由于 D 是理想，且 $A \in D$，$E_{tj} \in M_n(F)$，所以 $AE_{tj} \in D$，同理，由于 $xa_{kt}^{-1}E_{ik} \in M_n(F)$，所以 $xE_{ij} = (xa_{kt}^{-1}E_{ik})AE_{tj} \in D$。

而对任意 $B = (b_{ij}) \in M_n(F)$，有 $B = \sum\limits_{1 \le i,j \le n} b_{ij}E_{ij} \in D$。从而 $D = M_n(F)$。 □

18.22 由于理想都是环的加法子群，而 $\langle \mathbb{Z}_5, \oplus \rangle$ 没有非平凡的子群，所以 $\mathbb{Z}_5$ 的理想只有零理想 $\{0\}$ 和 $\mathbb{Z}_5$ 自身。

易于验证，$\{0,2,4\}$ 和 $\{0,3\}$ 都是 $\mathbb{Z}_6$ 的非平凡理想，所以 $\mathbb{Z}_6$ 的理想有：

$H_1 = \{0\}$；

$H_2 = \{0,3\}$；

$H_3 = \{0,2,4\}$；

$H_4 = \mathbb{Z}_6$。

18.23

证明：首先，由于 $0 \in D$，从而 D 非空。

对任意 $x \in D$，存在 $m \in Z$，使得 $x = 4m = 2(2m) \in A$，所以有 $D \subseteq A$。

对任意 $x, y \in D$，有 $m, n \in \mathbb{Z}$，使得 $x = 4m, y = 4n$，从而 $x - y = 4(m-n) \in D$。

对任意 $a \in A$，$d \in D$，有 $m, n \in \mathbb{Z}$，使得 $a = 2m, d = 4n$，从而 $ad = da = 8mn = 4(2mn) \in D$。

这就证明了 D 是 A 的一个理想。 □

$A/D = \langle \{\bar{0}, \bar{2}\}, +, \cdot \rangle$。其中 $\bar{0}$ 为加法单位元和乘法零元，$\bar{2} + \bar{2} = \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$。

18.24 即为引理 18.2。

18.25

证明：设 $A^m = \{0\}$，$(R/A)^n = \{\bar{0}\}$，下面证明 $R^{mn} = \{0\}$。

设 $r_{ij} \in R$，$i = 1, 2, \cdots, m$，$j = 1, 2, \cdots, n$。则 $\prod\limits_{ij} r_{ij} = \prod\limits_{i=1}^{m} \prod\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$，记 $a_i = \prod\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$，$i = 1, 2, \cdots, m$，注意到：

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_i &= \overline{r_{i1}r_{i2}\cdots r_{in}} && (a_i \text{ 定义}) \\
&= \bar{r}_{i1}\bar{r}_{i2}\cdots\bar{r}_{in} && (\text{商环乘法运算定义}) \\
&= \bar{0} && ((R/A)^n = \{\bar{0}\}) \\
&= A && (\bar{0} = A + 0 = A)
\end{aligned}
$$

从而有 $a_i \in A$，$i = 1, 2, \cdots, m$。因此：

$$
\begin{aligned}
\prod_{ij} r_{ij} &= \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} r_{ij} && (\text{结合律}) \\
&= \prod_{i=1}^{m} a_i && (a_i \text{ 定义}) \\
&= 0 && (A^m = 0)
\end{aligned}
$$

这就证明了 $R^{mn} = \{0\}$，R 是幂零环。 □

18.26

证明：必要性。设 R/H 是域。下面证明，对 R 的任意理想 $D \subseteq R$，若有 $H \subset D$，就有 $D = R$。

由于 $H \subset D$，所以存在 $x \in D - H$。由于 $x \notin H$，所以 $\bar{x} \ne \bar{0} = H$。又因为 R/H 是域，所以存在 $\bar{y} \in R/H$，使得 $xy + H = \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1} = 1 + H$。从而 $xy \in xy + H = 1 + H$，也即，存在