2017春

一． 填空题

1．已知$P(A)=0.6$ ，$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$ ，则$P(B)=$ (   )。

2．随机变量X服从标准正态分布，则$E(X^2e^{2X})=$（   ）。

3．设X服从$N(\mu,\sigma^2)$；σ^2未知， $X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体X的简单随机样本，则检验问题H_0：$\mu=1$ ； H_1：$\mu\neq1$通常所用的统计量为（   ）。

4．随机变量X 、Y的方差分别为4和9；相关系数为-0.5，则随机变量$2X-Y$ 的方差为（   ）。

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$为来自总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，$\bar{X}$ 、S^2分别为样本均值和样本方差，则$Cov(\bar{X},S)=$（   ）。

6. 从分别写有自然数 1 到 9 的九张卡片中，无放回的任取四张，则第三张取到偶数的概率为(   )。

二． 单项选择题

1．设$f_1(x)$、$f_2(x)$分别为X_1,X_2的分布函数，则下列选项中一定为某一随机变量概率分布函数的是（   ）。

（A）$f_1(x)f_2(x)$;（B）$2f_1(x)-f_2(x)$;（C）$f_1(x)+f_2(x)$;（D）$f_1(x)-f_2(x)$.

2．设X_1、X_2的概率分布列都为$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，且$P(X_1X_2=0)=1$，则概率$P(X_1+X_2=1)=$（   ）。

(A) 0； (B) $\frac{1}{2}$; (C) 1； (D) $\frac{1}{4}$.

3.随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 0.7x^2 & 0<x<1\\ 1 & 1\le x\end{cases}$,则概率$P(X=1)=$(   ).

(A) 1； (B) 0.7； (C) 0.5； (D) 0.3.

4．设总体X服从参数为的θ泊松分布，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，则当$n\to\infty$时， 则 $\bar{X}$ 依概率收敛于（　　　　）。

（A）0；　　（B）θ^2；　　（C）θ；　　（D）1。

5．总体X服从区间$[\theta-1,\ \theta+1]$上的均匀分布，$\theta>0$为未知参数；$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的简单随机样本。则下面选项中**不是**统计量的是（　　　　）。

（A）$\overline{X}+2$；　（B）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2-D(X)$；　（C）$n(\overline{X})^2$；　（D）$\overline{X}+E(X)$。

6.随机变量X、Y的相关系数为1，已知 $X\sim U[-1,1]$, $EY=2, DY=3$ 则（　　　　）。

(A)　$Y\sim U[-1,5]$；　(B) $Y\sim N(2,9)$　；(C)$Y\sim U[1,3]$；(D) $Y\sim N(2,3)$。

三．计算题

（一）设X的分布列为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=0.5$；$Y\sim U[0,1]$

且X、Y相互独立，$Z=X+Y$, 试求出 Z 的分布密度函数 $f_Z(z)$。

（二）设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}ce^{-y}, & 0<x<+\infty,\ \ x<y<+\infty,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

1．求常数c;
2．求出X、Y的边际分布密度;
3．分别求出关于X、Y的 条件密度函数;
4． 求 $P\{X+Y<2\}$.

（三）总体X的概率分布密度函数为:

$$f(x;\beta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\beta)}, & x>\beta,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中β为实数。$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本。

1. 求参数β的矩估计$\widehat{\beta_1}$；

2. 求参数β的极大似然估计$\widehat{\beta_2}$；

3. 矩估计$\widehat{\beta_1}$,极大似然估计$\widehat{\beta_2}$是不是参数β的无偏估计，为什么？

四．总体X服从$N(0\ ,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{18}$为来自总体X的简单随机样本，记$Y=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{(X_{10}^2+X_{11}^2+\cdots+X_{18}^2)^{0.5}}$。证明：$Y$服从自由度为 9 的 t 分布。

2017春答案

一．填空题

1．0.6 ；　2．$5\mathrm{e}^2$ ；3．$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-1)}{S}$；　4．$37$ ；5. 0；　6. $\frac{4}{9}$

二．单选题

1-----6　*ABDCDA*

三.

（一）解：据题意

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=P(X=1)P(X+Y\le z|X=1)+P(X=2)P(X+Y\le z|X=2)$$

$$=0.5P(Y\le z-1)+0.2P(Y\le z-2)$$

$$=0.5F_Y(z-1)+0.5F_Y(z-2)$$

所以分布密度为　$f_Z(z)=0.5f_Y(z-1)+0.5f_Y(z-2)$

所以　$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2} & z\in[1\ ,\ \ 3]\\ 0 & 其它\end{cases}$

（二）解　（1）　$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

$\mathrm{c}=1$　,

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0<x<+\infty,\quad x<y<+\infty\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（2）X 的边际分布密度　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

Y 的边际分布密度　$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}ye^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

（3）当$\mathrm{x}>0$时，$\mathrm{f}_{(\mathrm{Y}|\mathrm{X})}(\mathrm{y}|\mathrm{x})=\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\mathrm{f}_\mathrm{X}(\mathrm{x})}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(\mathrm{y}-\mathrm{x})} & \mathrm{y}>x\\ 0 & 其它\end{cases}$

当$\mathrm{y}>0$时，$\mathrm{f}_{(\mathrm{X}|\mathrm{Y})}(\mathrm{x}|\mathrm{y})=\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\mathrm{f}_\mathrm{Y}(\mathrm{y})}=\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{y}} & \mathrm{y}>x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

（4） $P\{X+Y<2\}=\int_0^1 dx\int_{\mathrm{x}}^{2-x} e^{-y}\,d = 1-2e^{-1}+e^{-2}$

（三）解：1. X 密度函数

$$f(x;\beta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\beta)} & x>\beta\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$E(X)=\beta+0.5$　　所以参数β的矩估计$\widehat{\beta_1}=\overline{\mathrm{X}}-0.5$

2.

似然函数$L(\beta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\beta)} & x_i>\beta\ \ i=1,\cdots n\\ 0 & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\beta)} & \beta<min\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2.\cdots\mathrm{x}_\mathrm{n}\}\\ 0 & 其它\end{cases}$

参数β的极大似然估计$\widehat{\beta_2}=Min\{X_1,\cdots,X_n\}$

3. X 其分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\beta)} & x>\beta\\ 0 & 其它\end{cases}$

$\widehat{\beta_2}=Min\{X_1,\cdots,X_n\}$的分布函数$\mathrm{G}(x)=1-[1-F(x)]^n$

$=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\beta)} & x>\beta\\ 0 & 其它\end{cases}$

概率密度函数$g(x;\beta)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\beta)} & x>\beta\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$E(\bar{X}-0.5)=\beta\quad E(Min(X_1\cdots,X_n)=\beta+\frac{1}{2n}$$

矩估计$\widehat{\beta_1}$是参数β的无偏估计，$\widehat{\beta_2}$不是参数β的无偏估计

四．证明：　略