模 3 加法。从而由模 3 加法的性质知，$\circ$ 满足交换律和结合律，不满足幂等律。a是单位元。无零元。

(2) 由运算表显然有：$x \circ y = y, \forall x, y \in A$。易见，$\circ$ 满足结合律和幂等律，但不满足交换律。A 中每一个元素都是左单位元和右零元。无右单位元和左零元。

(3) 易于验证，若令 $\varphi : A \to \mathbb{Z}_3, \varphi(a) = 1, \varphi(b) = 2, \varphi(c) = 0$，则 $\langle A, \circ, a\rangle \overset{\varphi}{\cong} \langle \mathbb{Z}_3, \otimes, 1\rangle$，其中 $\otimes$ 是模 3 乘法。从而由模 3 乘法的性质可知，$\circ$ 满足交换律和结合律。$b \circ b = a$，不满足幂等律。a 是单位元。c 是零元。

(4) 考虑代数系统 $\{B, \otimes, 1\}$，其中 $B = \{1, 4, 6\}$，$\otimes$ 是模 10 乘法。易于验证，若令 $\varphi : A \to B, \varphi(a) = 1, \varphi(b) = 6, \varphi(c) = 4$，则 $\langle A, \circ, a\rangle \overset{\varphi}{\cong} \langle B, \otimes, 1\rangle$。从而由模 10 乘法的性质可知，$\circ$ 满足交换律和结合律。$c \circ c = b$，不满足幂等律。a 是单位元。无零元。

15.13

证明: 由 θ_l 是左零元可知，$\theta_l \circ \theta_r = \theta_l$。又由 θ_r 是右零元可知，$\theta_l \circ \theta_r = \theta_r$。

于是有：$\theta_l = \theta_l \circ \theta_r = \theta_r$。也即，左零元等于右零元。

假设 θ' 也是 $\circ$ 的一个左(右)零元，则由 θ' 是左(右)零元知，$\theta' \circ \theta = \theta'$ (或 $\theta \circ \theta' = \theta'$)，又由 θ 是零元知，$\theta' \circ \theta = \theta \circ \theta' = \theta$。

从而有：$\theta' = \theta' \circ \theta = \theta$ (或 $\theta' = \theta \circ \theta' = \theta$)。

即，若 $\circ$ 同时有左、右零元，则它的左零元等于右零元，是 $\circ$ 唯一的零元。 □

15.14 $V_1 = \langle \mathbb{Z}_6, \oplus\rangle$ 也就是 V 本身，是 V 的平凡子代数。

$V_2 = \langle \{0, 2, 4\}, \oplus\rangle$ 是 V 的真子代数。

$V_3 = \langle \{0, 3\}, \oplus\rangle$ 是 V 的真子代数。

$V_4 = \langle \{0\}, \oplus\rangle$ 是 V 的真子代数。

15.15

(1) 记 $V_1 \times V_2$ 为 $\langle \{\langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,6\rangle\}, \triangle, \langle 1,6\rangle\rangle$。

$\triangle$ 的运算表如下：

$\triangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 1,6\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$
$\langle 1,5\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$
$\langle 1,6\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 1,6\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$
$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$
$\langle 2,6\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 2,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$
$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$
$\langle 3,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 3,6\rangle$

其中 $\langle 1,6\rangle$ 是 $\triangle$ 的单位元。$\langle 3,5\rangle$ 是 $\triangle$ 的零元。所有元素都是幂等元。除 $\langle 1,6\rangle$ 外，其它元素皆无逆元。

(2) $V_1 = \langle \{1, 2, 3\}, \circ, 1\rangle$ 就是 V 自身，是 V 的平凡子代数。

$V_2 = \langle \{1, 2\}, \circ, 1\rangle$ 是 V 的真子代数。

$V_3 = \langle \{1, 3\}, \circ, 1\rangle$ 是 V 的真子代数。

$V_4 = \langle \{1\}, \circ, 1\rangle$ 是 V 的平凡真子代数。

15.16

(1) 记 $V_1 \times V_2$ 为 $\langle \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2, \circ\rangle$。