$$
\begin{aligned}
&= e && (aa^{-1} = bb^{-1} = e)\\
&= (ab)(ab)^{-1} && ((ab)(ab)^{-1} = e)\\
&= abab && ((ab)^{-1} = ab)
\end{aligned}
$$

由消去律，有 $ab = ba$。由 a, b 的任意性知，G 是交换群。矛盾。

上面证明了存在 $a \in G$，使得 $a^{-1} \neq a$。令 $c = a, d = a^{-1}$，则有 $c \neq d$，但 $cd = dc = e$。 □

4.

证明： 令 $H = G_1 \oplus G_2$，对任意 $v_i \in V(H)$，设 v_i 在 G_1 和 G_2 中的度数分别为 $a_i = |N_{G_1}(v_i)|$ 和 $b_i = |N_{G_2}(v_i)|$。由环和运算的定义和容斥原理知，$d_H(v_i) = |N_H(v_i)| = |N_{G_1}(v_i) \oplus N_{G_2}(v_i)| = a_i + b_i - 2|N_{G_1}(v_i) \cap N_{G_2}(v_i)|$，由于 G_1 和 G_2 是欧拉图，所以 a_i, b_i 是偶数，从而 $d_H(v_i)$ 也是偶数。

设 V_k 是 H 的任意连通分支，下面证明对任意顶点 $v_i \in V_k$ 都有 $d_{H[V_k]}(v_i) = d_H(v_i)$。

若不然，就存在边 $(v_i, v_j) \in E(H)$，但 $(v_i, v_j) \notin E(H[V_k])$，由于 $H[V_k]$ 是由顶点集 V_k 生成的子图，所以仅当 $v_j \notin V_k$ 时才会有这种情况。但由于 v_j 与 v_i 间有边，而 v_i 与 V_k 中其它顶点有通路，所以 v_j 与 V_k 中各顶点都有通路。由连通分支定义应有 $v_j \in V_k$。矛盾。这就证明了对任意 $v_i \in V_k$，都有 $d_{H[V_k]}(v_i) = d_H(v_i)$。

由此可知，对 H 中的任意连通分支 $H[V_k]$，V_k 中每个顶点的度数都是偶数，从而 $H[V_k]$ 是欧拉图。 □