

## 第十八章 环与域

**定理 18.1** 设  $R$  是环, 则

- (1)  $\forall a \in R, a0 = 0a = 0$ ;
- (2)  $\forall a, b \in R, (-a)b = a(-b) = -(ab)$ ;
- (3)  $\forall a, b \in R, (-a)(-b) = ab$ ;
- (4)  $\forall a, b, c \in R$  有

$$a(b - c) = ab - ac, \quad (b - c)a = ba - ca;$$

- (5)  $\forall a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m \in R$  有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j;$$

- (6)  $\forall a, b \in R, n \in \mathbb{Z}, (na)b = a(nb) = n(ab)$ .

**定理 18.2** 设  $R$  是环.  $R$  是无零因子环的充分必要条件是在  $R$  中乘法适合消去律, 即对于任意  $a, b, c \in R, a \neq 0$ , 若有  $ab = ac$  (或  $ba = ca$ ), 则有  $b = c$ .

**定理 18.3** 设  $F$  为有限域, 则  $F$  的特征是素数.

**定理 18.4** 设  $F$  为有限域, 则存在素数  $p$ , 使得  $|F| = p^n$ , 其中  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

**定理 18.5** 环  $R$  的非空子集  $S$  是  $R$  的一个子环的充分必要条件是: 对任意  $a, b \in S$  有

- (1)  $a - b \in S$ ;      (2)  $ab \in S$ .

**定理 18.6** 设  $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$  是环同态, 则  $\ker \varphi$  是环  $R_1$  的理想.

**定理 18.7** 设  $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$  是环同态, 那么

- (1) 若  $S$  是  $R_1$  的子环, 则  $\varphi(S)$  是  $R_2$  的子环;
- (2) 若  $T$  是  $R_2$  的子环, 则  $\varphi^{-1}(T)$  是  $R_1$  的子环;
- (3) 若  $D$  是  $R_1$  的理想, 则  $\varphi(D)$  是  $R_2$  的理想;
- (4) 若  $I$  是  $R_2$  的理想, 则  $\varphi^{-1}(I)$  是  $R_1$  的理想.

**定理 18.8** 设  $D$  是环  $R$  的理想,  $g: R \rightarrow R/D, \forall r \in R$  有  $g(r) = D + r$ , 则  $g$  是  $R$  到  $R/D$  的同态, 且  $\ker g = D$ .

**定理 18.9** (环同态基本定理) 环  $R$  的任何商环  $R/D$  都是  $R$  的同态像. 反之, 若环  $R'$  是  $R$  的同态像, 则  $R' \cong R/\ker \varphi$ .

**定理 18.10** 设  $F[x]$  是有限域  $F$  上的多项式环,  $f(x) \in F[x]$ . 在  $F[x]$  上如下定义二元关系  $R$ ,  $\forall g(x), h(x) \in F[x]$ ,

$$g(x)Rh(x) \Leftrightarrow f(x) \mid (g(x) - h(x)),$$

则  $R$  是  $F[x]$  上的同余关系.