证明: 由等价关系定义知 $\forall x(x \in A \to \langle x,x\rangle \in R_1)$，由绝对补运算定义可知，$\forall x(x \in A \to \langle x,x\rangle \notin {\sim}R_1)$。而 A 非空，即存在 $x \in A$ 但 $\langle x,x\rangle \notin {\sim}R_1$，于是 ${\sim}R_1$ 不是自反关系，因而也不是等价关系。 □

(2) 不是。

证明: 由等价关系定义知 $\forall x(x \in A \to (\langle x,x\rangle \in R_1 \wedge \langle x,x\rangle \in R_2))$，由相对补运算定义可知，$\forall x(x \in A \to \langle x,x\rangle \notin R_1 - R_2)$。而 A 非空，即存在 $x \in A$ 但 $\langle x,x\rangle \notin R_1 - R_2$，于是 $R_1 - R_2$ 不是自反关系，因而也不是等价关系。

同理，$R_2 - R_1$ 也不是等价关系。 □

(3) 不一定。

证明: 反例：令 $A = \{a,b,c\}, R_1 = E, R_2 = \{\langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup I_A$，易见 R_1 和 R_2 都是等价关系。但对 $r(R_1 - R_2) = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\} \cup I_A$，有 $\langle a,b\rangle \in r(R_1 - R_2) \wedge \langle b,c\rangle \in r(R_1 - R_2)$，但 $\langle a,c\rangle \notin r(R_1 - R_2)$。$r(R_1 - R_2)$ 不是传递的，因而不是等价关系。由对称性可证：$r(R_2 - R_1)$ 的情况。

“正例”：令 $R_1 = R_2 = I_A$，则 $R_1 = R_2 = r(R_1 - R_2) = r(R_2 - R_1) = I_A$ 都是等价关系。

可见，当 R_1 和 R_2 都是等价关系时，$r(R_1 - R_2)$ 或 $r(R_2 - R_1)$ 不一定是等价关系。 □

(4) 不一定。

证明: 反例：令 $A = \{a,b,c\}, R_1 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\} \cup I_A, R_2 = \{\langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup I_A$，易见 R_1 和 R_2 都是等价关系。但 $R_1 \circ R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle\} \cup I_A$ 不是对称的(有 $\langle c,b\rangle \in R_1 \circ R_2$ 但 $\langle b,c\rangle \notin R_1 \circ R_2$)，因而不是等价关系。由对称性可证：$R_2 \circ R_1$ 的情况。

“正例”：令 $R_1 = R_2 = I_A$，$R_1 = R_2 = R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 = I_A$ 都是等价关系。

可见，当 R_1 和 R_2 都是等价关系时，$R_1 \circ R_2$ 或 $R_2 \circ R_1$ 不一定是等价关系。 □

2.35

证明: 先证 R 是对称的。

$\forall x, y \in A$

$\langle x,y\rangle \in R$

$\iff \langle x,y\rangle \in R \wedge 1$ (命题逻辑同一律)

$\iff \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle x,x\rangle \in R$ (R 是自反的)

$\implies \langle y,x\rangle \in R$ (题设 (2))

再证 R 是传递的。

$\forall x, y, z \in A$

$\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R$

$\implies \langle y,x\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R$ (R 是对称的)

$\implies \langle x,z\rangle \in R$ (题设 (2))

由题设，R 是自反的。从而 R 是 A 上的等价关系。 □

2.36

证明: (1) 由 B_{i_k} 的选择方式知 $\varnothing \notin \pi_2$。

(2) 对任意 $j, k \in \{1, 2, \dots, m\} \wedge j \neq k$，有：

$B_{i_j} \cap B_{i_k} = (A_{i_j} \cap B) \cap (A_{i_k} \cap B)$ (定义)

$= A_{i_j} \cap A_{i_k} \cap B \cap B$ (结合律、交换律)