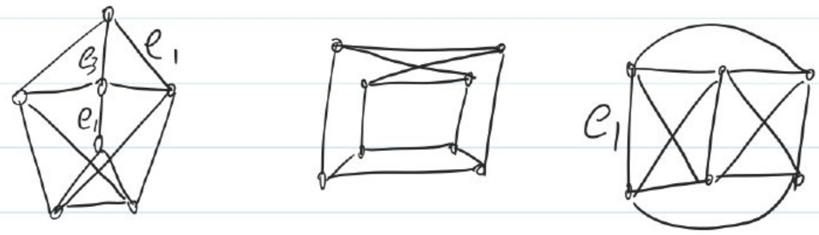
离散作业 十一.

陈扬,17150011001,71

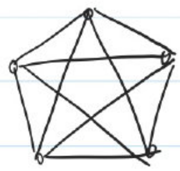
2019年5月26日 18:01

9, 11, 12, 13, 14, 15, 题十一.

9. 证明11.19 所示各图均为非平面图.

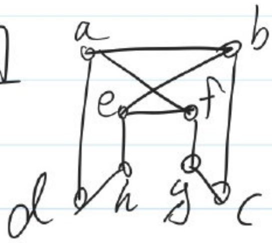


(a). 收缩 e_1, e_2 e_3 得 K_5,



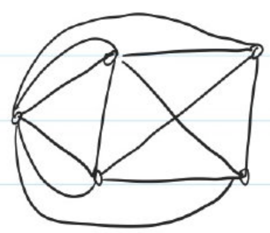
, 由定理11.14得, (a)不是平面图

(b). 收缩子图



, $V_1=\{b,f,d\}$,
$V_2=\{a,c,e\}$,
与 $K_{3,3}$ 同构.

(c). 收缩 e_1 得,



, 含有子图 K_5.

11. 设n阶m条边的平面图是自对偶图, 证 $m=2n-2$.

∵自对偶 $p=1$

联立 $\begin{cases} n=n^*=r^* \\ m=n+r-1-p=n+r-2 \\ r=n^*=n \end{cases}$.

$\Rightarrow m=2n-2$.

12、设G是n(n≥4)阶极大的平面图，证明G是对偶图G*是2-边连通的3-正则图

↳ 由定理11.4得，G*是2边连图，
由n≥4，得原G中各圈的次为3，故G中不存环，故G*中不存在桥，
∵ G*是连通图且G*中不含桥，所以G*至少为2-边连通的，
由11.15可以证明，G*中至少每个顶点存在3度数，
所以 G*是3-正则图。
综上所述，G*是2-边连通的3-正则图。

13、设G是2-边连通的简单平面图，且每个面的边界至多有一条公共边
证明G中至少有两个面的次数相同。

∵ G是2边连通图，∴ G中无桥
∵ G是简单平面图，对任意面R_i，∃ $deg(R_i)\geq 3$，
且每个面的边界上的边全为公共边，于是 $deg(R_i)\leq r-1$，
综上对 $\forall R_i$，$3\leq deg(R_i)\leq r-1$

对于r个面，每个面次数的可能取值至多有
$r-1-(3-1)=r-3$ 种
由鸽巢原理可得，G中至少有两个面次数相同。

14、证明：平面图G的对偶图G*是欧拉图，当且仅当G中每个面次数均为偶数。

必要性：∵G*连通且为欧拉图，所以$\forall v_i^*\in V(G^*)$，
$d(v_i^*)$为偶数，而对于G的任意的面R_i，∃G*的

顶点 v_i^* 在 R_i 中，由定理 11.15 可知，$\deg(R_i) = d(v_i^*)$
于是 $\deg(R_i)$ 为偶数.

充分性：　任何平面图的对偶图均为连通图，
所以 $\forall v_i^* \in V(G^*)$，$d(v_i^*)$ 为偶数，
且 G^* 中 $\forall R_i$，$\deg(R_i^*) = d(v_i^*)$，由 10.14 得 G^*
为欧拉图.

15. 证明：不存在具有 5 个面，且每两个面的边界都共享一条公共边的平面图.
反证法. 若存在具有 5 个面且每两个面的边界都共享一条公边的平面图. 则 $\deg(R_i) = 4$，$i = 1, 2, 3, 4, 5$，且 G 中不含环和平行边
于是 G 的对偶图 G^* 是 5 阶连通简单图，且 $\forall v_i^* \in V(G^*)$
$d(v_i^*) = 4$，因而 G^* 为 5 阶完全图 K_5，但 K_5 不是平面图.
与平面图相矛盾.