集合基本恒等式列表（1）

Identity	Name
$A \cap E = A$, $A \cup \varnothing = A$	Identity laws
$A \cup E = E$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\sim\sim A = A$	Complementation law
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws

集合基本恒等式列表（2）

Identity	Name
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Associative laws
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive laws
$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$	DeMorgan's laws
$A \cup \sim A = E$ $A \cap \sim A = \varnothing$	Complement laws
$A - B = A \cap \sim B$	Difference as intersection

其它集合恒等式

- $A \oplus B = B \oplus A$
- $A \oplus \varnothing = A$
- $A \oplus A = \varnothing$
- $A \oplus E = \sim A$,
- $A \oplus \sim A = E$
- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

集合恒等式(推广到集族)

- **分配律**

$$\mathrm{B} \cup \left(\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in S} (\mathrm{B} \cup A_\alpha)$$

$$\mathrm{B} \cap \left(\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in S} (\mathrm{B} \cap A_\alpha)$$

- **德•摩根律**

$$\sim \left(\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in S} (\sim A_\alpha)$$

$$\sim \left(\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in S} (\sim A_\alpha)$$

$$\mathrm{B} - \left(\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in S} (B - A_\alpha)$$

$$B - \left(\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in S} (B - A_\alpha)$$

对偶(dual)原理

- **对偶式(dual):** 一个集合关系式, 如果只含有$\cap$, $\cup$,~, $\varnothing$, E,=, $\subseteq$, 那么, 同时把$\cup$与$\cap$互换, 把$\varnothing$与E互换, 把$\subseteq$与$\supseteq$互换, 得到的式子称为原式的对偶式.
- **对偶原理:** 对偶式同真假. 或者说, 集合恒等式的对偶式还是恒等式.

如：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$的对偶式是

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup \sim A = E$的对偶式是$A \cap \sim A = \varnothing$

$A \cap B \subseteq A$的对偶式是$A \cup B \supseteq A$

$\varnothing \subseteq A$的对偶式是$E \supseteq A$

集合恒等式证明方法（按使用的理论分）

- **逻辑演算法:**

  利用逻辑等值式和推理规则证明A⊆B且B⊆A，

  或者∀x,x $x \in A \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow x \in B$

- **集合演算法:**

  利用集合恒等式和已知结论直接证明A=……=B

- **集合构造符**

- **A Membership Table（类似于真值表）**

  考虑一个元素可能属于的集合的每一种组合，并证明在同样的集合组合中的元素属于恒等式两边的集合。

逻辑演算法(格式)

题目: $A=B$.

证明: $\forall x$,

$x\in A$

$\Leftrightarrow \ldots$ (????)

$\Leftrightarrow x\in B$

$\therefore A=B$.

题目: $A\subseteq B$.

证明: $\forall x$,

$x\in A$

$\Rightarrow \ldots$ (????)

$\Rightarrow x\in B$

$\therefore A\subseteq B$.

分配律的证明（逻辑演算）

- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证明: $\forall x, x\in A\cup(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \vee x\in(B\cap C)$ /$\cup$定义

$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B\wedge x\in C)$ /$\cap$定义

$\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge(x\in A \vee x\in C)$

/命题逻辑分配律

$\Leftrightarrow (x\in A\cup B) \wedge(x\in A\cup C)$ /$\cup$定义

$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ /$\cap$定义

$\therefore A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

分配律的证明（集合构造符）

证明 $A\cup(B\cap C)=\{x|x\in A\vee x\in(B\cap C)\}$ ($\cup$定义)

$=\{x|x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\}$ ($\cap$定义)

$=\{x|(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\}$ (命题逻辑分配律)

$=\{x|(x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)\}$ ($\cup$定义)

$=\{x|x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\}$ ($\cap$定义)

$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\therefore A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

分配律的证明(A Membership Table)

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

集合演算法----吸收律的证明

- $A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证明： $A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ （同一律）

$=A\cap(E\cup B)$ （分配律）

$=A\cap E$ （零律）

$=A$ （同一律）

$\therefore A\cup(A\cap B)=A$

集合演算法----吸收律的证明(续)

- $A\cap(A\cup B) = \mathrm{A}$

证明: $A\cap(A\cup B)$

$= (A\cap A)\cup(A\cap B)$ (分配律)

$= A\cup(A\cap B)$ (等幂律)

$= A$ (吸收律第一式)

$\therefore A\cap(A\cup B) = A$

证明$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

只需证明 $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B=B \Rightarrow A\cap B=A$

$\Rightarrow A-B=\varnothing \Rightarrow A\subseteq B$

证明 (1) 证 $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B=B$

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x，$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$

因此有$A\cup B\subseteq B$. $\therefore A\cup B=B$

(2) 证$A\cup B=B \Rightarrow A\cap B=A$

$A=A\cap(A\cup B)$ （吸收律）

$=A\cap B$ （由已知，将$A\cup B$用B代入)

$A\cap B=A \Rightarrow A-B=\varnothing \Rightarrow A\subseteq B$

(3)证 $A\cap B=A \Rightarrow A-B=\varnothing$

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$， $\therefore\ x\in A$且$x\notin B$.

又$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B$. $\therefore$与$A\cap B=A$矛盾. 假设不成立.

(4)证 $A-B=\varnothing\Rightarrow A\subseteq B$

假设$A\subseteq B$为假，那么

$\exists x\ (x\in A \wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$

与条件$A-B=\varnothing$矛盾.

$\therefore A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

直接证法:

$A-B=\varnothing \Rightarrow A\subseteq B$

若$A=\varnothing$,显然成立.

若$A\neq\varnothing$, 任取x,$x\in A$,

$x\notin A-B$

$\Rightarrow x\notin A\cap\sim B$

$\Rightarrow\neg(x\in A\wedge x\in\sim B)$

$\Rightarrow\neg(x\in A)\vee\neg(x\in\sim B)$ （与$x\in A$形成析取三段论）

$\Rightarrow x\notin\sim B \Rightarrow x\in B$，所以$A\subseteq B$

注意： $x\notin A\cap\sim B \Leftrightarrow x\notin A\wedge x\notin\sim B$ 成立吗？

应用$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$可证明集合相等

例1试证 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Leftrightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Leftrightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$\Rightarrow A \cup B \subseteq C$

命题得证

例1 求证$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 假设 $A \cup B \subseteq C$ 不成立，

则 $\exists x, x \in A \cup B \wedge x \notin C$

$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$

若 $x \in A$, 则与 $A \subseteq C$ 矛盾；

若 $x \in B$, 则与 $B \subseteq C$ 矛盾.

例2试证 $A\cap C=B\cap C \wedge A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$

由已知等式通过运算产生新的等式

$$X=Y \Rightarrow X\cap Z=Y\cap Z,\ X\cup Z=Y\cup Z，\ X-Z=Y-Z$$

证 由 $A\cap C=B\cap C$ 和 $A\cup C=B\cup C$ 得到

$$(A\cup C)-(A\cap C)=(B\cup C)-(B\cap C)$$

从而有 $A\oplus C=B\oplus C \quad \Rightarrow (A\oplus C)\oplus C=(B\oplus C)\oplus C$

$$\Rightarrow A\oplus(C\oplus C)=B\oplus(C\oplus C)$$

$$\Rightarrow A\oplus\varnothing=B\oplus\varnothing$$

$$\Rightarrow A=B$$

例3 求证$A-B \subseteq A \cup B$

证 $A-B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A-B \subseteq A \cup B$

证明补交转换律

- $A\text{-}B = A \cap \sim B$

【分析：逻辑演算法.】

证明: $\forall x$,

$$x \in A\text{-}B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \sim B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap \sim B$$

$\therefore A\text{-}B = A \cap \sim B.$

证明德•摩根律的相对形式

- $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
- $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

证明:【分析：集合演算法】

$A-(B\cup C)$

$=A\cap\sim(B\cup C)$ (补交转换律)

$=A\cap(\sim B\cap\sim C)$ (德摩根律)

$=(A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$ (等幂律)

$=(A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$ (交换律,结合律)

$=(A-B)\cap(A-C)$ (补交转换律).

特征函数与集合运算

- $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$
- $\chi_{\sim A}(x) = 1-\chi_A(x)$
- $\chi_{A\text{-B}}(x) = \chi_{A\cap\sim B}(x)=\chi_A(x)\cdot(1-\chi_B(x))$
- $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$
- $\chi_{A\oplus B}(x) = (\chi_A(x)+\chi_B(x)) \bmod 2= \chi_A(x)\oplus\chi_B(x)$

幂集的性质

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

2. $P(A) \cup \mathrm{P}(B) \subseteq P(A \cup B)$

3. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

4. $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

证明$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

证明: $(\Rightarrow)$ $\forall X$,

$X \in P(A)$

$\Leftrightarrow X \subseteq A$

$\Rightarrow X \subseteq A \wedge A \subseteq B$

$\Rightarrow X \subseteq B$

$\Leftrightarrow X \in P(B)$

$\therefore P(A) \subseteq P(B)$

$(\Leftarrow)$ $\forall x$,

$x \in A$

$\Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{x\} \in P(A) \wedge P(A) \subseteq P(B)$

$\Rightarrow \{x\} \in P(B)$

$\Leftrightarrow x \in B$

$\therefore A \subseteq B$.

证明$P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$

证明: $\forall X$,

$X\in P(A)\cup P(B)$

$\Leftrightarrow X\in P(A)\vee X\in P(B)$

$\Leftrightarrow X\subseteq A \vee X\subseteq B$

$\Rightarrow X\subseteq A\cup B$

$\Leftrightarrow X\in P(A\cup B)$

$\therefore P(A)\cup P(B) \subseteq P(A\cup B)$

$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$的讨论

给出反例, 说明等号不成立:

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $A \cup B=\{1,2\}$,

$P(A)=\{\varnothing,\{1\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{2\}\}$,

$P(A \cup B)= \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$P(A) \cup P(B) \subseteq \{\varnothing,\{1\},\{2\}\}$

此时, $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.

证明$P(A)\cap P(B) = P(A\cap B)$

证明: $\forall X$,

$$X\in P(A)\cap P(B)$$

$$\Leftrightarrow X\in P(A) \wedge X\in P(B)$$

$$\Leftrightarrow X\subseteq A \wedge X\subseteq B$$

$$\Leftrightarrow X\subseteq A\cap B$$

$$\Leftrightarrow X\in P(A\cap B)$$

$$\therefore\ P(A)\cap P(B) = P(A\cap B).\ \#$$

证明$P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

证明: $\forall X$, $X \in P(A-B)$,分两种情况,

(1) $X=\varnothing$时, 显然$X \in (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

(2) $X \neq \varnothing$时, $X \in P(A-B) \Leftrightarrow X \subseteq A-B \Rightarrow X \subseteq A \wedge \neg X \subseteq B$

$$\Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \notin P(B)$$

$$\Leftrightarrow X \in P(A)-P(B)$$

$\therefore P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$.

集合运算的优先级

- 分三级: 第一级最高, 依次降低
- 第一级: 补~, 幂P()
- 第二级: 广义并∪, 广义交∩
- 第三级: 并∪, 交∩, 相对补-, 对称差⊕
- 同一级: 用括号表示先后顺序

作业(7)

- **后面的部分请自学**
- **P20：11,12,14,26,28**

课堂习题

1. 证明 令A和B是全集E的子集，证明$A\subseteq B$当切仅当$\sim B\subseteq\sim A$.

2. 利用如下两种方式证明德摩根律：如果A和B是两个集合，那么$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

a) 证明两边互为子集；b) 使用成员表

※对称差的性质

- 1. 交换律: $A \oplus B = B \oplus A$
- 2. 结合律: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- 3. 分配律: $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- 4. $A \oplus \varnothing = A$, $A \oplus E = \sim A$
- 5. $A \oplus A = \varnothing$, $A \oplus \sim A = E$

1、4和5由定义可直接证得。

※对称差的性质(证明2)

- **结合律: A⊕(B⊕C)=(A⊕B)⊕C**
- **证明思路:**

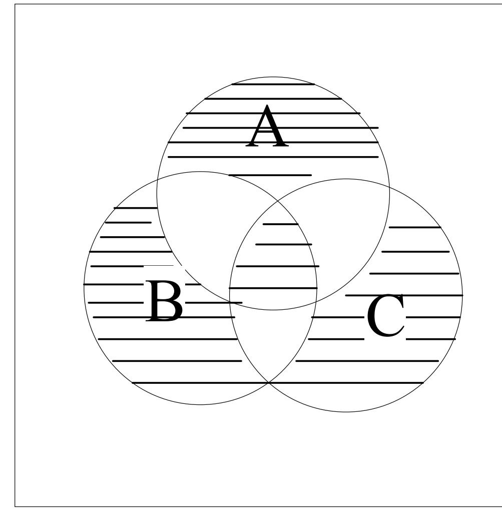
分解成“基本单位”， 例如:

1. A∩~B∩~C

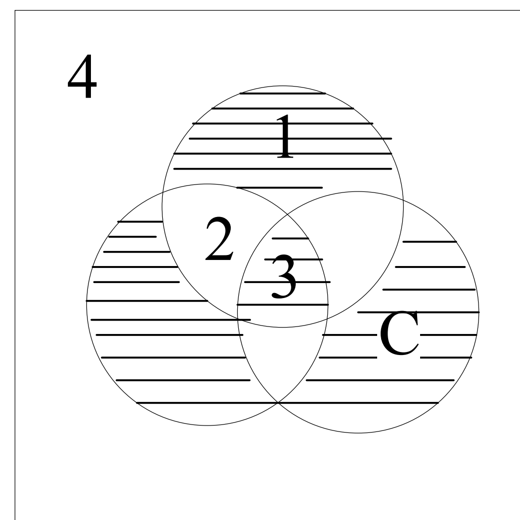
2. A∩ B∩~C

3. A∩ B∩ C

4. ~A∩~B∩~C



A⊕B⊕C



※对称差的性质(证明2 、 续1)

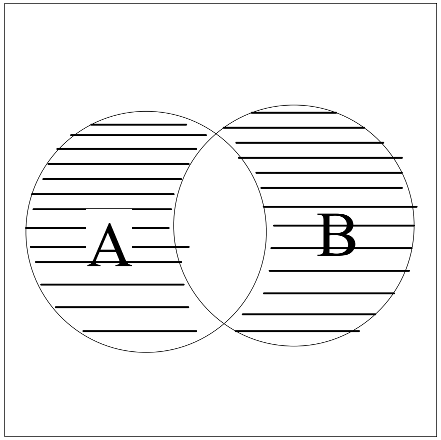
- **结合律: $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$**

证明 首先,

$$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A) \quad (\oplus\text{定义})$$

$$= (A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A) \quad (\text{补交转换律})$$

$$= (A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B) \quad (\cap\text{交换律}) \quad (*)$$



$A\oplus B$

※对称差的性质(证明2、续2)

其次, $A\oplus(B\oplus C)$

$= (A\cap\sim(B\oplus C))\cup(\sim A\cap(B\oplus C))$ (*)

$= (A\cap\sim((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$ (*)

$= (A\cap(\sim(B\cap\sim C)\cap\sim(\sim B\cap C)))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$ (德•摩根律)

$= (A\cap(\sim B\cup C)\cap(B\cup\sim C)))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$ (德•摩根律)

$= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup$

$(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C)$ (分配律…)

※对称差的性质(证明2、续3)

同理, $(A\oplus B)\oplus C$

$= (A\oplus B)\cap\sim C)\cup(\sim(A\oplus B)\cap C)$ (*)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$(\sim((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap C)$ (*)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$((\sim(A\cap\sim B)\cap\sim(\sim A\cap B))\cap C)$ (德•摩根律)

$= (((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C)\cup$

$((\sim A\cup B)\cap(A\cup\sim B))\cap C)$ (德•摩根律)

$= (A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup$

$(\sim A\cap\sim B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ (分配律…)

$\therefore\ A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C.$

※对称差的性质(讨论)

- 有些作者用△表示对称差: $A\oplus B=A\triangle B$
- 消去律: $A\oplus B=A\oplus C \Leftrightarrow B=C$ (习题一,23)

  $A=B\oplus C \Leftrightarrow B=A\oplus C \Leftrightarrow C=A\oplus B$
- 对称差与补: $\sim(A\oplus B) = \sim A\oplus B = A\oplus\sim B$

  $A\oplus B = \sim A\oplus\sim B$
- 问题: $A\oplus B\oplus C=\sim A\oplus\sim B\oplus\sim C$?

※对称差的性质(讨论、续)

- 如何把对称差推广到n个集合:

  $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n = ?$

- □ $\forall x, x \in A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n$

  $\Leftrightarrow x$恰好属于$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$中的奇数个

- 特征函数表达: $\chi_{A1 \oplus A2 \oplus \ldots \oplus An}(x)$

  $= \chi_{A1}(x) + \chi_{A2}(x) + \ldots + \chi_{An}(x) \pmod 2$

  $= \chi_{A1}(x) \oplus \chi_{A2}(x) \oplus \ldots \oplus \chi_{An}(x)$

((mod 2),⊕,都表示模2加法,即相加除以2取余数)

※对称差的性质(讨论、续)

- **问题**: $A\oplus B\oplus C = \sim A\oplus\sim B\oplus\sim C$?

  答案: $A\oplus B\oplus C = \sim(\sim A\oplus\sim B\oplus\sim C)$

  $= \sim(A\oplus B\oplus\sim C) = A\oplus\sim B\oplus\sim C$

(反复利用$\sim(A\oplus B) = \sim A\oplus B = A\oplus\sim B$和 $A\oplus B = \sim A\oplus\sim B$)

- $A\oplus B\oplus C\oplus D = \sim A\oplus\sim B\oplus\sim C\oplus\sim D$

  $= A\oplus\sim B\oplus C\oplus\sim D = \sim(\sim A\oplus\sim B\oplus C\oplus\sim D)$

  $=\ldots$

- $A = \sim(\sim A)$

※对称差的性质(证明3)

- **分配律: $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$**

证明

$A\cap(B\oplus C)$

$= A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C))$

$= (A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)$

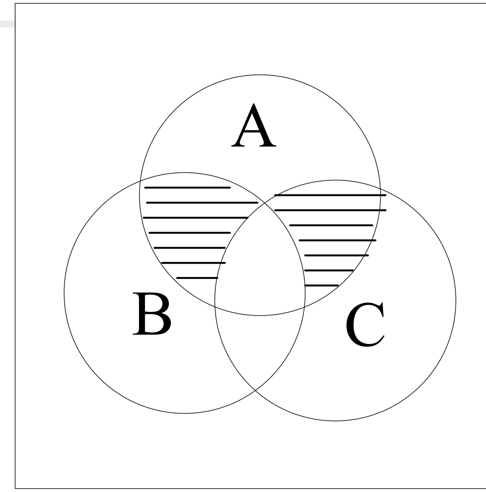
$(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$= ((A\cap B)\cap\sim(A\cap C))\cup(\sim(A\cap B)\cap(A\cap C))$

$=((A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C))\cup((\sim A\cup\sim B)\cap(A\cap C))$

$=(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)$

$\therefore A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$. #



$A\cap(B\oplus C)$

※对称差分配律(讨论)

- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ √
- $A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$?
- $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$?
- $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$?

※集族的性质

设A,B为集族, 则

- 1. $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\Rightarrow\cup\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{B}$
- 2. $\mathcal{A}\in\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{B}$
- 3. $\mathcal{A}\neq\varnothing\wedge\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\Rightarrow\cap\mathcal{B}\subseteq\cap\mathcal{A}$
- 4. $\mathcal{A}\in\mathcal{B}\Rightarrow\cap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$
- 5. $\mathcal{A}\neq\varnothing\Rightarrow\cap\mathcal{A}\subseteq\cup\mathcal{A}$

※集族性质的证明（I）

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \cup\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$

证明: $\forall x$,

$x \in \cup\mathcal{A}$

$\Leftrightarrow \exists A(A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)$ ($\cup\mathcal{A}$定义)

$\Rightarrow \exists A(A \in \mathcal{B} \wedge x \in A)$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$)

$\Leftrightarrow x \in \cup\mathcal{B}$ ($\cup\mathcal{B}$定义)

$\therefore \cup\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$. #

※集族性质的证明（II）

- $\mathcal{A}\in\mathcal{B}\Rightarrow\cap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$

证明: $\forall x,$

$$x\in\cap\mathcal{B}\Leftrightarrow\forall y(\,y\in\mathcal{B}\rightarrow x\in y\,)$$

$$\Rightarrow\mathcal{A}\in\mathcal{B}\rightarrow x\in\mathcal{A}\qquad\textbf{(UI)}$$

$$\Rightarrow x\in\mathcal{A}\;(\mathcal{A}\in\mathcal{B})$$

$\therefore\cap\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$.　　#

解释UI规则： 因为对于任意的y,如果$y\in\mathcal{B}$,那么$x\in y$,同时$\mathcal{A}$是$\mathcal{B}$中的一个元素, 因此$x\in\mathcal{A}$

*UI*规则即全称量词消去规则

※集族性质的证明（III）

- $\mathcal{A}\neq\varnothing \Rightarrow \cap\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{A}$

说明: $\mathcal{A}\neq\varnothing$**的条件不可去掉!**

证明（方法1）： $\mathcal{A}\neq\varnothing \Rightarrow \exists y(y\in\mathcal{A})$, **设**$A\in\mathcal{A}$.

$\forall x, x\in\cap\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall y(\, y\in\mathcal{A}\rightarrow x\in y\,)$

$\Rightarrow A\in\mathcal{A}\rightarrow x\in A \Rightarrow x\in A\ (A\in\mathcal{A})$

$\Rightarrow A\in\mathcal{A} \wedge x\in A \Rightarrow \exists y(\, y\in\mathcal{A} \wedge x\in y)$

$\Leftrightarrow x\in \cup\mathcal{A}$

$\therefore \cap\mathcal{A}\subseteq \cup\mathcal{A}$. #

※集族性质的证明（IV）

- $\mathcal{A}\neq\varnothing \Rightarrow \cap\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{A}$

说明: $\mathcal{A}\neq\varnothing$的条件不可去掉!

证明（方法2）: $\mathcal{A}\neq\varnothing \Rightarrow \exists y(y\in\mathcal{A})$, 设$A\in\mathcal{A}$.

那么$\cap\mathcal{A} \subseteq A$, 而且$A\subseteq\cup\mathcal{A}$

所以$\cap\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{A}$. #