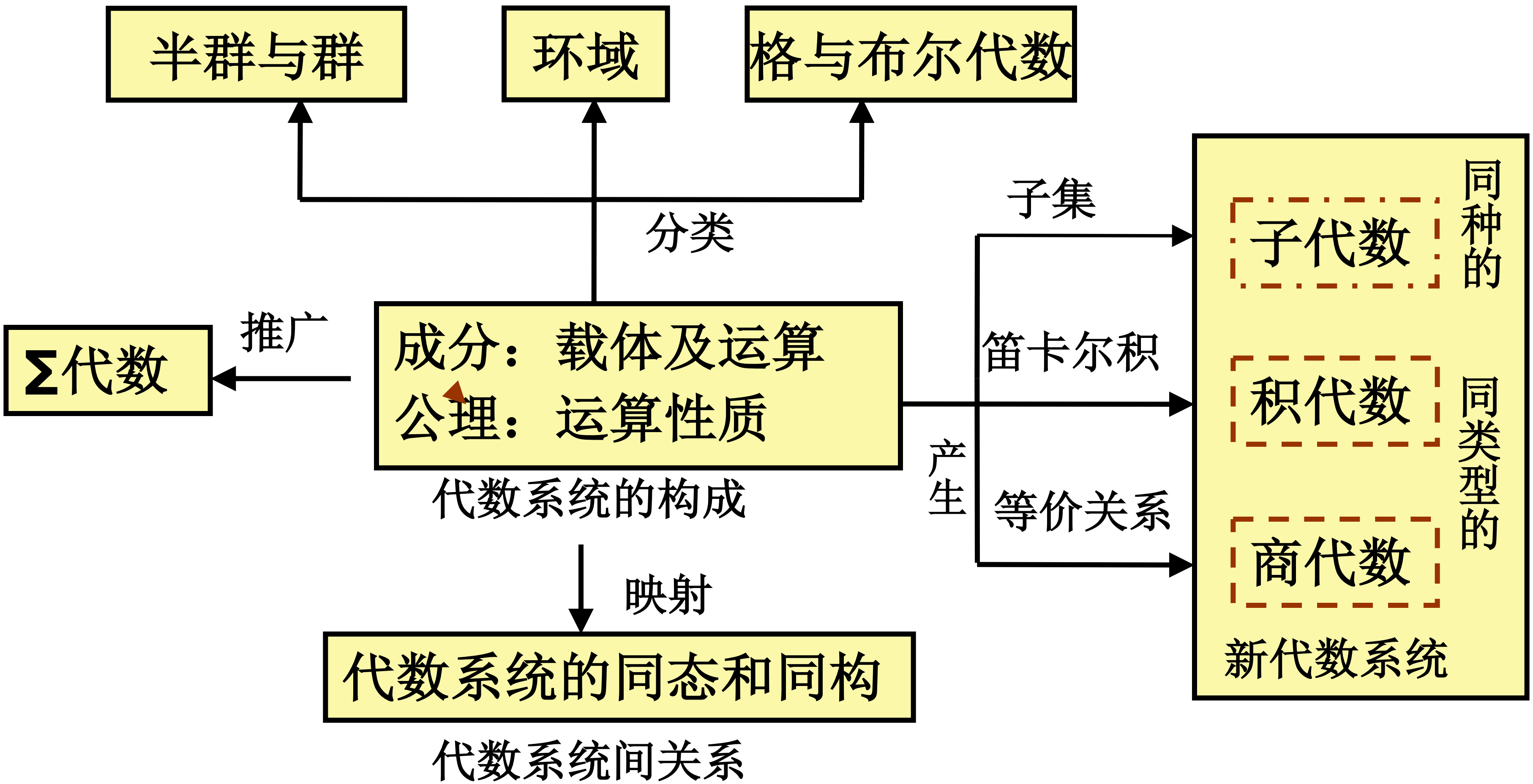
代 数 结 构

中国海洋大学
计算机系

代数结构

- 代数系统
- 半群与独异点
- 群
- 环与域
- 格和布尔代数

代数结构（知识图）



半群与群
环域
格与布尔代数
分类
推广
Σ代数
成分：载体及运算
公理：运算性质
代数系统的构成
子集
笛卡尔积
产生
等价关系
子代数
积代数
商代数
同种的
同类型的
新代数系统
映射
代数系统的同态和同构
代数系统间关系

代数结构的主要内容

- 运算及其性质
- 代数系统
- 半群与独异点
- 群与子群
- Abel群和循环群
- 陪集与拉格朗日定理
- 正规子群与商群
- 同态与同构
- 环与域

15.1 二元运算及其性质

- 运算的定义
- 运算的表示
- 二元运算的性质
  - 交换律、结合律、等幂律、消去律
  - 分配律、吸收律
- 二元运算的特异元素
  - 幺元与零元
  - 可逆元素及其逆元
- 例题分析
- 学习要点与基本要求

n元运算的定义

- **定义** 对于集合A，映射f：$A^n \rightarrow A$，称为集合A上的一个n元运算。

n=0， 0元运算， f: $\rightarrow$A

n=1， 一元运算， f: A$\rightarrow$A

n=2， 二元运算， f: A×A$\rightarrow$A

- **封闭性：**

任何A中的元素均可参加运算，运算结果属于A。

n元运算的实例

集合	二元运算	一元运算	0元运算
Z,Q,R,C	$+, \times$	$-$	$0,1$
$M_n(R)$	$+, \times$	$-$	θ,E
$P(B)$	$\cup,\cap,-,\oplus$	$\sim$	$\varnothing,B$
$R(B)$	$\circ$		I_B
A^A	$\circ$		I_A

$R(B)$: B上的关系集合

n元运算的表示

- **算符：** ∘, ∗, · , *， △， ○等符号
- **表达式:**

  $\circ(x_1, x_1, \cdots, x_n) = y$

  $x * y = z$;

  $* x = y$
- **表示方法：**

  解析表达式、 运算表(有穷集的)
- **注意：** 在同一问题中不同的运算使用不同的算符

运算的表示实例

例 设 R 为实数集合，R 上的二元运算$*$：

$$\forall x, y \in R,\ x * y = x+y-2xy.$$

那么 $3 * 4 = 3$，$0.5 * (-3) = 0.5$, $3^2 = -12$

例 $A = P(\{a, b\})$, $\oplus$, $\sim$ 分别为对称差和绝对补运算

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

X	$\sim X$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

运算表的一般形式（有穷集）

二元运算表

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\cdots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\cdots$	$a_2 \circ a_n$
$\cdot$		$\cdots$		
$\cdot$		$\cdots$		
$\cdot$		$\cdots$		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

一元运算表

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
a_n	$\circ a_n$

运算表的实例（续）

例 $Z_5=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，$+_5$, $\times_5$为模5加法与模5乘法

$+_5$ 的运算表

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times_5$ 的运算表

$\times_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

二元运算的算律

- 涉及一个二元运算的算律
  - 交换律
  - 结合律——广义结合
  - 幂等律
  - 消去律
- 涉及两个不同的二元运算
  - 分配律——广义分配
  - 吸收律(以交换为前提)

算律的定义

- **定义** 设$\circ$,$*$ 为 A 上的二元运算,

  交换律 $\forall x, y \in A$， 有 $x * y = y * x$

  结合律 $\forall x, y, z \in A$， 有 $(x * y) * z = x * (y * z)$

  幂等律 $\forall x \in A$， 有 $x * x = x$

  如果A中的某些x满足$x*x=x$，则称x为运算$*$的**幂等元**。

  分配律 $\forall x, y, z \in A$，

  $x \circ (y*z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ **左分配**

  $(y*z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$ **右分配**

  吸收律 设$\circ$,$*$ 可交换， $\forall x, y \in A$

  $x \circ (x*y) = x$，$x * (x \circ y) = x$

例：交换、结合、幂等

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$为 n 阶实矩阵集合, $n\geq2$；$P(B)$为幂集；A^A 为 A上A， $|A|\geq2$.

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z, Q, R	普通加法$+$	有	有	无
	普通乘法$\times$	有	有	无
$M_n(R)$	矩阵加法$+$	有	有	无
	矩阵乘法$\times$	无	有	无
$P(B)$	并$\cup$	有	有	有
	交$\cap$	有	有	有
	相对补$-$	无	无	无
	对称差$\oplus$	有	有	无
A^A	函数复合$\circ$	无	有	无

实例：分配、吸收律

集合	运算	分配律	吸收律
Z, Q, R	普通加法 $+$ 与乘法 $\times$	$\times$ 对 $+$ 可分配	无
		$+$ 对 $\times$ 不分配	
$M_n(R)$	矩阵加法 $+$ 与乘法 $\times$	$\times$ 对 $+$ 可分配	无
		$+$ 对 $\times$ 不分配	
$P(B)$	并 $\cup$ 与交 $\cap$	$\cup$ 对 $\cap$ 可分配	有
		$\cap$ 对 $\cup$ 可分配	
	交 $\cap$ 与对称差 $\oplus$	$\cap$ 对 $\oplus$ 可分配	无
		$\oplus$ 对 $\cap$ 不分配	

二元运算的特异元素

- 特异元素的名称
  - 单位元(幺元) e
  - 零元θ
  - 幂等元
  - 可逆元和逆元
- 说明:特异元素也可以作为算律
  - 同一律(存在单位元)
  - 零律(存在零元)

特异元素的定义与性质

定义 设∘是A上的二元运算

单位元e：$\forall a \in A,\ e \circ a = a \circ e = a$

零元θ：$\forall a \in A,\ \theta \circ a = a \circ \theta = \theta$

幂等元a：$\forall a \in A,\ a \circ a = a$

可逆元x(逆元y)：$x \in A,\ y \in A,\ x \circ y = y \circ x = e$

特异元素的性质

单位元、零元的唯一性

如果$|A|>1,\ e \neq \theta$

可结合运算的逆元唯一性：x的逆元标记为x^{-1}

单位元、零元的唯一性

- **定理15.2** 对于给定集合A和A上的二元运算∘,如果存在$e_\ell \in A, e_r \in A$,使得$\forall x \in A$满足 $e_\ell * x = x * e_r = x$，则 $e_\ell = e_r = e$,且 e 就是A中关于∘运算的唯一**单位元**.

证明：$e_\ell = e_\ell * e_r = e_r$,则$e_\ell = e_r$, 将这个单位元记作 e.

设另有一单位元$e_1 \in A$，则 $e_1 = e_1 * e = e$.

定理15.3 对于给定集合A和A上的二元运算∘,如果存在$\theta_\ell \in A, \theta_r \in A$,使得$\forall x \in A$满足

$\theta_\ell * x = \theta_\ell$，$x * \theta_r = \theta_r$，则 $\theta_\ell = \theta_r = \theta$,且 θ就是A中关于∘运算的唯一零元.

当|A|>1时, θ≠e

定理15.4 设*是定义在A上的二元运算，且$|A|>1$。如果该代数系统中存在幺元e和零元θ，则$\theta \neq e$。

证明 用反证法。

设$\theta=e$，那么对于任意的$x \in A$，必有

$$x=e*x=\theta*x=\theta= e,$$

所以A中的所有元素都是相同的，这与$|A|>1$相矛盾。

逆元的唯一

定理15.5 对于集合A和A上可结合的二元运算$\circ$，A中存在幺元e. 如果对于$x \in A$,存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r 使得

$$y_l \circ x = x \circ y_r = e,$$

则有 $y_l = y_r = y$，且 y 是 x 的唯一的逆元. 称x是可逆的.

证明 $y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r$

$= e \circ y_r = y_r$

令 $y_l = y_r = y$, 则 y 是 x 的逆元.

假设 y' 也是 x 的逆元，则

$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$

所以y是x的唯一逆元.

说明

（1）当 $y_l \neq y_r$，分别称为左、右逆元.

（2）当$e_\ell \neq e_r$，分别称为左、右幺元.

（3）当$\theta_\ell \neq \theta_r$，分别称为左、右零元.

（4）如果y是x的逆元，也称x与y互为逆元。

实例：单位元、零元、可逆元

集合	运算	幺元	零元	逆元
Z, Q, R	普通加法+	0	无	x 的逆元 $-x$
	普通乘法×	1	0	x 的逆元 x^{-1}（0无逆元，x^{-1}属于给定集合)
$M_n(R)$	矩阵加法+	n阶全0矩阵	无	X逆元$-X$
	矩阵乘法×	n阶单位矩阵	n阶全0矩阵	X的逆元 X^{-1}（X是可逆矩阵）
$P(B)$	并$\cup$	$\varnothing$	B	$\varnothing$ 的逆元为 $\varnothing$
	交$\cap$	B	$\varnothing$	B 的逆元为 B
	对称差$\oplus$	$\varnothing$	无	X 的逆元为 X

消去律定义

定义 设°是集合A上的一个二元运算，若对于任意的$a,b,c\in A$满足以下条件：

（1）若 $a\circ b=a\circ c$ 且 $a\neq\theta$，则 $b=c$；

（2）若 $b\circ a=c\circ a$ 且 $a\neq\theta$，则 $b=c$；

那么称运算°满足消去律，其中

（1）称作左消去律，

（2）称作右消去律。

说明

◆ 若A上的元素都存在逆元，则°满足消去律。反之不然。

消去律举例

- Z,Q,R: $+$, $\times$满足消去律
- $M_n(R)$: 矩阵+满足消去律；矩阵×不满足消去律
- $P(B)$: $\oplus$满足消去律；$\cup$、$\cap$、-不满足消去律
- A^A: $\circ$不满足消去律

例

例 设 ∘运算为 Q 上的二元运算，$\forall x, y \in Q$， $x \circ y = x+y+2xy$,

(1) ∘运算是否满足交换，结合，幂等，消去律?

(2) 求 ∘运算的幺元、零元和所有可逆元.

【思路】证明定律成立：定义验证；证明其不成立：举反例。

解 (1) ∘运算满足交换律,结合律,消去律,不满足幂等律.

$\forall x, y, z \in Q$,

$x \circ y = x+y+2xy = y+x+2yx = y \circ x$，满足交换律.

$(x \circ y) \circ z = (x+y+2xy) + z + 2(x+y+2xy)\, z$

$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$

$x \circ (y \circ z) = x + (y+z+2yz) + 2x(y+z+2yz$

$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$

所以$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$，满足结合律.

例解

$x \circ e = x+e+2xe = x \Rightarrow e=0$,

$x \circ \theta = x+\theta+2x\theta = \theta \Rightarrow \theta = -1/2$

$\circ$运算的单位元是0，零元为-1/2.

$\forall x, y, z \in Q, x \neq -1/2$, 令$x \circ y = x \circ z$

$x+y+2xy = x+z+2xz \Leftrightarrow y(1+2x) = z(1+2x) \Leftrightarrow y=z$,满足消去律

取$x=1$，得$x \circ x = x+x+2x^2 = 4 \neq x$, 不满足幂等律

（2）给定x,设y是x的逆元，则有

$$x \circ y = 0 \Leftrightarrow x+y+2xy = 0 \Leftrightarrow \quad y = -\frac{x}{2x+1} \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

因此当$x \neq \frac{1}{2}$时, x的逆元是 $y = -\frac{x}{2x+1}$

例

例 (1) 说明哪些运算是交换的、幂等的.

(2) 求出运算的幺元、零元、所有可逆元素的逆元.

(3)哪些运算满足消去律.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

解: (1) $*$ 满足交换；$\circ$满足幂等律；$\bullet$ 满足交换、幂等律.

(2) $*$ 的单位元为b, 没有零元, $a^{-1} = c$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = a$

$\circ$ 的单位元和零元都不存在，没有可逆元素.

$\bullet$ 的单位为 a， 零元为c, $a^{-1}=a$. b, c不可逆.

由运算表判别算律的一般方法

设*是A上的一个二元运算, 那么该运算的有些性质可以从运算表中直接看出：

- 封闭性：运算表中的每个元素都属于A
- 交换性：运算表关于主对角线是对称的。
- 等幂性：主对角线元素排列与表头顺序一致
- 消去律：同一行或同一列中没有重复元素

接上页

- 零元：θ 所在的行与列都由该元素自身构成
- 幺元：e所在的行与列的元素排列都与表头一致
- A 的可逆元：运算表中第 i 行第 j 列元素和第 j 行第 i 列都为 e，则表头中第 i 个和第 j 个元素互逆
- 结合律：除了幺元、零元之外，要对任意3个元素验证结合律等式是否成立

例

例 设Q是有理数集合，Δ是Q上的二元运算，

$\forall a,b\in Q$，$a\Delta b=a+b-a\bullet b$

问运算Δ是否可交换、可结合的、等幂的。

解 $a\Delta b=a+b-a\bullet b=b+a-b\bullet a=b\Delta a$,

所以运算Δ是可交换的。

$(a\Delta b)\Delta c=(a+b-a\bullet b)\Delta c=(a+b-a\bullet b+c)-(a+b-a\bullet b)\bullet c$,

$=a+b+c-a\bullet b-a\bullet c-b\bullet c+a\bullet b\bullet c$,

$a\Delta(b\Delta c) = a\Delta(b+c-b\bullet c)=(a+b+c-b\bullet c)- a\bullet(b+c-b\bullet c)$,

$=a+b+c-a\bullet b-a\bullet c-b\bullet c+a\bullet b\bullet c$,

所以$(a\Delta b)\Delta c=a\Delta(b\Delta c)$, Δ可结合的。

$a \Delta a = a+a-a\bullet a=a \Rightarrow a=a\bullet a$，所以只有0,1是等幂元。

例

例　设Q是有理数集合，Δ和★是Q上的二元运算，且

$\forall a,b\in Q$，$a\Delta b=a+b-ab$，　$a\bigstar b=b$

问：Δ对★可分配吗？ ★ 对Δ可分配吗？

解：　$\forall a,b,c\in Q$，$a\,\Delta(b\bigstar c)=a\Delta c$，$(a\,\Delta b)\bigstar(a\Delta c)=a\Delta c$

$(b\bigstar c)\Delta a=c\Delta a$，$(b\Delta a)\bigstar(c\Delta a)= c\Delta a$

所以Δ对★可分配。

$\forall a,b,c\in Q$，$a\bigstar(b\Delta c)= b\Delta c$，$(a\bigstar b)\Delta(a\bigstar c)= b\Delta c$

$(b\Delta c)\bigstar a = a$，$(b\bigstar a)\Delta(c\bigstar a)=a\Delta a$

所以★ 对Δ可左分配。

例

例 设集合N为自然数全体，在N上定义两个二元运算*和★，

$$\forall x,y\in \mathrm{N}，\ x*y=\max(x,y) \quad x★y=\min(x,y)$$

验证运算*和★满足吸收律。

解： 运算*和★满足交换律，且对于任意$x,y\in \mathrm{N}$，

$x*(x★y)=x*\min(x,y)=\max(x,\min(x,y))=x$，

$x★(x*y)= x★\max(x,y)=\min(x,\max(x,y))=x$。

运算*和★满足吸收律.

例

例 设集合S={浅色，深色}，定义在S上的一个二元运算*如表所示，指出零元和幺元。

*	浅色	深色
浅色	浅色	深色
深色	深色	深色

所以，深色是零元，浅色是幺元。

说明

- 零元对应的列（行）全是零元。
- 右幺元对应的列与标题列相同，左幺元对应的行与标题行相同。

例

例 设S={α,β,γ,δ,ζ}，定义在S上的二元运算*如表所示。

*	α	β	γ	δ	ζ
α	α	β	γ	δ	ζ
β	β	δ	α	γ	δ
γ	γ	α	β	α	β
δ	δ	α	γ	δ	γ
ζ	ζ	δ	α	γ	ζ

解 α是幺元；
β和γ互逆；
δ的左逆元是γ而右逆元是β，
β的左逆元γ和δ，右逆元是γ；
ζ的右逆元是γ，但ζ无左逆元。

说明

一个元素可以没有逆元，或只有左逆元，或只有右逆元。

一个元素的左(右)逆元还可以有多个。

从逆元可以直接判断该运算不是可结合的。

例

例题8 对于代数系统$<N_k, +_k>$，$N_k=\{0,1,2,\ldots,k-1\}$，$+_k$是定义在N_k上的模k加法运算，定义如下：

$$\forall x,y\in N_k,\ x+_k y=(x+y) \bmod k$$

试问是否每个元素都有逆元。

解： $\forall x,y,z\in N_k$，$(x+_k y)+_k z=((x+y)\bmod k)+_k z$

$$=((x+y)\bmod k+z)\bmod k=(x+y+z)\bmod k$$

$$x+_k(y+_k z)=x+_k((y+z)\bmod k)=(x+(y+z)\bmod k)\bmod k$$

$$=(x+y+z)\bmod k$$

所以$+_k$是一个可结合的二元运算。

例(续)

由于$\forall x\in N_k$，$x +_k 0=0 +_k x=x$

所以0是N_k中关于运算$+_k$的幺元。

0的逆元是0。

$\forall x\in N_k$，$x\neq 0$，则$k-x\in N_k$，$x +_k(k-x)=(k-x) +_k x= 0$

而N_k中的每一个元素都有唯一的逆元，

每个非零元素x的逆元是$k-x$。

例

例 设 $A = \{a, b, c\}$, 构造 A 上的二元运算* 使得 $a*b = c$, $c*b = b$, 且*运算是幂等的、可交换的。给出关于*运算的一个运算表， *是否可结合，为什么?

*	a	b	c
a	a	c	🕊
b	c	b	b
c	🕊	b	c

解: 由幂等律和$a*b = c$, $c*b = b$得到运算表如左,

根据交换律得到新的运算表,

方框 🕊 可以填入a, b, c中任一选定的符号,完成运算表。

运算*不可结合,

因为$(a*b)*b = c*b = b$, $a*(b*b) = a*b = c$.

学习要点与基本要求

- 掌握运算的定义
- 掌握二元运算性质的判别及证明
- 掌握幺元、零元、逆元的求法
- 作业：p237: 2,7,11,12