第九章　振动

机械振动：物体在某固定位置附近的往复运动

摆的运动　　发声体的振动　　心脏的跳动

任何一个物理量在某一定值附近随时间反复变化都可以称为振动

交流电路中的电压电流

振荡电路中的电场强度、磁场强度

9.1 简谐振动的动力学特征

- 振动
  - 非线性振动
  - 线性振动
    - 受迫振动
    - 自由振动

简谐振动是最简单最基本的线性振动。

<u>简谐振动</u>：一个作往复运动的物体，如果其偏离平衡位置的位移x（或角位移θ）随时间t按余弦（或正弦）规律变化的振动。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

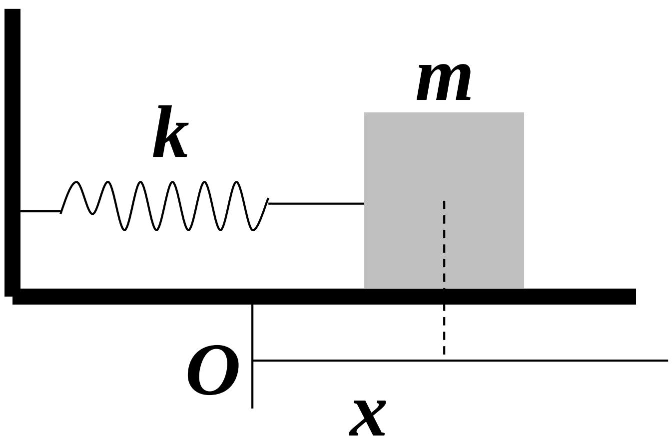
一、弹簧振子模型

弹簧振子：弹簧—物体系统

物体—可看作质点

轻弹簧—质量忽略不计，形变满足胡克定律

平衡位置：弹簧处于自然状态的稳定位置



$$F = -kx \qquad -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = k/m$$

<u>简谐振动</u>
<u>微分方程</u>

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$ 式中 $\omega^2=\frac{k}{m}$

简谐振动微分方程，可用其判断简谐振动。

其解为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 为简谐振动运动函数，

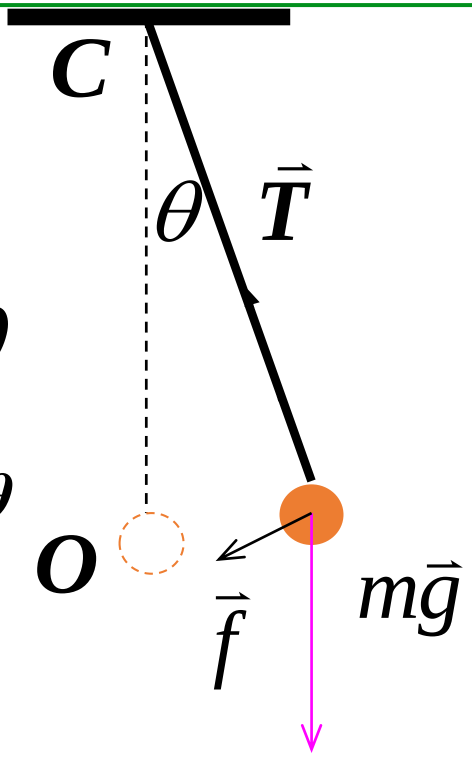
其中 A, φ 为待定系数，ω由振动系统本身性质决定

速度 $$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

加速度 $$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)=\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

二、微振动的简谐近似

单摆



摆球对C点的力矩 $M=-mgl\sin\theta$

$\theta \le \pi/36(5^0)$时 $\sin\theta=\theta-\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{\theta^5}{5!}-\ldots\ldots\approx\theta$

$$M=-mgl\theta$$

由转动定律， $M=J\alpha$

$$ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgl\theta$$

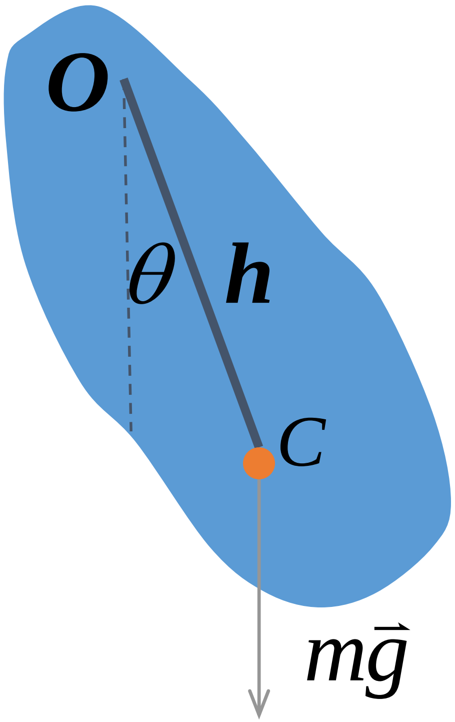
$$\frac{d\theta^2}{dt^2}+\omega^2\theta=0 \qquad \omega^2=g/l$$

<u>结论</u>：单摆的小角度摆动振动是简谐振动。

角频率,振动的周期分别为:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

复摆：绕不过质心的水平固定轴转动的刚体



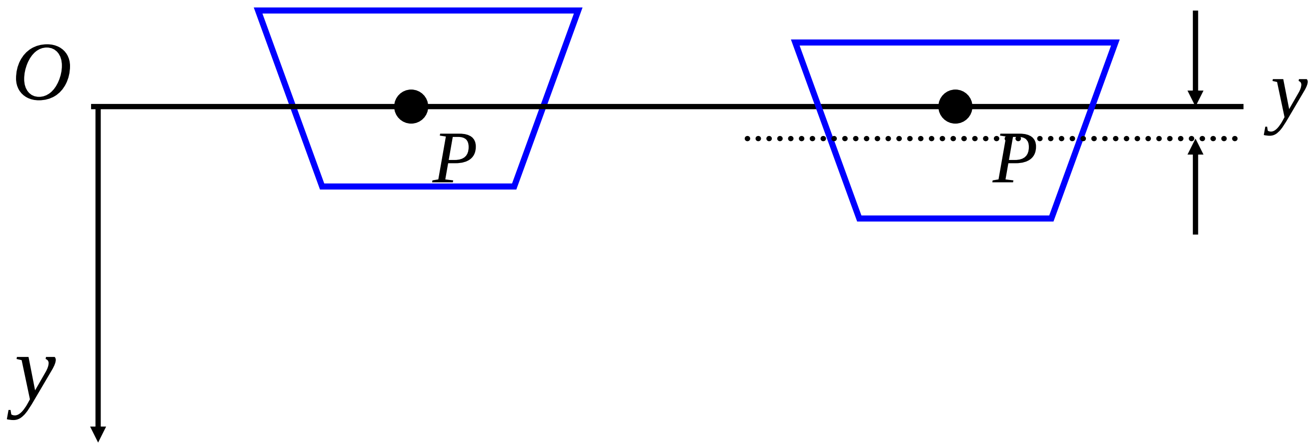
当 $\sin\theta \approx \theta$ 时

$$-mgh\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega^2 = \frac{mgh}{J} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

结论：复摆的小角度摆动振动是简谐振动。

例9.1.1 一质量为m 的平底船，其平均水平截面积为S，吃水深度为h，如不计水的阻力，求此船在竖直方向的振动周期。



船在任一位置时，以水面为坐标原点，竖直向下的坐标轴为y 轴，船的位移用y 表示。

船的位移为y 时船所受合力为:

$$f=-(h+y)\rho Sg+mg$$

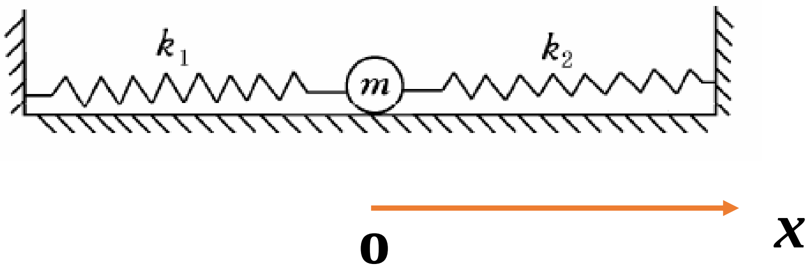
船静止时浮力与重力平衡， $\rho hSg=mg$

$$f=-(h+y)\rho Sg+mg=-y\rho Sg$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\rho gsy,\text{即}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\rho gs}{m}y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0,\ \text{其中，}\ \omega^2=\frac{\rho sg}{m}$$

练9.1.1 劲度系数为k_1和k_2的两根弹簧，与质量为m的小球按图所示的方式连 接，试证明它的振动为简谐振动



设平衡位置为原点，则当小球位移为x时，受到的合外力为

$$F=-k_2x-k_1x=-(k_1+k_2)x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-(k_1+k_2)x,\text{即}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k_1+k_2}{m}x=0$$

$$\text{令}\omega^2=\frac{k_1+k_2}{m},\ \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

作业： 8 9 11

作业(五)： 7 8 10

9.2 简谐振动的运动学

一、简谐振动的运动学方程

简谐振动的微分方程 $$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

其通解为:

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$ <u>简谐振动的运动学方程</u>

$$\cos(\omega t+\varphi_0)=\sin(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})$$

$$\varphi'=\varphi_0+\frac{\pi}{2}$$ $$x=\sin(\omega t+\varphi')$$

二、描述简谐振动的特征量

1、振幅 A 简谐振动物体离开平衡位置的最大位移（或角位移）的绝对值。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

初始条件 $t = 0, x = x_0, v = v_0$

$$x_0 = A\cos\varphi_0 \qquad -\frac{v_0}{\omega} = -A\sin\varphi_0$$

$$A = \sqrt{x_0{}^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$$

初始条件决定

2、周期、频率、圆频率

周期T：物体完成一次全振动所需时间。

$$A\cos(\omega t+\varphi_0)=A\cos[\omega(t+T)+\varphi_0] \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

频率ν：单位时间内振动的次数。 $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$

角频率（圆频率）ω

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$$

决定于质量、劲度系数、摆长、转动惯量等振动系统本身的性质，是标志振动系统特征的物理量，本身固有的性质。

固有周期、固有频率、固有角频率

振动的特征之一就是运动具有周期性

弹簧振子

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

单摆

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

复摆

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{J}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgh}{J}}$$

例如，心脏的跳动80次/分

周期为 $$T=\frac{1}{80}(\mathrm{min})=\frac{60}{80}(\mathrm{s})=0.75\,\mathrm{s}$$

频率为 $$\nu=1/T=1.33\mathrm{Hz}$$

动物的心跳频率(参考值,单位:Hz)

大象	0.4~0.5	马	0.7~0.8
猪	1~1.3	兔	1.7
松鼠	6.3	鲸	0.13

3、相位和初相位 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$\omega t + \varphi_0$ —相位，决定谐振动物体的运动状态

φ_0 是t =0时刻的相位—<u>初相位</u>

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$t = 0$时 $x_0 = A\cos\varphi_0$

$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$$

$$\tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

初始条件决定

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 = \begin{cases} 0 & x=A \quad v=0 \\ \pi/2 & x=0 \quad v= -\omega A \\ 3\pi/2 & x=0 \quad v= \omega A \end{cases}$$

不同相位表示不同的运动状态

<u>相位差</u>（同频率可比较）　两振动相位之差。

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\omega t+\varphi_{20}-\omega t-\varphi_{10}=\varphi_{20}-\varphi_{10}$$

当$\Delta\varphi=2k\pi, k=0, \pm1, \pm2\ldots$,两振动步调相同, 称<u>同相</u>

当$\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi$，$k=0, \pm1, \pm2\ldots$

两振动步调相反, 称<u>反相</u>

$0<\Delta\varphi<\pi$　　φ_2 <u>超前于</u>φ_1 或 φ_1<u>落后于</u> φ_2

相位差反映了两个振动不同程度的参差错落

位移 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

速度 $v = \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2})$

加速度 $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$

位相，速度比位移超前π/2，加速度比速度超前π/2

位移和加速度是反相的

分析振动物体受力情况

列出振动微分方程，求出普遍解

由初始条件求出振幅和初相位

讨论

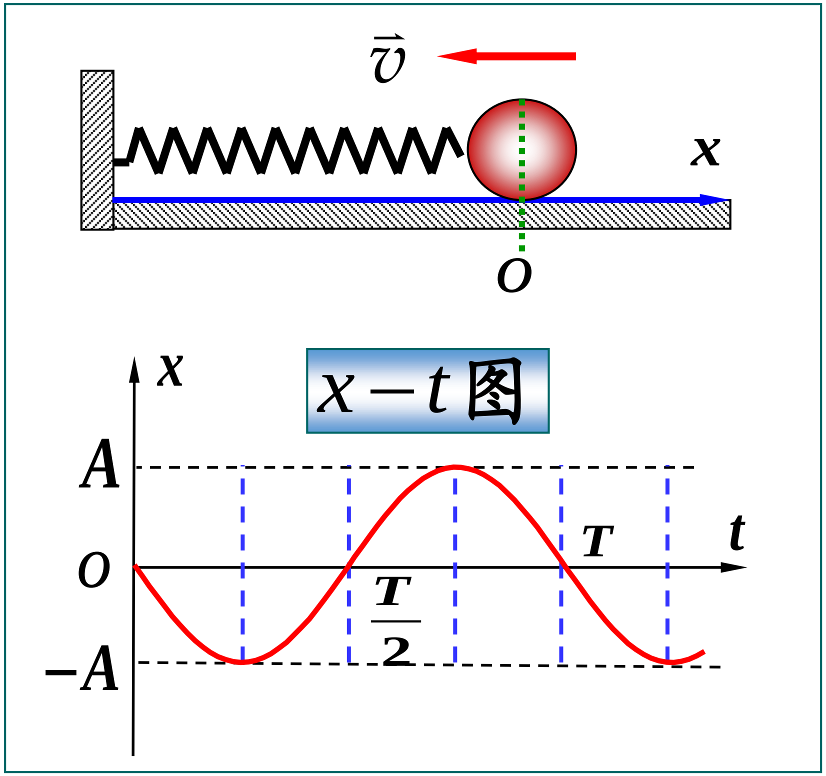
已知 $t=0, x=0, v_0<0$ 求 φ

$0 = A\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$

$\because v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$

$\therefore \sin\varphi > 0$ 取 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

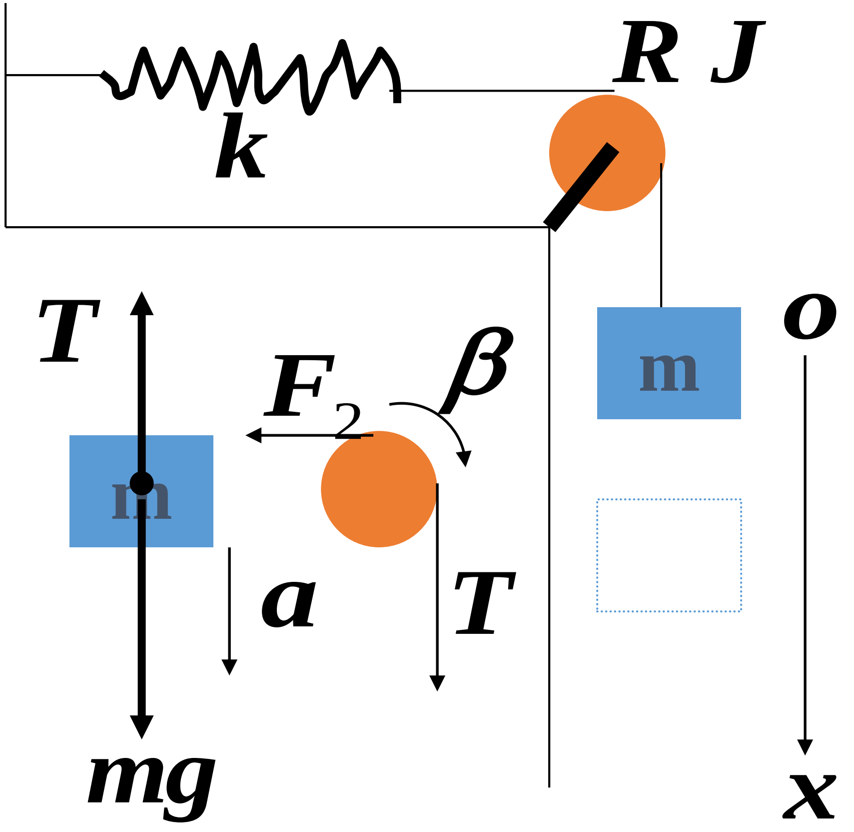
$x = A\cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$



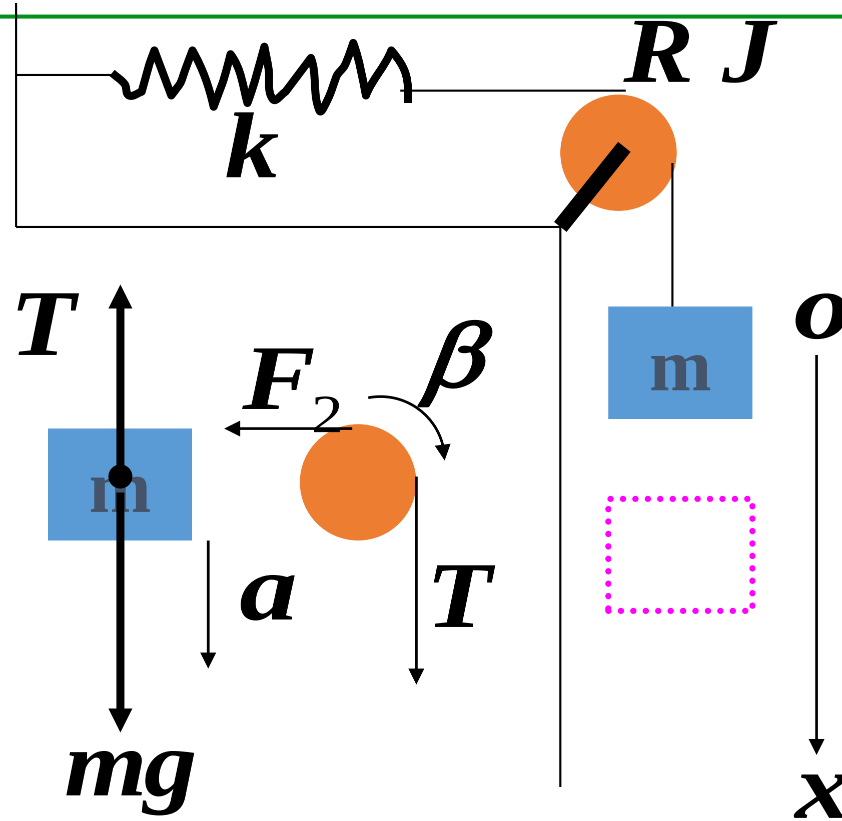
例9.2.1 如图所示，振动系统由一倔强系数为k的 轻弹簧、一半径为R、转动惯量为J的 定滑轮和一质量为m的 物体所组成。使物体略偏离平衡位置后放手，任其振动，试证物体作简谐振动，并求其周期T.

解：取位移轴ox，m在平衡位置时，设弹簧伸长量为Δl，则

$$mg - k\Delta l = 0$$



当m有位移x时



$$mg - T = ma$$

$$\left[T - k(\Delta l + x)\right]R = J\frac{a}{R}$$

联立得

$$-kx = \left(R + \frac{J}{R^2}\right)a$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m + \left(J/R^2\right)}x = 0 \longrightarrow$$ 物体作简谐振动

$$\omega^2 = \frac{k}{m + \left(J/R^2\right)}$$

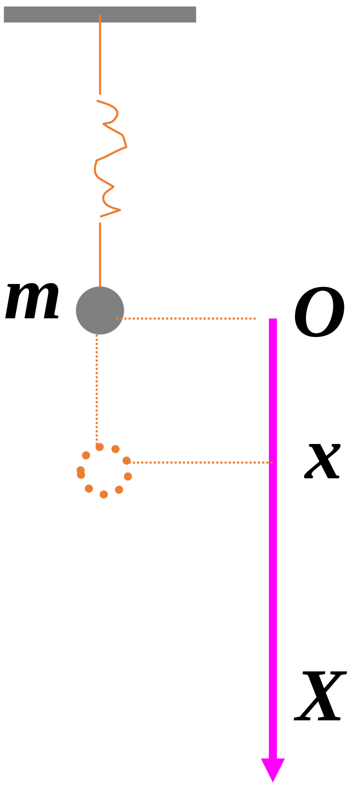
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m + \left(J/R^2\right)}{k}}$$

练9.2.1 如图$m=2\times10^{-2}kg$, 弹簧的静止形变为$\Delta l=9.8cm$，

$t=0$时　$x_0=-9.8cm$,　$v_0=0$

（1）取开始振动时为计时零点，写出振动方程；

（2）若取$x_0=0$，$v_0>0$为计时零点，写出振动方程,并计算振动频率。



解：(1) 确定平衡位置 $mg=k\,\Delta l$ 取为原点

$k=mg/\Delta l$

令向下有位移 x, 则 $f=mg-k(\Delta l+x)=-kx$

∴作谐振动 设振动方程为 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

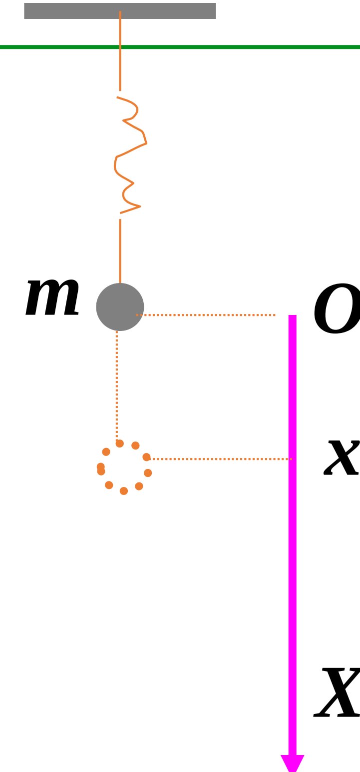
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}=\sqrt{\frac{9.8}{0.098}}=10rad/s$$

由初条件得 $\omega = 10 rad/s$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} = 0.098m$$

$$\cos\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = \pi$$

振动方程为：$x=9.8\times10^{-2}\cos(10t+\pi)\ m$



(2)按题意 $t=0$ 时 $x_0=0$，$v_0>0$

$x_0=A\cos\varphi_0=0$, $\cos\varphi_0=0$ $\varphi_0=\pi/2, 3\pi/2$

$v_0=-A\omega\sin\varphi>0$, $\sin\varphi_0<0$, 取 $\varphi_0=3\pi/2$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$$

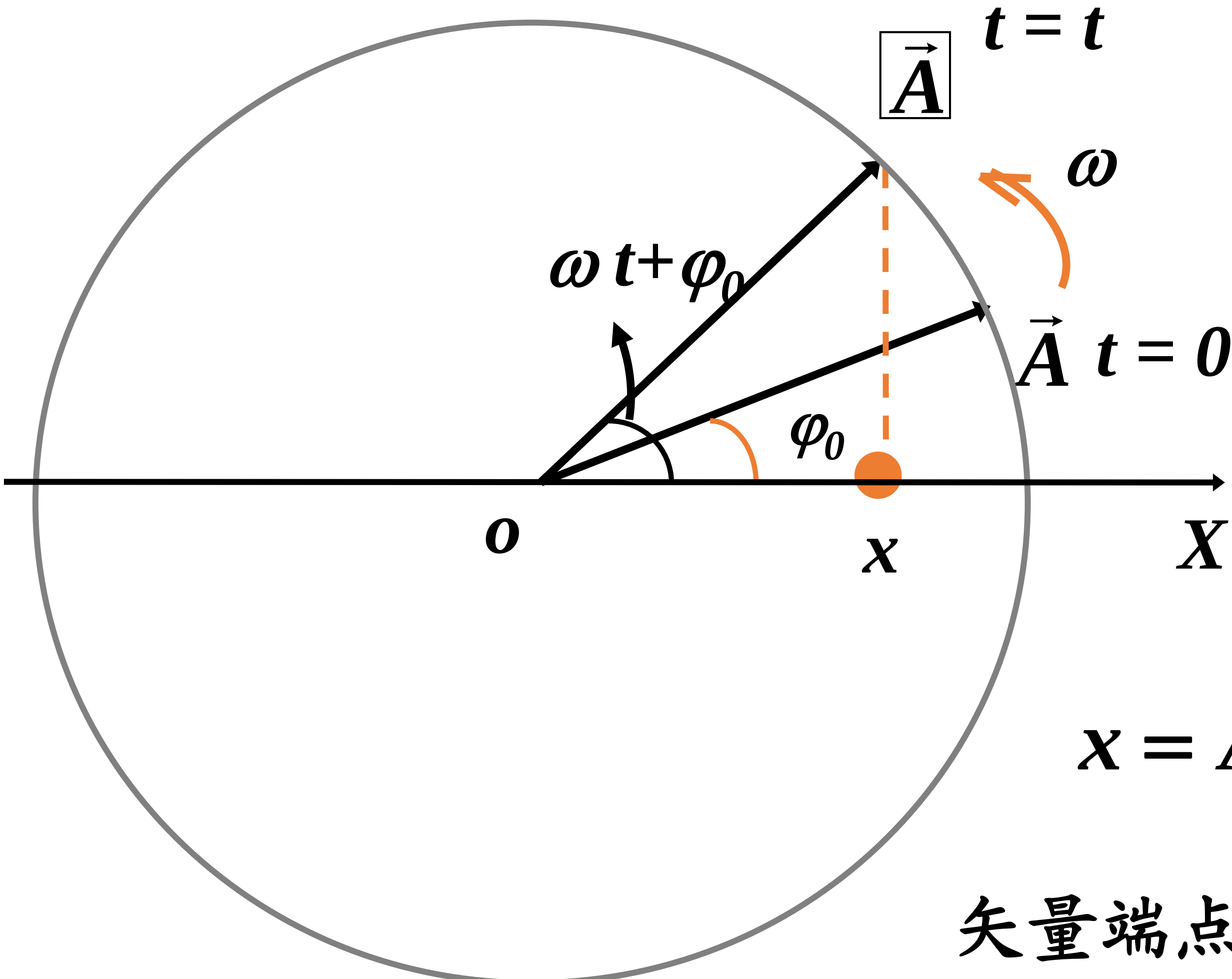
$$= 1.6Hz$$

固有频率

$\therefore x=9.8\times10^{-2}\cos(10t+3\pi/2)\ m$

对同一谐振动取不同的计时起点φ不同，但ω、A不变

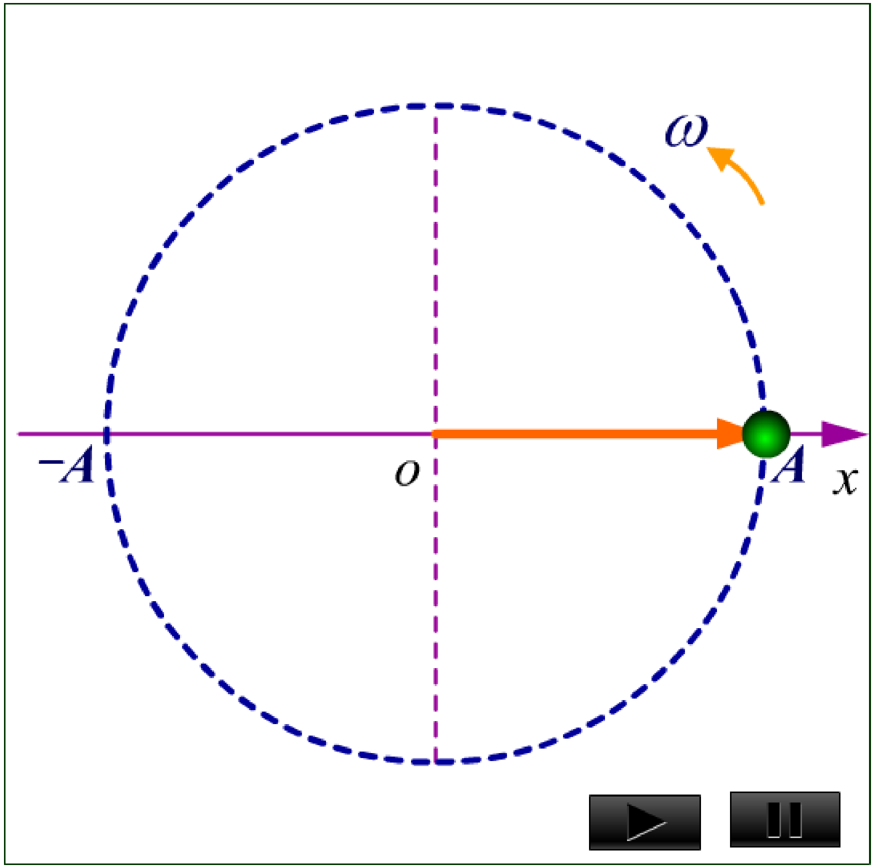
9.3 旋转矢量



$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

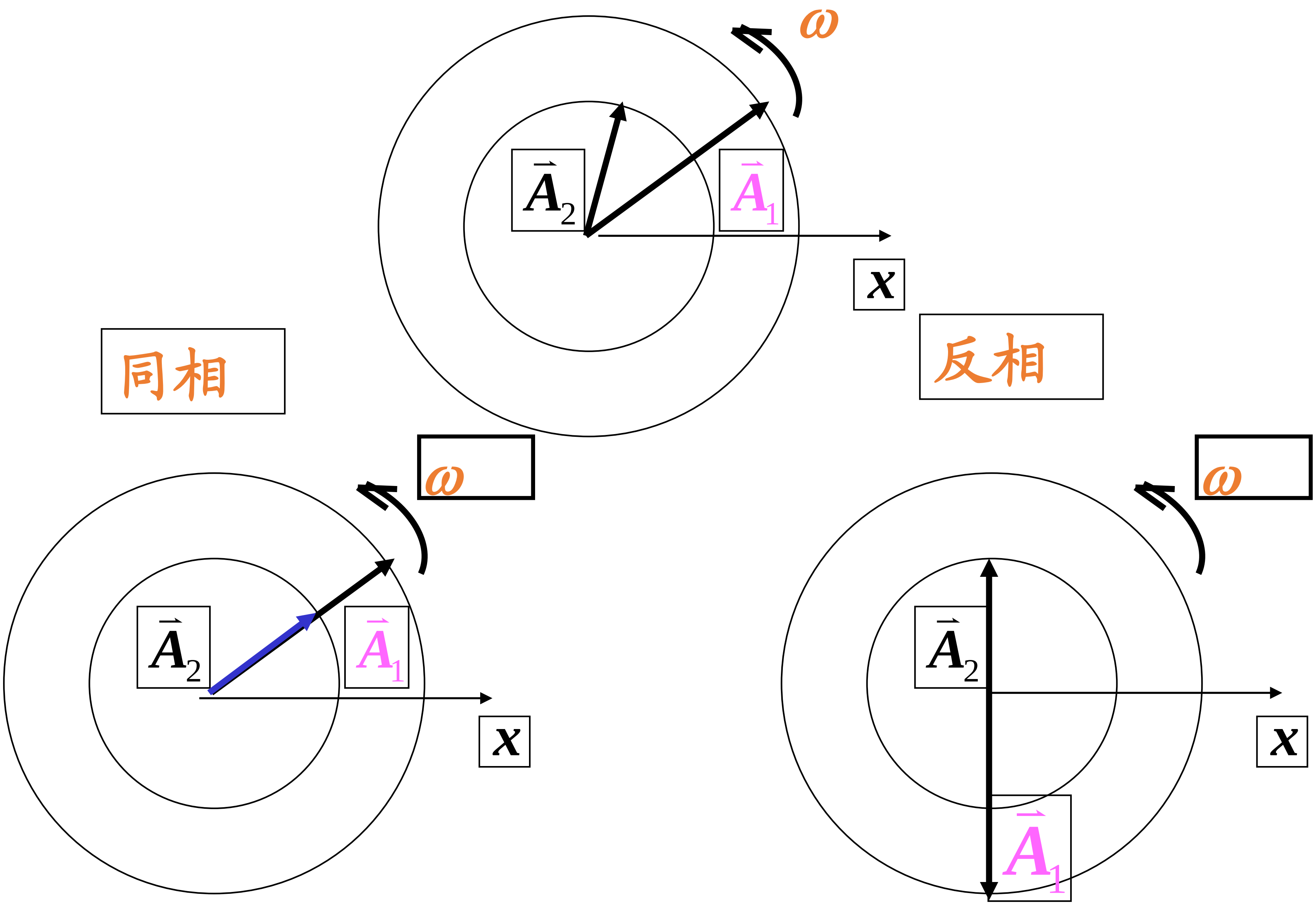
矢量端点在x轴的投影点的运动是简谐运动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



以 O 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.

用旋转矢量表示相位关系



例9.3.1 一物体沿*X* 轴作简谐振动，振幅*A*=0.12*m*,周期*T*=2*s*。当*t*=0时,物体的位移*x*=0.06*m*,且向 *X* 轴正向运动。求:(1)简谐振动表达式;(2) 物体从*x* =-0.06*m*向 *X* 轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间。

解： (1) 取平衡位置为坐标原点, 谐振动方程写为:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中A=0.12m, T=2s, $\omega = 2\pi/T = \pi(\mathrm{s}^{-1})$

初始条件： t = 0, x_0=0.06m,可得

$$0.12\cos\varphi_0 = 0.06 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \pm\pi/3$$

据初始条件 $v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 > 0$, 得 $\varphi_0 = -\pi/3$

$$\Rightarrow \quad x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

（3） 当x = -0.06m时，该时刻设为t_1, 得

$$\cos(\pi t_1-\pi/3)=-1/2$$

$$\Rightarrow \quad \pi t_1-\pi/3=2\pi/3,\quad 4\pi/3$$

因该时刻速度为负，应舍去4π/3 $\Rightarrow$ t_1=1s

设物体在t_2时刻第一次回到平衡位置，相位是3π/2

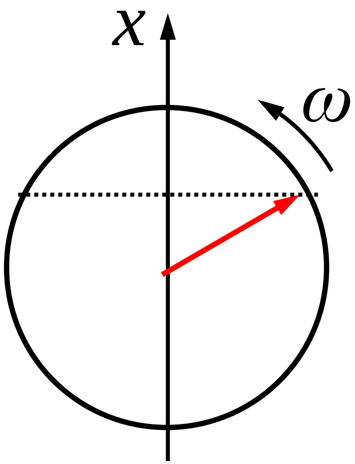
$$\Rightarrow \quad \pi t_2-\pi/3=3\pi/2 \quad \Rightarrow \quad t_2=1.83\text{s}$$

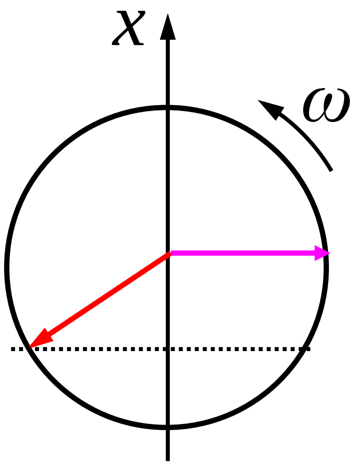
因此从x = -0.06m处第一次回到平衡位置的时间：

$$\Delta t=t_2-t_1=0.83\text{s}$$

另解：从t_1时刻到t_2时刻所对应的相差为：

$$\Delta\varphi=3\pi/2-2\pi/3=5\pi/6 \quad \Rightarrow \quad \Delta t=\Delta\varphi/\omega=0.83\text{s}$$





$$\varphi_0 = -\pi/3$$

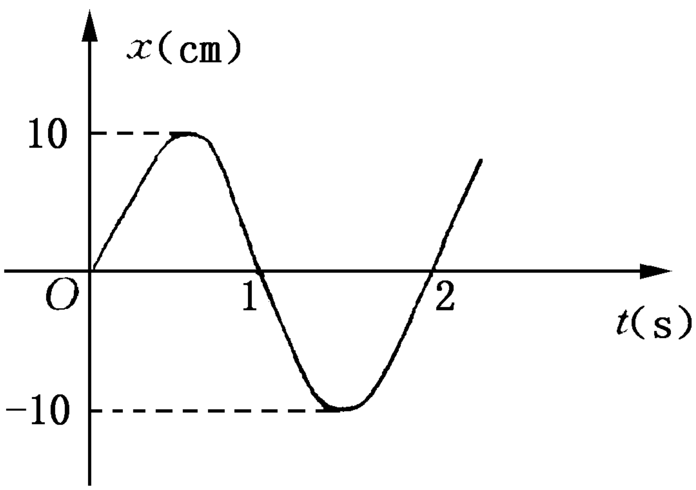
$$\Delta\varphi = 3\pi/2 - 2\pi/3 = 5\pi/6$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$ → 其解为 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

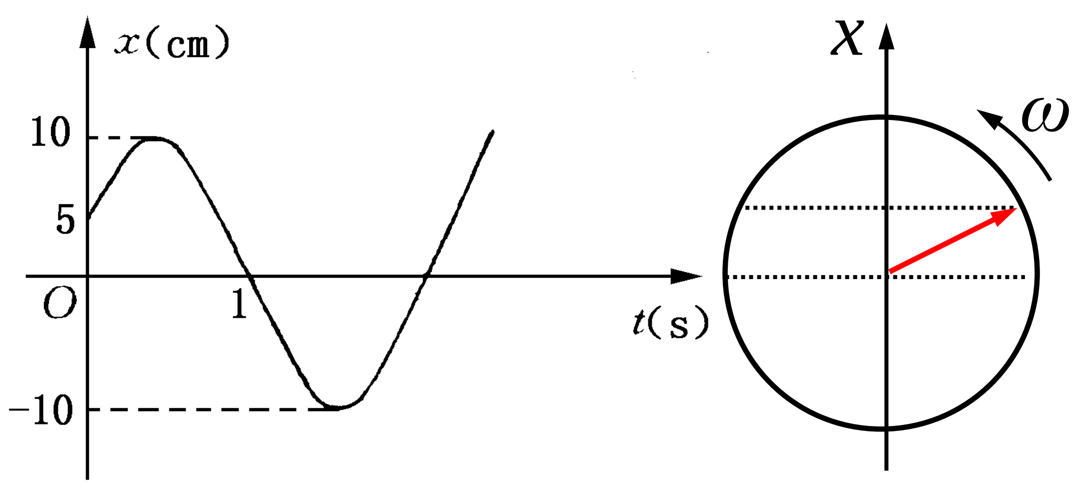
$$A=\sqrt{x_0{}^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\begin{cases} x_0=A\cos\varphi_0 \\ v_0=-A\omega\sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_0$$

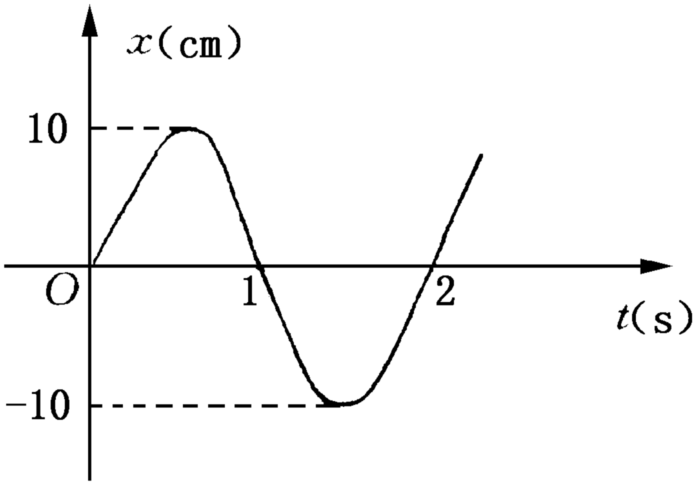
旋转矢量表示法



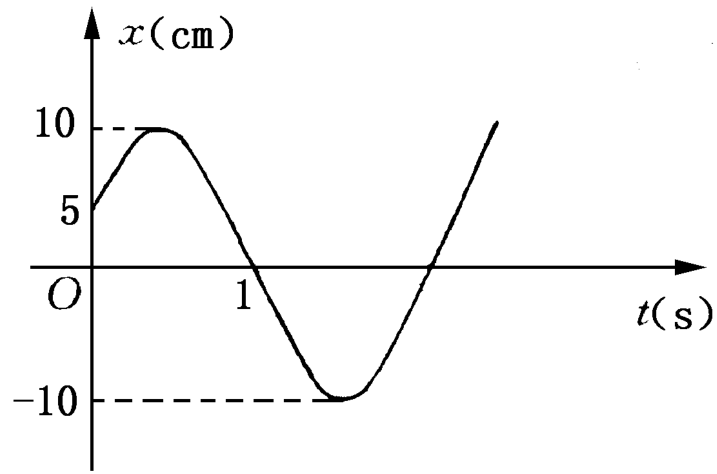
(a)



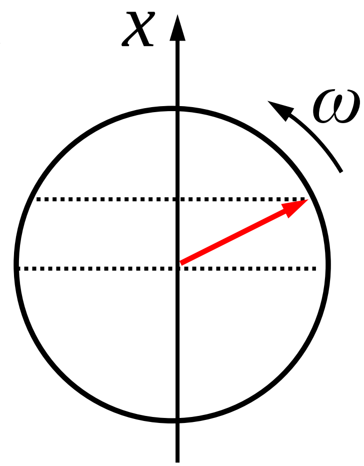
(b)



(a)



(b)

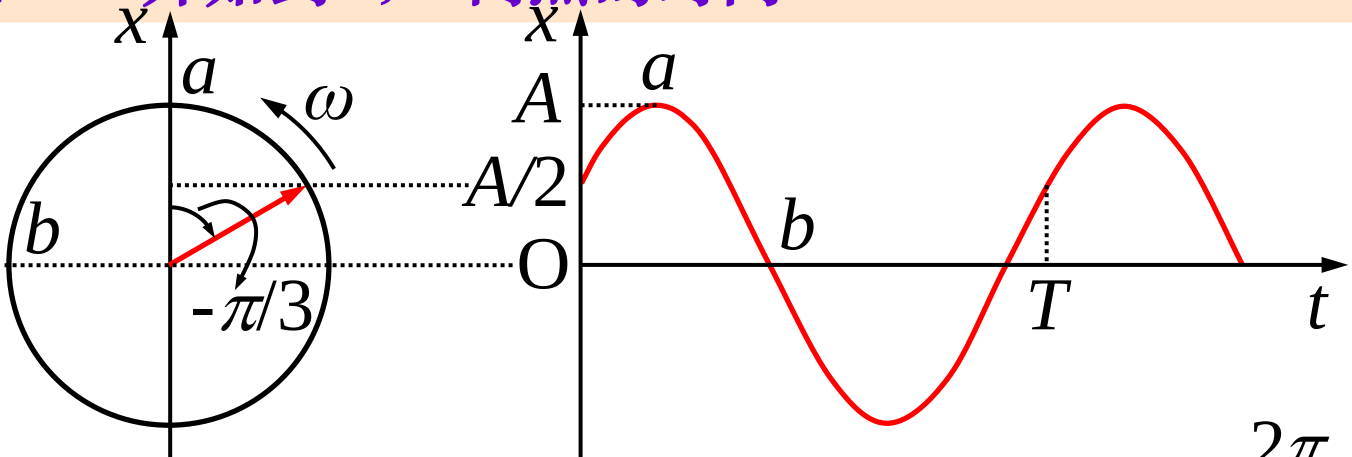


a A=10cm $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$

b A=10cm $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{3}$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\pi/2 + \pi/3}{1} = \frac{5}{6}\pi$$

练9.3.1 如图所示简谐振动，已知周期 T，求 (1) 初相；(2) a, b 两点相位；(3)从 t =0 开始到 a, b 两点的时间。



解：$x = A\cos(\omega t+\varphi)$, $\quad v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$, $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

(1) $\left.\begin{aligned} &t=0,\quad x=A/2,\quad \therefore A/2 = A\cos\varphi \\ &t=0,\quad v>0,\quad \therefore -\omega A\sin\varphi > 0 \end{aligned}\right\} \varphi = -\pi/3$

(2) a 点 $x = A = A\cos(\omega t_a+\varphi)$, 相位 $\omega t_a + \varphi = 0$

$\left.\begin{aligned} b \text{ 点} \quad & x = 0 = A\cos(\omega t_b+\varphi) \\ & v = -\omega A\sin(\omega t_b+\varphi) < 0 \end{aligned}\right\}$ 相位 $\omega t_b + \varphi = \pi/2$

(3) 已求出 ω 和 φ，解得 $t_a = T/6$, $t_b = 5T/12$

作业： 16 17 21 23 25 27

作业(五)： 14 15 18 20 22 24

9.4 简谐振动的能量

以水平弹簧振子为例讨论简谐振动系统的能量

某一时刻，谐振子速度为v，位移为x

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

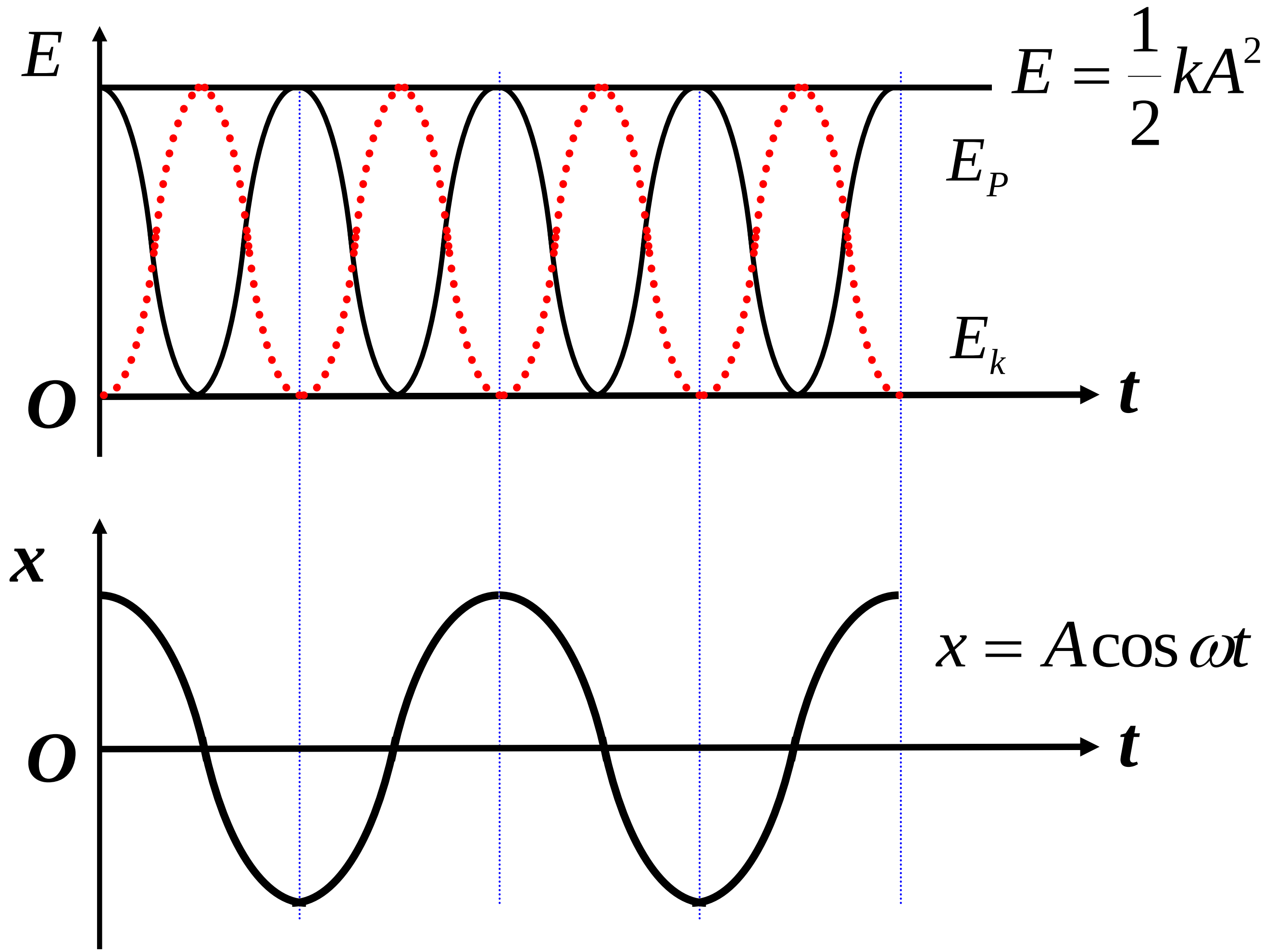
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

谐振动的动能和势能是时间的周期性函数

动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$	$E_{k\max} = \frac{1}{2}kA^2 \quad E_{k\min} = 0$ $\overline{E_k} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_k dt = \frac{1}{4}kA^2$
势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$	$E_{p\max}, E_{p\min}, \overline{E_p}$ 情况同动能。
机械能 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$	简谐振动系统机械能守恒 动能与势能互相转化

谐振子的动能、势能和总能量随时间的变化曲线:



$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}mv_m^2$$

例9.4.1 质量为0.10kg的物体，以振幅0.01m作简谐运动，其最大加速度为4.0m/s²，求：

（1）振动的周期；（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；（4）物体在何处其动能和势能相等?

（1） $a_{\max} = A\omega^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = 20 rad/s \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.314\text{s}$

（2） $E_{\mathrm{k,max}} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2.0\times10^{-3}\,\text{J}$

（3） $E = E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times10^{-3}\,\text{J}$

（4） $E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ 时， $\boldsymbol{E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} k A^2}$

$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{A} = \pm 0.707\,\mathbf{cm}$$

练9.4.1 一物理摆如图所示，质量是2.0 kg，质心和转轴的距离是1.0m，转动惯量是0.5 kgm². (g =10 m/s²)

a)求小角度摆动时的周期T?

b)当t=1.0s, θ=0.1rad, dθ/dt =0.05 rad/s. 求最大角速度

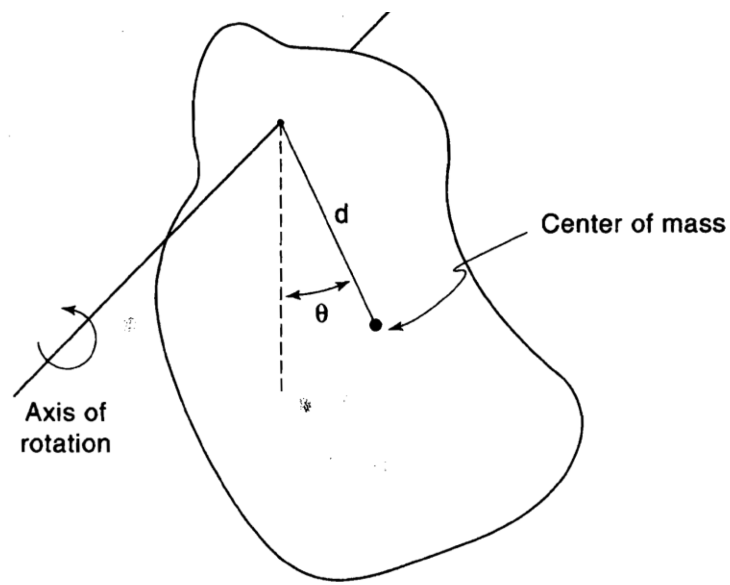
$$M = -mgd\sin\theta \approx -mgd\theta \qquad M = J\alpha = J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{J}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}} = 6.32 rad/s$$

$$E_p = mgh = mgd(1-\cos\theta)$$

$$mgd(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega_{\max}^2$$

$$\omega_{\max} = 0.63 rad/s$$

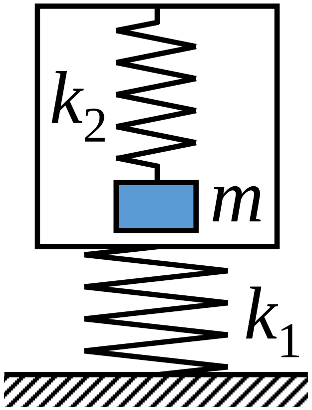


作业： 29 30

作业(五)： 26 27

9.5 简谐振动的合成

一、同方向、同频率谐振动的合成



$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

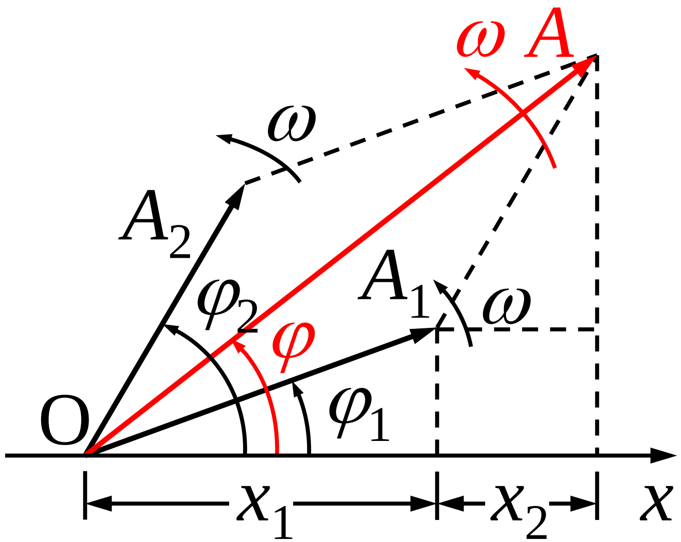
$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

合运动 $x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$

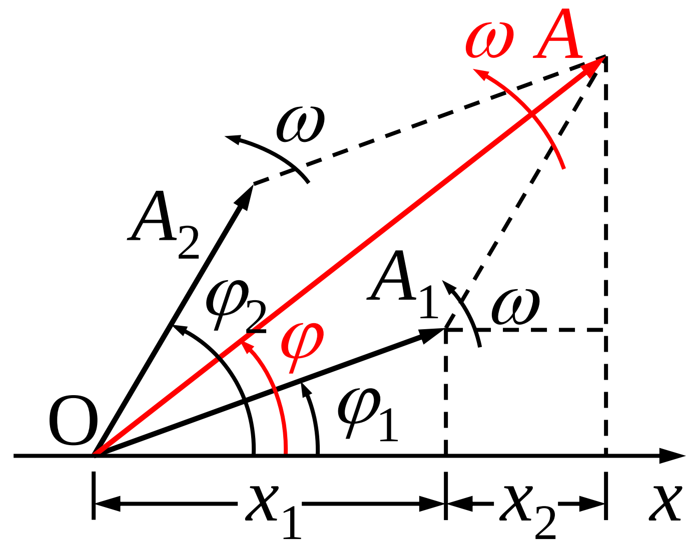
仍是简谐振动，其中

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$



讨论

1. 两分振动同相，即

$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

则 $A=A_1+A_2$，相互加强；

2. 两分振动反相，即 $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

则 $A=|A_1-A_2|$，相互减弱。

3. 当相位差 $\varphi_2-\varphi_1$ 为其它值时，合振幅 A 界于 A_1+A_2 和 $|A_1-A_2|$ 之间。

$$\begin{cases} x_1=5\cos(3t+\dfrac{\pi}{3})\text{cm} \\ x_2=5\cos(3t+\dfrac{7\pi}{3})\text{cm}\end{cases}\qquad \begin{cases} x_1=5\cos(3t+\dfrac{\pi}{3})\text{cm} \\ x_2=10\cos(3t+\dfrac{4\pi}{3})\text{cm}\end{cases}$$

二. 同方向不同频率简谐振动的合成

分振动 $x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$

$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$

合振动 $x = x_1 + x_2$

$$x = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)$$

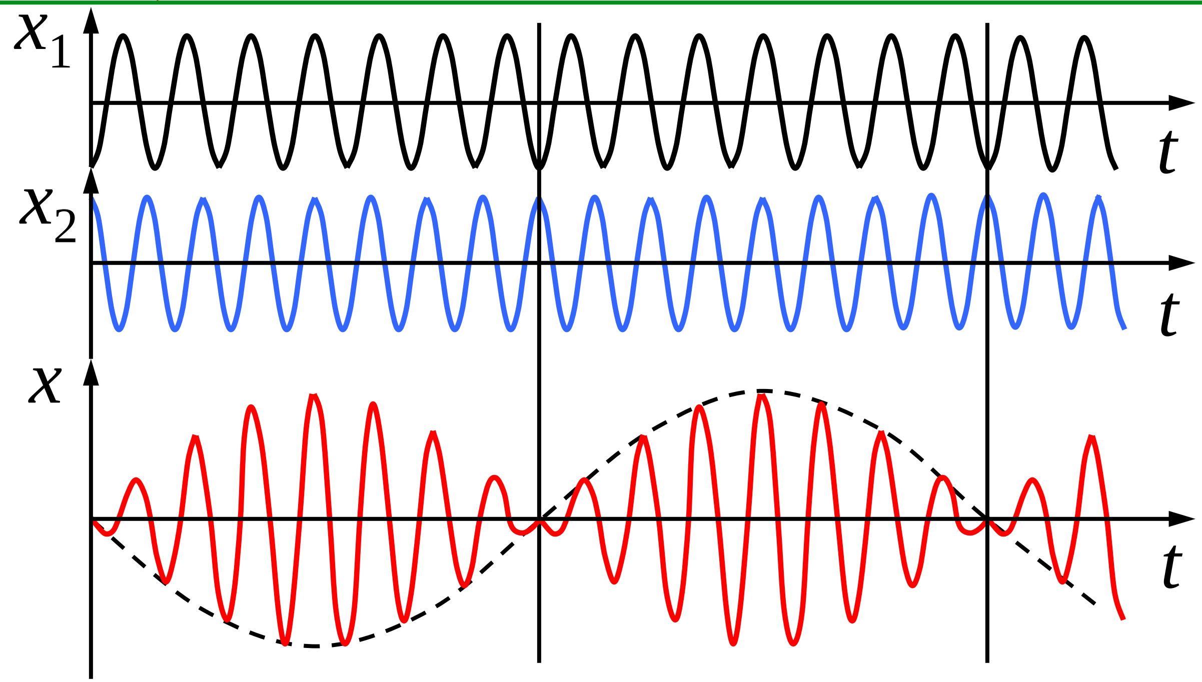
合振动不是简谐振动

当 $\omega_2 \sim \omega_1$ 时，$\omega_2 - \omega_1 << \omega_2 + \omega_1$ 则：$x = A(t)\cos\overline{\omega}\,t$

式中 $A(t) = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t$ 随 t 缓变

$\cos\overline{\omega}\,t = \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t$ 随 t 快变

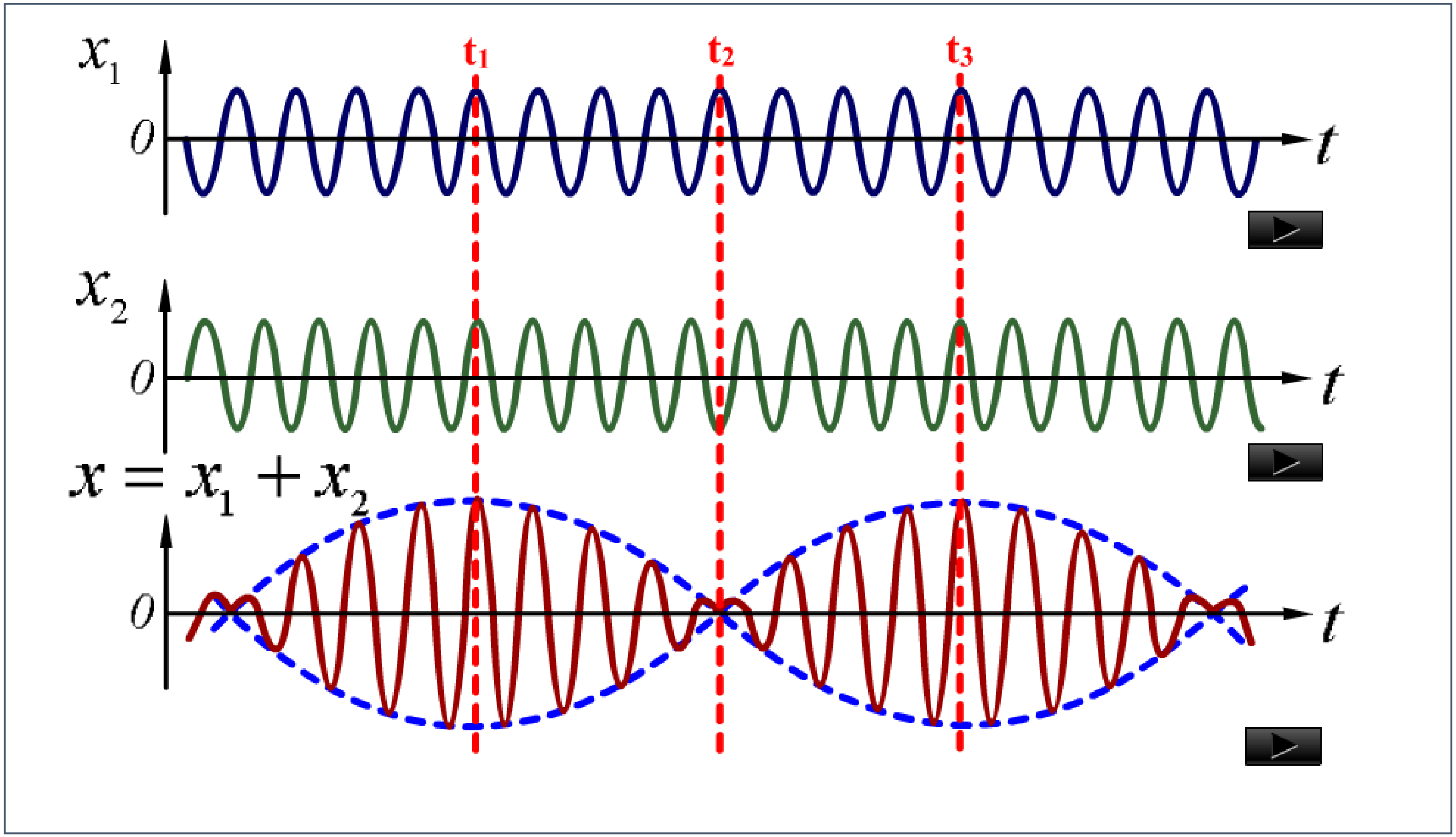
合振动可看作振幅缓变的简谐振动



频率都较大但差别很小的两个同方向振动合成时，合振动忽强忽弱的现象叫做**拍**。单位时间内合振动加强或减弱的次数叫**拍频**

<u>拍频</u>：单位时间内强弱变化的次数 $\nu = |\nu_2 - \nu_1|$

$$\omega_{拍} = \omega_2 - \omega_1 \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$$


x_1
t_1
t_2
t_3
0
t
x_2
0
t
$x = x_1 + x_2$
0
t

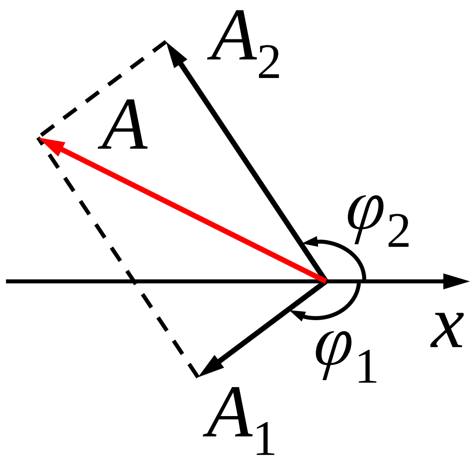
例9.5.1 两振动的运动函数分别为　求合振动的运动函数。

$$x_1 = 5\cos(100t - \frac{5}{6}\pi)(\text{cm}), \quad x_2 = 5\sqrt{3}\cos(100t + \frac{2}{3}\pi)(\text{cm})$$

解：同频同向简谐振动的合成。

$$A = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2 + 2\times 5\times 5\sqrt{3}\times\cos(\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{5}{6}\pi)} = 10\,(\text{cm})$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{5\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + 5\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi}{5\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + 5\sqrt{3}\cos\frac{2}{3}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\varphi = -\pi/6 \quad \text{or} \quad 5\pi/6$$

应取 $\varphi = \frac{5}{6}\pi$， $x = x_1 + x_2 = 10\cos(100t + \frac{5}{6}\pi)\,(\text{cm})$

练习9.5.1 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动，振动方程为

$$\begin{cases} x_1 = 0.4\cos(2t+\dfrac{\pi}{6})\text{m} \\ x_2 = 0.3\cos(2t-\dfrac{5}{6}\pi)\text{m} \end{cases}$$

解： $\because$ $\Delta\phi = \dfrac{\pi}{6} - (-\dfrac{5}{6}\pi) = \pi$ $\qquad A_{合} = |A_1 - A_2| = 0.1\text{m}$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_2\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} = \frac{0.4\times\sin\dfrac{\pi}{6} - 0.3\sin\dfrac{5\pi}{6}}{0.4\cos\dfrac{\pi}{6} + 0.3\cos\dfrac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \phi = \frac{\pi}{6}$$

其振动方程为 $\quad x = 0.1\cos(2t+\dfrac{\pi}{6})\text{m}$

三 两个相互垂直的同频率的简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

质点运动轨迹 （椭圆方程）

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

讨论

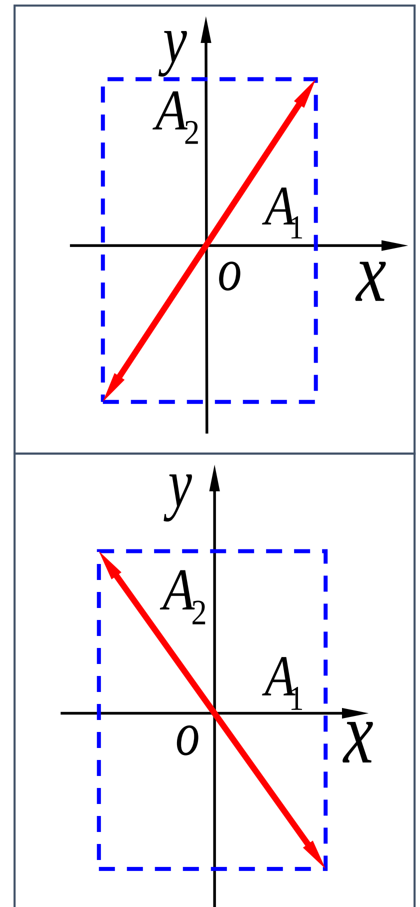
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

（1）$\varphi_2-\varphi_1=0$ 或 2π

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$

（2）$\varphi_2-\varphi_1=\pi$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$

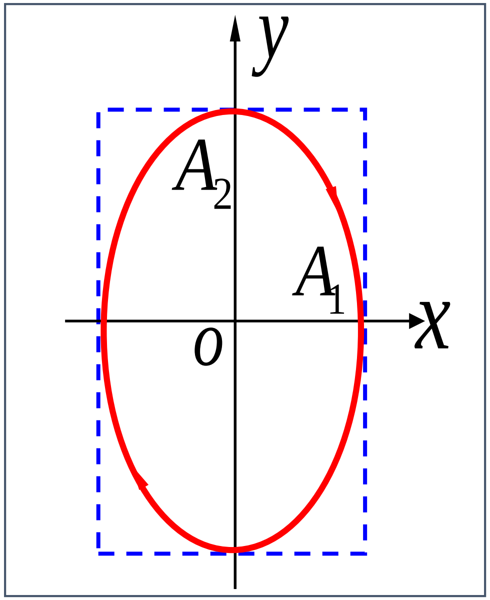


讨论 $$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

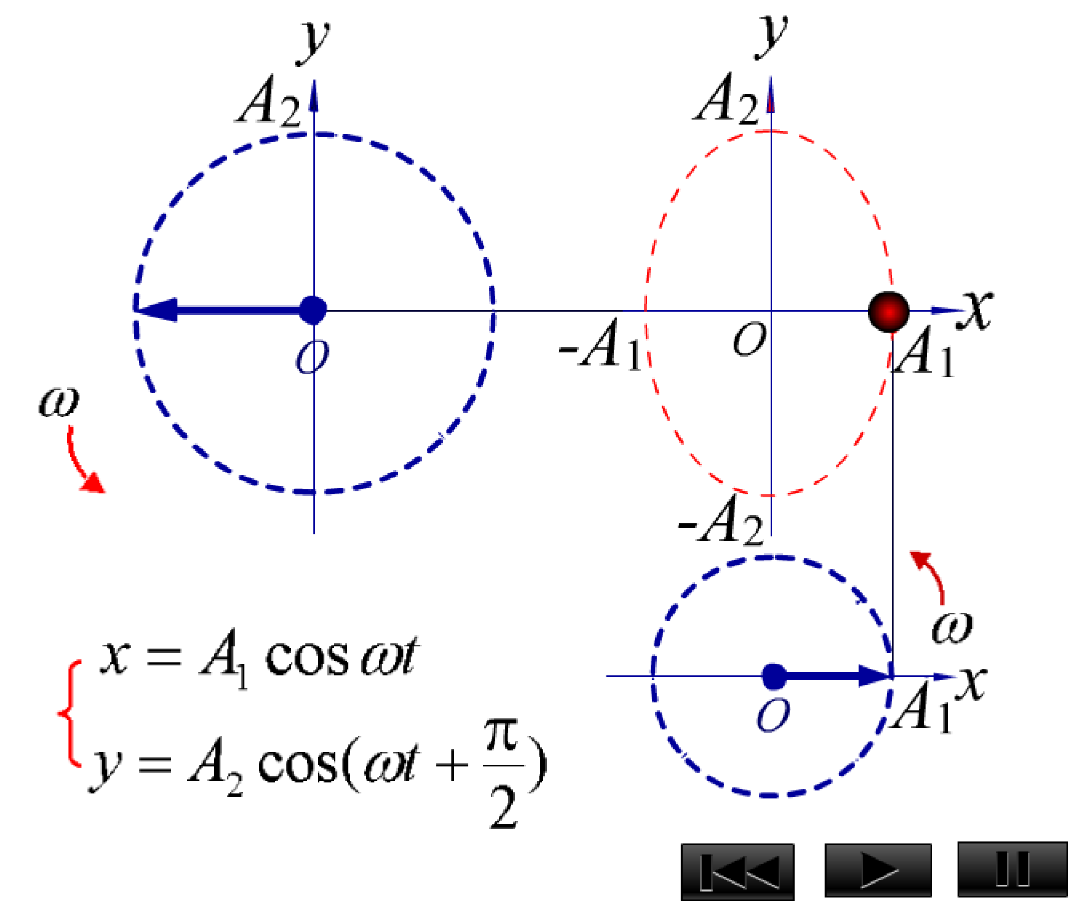
（3） $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi/2$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

$$\begin{cases} x=A_1\cos\omega t \\ y=A_2\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

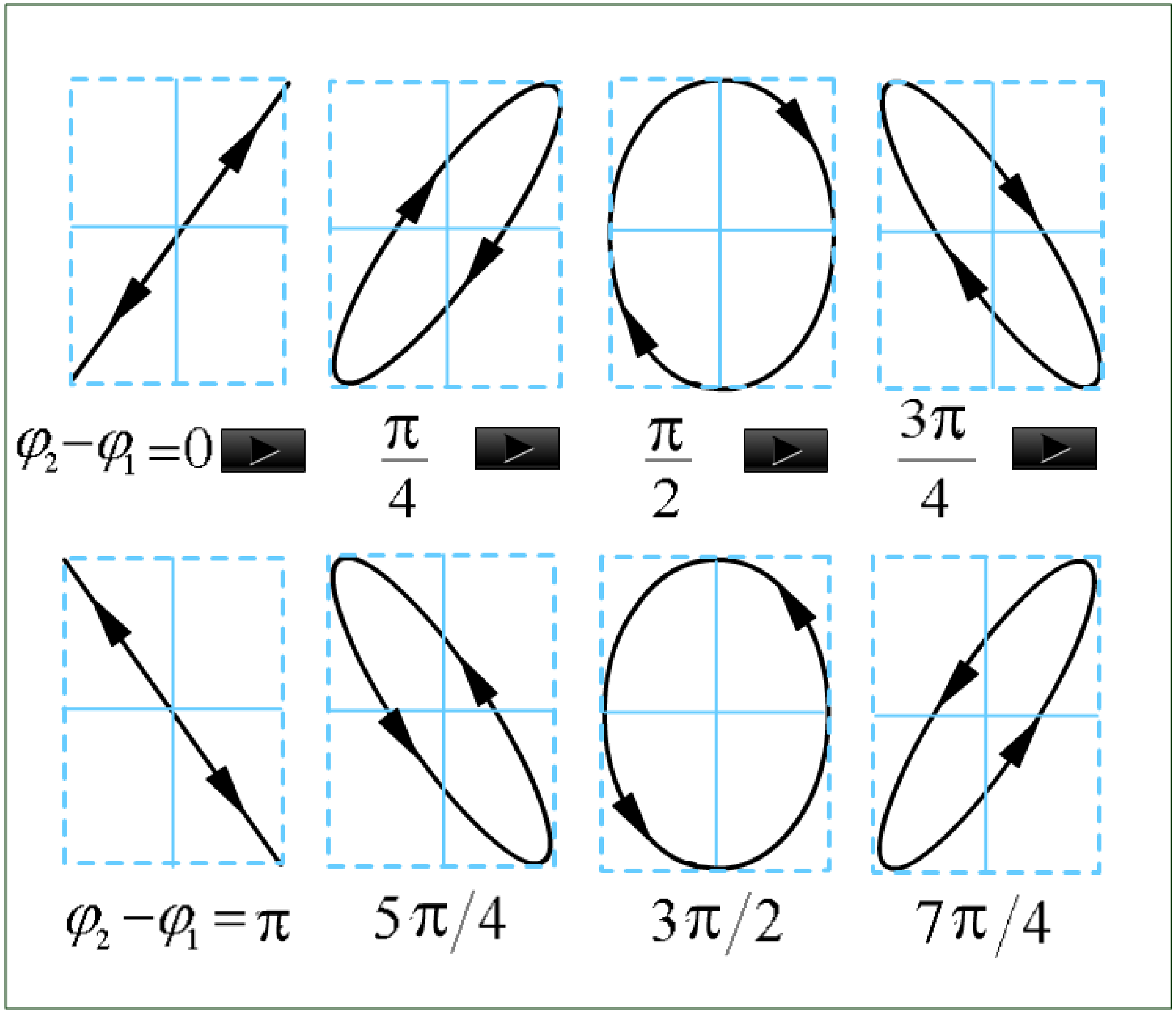


用旋转矢量描绘振动合成图



$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

两相互垂直同频率不同相位差简谐运动的合成图



作业：　31　　32　　35

作业(五)：　28　　30　　31

9.6 阻尼振动 受迫振动 共振

一、 阻尼振动

能量随时间减小的振动称阻尼振动或减幅振动。

阻尼振动

- 摩擦阻尼:
  系统克服阻力作功使振幅受到摩擦力的作用，系统的动能转化为热能。
- 辐射阻尼:
  振动以波的形式向外传波，使振动能量向周围辐射出去。

阻尼振动的振动方程（系统受到弱介质阻力而衰减）

弱介质阻力是指振子运动速度较低时，

介质对物体的阻力仅与速度的一次方成正比

振子受阻力 $f_r = \gamma v = -\gamma \dfrac{dx}{dt}$ γ—阻力系数

振子动力学方程 $-kx - \gamma \dfrac{dx}{dt} = m \dfrac{d^2x}{dt^2}$

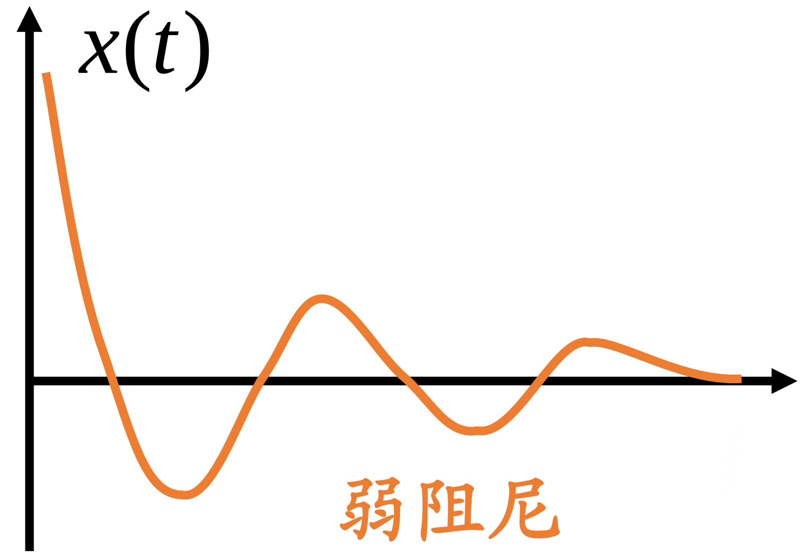
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 系统固有角频率 $\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$ 阻尼系数

弱阻尼 $\beta << \omega_0$

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \beta^2}$$



阻尼振动的振幅按指数衰减

阻尼振动的准周期

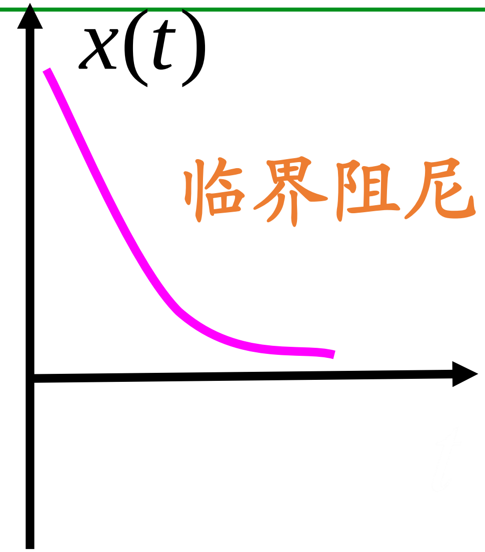
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^{\ 2} - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}$$

每一周期内损失的能量越小，振幅衰减越慢，周期越接近于谐振动。

临界阻尼 $\beta=\omega_0$

$$x=(c_1+c_2t)e^{-\beta t}$$

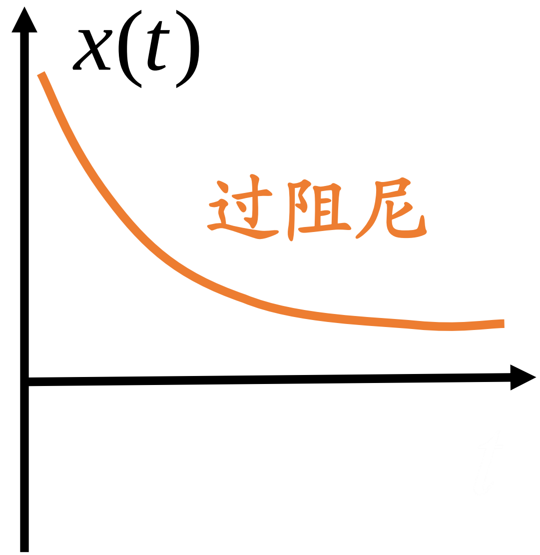
系统不作往复运动，而是较快地回到平衡位置并停下来



过阻尼 $\beta>\omega_0$

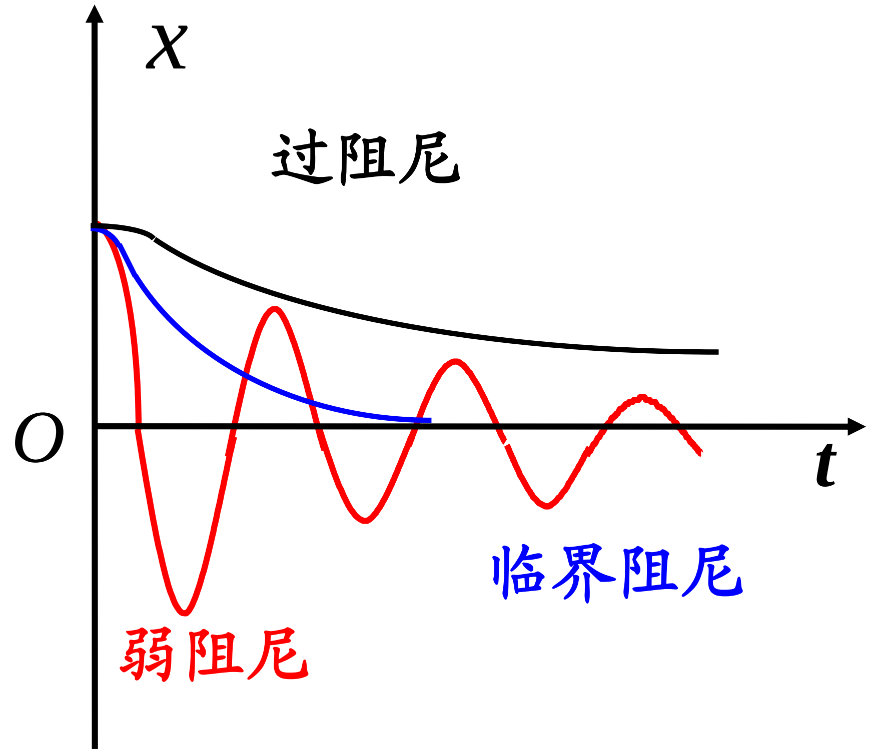
$$x=c_1e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2})t}+c_2e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2})t}$$

系统不作往复运动，而是非常缓慢地回到平衡位置



阻尼振动的三种情形：

- 过阻尼 $\beta > \omega_0$
- 弱阻尼 $\beta < \omega_0$
- 临界阻尼 $\beta = \omega_0$



通过控制阻尼的大小，以满足不同实际需要。

物理天平，灵敏电流表指针止振需要这种阻尼

二、 受迫振动

受迫振动　振动系统在周期性外力作用下的振动。

周期性外力——驱动力　$F = F_0 \cos pt$

弱阻尼谐振子系统在驱动力作用下的受迫振动的方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_0 \cos pt$$

令 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　$\beta = \dfrac{\gamma}{2m},\ f_0 = \dfrac{F_0}{m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos pt$$

$$x = A_0 e^{-\beta t}(\cos\omega t + \varphi_0) + A\cos(pt + \varphi)$$

阻尼振动　　简谐振动

稳定解　$x = A\cos(pt + \varphi)$

特点 稳态时的受迫振动按简谐振动的规律变化

(1)频率:　等于驱动力的频率 ω

(2)振幅:　$$A = \frac{f_0}{[(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2]^{1/2}}$$

(3)初相:　$$tg\varphi = -\frac{2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}$$

三、共振

1、位移共振

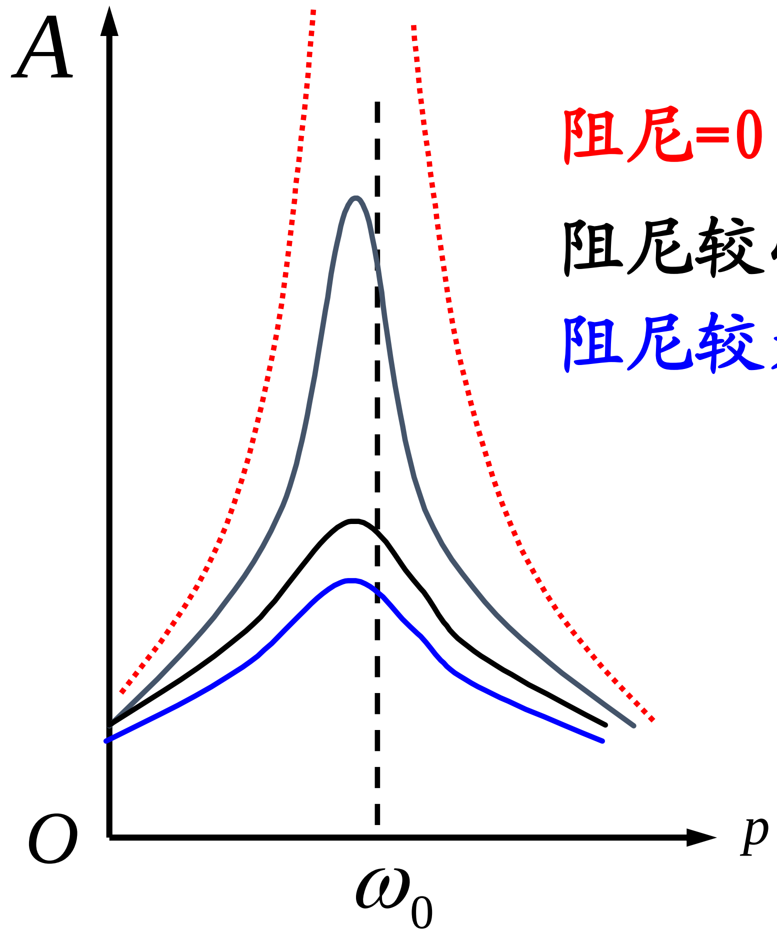
在一定条件下，振幅出现极大值，振动剧烈的现象。

(1)共振频率：

$$p_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

(2)共振振幅：

$$A_r = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$



2、速度共振　一定条件下，速度振幅极大的现象。

$$v = -pA\sin(pt+\varphi)$$

$$v_m = pA = \frac{pf_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

$$p_r = \omega_0 \qquad v_{mr} = f_0/2\beta$$

速度共振时，速度与驱动力同相，一周期内驱动力总作正功，此时向系统输入的能量最大。