3.4

例6 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+\sin xy)^{\frac{1}{xy}}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[(1+\sin xy)^{\frac{1}{\sin xy}}\right]^{\frac{\sin(xy)}{xy}}$

$=e^1$

例7. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

$0\le\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\le\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$

$\because \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=0$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$

例8. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

$0\le|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\le\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)$

又 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t^2}{4}\ln t=0$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1$

例9. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy(\sqrt{xy+4}+2)}{xy}=4.$

3. ~~多~~二元函数的连续性

1) 定义：设f(x,y)在~~某域~~平面点集 D内有定义，$P_0(x_0,y_0)$是D内点或边界点，且$P_0\in D$，若

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称f(x,y)在$P_0$连续.

注：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

$\{(x,y)|x^2+y^2=0\}$的点都是间断点.

② 注：一切多元初等函数在定义区域内连续、

2) 运算法则

① 定理1：若f(x,y), g(x,y)在(x_0,y_0)连续，则

$f(x,y)\pm g(x,y)$，$f(x,y)\cdot g(x,y)$，$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ $(g(x_0,y_0)\ne0)$

在(x_0,y_0)处连续.

③ 定理2．复合函数的连续性．

例10．证明 $f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

在(0,0)处连续.

证：作极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$

则 $(x,y)\to(0,0)\iff\forall\varphi$，都有$r\to0$

$|f(x,y)-0|=\left|xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{1}{4}r^2|\sin4\varphi|$

$\le\frac{1}{4}r^2$

从而 $\forall\varepsilon>0$，取$\delta=2\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<r=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，

有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$

故f(x,y)在(0,0)点连续.

注：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to0}\frac{1}{4}r^2\sin4\varphi=0$ ×

沿射线方向趋于(0,0)

4. 有界闭区域上~~多~~元连续函数性质.

1) 最值定理：有界闭区域D上的连续函数，在D上必能取得最大，小值

2) 介值定理：有界闭区域D上的连续函数，在D上必能取得介于最大值，最小值之间的任何值

作业：P94. 4. 7. 8(2.4.6.8.10)号，11

定义：设D为二元函数f的定义域，$P_0(x_0,y_0)$是D的一个聚点。若对任给正数M，总存在点P_0的一个δ邻域，使得当$P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$时，都有$f(P)>M$，则称f在D上当$P\to P_0$时，极限为$+\infty$，记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=+\infty$.

定义：$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}f(x,y)=A\iff\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0$，当$x>M$，$y>M$时，有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$