第五章　基数(势)

定理 5.1 (1) $\mathbb{Z}\approx\mathbb{N}$; (2) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\approx\mathbb{N}$; (3) $\mathbb{N}\approx\mathbb{Q}$; (4) $(0,1)\approx\mathbb{R}$; (5) $[0,1]\approx(0,1)$.

定理 5.2 设 A 为任意的集合，则 $\mathcal{P}(A)\approx(A\to 2)$，其中 $(A\to 2)$ 为 2^A，即 A 到 $2=\{0,1\}$ 的全体函数.

定理 5.3 设 A,B,C 为任意的集合，则

(1) $A\approx A$;

(2) 若 $A\approx B$，则 $B\approx A$;

(3) 若 $A\approx B$ 且 $B\approx C$，则 $A\approx C$.

定理 5.4 (康托定理)

(1) $\mathbb{N}\not\approx\mathbb{R}$;

(2) 设 A 为任意的集合，则 $A\not\approx\mathcal{P}(A)$.

定理 5.5 不存在与自己的真子集等势的自然数.

推论 1 不存在与自己的真子集等势的有穷集合.

推论 2

(1) 任何与自己的真子集等势的集合都是无穷集.

(2) $\mathbb{N}$ 是无穷集.

推论 3 任何有穷集合都与惟一的自然数等势.

定理 5.6 任何有穷集合的子集仍为有穷集合.

定理 5.7 设 A,B 为任意二集合，则 $A\preccurlyeq\cdot B$ 当且仅当存在 $C\subseteq B$，使得 $A\approx C$.

推论 设 A,B 为二集合.

(1) 若 $A\subseteq B$，则 $A\preccurlyeq\cdot B$;　　(2) 若 $A\approx B$，则 $A\preccurlyeq\cdot B$ 且 $B\preccurlyeq\cdot A$.

定理 5.8 设 A,B,C 为三个集合.

(1) $A\preccurlyeq\cdot A$;　　(2) 若 $A\approx B$ 且 $B\preccurlyeq\cdot C$，则 $A\preccurlyeq\cdot C$.

定理 5.9 设 A,B,C,D 为 4 个集合，已知 $A\preccurlyeq\cdot B$ 且 $C\preccurlyeq\cdot D$，则

(1) 若$B\cap D=\varnothing$，则 $A\cup C\preccurlyeq\cdot B\cup D$;　　(2) $A\times C\preccurlyeq\cdot B\times D$.

定理 5.10 设 A,B,C,D 为 4 个集合，且已知 $\operatorname{card}A=\operatorname{card}C=\kappa,\operatorname{card}B=\operatorname{card}D=\lambda$，则

$$A\preccurlyeq\cdot B \text{ 当且仅当 } C\preccurlyeq\cdot D.$$

定理 5.11 设 A 为任意一个集合，则

$$\operatorname{card}A<\operatorname{card}\mathcal{P}(A).$$