引理 1.6 对任意谓词公式 F 和 G，有:

$$\begin{aligned}
&\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to (F(k) \wedge G(k)))) \\
\iff &\exists n_1(n_1 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_1 \to F(k))) \\
&\wedge \exists n_2(n_2 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_2 \to G(k)))
\end{aligned}$$

证明: 必要性：由一阶谓词推理规则 $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \implies \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ 和变元换名规则立即可得。

充分性：令 $n_0 = \max(n_1, n_2)$，则有 $\forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to (k \geq n_1 \wedge k \geq n_2))$。再由“假言三段论”推理规则，即可得证。 □

再证原题：

(1) 先证第一个包含关系：

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf_{k\to\infty} B_k \subseteq \varliminf_{k\to\infty} (A_k \cup B_k)$$

证明: $\forall x$，

$$\begin{aligned}
&x \in \varliminf_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf_{k\to\infty} B_k \\
\iff &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in A_k)) \vee \\
&\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in B_k)) && \text{(集合并定义、下极限定义)} \\
\iff &\exists n_0((n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in A_k)) \vee \\
&\quad (n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in B_k))) && \text{(量词分配等值式)} \\
\iff &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge (\forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in A_k)) \vee \\
&\quad (\forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in B_k))) && \text{(命题逻辑分配律)} \\
\implies &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k((k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in A_k) \vee \\
&\quad (k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in B_k))) && \text{(一阶谓词推理定律)} \\
\iff &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(\neg(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0) \vee x \in A_k) \vee \\
&\quad (\neg(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0) \vee x \in B_k)) && \text{(蕴涵等值式)} \\
\iff &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(\neg(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0) \vee (x \in A_k \vee x \in B_k))) && \text{(结合、交换、幂等)} \\
\iff &\exists n_0(n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to (x \in A_k \vee x \in B_k))) && \text{(蕴涵等值式)} \\
\iff &x \in \varliminf_{k\to\infty} (A_k \cup B_k) && \text{(集合并定义、下极限定义)}
\end{aligned}$$

□

再证第二个包含关系：

$$\varliminf_{k\to\infty} (A_k \cup B_k) \subseteq \varliminf_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

和

$$\varliminf_{k\to\infty} (A_k \cup B_k) \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf_{k\to\infty} B_k$$

证明: $\forall x \in \varliminf_{k\to\infty} (A_k \cup B_k)$，只有下面两种可能:

(1) x 属于几乎所有的 A_k，即存在 $n_0(x)$，使得当 $k \geq n_0(x)$ 后，$x \in A_k$，于是 $x \in \varliminf_{k\to\infty} A_k$