第一章　插值方法

高　云

举例

已经测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（°C）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

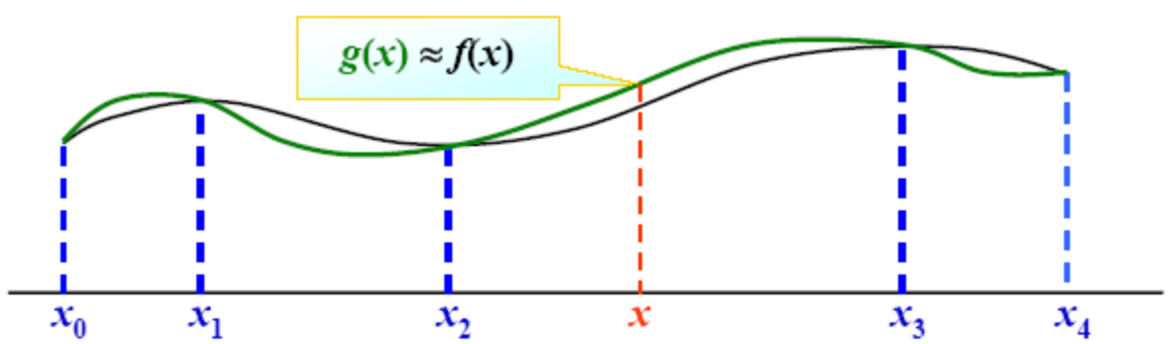
根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如500米，600米，1000米...）处的水温

这就是本章要讨论的“插值问题”

插值方法的意义

- 当函数 $y=f(x)$ 非常复杂或未知时，在一系列节点 $x_0,\dots,x_n$ 处测得函数值 $y_0=f(x_0)$，…，$y_n=f(x_n)$，由此构造一个$\boxed{\text{简单易算}}$的近似函数 $g(x)\approx f(x)$，满足条件 $g(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,\dots n)$。称$g(x)$ 为$f(x)$ 的插值函数。

- 最常用的插值函数是 多项式



插值方法的应用

对于早期的插值问题来说，**f(x)**通常是已知函数，比如对数函数，指数函数，三角函数等，并且已经有了这些函数值列表，插值法可以用来计算那些不在表中的点处的函数值。对于这一类问题来说，现在已经不需要用插值方法来计算。

插值方法的应用

对于现在的许多实际问题来说，我们并不知道**f(x)**的具体形式，所对应的函数值可能是由测量仪器或其他物理设备中直接读出来的，**f(x)**只是一个数学概念意义下的函数。

（比如：图像的方法处理，天气预报，机床加工等方面）

插值函数的类型有很多种

最常用的插值函数是 代数多项式

用代数多项式作插值函数的插值称为代数插值

本章主要讨论的内容

插值法

插值问题 → 插值函数

代数插值

- 一、插值问题解的存在唯一性？
- 二、插值多项式的常用构造方法？
- 三、插值函数的误差如何估计？

1.泰勒插值

18世纪早期英国牛顿学派最优秀代表人物之一的英国数学家泰勒（Brook Taylor），于1685年8月18日在米德尔塞克斯的埃德蒙顿出生。1709年后移居伦敦，获法学硕士学位。他在1712年当选为英国皇家学会会员，并于两年后获法学博士学位。同年（即1714年）出任英国皇家学会秘书，四年后因健康理由辞退职务。1717年，他以泰勒定理求解了数值方程。最后在1731年12月29日于伦敦逝世。

泰勒，B.

泰勒插值多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

条件： $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, 1, \cdots, n$

泰勒插值余项

定理 1　假设 f（x）在含有点 x_0的区间［a，b］内有直到 n +1阶导数，则当 x∈［a，b］时，对于由式（1）给出的 p_n（x），成立

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

式中 ξ界于 x_0与 x之间，因而 ξ∈［a，b］.

泰勒插值的问题描述

问题1

求作≤ n 次多项式 p_n（x），使满足条件

$$p_n^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0,1,\cdots,n$$

这里 $y_0^{(k)}(k = 0,1,\cdots,n)$ 为一组已给数据。

例题1

求做$f(x)=\sqrt{x}$在 $\mathbf{x_0}$=100 的一次和二次泰勒多项式，利用它们计算$\sqrt{115}$的近似值并估计误差。

解　由于 $\mathbf{x_0}$=100，而

$$f(x)=\sqrt{x},\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f(x_0)=10,\ f'(x)=\frac{1}{20},\ f''(x_0)=-\frac{1}{4000}$$

例题1

$f(x)$ 在 x_0 的一次泰勒多项式是

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 5 + 0.05x$$

用$p_1(x)$作为$f(x)$的近似表达式，容易求出当$\bar{x} = 115$时

$$\sqrt{115} = f(\bar{x}) \approx p_1(\bar{x}) = 10.75$$

例题1

根据定理1可估计出误差

$$0 > f(\bar{x}) - p_1(\bar{x}) = \frac{f^{2}(\xi)}{2}(\bar{x} - x_0)^2$$

$$> \frac{f^{2}(x_0)}{2}(\bar{x} - x_0)^2 = -0.028125$$

因此近似值10.75具有3位有效数字。

2.拉格朗日插值

“拉格朗日是数学科学高耸的金字塔”这是拿破仑对18世纪最伟大、最谦虚的数学家拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange,1736-1813)经过斟酌的评价。

一旦理解了拉格朗日的方法，它几乎都是平淡无奇的。

19岁就开始构思杰作《分析力学》，28岁获得了法国科学院大奖。

2.拉格朗日插值

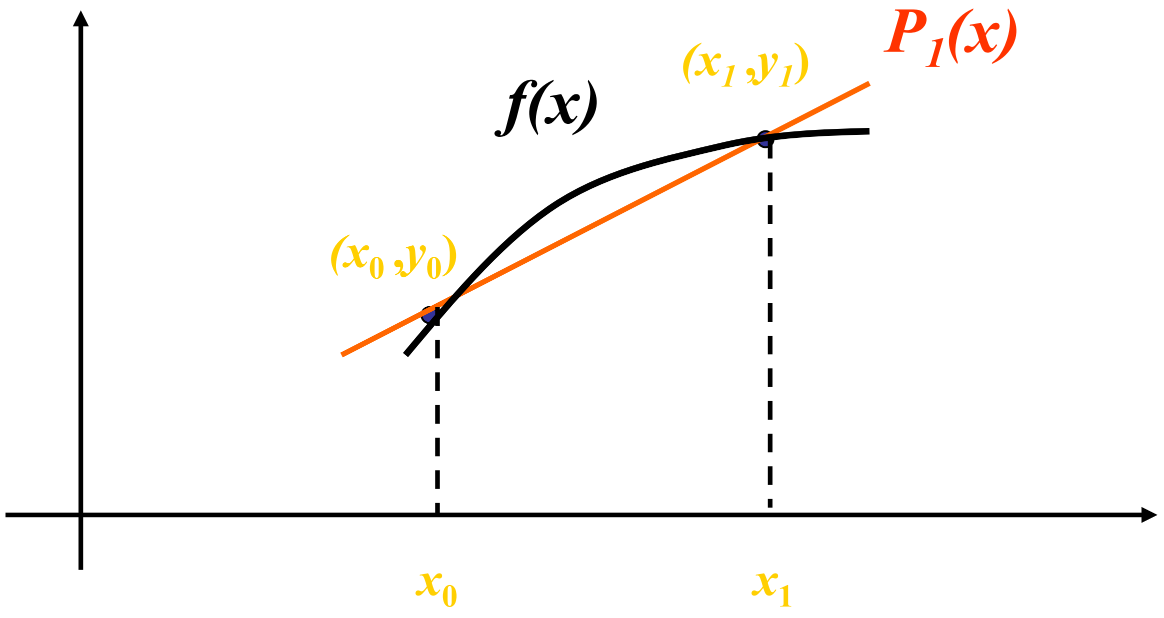
问题2

求作≤ n 次多项式 p_n（x），使满足条件

$$p_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n \qquad (2)$$

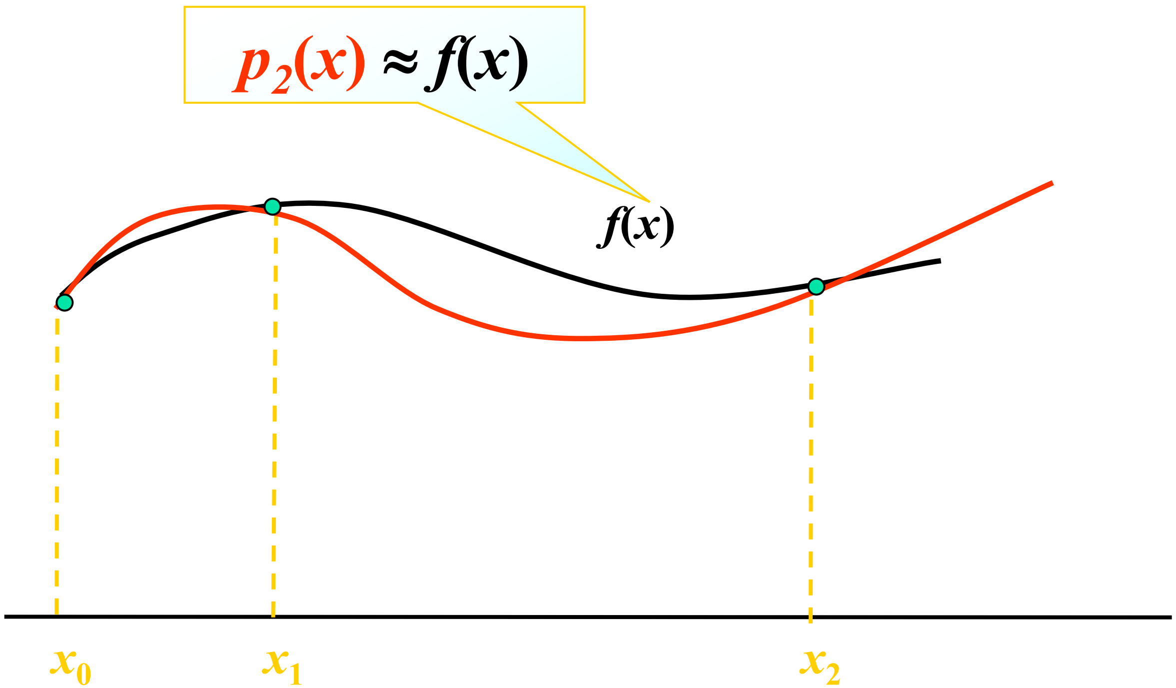
这就是所谓拉格朗日（ Lagrange）插值.

线性插值



可见 $P_1(x)$ 是过 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 两点的直线。

抛物线插值



因过三点的二次曲线为抛物线，故称为抛物插值。

插值问题的可解性

设所求的插值多项式为

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

待定系数法

可建立关于系数 a_0，a_1，…，a_n的线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

插值问题的可解性

克莱姆法则

$$x_i = \frac{|D_i|}{|D|}$$

范德蒙行列式

$$v = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \pi_{1\le i\le j}(x_j - x_i)$$

插值问题的可解性

通过解上述方程组**(3)**求得插值多项式$p_n(x)$的方法并不可取**.**这是因为当**n**较大时解方程组的计算量较大，而且方程组系数矩阵的条件数一般较大（可能是病态方程组）**,**当阶数**n**越高时，病态越重。

为此我们必须从其它途径来求$P_n(x)$:

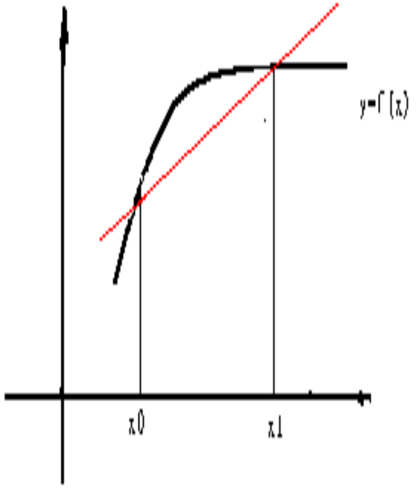
不通过求解方程组而获得插值多项式

多项式插值定理

定理 (唯一性) 满足 $P(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$ 的 n 阶插值

多项式是唯一存在的。

问题3



$n=1$ 已知 x_0, x_1；y_0, y_1， 求

$$P_1(x)=a_0+a_1x \text{ 使得} P_1(x_0)=y_0, P_1(x_1)=y_1$$

可见 $P_1(x)$ 是过 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 两点的直线。

$$\Rightarrow P_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)}_{l_0(x)}y_0+\underbrace{\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)}_{l_1(x)}y_1=\sum_{i=0}^{1}l_i(x)y_i$$

运用基函数法求拉格朗日问题

基函数的一般形式

$$p_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n$$

要使得

$$p_n(x_0) = y_0$$

则要求

$$l_0(x_0) = 1 \quad l_1(x_0) = 0 \cdots l_n(x_0) = 0$$

依此类推要满足初始条件，所有基函数必须满足下列条件。

基函数表

$$
\begin{array}{ccccc}
x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\
l_0(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
l_1(x) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_n(x) & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}
$$

构造基函数

由已知条件，假设

$$l_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

又因为

$$l_0(x_0) = 1$$

则

$$c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}$$

基函数的一般形式

即

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}=\mathop{\pi}_{1\le j\le n}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}=\mathop{\pi}_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne 1}}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}$$

$$l_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}=\mathop{\pi}_{1\le j\le n-1}\frac{x-x_j}{x_n-x_j}$$

基函数插值的一般表达式

$$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}l_k(x)y_k$$

The mathematician S. had to move to a new place. His wife didn't trust him very much, so when they stood down on the street with all their things, she asked him to watch their ten trunks, while she got a taxi. Some minutes later she returned. Said the husband: "I thought you said there were ten trunks, but I've only counted to nine!"

The wife said: "No, they're TEN!"

"But I have counted them: 0, 1, 2, ..."

插值余项

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，

$f^{(n+1)}$在$[a\,,b]$内存在，考察截断误差

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

罗尔定理：若 $\varphi(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 连续，在 (x_0, x_1)充分光滑，

且 $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$ 存在 $\xi \in (x_0, x_1)$使得 。

$\varphi'(\xi) = 0$

推广：若 $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0 \Rightarrow \xi_0 \in (x_0, x_1),\ \xi_1 \in (x_1, x_2)$

使得 $\varphi'(\xi_0) = \varphi'(\xi_1) = 0 \Rightarrow \xi \in (\xi_0, \xi_1)$ 使得 $\varphi''(\xi) = 0$

如何推导插值余项

问题　如何估计用 $R_n(\mathrm{x})$ 近似 $f(\mathrm{x})$ 的误差?

插值余项 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

由插值条件可知: $R_n(\mathrm{x}_\mathrm{i}) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, n$, 即

$R_n(\mathrm{x})$在**[a,b]**上至少有**n+1**个零点 ➡ $R_n(\mathrm{x}) = K(x)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

做辅助函数 $\varphi(t) = R_n(t) - K(x)\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$

这里把**x**看作一个固定点，且 $x \neq x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$

则$\varphi(t)$有**n+2**个不同的零点: $x, x_0, x_1, \cdots x_n$

插值余项

即得**n**次插值多项式的**余项**

$$R_n(\mathrm{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i),\ \xi_x \in (a, b)$$ 且依赖于**x**。

注

✓ 通常 ξ_x 无法确定，但可以估计 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1},\ x \in (a, b)$

将 $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ 作为**误差估计上限**。

✓ 当 $f(\mathrm{x})$ 为任一个次数 $\le n$ 的多项式时，$f^{(n+1)}(x) \equiv 0$

可知 $R_n(x) \equiv 0$，即**n**次插值多项式对于次数 $\le n$ 的多项式是**精确**的。

✓ 计算插值点**x**上的近似值时，应选取与**x相近**插值节点。

插值误差举例

- 例：已知函数 $y=\ln x$ 的函数值如下

x	10	11	12	13	14
$\ln x$	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391

试给出线性插值和抛物线插值计算 ln11.75的误差。

解：$$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1),\quad \xi\in(x_0,x_1)$$

又 $f''(x)=-1/x^2$; 且 $x_0=11, x_1=12, \xi\in(11,12)$

所以 $$\begin{aligned}|R_1(11.75)| &= |(11.75-x_0)(11.75-x_1)f''(\xi)/2| \\ &< |(11.75-11)(11.75-12)/(2\times 11^2)| \\ &< 7.75\times 10^{-4}\end{aligned}$$

插值误差举例

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \quad \xi \in (x_0, x_2)$$

又 $f^{(3)}(x) = 2/x^3$，$\xi \in (11, 13)$ $\Rightarrow$ $|f^{(3)}(\xi)| = 2/\xi^3 < 2/11^3$

$\Rightarrow$ $|R_2(11.75)| < |(11.75-11)(11.75-12)(11.75-13)| \times 2/(6 \times 11^3)$

$< \underline{5.87 \times 10^{-5}}$

$|R_1(11.75)| < \underline{7.75 \times 10^{-4}}$

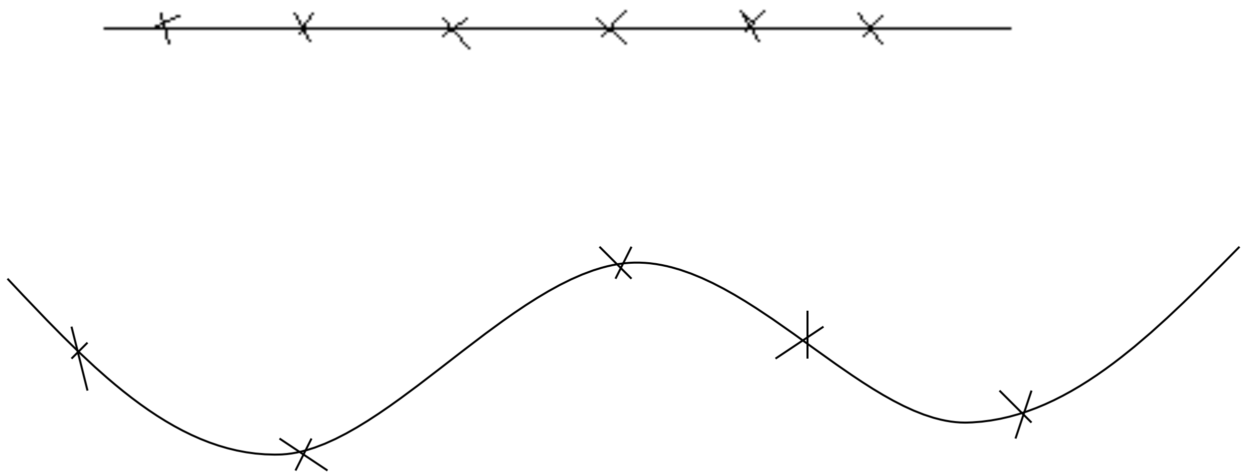
高次插值通常
优于低次插值

拉格朗日插值的几点问题

问题：

- 对于相同的插值公式，内插与外推哪一个的精度高。
- 插值点越多得到插值公式的精度越高？
- 拉格朗日插值对于不同的初始函数，在相同点上的插值公式也不同。
- 多项式插值是唯一的插值方式？
- 基函数的形式只和插值点的**x**坐标相关，和**y**值无关。
- 由**n**个点插值得到的基函数的次数必定是**n-1**次的多项式

特殊情况



误差的事后估计

基本假设与依据是

假设 **f″（x）**在［**a，b**］内改变不大

事后估计法

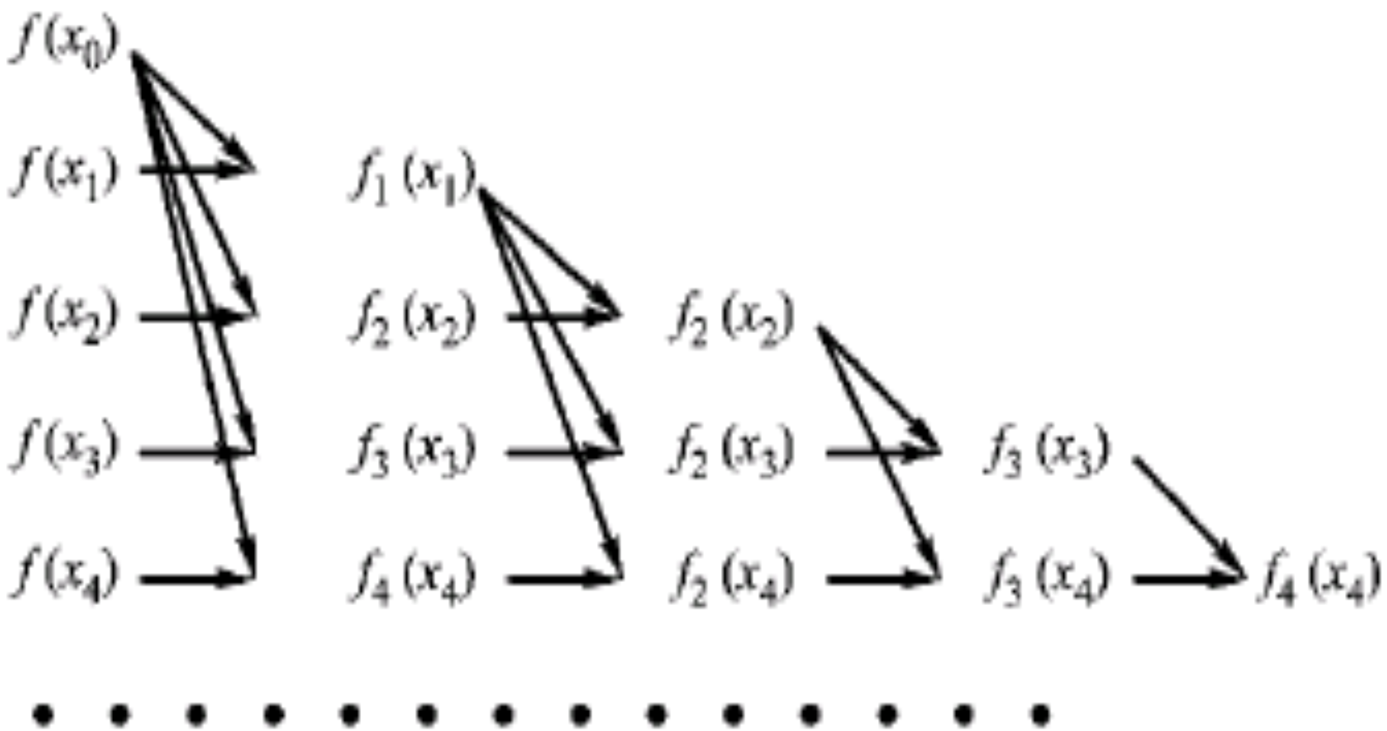
当前无法显示该图像。

埃特金算法的迭代原理

$$\overset{x_0x_1x_2}{f}(x) \approx \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\overset{x_0x_1}{f_1}(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\overset{x_0x_2}{f_1}(x_2)$$

$$\overset{x_0x_1\cdots x_{k-1}x_i}{f_k}(x_i) \approx \frac{x - x_i}{x_{k-1} - x_i}\overset{x_0x_1\cdots x_{k-2}x_{k-1}}{f_{k-1}}(x_{k-1}) + \frac{x - x_{k-1}}{x_i - x_{k-1}}\overset{x_0x_1\cdots x_{k-2}x_i}{f_{k-1}}(x_i)$$

埃特金算法


$f(x_0)$
$f(x_1)$
$f_1(x_1)$
$f(x_2)$
$f_2(x_2)$
$f_2(x_2)$
$f(x_3)$
$f_3(x_3)$
$f_2(x_3)$
$f_3(x_3)$
$f(x_4)$
$f_4(x_4)$
$f_2(x_4)$
$f_3(x_4)$
$f_4(x_4)$

1.5 牛顿插值公式

提出的原因：

1 拉格朗日插值每增加一个新点都要重新计算插值公式。

2 埃特金算法虽具有承袭性，但算法是递推型的，不便于进行理论上的分析

3 牛顿公式具有承袭性并且理论推导严密

$$p_n = p_m + g(x)$$

差商（均差）及其性质

1. 差商（均差）的定义

定义1：设有函数$f(x)$以及自变量的一系列互不相等的$x_0, x_1, \ldots, x_n$（即在$i \neq j$时，$x_i \neq x_j$）的值$f(x_i)$，称

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (i \neq j,\ x_i \neq x_j)$$

为$f(x)$在点x_i, x_j处的一阶差商，并记作$f[x_i, x_j]$，

差商及其性质

又称

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \quad (i \neq k)$$

为$f(x)$在点x_i, x_j, x_k处的二阶差商

差商及其性质

称

$$f[x_0,x_1,\cdots x_n]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]-f[x_1,x_2,\cdots x_n]}{x_0-x_n}$$

为$f(x)$在点$x_0, x_1, \ldots, x_n$处的n阶差商。

差商及其性质

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	……	n 阶差商	
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$			
	…	……	……			
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	……	……			
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		$f[x_0, \ldots, x_n]$	
x_{n+1}	$f(x_{n+1})$	$f[x_n, x_{n+1}]$	$f[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}]$		$f[x_1, \ldots, x_{n+1}]$	$f[x_0, \ldots, x_{n+1}]$

由差商定义可知：高阶差商是两个低一阶差商的差商。

差商（均差）的性质

性质1：k阶插商可以表示成k+1个函数值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_k)$ **的线性组合，即**

$$f\left[x_0, x_1, \cdots, x_k\right] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}$$

可用归纳法证明。

差商（均差）的性质

性质2：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_k] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

依对称性，对调定义公式左端k阶插商中 x_0与x_{k-1}的位置，

$$f[x_{k-1}, x_1, \cdots, x_0, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_{k-1}, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_0]}{x_k - x_0}$$

再将各插商中的节点按原来次序排列。

差商（均差）的性质

性质3：若$f(x)$是x的n次多项式，则一阶插商$f[x, x_0]$是x的n-1次多项式，二阶插商$f[x, x_0, x_1]$是x的n-2次多项式

一般地，函数f(x)的k阶插商$f[x, x_0, \cdots, x_{k-1}]$是x的n-k次多项式（$k \le n$），而$k > n$时，k阶插商为零。

差商（均差）的性质

若$f(x)$是x的**n次多项式**，则 $P(x)=f(x)-f(x_i)$

也是n次多项式，且 $P(x_i)=0$ 。于是P(x)可以分解为

$$P(x)=(x-x_i)P_{n-1}(x)$$

其中 $P_{n-1}(x)$ 为**n-1次多项式**。所以

$$f[x,x_i]=\frac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i}=\frac{(x-x_i)P_{n-1}(x)}{x-x_i}=P_{n-1}(x)$$

为n-1次多项式。

差商（均差）的性质

性质4： **若$f(x)$在[a,b]上存在n阶导数，且节点**

$$x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$$

则n阶插商与导数的关系如下：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^n(\xi)}{n!}, \xi \in [a, b]$$

例题1

已知

x_i	1	3	4	7
$f(x_i)$	0	2	15	12

计算三阶均差 。

解：列表计算

x_i	$f(x_i)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	0			
3	2	1		
4	15	13	4	
7	12	-1	-3.5	-1.25

差商形式的插值公式

根据均差定义，把x看成$[a,b]$上的一点，可得

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0),$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1),$$

$$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2),$$

$$\cdots$$

$$f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_n)$$

差商形式的插值公式

只要把后一式代入前一式，得:

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

最后一项中, 均差部分含有 x , 为余项部分, 记作

$$R_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n);$$

差商形式的插值公式

而前面 n+1 项中, 均差部分都不含有 x , 因而前面 n+1 项是关于 x 的 n 次多项式, 记作

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

这就是牛顿插值公式。于是, 上式记为 $f(x) = N_n(x) + R_n(x)$ 。

差商形式的插值公式

由牛顿插值公式与

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

比较知：$a_k=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\quad(k=0,1,\cdots,n).$

牛顿插值公式

当 n=1 时，

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)\ \ +f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1),$$

其中，

$$N_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$=y_0+\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}(x-x_0)\text{。}$$

这就是牛顿一次插值多项式，也就是点斜式直线方程。

牛顿插值公式

当 n=2 时，

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$N_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

这就是牛顿二次插值多项式。

牛顿插值公式

显然， $N_2(x_0)=f(x_0)$ ，

$$N_2(x_1)=f(x_0)+\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}(x_1-x_0)=f(x_1)$$

$$N_2(x_2)=f(x_0)+\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}(x_2-x_0)$$

$$+\frac{1}{x_0-x_2}\left(\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right)(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$=f(x_2)$$ 。

即 $N_2(x)$ 满足二次插值条件。

例题2

例 2:已知

x_i	1	3	4	7
$f(x_i)$	0	2	15	12

求满足以上插值条件的牛顿型插值多项式。

例题3

例 3：已知 $f(x)$ 在六个点的函数值如下表，运用牛顿型插值多项式求 $f(0.596)$ 的近似值。

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差	五阶均差	$x-x_k$
0.40	0.41075						0.196
0.55	0.57815	1.1160					0.046
0.65	0.69675	1.1860	0.2800				−0.054
0.80	0.88811	1.2757	0.3588	0.1970			−0.204
0.90	1.02652	1.3841	0.4336	0.2137	0.0344		−0.454
1.05	1.25386	1.5156	0.5260	0.2310	0.0346	0.0003	

例题3

$$N_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)\ \ +f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$N_2(0.596)=0.41075+1.1160\times 0.196$$

$$+0.28\times 0.196\times 0.046=0.632010$$;

$$N_3(x)=N_2(x)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$N_3(0.596)=0.632010$$

$$+0.1970\times 0.196\times 0.046\times(-0.054)\ =0.6319145$$

例题3

欲求 $N_4(x)$，只需在 $N_3(x)$ 之后再加一项：

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$=0.0344\times0.196\times0.046\times(-0.054)\times(-0.204)\ =3.4\times10^{-6}$$

故 $N_4(x)=0.6319145+0.0000034\ =0.6319179$ 。

截断误差：

$$|R_4(x)|\approx\left|f(x_0,\cdots,x_5)\omega_5(0.596)\right|\le3.63\times10^{-9}$$

拉格朗日插值与牛顿插值的比较

（1）$P_n(x)$ 和 $N_n(x)$ 均是 n 次多项式，且均满足插值

条件：$P_n(x_k) = N_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0, 1, \cdots, n$ 。

由插值多项式的唯一性，$P_n(x) \equiv N_n(x)$，因而，两个公式的

余项是相等的，即

$$f[x, x_0, x_1 \cdots, x_n]\omega_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

(2) 当插值多项式从 n-1 次增加到 n 次时，拉格朗日型插值必须重新计算所有的基本插值多项式；而对于牛顿型插值，只需用表格再计算一个 n 阶均差，然后加上一项即可。

（3）牛顿型插值余项公式对 $f(x)$ 是由离散点给出或 $f(x)$ 导数不存在时均适用。

差分形式的插值公式

当节点等距分布时： $x_i = x_0 + i\,h \quad (i = 0, \dots, n)$

向前差分

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1}(\Delta f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$$

向后差分

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

中心差分

$$\delta^k f_i = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}}$$

其中 $f_{i\pm\frac{1}{2}} = f(x_i \pm \frac{h}{2})$

差分的重要性质

性质1：常数的差分等于零

性质2：差分算子为线性算子

$$\Delta(a\,f(x)+b\,g(x)) = a\,\Delta f + b\,\Delta g$$

性质3：若 $f(x)$是 m 次多项式，则 $\Delta^k f(x)\ (0 \le k \le m)$是

$m-k$ 次多项式，且 $\Delta^k f(x) = 0 \quad (k > m)$

性质4：$\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$

$$f_k = f(x_k) = f(x_0 + kh)$$

$$g_k = g(x_k) = g(x_0 + kh),$$

这个性质类比于 $d(f \cdot g) = fdg + gdf$

差分的性质

性质5： $$\sum_{k=0}^{N-1} f_k \Delta g_k = f_N g_N - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{N-1} g_{k+1} \Delta f_k$$

（类比于分部积分法则）

性质6：当节点x_k是等距时，差分差商存在着关系：

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_k) = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}$$

差商和差分关系的验证

因为 $x_{k+1}-x_k=h \quad x_{k+2}-x_k=2h \quad x_{k+3}-x_k=3h$

所以 $$f[x_k,x_{k+1}]=\frac{f_{k+1}-f_k}{x_{k+1}-x_k}=\frac{1}{h}\Delta f_k \quad ,$$

$$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]=\frac{f[x_{k+2},x_{k+1}]-f[x_{k+1},x_k]}{x_{k+2}-x_k}$$

$$=\frac{1}{2h}\left(\frac{1}{h}\Delta f_{k+1}-\frac{1}{h}\Delta f_k\right)=\frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_k \,,$$

差商和差分关系的验证

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$$

$$= \frac{f[x_{k+3}, x_{k+2}, x_{k+1}] - f[x_{k+2}, x_{k+1}, x_k]}{x_{k+3} - x_k}$$

$$= \frac{1}{3h}\left(\frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_{k+1} - \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_k\right) = \frac{1}{6h^3}\Delta^3 f_k \quad 。$$

等距节点的牛顿插值公式

如果节点 $x_k = x_0 + kh \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$，要计算附近点 x 的函数 $f(x)$ 的值，可令 $x = x_0 + th,\ 0 \le t \le 1$，于是 $\omega_{k+1}(x) = \prod_{j=0}^{k}(x - x_j) = t(t-1)\cdots(t-k)h^{k+1}$

把其代入牛顿插值公式，

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

等距节点的牛顿插值公式

得牛顿向前插值公式，

$$N_n(x_0+th)=f_0+t\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$$+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

其中 $f[x_k,x_{k+1},\cdots,x_{k+m}]=\dfrac{1}{m!h^m}\Delta^m f_k \quad (m=1,2,\cdots,n)$

其余项为：

$$R_n(x)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi), \qquad \xi\in(x_0,x_n)$$

例题

例：在微电机设计计算中需要查磁化曲线表，通常给出的表是磁密 B 每间隔 100 高斯磁路每厘米长所需安匝数 at 的值，下面要解决 B 从 4000 至 11000 区间的查表问题。

为节省计算机存储单元，采用每 500 高斯存入一个 at 值，在利用差分公式计算。

例题求解（1）

k	B_k	$at_k = f(B_k)$	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
0	4000	1. 38	0. 10		
1	4500	1. 48	0. 10	0	
2	5000	1. 58	0. 11	0. 01	0. 01
3	5500	1. 69	0. 12	0. 01	0
4	6000	1. 81	0. 13	0. 01	0
5	6500	1. 94	0. 16	0. 03	0. 02

例题求解（2）

从差分表中看到三阶差分近似于 0，计算时只需两阶差分。

例如，求 f（5200）时取

$$B_0 = 5000, f_0 = 1.158, \Delta f_0 = 0.11, \Delta^2 f_0 = 0.01,$$

h=500, B=5200, t=0. 4, 取 n=2，由公式计算得：

$$f(5200) \approx 1.58 + (0.4)(0.11) + \frac{(0.4)(-0.6)}{2}(0.01) = 1.62$$

这个结果与直接查表得到的值相同，说明用此算法在计算机上求值是可行的。