□

(3) 是同态，同态像是 $\langle\{0\},\cdot\rangle$。

证明： $\forall x, y \in \mathbb{C}$，

$$
\begin{aligned}
\varphi(x\cdot y) &= 0 && (\varphi\text{ 定义})\\
&= 0\cdot 0 && (0\cdot 0=0)\\
&= \varphi(x)\cdot\varphi(y) && (\varphi\text{ 定义})
\end{aligned}
$$

□

(4) 不是同态。

证明： 由于 $1\in\mathbb{C}$，但 $\varphi(1\cdot 1)=\varphi(1)=2$，而 $\varphi(1)\cdot\varphi(1)=2\cdot 2=4$，从而 $\varphi(1\cdot 1)\neq\varphi(1)\cdot\varphi(1)$。这就证明了 φ 不是同态。 □

15.25 显然 I_A 是 V 的一个自同构。下面证明，V 上不存在其它的自同构。

证明： 设 $\varphi: A\to A$ 是 V 的一个自同态且 $\varphi(5^1)=\varphi(5^k)$。则 $\varphi(5^2)=\varphi(5^1\cdot 5^1)=5^k\cdot 5^k=5^{2k}$。对 n 施归纳可证，$\forall n\in\mathbb{Z}^+, \varphi(5^n)=\varphi(5^{kn})$。此时 V 在 φ 下的同态像是 $\langle\{5^{kn}\mid n\in\mathbb{Z}^+\},\cdot\rangle$。若 $k\notin\mathbb{Z}^+$，则 $\varphi(A)\not\subseteq A$，与 $\varphi: A\to A$ 矛盾。若 $k=1$，则 $\varphi=I_A$，是恒等函数。若 $k>1$，则 $5^1\notin\{5^{kn}\mid n\in\mathbb{Z}^+\}$，从而 φ 不是满射，也就不是同构。

这就证明了 I_A 是 V 上唯一的自同构。 □

15.26

证明： 显然，φ 是函数，且为满射。下面证明 φ 是同态。

$\forall x, y\in\mathbb{Z}^+, \varphi(x\cdot y)$，

$$
\begin{aligned}
\varphi(x\cdot y)=1 &\iff x\cdot y=1 && (\varphi\text{ 定义})\\
&\iff x=1\wedge y=1 && (\text{非负整数性质})\\
&\iff \varphi(x)=1\wedge\varphi(y)=1 && (\varphi\text{ 定义})\\
&\iff \varphi(x)\cdot\varphi(y)=1 && (\text{非负整数性质})
\end{aligned}
$$

从而由 $1\in\mathbb{Z}_2, \forall x, y\in\mathbb{Z}^+(\varphi(x\cdot y)=1\Leftrightarrow\varphi(x)\cdot\varphi(y)=1)$ 和引理 15.1 有：$\forall x, y\in\mathbb{Z}^+(\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y))$。

这就证明了 φ 是 V_1 到 V_2 的满同态。 □

15.27

(1) 不是。例如 $(-1)R(-3)\wedge 2R2$，但 $(-1+2)\not R(-3+2)$。

(2) 不是。因为 R 不具有传递性(例如 $1R5$，$5R9$，但 $1\not R9$)，所以不是等价关系。

(3) 不是。例如 $(-1)R1\wedge 1R1$，但 $(-1+1)\not R(1+1)$。

(4) 不是。因为 R 不是等价关系。

15.28

证明： 由教材定理 15.11 知，自然映射 $g: A\to A/\!\sim, g(a)=[a], \forall a\in A$ 是从 V 到 $V/\!\sim$ 上的同态映射。又由等价类的定义知，g 是满射。从而 g 是 V 到 $V/\!\sim$ 的满同态。再利用教材定理 15.8 即证原题。 □

15.29

(1)