第五章　基数（势）

5.1

证明: 取 $f:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$，且 $\forall x\in\mathscr{A}, f(x)=x-I_A$。

f 显然是函数。

$\forall R_1,R_2\in\mathscr{A}$，若 $f(R_1)=f(R_2)$，则:

$$
\begin{aligned}
& (I_A\subseteq R_1)\wedge((R_1\cap\sim I_A)\subseteq R_1) && \text{(偏序关系性质、引理 1.2)}\\
\iff & (I_A\subseteq R_1)\wedge((R_1-I_A)\subseteq R_1) && \text{(补交转换律)}\\
\iff & (I_A\subseteq R_1)\wedge((R_2-I_A)\subseteq R_1) && (f(R_1)=f(R_2))\\
\implies & (I_A\cup(R_2-I_A))\subseteq R_1\cup R_1 && \text{(引理 1.4)}\\
\iff & (I_A\cup(R_2-I_A))\subseteq R_1 && \text{(幂等律)}\\
\iff & (I_A\cup(R_2\cap\sim I_A))\subseteq R_1 && \text{(补交转换律)}\\
\iff & (I_A\cup R_2)\cap(I_A\cup\sim I_A)\subseteq R_1 && \text{(分配律)}\\
\iff & (I_A\cup R_2)\cap E\subseteq R_1 && \text{(排中律)}\\
\iff & (I_A\cup R_2)\subseteq R_1 && \text{(同一律)}\\
\iff & R_2\subseteq R_1 && (I_A\subseteq R_2)
\end{aligned}
$$

从而有 $R_2\subseteq R_1$。同理可证 $R_1\subseteq R_2$。故有 $f(R_1)=f(R_2)\Rightarrow R_1=R_2$。即 f 是单射。

对任意 $R'\in\mathscr{B}$，由教材定理 2.29(3) 知，$R'\cup I_A\in\mathscr{A}$。显然有 $f(R'\cup I_A)=R'$。故，f 是满射。

从而 f 是 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 上的双射。由等势定义知，$\mathscr{A}\approx\mathscr{B}$。 □

5.2

(1) 由集合相等关系的自反性、对称性和传递性立即得证。

(2)

证明: 定义函数 $f:((A\to A)/R)\to(\mathcal{P}(A)-\varnothing),\forall x\in(A\to A)/R, f(x)=\mathrm{ran}(x)$。

由 $(A\to A)/R$ 的定义知，f 是函数且为单射。

对任意 $S\in\mathcal{P}(A)-\varnothing$，由于 $\varnothing\notin\mathcal{P}(A)-\varnothing$，故 $S\neq\varnothing$。因而存在元素 $a\in S$。

定义函数 $g:A\to A,\forall x\in A, g(x)=\begin{cases}x, & 若x\in S\\ a, & 若x\notin S\end{cases}$。则 $g\in(A\to A)$ 且 $f([g]_R)=S$。因而 f 是满射。

综合知，f 是双射。从而有 $(A\to A)/R\approx\mathcal{P}(A)-\varnothing$。 □

5.3