

(1) $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$;

(2)

证明:

$$R^2 \cap R = \emptyset$$

$$\begin{aligned} &\iff \neg \exists x \exists z (\langle x, z \rangle \in R^2 \wedge \langle x, z \rangle \in R) && (\emptyset \text{ 定义}) \\ &\iff \forall x \forall z \neg (\langle x, z \rangle \in R^2 \wedge \langle x, z \rangle \in R) && (\text{量词否定等值式}) \\ &\iff \forall x \forall z (\neg \langle x, z \rangle \in R^2 \vee \neg \langle x, z \rangle \in R) && (\text{命题逻辑德·摩根律}) \\ &\iff \forall x \forall z (\neg (\exists y (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R)) \vee \neg \langle x, z \rangle \in R) && (\text{关系合成定义}) \\ &\iff \forall x \forall z (\forall y (\neg (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R)) \vee \neg \langle x, z \rangle \in R) && (\text{量词否定等值式}) \\ &\iff \forall x \forall z \forall y (\neg (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R) \vee \neg \langle x, z \rangle \in R) && (\text{量词辖域扩张等值式}) \\ &\iff \forall x \forall y \forall z (\neg (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R) \vee \neg \langle x, z \rangle \in R) && (\text{全称量词交换律}^2) \\ &\iff \forall x \forall y \forall z ((\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R) \rightarrow \neg \langle x, z \rangle \in R) && (\text{蕴涵等值式}) \\ &\iff R \text{ 是反传递的。} && (\text{反传递定义}) \end{aligned}$$

□

2.15

若 A 非空, 则:

R 有如下性质: 非自反: 对任意 x , 有 $x \not\subset x$, 故 $\langle x, x \rangle \notin R$ 。

反自反: 对任意 x , 有 $\langle x, x \rangle \notin R$ 。

非对称: 不存在 $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A) \wedge \emptyset \subset A$ 但 $A \not\subset \emptyset$ 。

反对称: 由于不存在 $x, y \in \mathcal{P}(A)$ 使得 $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R$, 故 $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y$ 恒成立。

传递: 真子集性质。

S 有如下性质:

非自反: 由于 A 非空, 则故有 $A \in \mathcal{P}(A) \wedge A \neq \emptyset$, 于是 $A \cap A = A \neq \emptyset \Rightarrow \langle A, A \rangle \notin S$ 。

非反自反: $\emptyset \in \mathcal{P}(A) \wedge \emptyset \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow \langle \emptyset, \emptyset \rangle \in S$ 。

对称: 集合交性质。

非反对称: 有 $\langle \emptyset, A \rangle \in S \wedge \langle A, \emptyset \rangle \in S$, 但 $A \neq \emptyset$ 。

非传递: 有 $\langle A, \emptyset \rangle \in S \wedge \langle \emptyset, A \rangle \in S$, 但 $\langle A, A \rangle \notin S$ 。

T 有如下性质:

非自反: 有 $\langle \emptyset, \emptyset \rangle \notin T$ 。

非反自反: 有 $A \in \mathcal{P}(A) \wedge A \cup A = A \Rightarrow \langle A, A \rangle \in T$ 。

对称: 集合并性质。

非反对称: 有 $\langle \emptyset, A \rangle \in T \wedge \langle A, \emptyset \rangle \in T$, 但 $A \neq \emptyset$ 。

非传递: 有 $\langle \emptyset, A \rangle \in T \wedge \langle A, \emptyset \rangle \in T$, 但 $\langle \emptyset, \emptyset \rangle \notin T$ 。

若 A 为空, 则:

²参见教材例 27.8。