$$
\begin{aligned}
&=(A \cup B) \cap \sim(X \cup Y) && \text{(德·摩根律)}\\
&=(A \cup B) - (X \cup Y) && \text{(补交转换律)}\\
&=\sim(X \cup Y) && (E = A \cup B)\\
&=\sim\varphi(\langle X, Y\rangle) && (\varphi\ \text{定义})
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\langle \mathcal{P}(A\cup B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, A\cup B\rangle \overset{\varphi}{\cong} \langle \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B), \wedge, \vee, -, \langle\varnothing,\varnothing\rangle, \langle A, B\rangle\rangle$。 □

19.38

证明： 作 $f : B_1/\sim \to B_2$，$\forall [x] \in B_1/\sim$，令 $f([x]) = \varphi(x)$。

由定义，对任意 $[x], [y] \in B_1/\sim$，有

$$
\begin{aligned}
& f([x]) = f([y]) \\
\iff & \varphi(x) = \varphi(y) && (f\ \text{定义})\\
\iff & x \sim y && (\sim\ \text{定义})\\
\iff & [x] = [y] && \text{(教材定理 2.27)}
\end{aligned}
$$

这就证明了 f 是函数，且为单射。

对任意 $y \in B_2$，由于 φ 是满射，所以存在 $x \in B_1$，使 $f([x]) = \varphi(x) = y$，所以 f 是满射，从而是双射。

由于 φ 是同态，所以对 B_1 上的任何 k_i 元运算 $\circ_i$ 和任意 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in B_1$，有

$$
\begin{aligned}
\circ_i\left(f([x_1]), f([x_2]), \cdots, f([x_{k_i}])\right) &= \circ_i(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_{k_i})) && (f\ \text{定义})\\
&= \varphi(\circ_i(x_1, x_2, \cdots, x_{k_i})) && (\varphi\ \text{是同态})\\
&= f([\circ_i(x_1, x_2, \cdots, x_{k_i})]) && (f\ \text{定义})
\end{aligned}
$$

上述关于 $\circ_i$ 的证明适用于 B_1 上的所有运算，从而证明了 f 是同构。

对任意 $x \in B_1$，由定义立即有 $f \circ g(x) = f(g(x)) = f([x]) = \varphi(x)$。这就证明了 f 是一个满足 $f \circ g = \varphi$ 的同构映射。

假设存在另一个同构映射 f'，满足 $f' \circ g = \varphi$。则对任意 $x \in B_1$，有

$$
\begin{aligned}
& f' \circ g(x) = \varphi(x) && \text{(前提)}\\
\iff & f'([x]) = \varphi(x) && (g\ \text{定义})\\
\iff & f'([x]) = f([x]) && (f[x] = \varphi(x))
\end{aligned}
$$

从而有 $f' = f$。这就证明了 f 是唯一的。 □

19.39 由有限布尔代数的表示定理可知，任何 8 元布尔代数都同构于 3 位逻辑代数 $\langle\{0,1\}^3, \wedge, \vee, -, 000, 111\rangle$，其中 $\wedge$、$\vee$ 和 $-$ 分别是按位与、按位或和按位非运算。因此，下面只需讨论 $\{0,1\}^3$ 的所有子代数即可。

由于布尔代数的子代数也是布尔代数，从而由教材定理 19.26 可知，$\{0,1\}^3$ 的子代数只能是 1、2、4 或 8 阶的。又由于子代数需要对所有运算(包括代数常元 000 和 111)封闭，所以对 $\{0,1\}^3$ 的任意子代数 B_i，必有 $000, 111 \in B_i$。这就是说，$\{0,1\}^3$ 不可能有 1 阶的子代数。

显然，$\{0,1\}^3$ 的 8 阶子代数只有它自身，$\{0,1\}^3$ 的 2 阶子代数只有 $\{000, 111\}$。

对 $\{0,1\}^3$ 的任意 4 阶子代数 B，若有 $x \in B$，$x \neq 000$，$x \neq 111$，则由子代数对补运算的封闭性知，$\bar{x} \in B$。由习题 19.16 第 (1) 小题结论可知，$\bar{x} \neq x$，又由分配格的补元唯一性可知，$\bar{x} \neq 000$，$\bar{x} \neq 111$ (若不然，比如 $\bar{x} = 111$，则 111 将有 x 和 000 两个补元，矛盾)。从而有 $B = \{000, x, \bar{x}, 111\}$。

反之，易于验证(完整证明见下题)，对任意 $x \in \{0,1\}^3$，$\{0, x, \bar{x}, 1\}$ 都是 $\{0,1\}^3$ 的一个子布尔代数。从而 $\{0,1\}^3$ 的子代数有：