结论知，$\overline{\circ}_i$ 和 $\overline{\circ}_j$ 也满足交换律。同是，任取 $x, y \in B$，因 φ 是满射，所以存在 $a, b \in A$，使 $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y$。从而有：

$$\begin{aligned}
x\overline{\circ}_i(x\overline{\circ}_j y) &= \varphi(a)\overline{\circ}_i(\varphi(a)\overline{\circ}_j\varphi(b)) && (\varphi(a) = x, \varphi(b) = y) \\
&= \varphi(a)\overline{\circ}_i\varphi(a \circ_j b) && (\varphi \text{ 是同态映射}) \\
&= \varphi(a \circ_i (a \circ_j b)) && (\varphi \text{ 是同态映射}) \\
&= \varphi(a) && (\circ_i, \circ_j \text{ 是可吸收的}) \\
&= x && (\varphi(a) = x)
\end{aligned}$$

同理可证 $x\overline{\circ}_j(x\overline{\circ}_i y) = x$。

从而 $\overline{\circ}_i, \overline{\circ}_j$ 也是可吸收的。 □

(4)

证明: ① 若 e 是 V_1 中关于 $\circ_i$ 是单位元，则：任取 $x \in B$，因 φ 是满射，所以存在 $a \in A$，使 $\varphi(a) = x$。从而有：

$$\begin{aligned}
x\overline{\circ}_i\varphi(e) &= \varphi(a)\overline{\circ}_i\varphi(e) && (\varphi(a) = x) \\
&= \varphi(a \circ_i e) && (\varphi \text{ 是同态映射}) \\
&= \varphi(a) && (e \text{ 是关于 } \circ_i \text{ 是单位元}) \\
&= x && (\varphi(a) = x)
\end{aligned}$$

同理可证 $\varphi(e)\overline{\circ}_i x = x$。

从而 $\varphi(e)$ 是的 V_2 中关于 $\overline{\circ}_i$ 单位元。

② 若 θ 是 V_1 中关于 $\circ_i$ 是零元，则：任取 $x \in B$，因 φ 是满射，所以存在 $a \in A$，使 $\varphi(a) = x$。从而有：

$$\begin{aligned}
x\overline{\circ}_i\varphi(\theta) &= \varphi(a)\overline{\circ}_i\varphi(\theta) && (\varphi(a) = x) \\
&= \varphi(a \circ_i \theta) && (\varphi \text{ 是同态映射}) \\
&= \varphi(\theta) && (\theta \text{ 是关于 } \circ_i \text{ 是零元})
\end{aligned}$$

同理可证 $\varphi(\theta)\overline{\circ}_i x = \theta$。

从而 $\varphi(\theta)$ 是的 V_2 中关于 $\overline{\circ}_i$ 零元。 □

(5)

证明: 设 x^{-1} 是 x 关于 $\circ_i$ 的逆元，则：

$$\begin{aligned}
\varphi(x)\overline{\circ}_i\varphi(x^{-1}) &= \varphi(x \circ_i x^{-1}) && (\varphi \text{ 是同态映射}) \\
&= \varphi(e) && (x^{-1} \text{ 是 } x \text{ 的逆元})
\end{aligned}$$

由第 (4) 小题结论知，$\varphi(e)$ 是 V_2 中关于 $\overline{\circ}_i$ 单位元。从而知 $\varphi(x^{-1})$ 是 $\varphi(x)$ 关于 $\overline{\circ}_i$ 的右逆元。同理可证 $\varphi(x^{-1})$ 也是 $\varphi(x)$ 关于 $\overline{\circ}_i$ 的左逆元。因此，$\varphi(x^{-1})$ 是 $\varphi(x)$ 关于 $\overline{\circ}_i$ 的逆元。 □

15.22

证明: 由教材定理 3.3 知，$\varphi_2 \circ \varphi_1 : A \to C$ 且 $\forall x \in A, \varphi_2 \circ \varphi_1(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$。

因此，$\forall x, y \in A$，

$$\begin{aligned}
\varphi_2 \circ \varphi_1(x \circ y) &= \varphi_2(\varphi_1(x \circ y)) && (\text{教材定理 } 3.3) \\
&= \varphi_2(\varphi_1(x) * \varphi_1(y)) && (\varphi_1 \text{ 是 } V_1 \text{ 到 } V_2 \text{ 的同态}) \\
&= \varphi_2(\varphi_1(x)) \cdot \varphi_2(\varphi_1(y)) && (\varphi_2 \text{ 是 } V_2 \text{ 到 } V_3 \text{ 的同态}) \\
&= \varphi_2 \circ \varphi_1(x) \cdot \varphi_2 \circ \varphi_1(y) && (\text{教材定理 } 3.3)
\end{aligned}$$

从而 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ 是 V_1 到 V_3 的同态。 □