第七章　图

定理 7.1 (图论基本定理) 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m.$$

定理 7.2 (图论基本定理) 设 $D=\langle V,E\rangle$ 为一个有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m \text{ 且 } \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i)=\sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i)=m.$$

推论 任何图 G (无向图或有向图)中，奇度数顶点的个数是偶数.

定理 7.3 $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ ($d_i\geq 0$ 且为整数，$i=1,2,\cdots,n$)是可图化的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} d_i=0 \pmod 2.$$

定理 7.4 设非负整数列 $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n),(n-1)\geq d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n\geq 0$，则 $\mathbf{d}$ 是可简单图化的当且仅当对于每个整数 r，$1\leq r\leq(n-1)$，

$$\sum_{i=1}^{r} d_i\leq r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{n}\min\{r,d_i\} \text{ 且 } \sum_{i=1}^{n} d_i=0 \pmod 2.$$

定理 7.5 设非负整数列 $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} d_i=0 \pmod 2$ 且 $(n-1)\geq d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n\geq 0$，则 $\mathbf{d}$ 是可简单图化的当且仅当 $\mathbf{d}'=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$ 是可简单图化的.

定理 7.6 在 n 阶图 G 中，若从顶点 v_i 到 $v_j(v_i\neq v_j)$ 存在通路，则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

推论 在 n 阶图 G 中，若从顶点 v_i 到 $v_j(v_i\neq v_j)$ 存在通路，则 v_i 到 v_j 一定存在长度小于等于 $n-1$ 的路径.

定理 7.7 在 n 阶图 G 中，若存在 v_i 到自身的回路，则存在 v_i 到自身长度小于等于 n 的回路.

推论 在一个 n 阶图 G 中，若存在 v_i 到自身的简单回路，则一定存在 v_i 到自身的长度小于等于 n 的初级回路(圈).

定理 7.8 一个图 G 为二部图当且仅当图 G 中无奇圈.

定理 7.9 设 G 为 n 阶无向图，若 G 是连通图，则 G 的边数 $m\geq n-1$.

定理 7.10 (Whitney) 对于任意的图 G，均有下面不等式成立:

$$\kappa\leq\lambda\leq\delta,$$

其中 κ,λ,δ 分别为 G 的点连通度、边连通度和最小度.

推论 若 G 是 k-连通图，则 G 必为 k 边-连通图.