（一）2010 春季答案

一．**填空题** 1． 0.8；2． $\overline{X}\pm\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$；3． 5；4． $7/45$； 5． 4；6． 0.3；

二．**单选题** 1-----6 ②①④①③①

三．**判断题** 1---5 ×√×√×

四．**综合题**

（一）解：记 $A=\{$该生第一次考试及格$\}$ $B=\{$该生第二次考试及格$\}$

$C=\{$该生取得复试资格$\}$

据题意得：$P(A)=p$ $P(\overline{A})=1-p$ P（$B\mid A$）$=p$ P（$B\mid\overline{A}$）$=p/2$

$$C=A+\overline{A}B$$

$$P(C)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A})\ P(B\mid\overline{A})$$

$$=p+(1-p)\frac{p}{2}=\frac{p(3-p)}{2}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}$$

$$=\frac{p^2}{p^2+(1-p)\frac{p}{2}}=\frac{2p}{1+p}$$

（二）

（1）$\because$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$ $\therefore\int_0^2\int_0^1 cxy^3dxdy=1$

$\therefore$ $\frac{c}{2}=1$ $c=2$

（2） X 的边际分布密度 $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}0.5x & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

Y 的边际分布密度 $p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}4y^3 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（3）$\because$ $p(x,y)=p_1(x)p_2(y)$ 所以 X、Y 独立

（4）$E(X)=\int_0^2 0.5x^2dx=\frac{4}{3}$ $E(Y)=\int_0^1 4y^4dy=\frac{4}{5}$ $E(XY)=\frac{16}{15}$

（三）

解 1. X 的分布密度 $p(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & x\in[0,\theta]\\ 0 & x\,\overline{\in}\,[0,\theta]\end{cases}$ $\quad\therefore E(X)=\dfrac{\theta}{2}$

令 $\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}$ 得 $\theta=2\overline{X}$ 所以 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}$

2. 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)=\begin{cases}\theta^{-n} & 0\le\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le\theta\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

显然当 $\theta=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$ 时 $L(\theta)$ 达到最大值

所以 $\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 是 θ 的最大似然估计

3. 因为 $E(\hat{\theta}_1)=E(2\overline{X})=2\times\dfrac{\theta}{2}=\theta$，所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计。

$\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 的密度函数为 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

所以 $E(\hat{\theta}_2)=\int_0^{\theta}xg(x)dx=\dfrac{n}{n+1}\theta$，所以 $\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 不是 θ 的无偏估计。

（四）

① 选取统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

② 给出检验水平 α，查标准正态分布表使 $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\dfrac{\alpha}{2}$，即 H_0 成立时，

$P\left\{|Z|\ge z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha$

③ 根据样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，算得 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

④ 若 $|Z|\ge z_{\frac{\alpha}{2}}$ 则拒绝 H_0；否则接受 H_0。

（二）2010 秋季答案

一．**填空题** 1． 0.7；2． $\overline{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$；3． $0.5-e^{-1}$；4． 0.2； 5． 2；6． -0.5；

二． **单选题** 1-----6 ④③②①①①

三． **判断题** 1---5 × ××√√

四． **综合题**

（一）解：设 B ={考生选对了答案}

A 分别表示理解相关内容。

依题意 $P(A)=0.90$ $P(\overline{A})=0.10$

$$P(B|A)=100\% \qquad P(B|\overline{A})=20\%$$

$\therefore$ $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.90\times1+0.10\times0.20$ =0.92

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.90\times1}{0.92}\approx0.9783$$

（二）

（1） $\because$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$ $\therefore\int_0^1dx\int_0^xcxydy=1$

$\therefore$ $\frac{c}{8}=1$ $c=8$

（2） X 的边际分布密度 $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}4x^3 & 0\le x\le1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

Y 的边际分布密度 $p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}4y(1-y^2) & 0\le y\le1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（3）$\because$ $p(x,y)\ne p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、Y 不独立

（4） $E(X)=\int_0^14x^4dx=0.8$ $E(Y)=\int_0^1dx\int_0^x8xy^2dy=\frac{8}{15}$

$$E(XY)=\int_0^1dx\int_0^x8x^2y^2dy=\frac{4}{9}$$

（三）

解 1. $E(X)=\int_\theta^{+\infty}xe^{-(x-\theta)}dx=-xe^{-(x-\theta)}\big|_\theta^{+\infty}+\int_\theta^{+\infty}e^{-(x-\theta)}dx=\theta+1$，

由矩估计法，令 $\overline{X}=\theta+1$，则 θ 的矩估计量为：$\hat{\theta}_1=\overline{X}-1$

2. 似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}e^{-(x_i-\theta)} & x_1,x_2,...,x_n\geq\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$=\begin{cases}e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta} & \theta\leq\min\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当 $\theta\leq\min(x_1,x_2,...,x_n)$ 时，$L(\theta)$ 随 θ 的增加而递增

所以 $\hat{\theta}_2=\min\limits_{1\leq i\leq n}\{X_i\}$ 是 θ 的最大似然估计

3.的 $\hat{\theta}_2=\min\limits_{1\leq i\leq n}\{X_i\}$ 密度函数为 $g(x)=\begin{cases}ne^{-n(x-\theta)} & x\geq\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

4 . $E(\hat{\theta}_2)=\int_{\theta}^{\infty}xg(x)dx=\theta+\frac{1}{n}$，所以 $\hat{\theta}_2=\min\limits_{1\leq i\leq n}\{X_i\}$ 不是 θ 的无偏估计。

(四)

① 选取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

② 给出检验水平 α，给定检验水平 α，查 $t(n-1)$ 分布表可得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$。

H_0 成立时 $P\left\{|T|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\alpha$，

③ 根据样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，算得 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

④ 若 $|T|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 则拒绝 H_0；否则接受 H_0。

（三）2011 春季答案

一．填空题

1． 0.75；2． $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$；3． $\dfrac{2}{\pi(4+y^2)}$；4． $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$； 5．2；

二．**单选题** 1-----6 ②③①③①④

三．**判断题** 1---5 √√√××

四．**综合题**

（一）解：记 A_1, A_2, A_3 分别表示取到的盒子是甲盒、乙盒和丙盒；

$B=\{$取得的是红芯圆珠笔$\}$

据题意得：$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{3}$ $P(B|A_1)=\dfrac{1}{3}$

$P(B|A_2)=\dfrac{2}{3}$, $P(B|A_3)=\dfrac{1}{2}$

由全概率公式的 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.5$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{2}{9}$$

（二） （1） $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$ $\therefore \int_0^1 dx\int_0^x cx^2ydy=1$

$\therefore \dfrac{c}{10}=1$ $c=10$

（2） X 的边际分布密度 $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}5x^4 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

Y 的边际分布密度 $p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{10}{3}y(1-y)^3 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（3）$\because$ $p(x,y)\ne p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、Y 不独立

（4）$E(X)=\int_0^1 5x^5dx=\dfrac{5}{6}$ $E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x 10x^2y^2dy=\dfrac{5}{9}$

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x 10x^3y^2dy=\dfrac{10}{21}$

（三）

解 1. X 的分布密度 $p(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta} & x\in[0,2\theta]\\ 0 & x\notin[0,2\theta]\end{cases}$ $\therefore E(X)=\theta$

令 $\theta=\overline{X}$ 得 $\theta=\overline{X}$ 所以 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1=\overline{X}$

2. 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)=\begin{cases} 2^{-n}\theta^{-n} & 0\le \frac{1}{2}\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le\theta \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

显然当 $\theta=\frac{1}{2}\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$ 时 $L(\theta)$ 达到最大值

所以 $\hat{\theta}_2=\frac{1}{2}\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 是 θ 的最大似然估计

3. 因为 $E(\hat{\theta}_1)=E(\overline{X})=\theta$，所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计。

因为 $\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 的密度函数为 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{2^n\theta^n} & 0\le x\le 2\theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

所以 $E(\hat{\theta}_2)=\int_0^{2\theta}\frac{1}{2}xg(x)dx=\frac{n}{n+1}\theta$，所以 $\hat{\theta}_2=\frac{1}{2}\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ 不是 θ 的无偏估计。

(四)、

① 选取统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

② 给出检验水平 α，查标准正态分布表使 $\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$，即 H_0 成立时，

$P\{Z\ge z_\alpha\}\le\alpha$

③ 根据样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，算得 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

④ 若 $Z\ge z_\alpha$ 则拒绝 H_0；否则接受 H_0。

（四）2011 秋季答案

一．填空题

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$；2. $\frac{1}{2}e^{-1}$；3. $\frac{5}{9}$；4. $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$； 5. 3；6. 4

二．单选题

1-----7 DCCBAAD

三．（一）解：记 Z 得分布函数为 $F_Z(z)$

则 $F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\sum_{i=-1}^{1}P\{X=i,X+Y\le z\}=\sum_{i=-1}^{1}P\{X=i,Y\le z-i\}$

$=\sum_{i=-1}^{1}P\{X=i\}P\{Y\le z-i\}=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z-1\}$

因为 Y 服从（0 ，1）上的均匀分布

所以　当 $z\le -1$ 时，$F_Z(z)=0$ ；当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$

当 $-1<z<0$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}=\frac{z+1}{3}$

当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z\}=\frac{z+1}{3}$

当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z-1\}=\frac{z+1}{3}$

于是 $F_Z(z)=\begin{cases}0 & z<-1\\ \frac{1+z}{3} & -1\le z<2\\ 1 & z\ge 2\end{cases}$　　Z 的概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3} & -1<z<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（二）

（1）$\because$　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$　　$\therefore \int_0^1 dx\int_0^{2x}c\,dy=1$　　$\therefore$　$c=1$

（2）X 的边际分布密度 $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

Y 的边际分布密度 $p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}1-\frac{y}{2} & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（3）$\because$　$p(x,y)\ne p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、Y 不独立，

（4）$P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1}p(x,y)dxdy=\frac{1}{3}$

（三）

解 1. 当 $\alpha=1$ 时，X 的分布密度 $p(x,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{(\beta+1)}} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$　$\therefore E(X)=\frac{\beta}{\beta-1}$

令 $\frac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$　　得 $\beta=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$　所以 β 的距估计量 $\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$

2. 当 $\beta=2$ 时，X 的分布密度 $p(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3} & x>\alpha \\ 0 & x\le\alpha\end{cases}$

似然函数 $L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3} & \alpha<\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\} \\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

当 $\alpha<\min\limits_{i\le i\le n}\{x_i\}$ 时，$L(\alpha)>0$；且 α 越大 $L(\alpha)$ 越大；所以是 α 的最大似然估计为

$\hat{\alpha}=\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$

(四)解 因为 $X_1,X_2,\cdots\cdots X_n$ 为采自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单 随机样本

所以 $E(X_i)=0,D(X_i)=1$ 且 $X_1,X_2,\cdots\cdots X_n$ 独立都服从 $N(0,1)$

$$E(\overline{X})=E(X)=0,D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{1}{n}\qquad E(S^2)=D(X)=1$$

$$E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{1}{n}\qquad ET=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)=0$$

又 $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立，且 $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，$n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$

$$D[(n-1)S^2]=2(n-1)\qquad D[n\overline{X}^2]=2\qquad D(S^2)=\frac{2}{n-1}\quad D(\overline{X}^2)=\frac{2}{n^2}$$

$$DT=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^2(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}$$

四、① 选取统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$；

② 给出检验水平 α，查标准正态分布表使 $\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$，

即 H_0 成立时，$P\{Z\le -z_\alpha\}\le\alpha$；

③ 根据样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，算得 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ；

④ 若 $Z\le -z_\alpha$ 则拒绝 H_0；否则接受 H_0。

（五）2012 春季答案

一.

1. $\dfrac{1}{4}$ 2. $2e^{-2}$ 3. $\dfrac{e^2}{\sqrt{\pi}}$ 4. $1-\alpha-\beta$ 5. $\dfrac{1}{n-1}$。,

二. 单选题 1-----6 ADCDD C

三.(一)解:设 A 表示"从甲,乙两盒中各取 1 球,颜色相同",

B_k 表示"甲盒中有 k 只白球", $k=0,1,2,3,4.$

显然 B_1,B_2,B_3 互不相容且 $A\subset B_1\bigcup B_2\bigcup B_3$,

从而有

$$P(B_1)=\frac{C_4^1\cdot C_4^3}{C_8^4}=\frac{8}{35}\qquad P(A\mid B_1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

$$P(B_2)=\frac{C_4^2\cdot C_4^2}{C_8^4}=\frac{18}{35},\quad P(A\mid B_2)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{4}{8}.$$

$$P(B_3)=\frac{C_4^3\cdot C_4^1}{C_8^4}=\frac{8}{35}\qquad P(A\mid B_3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$

$$P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)P(A\mid B_k)=\frac{8}{35}\cdot\frac{3}{8}+\frac{18}{35}\cdot\frac{4}{8}+\frac{8}{35}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{7}$$

$$P(B_2\mid A)=\frac{P(B_2)P(A\mid B_2)}{P(A)}=\frac{3}{5}$$

(二)

(1) $\because\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1\qquad\therefore\ \int_0^1 dx\int_0^1 cx^2y\,dy=1\qquad\therefore\ c=6$

(2) X 的边际分布密度 $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

Y 的边际分布密度 $p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}2y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(3)$\because\ p(x,y)=p_1(x)p_2(y)$ 所以 X、Y 独立,(4) $P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}p(x,y)dxdy=\dfrac{2}{5}$

(三)

解 $EX=\int_2^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda(x-2)}dx=\dfrac{1}{\lambda}+2$ 令 $\mu=EX$,即 $\mu=\dfrac{1}{\lambda}+2$,于是 λ 的矩估计

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}-2}$$

样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的极大似然函数为

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n)}, & \text{一切} x_i > 2 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda(\sum_{i=1}^{n} x \ \ - 2n);\qquad \frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - (\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n) = 0$$

故λ的极大似然估计是$\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\bar{X} - 2}$ 。

(四) $X_i (i = 0,1,2, \cdots n)$的分布函数是$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

则$Z = \min\{ X_1, X_2 \cdots X_n \}$的分布函数为

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F(z)]^n = \begin{cases} 1 - e^{-nx}, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

Z 的概率密度为$f_Z(z) = \begin{cases} ne^{-nx}, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

于是E（Z）$= \int_0^{+\infty} zne^{-nz} dz = \dfrac{1}{2}$ $\quad E(Z^2) = \int_0^{+\infty} z^2 ne^{-nz} dz = \dfrac{2}{n^2}$ $\quad D(Z) = \dfrac{1}{n^2}$

四.

① 选取统计量$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$；

② 给出检验水平α，查标准正态分布表使$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$，

即H_0成立时，$P\{Z \geq z_\alpha\} \leq \alpha$；

③ 根据样本观察值$x_1, x_2, \cdots, x_n$,算得$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ；

④ 若$Z \geq z_\alpha$则拒绝H_0；否则接受H_0。

（六）2012 秋季答案

一．**填空题** 1． 0.4；2． $2e^{-2}$；3． $\dfrac{2}{9}$；4． σ^2+1； 5． 7；6. $\dfrac{1}{2}$

二．**单选题**

1-----7 BCCBDA

三．

（一）解：记 Z 得分布函数为 $F_Z(z)$

则 $F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\sum\limits_{i=0}^{1}P\{X=i,X+Y\le z\}=\sum\limits_{i=-0}^{1}P\{X=i,Y\le z-i\}$

$=\sum\limits_{i=0}^{1}P\{X=i\}P\{Y\le z-i\}=\dfrac{1}{2}P\{Y\le z\}+\dfrac{1}{2}P\{Y\le z-1\}$

因为 Y 服从（0 ，1）上的均匀分布

所以 当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$ ；当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$

当 $0<z<1$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{2}P\{Y\le z\}=\dfrac{z}{2}$

当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{2}P\{Y\le z\}+\dfrac{1}{2}P\{Y\le z-1\}=\dfrac{z}{2}$

于是 $F_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \dfrac{z}{2} & 0\le z<2\\ 1 & z\ge 2\end{cases}$ Z 的概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<z<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（二）

（1） $\because$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$ $\therefore$ $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1}c(x+y)dy=1$ $\therefore$ $c=1$

（2） X 的边际分布密度 $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

Y 的边际分布密度 $p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}y+\dfrac{1}{2} & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（3）$\because$ $p(x,y)\ne p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、Y 不独立，

（4） $P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}p(x,y)dxdy=\dfrac{1}{2}$

（三）

解 1. 当 $a=1$ 时，X 的分布密度 $p(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-1)} & x\ge 1\\ 0 & x<1\end{cases}$

$\therefore E(X)=\frac{1}{\lambda}+1$　　令 $\frac{1}{\lambda}+1=\overline{X}$　　得 $\lambda=\frac{1}{\overline{X}-1}$

所以 λ 的距估计量 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}-1}$

2. 当 $\lambda=1$ 时，X 的分布密度 $p(x,a)=\begin{cases} e^{-(x-a)} & x\geq a \\ 0 & x<a \end{cases}$

似然函数 $L(a)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,a)=\begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i+na} & a\leq \min\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

当 $a\leq \min\limits_{i\leq i\leq n}\{x_i\}$ 时，$L(a)>0$；且 a 越大 $L(a)$ 越大；

所以是 a 的最大似然估计为　$\hat{a}=\min\limits_{1\leq i\leq n}\{X_i\}$

(四)

解 1. (X,Y) 的全部可能取值为（0,0）、（0,1）、（1,0）、（1,1）

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{P(AB)}{P(B|A)}-P(AB)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=\frac{2}{3}$$

(X,Y) 的概率分布

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

2. $E(X)=\frac{1}{4},EY=\frac{1}{6},DX=\frac{3}{16},DY=\frac{5}{36},E(XY)=\frac{1}{12}$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\times EY=\frac{1}{24}\qquad \rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

四.

① 选取统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$；

② 给出检验水平 α，查标准正态分布表使 $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\dfrac{\alpha}{2}$，

即 H_0 成立时，$P\left\{|Z|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha$；取拒绝域 $\{|Z|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}\}$

③ 根据样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 算得 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ；

④ 若 $|Z|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ 则拒绝 H_0；否则接受 H_0。