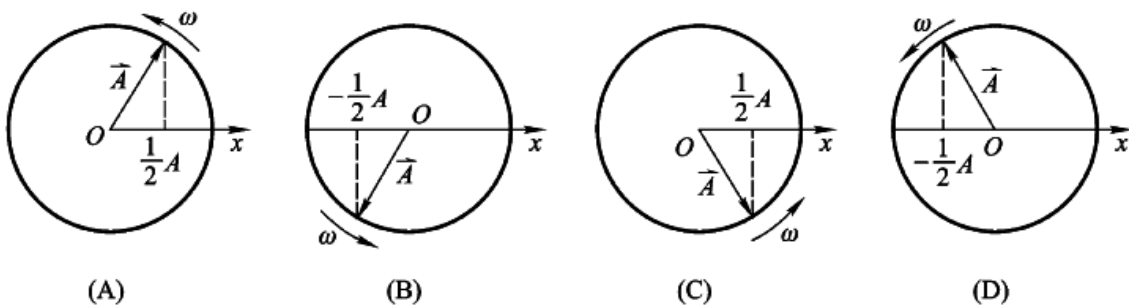


## 第九章 振动

9-1 一个质点作简谐运动, 振幅为  $A$ , 在起始时刻质点的位移为  $-\frac{A}{2}$ , 且向  $x$  轴正方向运动, 代表此简谐运动的旋转矢量为 ( )

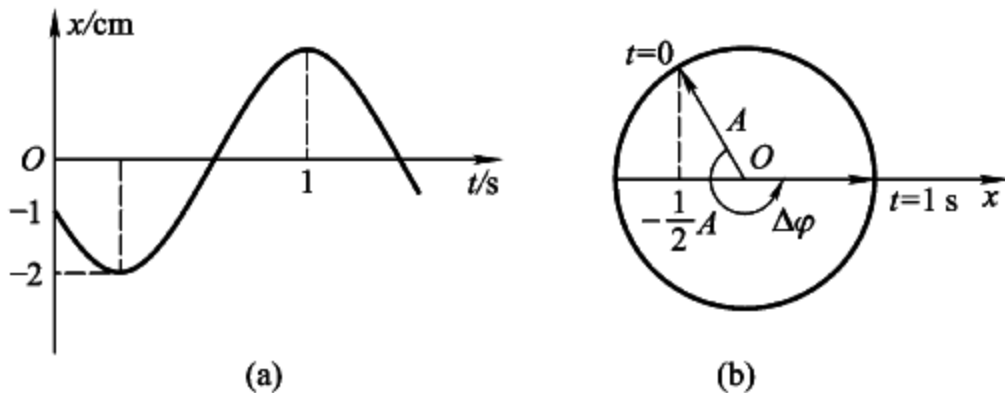


题 9-1 图

**分析与解** (b) 图中旋转矢量的矢端在  $x$  轴上投影点的位移为  $-A/2$ , 且投影点的运动方向指向  $O_x$  轴正向, 即其速度的  $x$  分量大于零, 故满足题意. 因而正确答案为 (b).

9-2 已知某简谐运动的振动曲线如图 (a) 所示, 则此简谐运动的运动方程为 ( )

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad x &= 2\cos\left[\frac{2}{3}\pi t - \frac{2}{3}\pi\right] (\text{cm}) & \text{(C)} \quad x &= 2\cos\left[\frac{2}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right] (\text{cm}) \\ \text{(B)} \quad x &= 2\cos\left[\frac{4}{3}\pi t - \frac{2}{3}\pi\right] (\text{cm}) & \text{(D)} \quad x &= 2\cos\left[\frac{4}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right] (\text{cm}) \end{aligned}$$



题 9-2 图

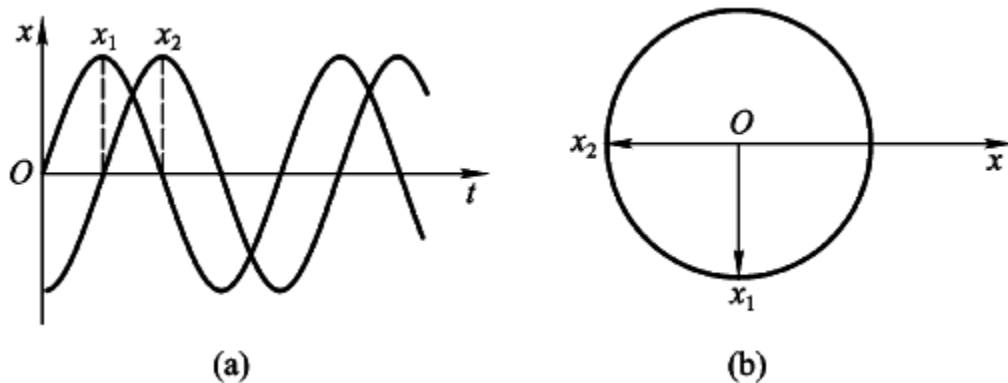
**分析与解** 由振动曲线可知, 初始时刻质点的位移为  $-A/2$ , 且向  $x$  轴负方向运动. 图 (b) 是其相应的旋转矢量图, 由旋转矢量法可知初相位为  $2\pi/3$ . 振动曲线上给出质点从  $-A/2$  处运动到  $+A$  处所需时间为  $1\text{ s}$ , 由对应旋转矢量图可知相应的相位差  $\Delta\varphi = 4\pi/3$ , 则角频率  $\omega = \Delta\varphi / \Delta t = (4\pi/3)\text{ s}^{-1}$ , 故选 (D). 本题也可根据振动曲线所给信息, 逐一代入方程

来找出正确答案.

**9-3** 两个同周期简谐运动曲线如图 (a) 所示,  $x_1$  的相位比  $x_2$  的相位 ( )

- (A) 落后  $\frac{\pi}{2}$       (B) 超前  $\frac{\pi}{2}$       (C) 落后  $\pi$       (D) 超前  $\pi$

**分析与解** 由振动曲线图作出相应的旋转矢量图 (b) 即可得到答案为 (b).



题 9-3 图

**9-4** 当质点以频率  $\nu$  作简谐运动时, 它的动能的变化频率为 ( )

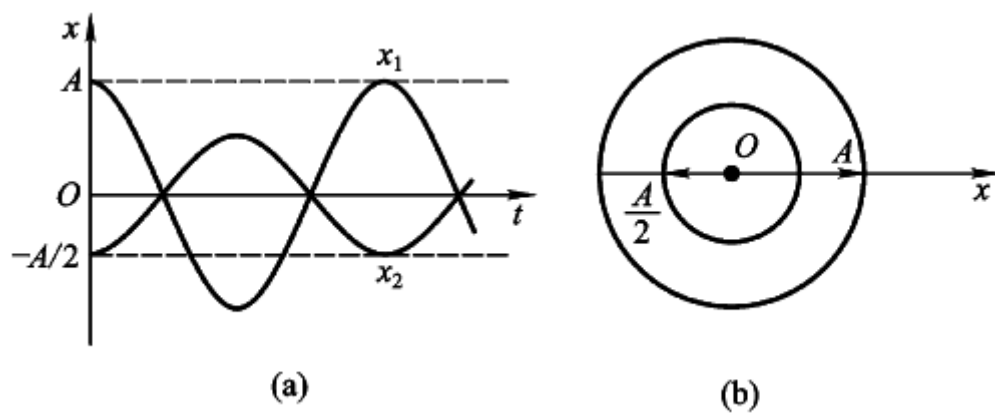
- (A)  $\frac{\nu}{2}$       (B)  $\nu$       (C)  $2\nu$       (D)  $4\nu$

**分析与解** 质点作简谐运动的动能表式为  $E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$ , 可见其周期为简谐运动周期的一半, 则频率为简谐运动频率  $\nu$  的两倍. 因而正确答案为 (C).

**9-5** 图 (a) 中所画的是两个简谐运动的曲线, 若这两个简谐运动可叠加, 则合成的余弦振动的初相位为 ( )

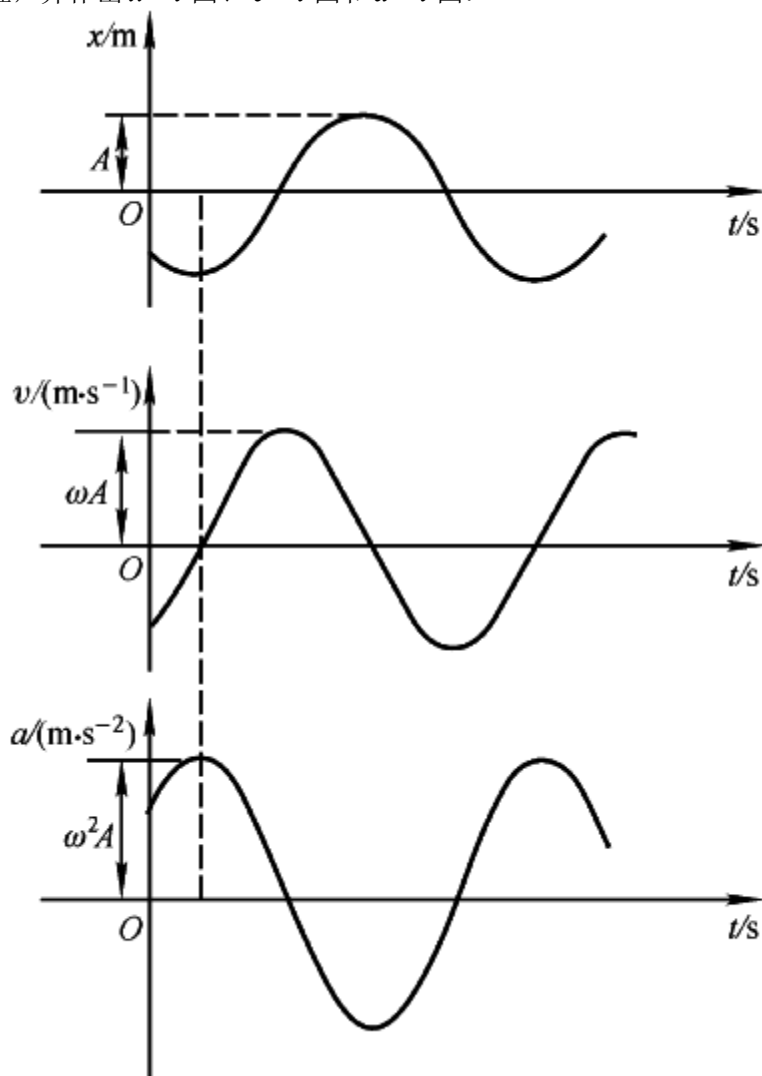
- (A)  $\frac{3}{2}\pi$       (B)  $\frac{1}{2}\pi$       (C)  $\pi$       (D) 0

**分析与解** 由振动曲线可以知道, 这是两个同振动方向、同频率简谐运动, 它们的相位差是  $\pi$  (即反相位). 运动方程分别为  $x_1 = A \cos \omega t$  和  $x_2 = \frac{A}{2} \cos(\omega t + \pi)$ . 它们的振幅不同. 对于这样两个简谐运动, 可用旋转矢量法, 如图 (b) 很方便求得合运动方程为  $x_1 = \frac{A}{2} \cos \omega t$ . 因而正确答案为 (D).



题 9-5 图

9-6 有一个弹簧振子，振幅  $A = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，周期  $T = 1.0 \text{ s}$ ，初相  $\varphi = 3\pi/4$ 。试写出它的运动方程，并作出  $x-t$  图、 $v-t$  图和  $a-t$  图。



题 9-6 图

分析 弹簧振子的振动是简谐运动。振幅  $A$ 、初相  $\varphi$ 、角频率  $\omega$  是简谐运动方程

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$  的三个特征量. 求运动方程就要设法确定这三个物理量. 题中除  $A$ 、 $\varphi$  已知外,  $\omega$  可通过关系式  $\omega = 2\pi/T$  确定. 振子运动的速度和加速度的计算仍与质点运动学中的计算方法相同.

**解** 因  $\omega = 2\pi/T$ , 则运动方程

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$$

根据题中给出的数据得

$$x = 2.0 \times 10^{-2} \cos(2\pi t + 0.75\pi) \text{ (m)}$$

振子的速度和加速度分别为

$$\begin{aligned} v &= dx/dt = -4\pi \times 10^{-2} \sin(2\pi t + 0.75\pi) \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ a &= d^2x/d^2t = -8\pi \times 10^{-2} \cos(2\pi t + 0.75\pi) \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{aligned}$$

$x-t$ 、 $v-t$  及  $a-t$  图如图所示.

**9-7** 若简谐运动方程为  $x = 0.10 \cos(20\pi t + 0.25\pi) \text{ (m)}$ , 求: (1) 振幅、频率、角频率、周期和初相; (2)  $t = 2\text{s}$  时的位移、速度和加速度.

**分析** 可采用比较法求解. 将已知的简谐运动方程与简谐运动方程的一般形式  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$  作比较, 即可求得各特征量. 运用与上题相同的处理方法, 写出位移、速度、加速度的表达式, 代入  $t$  值后, 即可求得结果.

**解** (1) 将  $x = 0.10 \cos(20\pi t + 0.25\pi) \text{ (m)}$  与  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$  比较后可得: 振幅  $A = 0.10\text{m}$ , 角频率  $\omega = 20\pi \text{ s}^{-1}$ , 初相  $\varphi = 0.25\pi$ , 则周期  $T = 2\pi/\omega = 0.1\text{s}$ , 频率  $\nu = 1/T \text{ Hz}$ .

(2)  $t = 2\text{s}$  时的位移、速度、加速度分别为

$$\begin{aligned} x &= 0.10 \cos(40\pi t + 0.25\pi) = 7.07 \times 10^{-2} \text{ m} \\ v &= dx/dt = -2\pi \sin(40\pi t + 0.25\pi) = -4.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ a &= d^2x/d^2t = -40\pi^2 \cos(40\pi t + 0.25\pi) = -2.79 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

**9-8** 一远洋货轮, 质量为  $m$ , 浮在水面时其水平截面积为  $S$ . 设在水面附近货轮的水平截面积近似相等, 水的密度为  $\rho$ , 且不计水的粘滞阻力, 证明货轮在水中作振幅较小的竖直自由运动是简谐运动, 并求振动周期.

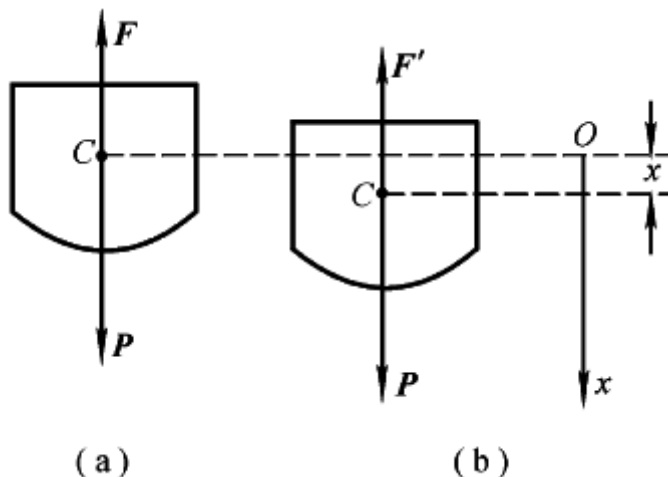
**分析** 要证明货轮作简谐运动, 需要分析货轮在平衡位置附近上下运动时, 它所受的合外力  $F$  与位移  $x$  间的关系, 如果满足  $F = -kx$ , 则货轮作简谐运动. 通过  $F = -kx$  即可求得振动周期  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ .

**证** 货轮处于平衡状态时 [图 (a)], 浮力大小为  $F = mg$ . 当船上下作微小振动时, 取货轮处于力平衡时的质心位置为坐标原点  $O$ , 竖直向下为  $x$  轴正向, 如图 (b) 所示. 则当货轮向下偏移  $x$  位移时, 受合外力为

$$\sum F = P + F'$$

其中  $F'$  为此时货轮所受浮力, 其方向向上, 大小为

$$F' = F + \rho g S x = mg + \rho g S x$$



题 9-8 图

则货轮所受合外力为

$$\sum F = P - F' = -\rho g S x = -kx$$

式中  $k = \rho g S$  是一常数. 这表明货轮在其平衡位置上下所作的微小振动是简谐运动.

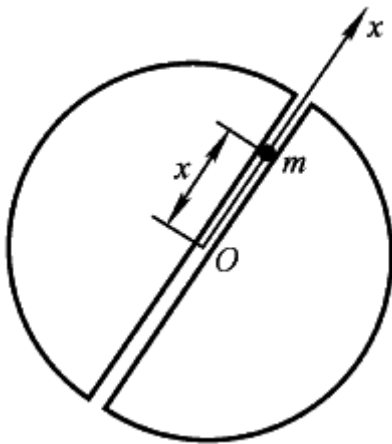
由  $\sum F = m d^2 x / d^2 t$  可得货轮运动的微分方程为

$$d^2 x / d^2 t + \rho g S x / m = 0$$

令  $\omega^2 = \rho g S / m$ , 可得其振动周期为

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{m / \rho g S}$$

**9-9** 设地球是一个半径为  $R$  的均匀球体, 密度  $\rho = 5.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . 现假定沿直径凿通一条隧道, 若有一质量为  $m$  的质点在此隧道内作无摩擦运动. (1) 证明此质点的运动是简谐运动; (2) 计算其周期.



题 9-9 图

**分析** 证明方法与上题相似. 分析质点在隧道内运动时的受力特征即可.

**证** (1) 取图所示坐标. 当质量为  $m$  的质点位于  $x$  处时, 它受地球的引力为

$$F = -G \frac{m_x m}{x^2}$$

式中  $G$  为引力常量,  $m_x$  是以  $x$  为半径的球体质量, 即  $m_x = 4\pi\rho x^3/3$ . 令  $k = 4\pi\rho Gm/3$ , 则质点受力

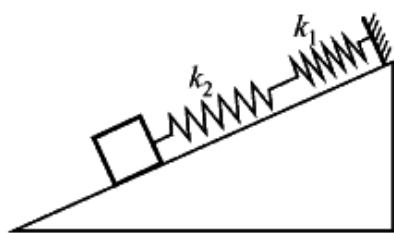
$$F = 4\pi\rho Gmx/3 = -kx$$

因此, 质点作简谐运动.

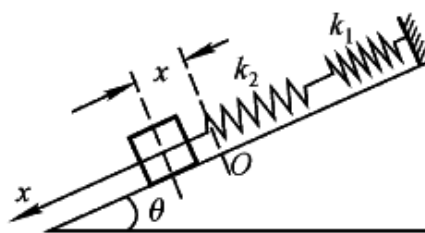
(2) 质点振动的周期为

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{m/k} = \sqrt{3\pi/G\rho} \\ &= 5.07 \times 10^3 \text{ s} \end{aligned}$$

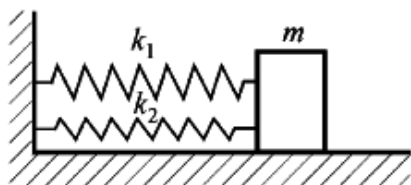
**9-10** 如图 (a) 所示, 两个轻弹簧的劲度系数分别为  $k_1$ 、 $k_2$ . 当物体在光滑斜面上振动时. (1) 证明其运动仍是简谐运动; (2) 求系统的振动频率.



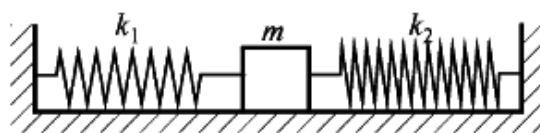
(a)



(b)



(c)



(d)

题 9-10 图

**分析** 从上两题的求解知道, 要证明一个系统作简谐运动, 首先要分析受力情况, 然后看是否满足简谐运动的受力特征 (或简谐运动微分方程). 为此, 建立如图 (b) 所示的坐标. 设系统平衡时物体所在位置为坐标原点  $O$ ,  $Ox$  轴正向沿斜面向下, 由受力分析可知, 沿  $Ox$  轴, 物体受弹性力及重力分力的作用, 其中弹性力是变力. 利用串联时各弹簧受力相等, 分析物体在任一位置时受力与位移的关系, 即可证得物体作简谐运动, 并可求出频率  $\nu$ .

**证** 设物体平衡时两弹簧伸长分别为  $x_1$ 、 $x_2$ , 则由物体受力平衡, 有

$$mg\sin\theta = k_1 x_1 = k_2 x_2 \quad (1)$$

按图 (b) 所取坐标, 物体沿  $x$  轴移动位移  $x$  时, 两弹簧又分别被拉伸  $x'_1$  和  $x'_2$ , 即  $x = x'_1 + x'_2$ . 则物体受力为

$$F = mg \sin \theta - k_2(x_2 + x'_2) = mg \sin \theta - k_1(x_1 + x'_1) \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)得

$$F = -k_2 x'_2 = -k_1 x'_1 \quad (3)$$

由式(3)得  $x'_1 = -F/k_1$ 、 $x'_2 = -F/k_2$ ，而  $x = x'_1 + x'_2$ ，则得到

$$F = -[k_1 k_2 / (k_1 + k_2)] x = -kx$$

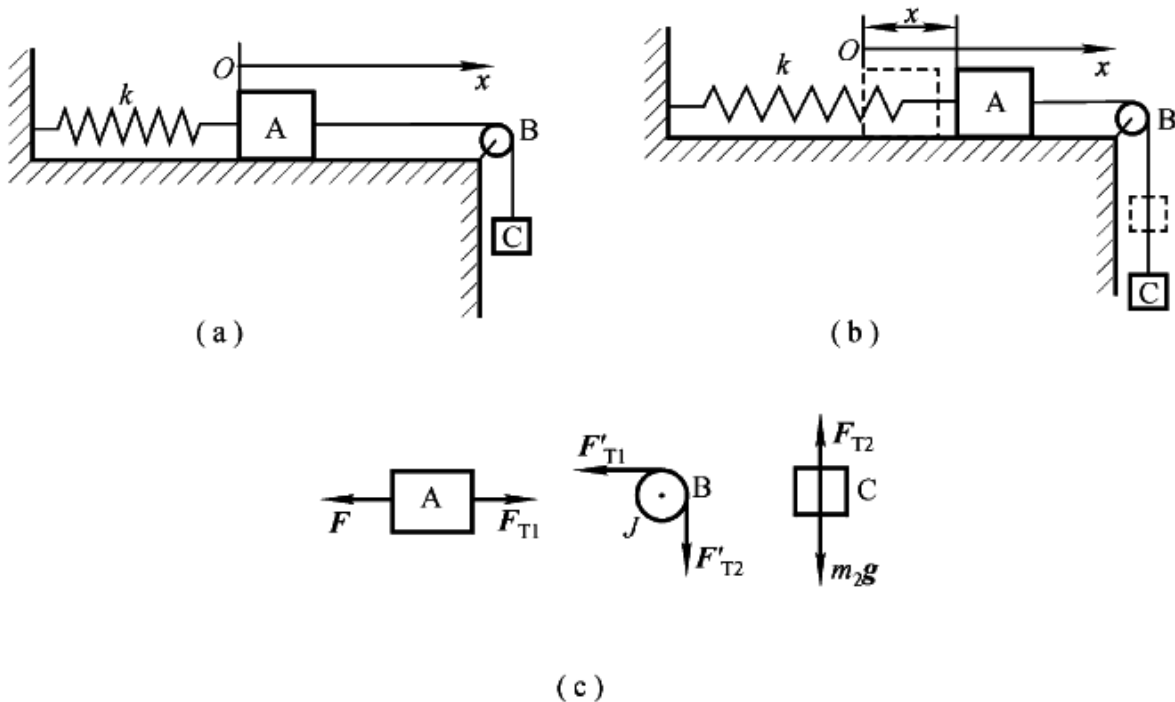
式中  $k = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$  为常数，则物体作简谐运动，振动频率

$$\nu = \omega / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k_1 k_2 / (k_1 + k_2) m}$$

**讨论** (1) 由本题的求证可知，斜面倾角  $\theta$  对弹簧是否作简谐运动以及振动的频率均不产生影响。事实上，无论弹簧水平放置、斜置还是竖直悬挂，物体均作简谐运动。而且可以证明它们的频率相同，均由弹簧振子的固有性质决定，这就是称为固有频率的原因。(2) 如果振动系统如图(c)(弹簧并联)或如图(d)所示，也可通过物体在某一位置的受力分析得出其作简谐运动，且振动频率均为  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ ，读者可以一试。通过这些例子可以知道，

证明物体是否作简谐运动的思路是相同的。

**\*9-11** 在如图(a)所示装置中，一劲度系数为  $k$  的轻弹簧，一端固定在墙上，另一端连接一质量为  $m_1$  的物体 A，置于光滑水平桌面上。现通过一质量  $m$ 、半径为  $R$  的定滑轮 B(可视为匀质圆盘)用细绳连接另一质量为  $m_2$  的物体 C。设细绳不可伸长，且与滑轮间无相对滑动，求系统的振动角频率。



题 9-11 图

**分析** 这是一个由弹簧、物体 A、C 和滑轮 B 组成的简谐运动系统。求解系统的振动频率可采用两种方法。(1) 从受力分析着手。如图(b)所示，设系统处于平衡状态时，与物体

A 相连的弹簧一端所在位置为坐标原点  $O$ ，此时弹簧已伸长  $x_0$ ，且  $kx_0 = m_2g$ 。当弹簧沿  $O_x$  轴正向从原点  $O$  伸长  $x$  时，分析物体 A、C 及滑轮 B 的受力情况，并分别列出它们的动力学方程，可解得系统作简谐运动的微分方程。（2）从系统机械能守恒着手。列出系统机械能守恒方程，然后求得系统作简谐运动的微分方程。

**解 1** 在图 (b) 的状态下，各物体受力如图 (c) 所示。其中  $F = -k(x + x_0)i$ 。考虑到绳子不可伸长，对物体 A、B、C 分别列方程，有

$$F_{T1} - k(x + x_0) = m_1 \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

$$m_2g - F_{T2} = m_2 \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

$$(F_{T2} - F_{T1})R = J\alpha = \frac{1}{2}mR \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

$$kx_0 = m_2g \quad (4)$$

方程 (3) 中用到了  $F_{T2} = F'_{T2}$ 、 $F_{T1} = F'_{T1}$ 、 $J = mR^2/2$  及  $\alpha = a/R$ 。联立式 (1) ~ 式 (4) 可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_1 + m_2 + m/2}x = 0 \quad (5)$$

则系统振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{k/(m_1 + m_2 + m/2)}$$

**解 2** 取整个振动装置和地球为研究系统，因没有外力和非保守内力做功，系统机械能守恒。设物体平衡时为初始状态，物体向右偏移距离  $x$ （此时速度为  $v$ 、加速度为  $a$ ）为末状态，则由机械能守恒定律，有

$$E_0 = -m_2gx + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}k(x + x_0)^2$$

在列出上述方程时应注意势能（重力势能和弹性势能）零点的选取。为运算方便，选初始状态下物体 C 所在位置为重力势能零点；弹簧原长时为弹性势能的零点。将上述方程对时间求得

$$0 = -m_2gv + m_1v \frac{dv}{dt} + m_2v \frac{dv}{dt} + J\omega \frac{d\omega}{dt} + k(x + x_0) \frac{dx}{dt}$$

将  $J = mR^2/2$ ， $\omega R = v$ ， $dv/dt = d^2x/dt^2$  和  $m_2g = kx_0$  代入上式，可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_1 + m_2 + m/2}x = 0 \quad (6)$$

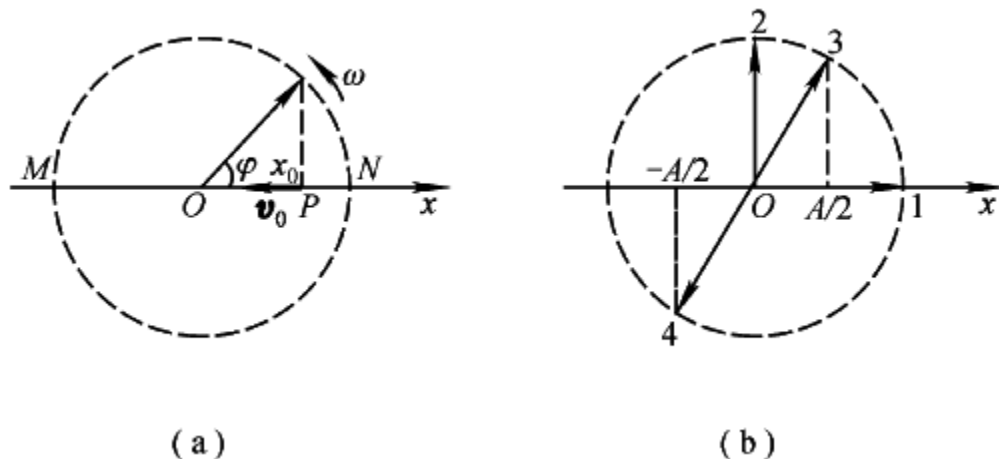
式 (6) 与式 (5) 相同，表明两种解法结果一致。

**9-12** 一放置在水平桌面上的弹簧振子，振幅  $A = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，周期  $T = 0.50 \text{ s}$ 。当  $t = 0$  时，(1) 物体在正方向端点；(2) 物体在平衡位置、向负方向运动；(3) 物体在  $x = -1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  处，向负方向运动；(4) 物体在  $x = -1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  处，向正方向运动。求以上各种情况的运动方程。

**分析** 在振幅  $A$  和周期  $T$  已知的条件下，确定初相  $\varphi$  是求解简谐运动方程的关键。初相



的确定通常有两种方法. (1) 解析法: 由振动方程出发, 根据初始条件, 即  $t=0$  时,  $x=x_0$  和  $v=v_0$  来确定  $\varphi$  值. (2) 旋转矢量法: 如图 (a) 所示, 将质点  $P$  在  $Ox$  轴上振动的初始位置  $x_0$  和速度  $v_0$  的方向与旋转矢量图相对应来确定  $\varphi$ . 旋转矢量法比较直观、方便, 在分析中常采用.



题 9-12 图

**解** 由题给条件知  $A=2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $\omega=2/T=4\pi \text{ s}^{-1}$ , 而初相  $\varphi$  可采用分析中的两种不同方法来求.

**解析法:** 根据简谐运动方程  $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ , 当  $t=0$  时有  $x_0=A\cos(\omega t+\varphi)$ ,  $v_0=-A\omega\sin$ . 当 (1)  $x_0=A$  时,  $\cos\varphi_1=1$ , 则  $\varphi_1=0$ ;

(2)  $x_0=0$  时,  $\cos\varphi_2=0$ ,  $\varphi_2=\pm\frac{\pi}{2}$ , 因  $v_0<0$ , 取  $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ ;

(3)  $x_0=1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  时,  $\cos\varphi_3=0.5$ ,  $\varphi_3=\pm\frac{\pi}{3}$ , 由  $v_0<0$ , 取  $\varphi_3=\frac{\pi}{3}$ ;

(4)  $x_0=-1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  时,  $\cos\varphi_4=-0.5$ ,  $\varphi_4=\pi\pm\frac{\pi}{3}$ , 由  $v_0>0$ , 取  $\varphi_4=\frac{4\pi}{3}$ .

**旋转矢量法:** 分别画出四个不同初始状态的旋转矢量图, 如图 (b) 所示, 它们所对应的初相分别为  $\varphi_1=0$ ,  $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_3=\frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi_4=\frac{4\pi}{3}$ .

振幅  $A$ 、角频率  $\omega$ 、初相  $\varphi$  均确定后, 则各相应状态下的运动方程为

(1)  $x=2.0 \times 10^{-2} \cos 4\pi t \quad (\text{m})$

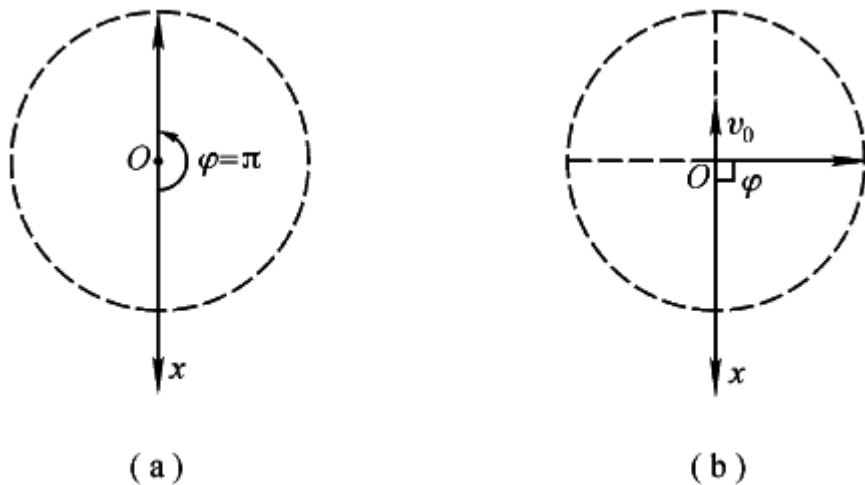
(2)  $x=2.0 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi/2) \quad (\text{m})$

(3)  $x=2.0 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi/3) \quad (\text{m})$

(4)  $x=2.0 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + 4\pi/3) \quad (\text{m})$

**9-13** 有一弹簧, 当其下端挂一质量为  $m$  的物体时, 伸长量为  $9.8 \times 10^{-2} \text{ m}$ . 若使物体上、下振动, 且规定向下为正方向. (1) 当  $t=0$  时, 物体在平衡位置上方  $8.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  处, 由静止开始向下运动, 求运动方程. (2) 当  $t=0$  时, 物体在平衡位置并以  $0.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度向上运动, 求运动方程.

**分析** 求运动方程，也就是要确定振动的三个特征物理量  $A$ 、 $\omega$  和  $\varphi$ 。其中振动的角频率是由弹簧振子系统的固有性质（振子质量  $m$  及弹簧劲度系数  $k$ ）决定的，即  $\omega = \sqrt{k/m}$ ， $k$  可根据物体受力平衡时弹簧的伸长来计算；振幅  $A$  和初相  $\varphi$  需要根据初始条件确定。



题 9-13 图

**解** 物体受力平衡时，弹性力  $F$  与重力  $P$  的大小相等，即  $F = mg$ 。而此时弹簧的伸长量  $\Delta l = 9.8 \times 10^{-2} \text{ m}$ 。则弹簧的劲度系数  $k = F / \Delta l = mg / \Delta l$ 。系统作简谐运动的角频率为

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/\Delta l} = 10 \text{ s}^{-1}$$

(1) 设系统平衡时，物体所在处为坐标原点，向下为  $x$  轴正向。由初始条件  $t = 0$  时， $x_{10} = 8.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、 $v_{10} = 0$  可得振幅  $A = \sqrt{x_{10}^2 + (v_{10}/\omega)^2} = 8.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ；应用旋转矢量法可确定初相  $\varphi_1 = \pi$  [图 (a)]。则运动方程为

$$x_1 = 8.0 \times 10^{-2} \cos(10t + \pi) \quad (\text{m})$$

(2)  $t = 0$  时， $x_{20} = 0$ 、 $v_{20} = 0.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，同理可得  $A_2 = \sqrt{x_{20}^2 + (v_{20}/\omega)^2} = 6.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ； $\varphi_2 = \pi/2$  [图 (b)]。则运动方程为

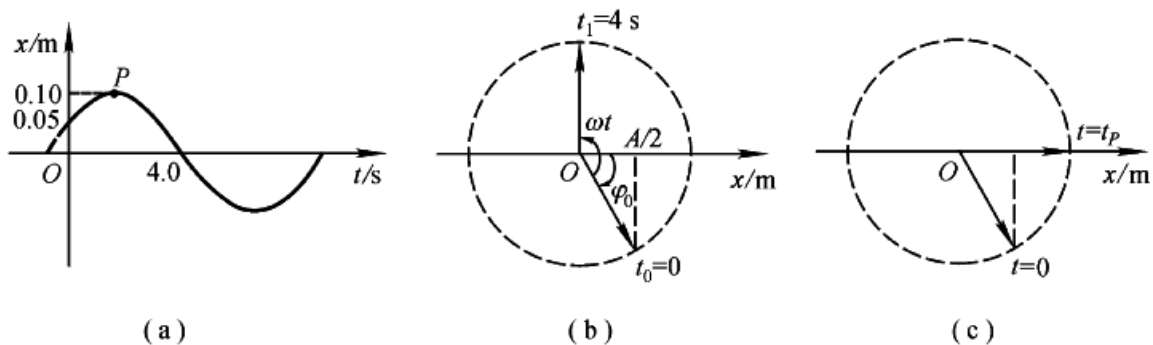
$$x_2 = 6.0 \times 10^{-2} \cos(10t + 0.5\pi) \quad (\text{m})$$

**9-14** 某振动质点的  $x-t$  曲线如图 (a) 所示，试求：(1) 运动方程；(2) 点  $P$  对应的相位；(3) 到达点  $P$  相应位置所需的时间。

**分析** 由已知运动方程画振动曲线和由振动曲线求运动方程是振动中常见的两类问题。本题就是要通过  $x-t$  图线确定振动的三个特征量  $A$ 、 $\omega$  和  $\varphi_0$ ，从而写出运动方程。曲线最大幅值即为振幅  $A$ ；而  $\omega$ 、 $\varphi_0$  通常可通过旋转矢量法或解析法解出，一般采用旋转矢量法比较方便。

**解** (1) 质点振动振幅  $A = 0.10 \text{ m}$ 。而由振动曲线可画出  $t_0 = 0$  和  $t_1 = 4 \text{ s}$  时旋转矢量，如图 (b) 所示。由图可见初相  $\varphi_0 = -\pi/3$ （或  $\varphi_0 = 5\pi/3$ ），而由  $\omega(t_1 - t_0) = \pi/2 + \pi/3$  得  $\omega = 5\pi/24 \text{ s}^{-1}$ ，则运动方程为

$$x = 0.10 \cos\left(\frac{5\pi}{24}t - \pi/3\right) \quad (\text{m})$$



题 9-14 图

(2) 图(a)中点P的位置是质点从 $A/2$ 处运动到正向的端点处,对应的旋转矢量图如图(c)所示.当初相取 $\varphi_0 = -\pi/3$ 时,点P的相位为 $\varphi_p = \varphi_0 + \omega(t_p - 0) = 0$  (如果初相取成 $\varphi_0 = 5\pi/3$ ,则点P相应的相位应表示为 $\varphi_p = \varphi_0 + \omega(t_p - 0) = 2\pi$ ).

(3) 由旋转矢量图可得 $\omega(t_p - 0) = \pi/3$ ,则 $t_p = 1.6$  s.

**9-15** 作简谐运动的物体,由平衡位置向 $x$ 轴正方向运动,试问经过下列路程所需的最短时间各为周期的几分之几? (1) 由平衡位置到最大位移处; (2) 由平衡位置到 $x = A/2$ 处; (3) 由 $x = A/2$ 处到最大位移处.

**解** 采用旋转矢量法求解较为方便.按题意作如图所示的旋转矢量图,平衡位置在点O.

(1) 平衡位置 $x_1$ 到最大位移 $x_3$ 处,图中的旋转矢量从位置1转到位置3,故 $\Delta\varphi_1 = \pi/2$ ,则所需时间

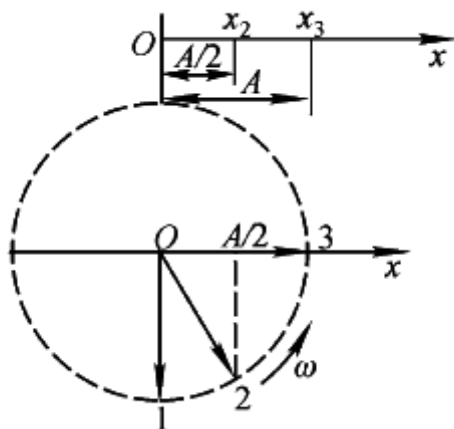
$$\Delta t_1 = \Delta\varphi_1 / \omega = T/4$$

(2) 从平衡位置 $x_1$ 到 $x_2 = A/2$ 处,图中旋转矢量从位置1转到位置2,故有 $\Delta\varphi_2 = \pi/6$ ,则所需时间

$$\Delta t_2 = \Delta\varphi_2 / \omega = T/12$$

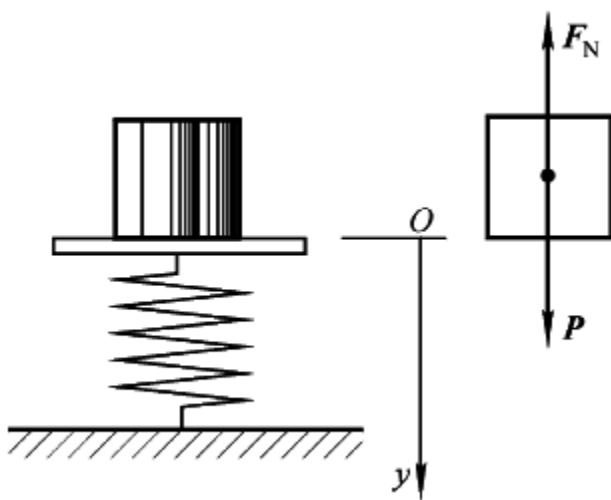
(3) 从 $x_2 = A/2$ 运动到最大位移 $x_3$ 处,图中旋转矢量从位置2转到位置3,有 $\Delta\varphi_3 = \pi/3$ ,则所需时间

$$\Delta t_3 = \Delta\varphi_3 / \omega = T/6$$



题 9-15 图

**9-16** 在一块平板下装有弹簧，平板上放一质量为  $1.0\text{ kg}$  的重物。现使平板沿竖直方向作上下简谐运动，周期为  $0.50\text{ s}$ ，振幅为  $2.0 \times 10^{-2}\text{ m}$ 。求：（1）平板到最低点时，重物对平板的作用力；（2）若频率不变，则平板以多大的振幅振动时，重物会跳离平板？（3）若振幅不变，则平板以多大的频率振动时，重物会跳离平板？



题 9-16 图

**分析** 按题意作示意图如图所示。物体在平衡位置附近随板作简谐运动，其间受重力  $P$  和板支持力  $F_N$  作用， $F_N$  是一个变力。按牛顿定律，有

$$F = mg - F_N = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (1)$$

由于物体是随板一起作简谐运动，因而有  $a = \frac{d^2 y}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$ ，则式（1）可改写为

$$F_N = mg + mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

（1）根据板运动的位置，确定此刻振动的相位  $\omega t + \varphi$ ，由式（2）可求板与物体之间的作用力。

（2）由式（2）可知支持力  $F_N$  的值与振幅  $A$ 、角频率  $\omega$  和相位  $(\omega t + \varphi)$  有关。在振动过程中，当  $\omega t + \varphi = \pi$  时  $F_N$  最小。而重物恰好跳离平板的条件为  $F_N = 0$ ，因此由式（2）可分别求出重物跳离平板所需的频率或振幅。

**解** （1）由分析可知，重物在最低点时，相位  $\omega t + \varphi = 0$ ，物体受板的支持力为

$$F_N = mg + mA\omega^2 = mg + mA(2\pi/t)^2 = 12.96\text{ N}$$

重物对木块的作用力  $F'_N$  与  $F_N$  大小相等，方向相反。

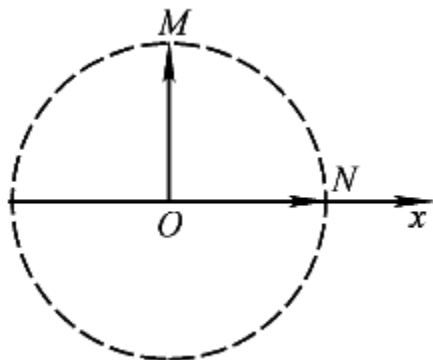
（2）当频率不变时，设振幅变为  $A'$ 。根据分析中所述，将  $F_N = 0$  及  $\omega t + \varphi = \pi$  代入分析中式（2），可得

$$A' = mg / m\omega^2 = gT^2 / 4\pi^2 = 6.2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

(3) 当振幅不变时, 设频率变为  $\nu'$ . 同样将  $F_N = 0$  及  $\omega t + \varphi = \pi$  代入分析中式 (2), 可得

$$\nu' = \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{mg / mA} = 3.52 \text{ Hz}$$

**9-17** 两质点作同频率、同振幅的简谐运动. 第一个质点的运动方程为  $x_1 = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 当第一个质点自振动正方向回到平衡位置时, 第二个质点恰在振动正方向的端点, 试用旋转矢量图表示它们, 并求第二个质点的运动方程及它们的相位差.



题 9-17 图

**解** 图示为两质点在时刻  $t$  的旋转矢量图, 可见第一个质点  $M$  的相位比第二个质点  $N$  的相位超前  $\pi/2$ , 即它们的相位差  $\Delta\varphi = \pi/2$ . 故第二个质点的运动方程应为

$$x_2 = A \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

**9-18** 图 (a) 为一简谐运动质点的速度与时间的关系曲线, 且振幅为 2cm, 求 (1) 振动周期; (2) 加速度的最大值; (3) 运动方程.

**分析** 根据  $v-t$  图可知速度的最大值  $v_{\max}$ , 由  $v_{\max} = A\omega$  可求出角频率  $\omega$ , 进而可求出周期  $T$  和加速度的最大值  $a_{\max} = A\omega^2$ . 在要求的简谐运动方程  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  中, 因为  $A$  和  $\omega$  已得出, 故只要求初相位  $\varphi$  即可. 由  $v-t$  曲线图可以知道, 当  $t=0$  时, 质点运动速度  $v_0 = v_{\max}/2 = A\omega/2$ , 之后速度越来越大, 因此可以判断出质点沿  $x$  轴正向向着平衡点运动. 利用  $v_0 = -A\omega \sin\varphi$  就可求出  $\varphi$ .

**解** (1) 由  $v_{\max} = A\omega$  得  $\omega = 1.5 \text{ s}^{-1}$ , 则

$$T = 2\pi / \omega = 4.2 \text{ s}$$

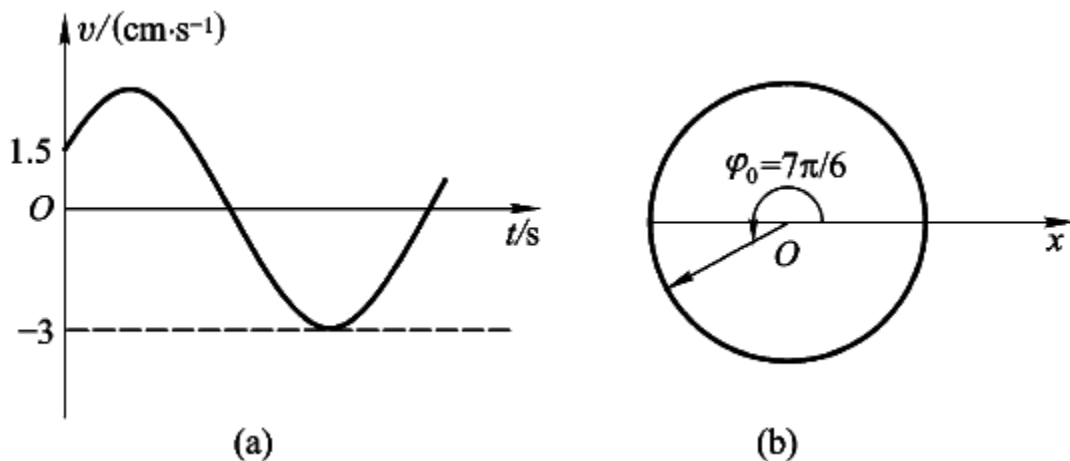
$$(2) a_{\max} = A\omega^2 = 4.5 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(3) 从分析中已知  $v_0 = -A\omega \sin\varphi = A\omega/2$ , 即

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= -1/2 \\ &= -\pi/6, -5\pi/6 \end{aligned}$$

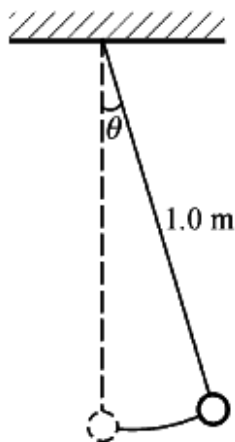
因为质点沿  $x$  轴正向向平衡位置运动, 则取  $\varphi = -5\pi/6$ , 其旋转矢量图如图 (b) 所示. 则运动方程为

$$x = 2 \cos(1.5t - 5\pi/6) (\text{cm})$$



题 9-18 图

**9-19** 有一单摆, 长为  $1.0\text{m}$ , 最大摆角为  $5^\circ$ , 如图所示. (1) 求摆的角频率和周期; (2) 设开始时摆角最大, 试写出此单摆的运动方程; (3) 摆角为  $3^\circ$  时的角速度和摆球的线速度各为多少?



题 9-19 图

**分析** 单摆在摆角较小时 ( $\theta < 5^\circ$ ) 的摆动, 其角量  $\theta$  与时间的关系可表示为简谐运动方程  $\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$ , 其中角频率  $\omega$  仍由该系统的性质 (重力加速度  $g$  和绳长  $l$ ) 决定, 即  $\omega = \sqrt{g/l}$ . 初相  $\varphi$  与摆角  $\theta$ , 质点的角速度与旋转矢量的角速度 (角频率) 均是不同的物理概念, 必须注意区分.

**解** (1) 单摆角频率及周期分别为

$$\omega = \sqrt{g/l} = 3.13 \text{ s}^{-1}; \quad T = 2\pi/\omega = 2.01 \text{ s}$$

(2) 由  $t = 0$  时  $\theta = \theta_{\max} = 5^\circ$  可得振动初相  $\varphi = 0$ , 则以角量表示的简谐运动方程为

$$\theta = \frac{\pi}{36} \cos 3.13t$$

(3) 摆角为  $3^\circ$  时, 有  $\cos(\omega t + \varphi) = \theta/\theta_{\max} = 0.6$ , 则这时质点的角速度为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t &= -\theta_{\max} \omega \sin(\omega t + \varphi) = -\theta_{\max} \omega \sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi)} \\ &= -0.80\theta_{\max} \omega = -0.218 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

线速度的大小为

$$v = l|\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t| = -0.218 \text{ s}^{-1}$$

**讨论** 质点的线速度和角速度也可通过机械能守恒定律求解,但结果会有极微小的差别.这是因为在导出简谐运动方程时曾取  $\sin\theta \approx \theta$ , 所以, 单摆的简谐运动方程仅在  $\theta$  较小时成立.

**9-20** 为了测月球表面的重力加速度, 宇航员将地球上的“秒摆”(周期为  $2.00 \text{ s}$ ), 拿到月球上去, 如测得周期为  $4.90 \text{ s}$ , 则月球表面的重力加速度约为多少? (取地球表面的重力加速度  $g_E = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ )

**解** 由单摆的周期公式  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$  可知  $g \propto 1/T^2$ , 故有  $g_M/g_E = T_E^2/T_M^2$ , 则月球的重力加速度为

$$g_M = (T_E/T_M)^2 g_E = 1.63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

**9-21** 一飞轮质量为  $12 \text{ kg}$ , 内缘半径  $r = 0.6 \text{ m}$ , 如图所示. 为了测定其对质心轴的转动惯量, 现让其绕内缘刃口摆动, 在摆角较小时, 测得周期为  $2.0 \text{ s}$ , 试求其绕质心轴的转动惯量.



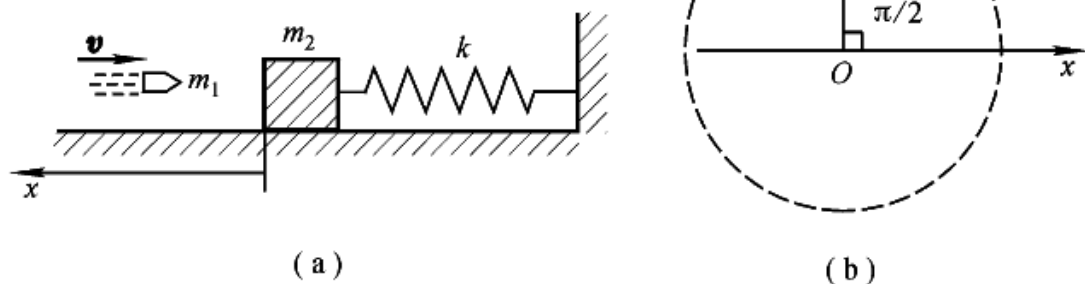
9-21 题图

**分析** 飞轮的运动相当于一个以刃口为转轴的复摆运动, 复摆振动周期为  $T = 2\pi\sqrt{J/mgl_c}$ , 因此, 只要知道复摆振动的周期和转轴到质心的距离  $l_c$ , 其以刃口为转轴的转动惯量即可求得. 再根据平行轴定理, 可求出其绕质心轴的转动惯量.

**解** 由复摆振动周期  $T = 2\pi\sqrt{J/mgl_c}$ , 可得  $J = mgrT^2/4\pi^2$ . 则由平行轴定理得

$$J_0 = J - mr^2 = mgrT^2/4\pi^2 - mr^2 = 2.83 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**9-22** 如图(a)所示, 质量为  $1.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$  的子弹, 以  $500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度射入木块, 并嵌在木块中, 同时使弹簧压缩从而作简谐运动, 设木块的质量为  $4.99 \text{ kg}$ , 弹簧的劲度系数为  $8.0 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , 若以弹簧原长时物体所在处为坐标原点, 向左为  $x$  轴正向, 求简谐运动方程.



题 9-22 图

**分析** 可分为两个过程讨论. 首先是子弹射入木块的过程, 在此过程中, 子弹和木块组成的系统满足动量守恒, 因而可以确定它们共同运动的初速度  $v_0$ , 即振动的初速度. 随后的过程是以子弹和木块为弹簧振子作简谐运动. 它的角频率由振子质量  $m_1 + m_2$  和弹簧的劲度系数  $k$  确定, 振幅和初相可根据初始条件 (初速度  $v_0$  和初位移  $x_0$ ) 求得. 初相位仍可用旋转矢量法求.

**解** 振动系统的角频率为

$$\omega = \sqrt{k / (m_1 + m_2)} = 40 \text{ s}^{-1}$$

由动量守恒定律得振动的初始速度即子弹和木块的共同运动初速度  $v_0$  为

$$v_0 = m_1 v / (m_1 + m_2) = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

又因初始位移  $x_0 = 0$ , 则振动系统的振幅为

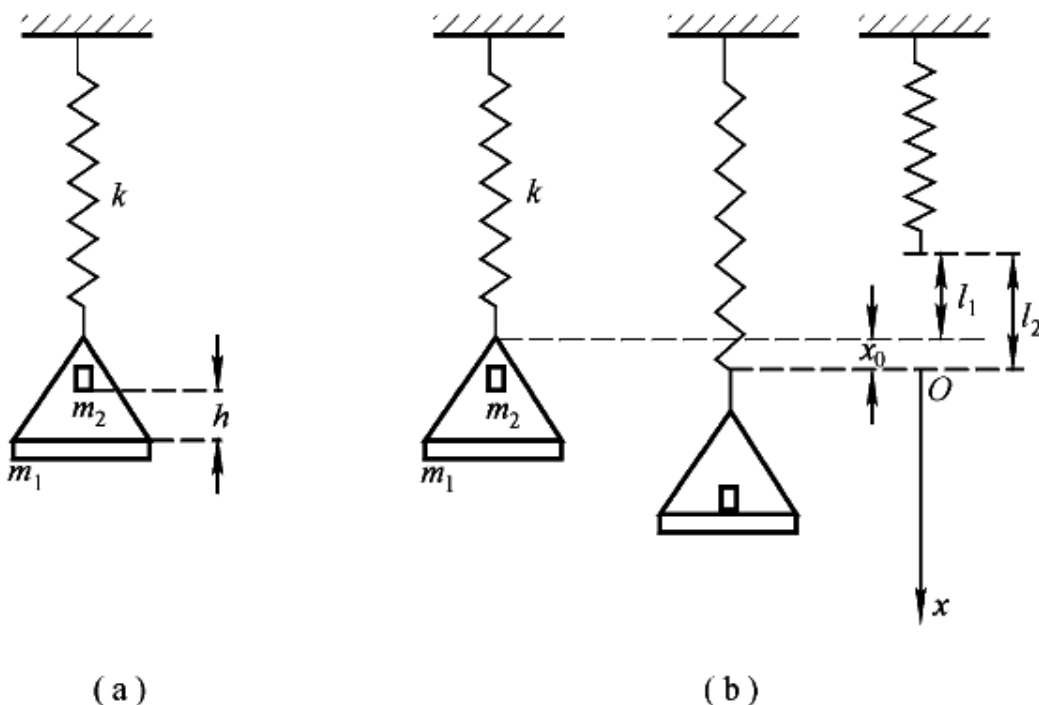
$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0 / \omega)^2} = |v_0 / \omega| = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

图 (b) 给出了弹簧振子的旋转矢量图, 从图中可知初相位  $\phi_0 = \pi/2$ , 则简谐运动方程为

$$x = 2.5 \times 10^{-2} \cos(40t + 0.5\pi) \text{ (m)}$$

**9-23** 如图 (a) 所示, 一劲度系数为  $k$  的轻弹簧, 其下挂有一质量为  $m_1$  的空盘. 现有一质量为  $m_2$  的物体从盘上方高为  $h$  处自由落入盘中, 并和盘粘在一起振动. 问: (1) 此时的振动周期与空盘作振动的周期有何不同? (2) 此时的振幅为多大?





题 9-23 图

**分析** 原有空盘振动系统由于下落物体的加入，振子质量由  $m_1$  变为  $m_1 + m_2$ ，因此新系统的角频率（或周期）要改变。由于  $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$ ，因此，确定初始速度  $v_0$  和初始位移  $x_0$  是求解振幅  $A$  的关键。物体落到盘中，与盘作完全非弹性碰撞，由动量守恒定律可确定盘与物体的共同初速度  $v_0$ ，这也是该振动系统的初始速度。在确定初始时刻的位移  $x_0$  时，应注意新振动系统的平衡位置应是盘和物体悬挂在弹簧上的平衡位置。因此，本题中初始位移  $x_0$ ，也就是空盘时的平衡位置相对新系统的平衡位置的位移。

**解** (1) 空盘时和物体落入盘中后的振动周期分别为

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m_1/k}$$

$$T' = 2\pi/\omega' = 2\pi\sqrt{(m_1 + m_2)/k}$$

可见  $T' > T$ ，即振动周期变大了。

(2) 如图 (b) 所示，取新系统的平衡位置为坐标原点  $O$ 。则根据分析中所述，初始位移为空盘时的平衡位置相对粘上物体后新系统平衡位置的位移，即

$$x_0 = l_1 - l_2 = \frac{m_1 g}{k} - \frac{m_1 + m_2}{k} g = -\frac{m_2}{k} g$$

式中  $l_1 = m_1/k$  为空盘静止时弹簧的伸长量， $l_2 = (m_1 + m_2)/k$  为物体粘在盘上后，静止时弹簧的伸长量。由动量守恒定律可得振动系统的初始速度，即盘与物体相碰后的速度

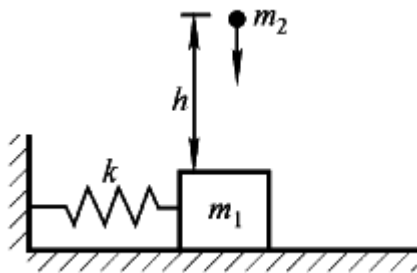
$$v_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}$$

式中  $v = \sqrt{2gh}$  是物体由  $h$  高下落至盘时的速度。故系统振动的振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega')^2} = \frac{m_2 g}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{m_1 + m_2}}$$

本题也可用机械能守恒定律求振幅  $A$ 。

**9-24** 如图所示, 劲度系数为  $k$  的轻弹簧, 系一质量为  $m_1$  的物体, 在水平面上作振幅为  $A$  的简谐运动. 有一质量为  $m_2$  的粘土, 从高度  $h$  自由下落, 正好在 (a) 物体通过平衡位置时, (b) 物体在最大位移处时, 落在物体上. 分别求: (1) 振动周期有何变化? (2) 振幅有何变化?



题 9-24 图

**分析** 谐振子系统的周期只与弹簧的劲度系数和振子的质量有关. 由于粘土落下前后, 振子的质量发生了改变, 因此, 振动周期也将变化. 至于粘土如何落下是不影响振动周期的. 但是, 粘土落下时将改变振动系统的初始状态, 因此, 对振幅是有影响的. 在粘土落到物体上的两种不同情况中, 系统在水平方向的动量都是守恒的. 利用动量守恒定律可求出两种情况下系统的初始速度, 从而利用机械能守恒定律 (或公式  $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$ ) 求得两种情况下的振幅.

**解** (1) 由分析可知, 在 (a)、(b) 两种情况中, 粘土落下前后的周期均为

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m_1/k}$$

$$T' = 2\pi/\omega' = 2\pi\sqrt{(m_1 + m_2)/k}$$

物体粘上粘土后的周期  $T'$  比原周期  $T$  大.

(2) (a) 设粘土落至物体前后, 系统振动的振幅和物体经过平衡位置时的速度分别为  $A$ 、 $v$  和  $A'$ 、 $v'$ . 由动量守恒定律和机械能守恒定律可列出如下各式

$$kA'^2/2 = m_1 v^2/2 \quad (1)$$

$$kA'^2/2 = (m_1 + m_2) v'^2/2 \quad (2)$$

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v' \quad (3)$$

联立解上述三式, 可得

$$A' = \sqrt{m_1/(m_1 + m_2)} A$$

即  $A' < A$ , 表明增加粘土后, 物体的振幅变小了.

(b) 物体正好在最大位移处时, 粘土落在物体上. 则由动量守恒定律知它们水平方向的速度  $v' = m_1 v / (m_1 + m_2) = 0$ , 因而振幅不变, 即

$$A' = A$$

**9-25** 质量为  $0.10\text{kg}$  的物体, 以振幅  $1.0 \times 10^{-2}\text{m}$  作简谐运动, 其最大加速度为  $4.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  求: (1) 振动的周期; (2) 物体通过平衡位置时的总能量与动能; (3) 物体在何处其动能和势能相等? (4) 当物体的位移大小为振幅的一半时, 动能、势能各占总能量的多少?

**分析** 在简谐运动过程中, 物体的最大加速度  $a_{\max} = A\omega^2$ , 由此可确定振动的周期  $T$ . 另外, 在简谐运动过程中机械能是守恒的, 其中动能和势能互相交替转化, 其总能量  $E = kA^2/2$ . 当动能与势能相等时,  $E_k = E_p = kA^2/4$ . 因而可求解本题.

**解** (1) 由分析可得振动周期

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{A/a_{\max}} = 0.314\text{ s}$$

(2) 当物体处于平衡位置时, 系统的势能为零, 由机械能守恒可得系统的动能等于总能量, 即

$$\begin{aligned} E_k = E &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}mAa_{\max} \\ &= 2.0 \times 10^{-3}\text{ J} \end{aligned}$$

(3) 设振子在位移  $x_0$  处动能与势能相等, 则有

$$kx_0^2/2 = kA^2/4$$

得

$$x_0 = \pm\sqrt{2}A/2 = \pm 7.07 \times 10^{-3}\text{ m}$$

(4) 物体位移的大小为振幅的一半 (即  $x = A/2$ ) 时的势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = E/4$$

则动能为

$$E_k = E - E_p = 3E/4$$

**9-26** 一氢原子在分子中的振动可视为简谐运动. 已知氢原子质量  $m = 1.68 \times 10^{-27}\text{ Kg}$ , 振动频率  $\nu = 1.0 \times 10^{14}\text{ Hz}$ , 振幅  $A = 1.0 \times 10^{-11}\text{ m}$ . 试计算: (1) 此氢原子的最大速度; (2) 与此振动相联系的能量.

**解** (1) 简谐运动系统中振子运动的速度  $v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ , 故氢原子振动的最大速度为

$$v_{\max} = \omega A = 2\pi\nu A = 6.28 \times 10^2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2) 氢原子的振动能量

$$E = mv_{\max}^2/2 = 3.31 \times 10^{-20}\text{ J}$$

**9-27** 质量  $m = 10\text{g}$  的小球与轻弹簧组成一振动系统, 按  $x = 0.5(8\pi t + \pi/3)(\text{cm})$  的规律作自由振动, 求 (1) 振动的角频率、周期、振幅和初相; (2) 振动的能量  $E$ ; (3) 一个周期内的平均动能和平均势能.

**解** (1) 将  $x = 0.5(8\pi t + \pi/3)(\text{cm})$  与  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$  比较后可得: 角频率  $\omega = 8\pi\text{ s}^{-1}$ , 振幅  $A = 0.5\text{cm}$ , 初相  $\varphi = \pi/3$ , 则周期  $T = 2\pi/\omega = 0.25\text{ s}$

(2) 简谐运动的能量  $E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = 7.90 \times 10^{-5} \text{ J}$

(3) 简谐运动的动能和势能分别为

$$E_K = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

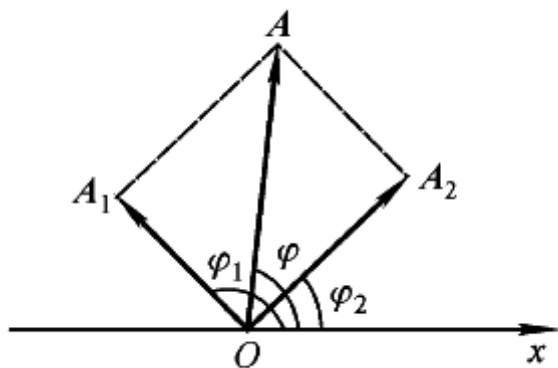
$$E_P = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

则在一个周期中, 动能与势能对时间的平均值分别为

$$E_K = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{mA^2\omega^2}{4} = 3.95 \times 10^{-5} \text{ J}$$

$$E_P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{mA^2\omega^2}{4} = 3.95 \times 10^{-5} \text{ J}$$

**9-28** 已知两同方向、同频率的简谐运动的运动方程分别为  $x_1 = 0.05\cos(10t + 0.75\pi)(\text{m})$ ;  $x_2 = 0.06\cos(10t + 0.25\pi)(\text{m})$ . 求: (1) 合振动的振幅及初相; (2) 若有另一同方向、同频率的简谐运动  $x_3 = 0.07\cos(10t + \varphi_3)(\text{m})$ , 则  $\varphi_3$  为多少时,  $x_1 + x_3$  的振幅最大? 又  $\varphi_3$  为多少时,  $x_2 + x_3$  的振幅最小?



题 9-28 图

**分析** 可采用解析法或旋转矢量法求解. 由旋转矢量合成可知, 两个同方向、同频率简谐运动的合成仍为一简谐运动, 其角频率不变; 合振动的振幅  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ , 其大小与两个分振动的初相差  $\varphi_2 - \varphi_1$  相关. 而合振动的初相位

$$\varphi = \arctan[(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)/(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)]$$

**解** (1) 作两个简谐运动合成的旋转矢量图(如图). 因为  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ , 故合振动振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 7.8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

合振动初相位

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan[(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)/(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)] \\ &= \arctan 1 = 1.48 \text{ rad} \end{aligned}$$

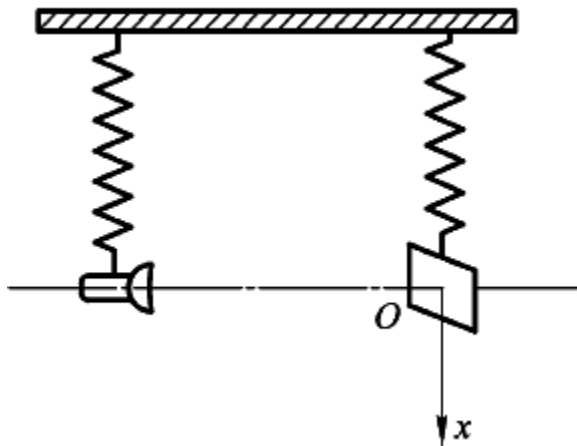
(2) 要使  $x_1 + x_3$  振幅最大, 即两振动同相, 则由  $\Delta\varphi = 2k\pi$  得

$$\varphi_3 = \varphi_1 + 2k\pi = 2k\pi + 0.75\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

要使  $x_1 + x_3$  的振幅最小, 即两振动反相, 则由  $\Delta = (2k+1)\pi$  得

$$\varphi_3 = \varphi_2 + (2k+1)\pi = 2k\pi + 1.25\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**9-29** 手电筒和屏幕质量均为  $m$ , 且均被劲度系数为  $k$  的轻弹簧悬挂于同一水平面上, 如图所示. 平衡时, 手电筒的光恰好照在屏幕中心. 设手电筒和屏幕相对于地面上下振动的表达式分别为  $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$  和  $x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$ . 试求在下述两种情况下, 初相位  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  应满足的条件: (1) 光点在屏幕上相对于屏静止不动; (2) 光点在屏幕上相对于屏作振幅  $A' = 2A$  的振动. 并说明用何种方式起动, 才能得到上述结果.



题 9-29 图

**分析** 落在屏幕上的光点相对地面的运动和屏幕相对于地面的运动都已知道, 且是两个简谐运动. 因此由运动的合成不难写出光点相对屏的运动 (实际上是两个同方向、同频率简谐运动的合成). 根据相对运动公式, 有

$$x_{\text{光对地}} = x_{\text{光对屏}} + x_{\text{屏对地}}$$

依题意

$$x_{\text{光对地}} = x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_{\text{屏对地}} = x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{所以 } x_{\text{光对屏}} = x_1 - x_2 = x_1 + x'_2 = A\cos(\omega t + \varphi_1) + A\cos(\omega t + \pi + \varphi_2)$$

可见光点对屏的运动就是两个同方向、同频率简谐运动  $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$  和  $x'_2 = A\cos(\omega t + \pi + \varphi_2)$  的合成. 用与上题相同的方法即可求解本题. 其中合运动振幅  $A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2\cos(\pi + \varphi_2 - \varphi_1)}$ .

**解** (1) 根据分析和参考上题求解, 当要求任一时刻光点相对于屏不动, 即  $x_{\text{光对屏}} = 0$ , 就是当  $\pi + \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$  时, 即  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$  时 ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $A' = 0$ . 当光点相对于屏作振幅为  $2A$  的运动时, 要求  $\pi + \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ , 即  $\varphi_2 = \varphi_1 + (2k-1)\pi$ .

(2) 由以上求解可知, 要使光点相对于屏不动, 就要求手电筒和屏的振动始终要同步, 即同相位, 为此, 把它们往下拉  $A$  位移后, 同时释放即可; 同理, 要使光点对屏作振幅为  $2A$  的谐振动, 两者必须相位相反, 为此, 让手电筒位于平衡点  $O$  上方的  $-A$  处, 而屏则位于  $+A$  处同

时释放, 即可实现.

**9-30** 两个同频率的简谐运动 1 和 2 的振动曲线如图 (a) 所示, 求 (1) 两简谐运动的运动方程  $x_1$  和  $x_2$ ; (2) 在同一图中画出两简谐运动的旋转矢量, 并比较两振动的相位关系; (3) 若两简谐运动叠加, 求合振动的运动方程.

**分析** 振动图已给出了两个简谐运动的振幅和周期, 因此只要利用图中所给初始条件, 由旋转矢量法或解析法求出初相位, 便可得两个简谐运动的方程.

**解** (1) 由振动曲线可知,  $A = 0.1 \text{ m}$ ,  $T = 2 \text{ s}$ , 则  $\omega = 2\pi / T = \pi \text{ s}^{-1}$ . 曲线 1 表示质点初始时刻在  $x = 0$  处且向  $x$  轴正向运动, 因此  $\varphi_1 = -\pi / 2$ ; 曲线 2 表示质点初始时刻在  $x = A/2$  处且向  $x$  轴负向运动, 因此  $\varphi_2 = \pi / 3$ . 它们的旋转矢量图如图 (b) 所示. 则两振动的运动方程分别为

$$x_1 = 0.1 \cos(\pi t - \pi/2) (\text{m}) \quad \text{和} \quad x_2 = 0.1 \cos(\pi t + \pi/3) (\text{m})$$

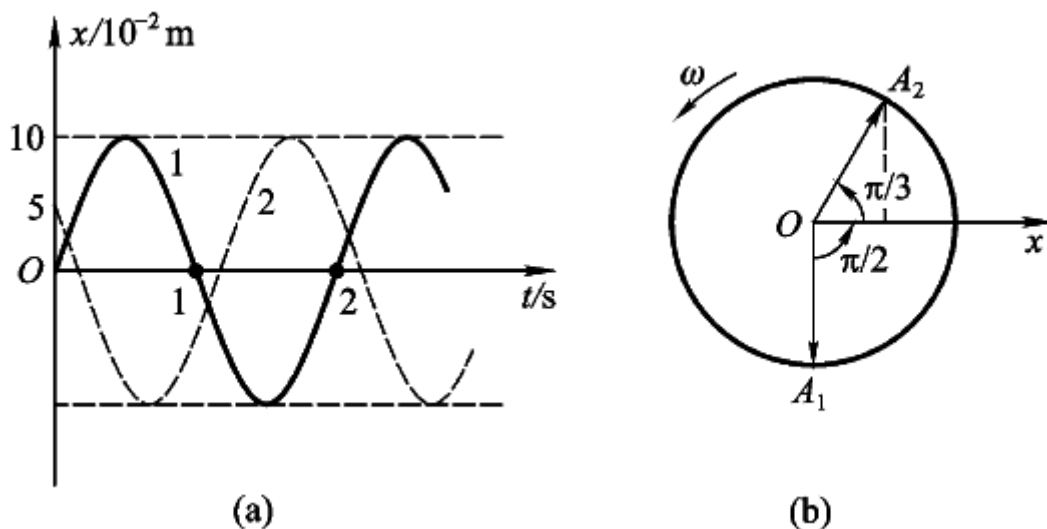
(2) 由图 (b) 可知振动 2 超前振动 1 的相位为  $5\pi / 6$ .

(3)  $x = x_1 + x_2 = A' \cos(\omega t + \varphi)$

$$\text{其中 } A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0.052 \text{ m}$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \arctan(-0.268) = -\frac{\pi}{12}$$

则合振动的运动方程为  $x = 0.052 \cos(\pi t - \pi/12) (\text{m})$



题 9-30 图

**9-31** 将频率为  $348 \text{ Hz}$  的标准音叉振动和一待测频率的音叉振动合成, 测得拍频为  $3.0 \text{ Hz}$ . 若在待测频率音叉的一端加上一小块物体, 则拍频数将减少, 求待测音叉的固有频率.

**分析** 这是利用拍现象来测定振动频率的一种方法. 在频率  $\nu_1$  和拍频数  $\Delta\nu = |\nu_2 - \nu_1|$  已知的情况下, 待测频率  $\nu_2$  可取两个值, 即  $\nu_2 = \nu_1 \pm \Delta\nu$ . 式中  $\Delta\nu$  前正、负号的选取应根据待测音叉系统质量改变时, 拍频数变化的情况来决定.

**解** 根据分析可知, 待测频率的可能值为

$$\nu_2 = \nu_1 \pm \Delta\nu = (348 \pm 3) \text{ Hz}$$

因振动系统的固有频率  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，即质量  $m$  增加时，频率  $\nu$  减小。从题意知，当待测音叉质量增加时拍频减少，即  $|\nu_2 - \nu_1|$  变小。因此，在满足  $\nu_2$  与  $\Delta\nu$  均变小的情况下，式中只能取正号，故待测频率为  $\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu = 351 \text{ Hz}$

**\*9-32** 示波管的电子束受到两个互相垂直的电场的作用。电子在两个方向上的位移分别为  $x = A \cos \omega t$  和  $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ ，求在  $\varphi = 0^\circ$ ， $\varphi = 30^\circ$ ， $\varphi = 90^\circ$  各种情况下，电子在荧光屏上的轨迹方程。

**解** 这是两个振动方向互相垂直的同频率简谐运动的合成问题。合振动的轨迹方程为

$$x^2 / A_1^2 + y^2 / A_2^2 - 2xy \cos \Delta\varphi / A_1 A_2 = \sin^2 \Delta\varphi$$

式中  $A_1$ 、 $A_2$  为两振动的振幅， $\Delta\varphi$  为两个振动的初相差。本题中  $A_1 = A_2 = A$ ， $\Delta\varphi = \varphi$ ，故有

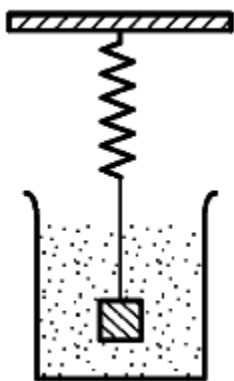
$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi = A^2 \sin^2 \varphi$$

(1) 当  $\varphi = 0^\circ$  时，有  $x = y$ ，轨迹为一直线方程。

(2) 当  $\varphi = 30^\circ$  时，有  $x^2 + y^2 - \sqrt{3} xy = A^2/4$ ，轨迹为椭圆方程。

(3) 当  $\varphi = 90^\circ$  时，有  $x^2 + y^2 = A^2$ ，轨迹为圆方程。

**\*9-33** 图示为测量液体阻尼系数的装置简图，将一质量为  $m$  的物体挂在轻弹簧上，在空气中测得振动的频率为  $\nu_1$ ，置于液体中测得的频率为  $\nu_2$ ，求此系统的阻尼系数。



题 9-33 图

**分析** 在阻尼不太大的情况下，阻尼振动的角频率  $\omega$  与无阻尼时系统的固有角频率  $\omega_0$  及阻尼系数  $\delta$  有关系式  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 。因此根据题中测得的  $\nu_1$  和  $\nu_2$ （即已知  $\omega_0$ 、 $\omega$ ），就可求出  $\delta$ 。

**解** 物体在空气和液体中的角频率为  $\omega_0 = 2\pi\nu_1$  和  $\omega = 2\pi\nu_2$ ，得阻尼系数为

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 2\pi\sqrt{\nu_1^2 - \nu_2^2}$$

**\*9-34** 一弹簧振子系统，物体的质量  $m = 1.0 \text{ Kg}$ ，弹簧的劲度系数  $k = 900 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。系统振动时受到阻尼作用，其阻尼系数  $\delta = 10.0 \text{ s}^{-1}$ 。为了使振动持续，现另外加一周期性驱动外力  $F = 100 \cos 30 t (N)$ 。求：(1) 振子达到稳定时的振动角频率；(2) 若外力的角频率可以

改变, 当其值为多少时系统出现共振现象? 其共振的振幅多大?

**分析** 本题是物体在有阻尼条件下的受迫振动, 其运动方程为

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + A \cos(\omega_p t + \psi) \quad (1)$$

等式右边第一项与阻尼有关, 该项经一段时间后, 因  $e^{-\delta t} \rightarrow 0$  而消失. 因此, 稳定时系统的振动由第二项确定, 它是简谐运动方程. 其中  $\omega_p$  为周期性外力的角频率, 由此可知, 此时振动的角频率即是周期性外力的角频率. 而振幅为

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\delta^2 \omega_p^2}} \quad (2)$$

式中  $F_0$  为周期性外界驱动力的力幅,  $\omega_0$  是弹簧振子的固有角频率,  $m$  是振子质量. 当阻尼系数  $\delta$  一定时, 振幅  $A$  是外力的角频率  $\omega_p$  的函数. 共振时, 振幅最大, 故可采用对函数  $A(\omega_p)$  求极值的方法确定共振频率和振幅.

**解** (1) 根据分析, 受迫振动达到稳定时, 系统作简谐运动的角频率即为周期性外力的角频率, 故有

$$\omega_1 = \omega_p = 30 \text{ s}^{-1}$$

(2) 受迫振动达到稳定后, 其振幅  $A = F_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\delta^2 \omega_p^2}$ . 当  $dA/d\omega_p = 0$  时振幅将取得极大值, 称共振现象. 此时可解得周期性外界驱动力的角频率为

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 26.5 \text{ s}^{-1}$$

将上述结果代入振幅  $A$  的表达式中, 得共振时振幅为

$$A_r = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 0.177 \text{ m}$$

**9-35** 在一个  $LC$  振荡电路中, 若电容器两极板上的交变电压  $U = 50 \cos(10^4 \pi t) \text{ (V)}$ , 电容  $C = 1.0 \times 10^{-7} \text{ F}$ , 电路中的电阻可以忽略不计. 求: (1) 振荡的周期; (2) 电路中的自感; (3) 电路中的电流随时间变化的规律.

**分析** 在不计电阻的前提下, 该  $LC$  电路是无阻尼自由振荡电路, 在振荡过程中电容器两极板上的电压、电荷及电路中的电流均以相同的周期变化着. 振荡周期为  $T = 2\pi LC$ . 因此, 本题可通过已知的电压的角频率  $\omega$ , 求出振荡周期, 然后可求出自感  $L$ . 另外, 电容器极板上电压  $U$ 、电荷  $q$  始终满足关系式  $q = CU$ . 因此, 在确定  $q = q(t)$  后, 根据电流定义  $I = dq/dt$ , 可求出电流的变化规律.

**解** (1) 从题中已知的电压变化关系中得振荡周期为

$$T = 2\pi / \omega = 2.0 \times 10^{-4} \text{ s}$$

(2) 由振荡电路周期  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  得电路中的自感为

$$L = T^2 / 4\pi^2 C = 1.01 \times 10^{-2} \text{ H}$$

(3) 电路中电流随时间变化的规律为

$$I = dq/dt = C \cdot dU/dt = -0.157 \sin 10^4 \pi t \text{ (A)}$$

**9-36** 用一个电容可在  $10.0 \text{ pF}$  到  $360.0 \text{ pF}$  范围内变化的电容器和一个自感线圈并联组成



无线电收音机的调谐电路。(1) 该调谐电路可以接收的最大和最小频率之比是多少? (2) 为了使调谐频率能在  $5.0 \times 10^5 \text{ Hz}$  到  $1.5 \times 10^6 \text{ Hz}$  的频率范围内, 需在原电容器上并联一个多大的电容? 此电路选用的自感应为多大?

**分析** 当自感  $L$  一定时, 要改变调谐频率的范围, 只需改变电容的变化范围. 本题采用并联电容  $C$  的方法使电容由原有的变化范围  $C_{\min} \sim C_{\max}$  改变为  $C_{\min} + C \sim C_{\max} + C$ , 从而达到新的调谐目的. 为此, 可根据  $\nu = 1/2\pi\sqrt{LC}$ , 由原有电容比  $C_{\max}/C_{\min}$  来确定对应的频率比  $\nu_{\max}/\nu_{\min}$ . 再由新要求的频率比来确定需要并联的电容的大小.

**解** (1) 当线圈自感  $L$  一定时, 由  $\nu = 1/2\pi\sqrt{LC}$ , 可得

$$\nu_{\max}/\nu_{\min} = \sqrt{C_{\max}/C_{\min}} = 6.0$$

(2) 为了在  $5.0 \times 10^5 \text{ Hz} \sim 1.5 \times 10^6 \text{ Hz}$  的频率范围内调谐, 应满足

$$\nu'_{\max}/\nu'_{\min} = \sqrt{(C_{\max} + C)/(C_{\min} + C)}$$

由此得在原电容器上需并联的电容为

$$C = \frac{C_{\max} - C_{\min}(\nu'_{\max}/\nu'_{\min})^2}{(\nu'_{\max}/\nu'_{\min})^2 - 1} = 33.75 \text{ pF}$$

此电路选用的线圈自感为

$$L = 1/4\pi^2\nu_{\min}^2(C_{\max} + C) = 2.58 \times 10^{-4} \text{ H}$$

**9-37** 一振荡电路, 已知  $C = 0.25 \mu\text{F}$ ,  $L = 1.015 \text{ H}$ . 电路中电阻可忽略不计, 电容器上电荷最大值为  $Q_0 = 2.5 \times 10^{-6} \text{ C}$ . (1) 写出电路接通后电容器两极板间的电势差随时间而变化的方程和电路中电流随时间而变化的方程; (2) 写出电场的能量、磁场能量及总能量随时间而变化的方程; (3) 求  $t_1 = T/8$  和  $t_2 = T/4$  时, 电容器两极板间的电势差、电路中的电流、电场能、磁场能.

**分析** 无阻尼  $LC$  振荡电路中电流、电容器极板上电荷以及电势差均以相同的频率随时间作正弦或余弦变化. 如果令极板上电荷  $q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , 则由  $I = dq/dt$ 、 $U = q/C$  可得电路中的电流  $I$ 、极板两端电势差  $U$  的变化规律. 利用电磁场中电场能量和磁场能量公式可写出它们随时间  $t$  的函数关系式和特定时刻的瞬时值.

**解** (1)  $LC$  无阻尼振荡电路的振荡角频率为

$$\omega = 1/\sqrt{LC} = 2000\pi \text{ s}^{-1}$$

若以电路闭合的瞬间为计时起点, 此时极板上电荷最大. 则任一时刻极板上的电荷为

$$q = Q_0 \cos \omega t = 2.5 \times 10^{-6} \cos 2000\pi t \quad (\text{C})$$

该时刻电路中的电流为

$$I = dq/dt = -1.57 \times 10^{-2} \sin 2000\pi t \quad (\text{A})$$

极板两端电势差为

$$U = q/C = 100 \cos 2000\pi t \quad (\text{V})$$

(2) 任意时刻电场能量、磁场能量及总能量分别为

$$E_e = q^2/2C = 1.25 \times 10^{-4} \cos^2 2000\pi t \quad (\text{J})$$

$$E_m = LI^2/2 = 1.25 \times 10^{-4} \sin^2 2000\pi t \quad (\text{J})$$

$$E = E_e + E_m = 1.25 \times 10^{-4} \quad (\text{J})$$

(3) 由  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ , 可得  $T = 0.001 \text{ s}$ , 则当  $t_1 = T/8$  时, 由上述各式可得

$$U_1 = 100 \cos(2000\pi T/8) = 70.7 \text{ V}$$

$$I_1 = -1.57 \times 10^{-2} \sin(2000\pi T/8) = -1.11 \times 10^{-2} \text{ A}$$

$$E_{e1} = 1.25 \times 10^{-4} \cos^2(2000\pi T/8) = 6.25 \times 10^{-5} \text{ J}$$

$$E_{m1} = 1.25 \times 10^{-4} \sin^2(2000\pi T/8) = 6.25 \times 10^{-5} \text{ J}$$

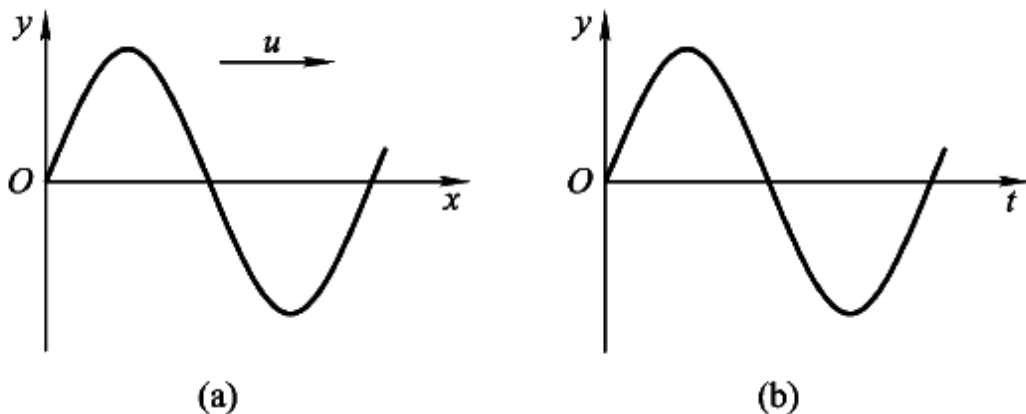
同理, 当  $t_2 = \pi/4$  时可得

$$U_2 = 0; I_2 = -1.57 \times 10^{-2} \text{ A}; E_{e2} = 0; E_{m2} = 1.25 \times 10^{-4} \text{ J}$$

由上述结果可以看出  $LC$  电路在无阻尼振荡过程中, 总的电磁场能量是不变的, 即满足能量守恒定律.

## 第十章 波 动

**10-1** 图(a)表示  $t=0$  时的简谐波的波形图, 波沿  $x$  轴正方向传播, 图(b)为一质点的振动曲线. 则图(a)中所表示的  $x=0$  处振动的初相位与图(b)所表示的振动的初相位分别为 ( )



题 10-1 图

- (A) 均为零                      (B) 均为  $\frac{\pi}{2}$                       (C) 均为  $-\frac{\pi}{2}$   
 (D)  $\frac{\pi}{2}$  与  $-\frac{\pi}{2}$                       (E)  $-\frac{\pi}{2}$  与  $\frac{\pi}{2}$

**分析与解** 本题给了两个很相似的曲线图, 但本质却完全不同. 求解本题要弄清振动图和波形图不同的物理意义. 图(a)描述的是连续介质中沿波线上许许多多质点振动在  $t$  时刻的位移状态. 其中原点处质点位移为零, 其运动方向由图中波形状态和波的传播方向可以知道是沿  $y$  轴负向, 利用旋转矢量法可以方便的求出该质点振动的初相位为  $\pi/2$ . 而图(b)是一个质点的振动曲线图, 该质点在  $t=0$  时位移为 0,  $t>0$  时, 由曲线形状可知, 质点向  $y$  轴正向运动, 故由旋转矢量法可判知初相位为  $-\pi/2$ , 答案为 (D).

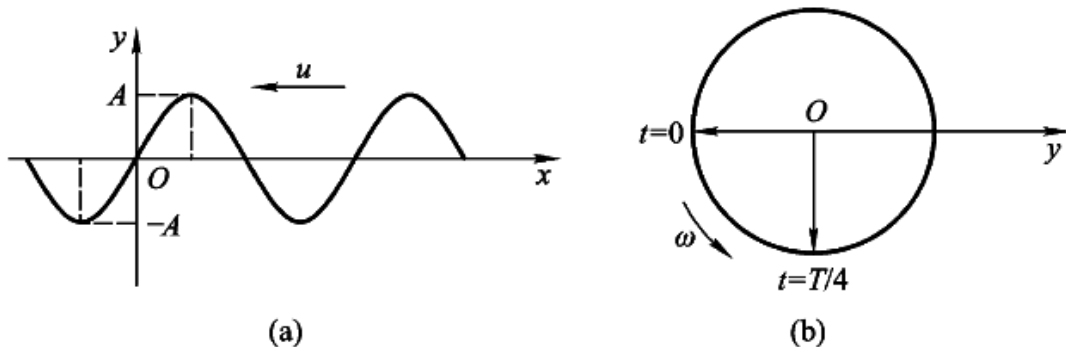
**10-2** 机械波的表达式为  $y = 0.05\cos(6\pi t + 0.06\pi x)(\text{m})$ , 则 ( )

- (A) 波长为 100 m                      (B) 波速为  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$   
 (C) 周期为  $1/3 \text{ s}$                       (D) 波沿  $x$  轴正方向传播

**分析与解** 波动方程的一般表式为  $y = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$ , 其中  $A$  为振幅,  $\varphi$  为初相,  $u$  为波速.  $x/u$  前的“-”表示波沿  $x$  轴正向传播, “+”表示波沿  $x$  轴负向传播. 因此将原式写为  $y = 0.05\cos(6\pi(t + x/100))(\text{m})$  和一般式比较可知 (B)、(D) 均不对. 而由  $\omega = 2\pi/T = 6\pi \text{ s}^{-1}$  可知  $T = (1/3) \text{ s}$ . 则  $\lambda = uT = 33.3 \text{ m}$ , 因此 (A) 也不对. 只有 (C) 正确.

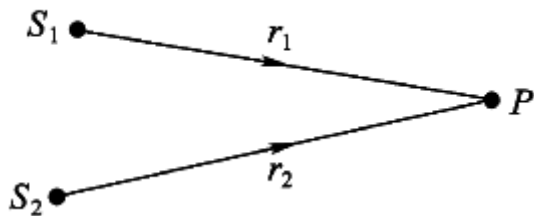
**10-3** 一平面简谐波, 沿  $x$  轴负方向传播, 角频率为  $\omega$ , 波速为  $u$ . 设  $t = \frac{T}{4}$  时刻的波形如图(a)所示, 则该波的表达式为 ( )

$$\begin{aligned} \text{(A)} y &= A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \pi \right] & \text{(B)} y &= A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ \text{(C)} y &= A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right] & \text{(D)} y &= A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \pi \right] \end{aligned}$$



题 10-3 图

**分析与解** 因为波沿  $x$  轴负向传播, 由上题分析知 (A)、(B) 表式不正确. 找出 (C)、(D) 哪个是正确答案, 可以有多种方法. 这里给出两个常用方法. 方法一: 直接将  $t = T/4$ ,  $x = 0$  代入方程, 那么对 (C) 有  $y_0 = A$ 、对 (D) 有  $y_0 = 0$ , 可见 (D) 的结果与图一致. 方法二: 用旋转矢量法求出波动方程的初相位. 由图 (a) 可以知道  $t = T/4$  时原点处质点的位移为 0, 且向  $y$  轴正向运动, 则此时刻的旋转矢量图如图 (b) 所示. 要求初相位, 只要将该时刻的旋转矢量反转 (顺时针转)  $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot T/4 = \pi/2$ , 如图 (b) 所示, 即得  $\varphi_0 = \pi$ . 同样得 (D) 是正确答案.



题 10-4 图

**10-4** 如图所示, 两列波长为  $\lambda$  的相干波在点  $P$  相遇. 波在点  $S_1$  振动的初相是  $\varphi_1$ , 点  $S_1$  到点  $P$  的距离是  $r_1$ . 波在点  $S_2$  的初相是  $\varphi_2$ , 点  $S_2$  到点  $P$  的距离是  $r_2$ , 以  $k$  代表零或正、负整数, 则点  $P$  是干涉极大的条件为 ( )

- (A)  $r_2 - r_1 = k\lambda$   
 (A)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$   
 (A)  $\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = 2k\pi$   
 (A)  $\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda = 2k\pi$

**分析与解**  $P$  是干涉极大的条件为两分振动的相位差  $\Delta\varphi = 2k\pi$ , 而两列波传到  $P$  点时的两分振动相位差为  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda$ , 故选项 (D) 正确.

**10-5** 在驻波中, 两个相邻波节间各质点的振动 ( )

- (A) 振幅相同, 相位相同 (B) 振幅不同, 相位相同  
(C) 振幅相同, 相位不同 (D) 振幅不同, 相位不同

**分析与解** 驻波方程为  $y = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$ , 因此根据其特点, 两波节间各点运动同相位, 但振幅不同. 因此正确答案为 (B).

**10-6** 频率为  $\nu = 1.25 \times 10^4 \text{ Hz}$  的平面简谐纵波沿细长的金属棒传播, 棒的弹性模量为  $E = 1.90 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , 棒的密度  $\rho = 7.6 \times 10^3 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . 求该纵波的波长.

**分析** 因机械波传播速度与介质性质有关, 固体中纵波传播速度  $u = \sqrt{E/\rho}$ . 而波的特征量波长  $\lambda$  与波速  $u$ 、频率  $\nu$  之间有  $\lambda = u/\nu$ . 所以, 频率一定的振动在不同介质中传播时, 其波长不同. 由上述关系可求得波长.

**解** 由分析可知金属棒中传播的纵波速度  $u = \sqrt{E/\rho}$ , 因此, 该纵波的波长为

$$\lambda = u/\nu = \sqrt{E/\rho\nu^2} = 0.40 \text{ m}$$

**10-7** 一横波在沿绳子传播时的波动方程为  $y = 0.20 \cos(2.5\pi - \pi x)(\text{m})$ . (1) 求波的振幅、波速、频率及波长; (2) 求绳上质点振动时的最大速度; (3) 分别画出  $t = 1 \text{ s}$  和  $t = 2 \text{ s}$  时的波形, 并指出波峰和波谷. 画出  $x = 1.0 \text{ m}$  处质点的振动曲线并讨论其与波形图的不同.

**分析** (1) 已知波动方程 (又称波函数) 求波动的特征量 (波速  $u$ 、频率  $\nu$ 、振幅  $A$  及波长  $\lambda$  等), 通常采用比较法. 将已知的波动方程按波动方程的一般形式  $y = A \cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$  书写, 然后通过比较确定各特征量 (式中  $\frac{x}{u}$  前“-”、“+”的选取分别对应波沿  $x$  轴正向和负向传播). 比较法思路清晰、求解简便, 是一种常用的解题方法. (2) 讨论波动问题, 要理解振动物理量与波动物理量之间的内在联系与区别. 例如区分质点的振动速度与波速的不同, 振动速度是质点的运动速度, 即  $v = dy/dt$ ; 而波速是波线上质点运动状态的传播速度 (也称相位的传播速度、波形的传播速度或能量的传播速度), 其大小由介质的性质决定. 介质不变, 波速保持恒定. (3) 将不同时刻的  $t$  值代入已知波动方程, 便可以得到不同时刻的波形方程  $y = y(x)$ , 从而作出波形图. 而将确定的  $x$  值代入波动方程, 便可以得到该位置处质点的运动方程  $y = y(t)$ , 从而作出振动图.

**解** (1) 将已知波动方程表示为

$$y = 0.20 \cos[2.5\pi(t - x/2.5)](\text{m})$$

与一般表达式  $y = A \cos[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$  比较, 可得

$$A = 0.20 \text{ m}, \quad u = 2.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi_0 = 0$$

则

$$\nu = \omega/2\pi = 1.25 \text{ Hz}, \quad \lambda = u/\nu = 2.0 \text{ m}$$

(2) 绳上质点的振动速度

$$v = dy/dt = -0.5\pi \sin[2.5\pi(t - x/2.5)](\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

则

$$v_{\max} = 1.57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3)  $t = 1 \text{ s}$  和  $t = 2 \text{ s}$  时的波形方程分别为

$$y_1 = 0.20\cos(2.5\pi - \pi x)(\text{m})$$

$$y_2 = 0.20\cos(5\pi - \pi x)(\text{m})$$

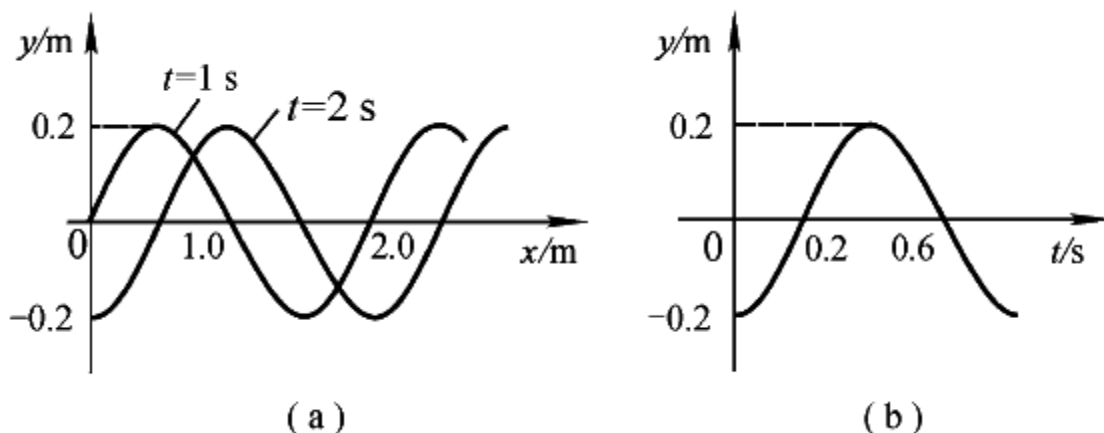
波形图如图 (a) 所示.

$x = 1.0\text{m}$  处质点的运动方程为

$$y = -0.20\cos(2.5\pi t)(\text{m})$$

振动图线如图 (b) 所示.

波形图与振动图虽在图形上相似, 但却有着本质的区别. 前者表示某确定时刻波线上所有质点的位移情况, 而后者则表示某确定位置的一个质点, 其位移随时间变化的情况.



题 10-7 图

**10-8** 波源作简谐运动, 其运动方程为  $y = 4.0 \times 10^{-3} \cos 240\pi t$  (m), 它所形成的波形以  $30\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度沿一直线传播. (1) 求波的周期及波长; (2) 写出波动方程.

**分析** 已知波源运动方程求波动物理量及波动方程, 可先将运动方程与其一般形式  $y = A\cos(\omega t + \varphi)$  进行比较, 求出振幅  $A$ 、角频率  $\omega$  及初相  $\varphi_0$ , 而这三个物理量与波动方程的一般形式  $y = A\cos[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$  中相应的三个物理量是相同的. 再利用题中已知的波速  $u$  及公式  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$  和  $\lambda = uT$  即可求解.

**解** (1) 由已知的运动方程可知, 质点振动的角频率  $\omega = 240\pi \text{s}^{-1}$ . 根据分析中所述, 波的周期就是振动的周期, 故有

$$T = 2\pi/\omega = 8.33 \times 10^{-3} \text{s}$$

波长为

$$\lambda = uT = 0.25 \text{m}$$

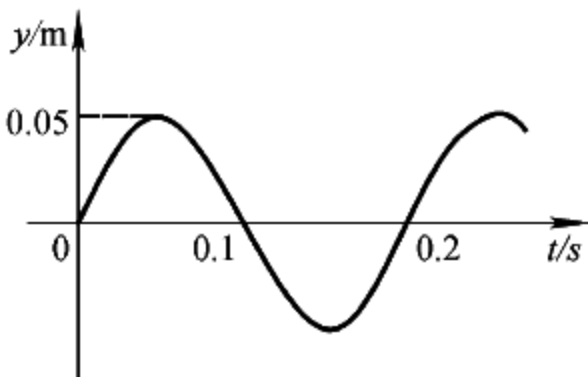
(2) 将已知的波源运动方程与简谐运动方程的一般形式比较后可得  $A = 4.0 \times 10^{-3}\text{m}$ ,  $\omega = 240\pi \text{s}^{-1}$ ,  $\varphi_0 = 0$  故以波源为原点, 沿  $x$  轴正向传播的波的波动方程为

$$y = A\cos[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$$

$$= 4.0 \times 10^{-3} \cos(240\pi t - 8\pi x) \quad (\text{m})$$

**10-9** 已知一波动方程为  $y = 0.05\sin(10\pi t - 2x)$  (m). (1) 求波长、频率、波速和周期;

(2) 说明  $x = 0$  时方程的意义, 并作图表示.



题 10-9 图

**分析** 采用比较法. 将题给的波动方程改写成波动方程的余弦函数形式, 比较可得角频率  $\omega$ 、波速  $u$ , 从而求出波长、频率等. 当  $x$  确定时波动方程即为质点的运动方程  $y = y(t)$ .

**解** (1) 将题给的波动方程改写为  $y = 0.05\cos[10\pi(t - x/5\pi) - \pi/2]$  (m) 与  $y = A\cos[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$  比较后可得波速  $u = 15.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 角频率  $\omega = 10\pi \text{ s}^{-1}$ , 故有

$$\nu = \omega/2\pi = 5.0 \text{ Hz}, T = 1/\nu = 0.2 \text{ s}, l = uT = 3.14 \text{ m}$$

(2) 由分析知  $x = 0$  时, 方程  $y = 0.05\cos(10\pi t - \pi/2)$  (m) 表示位于坐标原点的质点的运动方程 (如图).

**10-10** 波源作简谐运动, 周期为  $0.02 \text{ s}$ , 若该振动以  $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度沿直线传播, 设  $t = 0$  时, 波源处的质点经平衡位置向正方向运动, 求: (1) 距波源  $15.0 \text{ m}$  和  $5.0 \text{ m}$  两处质点的运动方程和初相; (2) 距波源为  $16.0 \text{ m}$  和  $17.0 \text{ m}$  的两质点间的相位差.

**分析** (1) 根据题意先设法写出波动方程, 然后代入确定点处的坐标, 即得到质点的运动方程. 并可求得振动的初相. (2) 波的传播也可以看成是相位的传播. 由波长  $\lambda$  的物理含义, 可知波线上任两点间的相位差为  $\Delta\varphi = 2\pi\Delta x / \lambda$ .

**解** (1) 由题给条件  $T = 0.02 \text{ s}$ ,  $u = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 可得

$$\omega = 2\pi/T = 100\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad \lambda = uT = 2 \text{ m}$$

当  $t = 0$  时, 波源质点经平衡位置向正方向运动, 因而由旋转矢量法可得该质点的初相为  $\varphi_0 = -\pi/2$  (或  $3\pi/2$ ). 若以波源为坐标原点, 则波动方程为

$$y = A\cos[100\pi(t - x/100) - \pi/2]$$

距波源为  $x_1 = 15.0 \text{ m}$  和  $x_2 = 5.0 \text{ m}$  处质点的运动方程分别为

$$y_1 = A\cos(100\pi t - 15.5\pi)$$

$$y_2 = A\cos(100\pi t - 5.5\pi)$$

它们的初相分别为  $\varphi_{10} = -15.5\pi$  和  $\varphi_{10} = -5.5\pi$  (若波源初相取  $\varphi_0 = 3\pi/2$ , 则初相  $\varphi_{10} = -13.5\pi$ ,  $\varphi_{10} = -3.5\pi$ .)

(2) 距波源  $16.0 \text{ m}$  和  $17.0 \text{ m}$  两点间的相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi(x_2 - x_1) / \lambda = \pi$$

**10-11** 有一平面简谐波在空间传播. 已知在波线上某点  $B$  的运动规律为  $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ , 就图 (a) (b) (c) 给出的三种坐标取法, 分别列出波动方程. 并

用这三个方程来描述与  $B$  相距为  $b$  的  $P$  点的运动规律.

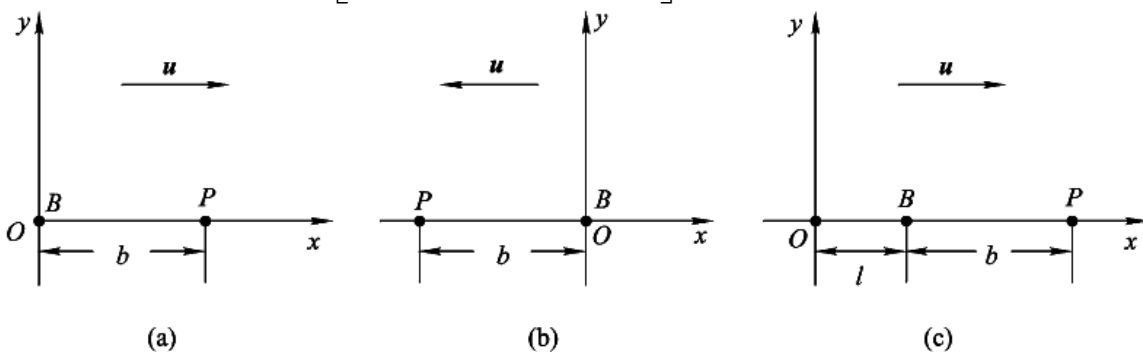
**分析** (1) 波动方程的一般表式为  $y = A\cos[\omega(t \mp x/u) + \varphi_0]$ , 式中振幅  $A$ 、角频率  $\omega$  和波速  $u$  从  $B$  点运动方程和所给图均已知. 因此只要求出原点的初相  $\varphi_0$ . 而对 (a)、(b) 情况,  $B$  点即为原点, 所以  $\varphi_0 = \varphi$ , 对情况 (c), 原点比  $B$  点超前相位  $\Delta\varphi = \omega l / u$ , 则  $\varphi_0 = \varphi + \omega l / u$ . (2) 写出三种情况下波动方程后只要将  $P$  点相应的坐标代入即可写出  $P$  点的运动规律.

**解** (1) 根据分析和图示波的传播方向, 有

(a) 情况下:  $y = A\cos[\omega(t - x/u) + \varphi]$

(b) 情况下:  $y = A\cos[\omega(t + x/u) + \varphi]$

(c) 情况下:  $y = A\cos\left[\omega\left(t - x/u\right) + \varphi + \frac{\omega l}{u}\right]$



题 10-11 图

(2) 将  $P$  点的  $x$  坐标值分别代入上述相应的波动方程可得三种情况下均有:

$$y_P = A\cos[\omega(t - b/u) + \varphi]$$

**讨论** 由于三种情况下, 在沿波传播方向上,  $P$  点均落在  $B$  点后距离为  $b$  处, 即  $P$  点的振动均比  $B$  点的振动落后时间  $b/u$ , 落后相位  $\omega b/u$ , 因而  $P$  点的运动方程均为  $y_P = A\cos[\omega(t - b/u) + \varphi]$ .

**10-12** 图示为平面简谐波在  $t = 0$  时的波形图, 设此简谐波的频率为  $250\text{Hz}$ , 且此时图中质点  $P$  的运动方向向上. 求: (1) 该波的波动方程; (2) 在距原点  $O$  为  $7.5\text{m}$  处质点的运动方程与  $t = 0$  时该点的振动速度.

**分析** (1) 从波形曲线图获取波的特征量, 从而写出波动方程是建立波动方程的又一途径. 具体步骤为: 1. 从波形图得出波长  $\lambda$ 、振幅  $A$  和波速  $u = \lambda v$ ; 2. 根据点  $P$  的运动趋势来判断波的传播方向, 从而可确定原点处质点的运动趋向, 并利用旋转矢量法确定其初相  $\varphi_0$ . (2) 在波动方程确定后, 即可得到波线上距原点  $O$  为  $x$  处的运动方程  $y = y(t)$ , 及该质点的振动速度  $v = dy/dt$ .

**解** (1) 从图中得知, 波的振幅  $A = 0.10\text{m}$ , 波长  $\lambda = 20.0\text{m}$ , 则波速  $u = \lambda v = 5.0 \times 10^3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 根据  $t = 0$  时点  $P$  向上运动, 可知波沿  $Ox$  轴负向传播, 并判定此时位于原点处的质点将沿  $Oy$  轴负方向运动. 利用旋转矢量法可得其初相  $\varphi_0 = \pi/3$ . 故波动方程为



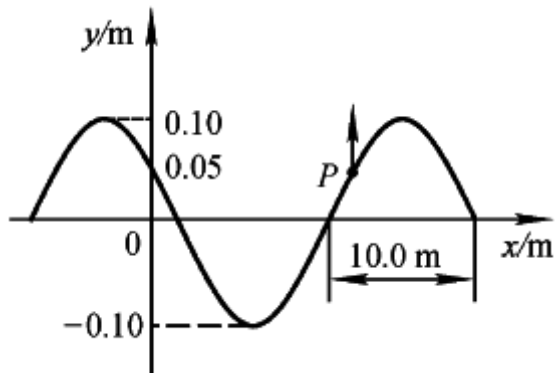
$$\begin{aligned}
 y &= A \cos[\omega(t + x/u) + \varphi_0] \\
 &= 0.10 \cos[500\pi(t + x/5000) + \pi/3] \quad (\text{m})
 \end{aligned}$$

(2) 距原点  $O$  为  $x = 7.5\text{m}$  处质点的运动方程为

$$y = 0.10 \cos(500\pi t + 13\pi/12) \quad (\text{m})$$

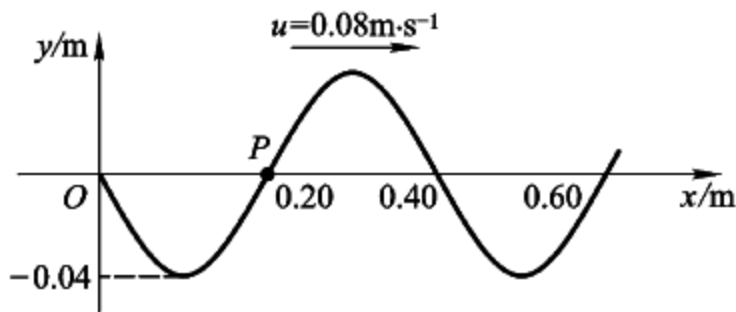
$t = 0$  时该点的振动速度为

$$v = (dy/dt)_{t=0} = -50\pi \sin 13\pi/12 = 40.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



题 10-12 图

**10-13** 如图所示为一平面简谐波在  $t = 0$  时刻的波形图, 求 (1) 该波的波动方程; (2)  $P$  处质点的运动方程.



题 10-13 图

**分析** (1) 根据波形图可得到波的波长  $\lambda$ 、振幅  $A$  和波速  $u$ , 因此只要求初相  $\varphi$ , 即可写出波动方程. 而由图可知  $t = 0$  时,  $x = 0$  处质点在平衡位置处, 且由波的传播方向可以判断出该质点向  $y$  轴正向运动, 利用旋转矢量法可知  $\varphi = -\pi/2$ . (2) 波动方程确定后, 将  $P$  处质点的坐标  $x$  代入波动方程即可求出其运

动方程  $y_P = y_P(t)$ .

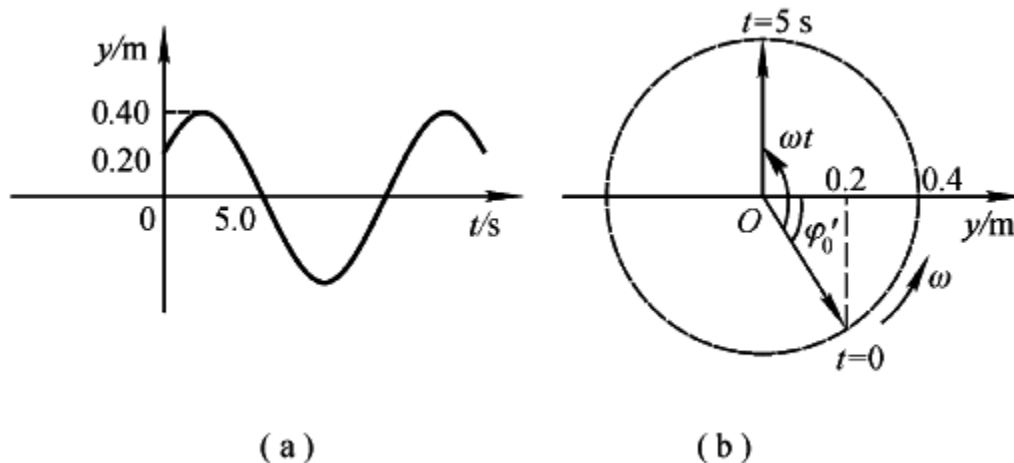
**解** (1) 由图可知振幅  $A = 0.04 \text{ m}$ , 波长  $\lambda = 0.40 \text{ m}$ , 波速  $u = 0.08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 则  $\omega = 2\pi/T = 2\pi u/\lambda = (2\pi/5) \text{ s}^{-1}$ , 根据分析已知  $\varphi = -\pi/2$ , 因此波动方程为

$$y = 0.04 \cos \left[ \frac{2\pi}{5} \left( t - \frac{x}{0.08} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{m})$$

(2) 距原点  $O$  为  $x = 0.20 \text{ m}$  处的  $P$  点运动方程为

$$y = 0.04 \cos \left[ \frac{2\pi}{5} t + \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{m})$$

**10-14** 一平面简谐波，波长为 12 m，沿  $O_x$  轴负向传播。图 (a) 所示为  $x = 1.0 \text{ m}$  处质点的振动曲线，求此波的波动方程。



题 10-14 图

**分析** 该题可利用振动曲线来获取波动的特征量，从而建立波动方程。求解的关键是如何根据图 (a) 写出它所对应的运动方程。较简便的方法是旋转矢量法。

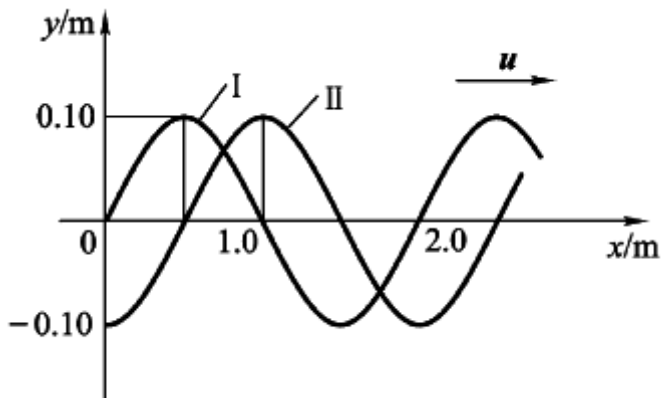
**解** 由图 (a) 可知质点振动的振幅  $A = 0.40 \text{ m}$ ， $t = 0$  时位于  $x = 1.0 \text{ m}$  处的质点在  $A/2$  处并向  $Oy$  轴正向移动。据此作出相应的旋转矢量图 (b)，从图中可知  $\varphi_0' = -\pi/3$ 。又由图 (a) 可知， $t = 5 \text{ s}$  时，质点第一次回到平衡位置，由图 (b) 可看出  $\omega t = 5\pi/6$ ，因而得角频率  $\omega = (\pi/6) \text{ s}^{-1}$ 。由上述特征量可写出  $x = 1.0 \text{ m}$  处质点的运动方程为

$$y = 0.04 \cos \left[ \frac{\pi}{6} t - \frac{\pi}{3} \right] \quad (\text{m})$$

将波速  $u = \lambda/T = \omega\lambda/2\pi = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  及  $x = 1.0 \text{ m}$  代入波动方程的一般形式  $y = A \cos[\omega(t + x/u) + \varphi_0]$  中，并与上述  $x = 1.0 \text{ m}$  处的运动方程作比较，可得  $\varphi_0 = -\pi/2$ ，则波动方程为

$$y = 0.04 \cos \left[ \frac{\pi}{6} (t + x/10) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{m})$$

**10-15** 图中 (I) 是  $t = 0$  时的波形图，(II) 是  $t = 0.1 \text{ s}$  时的波形图，已知  $T > 0.1 \text{ s}$ ，写出波动方程的表达式。



题 10-15 图

**分析** 已知波动方程的形式为

$$y = A \cos[2\pi(t/T - x/\lambda) + \varphi_0]$$

从如图所示的  $t = 0$  时的波形曲线 I, 可知波的振幅  $A$  和波长  $\lambda$ , 利用旋转矢量法可确定原点处质点的初相  $\varphi_0$ . 因此, 确定波的周期就成为解题的关键. 从题给条件来看, 周期  $T$  只能从两个不同时刻的波形曲线之间的联系来得到. 为此, 可以从下面两个不同的角度来分析.

(1) 由曲线 (I) 可知, 在  $t = 0$  时, 原点处的质点处在平衡位置且向  $Oy$  轴负向运动, 而曲线 (II) 则表明, 经过 0.1s 后, 该质点已运动到  $Oy$  轴上的  $-A$  处. 因此, 可列方程  $kT + T/4 = 0.1s$ , 在一般情形下,  $k = 0, 1, 2, \dots$  这就是说, 质点在 0.1s 内, 可以经历  $k$  个周期振动后再回到  $-A$  处, 故有  $T = 0.1 / (k + 0.25)$  s.

(2) 从波形的移动来分析. 因波沿  $Ox$  轴正方向传播, 波形曲线 (II) 可视为曲线 (I) 向右平移了  $\Delta x = u\Delta t = \lambda\Delta t / T$ . 由图可知,  $\Delta x = k\lambda + \lambda/4$ , 故有  $k\lambda + \lambda/4 = \lambda\Delta t / T$ , 同样也得  $T = 0.1 / (k + 0.25)s$ . 应当注意,  $k$  的取值由题给条件  $T > 0.1$  s 所决定.

**解** 从图中可知波长  $\lambda = 2.0$  m, 振幅  $A = 0.10$  m. 由波形曲线 (I) 得知在  $t = 0$  时, 原点处质点位于平衡位置且向  $Oy$  轴负向运动, 利用旋转矢量法可得  $\varphi_0 = \pi/2$ . 根据上面的分析, 周期为

$$T = (0.1 \text{ s}) / (k + 0.25) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

由题意知  $T > 0.1$  s, 故上式成立的条件为  $k = 0$ , 可得  $T = 0.4$  s. 这样, 波动方程可写成

$$y = 0.10 \cos[2\pi(t/0.4 + x/2.0) + 0.5\pi] \quad (\text{m})$$

**10-16** 平面简谐波的波动方程为  $y = 0.08 \cos(4\pi t - 2\pi x)$  (m).

**求:** (1)  $t = 2.1$  s 时波源及距波源 0.10m 两处的相位; (2) 离波源 0.80 m 及 0.30 m 两处的相位差.

**解** (1) 将  $t = 2.1$  s 和  $x = 0$  代入题给波动方程, 可得波源处的相位

$$\varphi_1 = 8.4\pi$$

将  $t = 2.1$  s 和  $x' = 0.10$  m 代入题给波动方程, 得 0.10 m 处的相位为

$$\varphi_2 = 8.2\pi$$

(2) 从波动方程可知波长  $\lambda = 1.0$  m. 这样,  $x_1 = 0.80$  m 与  $x_2 = 0.30$  m 两点间的相位差

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \Delta x / \lambda = \pi$$

**10-17** 为了保持波源的振动不变, 需要消耗 4.0 W 的功率. 若波源发出的是球面波 (设介质不吸收波的能量). 求距离波源 5.0 m 和 10.0 m 处的能流密度.

**分析** 波的传播伴随着能量的传播. 由于波源在单位时间内提供的能量恒定, 且介质不吸收能量, 故对于球面波而言, 单位时间内通过任意半径的球面的能量 (即平均能流) 相同, 都等于波源消耗的功率  $\bar{P}$ . 而在同一个球面上各处的能流密度相同, 因此, 可求出不同位置的能流密度  $I = \bar{P}/S$ .

**解** 由分析可知, 半径  $r$  处的能流密度为

$$I = \bar{P} / 4\pi r^2$$

当  $r_1 = 5.0$  m、 $r_2 = 10.0$  m 时, 分别有

$$I_1 = \bar{P} / 4\pi r_1^2 = 1.27 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$I_2 = \bar{P} / 4\pi r_2^2 = 1.27 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

**10-18** 有一波在介质中传播, 其波速  $u = 1.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 振幅  $A = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 频率  $\nu = 1.0 \times 10^3 \text{ Hz}$ . 若介质的密度为  $\rho = 8.0 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 求: (1) 该波的能流密度; (2) 1 min 内垂直通过  $4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  的总能量.

**解** (1) 由能流密度  $I$  的表达式得

$$I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 = 2\pi^2 \rho u A^2 \nu^2 = 1.58 \times 10^5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

(2) 在时间间隔  $\Delta t = 60$  s 内垂直通过面积  $S$  的能量为

$$W = \bar{P} \cdot \Delta t = IS \cdot \Delta t = 3.79 \times 10^3 \text{ J}$$

**10-19** 如图所示, 两振动方向相同的平面简谐波波源分别位于  $A$ 、 $B$  两点. 设它们相位相同, 且频率均为  $\nu = 30 \text{ Hz}$ , 波速  $u = 0.50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 求在  $P$  点处两列波的相位差.

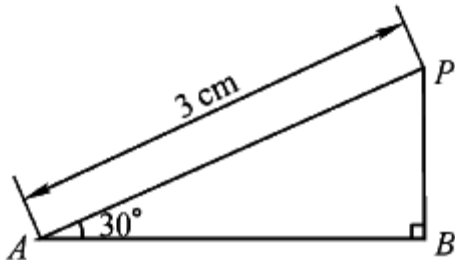
**分析** 在均匀介质中, 两列波相遇时的相位差  $\Delta\varphi$  一般由两部分组成, 即它们的初相差  $\varphi_A - \varphi_B$  和由它们的波程差而引起的相位差  $2\pi\Delta r/\lambda$ . 本题因  $\varphi_A = \varphi_B$ , 故它们的相位差只取决于波程差.

**解** 在图中的直角三角形  $ABP$  中

$$BP = AP \sin 30^\circ = 1.5 \text{ cm}$$

两列波在点  $P$  处的波程差为  $\Delta r = AP - BP$ , 则相位差为

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta r / \lambda = 2\pi\nu\Delta r / u = 1.8\pi$$



题 10-19 图

**10-20** 如图所示, 两相干波源分别在  $P$ 、 $Q$  两点处, 它们发出频率为  $\nu$ 、波长为  $\lambda$ , 初相相同的两列相干波. 设  $PQ = 3\lambda/2$ ,  $R$  为  $PQ$  连线上的一点. 求: (1) 自  $P$ 、 $Q$  发出的两列波在  $R$  处的相位差; (2) 两波在  $R$  处干涉时的合振幅.



题 10-20 图

**分析** 因两波源的初相相同, 两列波在点  $R$  处的相位差  $\Delta\varphi$  仍与上题一样, 由它们的波程差决定. 因  $R$  处质点同时受两列相干波的作用, 其振动为这两个同频率、同振动方向的简谐运动的合成, 合振幅  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$ .

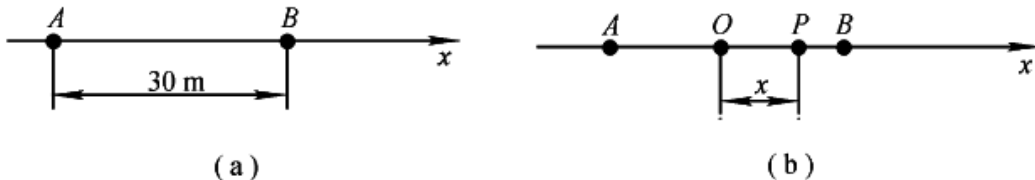
**解** (1) 两列波在  $R$  处的相位差为

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta r / \lambda = 3\pi$$

(2) 由于  $\Delta = 3\pi$ , 则合振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 3\pi} = |A_1 - A_2|$$

**10-21** 两相干波波源位于同一介质中的  $A$ 、 $B$  两点, 如图 (a) 所示. 其振幅相等、频率皆为 100 Hz,  $B$  比  $A$  的相位超前  $\pi$ . 若  $A$ 、 $B$  相距 30.0 m, 波速为  $u = 400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 试求  $AB$  连线上因干涉而静止的各点的位置.



题 10-21 图

**分析** 两列相干波相遇时的相位差  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi\Delta r}{\lambda}$ . 因此, 两列振幅相同的相干波因干涉而静止的点的位置, 可根据相消条件  $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$  获得.

**解** 以  $A$ 、 $B$  两点的中点  $O$  为原点, 取坐标如图 (b) 所示. 两波的波长均为  $\lambda = u/\nu = 4.0 \text{ m}$ . 在  $A$ 、 $B$  连线上可分三个部分进行讨论.

1. 位于点  $A$  左侧部分

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A) = -14\pi$$

因该范围内两列波相位差恒为  $2\pi$  的整数倍, 故干涉后质点振动处处加强, 没有静止的点.

2. 位于点  $B$  右侧部分

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A) = 16\pi$$

显然该范围内质点振动也都是加强, 无干涉静止的点.

3. 在  $A$ 、 $B$  两点的连线间, 设任意一点  $P$  距原点为  $x$ . 因  $r_B = 15 - x$ ,  $r_A = 15 + x$ , 则两

列波在点  $P$  的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A)/\lambda = (x+1)\pi$$

根据分析中所述, 干涉静止的点应满足方程

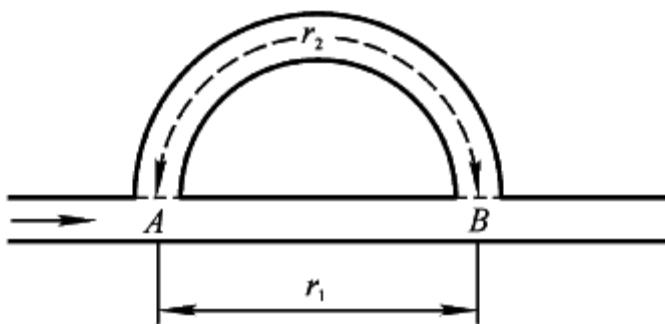
$$x(x+1)\pi = (52k+1)\pi$$

得

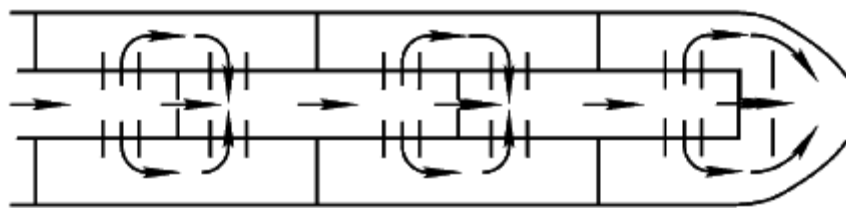
$$x = 2k \text{ m} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

因  $x \leq 15 \text{ m}$ , 故  $k \leq 7$ . 即在  $A$ 、 $B$  之间的连线上共有 15 个静止点.

**10-22** 图(a)是干涉型消声器结构的原理图, 利用这一结构可以消除噪声. 当发动机排气噪声声波经管道到达点  $A$  时, 分成两路而在点  $B$  相遇, 声波因干涉而相消. 如果要消除频率为  $300 \text{ Hz}$  的发动机排气噪声, 则图中弯管与直管的长度差  $\Delta r = r_2 - r_1$  至少应为多少? (设声波速度为  $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ )



(a)



(b)

题 10-22 图

**分析** 一列声波被分成两束后再相遇, 将形成波的干涉现象. 由干涉相消条件, 可确定所需的波程差, 即两管的长度差  $\Delta r$ .

**解** 由分析可知, 声波从点  $A$  分开到点  $B$  相遇, 两列波的波程差  $\Delta r = r_2 - r_1$ , 故它们的相位差为

$$\Delta\varphi = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = 2\pi\Delta r/\lambda$$

由相消静止条件  $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

得

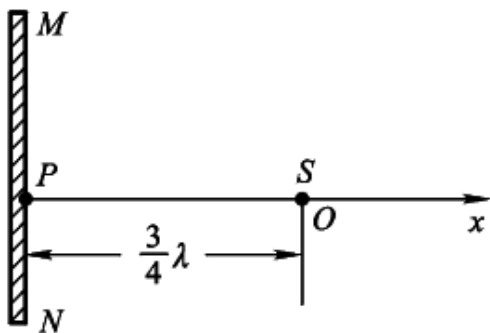
$$\Delta r = (2k+1)\lambda/2$$

根据题中要求令  $k = 0$  得  $\Delta r$  至少应为

$$\Delta r = \lambda / 2 = u / 2v = 0.57 \text{ m}$$

**讨论** 在实际应用中, 由于噪声是由多种频率的声波混合而成, 因而常将具有不同  $\Delta r$  的消声单元串接起来以增加消除噪声的能力. 图(b)为安装在摩托车排气系统中的干涉消声器的结构原理图.

**10-23** 如图所示,  $x=0$  处有一运动方程为  $y = A\cos\omega t$  的平面波波源, 产生的波沿  $x$  轴正、负方向传播.  $MN$  为波密介质的反射面, 距波源  $3\lambda/4$ . 求: (1) 波源所发射的波沿波源  $O$  左右传播的波动方程; (2) 在  $MN$  处反射波的波动方程; (3) 在  $O \sim MN$  区域内形成的驻波方程, 以及波节和波腹的位置; (4)  $x > 0$  区域内合成波的波动方程.



题 10-23 图

**分析** 知道波源  $O$  点的运动方程  $y = A\cos\omega t$ , 可以写出波沿  $x$  轴负向和正向传播的方程分别为  $y_1 = A\cos\omega(t + x/u)$  和  $y_2 = A\cos\omega(t - x/u)$ . 因此可以写出  $y_1$  在  $MN$  反射面上  $P$  点的运动方程. 设反射波为  $y_3$ , 它和  $y_1$  应是同振动方向、同振幅、同频率的波, 但是由于半波损失, 它在  $P$  点引起的振动和  $y_1$  在  $P$  点引起的振动反相. 利用  $y_1$  在  $P$  点的运动方程可求  $y_3$  在  $P$  点的运动方程, 从而写出反射波  $y_3$ . 在  $O \sim MN$  区域由  $y_1$  和  $y_3$  两列同频率、同振动方向、同振幅沿相反方向传播的波合成形成驻波. 在  $x > 0$  区域是同传播方向的  $y_2$  和  $y_3$  合成新的行波.

**解** (1) 由分析已知: 沿左方向和右方向传播的波动方程分别为

$$y_1 = A\cos\omega(t + x/u) \text{ 和 } y_2 = A\cos\omega(t - x/u)$$

(2)  $y_1$  在反射面  $MN$  处引起质点  $P$  振动的运动方程

$$y_{1P} = A\cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{3}{4}\lambda\right)\right] = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

因半波损失反射波  $y_3$  在此处引起的振动为

$$y_{3P} = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{3}{2}\pi + \pi\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

设反射波的波动方程为  $y_3 = A\cos(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda + \varphi)$ , 则反射波在  $x = -3\lambda/4$  处引起的振动为

$$y_{3P} = A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t + \frac{3}{2} \pi + \varphi \right)$$

与上式比较得  $\varphi = -2\pi$ ，故反射波的波动方程为

$$y_3 = A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2}{\lambda} \pi x - 2\pi \right) = A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2}{\lambda} \pi x \right)$$

(3) 在  $O \sim MN$  区域由  $y_1$  和  $y_3$  合成的驻波  $y_4$  为

$$y_4(t, x) = y_1 + y_3 = A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t + \frac{2}{\lambda} \pi x \right) + A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2}{\lambda} \pi x \right) = 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos \left( \frac{2\pi}{T} t \right)$$

波节的位置:  $2\pi x / \lambda = k\pi + \pi/2$ ,  $x = k\lambda/2 + \lambda/4$ , 取  $k = -1, -2$ , 即  $x = -\lambda/4, -3\lambda/4$  处为波节.

波腹的位置:  $2\pi x / \lambda = k\pi$ ,  $x = k\lambda/2$ , 取  $k = 0, -1$ , 即  $x = 0, -\lambda/2$  处为波腹.

(4) 在  $x > 0$  区域, 由  $y_2$  和  $y_3$  合成的波  $y_5$  为

$$y_5(t, x) = y_2 + y_3 = A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2}{\lambda} \pi x \right) + A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2}{\lambda} \pi x \right) = 2A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

这表明:  $x > 0$  区域内的合成波是振幅为  $2A$  的平面简谐波.

**10-24** 一弦上的驻波方程式为

$$y = 3.0 \times 10^{-2} \cos(1.6\pi x) \cos(550\pi t) \quad (\text{m})$$

(1) 若将此驻波看成是由传播方向相反, 振幅及波速均相同的两列相干波叠加而成的, 求它们的振幅及波速; (2) 求相邻波节之间的距离; (3) 求  $t = 3.0 \times 10^{-3} \text{ s}$  时位于  $x = 0.625 \text{ m}$  处质点的振动速度.

**分析** (1) 采用比较法. 将本题所给的驻波方程, 与驻波方程的一般形式相比较即可求得振幅、波速等. (2) 由波节位置的表达式可得相邻波节的距离. (3) 质点的振动速度可按速度定义  $v = dy/dt$  求得.

**解** (1) 将已知驻波方程  $y = 3.0 \times 10^{-2} \cos(1.6\pi x) \cos(550\pi t) \quad (\text{m})$

与驻波方程的一般形式  $y = 2A \cos(2\pi x / \lambda) \cos(2\pi \nu t)$  作比较, 可得两列波的振幅  $A = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 波长  $\lambda = 1.25 \text{ m}$ , 频率  $\nu = 275 \text{ Hz}$ , 则波速  $u = \lambda \nu = 343.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

(2) 相邻波节间的距离为

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{k+1} - x_k = [2(k+1) + 1]\lambda/4 - (2k+1)\lambda/4 \\ &= \lambda/2 = 0.625 \text{ m} \end{aligned}$$

(3) 在  $t = 3.0 \times 10^{-3} \text{ s}$  时, 位于  $x = 0.625 \text{ m}$  处质点的振动速度为

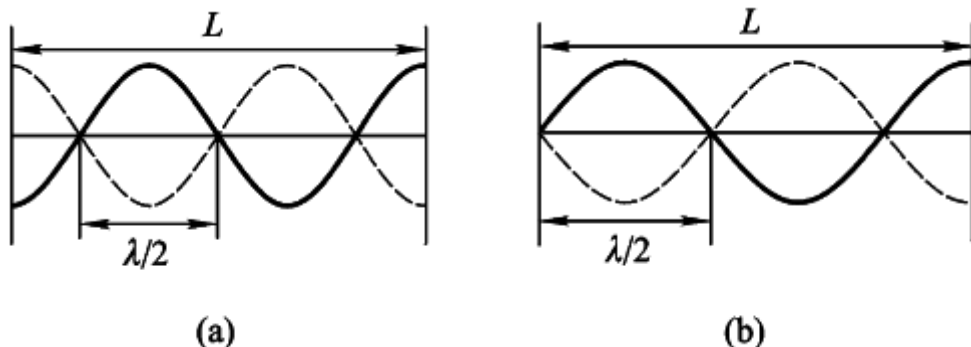
$$\begin{aligned} v &= dy/dt = -16.5\pi \cos(1.6\pi x) \cos(550\pi t) \\ &= -46.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

**\*10-25** 在下述两种情况下, 求长度为  $0.15 \text{ m}$  的风琴管的基频和前四个谐频. (1) 管子两端开口; (2) 管子的一端封闭, 一端开口. 设声速为  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**分析** 当风琴管的某个端口封闭时, 那么风琴管内形成的驻波在该端口就是波节. 而当风琴管的端口开口时, 就形成波腹. 根据限定区域内驻波形成条件 (如图所示), 当管子两端为



波腹时, 其管长与波长有关系式  $L = k\lambda_k / 2$  成立,  $k$  为正整数. 而当管子一端为波节、另一端为波腹时, 管长与波长有关系式  $L = (2k - 1)\lambda_k / 4$  成立. 可见取不同的  $k$  值, 得到不同的  $\lambda_k$ , 管内就出现不同频率  $\nu_k$  的波. 对应  $k = 1$  称为基频,  $k = 2, 3, 4, \dots$  称为各次谐频.



题 10-25 图

**解** (1) 根据分析由  $L = k\lambda_k / 2$  和  $\nu_k = u / \lambda_k$  可得

$$\nu_k = ku / 2L \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

因此, 基频:  $\nu_1 = 1133 \text{ Hz}$

二次谐频:  $\nu_2 = 2267 \text{ Hz}$

三次谐频:  $\nu_3 = 3400 \text{ Hz}$

四次谐频:  $\nu_4 = 4533 \text{ Hz}$

五次谐频:  $\nu_5 = 5667 \text{ Hz}$

(2) 同样根据分析由  $L = (2k - 1)\lambda_k / 4$  和  $\nu_k = u / \lambda_k$  可得

$$\nu_k = (2k - 1)u / 4L \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

因此, 基频:  $\nu_1 = 567 \text{ Hz}$

二次谐频:  $\nu_2 = 1700 \text{ Hz}$

三次谐频:  $\nu_3 = 2833 \text{ Hz}$

四次谐频:  $\nu_4 = 3967 \text{ Hz}$

五次谐频:  $\nu_5 = 5100 \text{ Hz}$

**10-26** 一平面简谐波的频率为  $500 \text{ Hz}$ , 在空气 ( $\rho = 1.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) 中以  $u = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度传播, 到达人耳时, 振幅约为  $A = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}$ . 试求波在耳中的平均能量密度和声强.

**解** 波在耳中的平均能量密度

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 = 2\pi^2 \rho A^2 \nu^2 \\ &= 6.42 \times 10^{-6} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

声强就是声波的能流密度, 即

$$I = u\bar{w} = 2.18 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

这个声强略大于繁忙街道上的噪声, 使人耳已感到不适应. 一般正常谈话的声强约  $1.0 \times 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  左右.

**10-27** 面积为  $1.0 \text{ m}^2$  的窗户开向街道, 街中噪声在窗口的声强级为  $80 \text{ dB}$ . 问有多少“声

功率”传入窗内？

**分析** 首先要理解声强、声强级、声功率的物理意义，并了解它们之间的相互关系。声强是声波的能流密度  $I$ ，而声强级  $L$  是描述介质中不同声波强弱的物理量。它们之间的关系为  $L = \lg(I/I_0)$ ，其中  $I_0 = 1.0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  为规定声强。 $L$  的单位是贝尔 (B)，但常用的单位是分贝 (dB)，且  $1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$ 。声功率是单位时间内声波通过某面积传递的能量，由于窗户上各处的  $I$  相同，故有  $\bar{P} = IS$ 。

**解** 根据分析，由  $L = \lg(I/I_0)$  可得声强为

$$I = 10L I_0$$

则传入窗户的声功率为

$$\bar{P} = IS = 10L I_0 S = 1.0 \times 10^{-4} \text{ W}$$

**10-28** 若在同一介质中传播的，频率分别为 1200 Hz 和 400 Hz 的两声波有相同的振幅。求：

(1) 它们的强度之比；(2) 两声波的声强级差。

**解** (1) 因声强  $I = \rho u A^2 \omega^2 / 2$ ，则两声波声强之比

$$I_1 / I_2 = \omega_1^2 / \omega_2^2 = 9$$

(2) 因声强级  $L = \lg(I/I_0)$ ，则两声波声强级差为

$$\begin{aligned} \Delta L &= \lg(I_1/I_0) - \lg(I_2/I_0) = \lg(I_1/I_2) \\ &= 0.954 \text{ B} = 9.54 \text{ dB} \end{aligned}$$

**10-29** 一警车以  $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度在静止的空气中行驶，假设车上警笛的频率为 800 Hz。求：

(1) 静止站在路边的人听到警车驶近和离去时的警笛声波频率；(2) 如果警车追赶一辆速度为  $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的客车，则客车上人听到的警笛声波的频率是多少？（设空气中的声速  $u = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ）

**分析** 由于声源与观察者之间的相对运动而产生声多普勒效应，由多普勒频率公式可解得结果。在处理这类问题时，不仅要分清观察者相对介质（空气）是静止还是运动，同时也要分清声源的运动状态。

**解** (1) 根据多普勒频率公式，当声源（警车）以速度  $v_s = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  运动时，静止于路边的观察者所接收到的频率为

$$v' = v \frac{u}{u \mp v_s}$$

警车驶近观察者时，式中  $v_s$  前取“ $-$ ”号，故有

$$v'_1 = v \frac{u}{u - v_s} = 865.6 \text{ Hz}$$

警车驶离观察者时，式中  $v_s$  前取“ $+$ ”号，故有

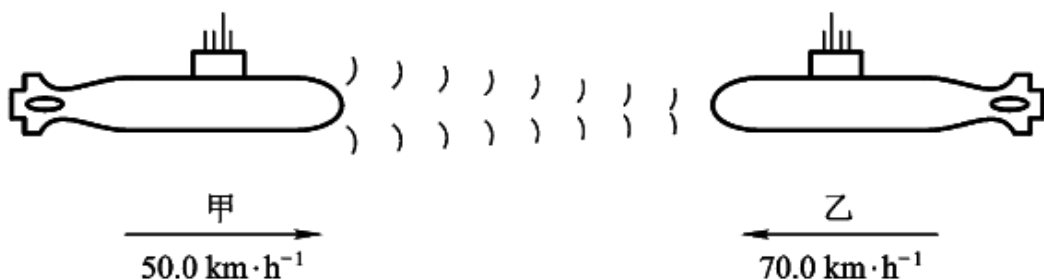
$$v'_2 = v \frac{u}{u + v_s} = 743.7 \text{ Hz}$$

(2) 声源（警车）与客车上的观察者作同向运动时，观察者收到的频率为

$$v'_2 = v \frac{u}{u + v_s} = 743.7 \text{ Hz}$$

**10-30** 一次军事演习中, 有两艘潜艇在水中相向而行, 甲的速度为  $50.0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , 乙的速度为  $70.0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , 如图所示. 甲潜艇发出一个  $1.0 \times 10^3 \text{ Hz}$  的声音信号, 设声波在水中的传播速度为  $5.47 \times 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , 试求 (1) 乙潜艇接收到的信号频率; (2) 甲潜艇接收到的从乙潜艇反射回来的信号频率.

**分析** (1) 甲潜艇是声源, 发出信号频率为  $\nu$ , 乙潜艇是观察者, 两者相向运动, 利用多普勒频率公式, 即可求得乙潜艇接收到的信号频率  $\nu'$ . (2) 要求甲潜艇接收到的乙潜艇的信号频率, 可将乙潜艇看成是声源, 它发出的信号频率是  $\nu'$ , 将甲潜艇看成是观察者, 两者相向运动, 同样利用多普勒频率公式, 可求出甲潜艇接收到的信号频率  $\nu''$ .



题 10-30 图

**解** 由题已知  $v_1 = 50.0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $v_2 = 70.0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $u = 5.47 \times 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $\nu = 1000 \text{ Hz}$ , 由分析可知:

$$(1) \quad \nu' = \frac{u + v_2}{u - v_1} \nu = 1022 \text{ Hz}$$

$$(2) \quad \nu'' = \frac{u + v_1}{u - v_2} \nu' = 1045 \text{ Hz}$$

**\*10-31** 一广播电台的辐射功率是  $10 \text{ kW}$ , 假定辐射场均匀分布在以电台为中心的半球面上. (1) 求距离电台为  $r = 10 \text{ km}$  处的坡印廷矢量的平均值; (2) 若在上述距离处的电磁波可看作平面波, 求该处的电场强度和磁场强度的振幅.

**分析** 坡印廷矢量是电磁波的能流密度矢量, 它是随时间作周期性变化的. 求其平均值, 也就是指在一周期内的平均值. 在忽略电磁波传播过程中的能量损耗时, 按题意, 波源的辐射功率就应等于单位时间通过半球面 (面积  $A = 2\pi r^2$ ) 的电磁波能量, 即  $P = S \cdot A$ , 而平均能流密度值  $S = EH$ . 另外, 由电磁波的性质可知,  $E$  与  $H$  垂直, 相位相同, 且有关系式  $\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$ . 因此, 平面电磁波的坡印廷矢量大小的平均值可表示为  $S = \frac{1}{2} E_m H_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_m^2$ , 由此可求电场强度振幅  $E_m$  和磁场强度振幅  $H_m$ .

**解** (1) 因为辐射场分布在半球面上, 则坡印廷矢量的平均值为

$$S = P / 2\pi r^2 = 1.59 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

(2) 根据分析,  $S = EH = E_m H_m / 2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_m^2$ , 则磁场强度和电场强度的振幅分别为

$$H_m = \left( 2S \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \right)^{1/2} = 2.91 \times 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E_m = 2S / H_m = 0.109 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

**\*10-32** 真空中有一平面电磁波的电场表达式如下:  $E_x = 0$ ,  $E_y = 0.60 \cos[2\pi \times 10^8(t - x/c)] (\text{V} \cdot \text{m}^{-1})$ ,  $E_z = 0$ . 求: (1) 波长, 频率; (2) 该电磁波的传播方向; (3) 磁场强度的大小和方向; (4) 坡印廷矢量.

**分析** 根据电磁波的特性, 电场强度  $\mathbf{E}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$  均垂直于波的传播方向. 而  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  又互相垂直且同相位,  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  的方向为波速  $\mathbf{u}$  的方向. 在数值上有关系  $E/H = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}$  成立. 因此由题中给出的电场表达式可以求磁场表达式, 而坡印廷矢量可由公式  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  求出.

**解** (1) 由电场表达式可知, 角频率  $\omega = 2\pi \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ , 波速  $u$  等于光速  $c$ , 则电磁波的波长和频率分别为

$$\lambda = cT = 2\pi c / \omega = 3 \text{ m}; \quad v = \omega / 2\pi = 10^8 \text{ Hz}$$

(2) 由电场表达式看出, 电磁波沿  $x$  轴正方向传播,  $\mathbf{E}$  矢量是在  $Oxy$  平面内偏振的.

(3) 磁场强度表达式:

$$H_x = 0, \quad H_y = 0$$

$$H_z = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} E_y = 1.6 \times 10^{-3} \cos[2\pi \times 10^8(t - x/c)] (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$$

$\mathbf{H}$  矢量在  $Oxz$  平面内偏振.

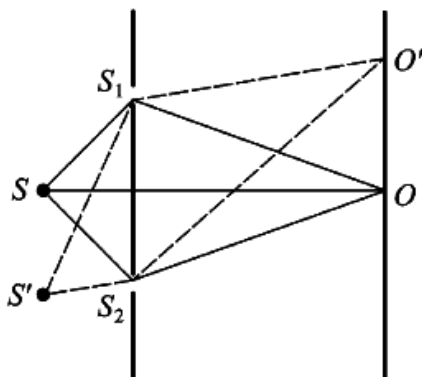
$$(4) \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = 9.6 \times 10^{-4} \cos^2[2\pi \times 10^8(t - x/c)] \mathbf{i} (\text{W} \cdot \text{m}^{-2})$$

# 第十一章 光 学

**11-1** 在双缝干涉实验中, 若单色光源  $S$  到两缝  $S_1$ 、 $S_2$  距离相等, 则观察屏上中央明条纹位于图中  $O$  处, 现将光源  $S$  向下移动到图中的  $S'$  位置, 则 ( )

- (A) 中央明纹向上移动, 且条纹间距增大
- (B) 中央明纹向上移动, 且条纹间距不变
- (C) 中央明纹向下移动, 且条纹间距增大
- (D) 中央明纹向下移动, 且条纹间距不变

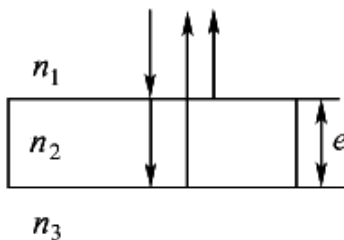
**分析与解** 由  $S$  发出的光到达  $S_1$ 、 $S_2$  的光程相同, 它们传到屏上中央  $O$  处, 光程差  $\Delta = 0$ , 形成明纹. 当光源由  $S$  移到  $S'$  时, 由  $S'$  到达狭缝  $S_1$  和  $S_2$  的两束光产生了光程差. 为了保持原中央明纹处的光程差为 0, 它会向上移到图中  $O'$  处. 使得由  $S'$  沿  $S_1$ 、 $S_2$  狭缝传到  $O'$  处的光程差仍为 0. 而屏上各级条纹位置只是向上平移, 因此条纹间距不变. 因此正确答案为 (B).



题 11-1 图

**11-2** 如图所示, 折射率为  $n_2$ , 厚度为  $e$  的透明介质薄膜的上方和下方的透明介质的折射率分别为  $n_1$  和  $n_3$ , 且  $n_1 < n_2$ ,  $n_2 > n_3$ , 若用波长为  $\lambda$  的单色平行光垂直入射到该薄膜上, 则从薄膜上、下两表面反射的光束的光程差是 ( )

- (A)  $2n_2e$
- (B)  $2n_2e - \frac{\lambda}{2}$
- (C)  $2n_2e - \lambda$
- (D)  $2n_2e - \frac{\lambda}{2n_2}$



题 11-2 图

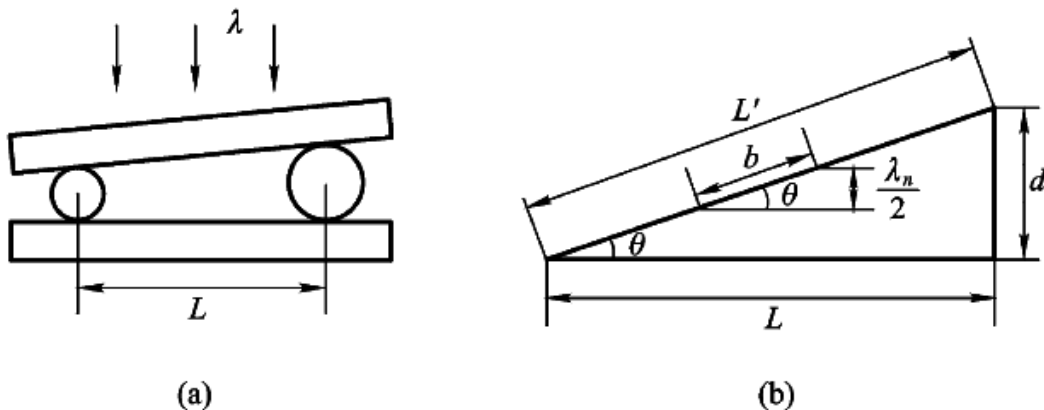
**分析与解** 由于  $n_1 < n_2$ ,  $n_2 > n_3$ , 因此在上表面的反射光有半波损失, 下表面的反射光

没有半波损失, 故它们的光程差  $\Delta = 2n_2e \pm \frac{\lambda}{2}$ , 这里  $\lambda$  是光在真空中的波长. 因此正确答案为

(B).

**11-3** 如图 (a) 所示, 两个直径有微小差别的彼此平行的滚柱之间的距离为  $L$ , 夹在两块平面晶体的中间, 形成空气劈形膜, 当单色光垂直入射时, 产生等厚干涉条纹, 如果滚柱之间的距离  $L$  变小, 则在  $L$  范围内干涉条纹的 ( )

- (A) 数目减小, 间距变大      (B) 数目减小, 间距不变  
(C) 数目不变, 间距变小      (D) 数目增加, 间距变小



题 11-3 图

**分析与解** 图 (a) 装置形成的劈尖等效图如图 (b) 所示. 图中  $d$  为两滚柱的直径差,  $b$  为两相邻明 (或暗) 条纹间距. 因为  $d$  不变, 当  $L$  变小时,  $\theta$  变大,  $L'$ 、 $b$  均变小. 由图可得  $\sin\theta = \lambda_n / 2b = d / L'$ , 因此条纹总数  $N = L' / b = 2d / \lambda_n$ , 因为  $d$  和  $\lambda_n$  不变, 所以  $N$  不变. 正确答案为 (C)

**11-4** 在单缝夫琅禾费衍射实验中, 波长为  $\lambda$  的单色光垂直入射在宽度为  $3\lambda$  的单缝上, 对应于衍射角为  $30^\circ$  的方向, 单缝处波阵面可分成的半波带数目为 ( )

- (A) 2 个      (B) 3 个      (C) 4 个      (D) 6 个

**分析与解** 根据单缝衍射公式

$$b \sin\theta = \begin{cases} \pm 2k \frac{\lambda}{2} & \text{(暗条纹)} \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} & \text{(明条纹)} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

因此第  $k$  级暗纹对应的单缝波阵面被分成  $2k$  个半波带, 第  $k$  级明纹对应的单缝波阵面被分成  $2k+1$  个半波带. 由题意  $b \sin\theta = 3\lambda/2$ , 即对应第 1 级明纹, 单缝分成 3 个半波带. 正确答案为 (B).

**11-5** 波长  $\lambda = 550 \text{ nm}$  的单色光垂直入射于光栅常数  $d = 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$  的光栅上, 可能观察到的光谱线的最大级次为 ( )

- (A) 4      (B) 3      (C) 2      (D) 1

**分析与解** 由光栅方程  $d \sin\theta = \pm 2k\lambda (k = 0, 1, \dots)$ , 可能观察到的最大级次为

$$k_{\max} \leq \frac{d \sin(\pi/2)}{\lambda} = 1.82$$

即只能看到第 1 级明纹，答案为 (D)。

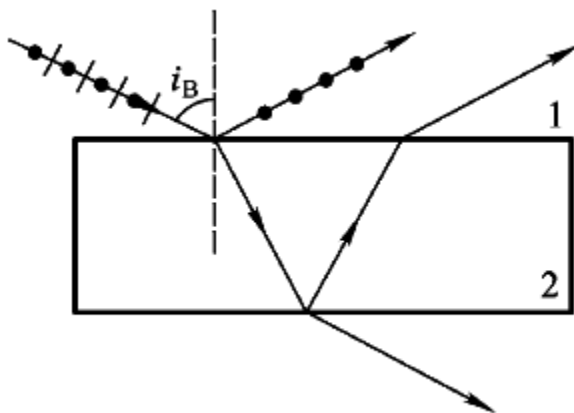
**11-6** 三个偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  与  $P_3$  堆叠在一起， $P_1$  与  $P_3$  的偏振化方向相互垂直， $P_2$  与  $P_1$  的偏振化方向间的夹角为  $45^\circ$ ，强度为  $I_0$  的自然光入射于偏振片  $P_1$ ，并依次透过偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  与  $P_3$ ，则通过三个偏振片后的光强为 ( )

- (A)  $I_0/16$       (B)  $3I_0/8$       (C)  $I_0/8$       (D)  $I_0/4$

**分析与解** 自然光透过偏振片后光强为  $I_1 = I_0/2$ 。由于  $P_1$  和  $P_2$  的偏振化方向成  $45^\circ$ ，所以偏振光透过  $P_2$  后光强由马吕斯定律得  $I_2 = I_1 \cos^2 45^\circ = I_0/4$ 。而  $P_2$  和  $P_3$  的偏振化方向也成  $45^\circ$ ，则透过  $P_3$  后光强变为  $I_3 = I_2 \cos^2 45^\circ = I_0/8$ 。故答案为 (C)。

**11-7** 一束自然光自空气射向一块平板玻璃，如图所示，设入射角等于布儒斯特角  $i_B$ ，则在界面 2 的反射光 ( )

- (A) 是自然光  
(B) 是线偏振光且光矢量的振动方向垂直于入射面  
(C) 是线偏振光且光矢量的振动方向平行于入射面  
(D) 是部分偏振光



题 11-7 图

**分析与解** 由几何光学知识可知，在界面 2 处反射光与折射光仍然垂直，因此光在界面 2 处的入射角也是布儒斯特角，根据布儒斯特定律，反射光是线偏振光且光振动方向垂直于入射面。答案为 (B)。

**11-8** 在双缝干涉实验中，两缝间距为  $0.30 \text{ mm}$ ，用单色光垂直照射双缝，在离缝  $1.20 \text{ m}$  的屏上测得中央明纹一侧第 5 条暗纹与另一侧第 5 条暗纹间的距离为  $22.78 \text{ mm}$ 。问所用光的波长为多少，是什么颜色的光？

**分析与解** 在双缝干涉中，屏上暗纹位置由  $x = \frac{d'}{d}(2k+1)\frac{\lambda}{2}$  决定，式中  $d'$  为双缝到屏的距离， $d$  为双缝间距。所谓第 5 条暗纹是指对应  $k=4$  的那一级暗纹。由于条纹对称，该暗纹

到中央明纹中心的距离  $x = \frac{22.78}{2} \text{ mm}$ , 那么由暗纹公式即可求得波长  $\lambda$ . 此外, 因双缝干涉是等间距的, 故也可用条纹间距公式  $\Delta x = \frac{d'}{d} \lambda$  求入射光波长. 应注意两个第 5 条暗纹之间所包含的相邻条纹间隔数为 9 (不是 10, 为什么?), 故  $\Delta x = \frac{22.78}{9} \text{ mm}$ .

**解 1** 屏上暗纹的位置  $x = \frac{d'}{d} (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ , 把  $k=4, x = \frac{22.78}{2} \times 10^{-3} \text{ m}$  以及  $d, d'$  值代入, 可得  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ , 为红光.

**解 2** 屏上相邻暗纹 (或明纹) 间距  $\Delta x = \frac{d'}{d} \lambda$ , 把  $\Delta x = \frac{22.78}{9} \times 10^{-3} \text{ m}$ , 以及  $d, d'$  值代入, 可得  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ .

**11-9** 在双缝干涉实验中, 用波长  $\lambda = 546.1 \text{ nm}$  的单色光照射, 双缝与屏的距离  $d' = 300 \text{ mm}$ . 测得中央明纹两侧的两个第五级明条纹的间距为  $12.2 \text{ mm}$ , 求双缝间的距离.

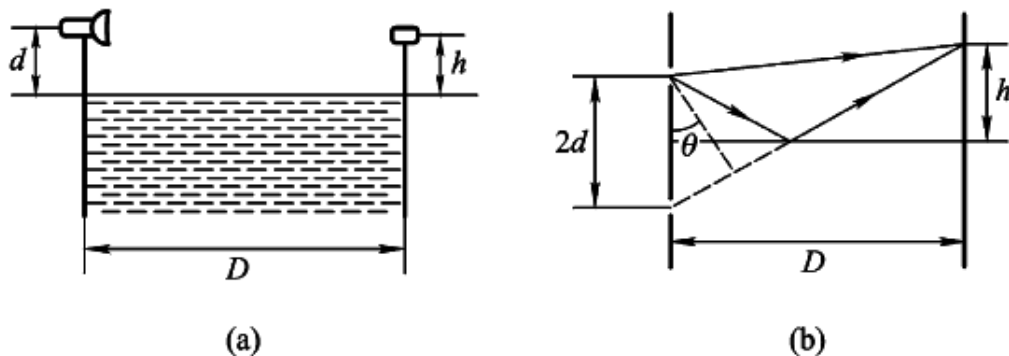
**分析** 双缝干涉在屏上形成的条纹是上下对称且等间隔的. 如果设两明纹间隔为  $\Delta x$ , 则由中央明纹两侧第五级明纹间距  $x_5 - x_{-5} = 10\Delta x$  可求出  $\Delta x$ . 再由公式  $\Delta x = d'\lambda / d$  即可求出双缝间距  $d$ .

**解** 根据分析:  $\Delta x = (x_5 - x_{-5}) / 10 = 1.22 \times 10^{-3} \text{ m}$

双缝间距:  $d = d'\lambda / \Delta x = 1.34 \times 10^{-4} \text{ m}$

**11-10** 一个微波发射器置于岸上, 离水面高度为  $d$ , 对岸在离水面  $h$  高度处放置一接收器, 水面宽度为  $D$ , 且  $D \gg d, D \gg h$ , 如图所示. 发射器向对面发射波长为  $\lambda$  的微波, 且  $\lambda \gg d$ , 求接收器测到极大值时, 至少离地多高?

**分析** 由发射器直接发射的微波与经水面反射后的微波相遇可互相干涉, 这种干涉与劳埃德镜实验完全相同. 形成的干涉结果与缝距为  $2d$ , 缝屏间距为  $D$  的双缝干涉相似, 如图 (b) 所示, 但要注意的是和劳埃德镜实验一样, 由于从水面上反射的光存在半波损失, 使得两束光在屏上相遇产生的光程差为  $2d\sin\theta + \lambda/2$ , 而不是  $2d\sin\theta$ .



题 11-10 图

**解** 由分析可知, 接收到的信号为极大值时, 应满足

$$2d\sin\theta + \lambda/2 = k\lambda \quad (k=1,2,\dots)$$



$$h \approx D \tan \theta \approx D \sin \theta = D \lambda (2k-1) / 4d$$

取  $k=1$  时, 得  $h_{\min} = D \lambda / 4d$ .

**11-11** 如图所示, 由光源  $S$  发出的  $\lambda=600 \text{ nm}$  的单色光, 自空气射入折射率  $n=1.23$  的一层透明物质, 再射入空气. 若透明物质的厚度为  $d=1.0 \text{ cm}$ , 入射角  $\theta=30^\circ$ , 且  $SA=BC=5.0 \text{ cm}$ , 求: (1) 折射角  $\theta_1$  为多少? (2) 此单色光在这层透明物质里的频率、速度和波长各为多少? (3)  $S$  到  $C$  的几何路程为多少? 光程又为多少?

**解** (1) 由折射定律  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta_1} = n$  可得

$$\theta_1 = \arcsin \left( \frac{\sin \theta}{n} \right) = \arcsin \left( \frac{\sin 30^\circ}{1.23} \right) = 24^\circ$$

(2) 单色光在透明介质中的速度  $v_n$ , 波长  $\lambda_n$  和频率  $\nu$  分别为

$$v_n = \frac{c}{n} = 2.44 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = 4.88 \times 10^{-7} \text{ m} = 488 \text{ nm}$$

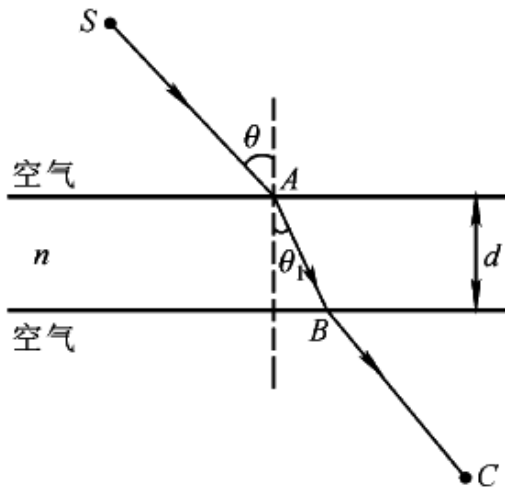
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

(3)  $S$  到  $C$  的几何路程为

$$SC = SA + AB + BC = SA + \frac{d}{\cos \theta_1} + BC = 0.111 \text{ m}$$

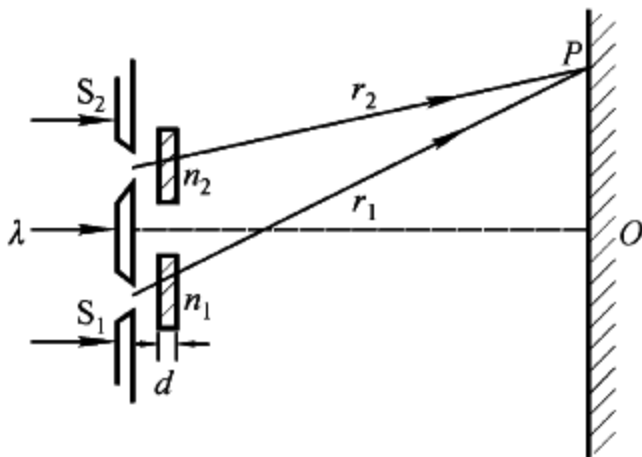
$S$  到  $C$  的光程为

$$\sum n_i D_i = SA \times 1 + AB \times n + BC \times 1 = 0.114 \text{ m}$$



题 11-11 图

**11-12** 一双缝装置的一个缝被折射率为 1.40 的薄玻璃片所遮盖, 另一个缝被折射率为 1.70 的薄玻璃片所遮盖. 在玻璃片插入以后, 屏上原来中央极大的所在点, 现变为第五级明纹. 假定  $\lambda=480 \text{ nm}$ , 且两玻璃片厚度均为  $d$ , 求  $d$  值.



题 11-12 图

**分析** 本题是干涉现象在工程测量中的一个具体应用，它可以用来测量透明介质薄片的微小厚度或折射率。在不加介质片之前，两相干光均在空气中传播，它们到达屏上任一点  $P$  的光程差由其几何路程差决定，对于点  $O$ ，光程差  $\Delta=0$ ，故点  $O$  处为中央明纹，其余条纹相对点  $O$  对称分布。而在插入介质片后，虽然两相干光在两介质薄片中的几何路程相同，但光程却不同，对于点  $O$ ， $\Delta \neq 0$ ，故点  $O$  不再是中央明纹，整个条纹发生平移。这时，干涉条纹空间分布的变化完全取决于光程差的变化。因此，对于屏上某点  $P$ （明纹或暗纹位置），只要计算出插入介质片前后光程差的变化，即可知道其干涉条纹的变化情况。

插入介质前的光程差  $\Delta_1 = r_1 - r_2 = k_1 \lambda$ （对应  $k_1$  级明纹），插入介质后的光程差  $\Delta_2 = [(n_1 - 1)d + r_1] - [(n_2 - 1)d + r_2] = k_2 \lambda$ （对应  $k_2$  级明纹）。光程差的变化量为

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (n_2 - n_1)d = (k_2 - k_1)\lambda$$

式中  $(k_2 - k_1)$  可以理解为移过点  $P$  的条纹数（本题为 5）。因此，对于这类问题，求解光程差的变化量是解题的关键。

**解** 由上述分析可知，两介质片插入前后，对于原中央明纹所在点  $O$ ，有

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (n_2 - n_1)d = 5\lambda$$

将有关数据代入可得

$$d = \frac{5\lambda}{n_2 - n_1} = 8.0 \mu\text{m}$$

**11-13** 白光垂直照射到空气中一厚度为 380 nm 的肥皂膜上。设肥皂的折射率为 1.32。试问该膜的正面呈现什么颜色？背面呈现什么颜色？

**分析** 这是薄膜干涉问题，求正面呈现的颜色就是在反射光中求因干涉增强光的波长（在可见光范围），求背面呈现的颜色就是在透射光中求干涉增强（即反射减弱）光的波长。

**解** 根据分析对反射光加强，有

$$2ne + \lambda/2 = k\lambda \quad (k=1,2,\dots)$$

$$\lambda = 4ne / (2k - 1)$$

在可见光范围,  $k = 2$  时,  $\lambda = 668.8 \text{ nm}$  (红光)

$k = 3$  时,  $\lambda = 401.3 \text{ nm}$  (紫光)

故正面呈红紫色. 同理, 对透射光加强, 有

$$2ne = k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots)$$

在可见光范围仅有  $k=2$  时,  $\lambda=501.6 \text{ nm}$  (绿光). 即背面呈绿色.

**11-14** 在折射率  $n_3 = 1.52$  的照相机镜头表面涂有一层折射率  $n_2 = 1.38$  的  $\text{MgF}_2$  增透膜, 若此膜仅适用于波长  $\lambda=550\text{nm}$  的光, 则此膜的最小厚度为多少?

**分析** 在薄膜干涉中, 膜的材料及厚度都将对两反射光 (或两透射光) 的光程差产生影响, 从而可使某些波长的光在反射 (或透射) 中得到加强或减弱, 这种选择性使薄膜干涉在工程技术上有很多应用. 本题所述的增透膜, 就是希望波长  $\lambda=550\text{nm}$  的光在透射中得到加强, 从而得到所希望的照相效果 (因感光底片对此波长附近的光最为敏感). 具体求解时应注意在  $d>0$  的前提下,  $k$  取最小的允许值.

**解 1** 因干涉的互补性, 波长为  $550\text{nm}$  的光在透射中得到加强, 则在反射中一定减弱, 两反射光的光程差  $\Delta_2 = 2n_2 d$ , 由干涉相消条件  $\Delta_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ , 得

$$d = (2k+1)\frac{\lambda}{4n_2}$$

取  $k=0$ , 则  $d_{\min} = 99.6\text{nm}$ .

**解 2** 由于空气的折射率  $n_1 = 1$ , 且有  $n_1 < n_2 < n_3$ , 则对透射光而言, 两相干光的光程差  $\Delta_1 = 2n_2 d + \frac{\lambda}{2}$ , 由干涉加强条件  $\Delta_1 = k\lambda$ , 得

$$d = (2k+1)\frac{\lambda}{4n_2}$$

取  $k=1$ , 则膜的最小厚度  $d_{\min} = 99.6\text{nm}$ .

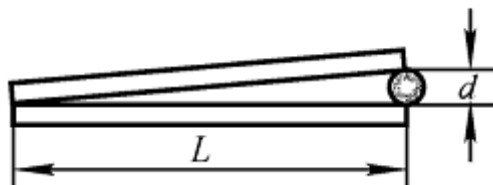
**11-15** 利用空气劈尖测细丝直径. 如图所示, 已知  $\lambda=589.3 \text{ nm}$ ,  $L = 2.888 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 测得 30 条条纹的总宽度为  $4.259 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 求细丝直径  $d$ .

**分析** 在应用劈尖干涉公式  $d = \frac{\lambda}{2nb} L$  时, 应注意相邻条纹的间距  $b$  是  $N$  条条纹的宽度

$\Delta x$  除以  $(N-1)$ . 对空气劈尖  $n=1$ .

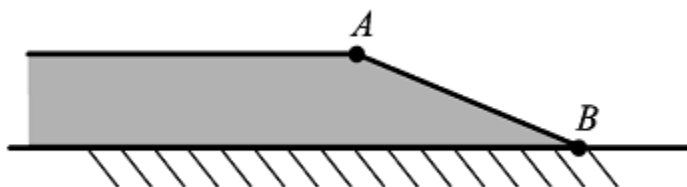
**解** 由分析知, 相邻条纹间距  $b = \frac{\Delta x}{N-1}$ , 则细丝直径为

$$d = \frac{\lambda}{2nb} L = \frac{\lambda(N-1)}{2n\Delta x} = 5.75 \times 10^{-5} \text{ m}$$



题 11-15 图

**11-16** 集成光学中的楔形薄膜耦合器原理如图所示. 沉积在玻璃衬底上的是氧化钽 ( $\text{Ta}_2\text{O}_5$ ) 薄膜, 其楔形端从  $A$  到  $B$  厚度逐渐减小为零. 为测定薄膜的厚度, 用波长  $\lambda=632.8\text{nm}$  的 He-Ne 激光垂直照射, 观察到薄膜楔形端共出现 11 条暗纹, 且  $A$  处对应一条暗纹, 试求氧化钽薄膜的厚度. ( $\text{Ta}_2\text{O}_5$  对  $632.8\text{nm}$  激光的折射率为 2.21)



题 11-16 图

**分析** 置于玻璃上的薄膜  $AB$  段形成劈尖, 求薄膜厚度就是求该劈尖在  $A$  点处的厚度. 由于  $\text{Ta}_2\text{O}_5$  对激光的折射率大于玻璃, 故从该劈尖上表面反射的光有半波损失, 而下表面没有, 因而两反射光光程差为  $\Delta=2ne+\lambda/2$ . 由反射光暗纹公式  $2ne_k+\lambda/2=(2k+1)\lambda/2$ ,  $k=0, 1, 2, 3, \dots$ , 可以求厚度  $e_k$ . 又因为  $AB$  中共有 11 条暗纹 (因半波损失  $B$  端也为暗纹), 则  $k$  取 10 即得薄膜厚度.

**解** 根据分析, 有

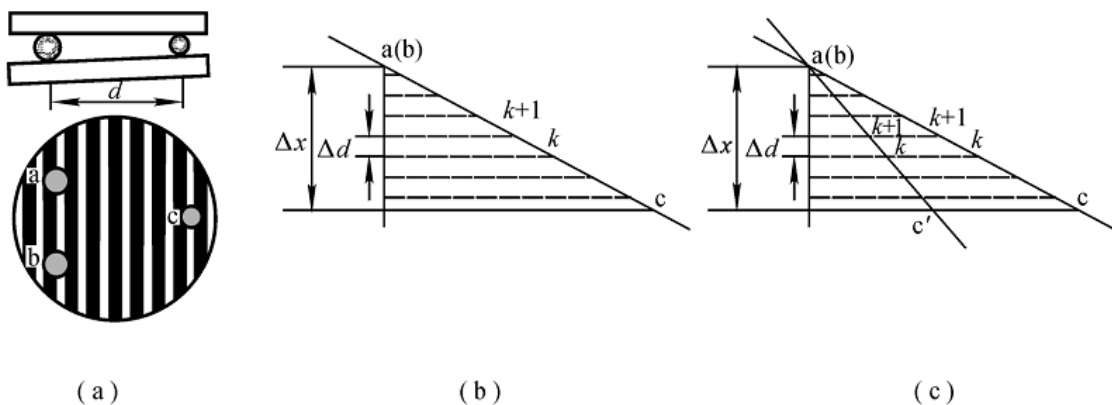
$$2ne_k + \lambda/2 = (2k + 1)\lambda/2 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

取  $k=10$ , 得薄膜厚度  $e_{10} = 10\lambda/2n = 1.4 \times 10^{-6}\text{m}$ .

**11-17** 如图 (a) 所示, 将符合标准的轴承钢珠 a、b 和待测钢珠 c 一起放在两块平板玻璃之间, 若垂直入射光的波长  $\lambda=580\text{nm}$ , 问钢珠 c 的直径比标准小多少? 如果距离  $d$  不同, 对检测结果有何影响?

**分析** 很显然, 如钢珠 c 与标准件 a、b 相同, 则呈现厚度相同的薄膜干涉; 如钢珠与标准件不同, 则为劈尖干涉. 后者有等厚干涉条纹出现, a 与 c 之间的条纹分布如图 (b) 所示. 由于相邻条纹的厚度差  $\Delta d = \lambda/2n$ . 而空气的折射率  $n \approx 1$ , 则两钢珠之间的直径差  $\Delta x = N \frac{\lambda}{2}$ , 式中  $N$  为 a 与 c 之间的条纹间隔数目 (注: 条纹数目较多时, 也可用条纹数目作近似计算), 由图 (a) 知  $N$  约为  $6\frac{1}{4}$ .

改变钢珠间的距离  $d$ , 将钢珠 c 移至  $c'$  处, 如图 (c) 所示, a 与  $c'$  之间条纹数并未改变, 但由于相邻条纹间距变小, 从而影响观测.



题 11-17 图

**解** 钢珠 c 和 a、b 的直径不同，则两平板玻璃形成空气劈。由分析得，钢珠 c 的直径与标准件直径相差

$$\Delta x = N \frac{\lambda}{2} = 1.81 \times 10^{-6} \text{ m}$$

当距离  $d$  稍微改变时，a、b 与 c 之间条纹数目未变，故不影响检验结果。

**11-18** 折射率为 1.60 的两块标准平面玻璃板之间形成一个劈形膜（劈尖角  $\theta$  很小）。用波长  $\lambda = 600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射，产生等厚干涉条纹。假如在劈形膜内充满  $n = 1.40$  的液体时的相邻明纹间距比劈形膜内是空气时的间距缩小  $\Delta l = 0.5 \text{ mm}$ ，那么劈尖角  $\theta$  应是多少？

**分析** 劈尖干涉中相邻条纹的间距  $l \approx \lambda / 2n\theta$ ，其中  $\theta$  为劈尖角， $n$  是劈尖内介质折射率。由于前后两次劈形膜内介质不同，因而  $l$  不同。则利用  $l \approx \lambda / 2n\theta$  和题给条件可求出  $\theta$ 。

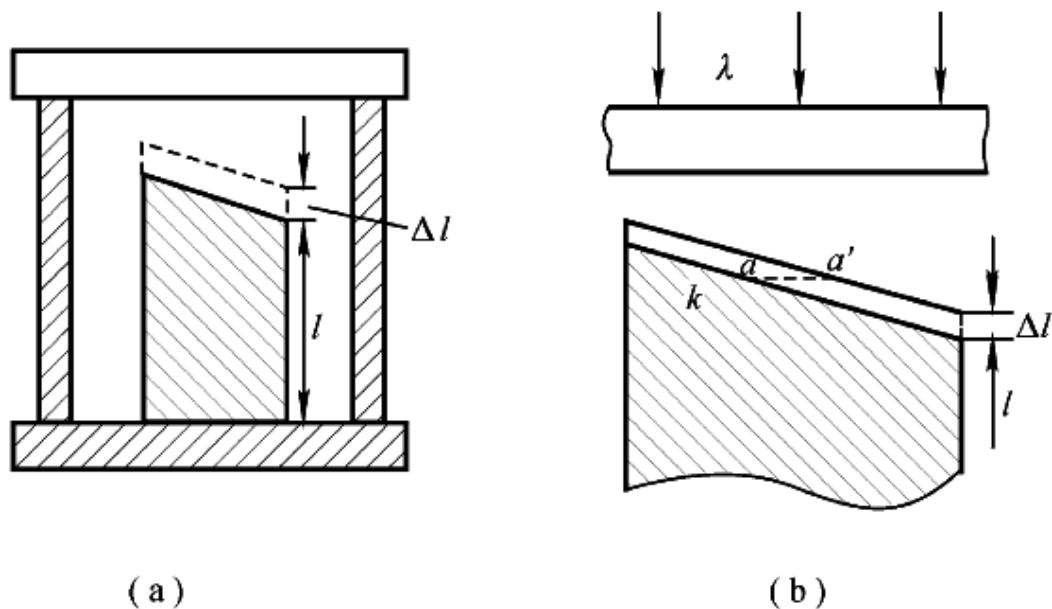
**解** 劈形膜内为空气时， $l_{\text{空}} = \lambda / 2\theta$

劈形膜内为液体时， $l_{\text{液}} = \lambda / 2n\theta$

则由  $\Delta l = l_{\text{空}} - l_{\text{液}} = \lambda / \theta - \lambda / 2n\theta$ ，得

$$\theta = \frac{\lambda(1 - 1/n)}{2\Delta l} = 1.71 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

**11-19** 如图所示的干涉膨胀仪，已知样品的平均高度为  $3.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，用  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$  的单色光垂直照射。当温度由  $17^\circ \text{C}$  升至  $30^\circ \text{C}$  时，看到有 20 条条纹移过，问样品的热膨胀系数为多少？



题 11-19 图

**分析** 温度升高  $\Delta T = T_2 - T_1$  后, 样品因受热膨胀, 其高度  $l$  的增加量  $\Delta l = l\alpha\Delta T$ . 由于样品表面上移, 使在倾角  $\theta$  不变的情况下, 样品与平板玻璃间的空气劈的整体厚度减小. 根据等厚干涉原理, 干涉条纹将整体向棱边平移, 则原  $k$  级条纹从  $a$  移至  $a'$  处, 如图 (b) 所示, 移过某一固定观察点的条纹数目  $N$  与  $\Delta l$  的关系为  $\Delta l = N \frac{\lambda}{2}$ , 由上述关系可得出热膨胀系数  $\alpha$ .

**解** 由题意知, 移动的条纹数  $N = 20$ , 从分析可得

$$N \frac{\lambda}{2} = l\alpha\Delta T$$

$$\alpha = \frac{N \frac{\lambda}{2}}{l\Delta T} = 1.51 \times 10^{-5}$$

则热膨胀系数

**11-20** 在利用牛顿环测未知单色光波长的实验中, 当用已知波长为  $589.3 \text{ nm}$  的钠黄光垂直照射时, 测得第一和第四暗环的距离为  $\Delta r = 4.00 \times 10^{-3} \text{ m}$ ; 当用波长未知的单色光垂直照射时, 测得第一和第四暗环的距离为  $\Delta r' = 3.85 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 求该单色光的波长.

**分析** 牛顿环装置产生的干涉暗环半径  $r = \sqrt{kR\lambda}$ , 其中  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 0$ , 对应牛顿环中心的暗斑,  $k = 1$  和  $k = 4$  则对应第一和第四暗环, 由它们之间的间距  $\Delta r = r_4 - r_1 = \sqrt{R\lambda}$ , 可知  $\Delta r \propto \sqrt{\lambda}$ , 据此可按题中的测量方法求出未知波长  $\lambda'$ .

**解** 根据分析有

$$\frac{\Delta r'}{\Delta r} = \frac{\sqrt{\lambda'}}{\sqrt{\lambda}}$$

故未知光波长

$$\lambda' = 546 \text{ nm}$$

**11-21** 在牛顿环实验中, 当透镜与玻璃之间充以某种液体时, 第 10 个亮环的直径由  $1.40 \times 10^{-2} \text{ m}$  变为  $1.27 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 试求这种液体的折射率.

**分析** 当透镜与平板玻璃间充满某种液体 ( $n_2 > 1$ )，且满足  $n_1 > n_2$ ， $n_2 < n_3$  或  $n_1 < n_2$ ， $n_2 > n_3$  时，在厚度为  $d$  的地方，两相干光的光程差为  $\Delta = 2n_2d + \frac{\lambda}{2}$ 。由此可推导出牛顿

环暗环半径  $r = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n_2}}$  和明环半径  $r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{R\lambda}{n_2}}$ ，这里明、暗环半径和充入的介质折射率  $n_2$  有关。有兴趣的读者可自行推导。必须指出，在牛顿环中，若介质不均匀或分析的是透射光而不是反射光，那么关于暗环、明环半径的公式与教材中的公式是不同的，不能随意套用。

**解** 当透镜与玻璃之间为空气时， $k$  级明纹的直径为

$$d_k = 2r_k = 2\sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)R\lambda}$$

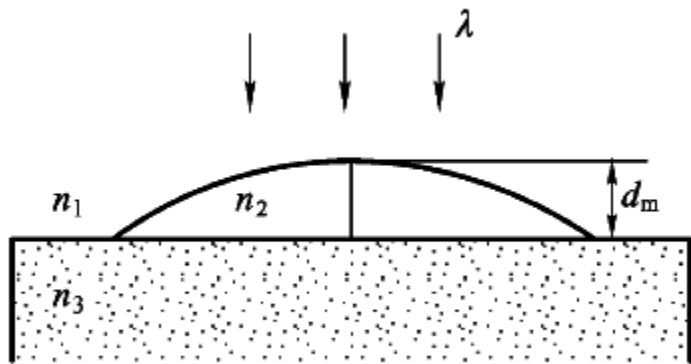
当透镜与玻璃之间为液体时， $k$  级明纹的直径为

$$d'_k = 2r'_k = 2\sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{R\lambda}{n_2}}$$

解上述两式得

$$n_2 = \left(\frac{d_k}{d'_k}\right)^2 = 1.22$$

**11 — 22** 如图所示，折射率  $n_2 = 1.2$  的油滴落在  $n_3 = 1.50$  的平板玻璃上，形成一上表面近似于球面的油膜，测得油膜中心最高处的高度  $d_m = 1.1 \mu\text{m}$ ，用  $\lambda = 600 \text{ nm}$  的单色光垂直照射油膜，求 (1) 油膜周边是暗环还是明环？ (2) 整个油膜可看到几个完整的暗环？



题 11-22 图

**分析** 本题也是一种牛顿环干涉现象，由于  $n_1 < n_2 < n_3$ ，故油膜上任一点处两反射相干光的光程差  $\Delta = 2n_2d$ 。(1) 令  $d = 0$ ，由干涉加强或减弱条件即可判断油膜周边是明环。(2) 由  $2n_2d = (2k + 1)\lambda/2$ ，且令  $d = d_m$  可求得油膜上暗环的最高级次 (取整)，从而判断油膜上完整暗环的数目。

**解** (1) 根据分析，由

$$2n_2d = \begin{cases} k\lambda & \text{(明条纹)} \\ (2k+1)\lambda & \text{(暗条纹)} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

油膜周边处  $d=0$ , 即  $\Delta=0$  符合干涉加强条件, 故油膜周边是明环.

(2) 油膜上任一暗环处满足

$$\Delta = 2n_2d = (2k+1)\lambda/2 \quad (k=0,1,2,\dots)$$

令  $d=d_m$ , 解得  $k=3.9$ , 可知油膜上暗环的最高级次为 3, 故油膜上出现的完整暗环共有 4 个, 即  $k=0, 1, 2, 3$ .

**11-23** 把折射率  $n=1.40$  的薄膜放入迈克耳孙干涉仪的一臂, 如果由此产生了 7.0 条条纹的移动, 求膜厚. 设入射光的波长为 589 nm.

**分析** 迈克耳孙干涉仪中的干涉现象可以等效为薄膜干涉 (两平面镜相互垂直) 和劈尖干涉 (两平面镜不垂直) 两种情况, 本题属于后一种情况. 在干涉仪一臂中插入介质片后, 两束相干光的光程差改变了, 相当于在观察者视野内的空气劈尖的厚度改变了, 从而引起干涉条纹的移动.

**解** 插入厚度为  $d$  的介质片后, 两相干光光程差的改变量为  $2(n-1)d$ , 从而引起  $N$  条条纹的移动, 根据劈尖干涉加强的条件, 有  $2(n-1)d=N\lambda$ , 得  $d=N\lambda$

$$d = \frac{N\lambda}{2(n-1)} = 5.154 \times 10^{-6} \text{ m}$$

**11-24** 如图所示, 狭缝的宽度  $b=0.60 \text{ mm}$ , 透镜焦距  $f=0.40 \text{ m}$ , 有一与狭缝平行的屏放置在透镜焦平面处. 若以单色平行光垂直照射狭缝, 则在屏上离点  $O$  为  $x=1.4 \text{ mm}$  处的点  $P$ , 看到的是衍射明条纹. 试求: (1) 该入射光的波长; (2) 点  $P$  条纹的级数; (3) 从点  $P$  看来对该光波而言, 狭缝处的波阵面可作半波带的数目.

**分析** 单缝衍射中的明纹条件为  $b\sin\varphi = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ , 在观察点  $P$  确定 (即  $\varphi$  确定) 后,

由于  $k$  只能取整数值, 故满足上式的  $\lambda$  只可取若干不连续的值, 对照可见光的波长范围可确定入射光波长的取值. 此外, 如点  $P$  处的明纹级次为  $k$ , 则狭缝处的波阵面可以划分的半波带数目为  $(2k+1)$ , 它们都与观察点  $P$  有关,  $\varphi$  越大, 可以划分的半波带数目也越大.

**解** (1) 透镜到屏的距离为  $d$ , 由于  $d \gg b$ , 对点  $P$  而言, 有  $\sin\varphi \approx \frac{x}{d}$ . 根据单缝衍

射明纹条件  $b\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ , 有

$$\frac{bx}{d} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

将  $b$ 、 $d$  ( $d \approx f$ )、 $x$  的值代入, 并考虑可见光波长的上、下限值, 有

$$\lambda_{\min} = 400 \text{ nm 时, } k_{\max} = 4.75$$

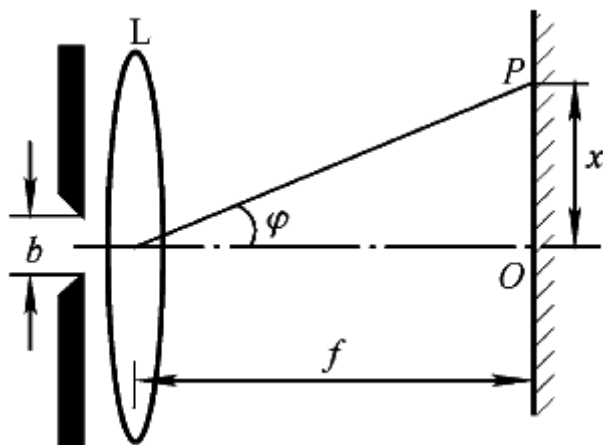
$$\lambda_{\max} = 760 \text{ nm 时, } k_{\max} = 2.27$$

因  $k$  只能取整数值, 故在可见光范围内只允许有  $k=4$  和  $k=3$ , 它们所对应的入射光波长分别为  $\lambda_2=466.7 \text{ nm}$  和  $\lambda_1=600 \text{ nm}$ .

(2) 点  $P$  的条纹级次随入射光波长而异, 当  $\lambda_1=600 \text{ nm}$  时,  $k=3$ ; 当  $\lambda_2=466.7 \text{ nm}$  时,  $k=4$ .

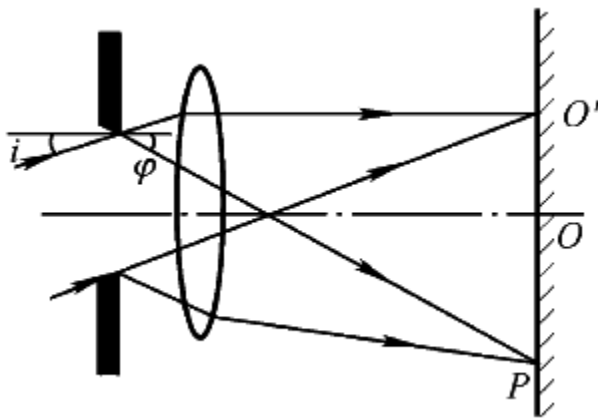


(3) 当  $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$  时,  $k = 3$ , 半波带数目为  $(2k + 1) = 7$ ; 当  $\lambda_2 = 466.7 \text{ nm}$  时,  $k = 4$ , 半波带数目为 9.



题 11-24 图

**11-25** 单缝的宽度  $b = 0.40 \text{ mm}$ , 以波长  $\lambda = 589 \text{ nm}$  的单色光垂直照射, 设透镜的焦距  $f = 1.0 \text{ m}$ . 求: (1) 第一级暗纹距中心的距离; (2) 第二级明纹距中心的距离; \* (3) 如单色光以入射角  $i = 30^\circ$  斜射到单缝上, 则上述结果有何变动.



题 11-25 图

**分析** 对于问题(3)单色光倾斜入射单缝的情况, 在入射光到达单缝时, 其上下两列边界光线之间已存在光程差  $b \sin i$  (若为光栅, 则为  $d \sin i$ ), 对应等光程的中央主极大将移至点  $O'$  (此时  $\varphi = i = 30^\circ$ ), 屏上衍射条纹原有的对称性受到一定的破坏.

如图所示, 对于点  $O'$  上方的条纹 (此时入射光与衍射光位于法线两侧, 且  $\varphi > i$ ), 满足

$$b(\sin i - \sin \varphi) = \begin{cases} -(2k+1)\lambda/2 & (\text{明条纹}) \\ -k\lambda & (\text{暗条纹}) \end{cases}$$

如令  $\sin \varphi = 1$ , 可求得最大条纹级次  $k_{\text{ml}}$ . 对于点  $O$  下方的条纹 (此时入射光与衍射光位于法线同侧), 满足

$$b(\sin i + \sin \varphi) = \begin{cases} (2k+1)\lambda/2 & (\text{明条纹}) \\ k\lambda & (\text{暗条纹}) \end{cases}$$

如令  $\sin \varphi = 1$ , 可求得另一侧的最大条纹级次  $k_{m2}$ . 对于点  $O'$  与  $O$  之间的条纹 (此时入射光与衍射光位于法线两侧, 但  $\varphi < i$ ), 满足

$$b(\sin i - \sin \varphi) = \begin{cases} (2k+1)\lambda/2 & (\text{明条纹}) \\ k\lambda & (\text{暗条纹}) \end{cases}$$

需要说明的是, 点  $O'$  与  $O$  之间的条纹与点  $O$  下方的条纹属于中央主极大同一侧的各级条纹, 不同的是前者  $k$  值较小, 后者  $k$  值较大, 且  $k$  值在点  $O$  附近连续变化.

**解** (1) 由单缝衍射的暗纹条件  $b \sin \varphi_1 = k\lambda$ , 得  $\varphi_1 \approx \sin \varphi_1 = \frac{k\lambda}{b}$ , 则第一级 ( $k=1$ )

暗纹距中心的距离为

$$x_1 = f \tan \varphi_1 \approx f \varphi_1 = 1.47 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(2) 由明纹条件  $b \sin \varphi_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ , 得  $\varphi_2 \approx \sin \varphi_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2b}$ , 则第二级 ( $k=2$ )

明纹距中心的距离为

$$x_2 = f \tan \varphi_2 \approx f \varphi_2 = 3.68 \times 10^{-3} \text{ m}$$

在上述计算中, 由于  $k$  取值较小, 即  $\varphi$  较小, 故  $\varphi \approx \sin \varphi \approx \tan \varphi$ . 如  $k$  取值较大, 则应严格计算.

<sup>\*</sup> (3) 斜入射时, 中央主极大移至点  $O'$ , 先计算点  $O'$  上方条纹的位置: 对于第一级暗纹, 有  $b(\sin 30^\circ - \sin \varphi'_1) = -\lambda$ ,  $\sin \varphi'_1 = \frac{\lambda}{b} + 0.5$ , 该暗纹距中心的距离

$$x'_1 = f \tan \varphi'_1 = f \tan \left[ \arcsin \left( \frac{\lambda}{b} + 0.5 \right) \right] = 0.580 \text{ m}$$

对于第二级明纹, 有  $b(\sin 30^\circ - \sin \varphi'_2) = -\frac{5\lambda}{2}$ ,  $\sin \varphi'_2 = \frac{5\lambda}{2b} + 0.5$ , 该明纹距中心的距离

$$x'_2 = f \tan \varphi'_2 = f \tan \left[ \arcsin \left( \frac{5\lambda}{2b} + 0.5 \right) \right] = 0.583 \text{ m}$$

再计算  $O'$  点下方条纹的位置 (由于所求  $k$  值较小, 其条纹应在  $O'$  与  $O$  之间): 对于第一级暗纹, 有  $b(\sin 30^\circ - \sin \varphi''_1) = \lambda$ ,  $\sin \varphi''_1 = 0.5 - \frac{\lambda}{b}$ , 该暗纹距中心的距离

$$x''_1 = f \tan \varphi''_1 = f \tan \left[ \arcsin \left( 0.5 - \frac{\lambda}{b} \right) \right] = 0.575 \text{ m}$$

对于第二级明纹, 有  $b(\sin 30^\circ - \sin \varphi''_2) = \frac{5\lambda}{2}$ ,  $\sin \varphi''_2 = 0.5 - \frac{5\lambda}{2b}$ , 该明纹距中心的距离

$$x''_2 = f \tan \varphi''_2 = f \tan \left[ \arcsin \left( \frac{5\lambda}{2b} + 0.5 \right) \right] = 0.572 \text{ m}$$

**讨论** 斜入射时, 中央主极大移至点  $O'$  (此时  $\varphi = i = 30^\circ$ ), 它距中心点  $O$  的距离为

$x_0 = f \tan 30^\circ = 0.577 \text{ m}$ , 由上述计算数据可知, 此时衍射条纹不但相对点  $O$  不对称, 而且相对中央主极大的点  $O'$  也不再严格对称了.

**11-26** 一单色平行光垂直照射于一单缝, 若其第三条明纹位置正好和波长为  $600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射时的第二级明纹的位置一样, 求前一种单色光的波长.

**分析** 采用比较法来确定波长. 对应于同一观察点, 两次衍射的光程差相同, 由于衍射明纹条件  $b \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ , 故有  $(2k_1+1)\lambda_1 = (2k_2+1)\lambda_2$ , 在两明纹级次和其中一种波长已知的情况下, 即可求出另一种未知波长.

**解** 根据分析, 将  $\lambda_2 = 600 \text{ nm}$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_1 = 3$  代入  $(2k_1+1)\lambda_1 = (2k_2+1)\lambda_2$ , 得

$$\lambda_1 = \frac{(2k_2+1)\lambda_2}{2k_1+1} = 428.6 \text{ nm}$$

**11-27** 已知单缝宽度  $b = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 透镜焦距  $f = 0.5 \text{ m}$ , 用  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$  的单色平行光分别垂直照射, 求这两种光的第一级明纹离屏中心的距离, 以及这两条明纹之间的距离. 若用每厘米刻有 1000 条刻线的光栅代替这个单缝, 则这两种单色光的第一级明纹分别距屏中心多远? 这两条明纹之间的距离又是多少?

**分析** 用含有两种不同波长的混合光照射单缝或光栅, 每种波长可在屏上独立地产生自己的一组衍射条纹, 屏上最终显示出两组衍射条纹的混合图样. 因而本题可根据单缝 (或光栅) 衍射公式分别计算两种波长的  $k$  级条纹的位置  $x_1$  和  $x_2$ , 并算出其条纹间距  $\Delta x = x_2 - x_1$ . 通过计算可以发现, 使用光栅后, 条纹将远离屏中心, 条纹间距也变大, 这是光栅的特点之一.

**解** (1) 当光垂直照射单缝时, 屏上第  $k$  级明纹的位置

$$x = (2k+1) \frac{\lambda}{2b} f$$

当  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $k = 1$  时,  $x_1 = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}$

当  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$  和  $k = 1$  时,  $x_2 = 5.7 \times 10^{-3} \text{ m}$

其条纹间距  $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m}$

(2) 当光垂直照射光栅时, 屏上第  $k$  级明纹的位置为

$$x' = \frac{k\lambda}{d} f$$

而光栅常数  $d = \frac{10^{-2}}{10^3} \text{ m} = 10^{-5} \text{ m}$

当  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $k = 1$  时,  $x_1 = 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$

当  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$  和  $k = 1$  时,  $x_2 = 3.8 \times 10^{-3} \text{ m}$

其条纹间距  $\Delta x' = x_2' - x_1' = 1.8 \times 10^{-2} \text{ m}$

**11-28** 迎面而来的一辆汽车的两车头灯相距为  $1.0 \text{ m}$ , 问在汽车离人多远时, 它们刚能为人眼所分辨? 设瞳孔直径为  $3.0 \text{ mm}$ , 光在空气中的波长  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

**分析** 两物体能否被分辨, 取决于两物对光学仪器通光孔 (包括人眼) 的张角  $\theta$  和光学仪

器的最小分辨角  $\theta_0$  的关系. 当  $\theta \geq \theta_0$  时能分辨, 其中  $\theta = \theta_0$  为恰能分辨. 在本题中  $\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$  为一定值, 而  $\theta \approx \frac{l}{d}$ , 式中  $l$  为两灯间距,  $d$  为人与车之间的距离.  $d$  越大或  $l$  越小,  $\theta$  就越小, 当  $\theta < \theta_0$  时两灯就不能被分辨, 这与我们的生活经验相符合.

解 当  $\theta = \theta_0$  时,  $\frac{l}{d} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ , 此时, 人与车之间的距离为

$$d = \frac{Dl}{1.22\lambda} = 4918 \text{ m}$$

**11-29** 老鹰眼睛的瞳孔直径约为 6 mm, 问其最多飞翔多高时可看清地面上身长为 5cm 的小鼠? 设光在空气中的波长为 600 nm.

解 根据上题的分析:  $\theta_0 = 1.22\lambda / D$ . 这里  $D$  是鹰的瞳孔直径. 而  $\theta = L/h$ , 其中  $L$  为小鼠的身长,  $h$  为老鹰飞翔的高度. 恰好看清时  $\theta = \theta_0$ , 则由  $L/h = 1.22\lambda/D$ , 得飞翔高度:  $h = LD / (1.22\lambda) = 409.8 \text{ m}$ .

**11-30** 一束平行光垂直入射到某个光栅上, 该光束中包含有两种波长的光:  $\lambda_1 = 440 \text{ nm}$  和  $\lambda_2 = 660 \text{ nm}$ . 实验发现, 两种波长的谱线 (不计中央明纹) 第二次重合于衍射角  $\varphi = 60^\circ$  的方向上, 求此光栅的光栅常数.

分析 根据光栅衍射方程  $d \sin \varphi = \pm k\lambda$ , 两种不同波长的谱线, 除  $k = 0$  中央明纹外, 同级明纹在屏上位置是不同的, 如果重合, 应是它们对应不同级次的明纹在相同衍射角方向上重合. 故由  $d \sin \varphi = k\lambda_1 = k'\lambda_2$  可求解本题.

解 由分析可知  $d \sin \varphi = k\lambda_1 = k'\lambda_2$   
得  $k/k' = \lambda_2/\lambda_1 = 3/2$

上式表明第一次重合是  $\lambda_1$  的第 3 级明纹与  $\lambda_2$  的第 2 级明纹重合, 第二次重合是  $\lambda_1$  的第 6 级明纹与  $\lambda_2$  的第 4 级明纹重合. 此时,  $k = 6$ ,  $k' = 4$ ,  $\varphi = 60^\circ$ , 则光栅常数

$$d = k\lambda_1 / \sin \varphi = 3.05 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.05 \mu\text{m}$$

**11-31** 用一个 1.0mm 内有 500 条刻痕的平面透射光栅观察钠光谱 ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ), 设透镜焦距  $f = 1.00 \text{ m}$ . 问: (1) 光线垂直入射时, 最多能看到第几级光谱; \* (2) 光线以入射角  $30^\circ$  入射时, 最多能看到第几级光谱; (3) 若用白光垂直照射光栅, 求第一级光谱的线宽度.

分析 (1) 首先确定光栅常数  $d = \frac{10^{-3}}{N} \text{ m}$ , 式中  $N$  为刻痕数, 然后由光线垂直照射光栅时的衍射条件, 即可解得结果.

(2) 如同光线倾斜入射单缝一样, 此时光栅衍射的明纹条件改变为  $d(\sin i \pm \sin \varphi) = \pm k\lambda$  (详见题 11-25 的分析), 由于两侧条纹不再对称, 令  $\sin \varphi = 1$ , 可求得  $k_{m1}$  和  $k_{m2}$  两个值, 其中一个比垂直入射时的  $k_m$  值小, 另一个比  $k_m$  值大, 因而, 在其他条件不变的情况下, 倾斜入射时可以观察到较高级次的条纹.

(3) 用白光照射光栅, 除中央明纹仍为白光外, 其余处出现一系列光谱带, 称为光栅光谱. 每个光谱带是由同一级次不同波长的明纹依次排列而成. 所谓第一级光谱的线宽度是指入

射光中最小波长(取  $\lambda_{\min} = 400 \text{ nm}$ ) 和最大波长(取  $\lambda_{\max} = 760 \text{ nm}$ ) 的第一级明纹在屏上的间距, 其余波长的第一级明纹均出现在此范围内. 需要指出的是, 对于较高级次的光谱会出现相邻光谱间的交错重叠的现象.

解 (1) 光波垂直入射时, 光栅衍射明纹的条件为  $d\sin\varphi = \pm k\lambda$ , 令  $\sin\varphi = 1$ , 可得

$$k_m = \pm \frac{d}{\lambda} = \pm 3.39$$

取整数  $k_m = 3$ , 即最多能看到第 3 级光谱.

(2) 倾斜入射时, 光栅明纹的条件为

$$d(\sin i \pm \sin \varphi) = \pm k\lambda$$

令  $\sin\varphi = 1$ , 可求得位于中央主极大两侧, 能观察到条纹的最大  $k_m$  值分别为  $k_{m1} = 5$  和  $k_{m2} = 1$  (已取整数值). 故在法线两侧能观察到的最大级次分别为五级和一级.

(3) 白光的波长范围为  $400 \text{ nm} \sim 760 \text{ nm}$ , 用白光垂直照射时, 由  $d\sin\varphi = k\lambda$  可得第一级 ( $k = 1$ ) 光谱在屏上的位置. 对应于  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$  的明纹的衍射角为  $\varphi_1 = \arcsin \frac{\lambda_1}{d}$ ;  $\varphi_2 = \arcsin \frac{\lambda_2}{d}$ , 利用  $\tan\varphi = \frac{x}{f}$  可得明纹的位置为

$$x_1 = f \tan \varphi_1 = 0.2 \text{ m}, x_2 = f \tan \varphi_2 = 0.41 \text{ m}$$

则第一级光谱的线宽度为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0.21 \text{ m}$$

**11-32** 波长为  $600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射在一光栅上, 第二级主极大出现在  $\sin\varphi = 0.20$  处, 第四级缺级. 试问 (1) 光栅上相邻两缝的间距是多少? (2) 光栅上狭缝的宽度有多大?

(3) 在  $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$  范围内, 实际呈现的全部级数.

分析 (1) 利用光栅方程  $d\sin\varphi = (b + b')\sin\varphi = \pm k\lambda$ , 即可由题给条件求出光栅常数  $d$  (即两相邻缝的间距). (2) 光栅衍射是多缝干涉的结果, 也可看成是光透过许多平行的单缝衍射的结果. 缺级就是按光栅方程计算屏上某些应出现明纹的位置, 按各个单缝衍射计算恰是出现暗纹的位置. 因此可以利用光栅方程  $d\sin\varphi = (b + b')\sin\varphi = k\lambda$  和单缝衍射暗纹公式  $b\sin\varphi = k'\lambda$  计算缝宽和屏上缺级的情况, 从而求出屏上条纹总数.

解 (1) 由题已知  $k = 2$  时,  $\sin\varphi = 0.20$ , 则由分析可得光栅常数:

$$d = k\lambda\sin\varphi = 6 \times 10^{-6} \text{ m} = 6 \mu\text{m}$$

$$(2) \text{ 由分析知缺级条件 } \begin{cases} (b + b')\sin\varphi = k\lambda & (k = 0, \pm 1, \dots) \\ b\sin\varphi = k'\lambda & (k' = 0, \pm 1, \dots) \end{cases}$$

则  $(b + b') / b = k / k' = m$ ,  $k = m k'$ , 即  $m k'$  级明纹缺级.

由题意  $k = 4$  缺级, 即  $(b + b') / b = 4 / k'$

当  $k' = 1$  时,  $m = 4$ ,  $\begin{cases} b = 1.5 \mu\text{m} \\ b = 4.5 \mu\text{m} \end{cases}$ , 即  $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$  级缺级. (符合题意)

当  $k' = 2$  时,  $m = 2$ , 第  $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$  级缺级. (第二级已存在, 不符合题意, 舍去)

当  $k'=3$  时,  $m=\frac{4}{3}$ ,  $\begin{cases} b=4.5\text{ }\mu\text{m} \\ b=1.5\text{ }\mu\text{m} \end{cases}$ , 第 $\pm 4$ ,  $\pm 8$ ,  $\pm 12$ , ...级缺级. (符合题意)

当  $k'=4$  时,  $m=1$ , 第 $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ ,  $\pm 4$ , ...级全部缺级. (不符合题意, 舍去)

因此, 狭缝宽度  $b$  为  $1.5\text{ }\mu\text{m}$  或者  $4.5\text{ }\mu\text{m}$ , 而缺级只发生在 $\pm 4$ ,  $\pm 8$ ,  $\pm 12$ , ...级.

(3) 由光栅方程  $(b+b')\sin\varphi=\pm k\lambda$ , 可知屏上呈现条纹最高级次应满足  $k < (b+b')/\lambda = 10$ , 故考虑到缺级, 实际屏上呈现的级数为:  $0$ ,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ ,  $\pm 5$ ,  $\pm 6$ ,  $\pm 7$ ,  $\pm 9$ , 共 15 条.

**11-33** 以波长为  $0.11\text{ nm}$  的 X 射线照射岩盐晶体, 实验测得 X 射线与晶面夹角为  $11.5^\circ$  时获得第一级反射极大. (1) 岩盐晶体原子平面之间的间距  $d$  为多大? (2) 如以另一束待测 X 射线照射, 测得 X 射线与晶面夹角为  $17.5^\circ$  时获得第一级反射光极大, 求该 X 射线的波长.

**分析** X 射线入射到晶体上时, 干涉加强条件为  $2d\sin\theta=k\lambda$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 式中  $d$  为晶格常数, 即晶体内原子平面之间的间距 (如图).

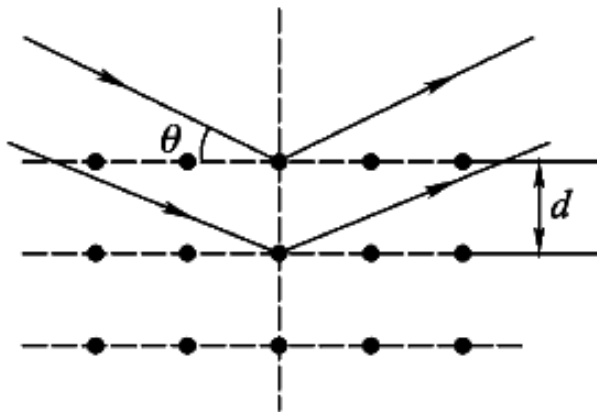
**解** (1) 由布拉格公式  $2d\sin\theta=k\lambda$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ )

第一级反射极大, 即  $k=1$ . 因此, 得

$$d = \lambda_1 / \sin\theta_1 = 0.276\text{ nm}$$

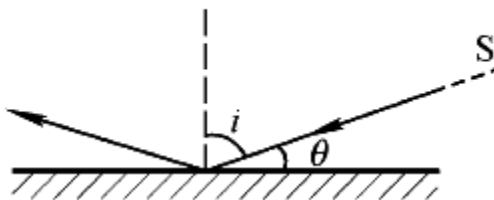
(2) 同理, 由  $2d\sin\theta^2 = k\lambda^2$ , 取  $k=1$ , 得

$$2d\sin\theta_2 = 0.166\text{ nm}$$



题 11-33 图

**11-34** 测得一池静水的表面反射出来的太阳光是线偏振光, 求此时太阳处在地平线的多大仰角处? (水的折射率为 1.33)



题 11-34 图

**分析** 设太阳光（自然光）以入射角  $i$  入射到水面，则所求仰角  $\theta = \frac{\pi}{2} - i$ 。当反射光起偏时，根据布儒斯特定律，有  $i = i_0 = \arctan \frac{n_2}{n_1}$ （其中  $n_1$  为空气的折射率， $n_2$  为水的折射率）。

**解** 根据以上分析，有

$$i_0 = i = \frac{\pi}{2} - \theta = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

则

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{n_2}{n_1} = 36.9^\circ$$

**11-35** 使自然光通过两个偏振化方向相交  $60^\circ$  的偏振片，透射光强为  $I_1$ ，今在这两个偏振片之间插入另一偏振片，它的方向与前两个偏振片均成  $30^\circ$  角，则透射光强为多少？

**分析** 设入射自然光强为  $I_0$ ，偏振片 I 对入射的自然光起起偏作用，透射的偏振光光强恒为  $\frac{I_0}{2}$ ，而偏振片 II 对入射的偏振光起检偏作用，此时透射与入射的偏振光强满足马吕斯定律。若偏振片 III 插入两块偏振片之间，则偏振片 II、III 均起检偏作用，故透射光强必须两次应用马吕斯定律方能求出。

**解** 根据以上分析，入射光通过偏振片 I 和 II 后，透射光强为

$$I_1 = \left( \frac{1}{2} I_0 \right) \cos^2 60^\circ$$

插入偏振片 III 后，其透射光强为

$$I_2 = \left[ \left( \frac{1}{2} I_0 \right) \cos^2 30^\circ \right] \cos^2 30^\circ$$

两式相比可得  $I_2 = 2.25 I_1$

**11-36** 一束光是自然光和线偏振光的混合，当它通过一偏振片时，发现透射光的强度取决于偏振片的取向，其强度可以变化 5 倍，求入射光中两种光的强度各占总入射光强度的几分之几。

**分析** 偏振片的旋转，仅对入射的混合光中的线偏振光部分有影响，在偏振片旋转一周的过程中，当偏振光的振动方向平行于偏振片的偏振化方向时，透射光强最大；而相互垂直时，透射光强最小。分别计算最大透射光强  $I_{\max}$  和最小透射光强  $I_{\min}$ ，按题意用相比的方法即能求解。

**解** 设入射混合光强为  $I$ ，其中线偏振光强为  $xI$ ，自然光强为  $(1-x)I$ 。按题意旋转偏振片，则有最大透射光强

$$I_{\max} = \left[ \frac{1}{2}(1-x) + x \right] I$$

最小透射光强

$$I_{\min} = \left[ \frac{1}{2}(1-x) \right] I$$

按题意  $I_{\max} / I_{\min} = 5$ ，则有

$$\frac{1}{2}(1-x) + x = 5 \times \frac{1}{2}(1-x)$$

解得

$$x = 2/3$$

即线偏振光占总入射光强的  $2/3$ ，自然光占  $1/3$ 。

**\*11-37** 试分别计算用方解石晶体制成的对波长为  $\lambda_1 = 589.3\text{nm}$  的钠黄光 and 波长为  $\lambda_2 = 546.1\text{nm}$  的汞灯绿光的  $1/4$  波片的最小厚度为多少？

**解**  $1/4$  波片的最小厚度  $d$  应满足  $|n_o - n_e|d = \lambda/4$ ，而方解石晶体中  $o$  光和  $e$  光的折射率分别为  $n_o = 1.658$  和  $n_e = 1.486$ 。故对  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的  $1/4$  波片的最小厚度分别为

$$d_1 = \frac{\lambda_1}{4|n_o - n_e|} = 857 \text{ nm}, \quad d_2 = \frac{\lambda_2}{4|n_o - n_e|} = 794 \text{ nm},$$

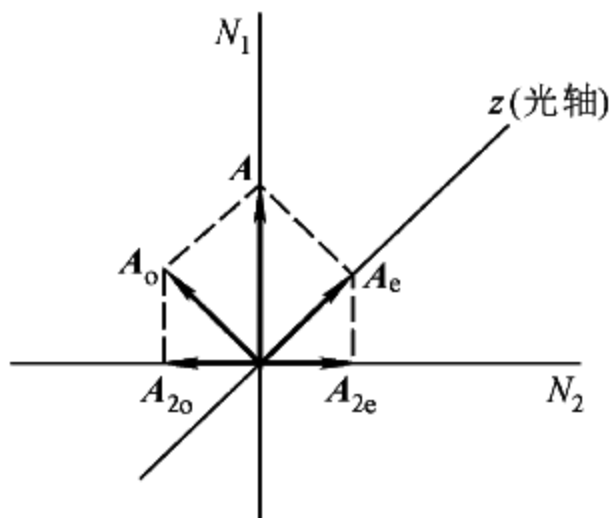
**\*11-38** 在偏振化方向相互平行的两偏振片间，平行放置一片垂直于光轴切割的石英晶片。已知石英对钠黄光的旋光率为  $21.7 (^{\circ}) / \text{mm}$ 。试问石英晶片的厚度为多大时，钠黄光不能通过第二个偏振片？

**分析** 按题意，第一个偏振片透射的线偏振光将沿光轴方向进入石英晶片。由于石英具有旋光性，光的振动方向将向右或向左旋转一个角度  $\psi$ 。其大小与晶片厚度  $l$  成正比，即  $\psi = \alpha l$ ，比例系数  $\alpha$  为晶体的旋光率。很显然欲使钠黄光不能通过第二个偏振片、旋光角度  $\psi$  应  $90^{\circ}$ 。

**解** 根据分析，石英晶片的厚度为

$$l = \frac{\psi}{\alpha} = 4.15 \text{ mm}$$

**\*11-39** 一块厚  $0.025 \text{ mm}$  的方解石晶片，其表面与光轴平行，放置在两正交的偏振片之间。已知第一个偏振片的偏振化方向与晶片的光轴成  $45^{\circ}$  角。现用白光垂直入射第一个偏振片，问经第二个偏振片透射的可见光谱中，缺少了哪些波长？假定双折射率  $n_o - n_e = 0.172$  可看作常量。



题 11-39 图

**分析** 本题为偏振光的干涉问题。按题意作图，经方解石晶体透射的两束线偏振光（指  $o$  光与  $e$  光），其振动方向相互垂直，再经第二个偏振片的检偏作用后成为相干光。其相位差为



$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_0 - n_e)d + 0(\text{或}\pi)$ , 式中第一项为 o 光与 e 光通过晶片时产生的相位差, 第二项则

为两光的  $A_o$  与  $A_e$  在  $N_2$  (第二个偏振片的偏振化方向) 上投影时有可能产生的附加相位差. 由图知, 本题应取  $\pi$ . 在可见光范围内讨论, 由干涉相消条件, 可解得透射的可见光谱中少了哪些波长.

**解** 根据分析, 有

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_0 - n_e)d + \pi$$

(1)

$$\Delta\varphi = (2k + 1)\pi \quad (2)$$

解上述两式可得

$$\lambda = \frac{(n_0 - n_e)d}{k}$$

在可见光范围 (400 nm ~ 760 nm) 内讨论, 解得

$k$	6	7	8	9	10
$\lambda/\text{nm}$	717	614	538	478	430

很显然, 在缺少了上述波长后, 透射光不再是白光了.

**讨论** 若两偏振片的偏振化方向相互平行, 情况会如何?

## 第十二章 气体动理论

**12-1** 处于平衡状态的一瓶氢气和一瓶氮气的分子数密度相同, 分子的平均平动动能也相同, 则它们( )

- (A) 温度, 压强均不相同 (B) 温度相同, 但氢气压强大于氮气的压强  
(C) 温度, 压强都相同 (D) 温度相同, 但氢气压强小于氮气的压强

**分析与解** 理想气体分子的平均平动动能  $\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2$ , 仅与温度有关. 因此当氢气和氮气的平均平动动能相同时, 温度也相同. 又由物态方程  $p = nkT$ , 当两者分子数密度  $n$  相同时, 它们压强也相同. 故选(C).

**12-2** 三个容器A、B、C 中装有同种理想气体, 其分子数密度  $n$  相同, 方均根速率之比  $(\bar{v}_A^2)^{1/2} : (\bar{v}_B^2)^{1/2} : (\bar{v}_C^2)^{1/2} = 1:2:4$ , 则其压强之比  $p_A : p_B : p_C$  为( )

- (A) 1:2:4 (B) 1:4:8  
(C) 1:4:16 (D) 4:2:1

**分析与解** 分子的方均根速率为  $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{3RT/M}$ , 因此对同种理想气体有  $\sqrt{\bar{v}_A^2} : \sqrt{\bar{v}_B^2} : \sqrt{\bar{v}_C^2} = \sqrt{T_1} : \sqrt{T_2} : \sqrt{T_3}$ , 又由物态方程  $p = nkT$ , 当三个容器中分子数密度  $n$  相同时, 得  $p_1 : p_2 : p_3 = T_1 : T_2 : T_3 = 1:4:16$ . 故选(C).

**12-3** 在一个体积不变的容器中, 储有一定量的某种理想气体, 温度为  $T_0$  时, 气体分子的平均速率为  $\bar{v}_0$ , 分子平均碰撞次数为  $\bar{Z}_0$ , 平均自由程为  $\bar{\lambda}_0$ , 当气体温度升高为  $4T_0$  时, 气体分子的平均速率  $\bar{v}$ 、平均碰撞频率  $\bar{Z}$  和平均自由程  $\bar{\lambda}$  分别为( )

- (A)  $\bar{v} = 4\bar{v}_0, \bar{Z} = 4\bar{Z}_0, \bar{\lambda} = 4\bar{\lambda}_0$  (B)  $\bar{v} = 2\bar{v}_0, \bar{Z} = 2\bar{Z}_0, \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$   
(C)  $\bar{v} = 2\bar{v}_0, \bar{Z} = 2\bar{Z}_0, \bar{\lambda} = 4\bar{\lambda}_0$  (D)  $\bar{v} = \bar{v}_0, \bar{Z} = 2\bar{Z}_0, \bar{\lambda} = 4\bar{\lambda}_0$

**分析与解** 理想气体分子的平均速率  $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi M}$ , 温度由  $T_0$  升至  $4T_0$ , 则平均速率变为  $2\bar{v}_0$ ; 又平均碰撞频率  $\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v}$ , 由于容器体积不变, 即分子数密度  $n$  不变, 则平均碰撞频率变为  $2\bar{Z}_0$ ; 而平均自由程  $\bar{\lambda} = 1/\sqrt{2}\pi d^2 n$ ,  $n$  不变, 则  $\bar{\lambda}$  也不变. 因此正确答案为(B).

**12-4** 已知  $n$  为单位体积的分子数,  $f(v)$  为麦克斯韦速率分布函数, 则  $nf(v)dv$  表示( )

- (A) 速率  $v$  附近,  $dv$  区间内的分子数  
(B) 单位体积内速率在  $v \sim v + dv$  区间内的分子数  
(C) 速率  $v$  附近,  $dv$  区间内分子数占总分子数的比率  
(D) 单位时间内碰到单位器壁上, 速率在  $v \sim v + dv$  区间内的分子数

**分析与解** 麦克斯韦速率分布函数  $f(v) = dN/(Ndv)$ , 而  $n = N/V$ , 则有  $nf(v)dv = dN/V$ . 即表示单位体积内速率在  $v \sim v + dv$  区间内的分子数. 正确答案为(B).

**12-5** 一打足气的自行车内胎, 在  $t_1 = 7.0^\circ\text{C}$  时, 轮胎中空气的压强为  $p_1 = 4.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 则当温度变为  $t_2 = 37.0^\circ\text{C}$  时, 轮胎内空气的压强  $p_2$  为多少? (设内胎容积不变)

**分析** 胎内空气可视为一定量的理想气体, 其始末状态均为平衡态, 由于气体的体积不变,

由理想气体物态方程  $pV = \frac{m}{M}RT$  可知, 压强  $p$  与温度  $T$  成正比. 由此即可求出末态的压强.

**解** 由分析可知, 当  $T_2 = 273.15 + 37.0 = 310.15 \text{ K}$ , 轮胎内空气压强为

$$p_2 = T_2 p_1 / T_1 = 4.43 \times 10^5 \text{ Pa}$$

可见当温度升高时, 轮胎内气体压强变大, 因此, 夏季外出时自行车的车胎不宜充气太足, 以免爆胎.

**12 -6** 有一个体积为  $1.0 \times 10^5 \text{ m}^3$  的空气泡由水面下  $50.0 \text{ m}$  深的湖底处(温度为  $4^\circ \text{C}$ )升到湖面上来. 若湖面的温度为  $17.0^\circ \text{C}$ , 求气泡到达湖面的体积. (取大气压强为  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ )

**分析** 将气泡看成是一定量的理想气体, 它位于湖底和上升至湖面代表两个不同的平衡状态. 利用理想气体物态方程即可求解本题. 位于湖底时, 气泡内的压强可用公式  $p = p_0 + \rho gh$  求出, 其中  $\rho$  为水的密度(常取  $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^3$ ).

**解** 设气泡在湖底和湖面的状态参量分别为  $(p_1, V_1, T_1)$  和  $(p_2, V_2, T_2)$ . 由分析知湖底处压强为  $p_1 = p_2 + \rho gh = p_0 + \rho gh$ , 利用理想气体的物态方程

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

可得空气泡到达湖面的体积为

$$V_2 = p_1 T_2 V_1 / p_2 T_1 = (p_0 + \rho gh) T_2 V_1 / p_0 T_1 = 6.11 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

**12 -7** 氧气瓶的容积为  $3.2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ , 其中氧气的压强为  $1.3 \times 10^7 \text{ Pa}$ , 氧气厂规定压强降到  $1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$  时, 就应重新充气, 以免经常洗瓶. 某小型吹玻璃车间, 平均每天用去  $0.40 \text{ m}^3$  压强为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  的氧气, 问一瓶氧气能用多少天? (设使用过程中温度不变)

**分析** 由于使用条件的限制, 瓶中氧气不可能完全被使用. 为此, 可通过两条不同的思路进行分析和求解: (1) 从氧气质量的角度来分析. 利用理想气体物态方程  $pV = \frac{m}{M}RT$  可以分别计算出每天使用氧气的质量  $m_3$  和可供使用的氧气总质量(即原瓶中氧气的总质量  $m_1$  和需充气时瓶中剩余氧气的质量  $m_2$  之差), 从而可求得使用天数  $n = (m_1 - m_2) / m_3$ . (2) 从容积角度来分析. 利用等温膨胀条件将原瓶中氧气由初态( $p_1 = 1.30 \times 10^7 \text{ Pa}$ ,  $V_1 = 3.2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ )膨胀到需充气条件下的终态( $p_2 = 1.00 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $V_2$  待求), 比较可得  $p_2$  状态下实际使用掉的氧气的体积为  $V_2 - V_1$ . 同样将每天使用的氧气由初态( $p_3 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V_3 = 0.40 \text{ m}^3$ )等温压缩到压强为  $p_2$  的终态, 并算出此时的体积  $V'_2$ , 由此可得使用天数应为  $n = (V_2 - V_1) / V'_2$ .

**解1** 根据分析有

$$m_1 = Mp_1 V_1 / RT; m_2 = Mp_2 V_2 / RT; m_3 = Mp_3 V_3 / RT$$

则一瓶氧气可用天数

$$n = (m_1 - m_2) / m_3 = (p_1 - p_2) V_1 / p_3 V_3 = 9.5$$

**解2** 根据分析中所述, 由理想气体物态方程得等温膨胀后瓶内氧气在压强为  $p_2 = 1.00 \times 10^6 \text{ Pa}$  时的体积为

$$V_2 = p_1 V_1 / p_2$$

每天用去相同状态的氧气容积

$$V'_2 = p_3 V_3 / p_2$$

则瓶内氧气可用天数为

$$n = (V_2 - V_1) / V'_2 = (p_1 - p_2) V_1 / p_3 V_3 = 9.5$$

**12 -8** 设想太阳是由氢原子组成的理想气体, 其密度可当作是均匀的. 若此理想气体的压强为  $1.35 \times 10^{14} \text{ Pa}$ . 试估计太阳的温度. (已知氢原子的质量  $m_{\text{H}} = 1.67 \times 10^{-27} \text{ Pa}$ , 太阳半径  $m_{\text{H}} = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 太阳质量  $m_{\text{S}} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ )

**分析** 本题可直接运用物态方程  $p = nkT$  进行计算.

**解** 氢原子的数密度可表示为

$$n = m_{\text{S}} / (m_{\text{H}} V_{\text{S}}) = m_{\text{S}} / \left[ m_{\text{H}} \cdot \frac{4}{3} \pi R_{\text{S}}^3 \right]$$

根据题给条件, 由  $p = nkT$  可得太阳的温度为

$$T = p / nk = 4\pi p m_{\text{H}} R_{\text{S}}^3 / (3m_{\text{S}} k) = 1.16 \times 10^7 \text{ K}$$

**说明** 实际上太阳结构并非本题中所设想的理想化模型, 因此, 计算所得的太阳温度与实际的温度相差较大. 估算太阳(或星体)表面温度的几种较实用的方法在教材第十五章有所介绍.

**12 -9** 一容器内储有氧气, 其压强为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 温度为  $27^\circ \text{C}$ , 求: (1) 气体分子的数密度; (2) 氧气的密度; (3) 分子的平均平动动能; (4) 分子间的平均距离. (设分子间均匀等距排列)

**分析** 在题中压强和温度的条件下, 氧气可视为理想气体. 因此, 可由理想气体的物态方程、密度的定义以及分子的平均平动动能与温度的关系等求解. 又因可将分子看成是均匀等距排列的, 故每个分子占有的体积为  $V_0 = \bar{d}^3$ , 由数密度的含意可知  $V_0 = 1/n$ ,  $\bar{d}$  即可求出.

**解** (1) 单位体积分子数

$$n = p / kT = 2.44 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

(2) 氧气的密度

$$\rho = m / V = pM / RT = 1.30 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

(3) 氧气分子的平均平动动能

$$\bar{\epsilon}_{\text{k}} = 3kT / 2 = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

(4) 氧气分子的平均距离

$$\bar{d} = \sqrt[3]{1/n} = 3.45 \times 10^{-9} \text{ m}$$

通过对本题的求解, 我们可以对通常状态下理想气体的分子数密度、平均平动动能、分子间平均距离等物理量的数量级有所了解.

**12 -10**  $2.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$  氢气装在  $4.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的容器内, 当容器内的压强为  $3.90 \times 10^5 \text{ Pa}$  时, 氢气分子的平均平动动能为多大?

**分析** 理想气体的温度是由分子的平均平动动能决定的, 即  $\bar{\epsilon}_{\text{k}} = 3kT / 2$ . 因此, 根据题中给出的条件, 通过物态方程  $pV = m/MRT$ , 求出容器内氢气的温度即可得  $\bar{\epsilon}_{\text{k}}$ .

**解** 由分析知氢气的温度  $T = \frac{MPV}{mR}$ , 则氢气分子的平均平动能为

$$\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2 = 3pVMk(2mR) = 3.89$$

**12 -11** 温度为0℃和100℃时理想气体分子的平均平动动能各为多少? 欲使分子的平均平动动能等于1eV, 气体的温度需多高?

**解** 分子在0℃和100℃时平均平动动能分别为

$$\bar{\varepsilon}_1 = 3kT_1/2 = 5.65 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = 3kT_2/2 = 7.72 \times 10^{-21} \text{ J}$$

由于  $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ , 因此, 分子具有1eV平均平动动能时, 气体温度为

$$T = 2\bar{\varepsilon}_k/3k = 7.73 \times 10^3 \text{ K}$$

这个温度约为  $7.5 \times 10^3 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**12 -12** 某些恒星的温度可达到约  $1.0 \times 10^8 \text{ K}$ , 这是发生聚变反应(也称热核反应)所需的温度. 通常在此温度下恒星可视为由质子组成. 求: (1) 质子的平均动能是多少? (2) 质子的方均根速率为多大?

**分析** 将组成恒星的大量质子视为理想气体, 质子可作为质点, 其自由度  $i = 3$ , 因此, 质子的平均动能就等于平均平动动能. 此外, 由平均平动动能与温度的关系  $m\bar{v}^2/2 = 3kT/2$ , 可得方均根速率  $\sqrt{\bar{v}^2}$ .

**解** (1) 由分析可得质子的平均动能为

$$\bar{\varepsilon}_k = 3m\bar{v}^2/2 = 3kT/2 = 2.07 \times 10^{-15} \text{ J}$$

(2) 质子的方均根速率为

$$\sqrt{\bar{v}^2} = 2\sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1.58 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**12 -13** 试求温度为300.0 K 和2.7 K(星际空间温度)的氢分子的平均速率、方均根速率及最概然速率.

**分析** 分清平均速率  $\bar{v}$ 、方均根速率  $\sqrt{\bar{v}^2}$  及最概然速率  $v_p$  的物理意义, 并利用三种速率相应的公式即可求解.

**解** 氢气的摩尔质量  $M = 2 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ , 气体温度  $T_1 = 300.0 \text{ K}$ , 则有

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}} = 1.78 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}} = 1.93 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT_1}{M}} = 1.58 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

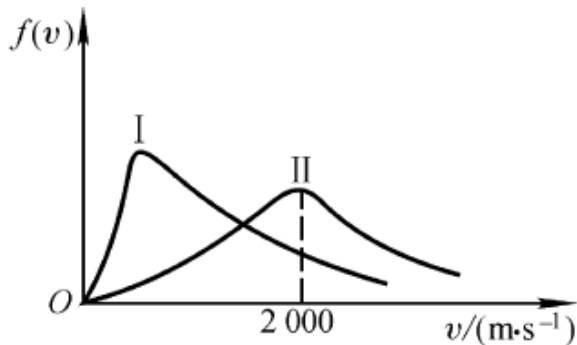
气体温度  $T_2 = 2.7 \text{ K}$  时, 有

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}} = 1.69 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} = 1.83 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT_1}{M}} = 1.50 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**12 -14** 如图所示, I、II 两条曲线分别是氢气和氧气在同一温度下的麦克斯韦分子速率分布曲线.试由图中数据求: (1) 氢气分子和氧气分子的最概然速率; (2) 两种气体所处的温度; (3) 若图中 I、II 分别表示氢气在不同温度下的麦克斯韦分子速率分布曲线.则哪条曲线的气体温度较高?



题 12 - 14 图

**分析** 由  $v_p = \sqrt{\frac{2RT_1}{M}}$  可知, 在相同温度下, 由于不同气体的摩尔质量不同, 它们的最概然速率  $v_p$  也就不同. 因  $M_{\text{H}_2} < M_{\text{O}_2}$ , 故氢气比氧气的  $v_p$  要大, 由此可判定图中曲线 II 所标  $v_p = 2.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  应是对应于氢气分子的最概然速率. 从而可求出该曲线所对应的温度. 又因曲线 I、II 所处的温度相同, 故曲线 I 中氧气的最概然速率也可按上式求得. 同样, 由  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  可知, 如果是同种气体, 当温度不同时, 最概然速率  $v_p$  也不同. 温度越高,  $v_p$  越大. 而曲线 II 对应的  $v_p$  较大, 因而代表气体温度较高状态.

**解** (1) 由分析知氢气分子的最概然速率为

$$(v_p)_{\text{H}_2} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\text{H}_2}}} = 2.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

利用  $M_{\text{O}_2} / M_{\text{H}_2} = 16$  可得氧气分子最概然速率为

$$(v_p)_{\text{O}_2} = (v_p)_{\text{H}_2} / 4 = 5.0 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 由  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  得气体温度

$$T = v_p^2 M / 2R = 4.81 \times 10^2 \text{ K}$$

(3) II 代表气体温度较高状态.

**12-15** 日冕的温度为 $2.0 \times 10^6 \text{K}$ , 所喷出的电子气可视为理想气体. 试求其中电子的方均根速率和热运动平均动能.

**解** 方均根速率  $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = 9.5 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

平均动能  $\bar{\epsilon}_k = 3kT/2 = 4.1 \times 10^{-17} \text{ J}$

**12-16** 在容积为 $2.0 \times 10^{-3} \text{m}^3$  的容器中, 有内能为 $6.75 \times 10^2 \text{J}$ 的刚性双原子分子某理想气体. (1) 求气体的压强; (2) 设分子总数为 $5.4 \times 10^{22}$  个, 求分子的平均平动动能及气体的温度.

**分析** (1) 一定量理想气体的内能  $E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT$ , 对刚性双原子分子而言,  $i=5$ . 由上述内

能公式和理想气体物态方程  $pV = mM RT$  可解出气体的压强. (2) 求得压强后, 再依据题给数据可求得分子数密度, 则由公式  $p = nkT$  可求气体温度. 气体分子的平均平动动能可由  $\bar{\epsilon}_k = 3kT/2$  求出.

**解** (1) 由  $E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT$  和  $pV = mM RT$  可得气体压强

$$p = 2E/(iV) = 1.35 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(2) 分子数密度  $n = N/V$ , 则该气体的温度

$$T = p/(nk) = pV/(nV) = 3.62 \times 10^5 \text{ Pa}$$

气体分子的平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_k = 3kT/2 = 7.49 \times 10^{-21} \text{ J}$$

**12-17** 温度相同的氢气和氧气, 若氢气分子的平均平动动能为 $6.21 \times 10^{-21} \text{J}$ , 试求(1) 氧气分子的平均平动动能及温度; (2) 氧气分子的最概然速率.

**分析** (1) 理想气体分子的平均平动动能  $\bar{\epsilon}_k = 3kT/2$ , 是温度的单值函数, 与气体种类无关. 因此, 氧气和氢气在相同温度下具有相同的平均平动动能, 从而可以求出氧气的温度. (2) 知道温度后再由最概然速率公式  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  即可求解  $v_p$ .

**解** (1) 由分析知氧气分子的平均平动动能为  $\bar{\epsilon}_k = 3kT/2 = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$ , 则氧气的温度为:

$$T = 2\bar{\epsilon}_k/3k = 300 \text{ K}$$

(2) 氧气的摩尔质量  $M = 3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 则有

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 3.95 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**12-18** 声波在理想气体中传播的速率正比于气体分子的方均根速率. 问声波通过氧气的速率与通过氢气的速率之比是多少? 设这两种气体都是理想气体并具有相同的温度.

**分析** 由题意声波速率  $u$  与气体分子的方均根速率成正比, 即  $u \propto \sqrt{\bar{v}^2}$ ; 而在一定温度下, 气体分子的方均根速率  $\sqrt{\bar{v}^2} \propto \sqrt{1/M}$ , 式中  $M$  为气体的摩尔质量. 因此, 在一定温度下声波速率  $u \propto \sqrt{1/M}$ .

**解** 依据分析可设声速  $u = A\sqrt{1/M}$ , 式中  $A$  为比例常量. 则声波通过氧气与氢气的速率之比为

$$\frac{u_{\text{H}_2}}{u_{\text{O}_2}} = \sqrt{\frac{M_{\text{H}_2}}{M_{\text{O}_2}}} = 0.25$$

**12 -19** 已知质点离开地球引力作用所需的逃逸速率为  $v = \sqrt{2gr}$ , 其中  $r$  为地球半径. (1) 若使氢气分子和氧气分子的平均速率分别与逃逸速率相等, 它们各自应有多高的温度; (2) 说明大气层中为什么氢气比氧气要少. (取  $r = 6.40 \times 10^6 \text{ m}$ )

**分析** 气体分子热运动的平均速率  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ , 对于摩尔质量  $M$  不同的气体分子, 为使  $\bar{v}$  等于逃逸速率  $v$ , 所需的温度是不同的; 如果环境温度相同, 则摩尔质量  $M$  较小的就容易达到逃逸速率.

**解** (1) 由题意逃逸速率  $v = \sqrt{2gr}$ , 而分子热运动的平均速率  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ . 当  $\bar{v} = v$  时, 有  $T = \frac{\pi M r g}{4R}$

由于氢气的摩尔质量  $M_{\text{H}_2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 氧气的摩尔质量  $M_{\text{O}_2} = 3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 则它们达到逃逸速率时所需的温度分别为

$$T_{\text{H}_2} = 1.18 \times 10^4 \text{ K}, \quad T_{\text{O}_2} = 1.89 \times 10^5 \text{ K}$$

(2) 根据上述分析, 当温度相同时, 氢气的平均速率比氧气的要大(约为4倍), 因此达到逃逸速率的氢气分子比氧气分子多. 按大爆炸理论, 宇宙在形成过程中经历了一个极高温过程. 在地球形成的初期, 虽然温度已大大降低, 但温度值还是很高. 因而, 在气体分子产生过程中就开始有分子逃逸地球, 其中氢气分子比氧气分子更易逃逸. 另外, 虽然目前的大气层温度不可能达到上述计算结果中逃逸速率所需的温度, 但由麦克斯韦分子速率分布曲线可知, 在任一温度下, 总有一些气体分子的运动速率大于逃逸速率. 从分布曲线也可知道在相同温度下氢气分子能达到逃逸速率的可能性大于氧气分子. 故大气层中氢气比氧气要少.

**12 -20** 容积为  $1\text{m}^3$  的容器储有  $1\text{mol}$  氧气, 以  $v = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度运动, 设容器突然停止, 其中氧气的80%的机械运动动能转化为气体分子热运动动能. 试求气体的温度及压强各升高了多少.

**分析** 容器作匀速直线运动时, 容器内分子除了相对容器作杂乱无章的热运动外, 还和容器一起作定向运动. 其定向运动动能(即机械能)为  $mv^2/2$ . 按照题意, 当容器突然停止后, 80%定向运动动能转为系统的内能. 对一定量理想气体内能是温度的单值函数, 则有关系式:

$\Delta E = (mv^2) \cdot 80\% = \frac{m}{M} \frac{5}{2} R \cdot \Delta T$  成立, 从而可求  $\Delta T$ . 再利用理想气体物态方程, 可求压强的增量.

**解** 由分析知  $\Delta E = 0.8mv^2/2 = \frac{m}{M} \frac{5}{2} R \cdot \Delta T$ , 其中  $m$  为容器内氧气质量. 又氧气的摩尔质



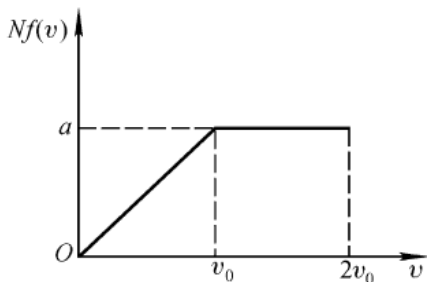
量为  $M = 3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 解得

$$\Delta T = 6.16 \times 10^{-2} \text{ K}$$

当容器体积不变时, 由  $pV = mRT/M$  得

$$\Delta p = \frac{m}{M} \frac{R}{V} \Delta T = 0.51 \text{ Pa}$$

**12 - 21** 有  $N$  个质量均为  $m$  的同种气体分子, 它们的速率分布如图所示. (1) 说明曲线与横坐标所包围的面积的含义; (2) 由  $N$  和  $v_0$  求  $a$  值; (3) 求在速率  $v_0/2$  到  $3v_0/2$  间隔内的分子数; (4) 求分子的平均平动动能.



题 12 - 21 图

**分析** 处理与气体分子速率分布曲线有关的问题时, 关键要理解分布函数  $f(v)$  的物理意义.  $f(v) = dN / Nd v$ , 题中纵坐标  $Nf(v) = dN / dv$ , 即处于速率  $v$  附近单位速率区间内的分子数. 同时要掌握  $f(v)$  的归一化条件, 即  $\int_0^\infty f(v) dv = 1$ . 在此基础上, 根据分布函数并运用数学方法 (如函数求平均值或极值等), 即可求解本题.

**解** (1) 由于分子所允许的速率在  $0$  到  $2v_0$  的范围内, 由归一化条件可知图中曲线下的面积

$$\int_0^\infty f(v) dv = 1$$

即曲线下面积表示系统分子总数  $N$ .

(2) 从图中可知, 在  $0$  到  $v_0$  区间内,  $Nf(v) = av/v_0$ ; 而在  $0$  到  $2v_0$  区间,  $Nf(v) = a$ . 则利用归一化条件有

$$N = \int_0^{v_0} \frac{av}{v_0} dv + \int_{v_0}^{2v_0} a dv$$

(3) 速率在  $v_0/2$  到  $3v_0/2$  间隔内的分子数为

$$\Delta N = \int_0^{v_0} \frac{av}{v_0} dv + \int_{v_0}^{3v_0/2} a dv = 7N/12$$

(4) 分子速率平方的平均值按定义为

$$\bar{v}^2 = \int_0^\infty v^2 dN / N = \int_0^\infty v^2 f(v) dv$$

故分子的平均平动动能为

$$\bar{\varepsilon}_K = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} m \left[ \int_0^{v_0} \frac{a}{N v_0} v^3 dv + \int_{v_0}^{2v_0} \frac{a}{N} v^2 dv \right] = \frac{31}{36} m v_0^2$$

**12 - 22** 试用麦克斯韦分子速率分布定律导出方均根速率和最概然速率.

**分析** 麦克斯韦分子速率分布函数为

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

采用数学中对连续函数求自变量平均值的方法, 求解分子速率平方的平均值, 即  $\bar{v}^2 = \frac{\int v^2 dN}{\int dN}$ ,

从而得出方均根速率. 由于分布函数较复杂, 在积分过程中需作适当的数学代换. 另外, 最概然速率是指麦克斯韦分子速率分布函数极大值所对应的速率, 因而可采用求函数极值的方法求得.

**解** (1) 根据分析可得分子的方均根速率为

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \left( \int_0^N v^2 dN / N \right)^{1/2} = \left[ \int_0^\infty 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \right]^{1/2}$$

令  $mv^2 / 2kT = x^2$ , 则有

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \left[ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{2kT}{m} \int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx \right]^{1/2} = \left( \frac{3kT}{m} \right)^{1/2} = 1.73 \left( \frac{RT}{m} \right)^{1/2}$$

(2) 令  $df(v)dv = 0$ , 即

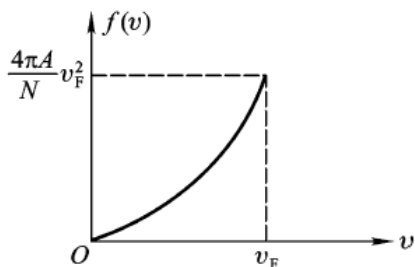
$$4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[ 2v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) - 2v^2 \frac{mv}{2kT} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \right] = 0$$

得 
$$v = v_p = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \approx 1.41 \left( \frac{RT}{m} \right)^{1/2}$$

**12 - 23** 导体中自由电子的运动可看作类似于气体分子的运动(故称电子气). 设导体中共有  $N$  个自由电子, 其中电子的最大速率为  $v_F$  (称为费米速率). 电子在速率  $v \sim v + dv$  之间的概率为

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \frac{4\pi A}{N} v^2 dv & (v_F > v > 0, A) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases} \quad (1) \text{画出分布函数图; (2) 用 } N、v_F \text{ 定出常数 } A; (3)$$

证明电子气中电子的平均动能  $\bar{\varepsilon} = 3\bar{\varepsilon}_F / 5$ , 其中  $\bar{\varepsilon}_F = mv_F^2 / 2$ .



题 12 - 23 图

**分析** 理解速率分布函数的物理意义,就不难求解本题.速率分布函数  $f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ , 表示在  $v$  附近单位速率区间的粒子数占总粒子数的百分比.它应满足归一化条件  $\int_0^\infty f(v)dv = \int_0^{v_F} f(v)dv$ , 因此根据题给条件可得  $f(v) \sim v$  的函数关系,由此可作出解析图和求出  $A$ .在  $f(v) \sim v$  函数关系确定的情况下,由  $\bar{v}^2 = \int v^2 f(v)dv$  可以求出  $\bar{v}^2$ , 从而求出  $\bar{\varepsilon} = m\bar{v}^2/2$ .

**解** (1) 由题设可知, 电子的速率分布函数  $f(v) = \begin{cases} \frac{4\pi A}{N} v^2 & (v_F > v > 0) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases}$ , 其分布函

数图如图所示.

(2) 利用分析中所述归一化条件, 有  $\int_0^{v_F} \frac{4\pi A}{N} v^2 dv = 1$  得

$$A = 3N/4\pi v_F^3$$

$$(3) \quad \bar{v}^2 = \int_0^\infty v^2 f(v)dv = \int_0^{v_F} \frac{4\pi\pi}{N} v^2 dv = \frac{3v_F^2}{5}$$

$$\bar{\varepsilon} = m\bar{v}^2/2 = 3\bar{\varepsilon}_F/5$$

**12 -24** 一飞机在地面时, 机舱中的压力计指示为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 到高空后压强降为  $8.11 \times 10^4 \text{ Pa}$ . 设大气的温度均为  $27.0^\circ\text{C}$ . 问此时飞机距地面的高度为多少? (设空气的摩尔质量为  $2.89 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$ )

**分析** 当温度不变时, 大气压强随高度的变化主要是因为分子数密度的改变而造成. 气体分子在重力场中的分布满足玻耳兹曼分布. 利用地球表面附近气压公式  $p = p_0 \exp(-mgh/kT)$ , 即可求得飞机的高度  $h$ . 式中  $p_0$  是地面的大气压强.

**解** 飞机高度为

$$h = \frac{kT}{mg} \ln(p_0/p) = \frac{RT}{Mg} \ln(p_0/p) = 1.93 \times 10^3 \text{ m}$$

**12 -25** 在压强为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  下, 氮气分子的平均自由程为  $6.0 \times 10^{-6} \text{ cm}$ , 当温度不变时, 在多大压强下, 其平均自由程为  $1.0 \text{ mm}$ .

**分析** 气体分子热运动的平均自由程  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}nd}$ , 其中分子数密度  $n$  由物态方程  $p = nkT$  确定, 因此在温度一定时, 平均自由程  $\bar{\lambda} \propto 1/p$ .

**解** 由分析知平均自由程  $\bar{\lambda} \propto 1/p$ . 当自由程由  $\bar{\lambda}_1$  改变为  $\bar{\lambda}_2$  时, 其压强为  $p_2 = (\bar{\lambda}_1/\bar{\lambda}_2)p_1 = 6.06 \text{ Pa}$

**12 -26** 目前实验室获得的极限真空约为  $1.33 \times 10^{-11} \text{ Pa}$ , 这与距地球表面  $1.0 \times 10^4 \text{ km}$  处的压强大致相等. 而电视机显像管的真空度为  $1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}$ , 试求在  $27^\circ\text{C}$  时这两种不同压强下单位体积中的分子数及分子的平均自由程. (设气体分子的有效直径  $d = 3.0 \times 10^{-8} \text{ cm}$ )

**解** 理想气体分子数密度和平均自由程分别为  $n = p/kT$ ;  $\bar{\lambda} = kT/\sqrt{2}\pi d^2 p$ , 压强为  $1.33 \times 10^{-11} \text{ Pa}$  时,

$$n = p/kT = 3.21 \times 10^9 \text{ m}^{-3}$$

$$\bar{\lambda} = kT\sqrt{2\pi d^2 p} = 7.8 \times 10^8 \text{ m}$$

从 $\bar{\lambda}$ 的值可见分子几乎不发生碰撞.压强为 $1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}$ 时,

$$n = p/kT = 3.21 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}, \bar{\lambda} = kT\sqrt{2\pi d^2 p} = 7.8 \text{ m}$$

此时分子的平均自由程变小,碰撞几率变大.但相对显像管的尺寸而言,碰撞仍很少发生.

**12 -27** 若氦气分子的有效直径为 $2.59 \times 10^{-8} \text{ cm}$ ,问在温度为 $600 \text{ K}$ 、压强为 $1.33 \times 10^2 \text{ Pa}$ 时氦分子 $1 \text{ s}$ 内的平均碰撞次数为多少?

**分析** 分子 $1 \text{ s}$ 内的平均碰撞次数即平均碰撞频率 $\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v}$ ,其中分子数密度 $n$ 及平均速率 $\bar{v}$ 可利用物态方程 $p = nkT$ 和平均速率 $\bar{v} = (8RT/\pi M)^{1/2}$ 公式分别求出.

**解** 由分析可得氦分子的平均碰撞频率

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v} = \sqrt{2}\pi d^2 \left[ \frac{p}{kT} \right] \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 3.81 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$$

**12 -28** 在一定的压强下,温度为 $20^\circ \text{C}$ 时,氩气和氮气分子的平均自由程分别为 $9.9 \times 10^{-8} \text{ m}$ 和 $27.5 \times 10^{-8} \text{ m}$ .试求:(1) 氩气和氮气分子的有效直径之比;(2) 当温度不变且压强为原值的一半时,氮气分子的平均自由程和平均碰撞频率.

**分析** (1) 气体分子热运动的平均自由程 $\bar{\lambda} = 1/\sqrt{2}\pi d^2 n = kT/(\sqrt{2}\pi d^2 p)$ ,因此,温度、压强一定时,平均自由程 $\bar{\lambda} \propto 1/d^2$ . (2) 当温度不变时,平均自由程 $\bar{\lambda} \propto 1/p$ .

**解** (1) 由分析可知

$$d_{\text{Ar}}/d_{\text{N}_2} = \sqrt{\bar{\lambda}_{\text{N}_2}/\bar{\lambda}_{\text{Ar}}} = 1.67$$

(2) 由分析可知氮气分子的平均自由程在压强降为原值的一半时,有

$$\bar{\lambda}'_{\text{N}_2} = 2\bar{\lambda}_{\text{N}_2} = 5.5 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\text{而此时的分子平均碰撞频率} \quad \bar{Z}_{\text{N}_2} = \frac{\bar{v}_{\text{N}_2}}{\bar{\lambda}'_{\text{N}_2}} = \frac{\sqrt{8RT/\pi M_{\text{N}_2}}}{2\bar{\lambda}_{\text{N}_2}}$$

将 $T = 293 \text{ K}$ ,  $M_{\text{N}_2} = 2.8 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$ 代入,可得

$$\bar{Z}_{\text{N}_2} = 8.56 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

**12 -29** 对于 $\text{CO}_2$ 气体有范德瓦耳斯常量 $a = 0.37 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$ ;  $b = 4.3 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $0^\circ \text{C}$ 时其摩尔体积为 $6.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ .试求其压强.

如果将其当作理想气体处理,结果又如何?

**分析** 直接运用范德瓦耳斯方程和理想气体状态方程可分别求出对应的压强.

**解** 用范德瓦耳斯方程求解,其压强为

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} = 3.05 \times 10^6 \text{ Pa}$$

作为理想气体求解,则有

$$p' = RT/V = 3.78 \times 10^6 \text{ Pa}$$

**讨论** 由计算可知,  $p' > p$ .这正是在建立理想气体模型时,忽略了分子本身占有的体

积所致.

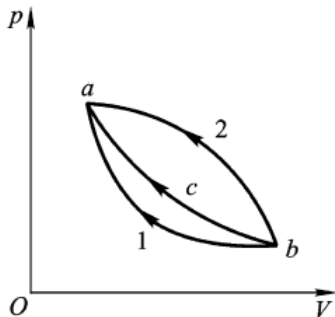
**12 -30** 一台普通冰箱等效于一个厚  $\Delta x = 90\text{mm}$ 、内表面积为  $S = 5.6\text{m}^2$  的软木盒子.关上冰箱门后,内部温度比外界温度低  $22.2\text{ }^\circ\text{C}$ ,若冰箱马达运行时间为冰箱关闭时间的15%,求马达运行时,冰箱内热量的迁移率(即单位时间内从冰箱内迁出的热量).已知软木盒热导率  $\kappa = 0.05\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$ .

**解** 根据热传导公式  $\Delta Q/\Delta t = -\kappa S(\Delta T/\Delta x)$ , 由题已知  $\kappa = 0.05\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ,  $S = 5.6\text{ m}^2$ ,  $\Delta x = 90\text{ mm}$ ,  $\Delta T = 22.2\text{K}$ , 得  $\Delta Q/\Delta t = 69.1\text{ W}$ , 则马达运行时, 热量迁移率为  $\Delta Q/(\Delta t \cdot 15\%) = 460\text{ W}$ .

### 第十三章 热力学基础

**13 -1** 如图所示,  $bca$  为理想气体绝热过程,  $b1a$  和  $b2a$  是任意过程, 则上述两过程中气体做功与吸收热量的情况是( )

- (A)  $b1a$  过程放热, 作负功;  $b2a$  过程放热, 作负功  
 (B)  $b1a$  过程吸热, 作负功;  $b2a$  过程放热, 作负功  
 (C)  $b1a$  过程吸热, 作正功;  $b2a$  过程吸热, 作负功  
 (D)  $b1a$  过程放热, 作正功;  $b2a$  过程吸热, 作正功

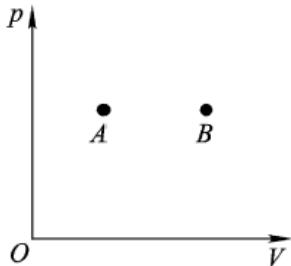


题 13 - 1 图

**分析与解**  $bca$ ,  $b1a$  和  $b2a$  均是外界压缩系统, 由  $W = \int p dV$  知系统经这三个过程均作负功, 因而(C)、(D)不对. 理想气体的内能是温度的单值函数, 因此三个过程初末态内能变化相等, 设为  $\Delta E$ . 对绝热过程  $bca$ , 由热力学第一定律知  $\Delta E = -W_{bca}$ . 另外, 由图可知:  $|W_{b2a}| > |W_{bca}| > |W_{b1a}|$ , 则  $W_{b2a} < W_{bca} < W_{b1a}$ . 对  $b1a$  过程:  $Q = \Delta E + W_{b1a} > \Delta E + W_{bca} = 0$  是吸热过程. 而对  $b2a$  过程:  $Q = \Delta E + W_{b2a} < \Delta E + W_{bca} = 0$  是放热过程. 可见(A)不对, 正确的是(B).

**13 -2** 如图, 一定量的理想气体, 由平衡态A 变到平衡态B, 且它们的压强相等, 即  $p_A = p_B$ , 请问在状态A和状态B之间, 气体无论经过的是什么过程, 气体必然( )

- (A) 对外作正功                      (B) 内能增加  
 (C) 从外界吸热                      (D) 向外界放热



题 13 - 2 图

**分析与解** 由  $p-V$  图可知,  $p_A V_A < p_B V_B$ , 即知  $T_A < T_B$ , 则对一定量理想气体必有  $E_B > E_A$ . 即气体由状态A 变化到状态B, 内能必增加. 而做功、热传递是过程量, 将与具体过程有关. 所以(A)、(C)、(D)不是必然结果, 只有(B)正确.

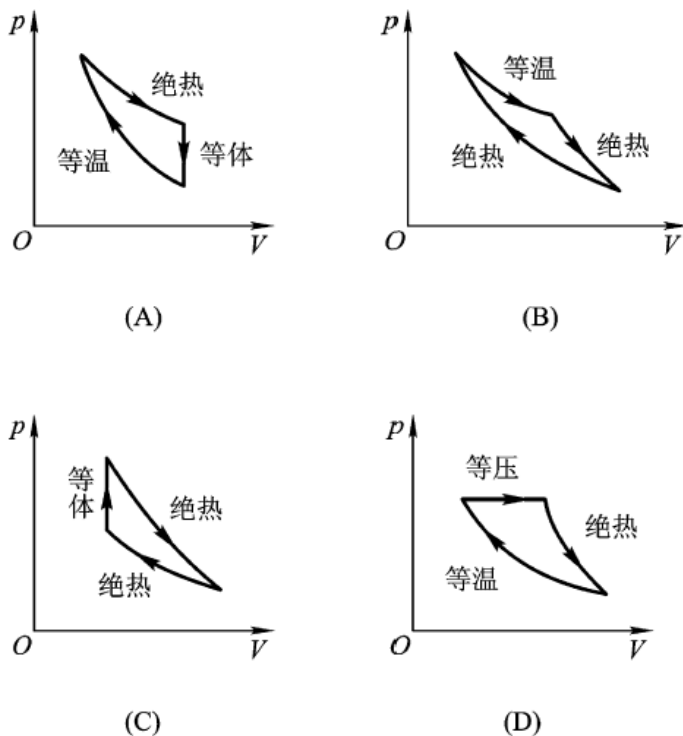
**13 -3** 两个相同的刚性容器, 一个盛有氢气, 一个盛氦气(均视为刚性分子理想气体). 开始时它们的压强和温度都相同, 现将3J热量传给氦气, 使之升高到一定的温度. 若使氢气也升高同样的温度, 则应向氢气传递热量为( )

- (A) 6J (B) 3J (C) 5J (D) 10J

**分析与解** 当容器体积不变, 即为等体过程时系统不作功, 根据热力学第一定律  $Q = \Delta E + W$ , 有  $Q = \Delta E$ . 而由理想气体内能公式  $\Delta E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R \Delta T$ , 可知欲使氢气和氦气升高相同温度, 须传递的热量

$Q_{H_2} : Q_{He} = \left( \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} i_{H_2} \right) / \left( \frac{m_{He}}{M_{He}} i_{He} \right)$ . 再由理想气体物态方程  $pV = mM RT$ , 初始时, 氢气和氦气是具有相同的温度、压强和体积, 因而物质的量相同, 则  $Q_{H_2} : Q_{He} = i_{H_2} / i_{He} = 5/3$ . 因此正确答案为(C).

**13 -4** 有人想像了四个理想气体的循环过程, 则在理论上可以实现的为( )



题 13-4 图

**分析与解** 由绝热过程方程  $pV^\gamma = \text{常量}$ , 以及等温过程方程  $pV = \text{常量}$ , 可知绝热线比等温线要陡, 所以(A)过程不对, (B)、(C)过程中都有两条绝热线相交于一点, 这是不可能的. 而且(B)过程的循环表明系统从单一热源吸热且不引起外界变化, 使之全部变成有用功, 违反了热力学第二定律. 因此只有(D)正确.

**13 -5** 一台工作于温度分别为327 °C和27 °C的高温热源与低温源之间的卡诺热机, 每经历一个循环吸热2 000 J, 则对外做功( )

(A) 2 000J (B) 1 000J (C) 4 000J (D) 500J

**分析与解** 热机循环效率 $\eta=W/Q_{\text{吸}}$ , 对卡诺机, 其循环效率又可表为:  $\eta=1-T_2/T_1$ , 则由 $W/Q_{\text{吸}}=1-T_2/T_1$  可求答案. 正确答案为(B).

**13 -6** 根据热力学第二定律( )

- (A) 自然界中的一切自发过程都是不可逆的
- (B) 不可逆过程就是不能向相反方向进行的过程
- (C) 热量可以从高温物体传到低温物体, 但不能从低温物体传到高温物体
- (D) 任何过程总是沿着熵增加的方向进行

**分析与解** 对选项(B): 不可逆过程应是指在不引起其他变化的条件下, 不能使逆过程重复正过程的每一状态, 或者虽然重复但必然会引起其他变化的过程. 对选项(C): 应是热量不可能从低温物体自动传到高温物体而不引起外界的变化. 对选项(D): 缺少了在孤立系统中这一前提条件. 只有选项(A)正确.

**13 -7** 位于委内瑞拉的安赫尔瀑布是世界上落差最大的瀑布, 它高979m. 如果在水下落的过程中, 重力对它所作的功中有50%转换为热量使水温升高, 求水由瀑布顶部落到底部而产生的温差.( 水的比热容 $c$ 为 $4.18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )

**分析** 取质量为 $m$  的水作为研究对象, 水从瀑布顶部下落到底部过程中重力做功 $W=mgh$ , 按题意, 被水吸收的热量 $Q=0.5W$ , 则水吸收热量后升高的温度可由 $Q=mc\Delta T$  求得.

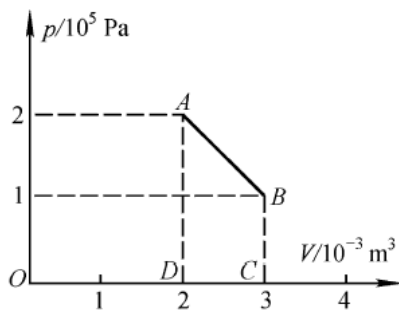
**解** 由上述分析得

$$mc\Delta T=0.5mgh$$

水下落后升高的温度

$$\Delta T=0.5gh/c=1.15\text{K}$$

**13 -8** 如图所示, 一定量的空气, 开始在状态A, 其压强为 $2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 体积为 $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ , 沿直线AB 变化到状态B后, 压强变为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 体积变为 $3.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ , 求此过程中气体所作的功.



题 13 -8 图

**分析** 理想气体做功的表达式为 $W=\int p(V)dV$ . 功的数值就等于 $p-V$  图中过程曲线下所对应的面积.

**解**  $S_{\text{ABCD}}=1/2(BC+AD) \times CD$

故  $W=150 \text{ J}$



**13 -9** 汽缸内储有2.0mol 的空气, 温度为27℃, 若维持压强不变, 而使空气的体积膨胀到原体积的3s倍, 求空气膨胀时所做的功.

**分析** 本题是等压膨胀过程, 气体做功  $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$ , 其中压强  $p$  可通过物态方程求得.

**解** 根据物态方程  $pV_1 = \nu RT_1$ , 汽缸内气体的压强  $p = \nu RT_1 / V_1$ , 则做功为

$$W = p(V_2 - V_1) = \nu RT_1(V_2 - V_1) / V_1 = 2\nu RT_1 = 9.97 \times 10^3 \text{ J}$$

**13 -10** 一定量的空气, 吸收了  $1.71 \times 10^3 \text{ J}$  的热量, 并保持在  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  下膨胀, 体积从  $1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$  增加到  $1.5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ , 问空气对外作了多少功? 它的内能改变了多少?

**分析** 由于气体作等压膨胀, 气体做功可直接由  $W = p(V_2 - V_1)$  求得. 取该空气为系统, 根据热力学第一定律  $Q = \Delta E + W$  可确定它的内能变化. 在计算过程中要注意热量、功、内能的正负取值.

**解** 该空气等压膨胀, 对外做功为

$$W = p(V_2 - V_1) = 5.0 \times 10^2 \text{ J}$$

其内能的改变为

$$Q = \Delta E + W = 1.21 \times 10^3 \text{ J}$$

**13 -11** 0.1kg 的水蒸气自120℃加热升温到140℃, 问(1) 在等体过程中; (2) 在等压过程中, 各吸收了多少热量? 根据实验测定, 已知水蒸气的摩尔定压热容  $C_{p,m} = 36.21 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , 摩尔定容热容  $C_{v,m} = 27.82 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

**分析** 由量热学知热量的计算公式为  $Q = \nu C_m \Delta T$ . 按热力学第一定律, 在等体过程中,  $Q_v = \Delta E = \nu C_{v,m} \Delta T$ ; 在等压过程中,  $Q_p = \int p dV + \Delta E = \nu C_{p,m} \Delta T$ .

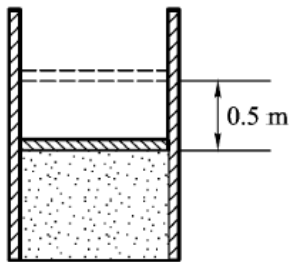
**解** (1) 在等体过程中吸收的热量为

$$Q_v = \Delta E = \frac{m}{M} C_{v,m} \Delta T = 3.1 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 在等压过程中吸收的热量为

$$Q_p = \int p dV + \Delta E = \frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1) = 4.0 \times 10^3 \text{ J}$$

**13 -12** 如图所示, 在绝热壁的汽缸内盛有1mol 的氮气, 活塞外为大气, 氮气的压强为  $1.51 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 活塞面积为  $0.02 \text{ m}^2$ . 从汽缸底部加热, 使活塞缓慢上升了  $0.5 \text{ m}$ . 问(1) 气体经历了什么过程? (2) 汽缸中的气体吸收了多少热量? (根据实验测定, 已知氮气的摩尔定压热容  $C_{p,m} = 29.12 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , 摩尔定容热容  $C_{v,m} = 20.80 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ )



题 13-12 图

**分析** 因活塞可以自由移动, 活塞对气体的作用力始终为大气压力和活塞重力之和. 容器内气体压强将保持不变. 对等压过程, 吸热  $Q_p = \nu C_{p,m} \Delta T$ .  $\Delta T$  可由理想气体物态方程求出.

**解** (1) 由分析可知气体经历了等压膨胀过程.

(2) 吸热  $Q_p = \nu C_{p,m} \Delta T$ . 其中  $\nu = 1 \text{ mol}$ ,  $C_{p,m} = 29.12 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . 由理想气体物态方程  $pV = \nu RT$ , 得

$$\Delta T = (p_2 V_2 - p_1 V_1) / R = p(V_2 - V_1) / R = p \cdot S \cdot \Delta l / R$$

则  $Q_p = C_{p,m} p S \Delta l = 5.29 \times 10^3 \text{ J}$

**13-13** 一压强为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 体积为  $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的氧气自  $0^\circ \text{C}$  加热到  $100^\circ \text{C}$ . 问: (1) 当压强不变时, 需要多少热量? 当体积不变时, 需要多少热量? (2) 在等压或等体过程中各作了多少功?

**分析** (1) 求  $Q_p$  和  $Q_v$  的方法与题 13-11 相同. (2) 求过程的作功通常有两个途径. ① 利用公式  $W = \int p(V) dV$ ; ② 利用热力学第一定律去求解. 在本题中, 热量  $Q$  已求出, 而内能变化可由  $Q_v = \Delta E = \nu C_{v,m} (T_2 - T_1)$  得到. 从而可求得功  $W$ .

**解** 根据题给初态条件得氧气的物质的量为

$$\nu = \frac{m}{M} = p_1 V_1 / R T_1 = 4.41 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

$$\text{氧气的摩尔定压热容 } C_{p,m} = \frac{7}{2} R, \text{ 摩尔定容热容 } C_{v,m} = \frac{5}{2} R.$$

(1) 求  $Q_p$ 、 $Q_v$

等压过程氧气(系统)吸热

$$Q_p = \int p dV + \Delta E = \nu C_{p,m} (T_2 - T_1) = 128.1 \text{ J}$$

等体过程氧气(系统)吸热

$$Q_v = \Delta E = \nu C_{v,m} (T_2 - T_1) = 91.5 \text{ J}$$

(2) 按分析中的两种方法求作功值

**解1** ① 利用公式  $W = \int p(V) dV$  求解. 在等压过程中,  $dW = p dV = \frac{m}{M} R dT$ , 则得

$$W_p = \int dW = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M} R dT = 36.6 \text{ J}$$

而在等体过程中, 因气体的体积不变, 故作功为

$$W_v = \int p(V) dV = 0$$

② 利用热力学第一定律  $Q = \Delta E + W$  求解.氧气的内能变化为

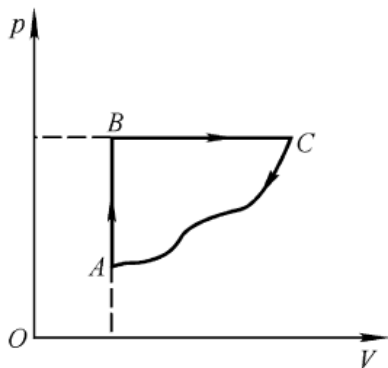
$$Q_V = \Delta E = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1) = 91.5 \text{ J}$$

由于在(1)中已求出  $Q_p$  与  $Q_V$ , 则由热力学第一定律可得在等压过程、等体过程中所作的功分别为

$$W_p = Q_p - \Delta E = 36.6 \text{ J}$$

$$W_V = Q_V - \Delta E = 0$$

**13 -14** 如图所示,系统从状态A沿ABC变化到状态C的过程中,外界有326J的热量传递给系统,同时系统对外做功126J.当系统从状态C沿另一曲线CA返回到状态A时,外界对系统做功为52J,则此过程中系统是吸热还是放热?传递热量是多少?



题 13 -14 图

**分析** 已知系统从状态C到状态A,外界对系统做功为  $W_{CA}$ , 如果再能知道此过程中内能的变化  $\Delta E_{AC}$ , 则由热力学第一定律即可求得该过程中系统传递的热量  $Q_{CA}$ . 由于理想气体的内能是状态(温度)的函数, 利用题中给出的ABC过程吸热、做功的情况, 由热力学第一定律即可求得由A至C过程中系统内能的变化  $\Delta E_{AC}$ , 而  $\Delta E_{AC} = -\Delta E_{CA}$ , 故可求得  $Q_{CA}$ .

**解** 系统经ABC过程所吸收的热量及对外所作的功分别为

$$Q_{ABC} = 326 \text{ J}, \quad W_{ABC} = 126 \text{ J}$$

则由热力学第一定律可得由A到C过程中系统内能的增量

$$\Delta E_{AC} = Q_{ABC} - W_{ABC} = 200 \text{ J}$$

由此可得从C到A, 系统内能的增量为

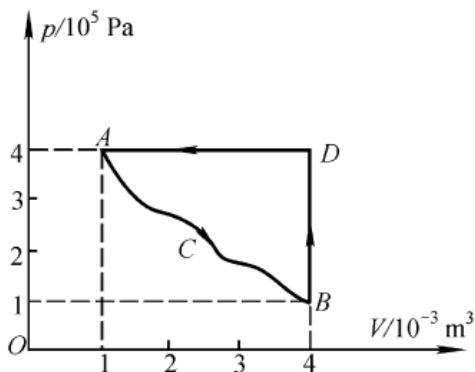
$$\Delta E_{CA} = -200 \text{ J}$$

从C到A, 系统所吸收的热量为

$$Q_{CA} = \Delta E_{CA} + W_{CA} = -252 \text{ J}$$

式中负号表示系统向外界放热252 J.这里要说明的是由于CA是一未知过程, 上述求出的放热是过程的总效果, 而对其中每一微小过程来讲并不一定都是放热.

**13 -15** 如图所示, 一定量的理想气体经历ACB过程时吸热700J, 则经历ACBDA过程时吸热又为多少?



题 13-15 图

**分析** 从图中可见ACBDA过程是一个循环过程.由于理想气体系统经历一个循环的内能变化为零,故根据热力学第一定律,循环系统净吸热即为外界对系统所作的净功.为了求得该循环过程中所作的功,可将ACBDA循环过程分成ACB、BD及DA三个过程讨论.其中BD及DA分别为等体和等压过程,过程中所作的功按定义很容易求得;而ACB过程中所作的功可根据上题同样的方法利用热力学第一定律去求.

**解** 由图中数据有 $p_A V_A = p_B V_B$ ,则A、B两状态温度相同,故ACB过程内能的变化 $\Delta E_{CAB} = 0$ ,由热力学第一定律可得系统对外界作功

$$W_{CAB} = Q_{CAB} - \Delta E_{CAB} = Q_{CAB} = 700 \text{ J}$$

在等体过程BD及等压过程DA中气体作功分别为

$$W_{BD} = \int p(V) dV = 0$$

$$W_{DA} = \int p dV = P_A (V_2 - V_1) = -1200 \text{ J}$$

则在循环过程ACBDA中系统所作的总功为

$$W = W_{ACB} + W_{BD} + W_{DA} = -500 \text{ J}$$

负号表示外界对系统作功.由热力学第一定律可得,系统在循环中吸收的总热量为

$$Q = W = -500 \text{ J}$$

负号表示在此过程中,热量传递的总效果为放热.

**13-16** 在温度不是很低的情况下,许多物质的摩尔定压热容都可以用下式表示

$$C_{p,m} = a + 2bT - cT^{-2}$$

式中 $a$ 、 $b$ 和 $c$ 是常量, $T$ 是热力学温度.求:(1)在恒定压强下,1 mol 物质的温度从 $T_1$ 升高到 $T_2$ 时需要的热量;(2)在温度 $T_1$ 和 $T_2$ 之间的平均摩尔热容;(3)对镁这种物质来说,若 $C_{p,m}$ 的单位为 $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,则 $a = 25.7 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , $b = 3.13 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-2}$ , $c = 3.27 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}$ .计算镁在300 K时的摩尔定压热容 $C_{p,m}$ ,以及在200 K和400 K之间 $C_{p,m}$ 的平均值.

**分析** 由题目知摩尔定压热容 $C_{p,m}$ 随温度变化的函数关系,则根据积分式 $Q_p = \int_{T_1}^{T_2} C_{p,m} dT$ 即

可求得在恒定压强下,1 mol 物质从 $T_1$ 升高到 $T_2$ 所吸收的热量 $Q_p$ .故温度在 $T_1$ 至 $T_2$ 之间的平均摩尔热容 $\bar{C}_{p,m} = Q_p / (T_2 - T_1)$ .

解 (1) 11 mol 物质从  $T_1$  升高到  $T_2$  时吸热为

$$\begin{aligned} Q_p &= \int C_{p,m} dT = \int_{T_1}^{T_2} (a + 2bT - cT^{-2}) dT \\ &= a(T_2 - T_1) + b(T_2^2 - T_1^2) + c(T_2^{-1} - T_1^{-1}) \end{aligned}$$

(2) 在  $T_1$  和  $T_2$  间的平均摩尔热容为

$$\bar{C}_{p,m} = Q_p / (T_2 - T_1) = a(T_2 + T_1) - c / T_1 T_2$$

(3) 镁在  $T = 300 \text{ K}$  时的摩尔定压热容为

$$C_{p,m} = a + 2bT - cT^{-2} = 23.9 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

镁在  $200 \text{ K}$  和  $400 \text{ K}$  之间  $C_{p,m}$  的平均值为

$$\bar{C}_{p,m} = a(T_2 + T_1) - c / T_1 T_2 = 23.5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

13 -17 空气由压强为  $1.52 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 体积为  $5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ , 等温膨胀到压强为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 然后再经等压压缩到原来的体积. 试计算空气所作的功.

解 空气在等温膨胀过程中所作的功为

$$W_T = \frac{m}{M} RT_1 \ln(V_2 / V_1) = p_1 V_1 \ln(p_1 / p_2)$$

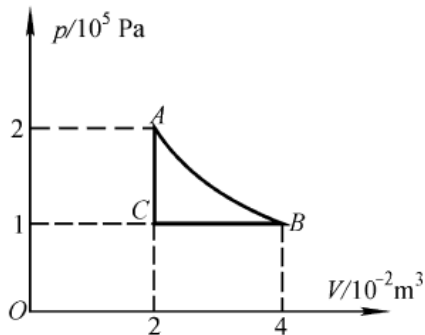
空气在等压压缩过程中所作的功为

$$W = \int p dV = p(V_2 - V_1)$$

利用等温过程关系  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ , 则空气在整个过程中所作的功为

$$\begin{aligned} W &= W_p + W_T = p_1 V_1 \ln(p_1 / p_2) + p_2 V_1 - p_1 V_1 \\ &= 55.7 \text{ J} \end{aligned}$$

13 -18 如图所示, 使  $1 \text{ mol}$  氧气(1) 由A 等温地变到B; (2) 由A 等体地变到C, 再由C 等压地变到B. 试分别计算氧气所作的功和吸收的热量.



题 13 - 18 图

分析 从  $p - V$  图(也称示功图)上可以看出, 氧气在AB 与ACB 两个过程中所作的功是不同的, 其大小可通过  $W = \int p(V) dV$  求出. 考虑到内能是状态的函数, 其变化值与过程无关, 所以这两个不同过程的内能变化是相同的, 而且因初、末状态温度相同  $T_A = T_B$ , 故  $\Delta E = 0$ , 利用热力学第一定律  $Q = W + \Delta E$ , 可求出每一过程所吸收的热量.

解 (1) 沿AB 作等温膨胀的过程中, 系统做功

$$W_{AB} = \frac{m}{M} RT_1 \ln(V_B/V_A) = p_A V_B \ln(V_B/V_A) = 2.77 \times 10^3 \text{ J}$$

由分析可知在等温过程中, 氧气吸收的热量为

$$Q_{AB} = W_{AB} = 2.77 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 沿A 到C 再到B 的过程中系统做功和吸热分别为

$$W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = W_{CB} = p_C (V_B - V_C) = 2.0 \times 10^3 \text{ J}$$

$$Q_{ACB} = W_{ACB} = 2.0 \times 10^3 \text{ J}$$

**13 -19** 将体积为  $1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ 、压强为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  的氢气绝热压缩, 使其体积变为  $2.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ , 求压缩过程中气体所作的功。(氢气的摩尔定压热容与摩尔定容热容比值  $\gamma = 1.41$ )

**分析** 可采用题13-13 中气体做功的两种计算方法。(1) 气体做功可由积分  $W = \int p dV$  求解, 其中函数  $p(V)$  可通过绝热过程方程  $pV^\gamma = C$  得出。(2) 因为过程是绝热的, 故  $Q=0$ , 因此, 有  $W = -\Delta E$ ; 而系统内能的变化可由系统的始末状态求出。

**解** 根据上述分析, 这里采用方法(1)求解, 方法(2)留给读者试解。设  $p$ 、 $V$  分别为绝热过程中任一状态的压强和体积, 则由  $p_1 V_1^\gamma = p V^\gamma$  得

$$p = p_1 V_1^\gamma V^{-\gamma}$$

氢气绝热压缩做功为

$$W = \int p dV = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1^\gamma V^{-\gamma} dV = \frac{p_1}{1-\gamma} \left[ V_2 \left[ \frac{V_1}{V_2} \right] - V_1 \right] = -23.0 \text{ J}$$

**13 -20** 试验用的火炮炮筒长为  $3.66 \text{ m}$ , 内膛直径为  $0.152 \text{ m}$ , 炮弹质量为  $45.4 \text{ kg}$ , 击发后火药爆燃完全时炮弹已被推行  $0.98 \text{ m}$ , 速度为  $311 \text{ m s}^{-1}$ , 这时膛内气体压强为  $2.43 \times 10^8 \text{ Pa}$ 。设此后膛内气体做绝热膨胀, 直到炮弹出口。求(1) 在这一绝热膨胀过程中气体对炮弹做功多少? 设摩尔定压热容与摩尔定容热容比值为  $\gamma = 1.2$ 。(2) 炮弹的出口速度(忽略摩擦)。

**分析** (1) 气体绝热膨胀做功可由公式  $W = \int p dV = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$  计算。由题中条件可知绝热膨胀前后气体的体积  $V_1$  和  $V_2$ , 因此只要通过绝热过程方程  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$  求出绝热膨胀后气体的压强就可求出做功值。(2) 在忽略摩擦的情况下, 可认为气体所作的功全部用来增加炮弹的动能。由此可得到炮弹速度。

**解** 由题设  $l = 3.66 \text{ m}$ ,  $D = 0.152 \text{ m}$ ,  $m = 45.4 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0.98 \text{ m}$ ,  $v_1 = 311 \text{ m s}^{-1}$ ,  $p_1 = 2.43 \times 10^8 \text{ Pa}$ ,  $\gamma = 1.2$ 。

(1) 炮弹出口时气体压强为

$$p_2 = p_1 (V_1/V_2)^\gamma = p_1 (l_1/l)^\gamma = 5.00 \times 10^7 \text{ Pa}$$

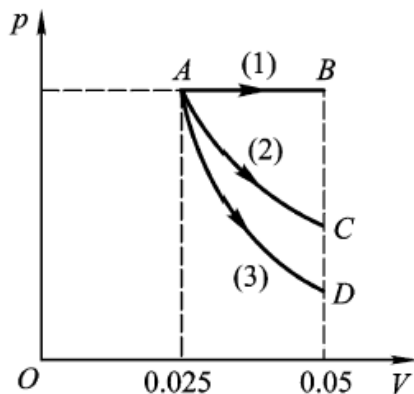
气体做功

$$W = \int p dV = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{p_1 l_1 - p_2 l_2}{\gamma - 1} \frac{\pi D^2}{4} = 5.00 \times 10^6 \text{ J}$$

(2) 根据分析  $W = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$ , 则

$$v = \sqrt{2W/m + v_1^2} = 563 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**13 - 21** 1mol 氢气在温度为300 K, 体积为0.025m<sup>3</sup> 的状态下, 经过(1)等压膨胀, (2)等温膨胀, (3)绝热膨胀. 气体的体积都变为原来的两倍. 试分别计算这三种过程中氢气对外作的功以及吸收的热量.



题 13 - 21 图

**分析** 这三个过程是教材中重点讨论的过程. 在  $p - V$  图上, 它们的过程曲线如图所示. 由图可知过程(1) 作功最多, 过程(3) 作功最少. 温度  $T_B > T_C > T_D$ , 而过程(3) 是绝热过程, 因此过程(1)和(2)均吸热, 且过程(1)吸热多. 具体计算时只需直接代有关公式即可.

**解** (1) 等压膨胀

$$W_p = p_A(V_B - V_A) = \frac{vRT_A}{V_A}(V_B - V_A) = RT_A = 2.49 \times 10^3 \text{ J}$$

$$Q_p = W_p + \Delta E = vC_{p,m}(T_B - T_A) = vC_{p,m}T_A = \frac{7R}{2}T_A = 8.73 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 等温膨胀

$$W_T = vRT \ln V_C / V_A = RT_A \ln 2 = 1.73 \times 10^3 \text{ J}$$

对等温过程  $\Delta E = 0$ , 所以  $Q_T = W_T = 1.73 \times 10^3 \text{ J}$

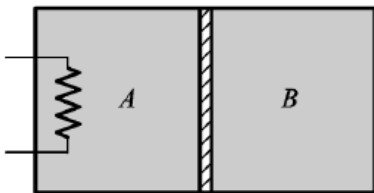
(3) 绝热膨胀

$$T_D = T_A (V_A / V_D)^{\gamma-1} = 300 \times (0.5)^{0.4} = 227.4 \text{ K}$$

对绝热过程  $Q_a = 0$ , 则有

$$W_a = -\Delta E = vC_{v,m}(T_A - T_D) = \frac{5R}{2}(T_A - T_D) = 1.51 \times 10^3 \text{ J}$$

**13 - 22** 绝热汽缸被一不导热的隔板均分成体积相等的A、B 两室, 隔板可无摩擦地平移, 如图所示. A、B 中各有1mol 氮气, 它们的温度都是  $T_0$ , 体积都是  $V_0$ . 现用A 室中的电热丝对气体加热, 平衡后A 室体积为B 室的两倍, 试求(1) 此时A、B 两室气体的温度; (2) A 中气体吸收的热量.



题 13-22 图

**分析** (1) B 室中气体经历的是一个绝热压缩过程, 遵循绝热方程  $TV^{\gamma-1} = \text{常数}$ , 由此可求出 B 中气体的末态温度  $T_B$ . 又由于 A、B 两室中隔板可无摩擦平移, 故 A、B 两室等压. 则由物态方程  $pV_A = \nu RT_A$  和  $pV_B = \nu RT_B$  可知  $T_A = 2T_B$ .

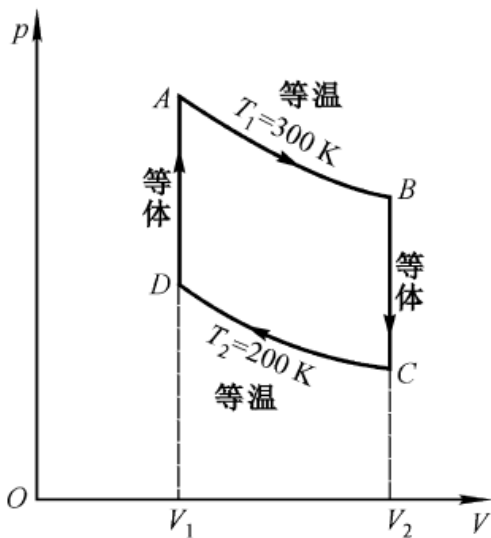
(2) 欲求 A 室中气体吸收的热量, 我们可以有两种方法. 方法一: 视 A、B 为整体, 那么系统(汽缸)对外不作功, 吸收的热量等于系统内能的增量. 即  $Q_A = \Delta E_A + \Delta E_B$ . 方法二: A 室吸热一方面提高其内能  $\Delta E_A$ , 另外对“外界”B 室作功  $W_A$ . 而对 B 室而言, 由于是绝热的, “外界”对它作的功就全部用于提高系统的内能  $\Delta E_B$ . 因而在数值上  $W_A = \Delta E_B$ . 同样得到  $Q_A = \Delta E_A + \Delta E_B$ .

**解** 设平衡后 A、B 中气体的温度、体积分别为  $T_A$ ,  $T_B$  和  $V_A$ ,  $V_B$ . 而由分析知压强  $p_A = p_B = p$ . 由题已知  $\begin{cases} V_A = 2V_B \\ V_A + V_B = 2V_0 \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} V_A = 4V_0/3 \\ V_B = 2V_0/3 \end{cases}$

(1) 根据分析, 对 B 室有  $V_0^{\gamma-1}T_0 = V_B^{\gamma-1}T_B$   
得  $T_B = (V_0/V_B)^{\gamma-1}T_0 = 1.176T_0$ ;  $T_A = T_B = 2.353T_0$

(2)  $Q_A = \Delta E_A + \Delta E_B = \frac{5R}{2}(T_A - T_0) + \frac{5R}{2}(T_B - T_0) = 31.7T_0$

**13-23** 0.32 kg 的氧气作如图所示的 ABCDA 循环,  $V_2 = 2V_1$ ,  $T_1 = 300\text{ K}$ ,  $T_2 = 200\text{ K}$ , 求循环效率.



题 13-23 图



**分析** 该循环是正循环.循环效率可根据定义式 $\eta=W/Q$ 来求出,其中 $W$ 表示一个循环过程系统作的净功, $Q$ 为循环过程系统吸收的总热量.

**解** 根据分析,因AB、CD为等温过程,循环过程中系统作的净功为

$$\begin{aligned} W &= W_{AB} + W_{CD} = \frac{m}{M} RT_1 \ln(V_1/V_2) \\ &= \frac{m}{M} R(T_1 - T_2) \ln(V_1/V_2) = 5.76 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

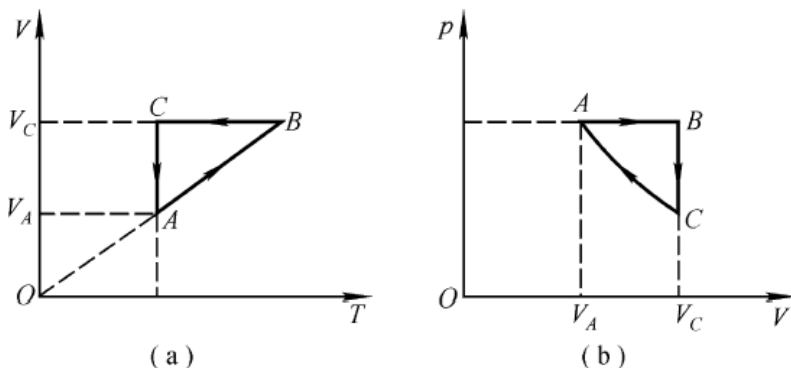
由于吸热过程仅在等温膨胀(对应于AB段)和等体升压(对应于DA段)中发生,而等温过程中 $\Delta E=0$ ,则 $Q_{AB}=W_{AB}$ .等体升压过程中 $W=0$ ,则 $Q_{DA}=\Delta E_{DA}$ ,所以,循环过程中系统吸热的总量为

$$\begin{aligned} Q &= Q_{AB} + Q_{DA} = W_{AB} + \Delta E_{DA} \\ &= \frac{m}{M} RT_1 \ln(V_2/V_1) + \frac{m}{M} C_{V,m}(T_1 - T_2) \\ &= \frac{m}{M} RT_1 \ln(V_2/V_1) + \frac{m}{M} \frac{5}{2} R(T_1 - T_2) \\ &= 3.81 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

由此得到该循环的效率为

$$\eta = W/Q = 15\%$$

**13-24** 图(a)是某单原子理想气体循环过程的 $V-T$ 图,图中 $V_C=2V_A$ .试问:(1)图中所示循环是代表制冷机还是热机?(2)如是正循环(热机循环),求出其循环效率.



题 13-24 图

**分析** 以正、逆循环来区分热机和制冷机是针对 $p-V$ 图中循环曲线行进方向而言的.因此,对图(a)中的循环进行分析时,一般要先将其转换为 $p-V$ 图.转换方法主要是通过找每一过程的特殊点,并利用理想气体物态方程来完成.由图(a)可以看出,BC为等体降温过程,CA为等温压缩过程;而对AB过程的分析,可以依据图中直线过原点来判别.其直线方程为 $V=CT$ , $C$ 为常数.将其与理想气体物态方程 $pV=m/MRT$ 比较可知该过程为等压膨胀过程(注意:如果直线不过原点,就不是等压过程).这样,就可得出 $p-V$ 图中的过程曲线,并可判别是正循环(热机循环)还是逆循环(制冷机循环),再参考题13-23的方法求出循环效率.

**解** (1) 根据分析,将 $V-T$ 图转换为相应的 $p-V$ 图,如图(b)所示.图中曲线行进方向是正

循环,即为热机循环.

(2) 根据得到的  $p-V$  图可知, AB 为等压膨胀过程,为吸热过程. BC 为等体降压过程, CA 为等温压缩过程,均为放热过程.故系统在循环过程中吸收和放出的热量分别为

$$Q_1 = \frac{m}{M} C_{p,m} (T_B - T_A)$$

$$Q_2 = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_B - T_A) + \frac{m}{M} R T_A \ln(V_C / V_A)$$

CA 为等温线,有  $T_A = T_C$ ; AB 为等压线,且因  $V_C = 2V_A$ ,则有  $T_A = T_B / 2$ .对单原子理想气体,其摩尔定压热容  $C_{p,m} = 5R/2$ ,摩尔定容热容  $C_{V,m} = 3R/2$ .故循环效率为

$$\eta = 1 - Q_2 / Q_1 = 1 - \left[ \frac{2}{3} T_A + T_A \ln 2 \right] / (5T_A / 2) = 1 - (3 + 2 \ln 2) / 5 = 12 / 3$$

**13 - 25** 一卡诺热机的低温热源温度为  $7^\circ\text{C}$ ,效率为  $40\%$ ,若要将其效率提高到  $50\%$ ,问高温热源的温度需提高多少?

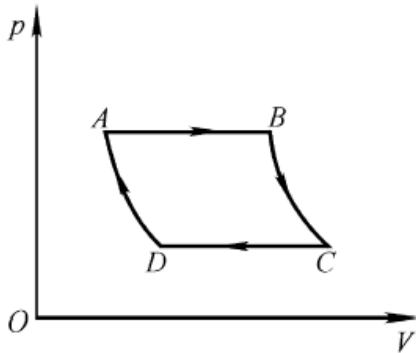
**解** 设高温热源的温度分别为  $T'_1$ 、 $T''_1$ ,则有

$$\eta' = 1 - T_2 / T'_1, \quad \eta'' = 1 - T_2 / T''_1$$

其中  $T_2$  为低温热源温度.由上述两式可得高温热源需提高的温度为

$$\Delta T = T''_1 - T'_1 = \left( \frac{1}{1 - \eta''} - \frac{1}{1 - \eta'} \right) T_2 = 93.3 \text{ K}$$

**13 - 26** 一定量的理想气体,经历如图所示的循环过程.其中 AB 和 CD 是等压过程, BC 和 DA 是绝热过程.已知 B 点温度  $T_B = T_1$ , C 点温度  $T_C = T_2$ . (1) 证明该热机的效率  $\eta = 1 - T_2 / T_1$ , (2) 这个循环是卡诺循环吗?



题 13 - 26 图

**分析** 首先分析判断循环中各过程的吸热、放热情况. BC 和 DA 是绝热过程,故  $Q_{BC}$ 、 $Q_{DA}$  均为零;而 AB 为等压膨胀过程(吸热)、CD 为等压压缩过程(放热),这两个过程所吸收和放出的热量均可由相关的温度表示.再利用绝热和等压的过程方程,建立四点温度之间的联系,最终可得到求证的形式.

**证** (1) 根据分析可知

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{\left| \frac{m}{M} C_{p,m} (T_D - T_C) \right|}{\frac{m}{M} C_{p,m} (T_B - T_A)} = 1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} \quad (1)$$

$$= 1 - \frac{T_C}{T_B} \left( 1 - \frac{T_D}{T_C} \right) / \left( 1 - \frac{T_A}{T_B} \right)$$

与求证的结果比较, 只需证得  $\frac{T_D}{T_C} = \frac{T_A}{T_B}$ . 为此, 对 AB、CD、BC、DA 分别列出过程方程如下

$$V_A / T_A = V_B / T_B \quad (2)$$

$$V_C / T_C = V_D / T_D \quad (3)$$

$$V_B^{\gamma-1} T_B = V_C^{\gamma-1} T_C \quad (4)$$

$$V_D^{\gamma-1} T_D = V_A^{\gamma-1} T_A \quad (5)$$

联立求解上述各式, 可证得

$$\eta = 1 - T_C / T_B = 1 - T_2 / T_1$$

(2) 虽然该循环效率的表达式与卡诺循环相似, 但并不是卡诺循环. 其原因是: ① 卡诺循环是由两条绝热线和两条等温线构成, 而这个循环则与卡诺循环不同; ② 式中  $T_1$ 、 $T_2$  的含意不同, 本题中  $T_1$ 、 $T_2$  只是温度变化中两特定点的温度, 不是两等温热源的恒定温度.

**13 - 27** 一小型热电厂内, 一台利用地热发电的热机工作于温度为  $227^\circ\text{C}$  的地下热源和温度为  $27^\circ\text{C}$  的地表之间. 假定该热机每小时能从地下热源获取  $1.8 \times 10^{11} \text{ J}$  的热量. 试从理论上计算其最大功率为多少?

**分析** 热机必须工作在最高的循环效率时, 才能获取最大的功率. 由卡诺定理可知, 在高温热源  $T_1$  和低温热源  $T_2$  之间工作的可逆卡诺热机的效率最高, 其效率为  $\eta = 1 - T_2 / T_1$ . 由于已知热机在确定的时间内吸取的热量, 故由效率与功率的关系式  $\eta = W / Q = pt / Q$ , 可得此条件下的最大功率.

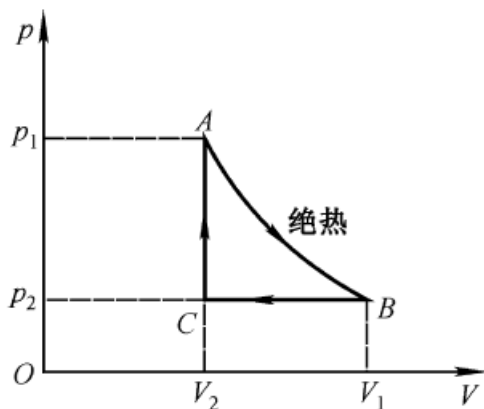
**解** 根据分析, 热机获得的最大功率为

$$p = \eta Q / t = (1 - T_2 / T_1) Q / t = 2.0 \times 10^7 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

**13 - 28** 有一以理想气体为工作物质的热机, 其循环如图所示, 试证明热

$$\eta = 1 - \gamma \frac{(V_1 / V_2) - 1}{(p_1 / p_2) - 1}$$

**分析** 该热机由三个过程组成, 图中 AB 是绝热过程, BC 是等压压缩过程, CA 是等体升压过程. 其中 CA 过程系统吸热, BC 过程系统放热. 本题可从效率定义  $\eta = 1 - Q_2 / Q_1 = 1 - Q_{BC} / Q_{CA}$  出发, 利用热力学第一定律和等体、等压方程以及  $\gamma = C_{p,m} / C_{v,m}$  的关系来证明.



题 13-28 图

证 该热机循环的效率为

$$\eta = 1 - Q_2 / Q_1 = 1 - Q_{BC} / Q_{CA}$$

其中  $Q_{BC} = m / MC_{p,m} (T_C - T_B)$ ,  $Q_{CA} = m / MC_{V,m} (T_A - T_C)$ , 则上式可写为

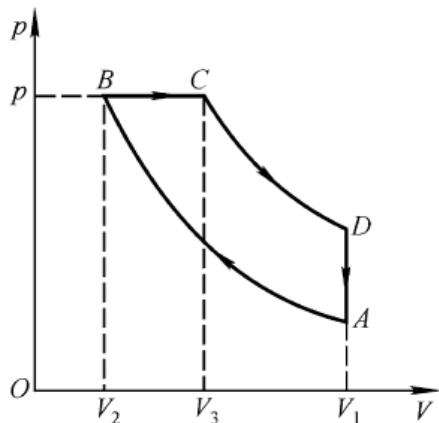
$$\eta = 1 - \gamma \frac{|T_C - T_B|}{T_A - T_C} = 1 - \gamma \frac{T_B / T_C - 1}{T_A / T_C - 1}$$

在等压过程BC 和等体过程CA 中分别有  $T_B / V_1 = T_C / V_2$ ,  $T_A / P_1 = T_C / P_2$  代入上式得

$$\eta = 1 - \gamma \frac{(V_1 / V_2) - 1}{(p_1 / p_2) - 1}$$

**13-29** 如图所示为理想的狄赛尔(Diesel)内燃机循环过程,它由两绝热线AB、CD和等压线BC及等体线DA组成.试证此内燃机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{(V_3 / V_2)^\gamma - 1}{\gamma (V_1 / V_2)^{\gamma-1} (V_3 / V_2 - 1)}$$



题 13-29 图

证 求证方法与题13-28相似.由于该循环仅在DA过程中放热、BC过程中吸热, 则热机效率为

$$\eta = 1 - |Q_{DA}|/Q_{BC} = 1 - \frac{\left| \frac{m}{M} C_{V,m} (T_D - T_A) \right|}{\frac{m}{M} C_{p,m} (T_C - T_B)}$$

$$= 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

在绝热过程AB中, 有  $T_A V_1^{\gamma-1} = T_B V_2^{\gamma-1}$ , 即

$$T_B/T_A = (V_1/V_2)^{\gamma-1} \quad (2)$$

在等压过程BC中, 有  $T_C/V_3 = T_B/V_2$ , 即

$$T_C/T_B = V_3/V_2 \quad (3)$$

再利用绝热过程CD, 得

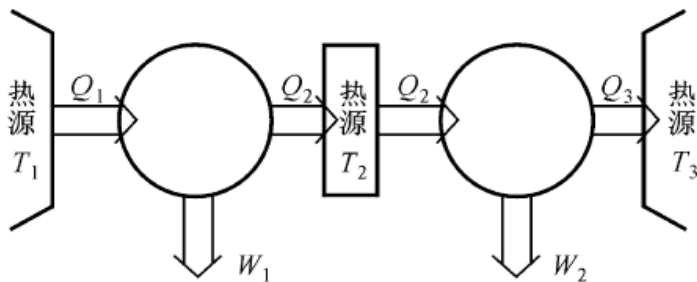
$$T_D V_1^{\gamma-1} = T_C V_3^{\gamma-1} \quad (4)$$

解上述各式, 可证得

$$\eta = 1 - \frac{(V_3/V_2)^{\gamma} - 1}{\gamma(V_1/V_2)^{\gamma-1}(V_3/V_2 - 1)}$$

**13 - 30** 如图所示, 将两部卡诺热机连接起来, 使从一个热机输出的热量, 输入到另一个热机中去. 设第一个热机工作在温度为  $T_1$  和  $T_2$  的两热源之间, 其效率为  $\eta_1$ , 而第二个热机工作在温度为  $T_2$  和  $T_3$  的两热源之间, 其效率为  $\eta_2$ . 如组合热机的总效率以  $\eta = (W_1 + W_2)/Q_1$  表示. 试证总效率表达式为

$$\eta = (1 - \eta_1)\eta_2 + \eta_1 \quad \text{或} \quad \eta = 1 - T_3/T_1$$



题 13 - 30 图

**分析** 按效率定义, 两热机单独的效率分别为  $\eta_1 = W_1/Q_1$  和  $\eta_2 = W_2/Q_2$ , 其中  $W_1 = Q_1 - Q_2$ ,  $W_2 = Q_2 - Q_3$ . 第一个等式的证明可采用两种方法: (1) 从等式右侧出发, 将  $\eta_1$ 、 $\eta_2$  的上述表达式代入, 即可得证. 读者可以一试. (2) 从等式左侧的组合热机效率  $\eta = (W_1 + W_2)/Q_1$  出发, 利用  $\eta_1$ 、 $\eta_2$  的表达式, 即可证明. 由于卡诺热机的效率只取决于两热源的溫度, 故只需分别将两个卡诺热机的效率表达式  $\eta_1 = 1 - T_2/T_1$  和  $\eta_2 = 1 - T_3/T_2$  代入第一个等式, 即可得到第二个等式.

**证** 按分析中所述方法(2) 求证. 因  $\eta_1 = W_1/Q_1$ 、 $\eta_2 = W_2/Q_2$ , 则组合热机效率

$$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1} = \frac{W_1}{Q_1} + \frac{W_2}{Q_1} = \eta_1 + \eta_2 \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

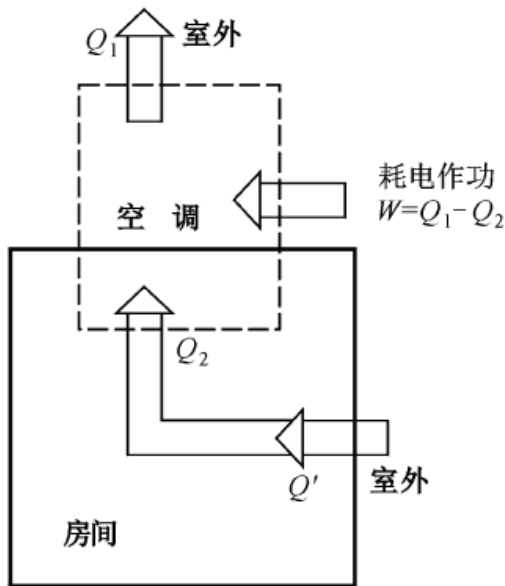
以  $Q_2 = Q_1 - W_1$  代入式(1), 可得证

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 (1 - \eta_1) \quad (2)$$

将  $\eta_1 = 1 - T_2 / T_1$  和  $\eta_2 = 1 - T_3 / T_2$  代入式(2), 亦可证得

$$\eta = 1 - T_2 / T_1 + (1 - T_3 / T_2) T_2 / T_1 = 1 - T_3 / T_1$$

**13 - 31** 在夏季, 假定室外温度恒定为  $37^\circ\text{C}$ , 启动空调使室内温度始终保持在  $17^\circ\text{C}$ . 如果每天有  $2.51 \times 10^8 \text{ J}$  的热量通过热传导等方式自室外流入室内, 则空调一天耗电多少? (设该空调制冷机的制冷系数为同条件下的卡诺制冷机制冷系数的60%)



题 13 - 31 图

**分析** 耗电量的单位为  $\text{kW} \cdot \text{h}$ ,  $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$ . 图示是空调的工作过程示意图. 因为卡诺制冷机的制冷系数为  $e_k = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ , 其中  $T_1$  为高温热源温度(室外环境温度),  $T_2$  为低温热源温度

(室内温度). 所以, 空调的制冷系数为

$$e = e_k \cdot 60\% = 0.6 T_2 / (T_1 - T_2)$$

另一方面, 由制冷系数的定义, 有

$$e = Q_2 / (Q_1 - Q_2)$$

其中  $Q_1$  为空调传递给高温热源的热量, 即空调向室外排放的总热量;  $Q_2$  是空调从房间内吸取的总热量. 若  $Q'$  为室外传进室内的热量, 则在热平衡时  $Q_2 = Q'$ . 由此, 就可以求出空调的耗电做功总值  $W = Q_1 - Q_2$ .

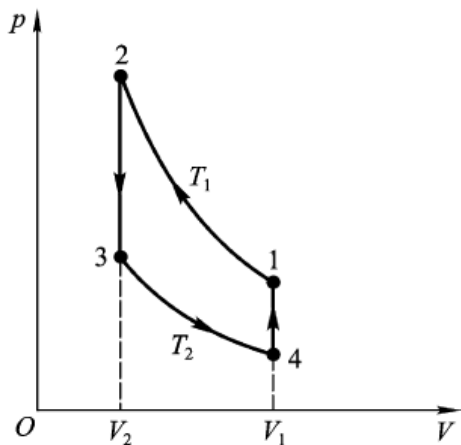
**解** 根据上述分析, 空调的制冷系数为

$$e = \frac{T_2}{T_1 - T_2} 60\% = 8.7$$

在室内温度恒定时, 有  $Q_2 = Q'$ . 由  $e = Q_2 / (Q_1 - Q_2)$  可得空调运行一天所耗电功

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_2 / e = Q' / e = 2.89 \times 10^7 = 8.0 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

**13 - 32** 一定量的理想气体进行如图所示的逆向斯特林循环(回热式制冷机中的工作循环), 其中  $1 \rightarrow 2$  为等温( $T_1$ )压缩过程,  $3 \rightarrow 4$  为等温( $T_2$ )膨胀过程, 其他两过程为等体过程. 求证此循环的制冷系数和逆向卡诺循环制冷系数相等.(这一循环是回热式制冷机中的工作循环, 具有较好的制冷效果.  $4 \rightarrow 1$  过程从热库吸收的热量在  $2 \rightarrow 3$  过程中又放回给了热库, 故均不计入循环系数计算.)



题 13 - 32 图

**证明**  $1 \rightarrow 2$  过程气体放热

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

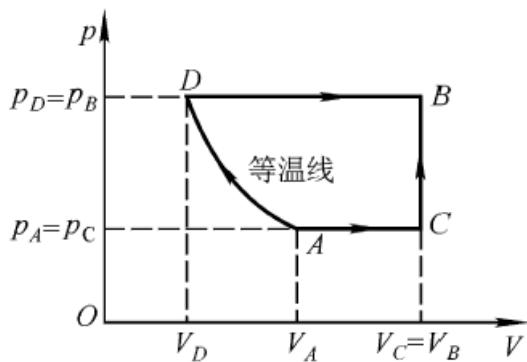
$3 \rightarrow 4$  过程气体吸热

$$Q_2 = \nu R T_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

则制冷系数  $e = Q_2 / (Q_1 - Q_2) = T_2 / (T_1 - T_2)$ .

与逆向卡诺循环的制冷系数相同.

**13 - 33** 物质的量为  $\nu$  的理想气体, 其摩尔定容热容  $C_{V,m} = 3R/2$ , 从状态 A( $p_A, V_A, T_A$ ) 分别经如图所示的 ADB 过程和 ACB 过程, 到达状态 B( $p_B, V_B, T_B$ ). 试问在这两个过程中气体的熵变各为多少? 图中 AD 为等温线.



题 13-33 图

**分析** 熵是热力学的状态函数, 状态A与B之间的熵变 $\Delta S_{AB}$ 不会因路径的不同而改变. 此外, ADB与ACB过程均由两个子过程组成. 总的熵变应等于各子过程熵变之和, 即 $\Delta S_{AB} = \Delta S_{AD} + \Delta S_{DB}$ 或 $\Delta S_{AB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB}$ .

**解** (1) ADB过程的熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S_{AB} &= \Delta S_{AD} + \Delta S_{DB} \\ &= \int_A^D dQ_T / T + \int_D^B dQ_p / T \\ &= \int_A^D dW_T / T + \int_D^B v C_{p,m} dT / T \\ &= vR \ln(V_D / V_A) + v C_{p,m} \ln(T_B / T_D)\end{aligned}\quad (1)$$

在等温过程AD中, 有 $T_D = T_A$ ; 等压过程DB中, 有 $V_B / T_B = V_D / T_D$ ; 而 $C_{p,m} = C_{v,m} + R$ , 故式(1)可改写为

$$\begin{aligned}\Delta S_{ADB} &= vR \ln(T_D V_B / T_B V_A) + v C_{p,m} \ln(T_B / V_A) \\ &= vR \ln(V_B / V_A) + \frac{3}{2} vR \ln(T_B / V_A)\end{aligned}$$

(2) ACB 过程的熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S_{ACB} &= \int_A^B dQ / T = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} \\ &= v C_{p,m} \ln(T_C / V_A) + v C_{v,m} \ln(T_B / T_C)\end{aligned}\quad (2)$$

利用 $V_C = V_B$ 、 $p_C = p_A$ 、 $T_C / V_C = T_A / V_A$ 及 $T_B / p_B = T_C / p_C$ , 则式(2)可写为

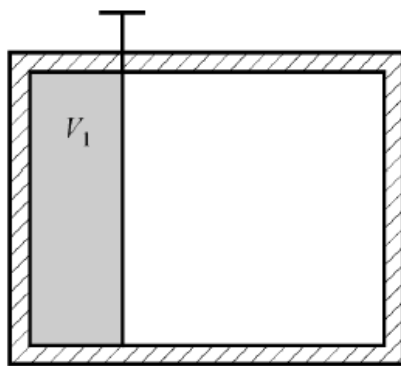
$$\begin{aligned}\Delta S_{ACB} &= v(C_{v,m} + R) \ln(V_B / V_A) + v \ln(p_B / p_A) \\ &= vR \ln(V_B / V_A) + v C_{v,m} \ln(p_B V_B / p_A V_A) \\ &= vR \ln(V_B / V_A) + \frac{3}{2} vR \ln(T_B / V_A)\end{aligned}$$

通过上述计算可看出, 虽然ADB及ACB两过程不同, 但熵变相同. 因此, 在计算熵变时, 可选取比较容易计算的途径进行.

**13-34** 有一体积为 $2.0 \times 10^{-2} \text{m}^3$ 的绝热容器, 用一隔板将其分为两部分, 如图所示. 开始时在左边(体积 $V_1 = 5.0 \times 10^{-3} \text{m}^3$ )一侧充有 $1 \text{mol}$ 理想气体, 右边一侧为真空. 现打开隔板让气体自由



膨胀而充满整个容器，求熵变。



题 13-34 图

**分析** 在求解本题时，要注意  $\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$  的适用条件。在绝热自由膨胀过程中， $dQ = 0$ ，若仍运用上式计算熵变，必然有  $\Delta S = 0$ 。显然，这是错误的结果。由于熵是状态的单值函数，当初态与末态不同时，熵变不应为零。出现上述错误的原因就是忽视了公式的适用条件。  $\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$  只适用于可逆过程，而自由膨胀过程是不可逆的。因此，在求解不可逆过程的熵变时，通常需要在初态与末态之间设计一个可逆过程，然后再按可逆过程熵变的积分式进行计算。在选取可逆过程时，尽量使其积分便于计算。

**解** 根据上述分析，在本题中因初末态时气体的体积  $V_1$ 、 $V_2$  均已知，且温度相同，故可选一可逆等温过程。在等温过程中， $dQ = dW = p dV$ ，而  $p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$ ，则熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{p dV}{T} = \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\ &= \frac{m}{M} R \ln(V_2 / V_1) = 11.52 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

## 第十四章 相对论

### 14 -1 下列说法中

- (1) 两个相互作用的粒子系统对某一惯性系满足动量守恒, 对另一个惯性系来说, 其动量不一定守恒;  
 (2) 在真空中, 光的速度与光的频率、光源的运动状态无关;  
 (3) 在任何惯性系中, 光在真空中沿任何方向的传播速率都相同.

其中哪些说法是正确的? ( )

- (A) 只有(1)、(2)是正确的 (B) 只有(1)、(3)是正确的  
 (C) 只有(2)、(3)是正确的 (D) 三种说法都是正确的

**分析与解** 物理相对性原理和光速不变原理是相对论的基础.前者是理论基础, 后者是实验基础.按照这两个原理, 任何物理规律(含题述动量守恒定律)对某一惯性系成立, 对另一惯性系也同样成立.而光在真空中的速度与光源频率和运动状态无关, 从任何惯性系(相对光源静止还是运动)测得光速均为 $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .迄今为止, 还没有实验能推翻这一事实.由此可见, (2)(3)说法是正确的, 故选(C).

### 14 -2 按照相对论的时空观, 判断下列叙述中正确的是( )

- (A) 在一个惯性系中两个同时的事件, 在另一惯性系中一定是同时事件  
 (B) 在一个惯性系中两个同时的事件, 在另一惯性系中一定是不同时事件  
 (C) 在一个惯性系中两个同时又同地的事件, 在另一惯性系中一定是同时同地事件  
 (D) 在一个惯性系中两个同时不同地的事件, 在另一惯性系中只可能同时不同地  
 (E) 在一个惯性系中两个同时不同地事件, 在另一惯性系中只可能同地不同时

**分析与解** 设在惯性系 S 中发生两个事件, 其时间和空间间隔分别为 $\Delta t$  和 $\Delta x$ , 按照洛伦兹坐标变换, 在 S'系中测得两事件时间和空间间隔分别为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{和} \quad \Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

讨论上述两式, 可对题述几种说法的正确性予以判断: 说法(A)(B)是不正确的, 这是因为在一个惯性系(如 S 系)发生的同时( $\Delta t=0$ )事件, 在另一个惯性系(如 S'系)中是否同时有两种可能, 这取决于那两个事件在 S 系中发生的地点是同地( $\Delta x=0$ )还是不同地( $\Delta x \neq 0$ ).说法(D)(E)也是不正确的, 由上述两式可知: 在 S 系发生两个同时( $\Delta t=0$ )不同地( $\Delta x \neq 0$ )事件, 在 S'系中一定是既不同时( $\Delta t' \neq 0$ )也不同地( $\Delta x' \neq 0$ ), 但是在 S 系中的两个同时同地事件, 在 S'系中一定是同时同地的, 故只有说法(C)正确.有兴趣的读者, 可对上述两式详加讨论, 以增加对相对论时空观的深入理解.

**14 -3** 有一细棒固定在 S'系中, 它与 $Ox'$ 轴的夹角 $\theta' = 60^\circ$ , 如果 S'系以速度 $u$  沿 $Ox$  方向相对于 S 系运动, S 系中观察者测得细棒与 $Ox$  轴的夹角( )

- (A) 等于 $60^\circ$  (B) 大于 $60^\circ$  (C) 小于 $60^\circ$   
 (D) 当 S'系沿 $Ox$  正方向运动时大于 $60^\circ$ , 而当 S'系沿 $Ox$  负方向运动时小于 $60^\circ$

**分析与解** 按照相对论的长度收缩效应,静止于  $S'$  系的细棒在运动方向的分量(即  $Ox$  轴方向)相对  $S$  系观察者来说将会缩短,而在垂直于运动方向上的分量不变,因此  $S$  系中观察者测得细棒与  $Ox$  轴夹角将会大于  $60^\circ$ ,此结论与  $S'$  系相对  $S$  系沿  $Ox$  轴正向还是负向运动无关.由此可见应选(C).

**14 -4** 一飞船的固有长度为  $L$ , 相对于地面以速度  $v_1$  作匀速直线运动,从飞船中的后端向飞船中的前端的一个靶子发射一颗相对于飞船的速度为  $v_2$  的子弹.在飞船上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是( ) ( $c$  表示真空中光速)

- (A)  $\frac{L}{v_1 + v_2}$  (B)  $\frac{L}{v_2 - v_1}$  (C)  $\frac{L}{v_2}$  (D)  $\frac{L}{v_1 \sqrt{1 - (v_1/c)^2}}$

**分析与解** 固有长度是指相对测量对象静止的观察者所测,则题中  $L$ 、 $v_2$  以及所求时间间隔均为同一参考系(此处指飞船)中的三个相关物理量,求解时与相对论的时空观无关.故选(C).

**讨论** 从地面测得的上述时间间隔为多少? 建议读者自己求解.注意此处要用到相对论时空观方面的规律了.

**14 -5** 设  $S'$  系以速率  $v=0.60c$  相对于  $S$  系沿  $xx'$  轴运动,且在  $t=t'=0$  时,  $x=x'=0$ . (1) 若有一事件,在  $S$  系中发生于  $t=2.0 \times 10^{-7} \text{ s}$ ,  $x=50 \text{ m}$  处,该事件在  $S'$  系中发生于何时? (2) 如有另一事件发生于  $S$  系中  $t=3.0 \times 10^{-7} \text{ s}$ ,  $x=10 \text{ m}$  处,在  $S'$  系中测得这两个事件的时间间隔为多少?

**分析** 在相对论中,可用一组时空坐标  $(x, y, z, t)$  表示一个事件.因此,本题可直接利用洛伦兹变换把两事件从  $S$  系变换到  $S'$  系中.

**解** (1) 由洛伦兹变换可得  $S'$  系的观察者测得第一事件发生的时刻为

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1.25 \times 10^{-7} \text{ s}$$

(2) 同理,第二个事件发生的时刻为

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 3.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

所以,在  $S'$  系中两事件的时间间隔为

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 2.25 \times 10^{-7} \text{ s}$$

**14 -6** 设有两个参考系  $S$  和  $S'$ , 它们的原点在  $t=0$  和  $t'=0$  时重合在一起.有一事件,在  $S'$  系中发生在  $t'=8.0 \times 10^{-8} \text{ s}$ ,  $x'=60 \text{ m}$ ,  $y'=0$ ,  $z'=0$  处.若  $S'$  系相对于  $S$  系以速率  $v=0.6c$  沿  $xx'$  轴运动,问该事件在  $S$  系中的时空坐标各为多少?

**分析** 本题可直接由洛伦兹逆变换将该事件从  $S'$  系转换到  $S$  系.

**解** 由洛伦兹逆变换得该事件在  $S$  系的时空坐标分别为

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 93 \text{ m}$$

$$y = y' = 0$$

$$z = z' = 0$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

**14 -7** 一列火车长0.30km(火车上观察者测得),以 $100\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ 的速度行驶,地面上观察者发现有两个闪电同时击中火车的前后两端.问火车上的观察者测得两闪电击中火车前后两端的时间间隔为多少?

**分析** 首先应确定参考系,如设地面为S系,火车为S'系,把两闪电击中火车前后端视为两个事件(即两组不同的时空坐标).地面观察者看到两闪电同时击中,即两闪电在S系中的时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ .火车的长度是相对火车静止的观察者测得的长度(注:物体长度在不指明观察者的情况下,均指相对其静止参考系测得的长度),即两事件在S'系中的空间间隔 $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0.30 \times 10^3 \text{ m}$ . S'系相对S系的速度即为火车速度(对初学者来说,完成上述基本分析是十分必要的).由洛伦兹变换可得两事件时间间隔之间的关系式为

$$t_2 - t_1 = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

将已知条件代入式(1)可直接解得结果.也可利用式(2)求解,此时应注意,式中 $x_2 - x_1$ 为地面观察者测得两事件的空间间隔,即S系中测得的火车长度,而不是火车原长.根据相对论,运动物体(火车)有长度收缩效应,即 $x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .考虑这一关系方可利用式(2)求解.

**解1** 根据分析,由式(1)可得火车(S'系)上的观察者测得两闪电击中火车前后端的时间间隔为

$$t'_2 - t'_1 = \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1) = -9.26 \times 10^{-14} \text{ s}$$

负号说明火车上的观察者测得闪电先击中车头 $x'_2$ 处.

**解2** 根据分析,把关系式 $x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 代入式(2)亦可得与解1相同的结果.相比之下解1较简便,这是因为解1中直接利用了 $x'_2 - x'_1 = 0.30\text{km}$ 这一已知条件.

**14 -8** 在惯性系S中,某事件A发生在 $x_1$ 处,经过 $2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$ 后,另一事件B发生在 $x_2$ 处,已知 $x_2 - x_1 = 300\text{m}$ .问:(1)能否找到一个相对S系作匀速直线运动的参考系S',在S'系中,两事件发生在同一地点?(2)在S'系中,上述两事件的时间间隔为多少?

**分析** 在相对论中,从不同惯性系测得两事件的空间间隔和时间间隔有可能是不同的.它与两惯性系之间的相对速度有关.设惯性系S'以速度 $v$ 相对S系沿 $x$ 轴正向运动,因在S系中两事件的时空坐标已知,由洛伦兹时空变换式,可得

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

两事件在  $S'$  系中发生在同一地点, 即  $x'_2 - x'_1 = 0$ , 代入式(1)可求出  $v$  值以此作匀速直线运动的  $S'$  系, 即为所寻找的参考系. 然后由式(2)可得两事件在  $S'$  系中的时间间隔. 对于本题第二问, 也可从相对论时间延缓效应来分析. 因为如果两事件在  $S'$  系中发生在同一地点, 则  $\Delta t'$  为固有时间间隔(原时), 由时间延缓效应关系式  $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$  可直接求得结果.

**解** (1) 令  $x'_2 - x'_1 = 0$ , 由式(1)可得

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1.50 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.50 c$$

(2) 将  $v$  值代入式(2), 可得

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1.73 \times 10^{-6} \text{ s}$$

这表明在  $S'$  系中事件A先发生.

**14 -9** 设在正负电子对撞机中, 电子和正电子以速度  $0.90c$  相向飞行, 它们之间的相对速度为多少?

**分析** 设对撞机为  $S$  系, 沿  $x$  轴正向飞行的正电子为  $S'$  系.  $S'$  系相对  $S$  系的速度  $v = 0.90c$ , 则另一电子相对  $S$  系速度  $u_x = -0.90c$ , 该电子相对  $S'$  系(即沿  $x$  轴正向飞行的电子)的速度  $u'_x$  即为题中所求的相对速度. 在明确题目所述已知条件及所求量的物理含义后, 即可利用洛伦兹速度变换式进行求解.

**解** 按分析中所选参考系, 电子相对  $S'$  系的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = -0.994 c$$

式中负号表示该电子沿  $x'$  轴负向飞行, 正好与正电子相向飞行.

**讨论** 若按照伽利略速度变换, 它们之间的相对速度为多少?

**14 -10** 设想有一粒子以  $0.050c$  的速率相对实验室参考系运动. 此粒子衰变时发射一个电子, 电子的速率为  $0.80c$ , 电子速度的方向与粒子运动方向相同. 试求电子相对实验室参考系的速度.

**分析** 这是相对论的速度变换问题. 取实验室为  $S$  系, 运动粒子为  $S'$  系, 则  $S'$  系相对  $S$  系的速度  $v = 0.050c$ . 题中所给的电子速率是电子相对衰变粒子的速率, 故  $u'_x = 0.80c$ .

**解** 根据分析, 由洛伦兹速度逆变换式可得电子相对  $S$  系的速度为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = 0.817 c$$

**14 -11** 设在宇航飞船中的观察者测得脱离它而去的航天器相对它的速度为  $1.2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 同时, 航天器发射一枚空间火箭, 航天器中的观察者测得此火箭相对它的速度为  $1.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 问: (1) 此火箭相对宇航飞船的速度为多少? (2) 如果以激光光束来替代空间火箭, 此激光光束相对宇航飞船的速度又为多少? 请将上述结果与伽利略速度变换所得结果相比较, 并理解光速是运动体的极限速度.

**分析** 该题仍是相对论速度变换问题.(2)中用激光束来替代火箭, 其区别在于激光束是以光速  $c$  相对航天器运动, 因此其速度变换结果应该与光速不变原理相一致.

**解** 设宇航飞船为  $S$  系, 航天器为  $S'$  系, 则  $S'$  系相对  $S$  系的速度  $v = 1.2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 空间火箭相对航天器的速度为  $u'_x = 1.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 激光束相对航天器的速度为光速  $c$ . 由洛伦兹变换可得:

(1) 空间火箭相对  $S$  系的速度为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = 1.94 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 激光束相对  $S$  系的速度为

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = c$$

即激光束相对宇航飞船的速度仍为光速  $c$ , 这是光速不变原理所预料的. 如用伽利略变换, 则有  $u_x = c + v > c$ . 这表明对伽利略变换而言, 运动物体没有极限速度, 但对相对论的洛伦兹变换来说, 光速是运动物体的极限速度.

**14 -12** 以速度  $v$  沿  $x$  方向运动的粒子, 在  $y$  方向上发射一光子, 求地面观察者所测得光子的速度.

**分析** 设地面为  $S$  系, 运动粒子为  $S'$  系. 与上题不同之处在于, 光子的运动方向与粒子运动方向不一致, 因此应先求出光子相对  $S$  系速度  $u$  的分量  $u_x$ 、 $u_y$  和  $u_z$ , 然后才能求  $u$  的大小和方向. 根据所设参考系, 光子相对  $S'$  系的速度分量分别为  $u'_x = 0$ ,  $u'_y = c$ ,  $u'_z = 0$ .

**解** 由洛伦兹速度的逆变换式可得光子相对  $S$  系的速度分量分别为

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = v \\ u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = c \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ u_z &= 0 \end{aligned}$$

所以, 光子相对  $S$  系速度  $u$  的大小为

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = c$$

速度  $u$  与  $x$  轴的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{u_y}{u_x} = \arctan \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{v}$$

**讨论** 地面观察者所测得光子的速度仍为 $c$ , 这也是光速不变原理的必然结果.但在不同惯性参考系中其速度的方向却发生了变化.

**14 -13** 设想地球上有一观察者测得一宇宙飞船以 $0.60c$  的速率向东飞行,  $5.0\text{ s}$  后该飞船将与一个以 $0.80c$ 的速率向西飞行的彗星相碰撞.试问: (1) 飞船中的人测得彗星将以多大的速率向它运动? (2) 从飞船中的钟来看, 还有多少时间允许它离开航线, 以避免与彗星碰撞?

**分析** (1) 这是一个相对论速度变换问题.取地球为 $S$ 系, 飞船为 $S'$ 系, 向东为 $x$ 轴正向.则 $S'$ 系相对 $S$ 系的速度 $v=0.60c$ , 彗星相对 $S$ 系的速度 $u_x = -0.80c$ , 由洛伦兹速度变换可得所求结果.

(2) 可从下面两个角度考虑:

a. 以地球为 $S$ 系, 飞船为 $S'$ 系.设 $x_0=x'_0=0$  时 $t_0=t'_0=0$ , 飞船与彗星相碰这一事件在 $S$ 系中的时空坐标为 $t=5.0\text{ s}$ ,  $x=vt$ .利用洛伦兹时空变换式可求出 $t'$ , 则 $\Delta t'=t'-t'_0$ 表示飞船与彗星相碰所经历的时间.

b. 把 $t_0=t'_0=0$  时的飞船状态视为一个事件, 把飞船与彗星相碰视为第二个事件.这两个事件都发生在 $S'$ 系中的同一地点(即飞船上), 飞船上的观察者测得这两个事件的时间间隔 $\Delta t'$ 为固有时, 而地面观察者所测得上述两事件的时间间隔 $\Delta t=5.0\text{ s}$ 比固有时要长, 根据时间延缓效应可求出 $\Delta t'$ .

**解** (1) 由洛伦兹速度变换得彗星相对 $S'$ 系的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = -0.946c$$

即彗星以 $0.946c$ 的速率向飞船靠近.

(2) 飞船与彗星相碰这一事件在 $S'$ 系中的时刻为

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 4.0\text{ s}$$

即在飞船上看, 飞船与彗星相碰发生在时刻 $t'=4.0\text{ s}$ .也可以根据时间延缓效应 $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5.0\text{ s}$ , 解得 $\Delta t'=4.0\text{ s}$ , 即从飞船上的钟来看, 尚有 $4.0\text{ s}$ 时间允许它离开原来的航线.

**14 -14** 在惯性系 $S$ 中观察到有两个事件发生在同一地点, 其时间间隔为 $4.0\text{ s}$ , 从另一惯性系 $S'$ 中观察到这两个事件的时间间隔为 $6.0\text{ s}$ , 试问从 $S'$ 系测量到这两个事件的空间间隔是多少? 设 $S'$ 系以恒定速率相对 $S$ 系沿 $xx'$ 轴运动.

**分析** 这是相对论中同地不同时的两事件的时空转换问题.可以根据时间延缓效应的关系式先求出 $S'$ 系相对 $S$ 系的运动速度 $v$ , 进而得到两事件在 $S'$ 系中的空间间隔 $\Delta x' = v\Delta t'$ (由洛伦兹时空变换同样可得到此结果).

**解** 由题意知在 S 系中的时间间隔为固有的, 即  $\Delta t = 4.0 \text{ s}$ , 而  $\Delta t' = 6.0 \text{ s}$ . 根据时间延缓效应的关系式  $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ , 可得 S' 系相对 S 系的速度为

$$v = \left[ 1 - \left( \frac{\Delta t}{\Delta t'} \right)^2 \right]^{1/2} c = \frac{\sqrt{5}}{3} c$$

两事件在 S' 系中的空间间隔为

$$\Delta x' = v \Delta t' = 1.34 \times 10^9 \text{ m}$$

**14 -15** 在惯性系 S 中, 有两个事件同时发生在  $xx'$  轴上相距为  $1.0 \times 10^3 \text{ m}$  的两处, 从惯性系 S' 观测到这两个事件相距为  $2.0 \times 10^3 \text{ m}$ , 试问由 S' 系测得此两事件的时间间隔为多少?

**分析** 这是同时不同地的两事件之间的时空转换问题. 由于本题未给出 S' 系相对 S 系的速度  $v$ , 故可由不同参考系中两事件空间间隔之间的关系求得  $v$ , 再由两事件时间间隔的关系求出两事件在 S' 系中的时间间隔.

**解** 设此两事件在 S 系中的时空坐标为  $(x_1, 0, 0, t_1)$  和  $(x_2, 0, 0, t_2)$ , 且有  $x_2 - x_1 = 1.0 \times 10^3 \text{ m}$ ,  $t_2 - t_1 = 0$ . 而在 S' 系中, 此两事件的时空坐标为  $(x'_1, 0, 0, t'_1)$  和  $(x'_2, 0, 0, t'_2)$ , 且  $|x'_2 - x'_1| = 2.0 \times 10^3 \text{ m}$ , 根据洛伦兹变换, 有

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

由式(1)可得

$$v = \left[ 1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x'_2 - x'_1)^2} \right]^{1/2} c = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

将  $v$  值代入式(2), 可得

$$|t'_2 - t'_1| = 5.77 \times 10^{-6} \text{ s}$$

**14 -16** 有一固有长度为  $l_0$  的棒在 S 系中沿  $x$  轴放置, 并以速率  $u$  沿  $xx'$  轴运动. 若有一 S' 系以速率  $v$  相对 S 系沿  $xx'$  轴运动, 试问从 S' 系测得此棒的长度为多少?

**分析** 当棒相对观察者(为 S' 系)存在相对运动时, 观察者测得棒的长度要比棒的固有长度  $l_0$  短, 即  $l = l_0 \sqrt{1 - u'^2/c^2}$ . 式中  $u'$  是棒相对观察者的速度, 而不要误认为一定是 S' 系和 S 系之间的相对速度  $v$ . 在本题中, 棒并非静止于 S 系, 因而 S' 系与 S 系之间的相对速度  $v$  并不是棒与 S' 系之间的相对速度  $u'$ . 所以本题应首先根据洛伦兹速度变换式求  $u'$ , 再代入长度收缩公式求  $l$ .

**解** 根据分析, 有

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (1)$$



$$l = l_0 \sqrt{1 - u'^2 / c^2} \quad (2)$$

解上述两式, 可得

$$l = \frac{l_0}{c^2 - uv} [(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)]^{1/2}$$

**14 -17** 若从一惯性系中测得宇宙飞船的长度为其固有长度的一半, 试问宇宙飞船相对此惯性系的速度为多少? (以光速  $c$  表示)

**解** 设宇宙飞船的固有长度为  $l_0$ , 它相对于惯性系的速率为  $v$ , 而从此惯性系测得宇宙飞船的长度为  $l_0/2$ , 根据洛伦兹长度收缩公式, 有

$$l_0/2 = l_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

可解得

$$v = 0.866c$$

**14 -18** 一固有长度为  $4.0 \text{ m}$  的物体, 若以速率  $0.60c$  沿  $x$  轴相对某惯性系运动, 试问从该惯性系来测量, 此物体的长度为多少?

**解** 由洛伦兹长度收缩公式

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 3.2 \text{ m}$$

**\*14 -19** 设一宇航飞船以  $a = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  的恒加速度, 沿地球径向背离地球而去, 试估计由于谱线的红移, 经多少时间, 飞船的宇航员用肉眼观察不到地球上的霓虹灯发出的红色信号.

**分析** 霓虹灯发出的红色信号所对应的红光波长范围一般为  $620 \text{ nm} \sim 760 \text{ nm}$ , 当飞船远离地球而去时, 由光的多普勒效应可知, 宇航员肉眼观察到的信号频率  $\nu < \nu_0$ , 即  $\lambda > \lambda_0$ , 其中  $\nu_0$  和  $\lambda_0$  为霓虹灯的发光频率和波长. 很显然, 当  $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$ , 而对应的红限波长  $\lambda = 760 \text{ nm}$  时, 霓虹灯发出的红色信号, 其波长刚好全部进入非可见光范围, 即宇航员用肉眼观察不到红色信号. 因此, 将上述波长的临界值代入多普勒频移公式, 即可求得宇航员观察不到红色信号时飞船的最小速率  $v$ , 再由运动学关系, 可求得飞船到达此速率所需的时间  $t$ .

**解** 当光源和观察者背向运动时, 由光的多普勒效应频率公式

$$\nu = \nu_0 \left( \frac{c - v}{c + v} \right)^{1/2}$$

得波长公式

$$\lambda = \lambda_0 \left( \frac{c + v}{c - v} \right)^{1/2}$$

式中  $v$  为飞船相对地球的速率. 令  $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$ ,  $\lambda = 760 \text{ nm}$ , 得宇航员用肉眼观察不到地球上红色信号时飞船的最小速率为

$$v = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} = 0.60 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

飞船达此速率所需的时间为

$$t = \frac{v}{a} = 6.1 \times 10^6 \text{ s} \approx 0.20 \text{ a}$$

**14 -20** 若一电子的总能量为5.0MeV, 求该电子的静能、动能、动量和速率.

**分析** 粒子静能 $E_0$  是指粒子在相对静止的参考系中的能量,  $E_0 = m_0 c^2$ , 式中 $m_0$ 为粒子在相对静止的参考系中的质量.就确定粒子来说,  $E_0$  和 $m_0$ 均为常数(对于电子, 有 $m_0 = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $E_0 = 0.512 \text{ MeV}$ ).本题中由于电子总能量 $E > E_0$ , 因此, 该电子相对观察者所在的参考系还应具有动能, 也就具有相应的动量和速率.由相对论动能定义、动量与能量关系式以及质能关系式, 即可解出结果.

**解** 电子静能为  $E_0 = m_0 c^2 = 0.512 \text{ MeV}$

电子动能为  $E_K = E - E_0 = 4.488 \text{ MeV}$

由  $E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$ , 得电子动量为

$$p = \frac{1}{c} (E^2 - E_0^2)^{1/2} = 2.66 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由  $E = E_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$  可得电子速率为

$$v = c \left( \frac{E^2 - E_0^2}{E^2} \right)^{1/2} = 0.995 c$$

**14 -21** 一被加速器加速的电子, 其能量为 $3.00 \times 10^9 \text{ eV}$ .试问: (1) 这个电子的质量是其静质量的多少倍? (2) 这个电子的速率为多少?

**解** (1) 由相对论质能关系  $E = mc^2$  和  $E_0 = m_0 c^2$  可得电子的动质量 $m$  与静质量 $m_0$ 之比为

$$\frac{m}{m_0} = \frac{E}{E_0} = \frac{E}{m_0 c^2} = 5.86 \times 10^3$$

(2) 由相对论质速关系式  $m = m_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$  可解得

$$v = \left[ 1 - \left( \frac{m_0}{m} \right)^2 \right]^{1/2} c = 0.999999985 c$$

可见此时的电子速率已十分接近光速了.

**14 -22** 在电子偶的湮没过程中, 一个电子和一个正电子相碰撞而消失, 并产生电磁辐射. 假定正负电子在湮没前均静止, 由此估算辐射的总能量 $E$ .

**分析** 在相对论中, 粒子的相互作用过程仍满足能量守恒定律, 因此辐射总能量应等于电子偶湮没前两电子总能之和.按题意电子偶湮没前的总能只是它们的静能之和.

**解** 由分析可知, 辐射总能量为

$$E = 2m_0 c^2 = 1.64 \times 10^{-13} \text{ J} = 1.02 \text{ MeV}$$

**14 -23** 若把能量 $0.50 \times 10^6 \text{ eV}$ 给予电子, 让电子垂直于磁场运动, 其运动径迹是半径为

2.0cm 的圆.问: (1) 该磁场的磁感强度 $B$  有多大? (2) 这电子的动质量为静质量的多少倍?

**分析** (1) 电子在匀强磁场中作匀速圆周运动时, 其向心力为洛伦兹力 $F = evB$ , 在轨道半径 $R$  确定时,  $B=B(p)$ , 即磁感强度是电子动量的函数. 又由相对论的动能公式和动量与能量的关系可知电子动量 $p=p(E_0, E_K)$ , 题中给予电子的能量即电子的动能 $E_K$ , 在电子静能 $E = m_0 c^2$  已知的情况下, 由上述关系可解得结果.

(2) 由相对论的质能关系可得动质量和静质量之比. 本题中电子的动能 $E_K=0.50 \text{ MeV}$  与静能 $E_0=0.512 \text{ MeV}$  接近, 已不能用经典力学的方法计算电子的动量或速度, 而必须用相对论力学. 事实上当 $E_K = 0.50 E_0$  时, 用经典力学处理已出现不可忽略的误差.

**解** (1) 根据分析, 有

$$E = E_0 + E_K \quad (1)$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad (2)$$

$$evB = m \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

联立求解上述三式, 可得

$$B = \frac{\sqrt{E_K^2 + 2E_0 E_K}}{eRc}$$

(2) 由相对论质能关系, 可得

$$\frac{m}{m_0} = \frac{E}{E_0} = 1 + \frac{E_K}{E_0} = 1.98$$

本题也可以先求得电子速率 $v$  和电子动质量 $m$ , 但求解过程较繁.

**14-24** 如果将电子由静止加速到速率为 $0.10c$ , 需对它作多少功? 如将电子由速率为 $0.80c$  加速到 $0.90c$ , 又需对它作多少功?

**分析** 在相对论力学中, 动能定理仍然成立, 即 $W = \Delta E_K = \Delta E_{K2} - E_{K1}$ , 但需注意动能 $E_K$  不能用 $\frac{1}{2}mv^2$  表示.

**解** 由相对论性的动能表达式和质速关系可得当电子速率从 $v_1$  增加到 $v_2$ 时, 电子动能的增量为

$$\begin{aligned} \Delta E_K &= \Delta E_{K2} - E_{K1} = (m_2 c^2 - m_0 c^2) - (m_1 c^2 - m_0 c^2) \\ &= m_0 c^2 \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{v_2}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} - \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \end{aligned}$$

根据动能定理, 当 $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0.10c$  时, 外力所作的功为

$$W = \Delta E_K = 2.58 \times 10^3 \text{ eV}$$

当 $v_1 = 0.80c$ ,  $v_2 = 0.90c$  时, 外力所作的功为

$$W' = \Delta E'_K = 3.21 \times 10^5 \text{ eV}$$

由计算结果可知, 虽然同样将速率提高 $0.1c$ , 但后者所作的功比前者要大得多, 这是因为随着速率的增大, 电子的质量也增大.

## 第十五章 量子物理

15 -1 下列物体哪个是绝对黑体( )

- (A) 不辐射可见光的物体 (B) 不辐射任何光线的物体  
(C) 不能反射可见光的物体 (D) 不能反射任何光线的物体

**分析与解** 一般来说,任何物体对外来辐射同时会有三种反应:反射、透射和吸收,各部分的比例与材料、温度、波长有关.同时任何物体在任何温度下会同时对外辐射,实验和理解证明:一个物体辐射能力正比于其吸收能力.做为一种极端情况,绝对黑体(一种理想模型)能将外来辐射(可见光或不可见光)全部吸收,自然也就不会反射任何光线,同时其对外辐射能力最强.综上所述应选(D).

15 -2 光电效应和康普顿效应都是光子和物质原子中的电子相互作用过程,其区别何在?在下面几种理解中,正确的是( )

- (A) 两种效应中电子与光子组成的系统都服从能量守恒定律和动量守恒定律  
(B) 光电效应是由于电子吸收光子能量而产生的,而康普顿效应则是由于电子与光子的弹性碰撞过程  
(C) 两种效应都相当于电子与光子的弹性碰撞过程  
(D) 两种效应都属于电子吸收光子的过程

**分析与解** 两种效应都属于电子与光子的作用过程,不同之处在于:光电效应是由于电子吸收光子而产生的,光子的能量和动量会在电子以及束缚电子的原子、分子或固体之间按照适当的比例分配,但仅就电子和光子而言,两者之间并不是一个弹性碰撞过程,也不满足能量和动量守恒.而康普顿效应中的电子属于“自由”电子,其作用相当于一个弹性碰撞过程,作用后的光子并未消失,两者之间满足能量和动量守恒.综上所述,应选(B).

15 -3 关于光子的性质,有以下说法

- (1) 不论真空中或介质中的速度都是 $c$ ; (2) 它的静止质量为零;  
(3) 它的动量为 $\frac{h\nu}{c}$ ; (4) 它的总能量就是它的动能;  
(5) 它有动量和能量,但没有质量.

其中正确的是( )

- (A) (1)(2)(3) (B) (2)(3)(4)  
(C) (3)(4)(5) (D) (3)(5)

**分析与解** 光不但具有波动性还具有粒子性,一个光子在真空中速度为 $c$  (与惯性系选择无关),在介质中速度为 $\frac{c}{n}$ ,它有质量、能量和动量,一个光子的静止质量 $m_0 = 0$ ,运动质量

$$m = \frac{h\nu}{c^2}, \text{ 能量 } E = h\nu, \text{ 动量 } p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}, \text{ 由于光子的静止质量为零,故它的静能 } E_0 \text{ 为零,}$$

所以其总能量表现为动能.综上所述,说法(2)、(3)、(4)都是正确的,故选(B).

15 -4 关于不确定关系 $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ 有以下几种理解:

- (1) 粒子的动量不可能确定,但坐标可以被确定;

- (2) 粒子的坐标不可能确定, 但动量可以被确定;  
 (3) 粒子的动量和坐标不可能同时确定;  
 (4) 不确定关系不仅适用于电子和光子, 也适用于其他粒子.

其中正确的是( )

- (A) (1)、(2)                      (B) (2)、(4)  
 (C) (3)、(4)                      (D) (4)、(1)

**分析与解** 由于一切实物粒子具有波粒二象性, 因此粒子的动量和坐标(即位置)不可能同时被确定, 在这里不能简单误认为动量不可能被确定或位置不可能被确定. 这一关系式在理论上适用于一切实物粒子(当然对于宏观物体来说, 位置不确定量或动量的不确定量都微不足道, 故可以认为可以同时被确定). 由此可见(3)、(4)说法是正确的. 故选(C).

**15 -5** 已知粒子在一维矩形无限深势阱中运动, 其波函数为

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi}{a} x \quad (0 \leq x \leq a)$$

那么粒子在  $x = a/6$  处出现的概率密度为( )

- (A)  $\sqrt{2}/\sqrt{a}$                       (B)  $1/a$                       (C)  $2/a$                       (D)  $1/\sqrt{a}$

**分析与解** 我们通常用波函数  $\Psi$  来描述粒子的状态, 虽然波函数本身并无确切的物理含义, 但其模的平方  $|\psi(x)|^2$  表示粒子在空间各点出现的概率. 因此题述一维粒子在  $0 \leq x \leq a$  区间的概率密度函数应为  $|\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{3\pi}{a} x$ . 将  $x = a/6$  代入即可得粒子在此处出现的概率为  $2/a$ . 故选(C).

**15 -6** 下述说法中, 正确的是( )

- (A) 本征半导体是电子与空穴两种载流子同时参与导电, 而杂质半导体(n 型或p 型)只有一种载流子(电子或空穴)参与导电, 所以本征半导体导电性能比杂质半导体好  
 (B) n型半导体的导电性能优于p 型半导体, 因为n 型半导体是负电子导电, p 型半导体是正离子导电  
 (C) n型半导体中杂质原子所形成的局部能级靠近导带的底部, 使局部能级中多余的电子容易被激发跃迁到导带中去, 大大提高了半导体导电性能  
 (D) p 型半导体的导电机构完全取决于满带中空穴的运动

**分析与解** 按照能带理论, 半导体的导电性能取决于其能带结构和载流子的浓度, 本征半导体虽有两种载流子, 但其浓度远远低于杂质半导体, 故导电性能较杂质半导体差. 而杂质半导体中的 n 型和 p 型半导体的区别在于多数载流子的种类不同, 导电性能并无优劣之分. 故(A)(B)说法不正确. 对掺杂半导体而言, 掺杂使载流子的浓度大为增加, n 型半导体的多数载流子为电子, 5价杂质原子形成的局部能级(施主能级)靠近导带底部, 热激发很容易使施主能级中的多余电子激发跃迁到导带(基本上为空带)中去, 从而提高导电性能. p 型半导体多数载流子为空穴, 3价杂质原子形成的局部能级(受主能级)靠近价带顶部, 热激发同样容易使价带(基本上为满带)中的电子跃迁到受主能级上, 从而使价带成为非满带, 增加了 p 型半导体的导电性, 由此可见说

法(C) 表述是完全正确的.

**15 -7** 在激光器中利用光学谐振腔( )

- (A) 可提高激光束的方向性, 而不能提高激光束的单色性
- (B) 可提高激光束的单色性, 而不能提高激光束的方向性
- (C) 可同时提高激光束的方向性和单色性
- (D) 既不能提高激光束的方向性也不能提高其单色性

**分析与解** 在光学谐振腔中, 凡是与腔轴方向不一致的激光会通过腔壁发散, 剩下仅与腔轴同向的激光, 因此可大大提高激光束的方向性. 同时在振荡过程中, 参与振荡的激光又在不断诱发高能原子产生新的激光, 这种由受激辐射出的光子与外来光子同频率、同偏振状态, 因此振荡过程在提高激光束能量的同时还能提高其单色性, 由此可见应选(C).

**15 -8** 天狼星的温度大约是11 000 °C. 试由维恩位移定律计算其辐射峰值的波长.

**解** 由维恩位移定律可得天狼星单色辐出度的峰值所对应的波长

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ nm}$$

该波长属紫外区域, 所以天狼星呈紫色.

**15 -9** 太阳可看作是半径为  $7.0 \times 10^8 \text{ m}$  的球形黑体, 试计算太阳的温度. 设太阳射到地球表面上的辐射能量为  $1.4 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$ , 地球与太阳间的距离为  $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ .

**分析** 以太阳为中心, 地球与太阳之间的距离  $d$  为半径作一球面, 地球处在该球面的某一位置上. 太阳在单位时间内对外辐射的总能量将均匀地通过该球面, 因而可根据地球表面单位面积在单位时间内接受的太阳辐射能量  $E$ , 计算出太阳单位时间单位面积辐射的总能量  $M(T)$ , 再由公式  $M(T) = \sigma T^4$ , 计算太阳温度.

**解** 根据分析有

$$M(T) = \frac{4\pi d^2 E}{4\pi R^2} \quad (1)$$

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$T = \left( \frac{d^2 E}{R^2 \sigma} \right)^{1/2} = 5800 \text{ K}$$

**15 -10** 钨的逸出功是4.52eV, 钡的逸出功是2.50eV, 分别计算钨和钡的截止频率. 哪一种金属可以用作可见光范围内的光电管阴极材料?

**分析** 由光电效应方程  $h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W$  可知, 当入射光频率  $\nu = \nu_0$  (式中  $\nu_0 = W/h$ ) 时, 电子刚能逸出金属表面, 其初动能  $\frac{1}{2}mv^2 = 0$ . 因此  $\nu_0$  是能产生光电效应的入射光的最低频率(即截止频率), 它与材料的种类有关. 由于可见光频率处在  $0.395 \times 10^{15} \sim 0.75 \times 10^{15} \text{ Hz}$  的狭小范围内, 因此不是所有的材料都能作为可见光范围内的光电管材料的(指光电管中发射电子用的阴极材料).

**解** 钨的截止频率  $\nu_{01} = \frac{W_1}{h} = 1.09 \times 10^{15} \text{ Hz}$

钡的截止频率  $\nu_{02} = \frac{W_2}{h} = 0.603 \times 10^{15} \text{ Hz}$

对照可见光的频率范围可知, 钡的截止频率  $\nu_{02}$  正好处于该范围内, 而钨的截止频率  $\nu_{01}$  大于可见光的最大频率, 因而钡可以用于可见光范围内的光电管材料.

**15 -11** 钾的截止频率为  $4.62 \times 10^{14} \text{ Hz}$ , 今以波长为  $435.8 \text{ nm}$  的光照射, 求钾放出的光电子的初速度.

**解** 根据光电效应的爱因斯坦方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W$$

其中

$$W = h\nu_0, \quad \nu = c/\lambda$$

可得电子的初速度

$$v = \left[ \frac{2h}{m} \left( \frac{c}{\lambda} - \nu_0 \right) \right]^{1/2} = 5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由于逸出金属的电子的速度  $v \ll c$ , 故式中  $m$  取电子的静止质量.

**15 -12** 在康普顿效应中, 入射光子的波长为  $3.0 \times 10^{-3} \text{ nm}$ , 反冲电子的速度为光速的 60%, 求散射光子的波长及散射角.

**分析** 首先由康普顿效应中的能量守恒关系式  $h\frac{c}{\lambda_0} + m_0c^2 = h\frac{c}{\lambda} + mc^2$ , 可求出散射光子

的波长  $\lambda$ , 式中  $m$  为反冲电子的运动质量, 即  $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . 再根据康普顿散射公式  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$ , 求出散射角  $\theta$ , 式中  $\lambda_c$  为康普顿波长 ( $\lambda_c = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ ).

**解** 根据分析有

$$h\frac{c}{\lambda_0} + m_0c^2 = h\frac{c}{\lambda} + mc^2 \quad (1)$$

$$m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (2)$$

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad (3)$$

由式(1)和式(2)可得散射光子的波长

$$\lambda = \frac{4h\lambda_0}{4h - \lambda_0 m_0 c} = 4.35 \times 10^{-3} \text{ m}$$

将  $\lambda$  值代入式(3), 得散射角

$$\theta = \arccos\theta \left( 1 - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_c} \right) = \arccos 0.444 = 63^\circ 36'$$

**15 -13** 一具有  $1.0 \times 10^4 \text{ eV}$  能量的光子, 与一静止的自由电子相碰撞, 碰撞后, 光子的散射角为  $60^\circ$ . 试问: (1) 光子的波长、频率和能量各改变多少? (2) 碰撞后, 电子的动能、动量和运动方向又如何?

**分析** (1) 可由光子能量  $E = h\nu$  及康普顿散射公式直接求得光子波长、频率和能量的改变

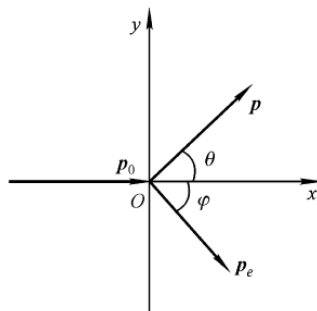
量.

(2) 应全面考虑康普顿效应所服从的基本规律, 包括碰撞过程中遵循能量和动量守恒定律, 以及相对论效应. 求解时应注意以下几点:

① 由能量守恒可知, 反冲电子获得的动能  $E_{ke}$  就是散射光子失去的能量, 即  $E_{ke} = h\nu_0 - h\nu$ .

② 由相对论中粒子的能量动量关系式, 即  $E_e^2 = E_{0e}^2 + p_e^2 c^2$  和  $E_e = E_{0e} + E_{ke}$ , 可求得电子的动量  $p_e$ . 注意式中  $E_{0e}$  为电子静能, 其值为  $0.512 \text{ MeV}$ .

③ 如图所示, 反冲电子的运动方向可由动量守恒定律在  $Oy$  轴上的分量式求得, 即  $\frac{h\nu}{c} \sin \theta - p_e \sin \varphi = 0$ .



题 15-13 图

**解** (1) 入射光子的频率和波长分别为

$$\nu_0 = \frac{E}{h} = 2.41 \times 10^{18} \text{ Hz}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 0.124 \text{ nm}$$

散射前后光子波长、频率和能量的改变量分别为

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) = 1.22 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

$$\Delta \nu = \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_0} = c \left[ \frac{1}{\lambda + \lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right] = -2.30 \times 10^{16} \text{ Hz}$$

$$\Delta E = h\nu - h\nu_0 = h\Delta \nu = -1.525 \times 10^{-17} \text{ J} = -95.3 \text{ eV}$$

式中负号表示散射光子的频率要减小, 与此同时, 光子也将失去部分能量.

(2) 根据分析, 可得

电子动能

$$E_{ke} = h\nu - h\nu_0 = |\Delta E| = 95.3 \text{ eV}$$

电子动量

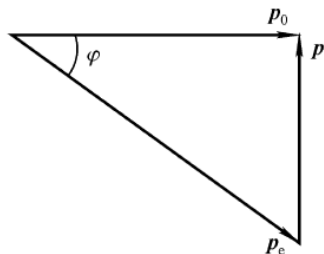
$$p_e = \frac{\sqrt{E_{ke}^2 + 2E_{0e}E_{ke}}}{c} = 5.27 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电子运动方向

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{h\nu}{p_e c} \sin \theta \right) = \arcsin \left[ \frac{h(\nu_0 + \Delta \nu)}{p_e c} \sin \theta \right] = 59^\circ 32'$$

**15-14** 波长为  $0.10 \text{ nm}$  的辐射, 照射在碳上, 从而产生康普顿效应. 从实验中测量到散射辐射的方向与入射辐射的方向相垂直. 求: (1) 散射辐射的波长; (2) 反冲电子的动能和运动方向.





题 15-14 图

解 (1) 由散射公式得

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta) = 0.1024 \text{ nm}$$

(2) 反冲电子的动能等于光子失去的能量, 因此有

$$E_k = hv_0 - hv = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = 4.66 \times 10^{-17} \text{ J}$$

根据动量守恒的矢量关系(如图所示), 可确定反冲电子的方向

$$\varphi = \arctan\left(\frac{h}{\lambda} / \frac{h}{\lambda_0}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) = 44^\circ 18'$$

**15-15** 试求波长为下列数值的光子的能量、动量及质量: (1) 波长为 1 500 nm 的红外线; (2) 波长为 500 nm 的可见光; (3) 波长为 20 nm 的紫外线; (4) 波长为 0.15 nm 的 X 射线; (5) 波长为  $1.0 \times 10^{-3} \text{ nm}$  的  $\gamma$  射线.

解 由能量  $E = hv$ , 动量  $p = \frac{h}{\lambda}$  以及质能关系式  $m = \frac{E}{c^2}$ , 可得

$$(1) \text{ 当 } \lambda_1 = 1\,500 \text{ nm 时, } E_1 = hv = \frac{hc}{\lambda_1} = 1.33 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = 4.42 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_1 = \frac{E_1}{c^2} = \frac{h}{c\lambda_1} = 1.47 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

(2) 当  $\lambda_2 = 500 \text{ nm}$  时, 因  $\lambda_2 = 1/3\lambda_1$ , 故有

$$E_2 = 3E_1 = 3.99 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$p_2 = 3p_1 = 1.33 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_2 = 3m_1 = 4.41 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

(3) 当  $\lambda_3 = 20 \text{ nm}$  时, 因  $\lambda_3 = 1/75\lambda_1$ , 故有

$$E_3 = 75E_1 = 9.97 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$p_3 = 75p_1 = 3.31 \times 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_3 = 75m_1 = 1.10 \times 10^{-34} \text{ kg}$$

(4) 当  $\lambda_4 = 0.15 \text{ nm}$  时, 因  $\lambda_4 = 10^{-4}\lambda_1$ , 故有

$$E_4 = 10^4 E_1 = 1.13 \times 10^{-15} \text{ J}$$

$$p_4 = 104p_1 = 4.42 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_4 = 104m_1 = 1.47 \times 10^{-32} \text{ kg}$$

$$(5) \text{ 当 } \lambda_5 = 1 \times 10^{-3} \text{ nm} \text{ 时, } E_5 = \frac{hc}{\lambda_5} = 1.99 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$p_5 = \frac{h}{\lambda_5} = 6.63 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_5 = \frac{h}{c\lambda_5} = 2.21 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

**15 —16** 计算氢原子光谱中莱曼系的最短和最长波长, 并指出是否为可见光.

**分析** 氢原子光谱规律为

$$\frac{1}{\lambda} = R \left[ \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right]$$

式中  $n_f = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n_i = n_f + 1, n_f + 2, \dots$ . 若把氢原子的众多谱线按  $n_f = 1, 2, 3, \dots$  归纳为若干谱线系, 其中  $n_f = 1$  为莱曼系,  $n_f = 2$  就是最早被发现的巴耳末系, 所谓莱曼系的最长波长是指  $n_i = 2$ , 所对应的光谱线的波长, 最短波长是指  $n_i \rightarrow \infty$  所对应的光谱线的波长, 莱曼系的其他谱线均分布在上述波长范围内. 式中  $R$  的实验值常取  $1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ . 此外本题也可由频率条件  $h\nu = E_f - E_i$  计算.

$$\text{解 莱曼系的谱线满足 } \frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad n_i = 2, 3, 4, \dots$$

令  $n_i = 2$ , 得该谱系中最长的波长  $\lambda_{\max} = 121.5 \text{ nm}$

令  $n_i \rightarrow \infty$ , 得该谱系中最短的波长  $\lambda_{\min} = 91.2 \text{ nm}$

对照可见光波长范围 (400 ~ 760 nm), 可知莱曼系中所有的谱线均不是可见光, 它们处在紫外线部分.

**15 —17** 在玻尔氢原子理论中, 当电子由量子数  $n_i = 5$  的轨道跃迁到  $n_f = 2$  的轨道上时, 对外辐射光的波长为多少? 若再将该电子从  $n_f = 2$  的轨道跃迁到游离状态, 外界需要提供多少能量?

**分析** 当原子中的电子在高能量  $E_i$  的轨道与低能量  $E_f$  的轨道之间跃迁时, 原子对外辐射或吸收外界的能量, 可用公式  $\Delta E = E_i - E_f$  或  $\Delta E = E_f - E_i$  计算. 对氢原子来说,  $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ , 其

中  $E_1$  为氢原子中基态 ( $n = 1$ ) 的能量, 即  $E_1 = -Rhc = -13.6 \text{ eV}$ , 电子从  $n_f = 2$  的轨道到达游离状态时所需的能量, 就是指电子由轨道  $n_f = 2$  跃迁到游离态  $n_i \rightarrow \infty$  时所需能量, 它与电子由基态 ( $n_f = 1$ ) 跃迁到游离态  $n_i = \infty$  时所需的能量 (称电离能) 是有区别的, 后者恰为  $13.6 \text{ eV}$ .

**解** 根据氢原子辐射的波长公式, 电子从  $n_i = 5$  跃迁到  $n_f = 2$  轨道状态时对外辐射光的波长满足

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right)$$

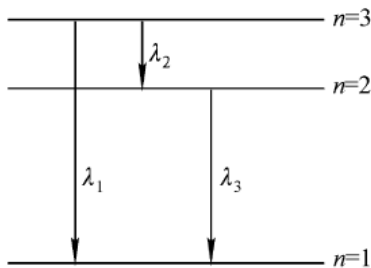
则  $\lambda = 4.34 \times 10^{-7} \text{ m} = 434 \text{ nm}$

而电子从  $n_f = 2$  跃迁到游离态  $n_i \rightarrow \infty$  所需的能量为

$$\Delta E = E_2 - E_\infty = \frac{E_1}{2^2} - \frac{E_1}{\infty} = -3.4 \text{ eV}$$

负号表示电子吸收能量.

**15 -18** 如用能量为  $12.6 \text{ eV}$  的电子轰击氢原子, 将产生哪些谱线?



题 15 -18 图

**分析** 氢原子可以从对它轰击的高能粒子上吸收能量而使自己从较低能级(一般在不指明情况下均指基态)激发到较高的能级, 但吸收的能量并不是任意的, 而是必须等于氢原子两个能级间的能量差. 据此, 可算出被激发氢原子可跃迁到的最高能级为  $n_i = 3$ . 但是, 激发态都是不稳定的, 其后, 它又会自发跃迁回基态, 如图所示, 可以有  $3 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 2$  和  $2 \rightarrow 1$  三种可能的辐射.

**解** 根据分析有

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{E_1}{n_f^2} - \frac{E_1}{n_i^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (2)$$

将  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ ,  $n_f = 1$  和  $\Delta E = -12.6 \text{ eV}$  (这是受激氢原子可以吸收的最多能量) 代入式(1), 可得  $n_i = 3.69$ , 取整  $n_i = 3$  (想一想为什么?), 即此时氢原子处于  $n = 3$  的状态. 由式(2)可得氢原子回到基态过程中的三种可能辐射(见分析)所对应的谱线波长分别为  $102.6 \text{ nm}$ 、 $657.9 \text{ nm}$  和  $121.6 \text{ nm}$ .

**15 -19** 试证在基态氢原子中, 电子运动时的等效电流为  $1.05 \times 10^{-3} \text{ A}$ , 在氢原子核处, 这个电流产生的磁场的磁感强度为多大?

**分析** 根据经典的原子理论, 基态氢原子中的电子在第一玻尔半径  $r_1$  上绕核作圆周运动 ( $r_1 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ ), 绕核运动的频率  $f = \frac{v_1}{2\pi r_1}$  式中  $v_1$  为基态时电子绕核运动的速度,

$$v_1 = \frac{h}{2\pi m r_1}, \text{ 由此可得电子运动的等效电流 } I = ef \text{ 以及它在核处激发的磁感强度 } B = \frac{\mu_0 I}{2r_1}.$$

**解** 根据分析, 电子绕核运动的等效电流为

$$I = ef = \frac{ev_1}{2\pi r_1} = \frac{eh}{4\pi^2 m r_1^2} = 1.05 \times 10^{-3} \text{ A}$$

该圆形电流在核处的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r_1} = 12.5 \text{ T}$$

上述过程中电子的速度  $v \ll c$ , 故式中  $m$  取电子的静止质量.

**15 -20** 已知  $\alpha$  粒子的静质量为  $6.68 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 求速率为  $5\,000 \text{ km s}^{-1}$  的  $\alpha$  粒子的德布罗意波长.

**分析** 在本题及以后几题求解的过程中, 如实物粒子运动速率远小于光速 (即  $v \ll c$ ) 或动能远小于静能 (即  $E_k \ll E_0$ ), 均可利用非相对论方法处理, 即认为  $m \approx m_0$  和  $p^2 = 2m_0 E_k$ .

**解** 由于  $\alpha$  粒子运动速率  $v \ll c$ , 故有  $m = m_0$ , 则其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} = 1.99 \times 10^{-5} \text{ nm}$$

**15 -21** 求动能为  $1.0 \text{ eV}$  的电子的德布罗意波的波长.

**解** 由于电子的静能  $E_0 = m_0 c^2 = 0.512 \text{ MeV}$ , 而电子动能  $E_k \ll E_0$ , 故有  $p = (2m_0 E_k)^{1/2}$ , 则其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{(2m_0 E_k)^{1/2}} = 1.23 \text{ nm}$$

**15 -22** 求温度为  $27^\circ \text{C}$  时, 对应于方均根速率的氧气分子的德布罗意波的波长.

**解** 理想气体分子的方均根速率  $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ . 对应的氧分子的德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\sqrt{\bar{v}^2}} = \frac{N_A h}{\sqrt{3MRT}} = 2.58 \times 10^{-2} \text{ nm}$$

**15 -23** 若电子和光子的波长均为  $0.20 \text{ nm}$ , 则它们的动量和动能各为多少?

**分析** 光子的静止质量  $m_0 = 0$ , 静能  $E_0 = 0$ , 其动能、动量均可由德布罗意关系式  $E = h\nu$ ,  $p = \frac{h}{\lambda}$  求得. 而对电子来说, 动能  $E_k = E - E_0 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 < pc$ . 本题中因电子的  $pc (6.22 \text{ keV}) \ll E_0 (0.512 \text{ MeV})$ , 所以  $E_k \ll E_0$ , 因而可以不考虑相对论效应, 电子的动能可用公式  $E_k = \frac{p^2}{2m_0}$  计算.

**解** 由于光子与电子的波长相同, 它们的动量均为

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3.22 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

光子的动能

$$E_k = E = pc = 6.22 \text{ eV}$$

电子的动能

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} = 37.8 \text{ eV}$$

**讨论** 用电子束代替可见光做成的显微镜叫电子显微镜. 由上述计算可知, 对于波长相同的光子与电子来说, 电子的动能小于光子的动能. 很显然, 在分辨率相同的情况下 (分辨率  $\propto 1/\lambda$ ), 电子束对样品损害较小, 这也是电子显微镜优于光学显微镜的一个方面.

**15 —24** 用德布罗意波, 仿照弦振动的驻波公式来求解一维无限深方势阱中自由粒子的能量与动量表达式.

**分析** 设势阱宽度为 $a$ , 当自由粒子在其间运动时, 根据德布罗意假设, 会形成两列相向而行的物质波. 由于波的强度、波长相同, 最终会形成驻波, 相当于两端固定的弦驻波, 且有 $a = n \frac{\lambda}{2}$ , 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ . 由德布罗意关系式 $\lambda = \frac{h}{p}$ 和非相对论情况下的动能的关系式 $E_k = \frac{p^2}{2m}$ 即可求解. 其结果与用量子力学求得的结果相同. 虽然推导不甚严格, 但说明上述处理方法有其内在的合理性与科学性, 是早期量子论中常用的一种方法, 称为“驻波法”.

**解** 根据分析, 势阱的自由粒子来回运动, 就相当于物质波在区间 $a$ 内形成了稳定的驻波, 由两端固定弦驻波的条件可知, 必有 $a = n \frac{\lambda}{2}$ , 即

$$\lambda = \frac{2a}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由德布罗意关系式 $\lambda = \frac{h}{p}$ , 可得自由粒子的动量表达式

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由非相对论的动量与动能表达式 $E = \frac{p^2}{2m}$ , 可得自由粒子的能量表达式

$$E = \frac{n^2 p^2}{8ma^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

从上述结果可知, 此时自由粒子的动量和能量都是量子化的.

**15 —25** 电子位置的不确定量为 $5.0 \times 10^{-2} \text{ nm}$ 时, 其速率的不确定量为多少?

**分析** 量子论改变了我们对于自然现象的传统认识, 即我们不可能对粒子的行为做出绝对性的断言. 不确定关系式 $\Delta x \Delta p_x \geq h$ 严格的表述应为 $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$ 就是关于不确定性的一种量子规律. 由上述基本关系式还可引出其他的不确定关系式, 如 $\Delta L \Delta \varphi \geq h$  ( $\Delta \varphi$ 为粒子角位置的不确定量,  $\Delta L \varphi$ 为粒子角动量的不确定量),  $\Delta E \Delta t \geq h$  ( $\Delta t$ 为粒子在能量状态 $E$ 附近停留的时间, 又称平均寿命,  $\Delta E$ 为粒子能量的不确定量, 又称能级的宽度)等等, 不论是对粒子行为做定性分析, 还是定量估计(一般指数量级), 不确定关系式都很有用.

**解** 因电子位置的不确定量 $\Delta x = 5 \times 10^{-2} \text{ nm}$ , 由不确定关系式以及 $\Delta p_x = m \Delta v_x$ 可得电子速率的不确定量

$$\Delta v_x = \frac{h}{m \Delta x} = 1.46 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**15 —26** 铀核的线度为 $7.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ . 求其中一个质子的动量和速度的不确定量.

**分析** 粒子的线度一般是指它的直径, 由于质子处于铀核内, 因此铀核的半径 $r$ 可视为质子位置的不确定量, 由不确定关系式可得质子动量和速度的不确定量.

**解** 对质子来说, 其位置的不确定量  $\Delta r = \frac{7.2 \times 10^{-15}}{2} \text{ m} = 3.6 \times 10^{-15} \text{ m}$ , 由不确定关系式  $\Delta r \Delta p \geq h$  以及  $\Delta p = m \Delta v$ , 可得质子动量和速度的不确定量分别为

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta r} = 1.84 \times 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} = 1.10 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**15 -27** 一质量为40 g 的子弹以  $1.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速率飞行, 求: (1) 其德布罗意波的波长; (2) 若子弹位置的不确定量为0.10 mm, 求其速率的不确定量.

**解** (1) 子弹的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 1.66 \times 10^{-35} \text{ m}$$

(2) 由不确定关系式以及  $\Delta p_x = m \Delta v_x$  可得子弹速率的不确定量为

$$\Delta v = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{h}{m \Delta x} = 1.66 \times 10^{-28} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**讨论** 由于  $h$  值极小, 其数量级为  $10^{-34}$ , 故不确定关系式只对微观粒子才有实际意义, 对于宏观物体, 其行为可以精确地预言.

**\*15 -28** 试证: 如果粒子位置的不确定量等于其德布罗意波长, 则此粒子速度的不确定量大于或等于其速度.

**证** 由题意知, 位置不确定量  $\Delta x = \lambda$ , 由不确定关系式可得  $\Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} = \frac{h}{\lambda}$ , 而  $\Delta v = \frac{\Delta p}{m}$ ,

故速度的不确定量

$$\Delta v \geq \frac{h}{m \lambda} = \frac{p}{m}, \text{ 即 } \Delta v \geq v$$

**15 -29** 氦氖激光器所发红光波长为  $\lambda = 6328 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 谱线宽度  $\Delta \lambda = 10^{-18} \text{ m}$ , 求: 当这种光子沿  $x$  轴方向传播时, 它的  $x$  坐标的不确定量有多大?

**分析** 光子亦具有波粒二象性, 所以也应满足不确定关系, 本题首先应根据不确定关系式导出一个光子坐标的不确定量与其状态 ( $\lambda$  和  $\Delta \lambda$ ) 之间的关系式.

**解** 沿  $x$  轴方向传播的激光的动量为

$$p_x = \frac{h}{\lambda}$$

两边微分可得动量不确定量大小为

$$|\Delta p_x| = \frac{h}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

式中  $\Delta \lambda$  即为谱线宽度, 根据不确定关系得

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

代入已知数据可得其坐标的不确定量  $\Delta x = 4 \times 10^5 \text{ m} = 400 \text{ km}$ . 式中  $\frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$  为相干长度 (即波列长

度), 该式说明激光光子坐标的不确定量就是波列长度. 由于波列长度很大, 因而激光是相干性极好的新型光源.

**15 -30** 已知一维运动粒子的波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} A x e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

式中  $\lambda > 0$ , 试求: (1) 归一化常数  $A$  和归一化波函数; (2) 该粒子位置坐标的概率分布函数(又称概率密度); (3) 在何处找到粒子的概率最大.

**分析** 描述微观粒子运动状态的波函数  $\psi(x)$ , 并不像经典波那样代表什么实在的物理量, 而是刻画粒子在空间的概率分布, 我们用  $|\psi(x)|^2$  表示粒子在空间某一点附近单位体积元内出现的概率, 又称粒子位置坐标的概率分布函数, 由于粒子在空间所有点出现的概率之和恒为 1, 即  $\int_V |\psi(x)|^2 dV = 1$  (本题为  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ ), 称为归一化条件. 由此可确定波函数中的待定常数  $A$  和被归一化后的波函数, 然后针对概率分布函数  $|\psi(x)|^2$ , 采用高等数学中常用的求极值的方法, 可求出粒子在空间出现的概率最大或最小的位置.

**解** (1) 由归一化条件  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ , 有

$$\int_{-\infty}^0 0^2 dx + \int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1$$

$$A = 2\lambda^{3/2} \quad (\text{注: 利用积分公式 } \int_0^{\infty} y^2 e^{-by} dy = \frac{2}{b^3})$$

经归一化后的波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 2\lambda\sqrt{\lambda} x e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(2) 粒子的概率分布函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 2\lambda\sqrt{\lambda} x e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

式中  $\lambda > 0$ , 试求: (1) 归一化常数  $A$  和归一化波函数; (2) 该粒子位置坐标的概率分布函数(又称概率密度); (3) 在何处找到粒子的概率最大.

**分析** 描述微观粒子运动状态的波函数  $\psi(x)$ , 并不像经典波那样代表什么实在的物理量, 而是刻画粒子在空间的概率分布, 我们用  $|\psi(x)|^2$  表示粒子在空间某一点附近单位体积元内出现的概率, 又称粒子位置坐标的概率分布函数, 由于粒子在空间所有点出现的概率之和恒为 1, 即  $\int_V |\psi(x)|^2 dV = 1$  (本题为  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ ), 称为归一化条件. 由此可确定波函数中的待定常数  $A$  和被归一化后的波函数, 然后针对概率分布函数  $|\psi(x)|^2$ , 采用高等数学中常用的求极值的方法, 可求出粒子在空间出现的概率最大或最小的位置.

**解** (1) 由归一化条件  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ , 有

$$\int_{-\infty}^0 0^2 dx + \int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1$$

$$A = 2\lambda^{3/2} \text{ (注: 利用积分公式 } \int_0^{\infty} y^2 e^{-by} dy = \frac{2}{b^3} \text{)}$$

经归一化后的波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 2\lambda\sqrt{\lambda}xe^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(2) 粒子的概率分布函数为

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} 4\lambda^3 x^2 e^{-2\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(3) 令  $\frac{d(|\psi(x)|^2)}{dx} = 0$ , 有  $4\lambda^3(2xe^{-2\lambda x} - 2\lambda xe^{-2\lambda x}) = 0$ , 得  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{\lambda}$  和  $x \rightarrow \infty$  时, 函数

$|\psi(x)|^2$  有极值. 由二阶导数  $\left. \frac{d(|\psi(x)|^2)}{dx} \right|_{x=\frac{1}{\lambda}} = 0$  可知, 在  $x = \frac{1}{\lambda}$  处,  $|\psi(x)|^2$  有最大值, 即粒子在该

处出现的概率最大.

**15 - 31** 设有一电子在宽为  $0.20\text{nm}$  的一维无限深的方势阱中. (1) 计算电子在最低能级的能量; (2) 当电子处于第一激发态( $n = 2$ )时, 在势阱中何处出现的概率最小, 其值为多少?

**解** (1) 一维无限深势阱中粒子的可能能量  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$ , 式中  $a$  为势阱宽度, 当量子

数  $n = 1$  时, 粒子处于基态, 能量最低. 因此, 电子在最低能级的能量为

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2} = 1.51 \times 10^{-18} \text{J} = 9.43 \text{eV}$$

(2) 粒子在无限深方势阱中的波函数为

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

当它处于第一激发态( $n = 2$ )时, 波函数为

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi}{a} x, \quad 0 \leq x \leq a$$

相应的概率密度函数为

$$|\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi}{a} x, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \frac{d(|\psi(x)|^2)}{dx} &= 0, \text{ 得} \\ \frac{8\pi}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} &= 0 \end{aligned}$$

在  $0 \leq x \leq a$  的范围内讨论可得, 当  $x = 0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3}{4}a$  和  $a$  时, 函数  $|\psi(x)|^2$  取得极值. 由  $\frac{d(|\psi(x)|^2)}{dx} > 0$



可知, 函数在  $x=0$ ,  $x=a/2$  和  $x=a$  (即  $x=0, 0.10 \text{ nm}, 0.20 \text{ nm}$ ) 处概率最小, 其值均为零.

**15-32** 在线度为  $1.0 \times 10^{-5} \text{ m}$  的细胞中有许多质量为  $m = 1.0 \times 10^{-17} \text{ kg}$  的生物粒子, 若将生物粒子作为微观粒子处理, 试估算该粒子的  $n=100$  和  $n=101$  的能级和能级差各是多大.

**分析** 一般情况下, 该粒子被限制在细胞内运动, 可把粒子视为无限深势阱中的粒子. 作为估算, 可按一维无限深方势阱粒子处理, 势阱宽度  $a = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

**解** 由分析可知, 按一维无限深方势阱这一物理模型计算, 可得

$$n=100 \text{ 时, } E_1 = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = 5.49 \times 10^{-37} \text{ J}$$

$$n=101 \text{ 时, } E_2 = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = 5.60 \times 10^{-37} \text{ J}$$

它们的能级差  $\Delta E = E_2 - E_1 = 0.11 \times 10^{-37} \text{ J}$

**15-33** 一电子被限制在宽度为  $1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$  的一维无限深势阱中运动. (1) 欲使电子从基态跃迁到第一激发态, 需给它多少能量? (2) 在基态时, 电子处于  $x_1 = 0.090 \times 10^{-10} \text{ m}$  与  $x_2 = 0.110 \times 10^{-10} \text{ m}$  之间的概率近似为多少? (3) 在第一激发态时, 电子处于  $x_1' = 0$  与  $x_2' = 0.25 \times 10^{-10} \text{ m}$  之间的概率为多少?

**分析** 设一维粒子的波函数为  $\psi(x)$ , 则  $|\psi(x)|^2$  表示粒子在一维空间内的概率密度,  $|\psi(x)|^2 dx$  则表示粒子在  $x \sim x+dx$  间隔内出现的概率, 而  $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$  则表示粒子在  $x_1 \sim x_2$  区间内出现的概率. 如  $x_1 \sim x_2$  区间的间隔  $\Delta x$  较小, 上述积分可近似用  $|\psi(x)|^2 \Delta x$  代替, 其中  $|\psi(x)|^2$  取  $x_1$  和  $x_2$  之间中点位置  $c$  处的概率密度作为上述区间内的平均概率密度. 这是一种常用的近似计算的方法.

**解** (1) 电子从基态 ( $n=1$ ) 跃迁到第一激发态 ( $n=2$ ) 所需能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = n_2^2 \frac{h^2}{8ma^2} - n_1^2 \frac{h^2}{8ma^2} = 112 \text{ eV}$$

(2) 当电子处于基态 ( $n=1$ ) 时, 电子在势阱中的概率密度为  $|\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi}{a} x$ , 所求区间宽度  $\Delta x = x_2 - x_1$ , 区间的中心位置  $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , 则电子在所求区间的概率近似为

$$p_1 = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx \approx |\psi(x_c)|^2 \Delta x = \frac{2}{a} \sin^2 \left[ \frac{\pi}{a} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \right] (x_2 - x_1) \\ = 3.8 \times 10^{-3}$$

(3) 同理, 电子在第一激发态 ( $n=2$ ) 的概率密度为  $|\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi}{a} x$ , 则电子在所求区间的概率近似为

$$p_2 = \frac{2}{a} \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{x_1' + x_2'}{2} \right] (x_1' - x_2') = 0.25$$

**15-34** 在描述原子内电子状态的量子数  $n, l, m_l$  中, (1) 当  $n=5$  时,  $l$  的可能值是多

少? (2) 当  $l=5$  时,  $m_l$  的可能值为多少? (3) 当  $l=4$  时,  $n$  的最小可能值是多少? (4) 当  $n=3$  时, 电子可能状态数为多少?

**分析** 微观粒子状态的描述可用能量、角动量、角动量的空间取向、自旋角动量和自旋角动量的空间取向所对应的量子数来表示, 即用一组量子数  $(n, l, m_l, s, m_s)$  表示一种确定状态. 由于电子自旋量子数  $s$  恒为  $1/2$ , 故区别电子状态时只需用 4 个量子数即  $n, l, m_l$  和  $m_s$ , 其中  $n$  可取大于零的任何整数值, 而  $l, m_l$  和  $m_s$  的取值则受到一定的限制, 如  $n$  取定后,  $l$  只能为  $0, 1, \dots, (n-1)$ , 共可取  $n$  个值;  $l$  取定后,  $m_l$  只能为  $0, \pm 1, \dots, \pm l$ , 共可取  $2l+1$  个值; 而  $m_s$  只可取  $\pm 1/2$  两个值. 上述 4 个量子数中只要有一个不同, 则表示的状态就不同, 因此, 对于能量确定(即  $n$  一定)的电子来说, 其可能的状态数为  $2n^2$  个.

**解** (1)  $n=5$  时,  $l$  的可能值为 5 个, 它们是  $l=0, 1, 2, 3, 4$

(2)  $l=5$  时,  $m_l$  的可能值为 11 个, 它们是  $m_l=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$

(3)  $l=4$  时, 因为  $l$  的最大可能值为  $(n-1)$ , 所以  $n$  的最小可能值为 5

(4)  $n=3$  时, 电子的可能状态数为  $2n^2=18$

**15-35** 氢原子中的电子处于  $n=4, l=3$  的状态. 问: (1) 该电子角动量  $L$  的值为多少? (2) 这角动量  $L$  在  $z$  轴的分量有哪些可能的值? (3) 角动量  $L$  与  $z$  轴的夹角的可能值为多少?

**解** (1)  $n=4, l=3$  时, 电子角动量

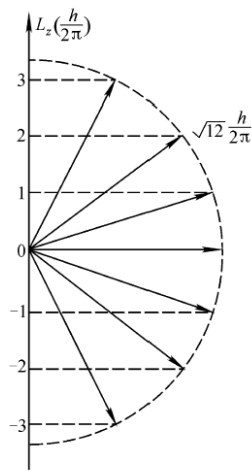
$$L = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi} = \sqrt{12} \frac{h}{2\pi}$$

(2) 轨道角动量在  $z$  轴上的分量  $L_z = m_l \frac{h}{2\pi}$ , 对于  $n=4, l=3$

的电子来说  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ , 则  $L_z$  的可能取值为  $0, \pm \frac{h}{2\pi}, \pm \frac{2h}{2\pi}, \pm \frac{3h}{2\pi}$ .

(3) 角动量  $L$  与  $z$  轴的夹角  $\theta = \arccos \frac{L_z}{L} = \arccos \frac{m_l}{l(l+1)}$ , 如

图所示, 当  $m_l$  分别取 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 时, 相应夹角  $\theta$  分别为  $30^\circ, 55^\circ, 73^\circ, 107^\circ, 125^\circ, 150^\circ$



题 15-35 图