



2.3 龙贝格算法

- 梯形法的递推化
- 龙贝格算法
- 理查森外推加速法



1 梯形法的递推化

方法思路：

复化求积方法可提高求积精度，实际计算时可以将步长逐次分半。

在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 经过二分只增加了一个分点 $x_{k+1/2} = 1/2 (x_k + x_{k+1})$ ，用复化梯形公式求得该子区间上的积分值为

$$\frac{h}{4} [f(x_k) + 2f(x_{k+1/2}) + f(x_{k+1})]$$



梯形法的递推化

注意，这里 $h=(a+b)/n$ 代表二分前的步长。
将每个子区间上的积分值相加得

$$T = \frac{h}{4} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

从而可导出下列递推公式

$$T = \frac{1}{2} T_n + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$



龙贝格算法

龙贝格积分法是在计算梯形和序列的基础上应用了线性外推的加速方法，由此构成的一种具有超线性收敛的自动积分法



基本思想

根据复化梯形公式的余项表达式可知

$$I - T_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \eta \in (a, b)$$

$$I - T_{2n} = -\frac{b-a}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\bar{\eta}), \bar{\eta} \in (a, b)$$

假定 $f''(\eta) \approx f''(\bar{\eta})$, 则有

$$\frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$



基本思想

将上式移项整理，可得

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

可以做这样的补偿

$$\bar{T} = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n = S_n$$



基本思想

同理

$$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} \approx \frac{1}{16}$$

由此得到

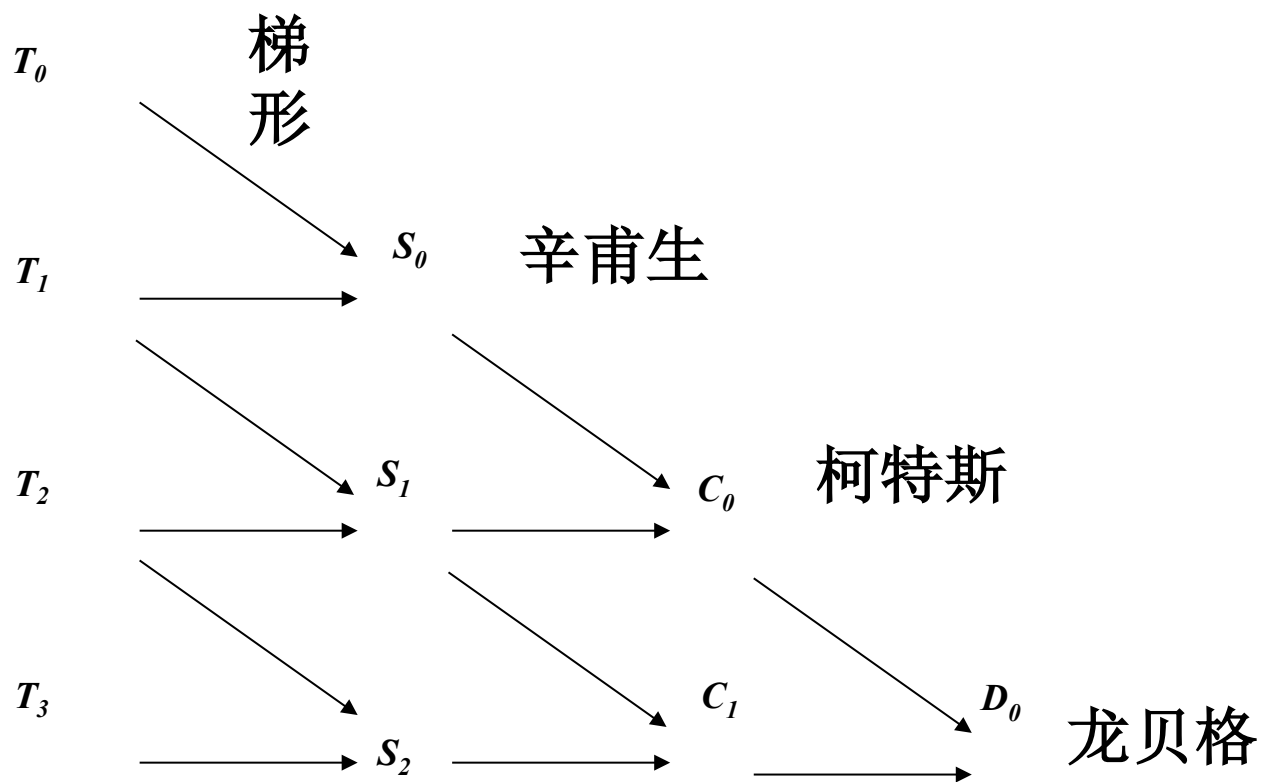
$$I \approx \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n = C_n$$

同理

$$R_n = \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n$$

基本思想

由此法，可得如下三角形数表





样条插值积分

□ 用三次样条插值函数 $S(x)$ 近似被积函数 $f(x)$, 从而得到样条插值积分公式。

➤ 将 $[a, b]$ 分 n 等分, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i \cdot h$ ($i = 0, 1, \dots, n$)

➤ 设 $S'(x_i) = m_i$, 则 $S(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上为满足以下条件的三次多项式:

$$S(x_i) = f(x_i), S(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), S'(x_i) = m_i, S'(x_{i+1}) = m_{i+1}$$

由三次 Hermite 插值多项式公式 (P.46) 可得

$$\begin{aligned} S(x) = & \frac{1}{h^3} (x - x_{i+1})^2 [h + 2(x - x_i)] f(x_i) \\ & + \frac{1}{h^3} (x - x_i)^2 [h + 2(x_{i+1} - x)] f(x_{i+1}) \\ & + \frac{1}{h^2} (x - x_i)(x - x_{i+1})^2 m_i + \frac{1}{h^2} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) m_{i+1} \end{aligned}$$



样条插值积分（续）

于是有 $S(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{8}(m_i - m_{i+1})$

➤ 由于 $S(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上为三次多项式，所以simpson公式精确成立，即

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x) dx &= \frac{h}{6} [S(x_i) + 4S(x_{i+\frac{1}{2}}) + S(x_{i+1})] \\ &= \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h^2}{12} (m_i - m_{i+1})\end{aligned}$$

于是得积分公式

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x) dx \\ &= \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] - \frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] = U_n\end{aligned}$$

样条插值积分（续）

$$U_n = \underbrace{\frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]}_{T_n} - \underbrace{\frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)]}_{\approx I[f] - T_n}$$

余项：

$$R_U = \int_a^b f(x) \, dx - U_n = -\frac{b-a}{720} h^4 f^{(4)}(\eta) = \mathcal{O}(h^4)$$

只增加计算两端点的导数，计算精度即由 $O(h^2)$ 提高到 $O(h^4)$



第2章 数值积分与数值微分

高斯型求积公式



高精度的求积公式

考虑积分

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

能否利用 $n+1$ 个节点 x_0, \dots, x_n 构造出具有 $2n+1$ 次代数精度的求积公式?

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

将节点 x_0, \dots, x_n 以及系数 A_0, \dots, A_n 都作为待定系数。
令 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$ 代入可求解，得到的公式具有 $2n+1$ 次代数精度。

举例（一）

□ 例：试确定 x_0, x_1 以及系数 A_0, A_1 ，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度。

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解：将 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 代入，使其精确成立得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = 2/3 \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

解得



$$\begin{cases} A_0 = A_1 = 1 \\ x_0 = -x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

不是线性方程组，不易求解



高斯点与高斯公式

定义

若存在节点 $x_i \in [a, b]$ 及求积系数 A_i ，使得下面的求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，则称节点 x_i 为高斯点， A_i 为高斯系数，求积公式为高斯(Gauss)求积公式。

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

注：(1) Gauss求积公式仍然是插值型求积公式；
(2) Gauss系数可通过Gauss点和Lagrange基函数得到；



高斯点的确定

定理

节点 x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 是求积公式(2-30)的 Gauss 点的充要条件是: 多项式 $w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ 与任意次数不超过 n 的多项式 $p(x)$ 正交, 即

$$\int_a^b p(x) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx = 0$$

且高斯系数 A_i 为

$$A_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

其中 l_i 为以节点 x_i 为节点的 Lagrange 基函数。

高斯点的确定

证明: “ \Rightarrow ” $x_0 \dots x_n$ 为 Gauss 点, 则公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ 至少有 $2n+1$ 次代数精度。

对任意次数不大于 n 的多项式 $p(x)$, $p(x)w(x)$ 的次数不大于 $2n+1$, 则代入公式应精确成立:

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i p(x_i)w(x_i) \stackrel{0}{=} 0 \quad \checkmark$$

“ \Leftarrow ” 要证明 $x_0 \dots x_n$ 为 Gauss 点, 即要证公式对任意次数不大于 $2n+1$ 的多项式 $p(x)$ 精确成立, 即证明:

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i p(x_i) \quad \text{设 } p(x) = w(x)q(x) + r(x)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)dx &= \int_a^b w(x)q(x)dx + \int_a^b r(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^n A_i r(x_i) = \sum_{i=0}^n A_i p(x_i) \quad \checkmark \end{aligned}$$



高斯公式代数精度

定理 用 $n+1$ 个点 x_0, \dots, x_n 构造的插值型求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

的代数精度不超过 $2n+1$ 。

即 Gauss 公式是插值型求积公式中代数精度最高的。



Gauss-Legendre 公式

设 $f(x) \in C[-1, 1]$ ，考虑 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

在 $[-1, 1]$ 上的正交多项式为 Legendre 多项式

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^{n+1}$$

取其 $n+1$ 个零点作为 Gauss 点，即可得 Gauss-Legendre 求积公式。



G-L 公式的余项

定理

设 $f(x) \in C^{2n+2}[-1, 1]$ ，则 G-L 求积公式的余项为

$$R[f] = \int_{-1}^1 f(x) \, dx - \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \, dx$$



几个简单的 G-L 公式

$$n = 0: P_{n+1}(x) = x, x_0 = 0, A_0 = 2$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) = 2f(0)$$

$$n = 1: P_{n+1}(x) = (3x^2 - 1)/2, x_0 = -1/\sqrt{3}, x_1 = 1/\sqrt{3}, A_0 = A_1 = 1$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$$

$$n = 2: P_{n+1}(x) = (5x^3 - 3x)/2,$$

两点G-L公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{15}/5\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{15}/5\right)$$

三点G-L公式

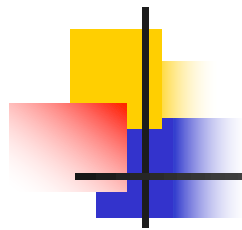


G-L公式的Gauss系数

定理

G-L求积公式中的 Gauss点为 $P_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个零点, Gauss系数为

$$\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2) \left[P'_{n+1}(x_i) \right]^2} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$



更多 G-L 公式

当 $n > 3$ 时, 可用数值方法计算 $P_{n+1}(x)$ 的零点 (**mygl.m**)

n	节点个数	Gauss点	Gauss系数
0	1	0.0000000	2.0000000
1	2	± 0.5773503	1.0000000
2	3	± 0.7745967 0.0000000	0.5555556 0.8888889
3	4	± 0.8611363 ± 0.3399810	0.3478548 0.6521452
4	5	± 0.9061798 ± 0.5384693 0.0000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889
5	6	± 0.93246951 ± 0.66120939 ± 0.23861919	0.17132449 0.36076157 0.46791393

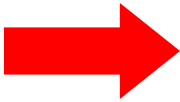


一般区间上的 G-L 公式

设 $f(x) \in C[a, b]$

作变量替换 $x = (b-a)t/2 + (b+a)/2$, 则 $t \in [-1, 1]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} dt$$


$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n A_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

其中 x_i 和 A_i 分别为 Gauss点 和 Gauss系数。



G-L 公式的优缺点

□ 与前面求积方法的比较

- ✓ 复合梯形公式：用了 $2^{10}+1$ 个节点达到 7 位有效数字
- ✓ Romberg公式：用了 9 个节点达到 7 位有效数字
- ✓ G-L公式：用了 3 个节点达到 7 位有效数字

□ G-L求积公式的优点：

计算精度高；可计算无穷区间上的积分和奇异积分。

□ G-L求积公式的缺点：

需计算Gauss点和Gauss系数；增加节点时需重新计算。

□ 高斯求积公式的求积系数全是正的,且是稳定的算法



例题1

用4点（n=3）的高斯-勒让德求积公式计算

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

解 先将区间 $[0, \pi/2]$ 化为 $[-1, 1]$ ，可以得到

$$I = \int_{-1}^1 \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 (1+t)^2 \cos \frac{\pi}{4} (1+t) dt$$



例题2

套用三点高斯公式计算积分

$$I = \int_1^3 \frac{1}{x} dx$$

解 作变换 $x=2+t$ 将积分区间变到 $[-1, 1]$ ，然后套用三点高斯公式有

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{2+t} dt \approx \frac{5}{9} \times \frac{1}{2 - \sqrt{\frac{3}{5}}} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{3}{5}}}$$



2.5 数值微分

数值微分就是用函数值的线性组合近似函数在某点的导数值。

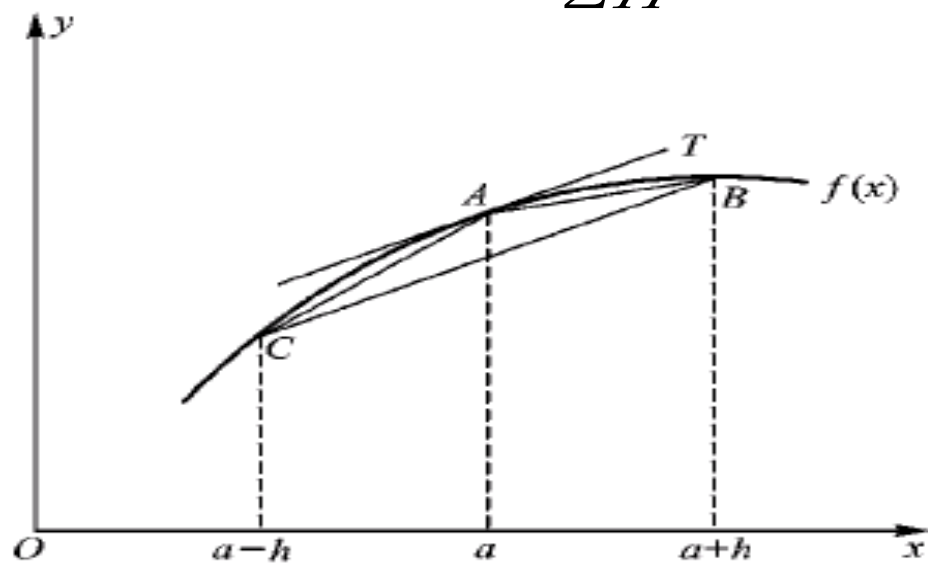
按照数学分析的定义，导数 $f'(a)$ 是差商当 $[f(a+h)-f(a)]/h$ 当 $h \rightarrow 0$ 时的极限. 如果精度要求不高，我们可以简单地取差商作为导数的近似值，这样便建立起一种简单的数值微分方法

插商公式

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$





中点公式

为要利用中点公式

$$G(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

计算导数值 $f'(a)$ ，首先必须选取合适的步长.为此需要进行误差分析.分别将 $f(a \pm h)$ 在 $x=a$ 泰勒展开有

$$\begin{aligned} f(a \pm h) = & f(a) \pm hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) \\ & \pm \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(a) \dots \end{aligned}$$



中点公式的误差

代入上式得

$$G(h) = f'(a) + \frac{h^2}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{5!} f^{(5)}(a) \dots$$

由此得知，从截断误差的角度来看，步长越小，计算结果越准确.且

$$|f'(a) - G(h)| \leq \frac{h^2}{6} M$$

$$\text{其中 } M \geq \max_{|x-a| \leq h} |f'''(x)|$$



步长的选取

再考察舍入误差.按中点公式计算,当 h 很小时,由于 $f(a+h)$ 与 $f(a-h)$ 很接近,直接相减会造成有效数字的严重损失.因此从舍入误差的角度来看,步长是不宜太小的.

综上所述,步长过大,则截断误差显著;但如果步长太小,又会导致舍入误差的增长,在实际计算时,我们希望在保证截断误差满足精度要求的前提下选取尽可能大的步长,然而事先给出一个合适的步长往往是困难的,通常在变步长的过程中实现步长的自动选择.



中点方法的加速

因为

系数 均与步长
h 无关

$$G(h) = f'(a) + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \dots$$

$$G\left(\frac{h}{2}\right) = f'(a) + \frac{\alpha_1}{4} h^2 + \hat{\alpha}_2 h^4 + \hat{\alpha}_3 h^6 + \dots$$

设

$$G_1(h) = \frac{4}{3} G\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} G(h)$$

消掉 h^2 项



中点方法的加速 (2)

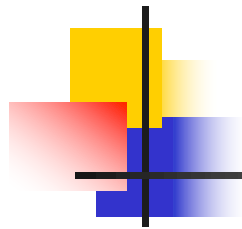
消掉 h^4 项

$$G_2(h) = \frac{16}{15} G_1\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{15} G_1(h)$$

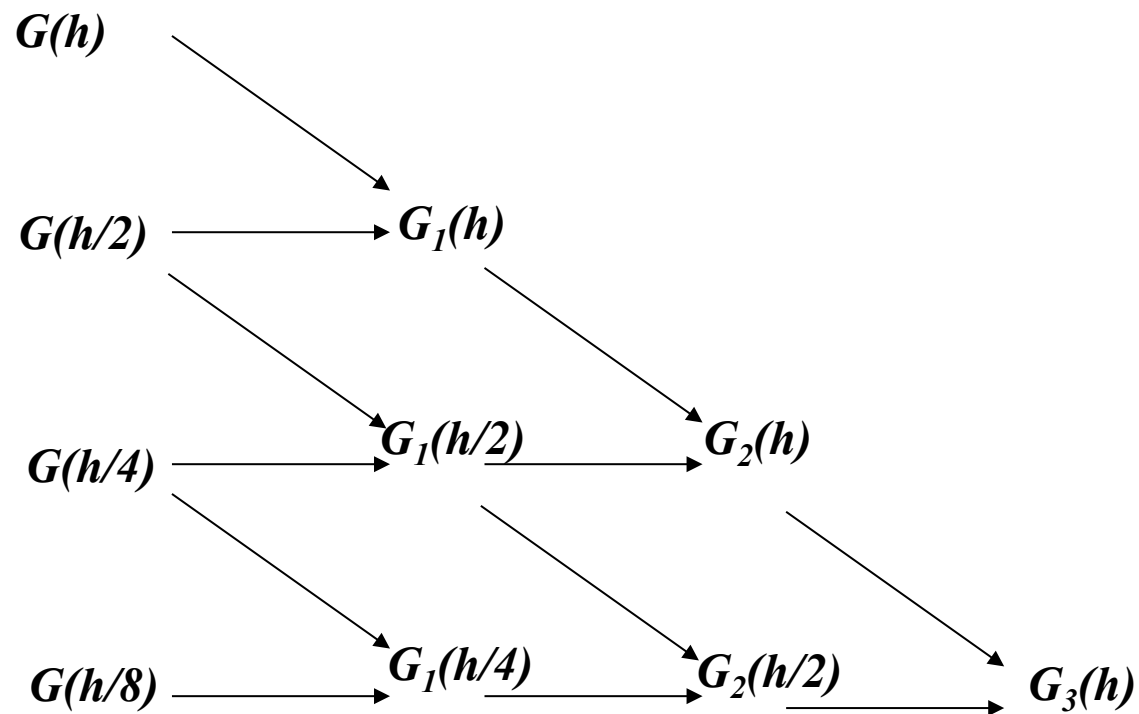
消掉 h^6 项

$$G_3(h) = \frac{64}{63} G_2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{63} G_2(h)$$

这种加速过程还可以继续下去，不过加速的效果越来越不显著



中点方法的加速 (3)





插值型的求导公式

问题：已知 $f(x)$ 在节点 x_0, \dots, x_n 上的函数值，
如何计算在这些节点处导数的近似值？

方法：插值型数值微分

先构造出 $f(x)$ 的插值多项式 $p_n(x)$ ，然后用 $p_n(x)$ 的导数来近似 $f(x)$ 的导数。

插值型的求导公式的误差

多项式插值余项

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

两边求导得

$$\begin{aligned} f'(x) - P'_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \left(\prod_{j=0}^n (x - x_j) \right)' \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \left(f^{(n+1)}(\xi_x) \right)' \end{aligned}$$



$$f'(x_i) - P'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

$$\xi_x \in (x_0, x_n)$$

两点公式

□ 两点公式（等距）：

$n = 1$ ，节点 x_0, x_1 ，步长 $h = x_1 - x_0$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \\ &= \frac{-(x - x_1)f(x_0) + (x - x_0)f(x_1)}{h} \end{aligned}$$



$$P_1'(x) = \frac{1}{h} (f(x_1) - f(x_0))$$

两点公式

所以

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h} (f(x_1) - f(x_0)) - \frac{h}{2} f''(\xi_0) \\ f'(x_1) &= \frac{1}{h} (f(x_1) - f(x_0)) + \frac{h}{2} f''(\xi_1) \end{aligned}$$



三点公式（等距）


□ 等距三点公式：

$n = 2$ ，步长 h ，节点 $x_i = x_0 + ih$ ， $i = 0, 1, 2$

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

令 $x = x_0 + th$ ，得

$$P_2(x_0 + th) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0) - t(t-2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t-1)f(x_2)$$


$$P_2'(x_0 + th) = \frac{1}{2h}[(2t-3)f(x_0) - 4(t-1)f(x_1) + (2t-1)f(x_2)]$$

三点公式（等距）

分别令 $t = 0, 1, 2$ ，得

$$P_2'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)]$$

$$P_2'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)]$$

$$P_2'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)]$$

三点公式

所以

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0) \\ f'(x_1) &= \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) \\ f'(x_2) &= \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2) \end{aligned}$$



三点公式（等距）

□ 等距三点公式：

$$P_2(x_0 + th) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0) - t(t-2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t-1)f(x_2)$$

$$\rightarrow P_2''(x_0 + th) = \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)]$$

所以

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

例题1

例：已知函数 $y = e^x$ 的函数值表

x_i	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
y_i	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

试用两点和三点的公式计算 $x = 2.7$ 处的一阶、二阶导数。

解：两点公式：

取 $x_0 = 2.6$, $x_1 = 2.7$, 得

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.1} (f(2.7) - f(2.6)) = 14.1600$$

若取 $x_0 = 2.7$, $x_1 = 2.8$, 则

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.1} (f(2.8) - f(2.7)) = 15.6490$$

例题1

若取 $x_0=2.5$, $x_1=2.7$, 则

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.2} (f(2.7) - f(2.5)) = 13.4860$$

若取 $x_0=2.7$, $x_1=2.9$, 则

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.2} (f(2.9) - f(2.7)) = 16.4720$$

通常步长越小, 误差也越小。

三点公式: 取 $x_0=2.6$, $x_1=2.7$, $x_2=2.8$, 得

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{2 \times 0.1} (f(2.8) - f(2.6)) = 14.9045$$

$$f''(2.7) \approx \frac{1}{0.1^2} (f(2.8) - 2f(2.7) + f(2.6)) = 14.8900$$



例题2

证明下列数值微分公式具有4阶代数精度

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$



例题2

证 不妨设 $x_0 = 0, h = 1$ ，否则施行变换 $x = x_0 + th$ 而考察下列数值微分公式

$$f'(0) \approx \frac{1}{12}[f(-2) - 8f(-1) + 8f(1) - f(2)]$$

考虑到对称性，上式对于偶函数的 $f = 1, x^2, x^4$ 等显然准确成立，又对于 $f = x, x^3$ 上式左右两端也相等；再考察 $f = x^5$ ，这时左端=0而右端 $\neq 0$ ，故原式有4阶精度。



例题3

验证下列数值微分公式是插值型的：

$$f'(a) \approx \frac{1}{6h}[-11f(a) + 18f(a+h) - 9f(a+2h) + 2f(a+3h)]$$



例题3

证 为简化分析，令 $a=0, h=1$ ，否则施行变换 $x = a + th$ ，则原式化为

$$f'(0) \approx \frac{1}{6}[-11f(0) + 18f(1) - 9f(2) + 2f(3)]$$

试以 $x=0,1,2,3$ 为节点构作拉格朗日插值多项式

$$p(x) = l_0(x)f(0) + l_1(x)f(1) + l_2(x)f(2) + l_3(x)f(3)$$

式中 $l_i(x)$ 是拉格朗日插值基函数



例题3

注意到

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}$$

易知

$$l'_0(0) = -\frac{11}{6}$$

同理有

$$l'_1(0) = \frac{18}{6}, l'_2(0) = -\frac{9}{6}, l'_3(0) = \frac{2}{6}$$

故有

$$p'(0) = \frac{1}{6}[-11f(0) + 18f(1) - 9f(2) + 2f(3)] \approx f'(0)$$