$$= \bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \cdots \vee \bar{a}_k \vee \bar{a}_{k+1} \qquad \text{(归纳假设)}$$

同理可证 $\overline{a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n} = \bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 \wedge \cdots \wedge \bar{a}_n$。 □

19.31

(1)

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \vee b) &= (a \wedge (b \vee \bar{b})) \vee (\bar{a} \vee b) && \text{(分配律)} \\
&= (a \wedge 1) \vee (\bar{a} \vee b) && (b \vee \bar{b} = 1) \\
&= a \vee \bar{a} \vee b && (a \preccurlyeq 1\text{、教材定理 19.2}) \\
&= 1 \vee b && (a \vee \bar{a} = 1) \\
&= 1 && (b \preccurlyeq 1\text{、教材定理 19.2})
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b \wedge c}) \vee c &= (a \wedge (b \vee \overline{b \wedge c})) \vee c && \text{(分配律)} \\
&= (a \wedge (b \vee (\bar{b} \vee \bar{c}))) \vee c && \text{(教材定理 19.23(2))} \\
&= (a \wedge (1 \vee \bar{c})) \vee c && (\text{结合律、} b \vee \bar{b} = 1) \\
&= (a \wedge 1) \vee c && (\bar{c} \preccurlyeq 1\text{、教材定理 19.2}) \\
&= a \vee c && (a \preccurlyeq 1\text{、教材定理 19.2})
\end{aligned}$$

19.32

证明： 对任意 $a, b \in B_1$，由题设已知 $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$，而

$$\begin{aligned}
\varphi(a \vee b) &= \varphi(\overline{\overline{a \vee b}}) && \text{(教材定理 19.23(1))} \\
&= \overline{\varphi(\overline{a \vee b})} && \text{(题设)} \\
&= \overline{\varphi(\bar{a} \wedge \bar{b})} && \text{(教材定理 19.23(2))} \\
&= \overline{\varphi(\bar{a}) \wedge \varphi(\bar{b})} && \text{(题设)} \\
&= \overline{\overline{\varphi(a)} \wedge \overline{\varphi(b)}} && \text{(题设)} \\
&= \overline{\overline{\varphi(a)}} \vee \overline{\overline{\varphi(b)}} && \text{(教材定理 19.23(2))} \\
&= \varphi(a) \vee \varphi(b) && \text{(教材定理 19.23(1))}
\end{aligned}$$

这就证明了 φ 是同态。 □

19.33

证明： 习题 19.9 已经证明，$[a, b]$ 是格 $\langle B, \wedge, \vee \rangle$ 子格。也即，$[a, b]$ 在 $\wedge$ 和 $\vee$ 运算下是封闭的。

由 $\wedge$ 和 $\vee$ 运算在 B 中的分配律可得 $\wedge$ 和 $\vee$ 运算在 $[a, b]$ 中的分配律。

由定义可知，a 是 $[a, b]$ 的全下界，b 是 $[a, b]$ 的全上界。

对任意 $x \in [a, b]$，令 $y = (\bar{x} \vee a) \wedge b$。则：

$$\begin{aligned}
a &= a \wedge b && (a \preccurlyeq b\text{、教材定理 19.2}) \\
&\preccurlyeq (\bar{x} \wedge b) \vee (a \wedge b) && \text{(教材定理 19.1(2))} \\
&= (\bar{x} \vee a) \wedge b && \text{(分配律)} \\
&= y && \text{(定义)} \\
&= (\bar{x} \vee a) \wedge b && \text{(定义)} \\
&\preccurlyeq b && \text{(教材定理 19.1(1))}
\end{aligned}$$