定理 7.11 设 G 是 $n(n \geq 6)$ 阶简单无向连通图，$\lambda(G) < \delta(G)$，则必存在由 K_{n_1}, K_{n-n_1} 及在它们之间适当地连入 $\lambda(G)$ 条边，含 G 作为生成子图的图 G^*，其中 $\lambda(G)+2 \leq n_1 \leq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$.

推论

(1) $\delta(G) \leq \delta(G^*) \leq n_1 - 1 \leq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor - 1$;

(2) G^* 中存在不相邻的顶点 u, v，使得 $d_{G^*}(u) + d_{G^*}(v) \leq n-2$;

(3) $d(G) \geq d(G^*) \geq 3$.

定理 7.12 设 G 是 $n(n \geq 6)$ 阶连通简单无向图.

(1) 若 $\delta(G) \geq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$，则 $\lambda(G) = \delta(G)$;

(2) 若对于 G 中任意一对不相邻的顶点 u, v 均有 $d(u) + d(v) \geq n-1$，则 $\lambda(G) = \delta(G)$;

(3) 若 $d(G) \leq 2$，则 $\lambda(G) = \delta(G)$.

定理 7.13 设 G 是 n 阶无向简单连通图，且 G 不是完全图 K_n，则

$$\kappa(G) \geq 2\delta(G) - n + 2.$$

定理 7.14 对于给定的正整数 $n, \delta, \kappa, \lambda$，存在 n 阶简单连通无向图 G，使得 $\delta(G) = \delta$，$\kappa(G) = \kappa$，$\lambda(G) = \lambda$ 的充分必要条件是下列三式之一成立:

(1) $0 \leq \kappa \leq \lambda \leq \delta < \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$;

(2) $1 \leq 2\delta - n + 2 \leq \kappa \leq \lambda = \delta < n-1$;

(3) $\kappa = \lambda = \delta = n-1$.

定理 7.15 (Whitney) 设 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶无向连通图，G 为 2-连通图当且仅当 G 中任意两个顶点共圈.

定理 7.16 设 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶无向图，G 为 2 边-连通图当且仅当 G 中任何两个顶点共简单回路.

定理 7.17 设 v 为无向连通图 G 中的一个顶点，v 为 G 的割点当且仅当存在 $V(G) - v$ 的一个划分: $V(G) - v = V_1 \cup V_2$，使得对于任意的 $u \in V_1$，任意的 $w \in V_2$，v 在每一条 u 到 w 的路径上.

推论 设 v 为无向连通图 G 中的一个顶点，v 为割点当且仅当存在与 v 不同的两个顶点 u 和 w，使 v 处在每一条从 u 到 v 的路径上.

定理 7.18 设 e 为无向连通图 G 中的一条边，e 是 G 的桥当且仅当 e 不在 G 中的任何圈上.

定理 7.19 设 e 为无向连通图 G 中的一条边，e 为桥当且仅当存在 $V(G)$ 的一个划分: $V(G) = V_1 \cup V_2$ 使得对于任意的 $u \in V_1, v \in V_2$，e 在每一个 u 到 v 的路径上.

定理 7.20 设 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单连通图，则下面命题是等价的:

(1) G 是块;

(2) G 中任意二顶点共圈;

(3) G 中任意一个顶点与任意一条边共圈;

(4) G 中任意两条边共圈;

(5) 任给 G 中两个顶点 u, v 和一条边 e，存在从 u 到 v 经过 e 的路径;

(6) 对于 G 中的任意 3 个顶点中的两个顶点，都存在从一个顶点到另一个顶点且含第 3 个顶点的路径;

(7) 对于 G 中任意 3 个顶点中的任意两个顶点，都存在从一个顶点到另一个顶点而不含第 3 个顶点的路径.