如，我们可以 $\mathbb{N}$ 上定义一个关系 $R_1=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N\wedge y=x+1\}$。注意到，对任意 $k\in\mathbb{N}$，$R_1^k=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N\wedge y=x+k\}$，从而不存在 $m,n\in\mathbb{N}$，使得 $m\neq n\wedge R_1^m=R_1^n$。

2.27 先证两个引理。

引理 2.1 对任意二元关系 R_1,R_2，有：$\mathrm{dom}(R_1\circ R_2)\subseteq\mathrm{dom}\,R_2$ 和 $\mathrm{ran}(R_1\circ R_2)\subseteq\mathrm{ran}\,R_1$。特别地，对所有 $m\in\mathbb{N}_+$，有 $\mathrm{dom}(R_1^m)\subseteq\mathrm{dom}\,R_1$ 和 $\mathrm{ran}(R_1^m)\subseteq\mathrm{ran}\,R_1$。

证明:

$$
\begin{aligned}
&\forall x,y\\
&\langle x,y\rangle\in R_1\circ R_2\\
\iff&\exists z(\langle x,z\rangle\in R_2\wedge\langle z,y\rangle\in R_1) && \text{(合成运算定义)}\\
\Longrightarrow&\exists z(\langle x,z\rangle\in R_2)\wedge\exists z(\langle z,y\rangle\in R_1) && \text{(一阶谓词推理定律)}\\
\iff&x\in\mathrm{dom}\,R_2\wedge y\in\mathrm{ran}\,R_1 && \text{(dom、ran 定义)}
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\mathrm{dom}(R_1\circ R_2)\subseteq\mathrm{dom}\,R_2$ 和 $\mathrm{ran}(R_1\circ R_2)\subseteq\mathrm{ran}\,R_1$。

令 $R_2=R_1$ 并对 m 作归纳即得此引理的特殊情况：$\forall m\in\mathbb{N}_+,\mathrm{dom}(R_1^m)\subseteq\mathrm{dom}\,R_1\wedge\mathrm{ran}(R_1^m)\subseteq\mathrm{ran}\,R_1$。 □

引理 2.2 对任意二元关系 R_1,R_2，若 $\mathrm{fld}\,R_1\cap\mathrm{fld}\,R_2=\varnothing$，则 $\forall m,n\in\mathbb{N}_+(R_1^m\circ R_2^n=\varnothing)$。

证明: 先证：$\forall R_1,R_2((\mathrm{fld}\,R_1\cap\mathrm{fld}\,R_2=\varnothing)\Rightarrow(R_1\circ R_2=\varnothing))$。

若不然，就有 $\langle x,y\rangle\in(R_1\circ R_2)$。由合成运算定义知，$\exists z(\langle x,z\rangle\in R_2\wedge\langle z,y\rangle\in R_1)$。从而有 $z\in\mathrm{ran}\,R_2\subseteq\mathrm{fld}\,R_2$ 和 $z\in\mathrm{dom}\,R_1\subseteq\mathrm{fld}\,R_1$，于是有 $z\in\mathrm{fld}\,R_1\cap\mathrm{fld}\,R_2$，与前题矛盾。

这就证明了：$\forall R_1,R_2((\mathrm{fld}\,R_1\cap\mathrm{fld}\,R_2=\varnothing)\Rightarrow(R_1\circ R_2=\varnothing))$。

下面证原命题。

由引理 2.1 知，$\mathrm{dom}(R_1^m)\subseteq\mathrm{dom}\,R_1$ 且 $\mathrm{ran}(R_1^m)\subseteq\mathrm{ran}\,R_1$，从而有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{fld}(R_1^m)&=\mathrm{dom}(R_1^m)\cup\mathrm{ran}(R_1^m) && \text{(fld 定义)}\\
&\subseteq\mathrm{dom}\,R_1\cup\mathrm{ran}\,R_1 && \text{(引理 2.1、引理 1.4)}\\
&=\mathrm{fld}\,R_1 && \text{(fld 定义)}
\end{aligned}
$$

同理可得 $\mathrm{fld}(R_2^n)\subseteq\mathrm{fld}\,R_2$。从而有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{fld}(R_1^m)\cap\mathrm{fld}(R_2^n)&\subseteq\mathrm{fld}\,R_1\cap\mathrm{fld}\,R_2 && \text{(引理 1.5)}\\
&=\varnothing && \text{(题设)}
\end{aligned}
$$

使用本证明前半部分的结论，就有：$R_1^m\circ R_2^n=\varnothing$。 □

下面证原题。

证明: 用归纳法证明。

当 $m=0$ 时：

由于 $R_1\cup R_2$ 仍是 A 上的二元关系。故有：

$$
\begin{aligned}
(R_1\cup R_2)^0&=I_A && \text{(幂运算定义)}\\
&=I_A\cup I_A && \text{(幂等律)}\\
&=R_1^0\cup R_2^0 && \text{(幂运算定义)}
\end{aligned}
$$

设 $m=k$ 时 ($k\in\mathbb{N}$)，等式成立，即有：$(R_1\cup R_2)^k=R_1^k\cup R_2^k$。

则，当 $m=k+1$ 时：

$$
\begin{aligned}
(R_1\cup R_2)^{k+1}&=(R_1\cup R_2)^k\circ(R_1\cup R_2) && \text{(幂运算定义)}\\
&=(R_1^k\cup R_2^k)\circ(R_1\cup R_2) && \text{(归纳前提)}\\
&=(R_1^k\cup R_2^k)\circ R_1\cup(R_1^k\cup R_2^k)\circ R_2 && \text{(教材定理 2.6(1))}
\end{aligned}
$$