H 没有公共边，所以对任意 $v \in V(G)$，有 $d_{G\cup H}(v) = d_G(v) + d_H(v)$。因为 $d_G(v)$ 是偶数，所以 $d_H(v)$ 也应是偶数。这就是说，对任意顶点 $v \in V'$ (注意到，由于 H 是一个由边集导出的子图，所以 $v \in V'$ 意味着 v 必与 E' 中的某条边关联，从而 $d_H(v) \geq 1$)，有 $d_H(v) \geq 2$。

综合上述两个条件可知，$2|E'| = \sum\limits_{v\in V'} d(v) \geq 2|V'| \geq 2k$，即 $f(G) = |E'| \geq k$。

这就证明了 $t_{max} \geq k$ (注意到，由于有向图中顶点度数的定义为出度与入度之和，所以若有向图 D 为欧拉图，D 中各顶点的度数也是偶数，上述证明对有向图同样有效)。

下面证明 $t_{max} \leq k$。

对任意给定的图 $G \in S_k$，易见，G 的连通分支数 $p \leq k$。从每个连通分支中各取一个顶点，依次记为 $v_1, v_2, \cdots, v_p$。由于不同的连通分支间不会有公共顶点，所以 $v_1, v_2, \cdots, v_p$ 是互异的。向 G 中添加 p 条边：$\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, \cdots, \langle v_{p-1}, v_p\rangle, \langle v_p, v_1\rangle$ (若 G 为无向图，则将上述 p 条边改为无向边)，易见，得到的新图 G' 是连通的。令 $C_{k+1} = v_1v_2\cdots v_pv_1$，则 $G' = G \cup C_{k+1} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k \cup C_{k+1}$。注意到，由于 $v_1, v_2, \cdots, v_p$ 分属 G 的不同连通分支(而不同连通分支间不会有边)，所以 C_{k+1} 的每一条边都不在 G 中。这就是说，C_{k+1} 与 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 没有公共边。从而 G' 是连通的且为 $k+1$ 个边不重的初级回路的并，所以 G' 是欧拉图。这就证明了，对任意 $G \in S_k$，有 $f(G) \leq p \leq k$。由 G 的任意性可知 $t_{max} \leq k$。

综合得，$t_{max} = k$。 □

5.

(1) 2 种。

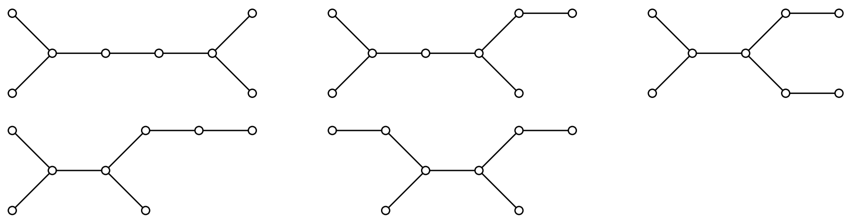
证明: 首先，由于 1-色图只有零图，而零图是平面图，所以给极小非平面图着色至少需要 2 种颜色。另一方面，由于 $K_{3,3}$ 是极小非平面图，且 $\chi(K_{3,3}) = 2$，从而极小非平面图点色数的最小值为 2。 □

(2) 5 种。

证明: 设 G 是 n 阶极小非平面图，$e \in E(G)$ 是 G 中任意一条边。令 $H = G - e$，则 H 是平面图。由教材定理 11.10 可知，$|E(H)| \leq 3n - 6$。从而 $|E(G)| = |E(H)| + 1 \leq 3n - 5$。即 $\sum\limits_{v_i\in V(G)} d(v_i) = 2|E(G)| \leq 6n - 10$。由鸽巢原理可知，$G$ 中存在度数小于等于 5 的顶点 v。易见，$G - v$ 是平面图，从而由 Heawood 定理可知，$G - v$ 是 5-可着色的。仿照 Heawood 定理证明中的换色方法可知，G 也是 5-可着色的。这就是说，极小非平面图的点色数不超过 5。[2]

另一方面，由于 K_5 是极小非平面图，且 $\chi(K_5) = 5$，所以极小非平面图点色数的最大值即为 5。 □

6. 是 3 3 2 2 1 1 1 1。对应的 5 棵非同构的无向树为：



三、代数结构部分

1.

[2]若利用四色定理则可直接证明极小非平面图的点色数不超过 5。