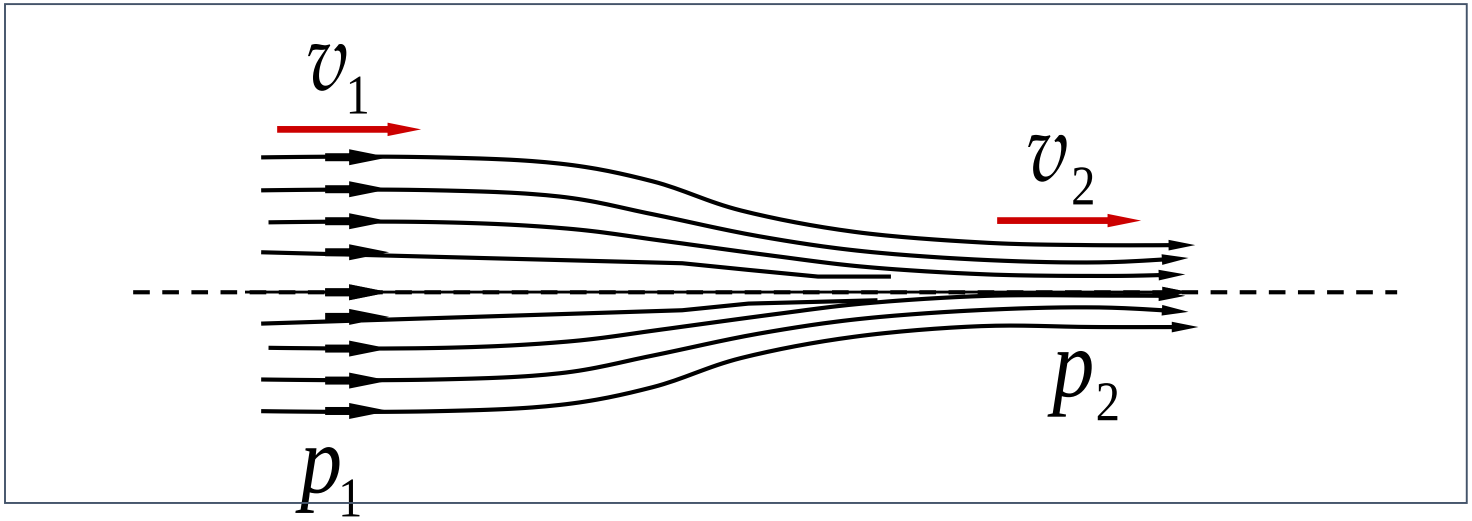
- 伯努利方程 $p+\rho gy+\frac{1}{2}\rho v^{2}=$常数



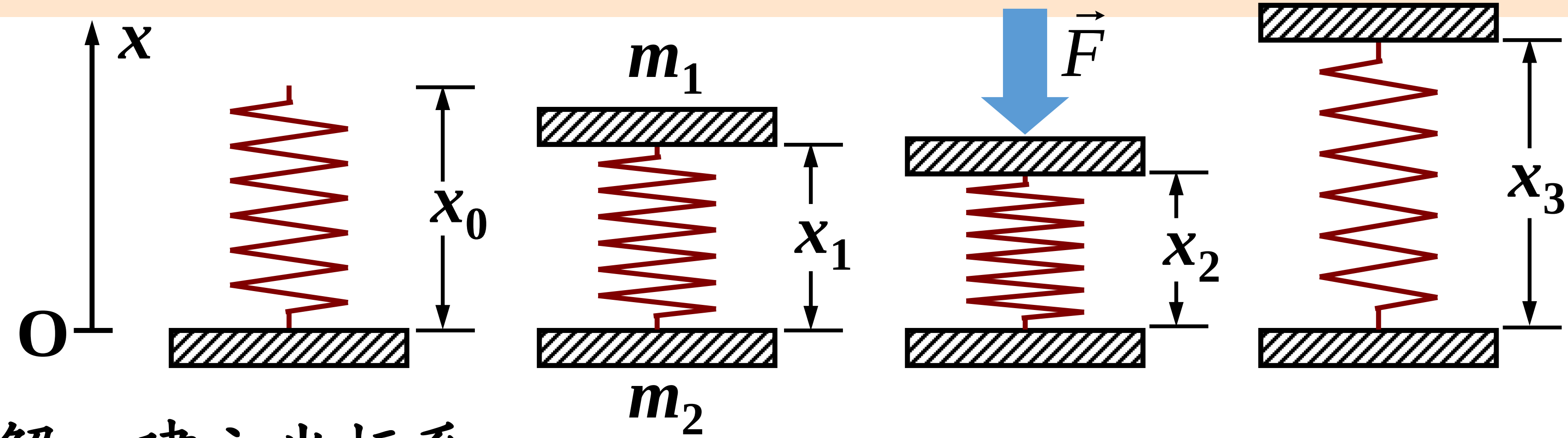
若将流管放在水平面上，即$y_1=y_2$

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常数}$$

结论　若 $p_1>p_2$　则 $v_1<v_2$



练3.6.2 如图弹簧与两平板组成的系统，问加多大的压力 F，当突然撤去后，上板跳起后恰能使下板被提起。



解：建立坐标系。

$$m_1 g = k(x_0 - x_1),\quad F + m_1 g = k(x_0 - x_2),\quad m_2 g = k(x_3 - x_0)$$

取两板、弹簧、地球为研究系统。从压力刚被撤去到下板弹起的过程中，仅保守内力做功，机械能守恒：

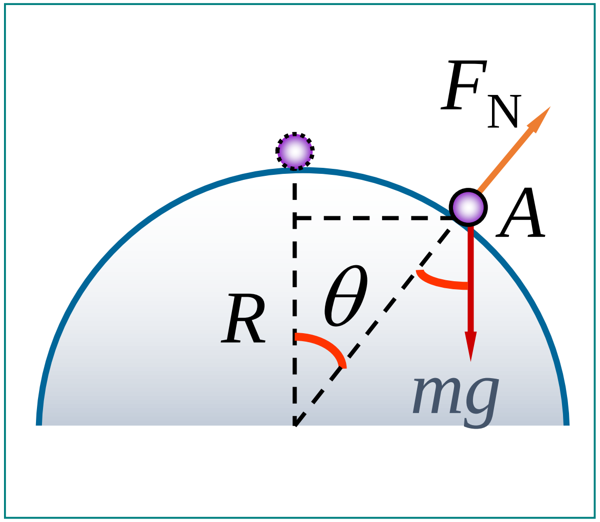
$$\tfrac{1}{2}k(x_2 - x_0)^2 + m_1 g x_2 = \tfrac{1}{2}k(x_3 - x_0)^2 + m_1 g x_3$$

解得 $F = (m_1 + m_2)g$

练3.6.3　已知在半径为R的光滑球面上，一物体自顶端静止下滑，问物体在何处脱离球面?

解

$$\begin{cases} mg\cos\theta - F_{\mathrm{N}} = m\dfrac{v^2}{R} \\ mgR(1-\cos\theta) = \dfrac{1}{2}mv^2 \end{cases}$$



当物体在 A 处脱离球面时，

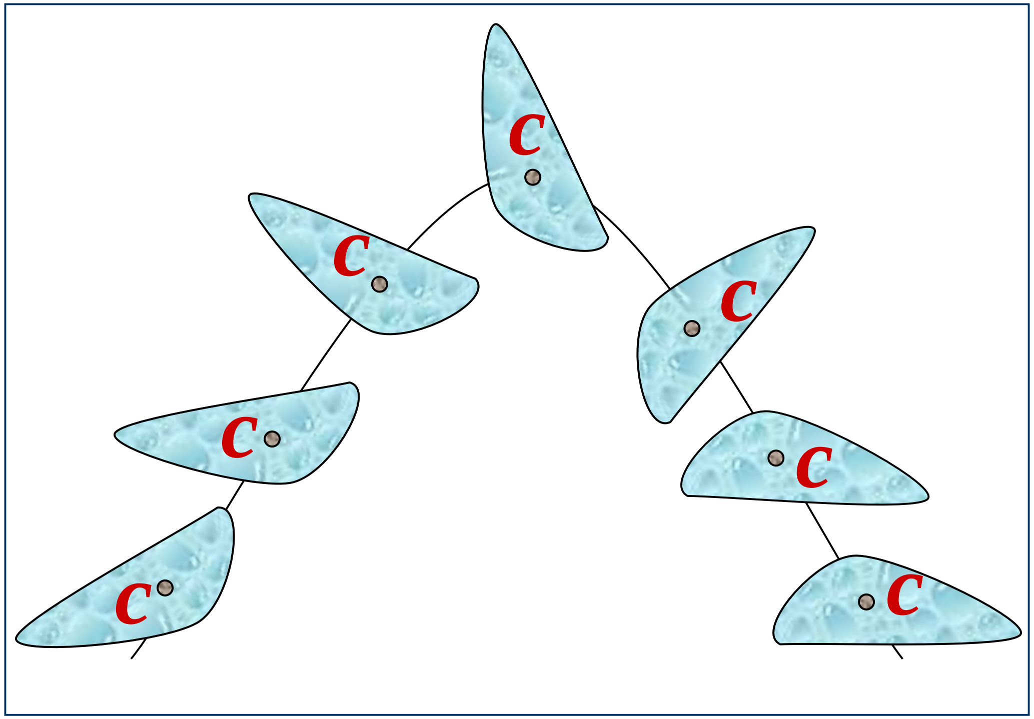
$$F_{\mathrm{N}} = 0$$

解得: $$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

3.9 质心 质心运动定律

一 质心

1 质心的概念

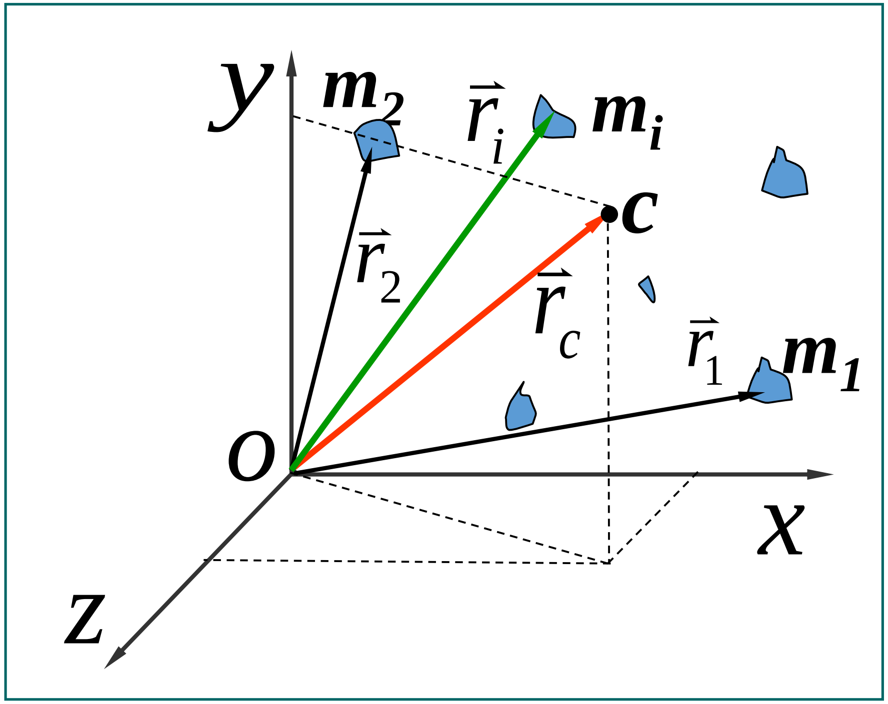


➢ 板上点C的运动轨迹是抛物线

➢ 其余点的运动=随点C的平动+绕点C的转动

2 质心的位置

由*n*个质点组成的质点系，其质心的位置：



$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_i\vec{r}_i + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m'}$$

➢对质量离散分布的物系：

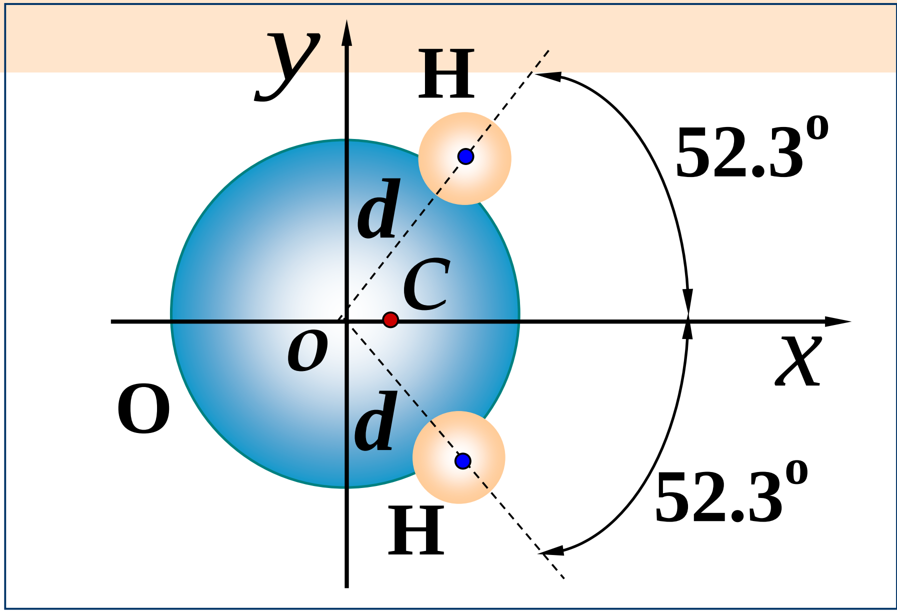
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m'} \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m'} \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m'}$$

➢对质量连续分布的物体：

$$x_C = \frac{1}{m'}\int x\mathrm{d}m, \qquad y_C = \frac{1}{m'}\int y\mathrm{d}m, \qquad z_C = \frac{1}{m'}\int z\mathrm{d}m$$

说明 对密度均匀、形状对称的物体，质心在其几何中心.

例3.9.1 水分子H_2O的结构如图．每个氢原子和氧原子中心间距离均为$d=1.0\times10^{-10}$ m，氢原子和氧原子两条连线间的夹角为$\theta=104.6^o$．求水分子的质心．

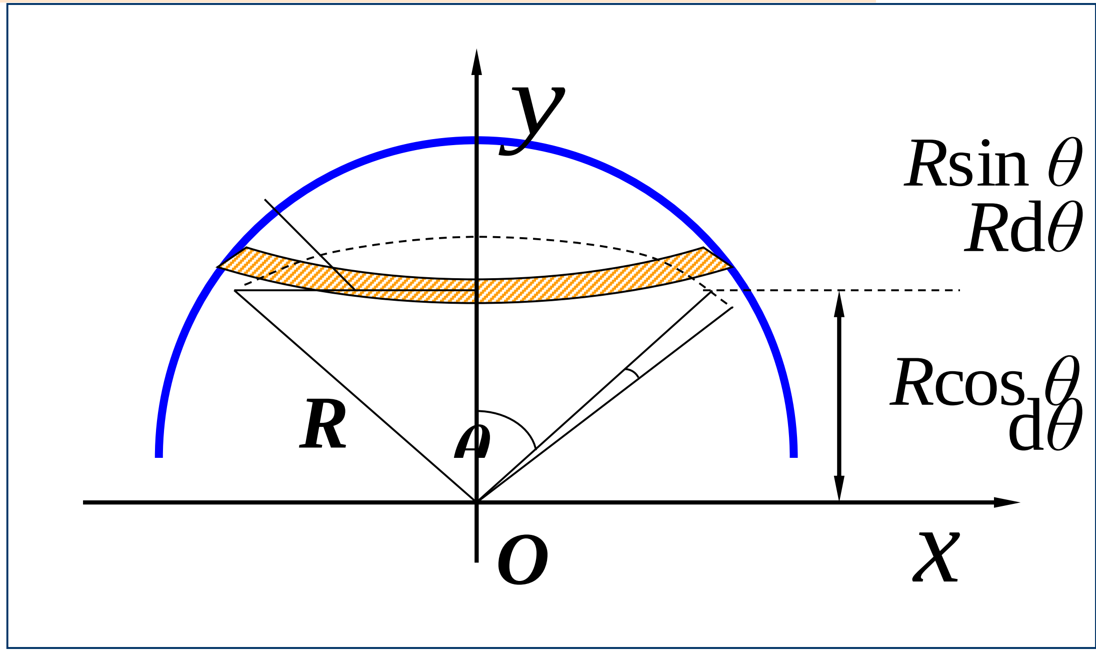


$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i x_i}{\sum m_i}=\frac{m_H d\sin 37.7^o+m_O\times 0+m_H d\sin 37.7^o}{m_H+m_O+m_H}$$

$$x_C=6.8\times10^{-12}\text{ m}\qquad \vec{r}_C=6.8\times10^{-12}\text{ m}\vec{i}$$

例3.9.2　求半径为 R 的匀质半薄球壳的质心.

解: 选如图所示的坐标系



在半球壳上取一如图圆环

- 圆环的面积

$$ds = 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta$$

- 圆环的质量

$$dm = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta \, d\theta$$

由于球壳关于y 轴对称，故$x_c = 0$

$$y_C = \frac{1}{m'}\int y dm = \frac{\int y \cdot \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{\sigma 2\pi R^2}$$

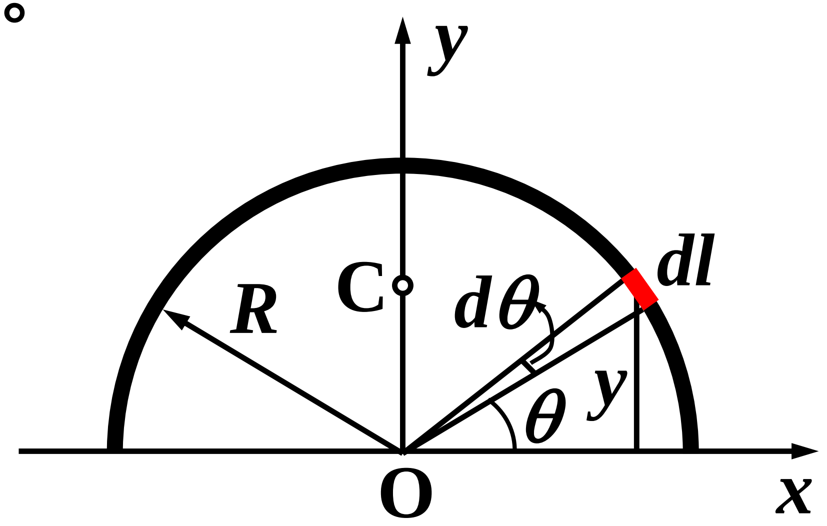
$$y = R\cos\theta$$

$$y_C = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = R/2$$

其质心位矢: $\vec{r}_C = R/2\,\vec{j}$

练习3.9.1 一段均匀铁丝弯成半圆形，半径为 R，求其质心。

解：建立坐标系，易知 $x_C = 0$。



任取线元 dl，其质量为 $dm = \lambda\, dl$，其中 λ 为线密度，

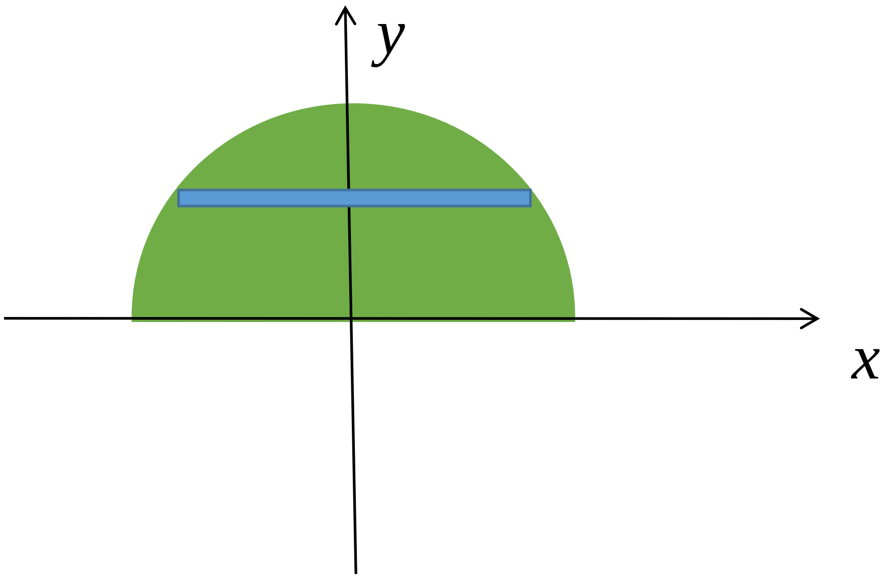
$$y_C = \frac{\int y dm}{\int dm}$$

变换积分变量，$y = R\sin\theta,\quad dm = \lambda dl = \lambda R d\theta$

$$\therefore \quad y_C = \frac{\int_0^{\pi} \lambda R^2 \sin\theta d\theta}{\lambda \pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

练3.9.2 密度均匀的半圆板，半径是R，求其质心位置。

由对称性可知，$x_{\mathrm{CM}=0}$.

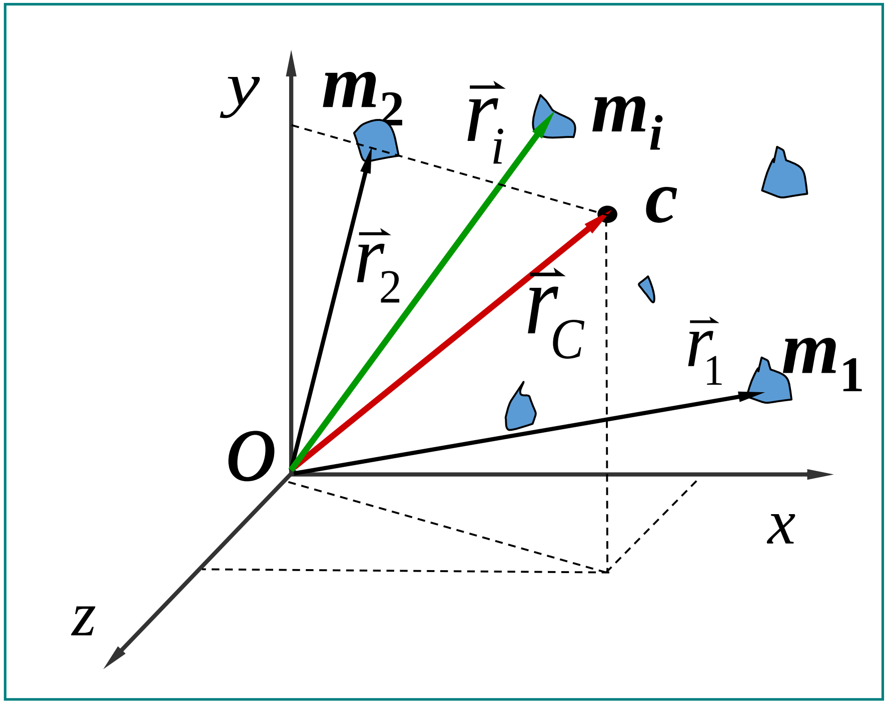


$$dm = \sigma dA = 2\sigma\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$$

$$y_{CM} = \frac{\int ydm}{M} = \frac{\int_0^R 2\sigma y\sqrt{R^2 - y^2}\,dy}{\sigma(\pi R^2/2)} = \frac{-\frac{2}{3}[(R^2 - y^2)^{3/2}]_0^R}{\pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi}$$

二 质心运动定律

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m'}$$



$$m'\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

$$m'\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$m'\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

$$m'\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$m'\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i)}{\mathrm{d}t} \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,\mathrm{ex}}$$

（因质点系内 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,\mathrm{in}} = 0$）

$$\boxed{\vec{F}^{\,\mathrm{ex}} = m'\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = m'\vec{a}_C}$$

作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以质心的加速度——**质心运动定律**

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{P}_{net} = M\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{P}_{net}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

$$\sum m_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM,0} = 0$$

$$\vec{v}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{CM}\text{不变}$$

$$\vec{F}_{net} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$$

同样适用于某个方向

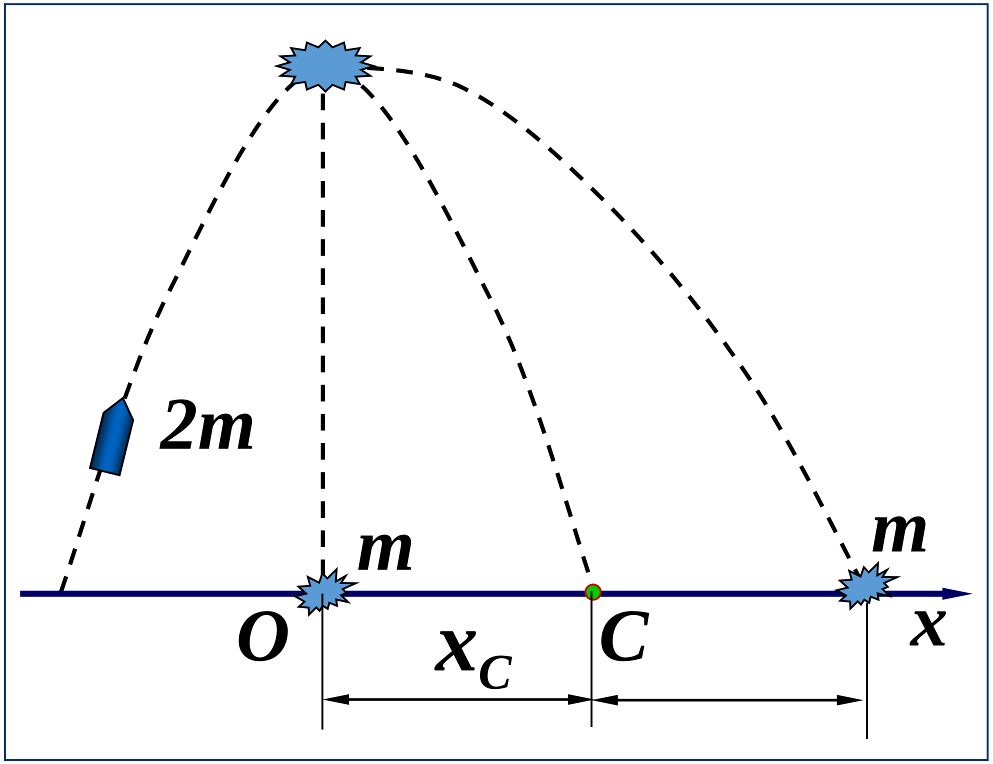
例3.9.3 设有一质量为2*m*的弹丸,从地面斜抛出去,它飞行在最高点处爆炸成质量相等的两个碎片，其中一个竖直自由下落，另一个水平抛出，它们同时落地．问第二个碎片落地点在何处?

解： 选弹丸为一系统，爆炸前、后质心运动轨迹不变．建立图示坐标系，

$$m_1 = m_2 = m \quad x_1 = 0$$

x_C为弹丸碎片落地时质心离原点的距离

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

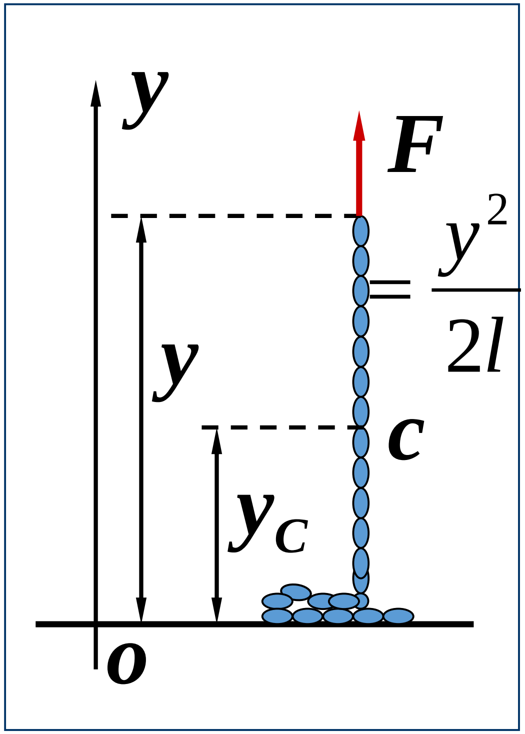


$$x_2 = 2x_C$$

例3.9.4　用质心运动定律来讨论以下问题：一长为l、密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为λ．将其卷成一堆放在地面． 若手提链条的一端，以匀速v将其上提．当一端被提离地面高度为y时，求手的提力

解　建立图示坐标系 链条质心的坐标y_c是变化的

$$y_c=\frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}=\frac{\lambda y\,\frac{y}{2}+\lambda(l-y)\times 0}{\lambda l}=\frac{y^2}{2l}$$



竖直方向作用于链条的合外力为$F-\lambda yg$

由质心运动定律有

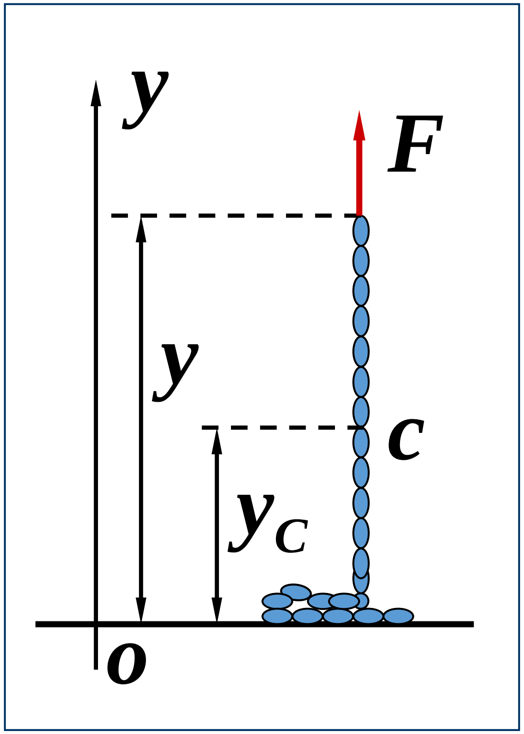
$$F - y\lambda g = l\lambda \frac{\mathrm{d}^2 y_C}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_c}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{l}\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \right]$$

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$F - y\lambda g = l\lambda \frac{\mathrm{d}^2 y_C}{\mathrm{d}t^2} = l\lambda \cdot \frac{v^2}{l}$$

$$\therefore F = \lambda y g + \lambda v^2$$



A man of mass 70 kg is standing at one end of a stationary, floating barge of mass 210 kg. He then walks to the other end of the barge, a distance of 9 meters. Ignore any frictional effects between the barge and the water.

a. How far will the barge move?

b. If the man walks at an average velocity of 9 m/s relative to the barge, what is the average velocity of the barge?

c. If the man walks at an average velocity of 9 m/s relative to the ground, what is the average velocity of the barge?

$$d = 2.25m \qquad v = 2.25\, m/s \qquad v = 3\, m/s$$

作业： 27 31 32 37 38 41

作业(五)： 24 28 29 33 34 37