

第3章 命题逻辑的推理理论

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
- 推理定律与推理规则
- 构造证明

直接证明法, 附加前提证明法, 归缪法



推理举例:

- (1) 正项级数收敛当且仅当部分和有上界.
- (2) 若 $A \cup C \subseteq B \cup D$,则 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$.

推理: 从前提出发推出结论的思维过程

上面(1)是正确的推理,而(2)是错误的推理.

证明: 描述推理正确的过程.

推理的种类

推理一般分为两类

演绎推理

前提和结论存在必然联系的推理

归纳推理

前提和结论不存在必然联系的推理

古典的数理逻辑主要研究演绎推理



一、推理的形式结构

定义 若对于每组赋值,或者 $A_1 \land A_2 \land ... \land A_k$ 均为假,或者当 $A_1 \land A_2 \land ... \land A_k$ 为真时,B也为真,则称由前提 A_1 , A_2 ,..., A_k 推出结论B的推理是有效的或正确的,否则推理不正确(无效). 称B为有效的结论.

定理3.1 " $A_1, A_2, ..., A_k$ 推B"的推理正确 当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式.

推理的形式结构: $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \rightarrow B$ 或

前提: $A_1, A_2, ..., A_k$

结论: B

若推理正确,则记作: $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \Rightarrow B$.

关于推理的形式结构的说明

- **1.**由前提 $A_1,A_2, ..., A_k$ 推出结论B的推理是否正确与前提的排列顺序无关。
- 2. 前提是由有限个公式组成,设前提的集合为 Γ ,由 Γ 推出B的推理记为 $\Gamma \mid B$ 或 $\{A_1,A_2,...,A_k\} \mid B$.

若推理正确,记为 $\Gamma \models B$,否则记为 $\Gamma \not\models B$.

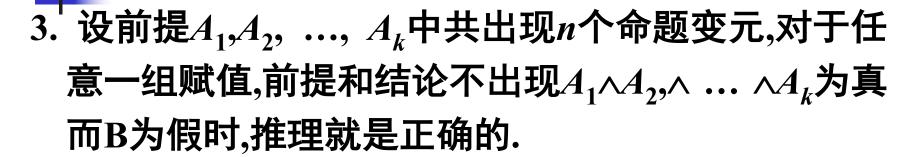
$${A_1,A_2,...,A_k} \models B \Leftrightarrow \exists T A_1,A_2,...,A_k \Rightarrow B$$

$$\{A_1,A_2,...,A_k\}$$
 | B 等同于 $A_1,A_2,...,A_k \to B$

常使用以下形式:

前提: A_1, A_2, \ldots, A_k

结论: B



4. 推理正确不一定结论B为真.

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法

判断推理是否正确

- 主析取范式法
- 构造证明法 证明推理正确

说明:用前3个方法时采用形式结构

"
$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$$
"

用构造证明时, 采用

"前提: A_1, A_2, \ldots, A_k , 结论: B".



例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号,则明天是5号. 今天是1号. 所 以明天是5号.

解 设p: 今天是1号,q: 明天是5号.

推理的形式结构为: $(p \rightarrow q) \land p \rightarrow q$

证明(用等值演算法)

$$(p \rightarrow q) \land p \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \lor q) \land p) \lor q$$

$$\Leftrightarrow \neg p \lor \neg q \lor q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

(2) 若今天是1号,则明天是5号.明天是5号.所以今天是1号.

解 设p: 今天是1号, q: 明天是5号.

推理的形式结构为: $(p \rightarrow q) \land q \rightarrow p$

证明(用主析取范式法)

$$(p \rightarrow q) \land q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \lor q) \land q \to p$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \lor q) \land q) \lor p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \lor p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \lor (p \land \neg q) \lor (p \land \neg q) \lor (p \land q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \lor m_2 \lor m_3$$

结果不含 m_1 ,故01是成假赋值,所以推理不正确.



(2) 若今天是1号,则明天是5号.明天是5号.所以今天是1号.

解 设p: 今天是1号, q: 明天是5号.

推理的形式结构为: $(p\rightarrow q)\land q\rightarrow p$

证明 令前提 $(p\rightarrow q)\land q$ 为1,考察p的取值(若不能为0,则推理有效)

- $: (p \rightarrow q) \land q$ 为1
- $\therefore p \rightarrow q$ 为1, q为1
- :. p为1

所以推理正确.

或者令结论*B*为0,考察前提 是否为0.若前提为0,则推理正 确,否则错误。

此方法本质上是真值表。

(3) 一份统计表格的错误或者是由于材料不可靠,或者是由于计算有错误;这份统计表格的错误不是由于材料不可靠,所以这份统计表格是由于计算有错误。

解 设各命题变元为

p: 统计表格的错误是由于材料不可靠。

q: 统计表格的错误是由于计算有错误

推理的形式结构为:

前提: $(p \lor q), \neg p$

结论: q



p	q	$p \lor q$	$\neg p$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	0

从真值表看出 $(p \lor q) \land \neg p \Rightarrow q$

(自行写出判断过程,使用等值演算和主范式)

(4) 如果张老师来了,这个问题可以得到解答,如果李老师来了,这个问题也可以得到解答,总之张老师或李老师来了,这个问题就可得到解答.

解: p: 张老师来了。q: 李老师来了。

r: 这个问题可以得到解答.

推理的形式化:

前提: $(p \rightarrow r), (q \rightarrow r), (p \lor q)$

结论: r

(自行写出判断过程,使用真值表、等值演算和主范式)

附加律

推理定律——重言蕴涵式

重要的推理定律

$$A \Rightarrow (A \lor B)$$

$$(A \land B) \Rightarrow A$$
 化简律

$$(A \rightarrow B) \land A \Rightarrow B$$
 假言推理

$$(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$$
 析取三段论

$$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$
 假言三段论

$$(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$
 等价三段论

$$(A \rightarrow B) \land (C \rightarrow D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$$
 构造性二难



$$(A \rightarrow B) \land (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$$
 构造性二难(特殊形式)
$$(A \rightarrow B) \land (C \rightarrow D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$$
 破坏性二难

说明:

- 1.任何的等值式A⇔B产生两个推理定律A⇒B和B⇒A.
- 2. A,B,C,D等是元语言符号。
- 3. 将具体的公式代入某条推理定律,就得到这条定律的一个代换实例.如: $p \Rightarrow p \lor q, p \to q \Rightarrow (p \to q) \lor r$

三. 推理系统

推理系统的形式系统 I

 $I = < A(I), E(I), A_x(I), R(I) >$

A(I): 非空的字母表

E(I): A(I)中符号构造的合式公式集

 $A_x(I)$: E(I)中一些特殊公式组成的公理集

R(I): 推理规则集

<A(I), E(I)>是I的形式语言系统

 $<A_x(I), R(I)>$ 是I的形式演算系统

三. 推理系统

推理系统分为两类:

1. 自然推理体系

无约定的公理,从任意给定的前提出发,应用系统中的推理规则进行推演。得到的结论可能是重言式,也可能不是重言式.

2. 公理推理体系

从公理集出发,应用系统中的推理规则进行推演。 得到的结论是重言式.

三. 推理系统

定义 自然推理系统 P 如下:

- 1. 字母表
 - (1) 命题变项符号: $p, q, r, ..., p_i, q_i, r_i, ...(i≥1)$.
 - (2) 联结词符号: ¬, ∧, ∨, →, ↔.
 - (3) 括号与逗号: (,),,.
- 2. 合式公式 见合式公式定义
- 3. 推理规则





- (2) 结论引入规则
- (3) 置换规则
- (4) 假言推理规则

$$A \rightarrow B$$

A

∴ **B**

(5) 附加规则

A

 $\therefore A \lor B$

(6) 化简规则

 $A \wedge B$

 $\therefore \mathbf{A}$

(7) 拒取式规则

 $A \rightarrow B$

 $\neg \mathbf{B}$

 $\therefore \neg A$

(8) 假言三段论规则

 $A \rightarrow B$

 $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$

 $\therefore A \rightarrow C$

推理规则(续)



$$A \lor B$$

$$\neg \mathbf{B}$$

∴A

(10)构造性二难推理规则

$$A \rightarrow B$$

$$C \rightarrow D$$

$$\therefore B \lor D$$

(11) 破坏性二难推理 规则

$$A \rightarrow B$$

$$C \rightarrow D$$

$$\neg B \lor \neg D$$

$$\therefore \neg A \lor \neg C$$

(12) 合取引入规则

A

B

 $\therefore A \land B$



证明:描述推理过程的命题公式序列,其中每个命题公式或者是已知的前提,或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论(中间结论或推理中的结论). 前提: A_1, A_2, \ldots, A_k , 结论: B公式序列 C_1, C_2, \ldots, C_l .其中 C_i 是由某些 A_i 或者序列中前面的公式应用推理规则得到的, C_l =B.则称公式序列

 $C_1, C_2, ..., C_l$ 是由 $A_1, A_2, ..., A_k$ 推出B的证明。



- 1. 直接证明法
- 2. 附加前提证明法
- 3. 归谬法

1. 直接证明法

直接证法

由一组前提,利用推理规则,推演得到有效结论。 例 构造下面推理的证明:

若明天是星期一或星期三,我就有课.若有课,今天必备课.我今天下午没备课.所以,明天不是星期一和星期三.

解 设p: 明天是星期一,q: 明天是星期三,

r: 我有课, s: 我备课

推理的形式结构为

前提: $(p \lor q) \rightarrow r$, $r \rightarrow s$, $\neg s$

结论: ¬*p*∧¬*q*

直接证明法 (续)

证明

①
$$r \rightarrow s$$
 前提引入

④
$$(p \lor q) \rightarrow r$$
 前提引入

2. 附加前提证明法

欲证明

前提: $A_1, A_2, ..., A_k$

结论: $C \rightarrow B$

等价地证明

前提: $A_1, A_2, ..., A_k, C$

结论:B

理由:
$$(A_1 \land A_2 \land \dots \land A_k) \rightarrow (C \rightarrow B)$$

 $\Leftrightarrow \neg (A_1 \land A_2 \land \dots \land A_k) \lor (\neg C \lor B)$
 $\Leftrightarrow \neg (A_1 \land A_2 \land \dots \land A_k \land C) \lor B$
 $\Leftrightarrow (A_1 \land A_2 \land \dots \land A_k \land C) \rightarrow B$

附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数. 若2是素数,则 $\sqrt{2}$ 是无理数. 若 $\sqrt{2}$ 是无理数,则4不是素数. 所以,如果4是素数,则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解设p: 2是素数,q: 2是合数,

 $r: \sqrt{2}$ 是无理数, s: 4是素数

推理的形式结构

前提: $p \lor q$, $p \rightarrow r$, $r \rightarrow \neg s$

结论: $s \rightarrow q$

附加前提证明法 (续)

证明

$\bigcirc s$	附加前提引
. 5	

②
$$p \rightarrow r$$
 前提引入

③
$$r \rightarrow \neg s$$
 前提引入

④
$$p \rightarrow \neg s$$
 ②③假言三段论

请用直接证明法证明之

3. 归谬法(反证法)

欲证明

前提: A_1, A_2, \ldots, A_k

结论:B

将 $\neg B$ 加入前提,若推出矛盾,则得证推理正确. 理由:

$$A_{1} \land A_{2} \land \dots \land A_{k} \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg (A_{1} \land A_{2} \land \dots \land A_{k}) \lor B$$

$$\Leftrightarrow \neg (A_{1} \land A_{2} \land \dots \land A_{k} \land \neg B)$$

括号内部为矛盾式当且仅当 $(A_1 \land A_2 \land ... \land A_k \rightarrow B)$ 为 重言式

归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提: $\neg (p \land q) \lor r, r \rightarrow s, \neg s, p$

结论: ¬q

证明(用归缪法)

 $\bigcirc q$

结论否定引入

 $2r\rightarrow s$

前提引入

 \bigcirc \bigcirc \bigcirc S

前提引入

 $\bigcirc r$

②③拒取式

归谬法(续)

$$\bigcirc$$
 $\neg (p \land q) \lor r$

前提引入

$$\bigcirc \neg (p \land q)$$

④⑤析取三段论

$$\bigcirc \neg p \lor \neg q$$

6置换

$$\otimes \neg p$$

①⑦析取三段论

 \mathfrak{P} p

前提引入

 $\bigcirc \neg p \land p$

⑧ 今 合取

请用直接证明法证明之

消解证明法

- '归谬法的一种
- 准备工作:将前提和结论的否定化成等值的合取范式,以合取范式中的析取项作为前提,能得到空式,则推理正确.

例 前提: $q \rightarrow p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \land r$

结论: *p**q**s*

解 先求前提中各式和结论否定的合取范式.

$$q \rightarrow p \Leftrightarrow \neg q \lor p, \ q \leftrightarrow s \Leftrightarrow (q \lor \neg s) \land (\neg q \lor s),$$

 $s \leftrightarrow t \Leftrightarrow (s \lor \neg t) \land (\neg t \lor s), \ t \land r, \ \neg (p \land q \land s) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q \lor \neg s$

消解证明法

前提: $\neg q \lor p$, $q \lor \neg s$, $\neg q \lor s$, $s \lor \neg t$, $t \lor \neg s$, t, r, $\neg p \lor \neg q \lor \neg s$

证明: (1) ¬t∨s

(2) t

(3) s

(4) $q \lor \neg s$

(5) q

 $(6) \neg q \lor p$

(7) p

 $(8) \neg p \lor \neg q \lor \neg s$

 $(9) \neg q \lor \neg s$

 $(10) \neg s$

(11) λ

前提引入

前提引入

(1)(2)归结

前提引入

(3)(4)归结

前提引入

(5)(6)归结

前提引入

(7)(8)归结

(5)(9)归结

(3)(10)归结

实例

例证明 $(p \lor q) \land (p \to r) \land (q \to s) \Rightarrow s \lor r$ 证明

- $\bigcirc p \lor q$
- $\bigcirc \neg p \rightarrow q$
- $\Im q \rightarrow s$
- $\textcircled{4} \neg p \rightarrow s$
- $\bigcirc 5 \neg s \rightarrow p$
- $\bigcirc p \rightarrow r$
- $\bigcirc \neg s \rightarrow r$
- $\otimes s \vee r$

前提引入

- ① 置换
- 前提引入
- ②③ 假言三段论
- 4 置换
- 前提引入
- ⑤⑥ 假言三段论
- ⑦置换

例证明 $(w \lor r) \rightarrow v, v \rightarrow c \lor s, s \rightarrow u, \neg c \land \neg u \Rightarrow \neg w$

命题逻辑

证: $\bigcirc \neg c \land \neg u$

前提引入

 $\bigcirc -u$

① 化简

 $\Im s \rightarrow u$

前提引入

 \bigcirc \bigcirc S

② ③ 拒取式

 \bigcirc $\neg c$

①化简

 $\bigcirc \neg c \land \neg s$

45合取

 $\bigcirc \neg (c \lor s)$

⑥置换

 $(w \lor r) \rightarrow v$

前提引入

 $\bigcirc v \rightarrow c \lor s$

前提引入

 $\textcircled{1}(w \lor r) \rightarrow c \lor s$

(8)(9) 假言三段论

 $(11) \neg (w \lor r)$

⑦⑩拒取式

 $(12) \neg w \land \neg r$

(11) 置换

 $(13) \neg w$

(12) 化简

例 构造下面推理的证明

若明天是星期一或星期三,我就有课。若有课,今天一定备课.我今天没备课.所以,明天不是星期一和星期三.

解 设p: 明天是星期一,q: 明天是星期三,

r: 我有课, s: 我今天备课

证明的形式结构为

前提: $(p \lor q) \rightarrow r$, $r \rightarrow s$, $\neg s$

结论: ¬*p*∧¬*q*



前提: $(p \lor q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$, 结论: $\neg p \land \neg q$

证明

 $\textcircled{1} r \rightarrow s$

前提引入

 $\bigcirc \neg s$

前提引入

 $\mathfrak{G}(3) \neg r$

① ②拒取式

 $\textcircled{4}(p \lor q) \rightarrow r$

前提引入

 \bigcirc $\neg (p \lor q)$

③ ④拒取式

 $\bigcirc \neg p \land \neg q$

⑤置换

例 证明 $p \rightarrow q$, $\neg (q \lor r) \Rightarrow \neg p$

证明 ① $p \rightarrow q$

- $\mathfrak{D}p$
- $\Im q$
- $\bigcirc (q \lor r)$
- \bigcirc $\neg q \land \neg r$
- $\bigcirc \neg q$
- ⑦ $q \land \neg q$ (矛盾或永假)

前提引入

附加前提引入

①②假言推理

前提引入

- 4置换
- ⑤化简
- ③⑥合取引入

例 证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg s \lor p, B \Rightarrow s \rightarrow r$

证明 (1) s

- $(2) \neg s \lor p$
- (3) p
- $(4) p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- (5) $q \rightarrow r$
- (6) q
- (7) r

附加前提引入

前提引入

(1)(2)析取三段论

前提引入

(3)(4)假言推理

前提引入

(5)(6)假言推理

例 设有下列情况,结论是否有效?

- (a)或者是天晴或者是下雨。
- (b)如果是天晴,我去看电影。
- (c)如果我去看电影,我就不看书。

结论:如果我在看书,则天在下雨。

解: 设p: 天晴,q: 下雨,

s: 我看电影,r: 我看书。

推理的形式结构为

前提: $\neg(p\leftrightarrow q), p\to s, s\to \neg r$

结论: $r \rightarrow q$



前提: $\neg(p\leftrightarrow q), p\rightarrow s, s\rightarrow \neg r$, 结论: r=

前尟逻辑 $r \longrightarrow a$

证明 (1) r

$$(2) s \rightarrow \neg r$$

$$(3) \neg s$$

$$(4) p \rightarrow s$$

$$(5) \neg p$$

$$(6) \neg (p \leftrightarrow q)$$

$$(7) \neg p \leftrightarrow q$$

$$(8) (\neg p \rightarrow q) \land (q \rightarrow \neg p)$$

$$(9) \neg p \rightarrow q$$

附加前提引入

前提引入

(1)(2)拒取式

前提引入

(3)(4)拒取式

前提引入

(6)置换

(7)置换

(8)化简

(5)(9)假言推理



1. 证明下面推理

如果小张守第一垒并且小李向B队投球,则A队将获胜。或者A队未取胜,或者A队成为联赛第一名。A 队没有成为联赛的第一名。小张守第一垒。因此,小李没向B队投球。

- 2. 证明 $\neg p \lor q, r \to \neg q \Rightarrow p \to \neg r$ (请分别直接法,归谬法, 附加证明法证明)
- 3. 证明 $\neg p \lor (\neg q \lor r), q \to (r \to s), p \Rightarrow q \to s$
- 4. 用推理规则说明 $p \rightarrow q$, $\neg (q \lor r)$, $p \land r$ 是否能同时为真? 即是否相容。



习题3

6(2)(4)(5). 8(2)(3). 9.

14(4)(6). 15(1). 16(2). 17.