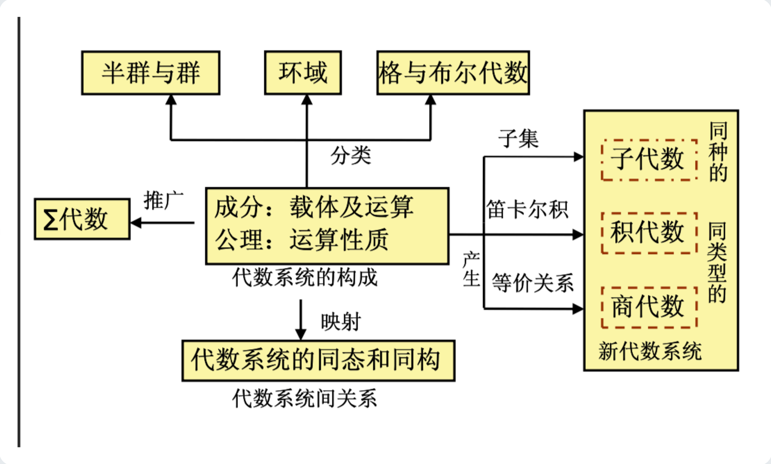
近世代数2<N,f>

- f:NXN->N
- 超越与封闭
  - 超越
  - <A,f>
    f:A^3->B
- 

n元运算的定义

集合	二元运算	一元运算	0元运算
Z,Q,R,C	+, ×	-	0,1
$M_n(R)$	+, ×	-	θ,E
$P(B)$	∪,∩,-,⊕	~	∅,B
$R(B)$	°		I_B
A^A	°		I_A

- 定义 对于集合A，映射 f：An→A，称为集合A上的一个n元运算。
- n=0， 0元运算， f: →A
- n=1， 一元运算， f: A→A n=2， 二元运算， f: A×A→A
- 封闭性：
- 任何A中的元素均可参加运算，运算结果属于A。

n元运算的表示

- n 算符：∘, *, · , *， △，○等符号 n 表达式:
- ° $(x_1, x_1,\_, x_n)$ =y x * y = z；
- x =y
- 例 设 R 为实数集合，R 上的二元运算∗："x,y∈R, x*y=x+y-2xy. 那么3∗4 = 3，0.5∗(-3) = 0.5, 3^2= -12

运算表的实例

例 Z_5={ 0, 1, 2, 3, 4 }，$+_5$，$\times_5$为模5加法与模5乘法

$+_5$ 的运算表

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times_5$ 的运算表

$\times_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

二元运算的算律

- n 定义 设° ,* 为 A 上的二元运算,
- 交换律 "x,yÎA，有 x*y=y*x
- 结合律 "x,y,z∈A，有(x*y)*z=x*(y*z) 幂等律 "x∈A，有x*x=x
- 如果A中的某些x满足x*x=x，则称x为运算*的幂等元。
- 分配律 "x,y,z∈A，
- x °(y*z) = (x ° y)* (x ° z) 左分配 (y*z)°x=(y°x)*(z°x) 右分配
- 吸收律 设° ,* 可交换， " x, y∈A x °(x*y)=x，x*(x °y)=x
- n 特异元素的名称 n单位元(幺元) e
  - 特异元素的性质
    - 单位元、零元的唯一性 如果|A|>1, e ≠q
    - 可结合运算的逆元唯一性：x的逆元标记为x -1
  - 定理15.2 对于给定集合A和A上的二元运算∘,如果存 在e_l∈A,e_r∈A,使得"x ∈A满足 e_l*x=x*e_r=x，则 e_l=e_r=e,且 e 就是A中关于∘运算的唯一单位元.
- n 零元q
  - 定理15.3 对于给定集合A和A上的二元运算∘,如果存 在q $_l$∈A,q $_r$∈A,使得"x ∈A满足
  - q $_l$*x= q $_l$，x* q $_r$= q $_r$，则 q $_l$= q $_r$= q ,且 q 就是A中 关于∘运算的唯一零元.
- n 幂等元
- n 可逆元和逆元
  - 定理15.5 对于集合A和A上可结合的二元运算°，A中存在 幺元e. 如果对于x∈A,存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r 使得
    - 证明 y_l = y_l°e =y_l°(x°y_r)=(y_l°x)°y_r = e ° y_r = y_r 令y_l = y_r = y,则y是x的逆元. 假设y′也是x的逆元，则 y′=y′ °e= y′ °(x °y)= (y′ °x)°y=e°y=y 所以y是x的唯一逆元.
  - y_l°x=x°y_r =e,
  - 则有y_l= y_r=y，且y是x的唯一的逆元.称x是可逆的.
- n 说明:特异元素也可以作为算律
- n 同一律(若存在单位元) n 零律(若存在零元)
- 定义 设∘是A上的二元运算
  - 单位元e: " a∈A, e∘a=a∘e=a
  - 零元q："a∈A, q∘a= a∘q= q
  - 幂等元a："a∈A, a∘a= a
  - 可逆元x(逆元y) : x ∈A, y∈A, x∘y=y∘x=e

集合	运算	幺元	零元	逆元
Z, Q, R	普通加法+	0	无	x 的逆元 –x
	普通乘法×	1	0	x 的逆元 x^{-1}（0无逆元，x^{-1}属于给定集合)
$M_n(R)$	矩阵加法+	n阶全0矩阵	无	X逆元–X
	矩阵乘法×	n阶单位矩阵	n阶全0矩阵	X的逆元 X^{-1}（X是可逆矩阵）
$P(B)$	并∪	∅	B	∅ 的逆元为 ∅
	交∩	B	∅	B 的逆元为 B
	对称差⊕	∅	无	X 的逆元为 X

消去律定义

- 定义 设°是集合A上的一个二元运算，若对于任意的 a,b,c∈A满足以下条件：
  - n Z,Q,R: +, ×满足消去律
  - n $M_n(R)$: 矩阵+满足消去律；矩阵×不满足消去律
  - n A^A: °不满足消去律
  - n P(B): Å满足消去律；È、Ç、-不满足消去律
- (1) 若a ° b=a ° c且a≠ q，则b=c；
- (2) 若b ° a=c ° a且a≠ q，则b=c； 那么称运算 ° 满足消去律，其中 (1) 称作左消去律， (2) 称作右消去律。
- 例 设 °运算为 Q 上的二元运算，"x, yÎQ, x ° y = x+y+2xy, (1) °运算是否满足交换，结合，幂等，消去律?
  - (2) 求 °运算的幺元、零元和所有可逆元.
  - 【思路】证明定律成立：定义验证；证明其不成立：举反例。 解 (1) °运算满足交换律,结合律,消去律,不满足幂等律.
  - "x, y,zÎQ,
  - x ° y = x+y+2xy = y+x+2yx = y ° x，满足交换律.
  - (x ° y) ° z= (x+y+2xy) + z + 2(x+y+2xy) z = x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz
  - x ° (y ° z) = x + (y+z+2yz) + 2x(y+z+2yz = x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz
  - 所以(x ° y) ° z= x ° (y ° z) ，满足结合律.