第三章　函数

定理 3.1 设 $f: C \to D$，则 f 为单射的，$\mathscr{C}$ 为 C 的非空的子集族，$C_1, C_2 \subseteq C$，则
(1)　$f(\cup\mathscr{C}) = \cup\{f(A) \mid A \in \mathscr{C}\}$;
(2)　$f(\cap\mathscr{C}) = \cap\{f(A) \mid A \in \mathscr{C}\}$;
(3)　$f(C_1 - C_2) = f(C_1) - f(C_2)$.

定理 3.2 设 $f: C \to D$，$D_1, D_2 \subseteq D$，$\mathscr{D}$ 是 D 的非空子集族，则
(1)　$f^{-1}(\cup\mathscr{D}) = \cup\{f^{-1}(D) \mid D \in \mathscr{D}\}$;
(2)　$f^{-1}(\cap\mathscr{D}) = \cap\{f^{-1}(D) \mid D \in \mathscr{D}\}$;
(3)　$f^{-1}(D_1 - D_2) = f^{-1}(D_1) - f^{-1}(D_2)$.

定理 3.3 设 $g: A \to B$，$f: B \to C$，则 $f \circ g: A \to C$，且对于任意的 $x \in A$，
$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

定理 3.4 设 $g: A \to B$，$f: B \to C$.
(1)　如果 f 和 g 都是满射的，则 $f \circ g$ 是满射的;
(2)　如果 f 和 g 都是单射的，则 $f \circ g$ 是单射的;
(3)　如果 f 和 g 都是双射的，则 $f \circ g$ 是双射的.

定理 3.5 设 $g: A \to B$，$f: B \to C$.
(1)　如果 $f \circ g$ 是满射的，则 f 是满射的;
(2)　如果 $f \circ g$ 是单射的，则 g 是单射的;
(3)　如果 $f \circ g$ 是双射的，则 g 是单射的，f 是满射的.

定理 3.6 设 $f: A \to B$，I_A, I_B 分别为 A 上和 B 上的恒等函数，则
$$f \circ I_A = I_B \circ f.$$

定理 3.7 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，已知 f 和 g 按实数集上的“$\leq$”关系都是单调增加的，则 $f \circ g$ 也是单调增加的.

定理 3.8 设 A 为一个集合，A^{-1} 为函数当且仅当 A 为单根的.

推论 设 R 为二元关系，R 为函数当且仅当 R^{-1} 是单根的.

定理 3.9 设 $f: A \to B$，且 f 为双射函数，则 $f^{-1}: B \to A$，且也为双射函数.

定理 3.10 设 $f: A \to B$，且 $A \neq \varnothing$.
(1)　f 存在左逆当且仅当 f 是单射的;
(2)　f 存在右逆当且仅当 f 是满射的;
(3)　f 既有左逆又有右逆当且仅当 f 是双射的;
(4)　如果 f 是双射的，则 f 的左逆与右逆相等.