$$
\begin{aligned}
&= (R_1^k \circ R_1) \cup (R_2^k \circ R_1) \cup (R_1^k \circ R_2) \cup (R_2^k \circ R_2) && \text{(教材定理 2.6(2))} \\
&= R_1^{k+1} \cup (R_2^k \circ R_1) \cup (R_1^k \circ R_2) \cup R_2^{k+1} && \text{(幂运算定义)} \\
&= R_1^{k+1} \cup \varnothing \cup \varnothing \cup R_2^{k+1} && \text{(引理 2.2)} \\
&= R_1^{k+1} \cup R_2^{k+1} && \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

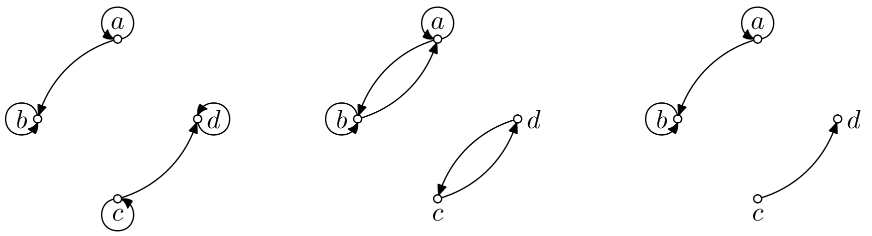
□

2.28 $m = 0, n = 15$。[3]

2.29 $r(R) = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,d\rangle\}$;

$s(R) = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle\}$;

$t(R) = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$。



$r(R)$ $s(R)$ $t(R)$

2.30

(1)

证明: 由传递闭包的定义知，$R^+ = t(R)$ 是传递的。又由教材定理 2.19(3) 知，$(R^+)^+ = t(R^+) = R^+$。 □

(2)

证明: 由教材定理 2.22 和 2.24 知，$R^\oplus = rt(R)$。又由教材定理 2.25(3) 知，$R^\oplus$ 是自反的和传递的。再由教材定理 2.19(3) 知，$trt(R) = rt(R)$。最后由教材定理 2.19(1) 和 2.25(3) 知，$rtrt(R) = trt(R)$。于是，$(R^\oplus)^\oplus = rtrt(R) = trt(R) = rt(R) = R^\oplus$。 □

(3)

证明:

$$
\begin{aligned}
R \circ R^\oplus &= R \circ \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i && \text{(定义)} \\
&= \bigcup_{i=0}^{\infty} R \circ R^i && \text{(教材定理 2.6(1))} \\
&= \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{i+1} && \text{(教材定理 2.17(1))} \\
&= \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i && (i := i+1) \\
&= t(R) && \text{(教材定理 2.24)} \\
&= R^+ && \text{(定义)}
\end{aligned}
$$

同理可证：$R^+ = R^\oplus \circ R$。 □

[3]题目中“最小的自然数 $m, n(m \le n)$”应改为“最小的自然数 $m, n(m < n)$”。否则取 $m = n = 0$ 即可。