$H(12) = H(134) = H(1423) = H(243) = \{(12), (134), (1423), (243)\};$
$H(13) = H(14)(23) = H(24) = H(12)(34) = \{(13), (14)(23), (24), (12)(34)\};$
$H(14) = H(234) = H(1243) = H(132) = \{(14), (234), (1243), (132)\};$
$H(23) = H(124) = H(1342) = H(143) = \{(23), (124), (1342), (143)\};$
$H(34) = H(123) = H(1324) = H(142) = \{(34), (123), (1324), (142)\}.$

17.28 因为 $\forall r,s,t \in \mathbb{Q}, r \neq 0$，$\left(\begin{smallmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdots \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r & rt+s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，所以 H 全部左陪集的集合为：$\{\{\left(\begin{smallmatrix} r & rt+s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{Q}\} \mid r,s \in \mathbb{Q}, r \neq 0\}$。

注意到，$r,s \in \mathbb{Q}, r \neq 0$ 时，$\{rt+s \mid t \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$。这是因为：由 $r,s,t \in \mathbb{Q}$ 显然有 $rt+s \in \mathbb{Q}$，从而 $\{rt+s \mid t \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q}$。而对任意 $t' \in \mathbb{Q}$，令 $t = (t'-s)/r$，则 $t \in \mathbb{Q}$，且 $t' = rt+s \in \{rt+s \mid t \in \mathbb{Q}\}$。这就证明了 $\{rt+s \mid t \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$。从而，$H$ 全部左陪集的集合又可写成：$\{\{\left(\begin{smallmatrix} r & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{Q}\} \mid r \in \mathbb{Q}, r \neq 0\}$。

17.29 仿教材定理 17.20 至教材定理 17.24 可证。

17.30

证明： 记 $H = H_1 \cap H_2$。显然有 $e \in H$。由教材例 17.12(1) 可知，H 是群，从而也是 H_1 和 H_2 的子群。由 Lagrange 定理知，$|H| \mid r$ 且 $|H| \mid s$，从而 $|H| \mid (r,s) = 1$。由 $e \in H$ 和 $|H| \mid 1$ 可知，$H = \{e\}$。 □

17.31

证明：

证法一： 设 G 为 p^m 阶群。对 m 作强数学归纳。

当 $m = 1$ 时，G 本身就是 G 的 p 阶子群，命题成立。

若命题对一切正整数 $m < k$ 都成立，则当 $m = k$ 时，由 $|G| = p^k > 1$ 知，G 中有非单位元。任取一非单位元 a。若 $|a| = p^k$，则 $|\langle a \rangle| = |a| = p^k = |G|$，从而由 G 有限群、$\langle a \rangle \subseteq G$、$|\langle G \rangle| = |G|$ 和教材定理 5.5 推论可知，$G = \langle a \rangle$ 是循环群。从而由教材定理 17.13(3) 知，G 有 p 阶子群。反之，若 $|a| < p^k$，则由 Lagrange 定理知，$|\langle a \rangle| = |a| = p^t (1 \leq t < k)$。由归纳假设知 $\langle a \rangle$ 有 p 阶子群，这样的 p 阶子群显然也是 G 的子群。故，当 $m = k$ 时，命题依然成立。

证法二：[2]设 G 为任意 p^m 阶群。

由题设显然有 $|G| \geq 2$。任取非单位元 $a \in G$。由 $a \neq e$ 和教材定理 17.26 推论 1 可知，$1 < |a| \mid p^m$。由于 p 是素数，所以必有 $|a| = p^k$，$k \in \mathbb{Z}^+$。

令 $b = a^{p^{k-1}}$。注意到，$b \neq e$ (否则将与 $|a| = p^k$ 矛盾)，且 $b^p = (a^{p^{k-1}})^p = a^{p^k} = e$。从而有 $1 < |b| \mid p$。由素数的性质可知，$|b| = p$。这就证明了 G 中存在 p 阶子群 $\langle b \rangle$。 □

17.32

证明： 因为 G 是有限群，所以 $H \leqslant G$ 也是有限群。故：

$$\begin{aligned} [G:H] &= \frac{|G|}{|H|} && \text{(Lagrange 定理)} \\ &= \frac{[G:K]|K|}{|K|/[K:H]} && \text{(Lagrange 定理)} \\ &= [G:K][K:H] \end{aligned}$$

□

17.33

(1)

[2]感谢 sunbird2002 大侠给出这一证法。