离散数学答案 屈婉玲版
第二版 高等教育出版社课后答案
第一章部分课后习题参考答案

16 设 p、q 的真值为 **0**；r、s 的真值为 **1**，求下列各命题公式的真值。

（1）$p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow 0\vee(0\wedge 1)\ \Leftrightarrow 0$

（2）$(p\leftrightarrow r)\wedge(\neg q\vee s)\ \Leftrightarrow (0\leftrightarrow 1)\wedge(1\vee 1)\ \Leftrightarrow 0\wedge 1\Leftrightarrow 0.$

（3）$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\leftrightarrow(p\wedge q\wedge\neg r)\ \Leftrightarrow (1\wedge 1\wedge 1)\ \leftrightarrow (0\wedge 0\wedge 0)\Leftrightarrow 0$

（4）$(\neg r\wedge s)\rightarrow(p\wedge\neg q)\ \Leftrightarrow (0\wedge 1)\rightarrow(1\wedge 0)\ \Leftrightarrow 0\rightarrow 0\Leftrightarrow 1$

17．判断下面一段论述是否为真：“π 是无理数。并且，如果 3 是无理数，则 $\sqrt{2}$ 也是无理数。另外 6 能被 2 整除，6 才能被 4 整除。”

答：p: π 是无理数　1

q:　3 是无理数　0

r: $\sqrt{2}$ 是无理数　1

s:　6 能被 2 整除　1

t:　6 能被 4 整除　0

命题符号化为：　$p\wedge(q\rightarrow r)\wedge(t\rightarrow s)$的真值为 1，所以这一段的论述为真。

19．用真值表判断下列公式的类型：

（4）$(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

（5）$(p\wedge r)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

（6）$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$

答：　（4）

p	q	p→q	¬q	¬p	¬q→¬p	(p→q)→(¬q→¬p)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

所以公式类型为永真式

（5）公式类型为可满足式（方法如上例）

（6）公式类型为永真式（方法如上例）

第二章部分课后习题参考答案

3. 用等值演算法判断下列公式的类型，对不是重言式的可满足式，再用真值表法求出成真赋值.

(1) $\neg(p\wedge q\to q)$

(2)$(p\to(p\vee q))\vee(p\to r)$

(3)$(p\vee q)\to(p\wedge r)$

答：(2) $(p\to(p\vee q))\vee(p\to r)\Leftrightarrow(\neg p\vee(p\vee q))\vee(\neg p\vee r)\Leftrightarrow\neg p\vee p\vee q\vee r\Leftrightarrow 1$

所以公式类型为永真式

(3) P	q	r	$p\vee q$	$p\wedge r$	$(p\vee q)\to(p\wedge r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

所以公式类型为可满足式

4. 用等值演算法证明下面等值式:

(2) $(p\to q)\wedge(p\to r)\Leftrightarrow(p\to(q\wedge r))$

(4) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\Leftrightarrow(p\vee q)\ \wedge\neg(p\wedge q)$

证明（2）$(p\to q)\wedge(p\to r)$

$\Leftrightarrow\ (\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(q\wedge r))$

$\Leftrightarrow p\to(q\wedge r)$

（4）$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\Leftrightarrow(p\vee(\neg p\wedge q))\ \wedge(\neg q\vee(\neg p\wedge q)$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg p)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg p)\ \wedge(\neg q\vee q)$

$\Leftrightarrow 1\wedge(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)\wedge 1$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

5. 求下列公式的主析取范式与主合取范式，并求成真赋值

(1) $(\neg p\to q)\to(\neg q\vee p)$

(2) $\neg(p\to q)\wedge q\wedge r$

(3) $(p\vee(q\wedge r))\to(p\vee q\vee r)$

解：

（1）主析取范式

$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$

$\Leftrightarrow \sum(0,2,3)$

主合取范式：

$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee (\neg q \vee p)) \wedge (\neg q \vee (\neg q \vee p))$

$\Leftrightarrow 1 \wedge (p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \Leftrightarrow M_1$

$\Leftrightarrow \prod(1)$

(2) 主合取范式为：

$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \wedge r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \wedge r \Leftrightarrow 0$

所以该式为矛盾式.

主合取范式为$\prod(0,1,2,3,4,5,6,7)$

矛盾式的主析取范式为 0

(3)主合取范式为：

$(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q \vee r)$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (p \vee q \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee (p \vee q \vee r)) \wedge ((\neg q \vee \neg r)) \vee (p \vee q \vee r))$

$\Leftrightarrow 1 \wedge 1$

$\Leftrightarrow 1$

所以该式为永真式.

永真式的主合取范式为 1

主析取范式为∑(0,1,2,3,4,5,6,7)

第三章部分课后习题参考答案

14. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明：

(2)前提：$p \to q, \neg(q \wedge r), r$

结论：$\neg p$

(4)前提：$q \to p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$

结论：$p \wedge q$

证明：（2）

①$\neg(q \wedge r)$ 前提引入

②$\neg q \vee \neg r$ ①置换

③$q \to \neg r$ ②蕴含等值式

④r 前提引入

⑤$\neg q$ ③④拒取式

⑥$p \to q$ 前提引入

⑦$\neg p$（3） ⑤⑥拒取式

证明（4）：

①$t \wedge r$ 前提引入

②t ①化简律

③$q \leftrightarrow s$ 前提引入

④$s \leftrightarrow t$ 前提引入

⑤$q \leftrightarrow t$ ③④等价三段论

⑥（$q \to t$）$\wedge (t \to q)$ ⑤ 置换

⑦（$q \to t$） ⑥化简

⑧q ②⑥ 假言推理

⑨$q \to p$ 前提引入

⑩p　　　　　　⑧⑨假言推理

(11) $p\wedge q$　　　　　　⑧⑩合取

15 在自然推理系统 P 中用附加前提法证明下面各推理：

(1)前提：$p\rightarrow(q\rightarrow r)$, $s\rightarrow p$, q

结论：$s\rightarrow r$

证明

①s　　　　　附加前提引入

②$s\rightarrow p$　　　　前提引入

③p　　　　　①②假言推理

④$p\rightarrow(q\rightarrow r)$　前提引入

⑤$q\rightarrow r$　　　　③④假言推理

⑥q　　　　　前提引入

⑦r　　　　　⑤⑥假言推理

16 在自然推理系统 P 中用归谬法证明下面各推理：

(1)前提：$p\rightarrow\neg q$, $\neg r\vee q$, $r\wedge\neg s$

结论：$\neg p$

证明：

①p　　　　　　结论的否定引入

②$p\rightarrow\neg q$　　　　前提引入

③$\neg q$　　　　　①②假言推理

④$\neg r\vee q$　　　　前提引入

⑤$\neg r$　　　　　④化简律

⑥$r\wedge\neg s$　　　　前提引入

⑦r　　　　　　⑥化简律

⑧$r\wedge\neg r$　　　　⑤⑦ 合取

由于最后一步 $r\wedge\neg r$ 是矛盾式,所以推理正确.

第四章部分课后习题参考答案

3. 在一阶逻辑中将下面将下面命题符号化,并分别讨论个体域限制为(a),(b)条件时命

题的真值:

(1) 对于任意 x, 均有$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

(2) 存在 x, 使得 x+5=9.

其中(a)个体域为自然数集合.

(b)个体域为实数集合.

解:

F(x): $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

G(x): x+5=9.

(1)在两个个体域中都解释为$\forall xF(x)$，在（a）中为假命题，在(b)中为真命题。

(2)在两个个体域中都解释为$\exists xG(x)$，在（a）(b)中均为真命题。

4. 在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1) 没有不能表示成分数的有理数.

(2) 在北京卖菜的人不全是外地人.

解:

(1)F(x): x 能表示成分数

H(x): x 是有理数

命题符号化为: $\neg\exists x(\neg F(x)\wedge H(x))$

(2)F(x): x 是北京卖菜的人

H(x): x 是外地人

命题符号化为: $\neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$

5. 在一阶逻辑将下列命题符号化:

(1) 火车都比轮船快.

(3) 不存在比所有火车都快的汽车.

解:

(1)F(x): x 是火车; G(x): x 是轮船; H(x,y): x 比 y 快

命题符号化为: $\forall x\forall y((F(x)\wedge G(y))\rightarrow H(x,y))$

(2) (1)F(x): x 是火车; G(x): x 是汽车; H(x,y): x 比 y 快

命题符号化为: $\neg\exists y(G(y)\wedge\forall x(F(x)\rightarrow H(x,y)))$

9.给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D 为实数集合 R.

(b) D 中特定元素$\bar{a}$=0.

(c) 特定函数$\bar{f}(x, y)=x-y$, $x, y \in D$.

(d) 特定谓词$\bar{F}(x, y): x=y$, $\bar{G}(x, y): x<y$, $x, y \in D$.

说明下列公式在 I 下的含义,并指出各公式的真值:

(1) $\forall x \forall y(G(x, y) \rightarrow \neg F(x, y))$

(2) $\forall x \forall y(F(f(x, y), a) \rightarrow G(x, y))$

答:(1) 对于任意两个实数 x, y, 如果 x<y, 那么 $x \neq y$. 真值 1.

(2) 对于任意两个实数 x, y, 如果 x-y=0, 那么 x<y. 真值 0.

10. 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D=N(N 为自然数集合).

(b) D 中特定元素$\bar{a}$=2.

(c) D 上函数$\bar{f}(x, y)=x+y$, $\bar{g}(x, y)=xy$.

(d) D 上谓词$\bar{F}(x, y): x=y$.

说明下列各式在 I 下的含义,并讨论其真值.

(1) $\forall x F(g(x, a), x)$

(2) $\forall x \forall y(F(f(x, a), y) \rightarrow F(f(y, a), x))$

答:(1) 对于任意自然数 x, 都有 2x=x, 真值 0.

(2) 对于任意两个自然数 x, y, 使得如果 x+2=y, 那么 y+2=x. 真值 0.

11. 判断下列各式的类型:

(1) $F(x,y) \rightarrow (G(x,y) \rightarrow F(x,y))$.

(3) $\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$.

解:(1)因为 $p \rightarrow(q \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p \vee(\neg q \vee p) \Leftrightarrow 1$ 为永真式;

所以 $F(x,y) \rightarrow (G(x,y) \rightarrow F(x,y))$.为永真式;

(3)取解释 I 个体域为全体实数

F(x, y): x+y=5

所以,前件为任意实数 x 存在实数 y 使 x+y=5, 前件真;

后件为存在实数 x 对任意实数 y 都有 x+y=5, 后件假,]

此时为假命题

再取解释 I 个体域为自然数 N，

F(x, y)：:x+y=5

所以,前件为任意自然数 x 存在自然数 y 使 x+y=5，前件假。此时为假命题。

此公式为非永真式的可满足式。

13. 给定下列各公式一个成真的解释，一个成假的解释。

(1) $\forall x(F(x)\vee G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge H(x))$

解:(1)个体域:本班同学

F(x)：x 会吃饭, G(x)：x 会睡觉.成真解释

F(x)：x 是泰安人,G(x)：x 是济南人.（2）成假解释

(2)个体域:泰山学院的学生

F(x)：x 出生在山东,G(x):x 出生在北京,H(x):x 出生在江苏,成假解释.

F(x)：x 会吃饭,G(x)：x 会睡觉,H(x)：x 会呼吸. 成真解释.

第五章部分课后习题参考答案

5.给定解释 I 如下:

(a)个体域 D={3, 4};

(b) $\overline{f}(x)$ 为 $\overline{f}(3)=4, \overline{f}(4)=3$

(c) $\overline{F}(x,y)$为$\overline{F}(3,3)=\overline{F}(4,4)=0,\ \overline{F}(3,4)=\overline{F}(4,3)=1$.

试求下列公式在 I 下的真值.

(1) $\forall x\exists yF(x,y)$

(3) $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$

解:(1) $\forall x\exists yF(x,y)\Leftrightarrow\forall x(F(x,3)\vee F(x,4))$

$$\Leftrightarrow\ (F(3,3)\vee F(3,4))\wedge(F(4,3)\vee F(4,4))$$

$$\Leftrightarrow(0\vee 1)\wedge(1\vee 0)\Leftrightarrow 1$$

(2) $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$

$$\Leftrightarrow\forall x((F(x,3)\rightarrow F(f(x),f(3)))\wedge(F(x,4)\rightarrow F(f(x),f(4))))$$

$$\Leftrightarrow\forall x((F(x,3)\rightarrow F(f(x),4))\wedge(F(x,4)\rightarrow F(f(x),3)))$$

$\Leftrightarrow ((F(3,3) \to F(f(3),4)) \wedge (F(3,4) \to F(f(3),3)))$

$\wedge ((F(4,3) \to F(f(4),4)) \wedge (F(4,4) \to F(f(4),3)))$

$\Leftrightarrow ((0 \to F(4,4)) \wedge (F(3,4) \to F(4,3))) \wedge ((1 \to F(3,4)) \wedge (0 \to F(3,3)))$

$\Leftrightarrow (0 \to 0) \wedge (1 \to 1) \wedge (1 \to 1) \wedge (0 \to 0) \Leftrightarrow 1$

12. 求下列各式的前束范式。

(1) $\forall x F(x) \to \forall y G(x, y)$

(5) $\exists x_1 F(x_1, x_2) \to (H(x_1) \to \neg \exists x_2 G(x_1, x_2))$ （本题课本上有错误）

解：(1) $\forall x F(x) \to \forall y G(x, y) \Leftrightarrow \forall x F(x) \to \forall y G(t, y) \Leftrightarrow \exists x \forall y (F(x) \to G(t, y))$

(5) $\exists x_1 F(x_1, x_2) \to (H(x_1) \to \neg \exists x_2 G(x_1, x_2))$

$\Leftrightarrow \exists x_1 F(x_1, x_2) \to (H(x_3) \to \forall x_2 \neg G(x_3, x_2))$

$\Leftrightarrow \exists x_1 F(x_1, x_4) \to \forall x_2 (H(x_3) \to \neg G(x_3, x_2))$

$\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 (F(x_1, x_4) \to (H(x_3) \to \neg G(x_3, x_2)))$

15. 在自然数推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

(1) 前提：$\exists x F(x) \to \forall y ((F(y) \vee G(y)) \to R(y))$，$\exists x F(x)$

结论：$\exists x R(x)$

(2) 前提：$\forall x (F(x) \to (G(a) \wedge R(x)))$，$\exists x F(x)$

结论：$\exists x (F(x) \wedge R(x))$

证明(1)

① $\exists x F(x)$　　前提引入

② $F(c)$　　①EI

③ $\exists x F(x) \to \forall y ((F(y) \vee G(y)) \to R(y))$　　前提引入

④ $\forall y ((F(y) \vee G(y)) \to R(y))$　　①③假言推理

⑤ $(F(c) \vee G(c)) \to R(c))$　　④UI

⑥ $F(c) \vee G(c)$　　②附加

⑦ $R(c)$　　⑤⑥假言推理

⑧ $\exists x R(x)$　　⑦EG

(2)

①$\exists xF(x)$ 前提引入

②$F(c)$ ①EI

③$\forall x(F(x)\rightarrow(G(a)\wedge R(x)))$ 前提引入

④$F(c)\rightarrow(G(a)\wedge R(c))$ ③UI

⑤$G(a)\wedge R(c)$ ②④假言推理

⑥$R(c)$ ⑤化简

⑦$F(c)\wedge R(c)$ ②⑥合取引入

⑧$\exists x(F(x)\wedge R(x))$ ⑦EG

第六章部分课后习题参考答案

5. 确定下列命题是否为真：

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$ 真

(2) $\varnothing\in\varnothing$ 假

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$ 真

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$ 真

(5) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$ 真

(6) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b\}\}$ 真

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$ 真

(8) $\{a,b\}\in\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$ 假

6. 设 a,b,c 各不相同，判断下述等式中哪个等式为真:

(1) $\{\{a,b\},c,\varnothing\}=\{\{a,b\},c\}$ 假

(2) $\{a,b,a\}=\{a,b\}$ 真

(3) $\{\{a\},\{b\}\}=\{\{a,b\}\}$ 假

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\},a,b\}=\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},a,b\}$ 假

8. 求下列集合的幂集：

(1) $\{a,b,c\}$ $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

(2) $\{1,\{2,3\}\}$ $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

(3) $\{\varnothing\}$ $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

14. 化简下列集合表达式：

（1）$(A\cup B)\cap B\ ) - (A\cup B)$

（2）$((A\cup B\cup C) - (B\cup C))\cup A$

解：

(1) $(A\cup B)\cap B\ ) - (A\cup B) = (A\cup B)\cap B\ )\cap\sim(A\cup B)$

$= (A\cup B)\cap\sim(A\cup B)\ )\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$

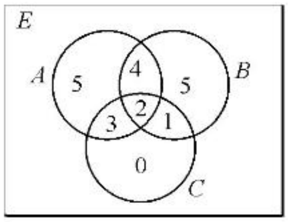
（2）$((A\cup B\cup C) - (B\cup C))\cup A= ((A\cup B\cup C)\cap\sim(B\cup C))\cup A$

$= (A\cap\sim(B\cup C))\cup((B\cup C\ )\cap\sim(B\cup C))\cup A$

$= (A\cap\sim(B\cup C))\cup\varnothing\cup A= (A\cap\sim(B\cup C))\cup A=A$

18. 某班有 25 个学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有 2 人会打这三种球。已知 6 个会打网球的人都会打篮球或排球。求不会打球的人数。

解：阿 A={会打篮球的人}，B={会打排球的人}，C={会打网球的人}



$|A|=14,\ |B|=12,\ |A\cap B|=6, |A\cap C|=5, |\ A\cap B\cap C|=2, |C|=6, C\subseteq A\cup B$

如图所示。

$25-(5+4+2+3)-5-1=25-14-5-1=5$

不会打球的人共 5 人

21. 设集合 $A=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{\varnothing\}\}$，计算下列表达式：

（1）$\cup A$

（2）$\cap A$

（3）$\cap\cup A$

（4）$\cup\cap A$

解：

（1）$\cup A=\{1,2\}\cup\{2,3\}\cup\{1,3\}\cup\{\varnothing\}=\{1,2,3,\varnothing\}$

（2）$\cap A=\{1,2\}\cap\{2,3\}\cap\{1,3\}\cap\{\varnothing\}=\varnothing$

（3）$\cap\cup A=1\cap 2\cap 3\cap\varnothing=\varnothing$

（4）$\cup\cap A=\varnothing$

27、设 A,B,C 是任意集合，证明

(1) $(A-B)-C=A-B\cup C$

(2) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

证明

(1) $(A-B)-C=(A\cap\sim B)\cap\sim C=A\cap(\sim B\cap\sim C)=A\cap\sim(B\cup C)=A-B\cup C$

(2) $(A-C)-(B-C)=(A\cap\sim C)\cap\sim(B\cap\sim C)=(A\cap\sim C)\cap(\sim B\cup C)$

$=(A\cap\sim C\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C\cap C)=(A\cap\sim C\cap\sim B)\cup\varnothing$

$=A\cap\sim(B\cup C)=A-B\cup C$ 由（1）得证。

第七章部分课后习题参考答案

7.列出集合 A={2,3,4}上的恒等关系 I_A,全域关系 E_A,小于或等于关系 L_A,整除关系 D_A.

解：$I_A=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$E_A=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

$L_A=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$D_A=\{\langle 2,4\rangle\}$

13.设 $A=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

$B=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

求 $A\cup B$,$A\cap B$, domA, domB, dom($A\cup B$), ranA, ranB, ran($A\cap B$), fld(A-B).

解：$A\cup B=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

$A\cap B=\{\langle 2,4\rangle\}$

$domA=\{1,2,3\}$

$domB=\{1,2,4\}$

$dom(A\vee B)=\{1,2,3,4\}$

$ranA=\{2,3,4\}$

$ranB=\{2,3,4\}$

$ran(A\cap B)=\{4\}$

$A-B=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，$fld(A-B)=\{1,2,3\}$

14.设 $R=\{\langle 0,1\rangle\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

求 $R\circ R$, R^{-1}, $R\uparrow\{0,1,\}$, $R[\{1,2\}]$

解：$R\circ R=\{\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

R^{-1},={<1, 0>, <2, 0>, <3, 0>, <2, 1>, <3, 1>, <3, 2>}

R↑ {0, 1}={<0, 1>, <0, 2>, <0, 3>, <1, 2>, <1, 3>}

R[{1, 2}]=ran(R|{1, 2})={2, 3}

16. 设 A={a,b,c,d}，R_1, R_2 为 A 上的关系，其中

$R_1 = \{ \langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle \}$

$R_2 = \{\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle\}$

求 $R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1, R_1^2, R_2^3$。

解：$R_1 \circ R_2$={<a, d>, <a, c>, <a, d>}

$R_2 \circ R_1$={<c, d>}

$R_1^2 = R_1 \circ R_1$={<a, a>, <a, b>, <a, d>}

$R_2^2 = R_2 \circ R_2$={<b, b>, <c, c>, <c, d>}

$R_2^3 = R_2 \circ R_2^2$={<b, c>, <c, b>, <b, d>}

36. 设 A={1, 2, 3, 4}，在 A×A 上定义二元关系 R，

∀<u, v>, <x, y>∈A×A ，<u, v> R <x, y>⇔u + y = x + v.

(1)证明 R 是 A×A 上的等价关系.

(2)确定由 R 引起的对 A×A 的划分.

（1）证明：∵<u, v>R<x, y> ⇔u+y=x-y

∴<u, v>R<x, y>⇔u-v=x-y

∀<u, v>∈A×A

∵u-v=u-v

∴<u, v>R<u, v>

∴R 是自反的

任意的<u, v>, <x, y>∈A×A

如果<u, v>R<x, y> ，那么 u-v=x-y

∴x-y=u-v　∴<x, y>R<u, v>

∴R 是对称的

任意的<u, v>, <x, y>, <a, b>∈A×A

若〈u, v〉R〈x, y〉, 〈x, y〉R〈a, b〉

则 u−v=x−y, x−y=a−b

∴u−v=a−b　∴〈u, v〉R〈a, b〉

∴R 是传递的

∴R 是 A×A 上的等价关系

(2) Π={{〈1, 1〉, 〈2, 2〉, 〈3, 3〉, 〈4, 4〉}, {〈2, 1〉, 〈3, 2〉, 〈4, 3〉}, {〈3, 1〉, 〈4, 2〉}, {〈4, 1〉}, {〈1, 2〉, 〈2, 3〉, 〈3, 4〉}, {〈1, 3〉, 〈2, 4〉}, {〈1, 4〉} }

41. 设 A={1，2，3，4}，R 为 A×A 上的二元关系，∀ 〈a，b〉，〈c，d〉 ∈ A×A，

〈a，b〉 R 〈c，d〉 ⇔a + b = c + d

(1) 证明 R 为等价关系.

(2)求 R 导出的划分.

(1)证明：∀〈a，b〉 ∈ A×A

a+b=a+b

∴〈a, b〉R〈a, b〉

∴R 是自反的

任意的〈a, b〉, 〈c, d〉∈A×A

设〈a, b〉R〈c, d〉，则 a+b=c+d

∴c+d=a+b　∴〈c, d〉R〈a, b〉

∴R 是对称的

任意的〈a, b〉, 〈c, d〉, 〈x, y〉∈A×A

若〈a, b〉R〈c, d〉, 〈c, d〉R〈x, y〉

则 a+b=c+d, c+d=x+y

∴a+b=x+y　∴〈a, b〉R〈x, y〉

∴R 是传递的

∴R 是 A×A 上的等价关系

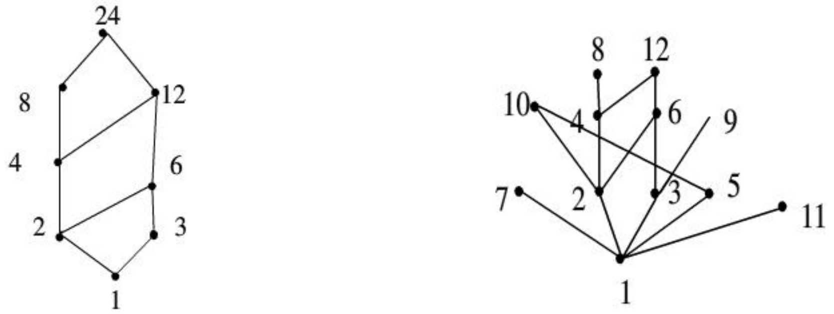
(2) Π={{〈1, 1〉}, {〈1, 2〉, 〈2, 1〉}, {〈1, 3〉, 〈2, 2〉, 〈3, 1〉}, {〈1, 4〉, 〈4, 1〉, 〈2, 3〉, 〈3, 2〉}, {〈2, 4〉, 〈4, 2〉, 〈3, 3〉}, {〈3, 4〉, 〈4, 3〉}, {〈4, 4〉}}

43. 对于下列集合与整除关系画出哈斯图:

(1) {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

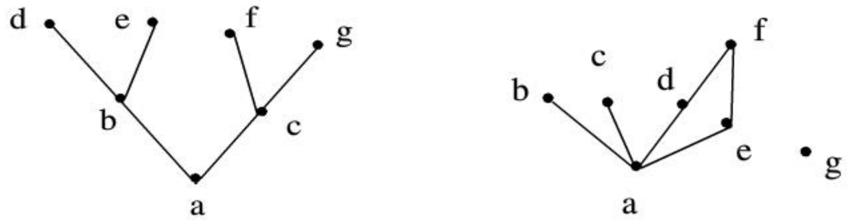
(2) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

解:



(1)　　　　　　　　(2)

45. 下图是两个偏序集<A, R$_{\prec}$>的哈斯图. 分别写出集合 A 和偏序关系 R$_{\prec}$的集合表达式.



(a)　　　　　　　　(b)

解: (a) A={a, b, c, d, e, f, g}

R$_{\prec}$={<a, b>, <a, c>, <a, d>, <a, e>, <a, f>, <a, g>, <b, d>, <b, e>, <c, f>, <c, g>} ∪ I_A

(b) A={a, b, c, d, e, f, g}

R$_{\prec}$={<a, b>, <a, c>, <a, d>, <a, e>, <a, f>, <d, f>, <e, f>} ∪ I_A

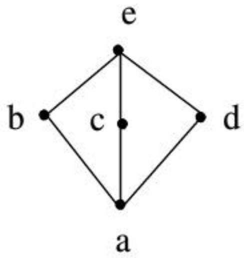
46. 分别画出下列各偏序集<A, R≺>的哈斯图, 并找出 A 的极大元`极小元`最大元和最小元.

(1) A={a, b, c, d, e}

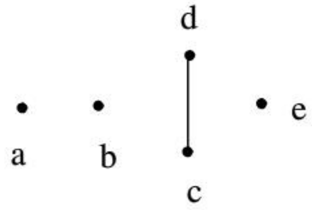
R$_{\prec}$={<a, d>, <a, c>, <a, b>, <a, e>, <b, e>, <c, e>, <d, e>} ∪ I_A.

(2) A={a, b, c, d, e},　　R$_{\prec}$={<c, d>} ∪IA.

解:



(1)



(2)

项目	(1)	(2)
极大元:	e	a, b, d, e
极小元:	a	a, b, c, e
最大元:	e	无
最小元:	a	无

第八章部分课后习题参考答案

1．设 f :N→N,且

$$f(x)=\begin{cases}1, & 若x为奇数\\ \dfrac{x}{2}, & 若x为偶数\end{cases}$$

求 f (0), f ({0}), f (1), f ({1}), f ({0,2,4,6,⋯})，f ({4,6,8})， $f^{-1}(\{3,5,7\})$.

解：f (0)=0, f ({0})={0}, f (1)=1, f ({1})={1},

f ({0,2,4,6,⋯})=N，f ({4,6,8})={2,3,4}， $f^{-1}(\{3,5,7\})=\{6,10,14\}$.

4. 判断下列函数中哪些是满射的?哪些是单射的?哪些是双射的?

(1) f:N→N, $f(x)=x^2+2$　　不是满射，不是单射

(2) f:N→N,f(x)=(x)mod 3,x 除以 3 的余数　　不是满射，不是单射

(3) f:N→N,$f(x)=\begin{cases}1, & 若x为奇数\\ 0, & 若x为偶数\end{cases}$　　不是满射，不是单射

(4) f:N→{0,1},$f(x)=\begin{cases}0, & 若x为奇数\\ 1, & 若x为偶数\end{cases}$　　是满射，不是单射

(5) f:N-{0} →R,f(x)=lgx　　不是满射，是单射

(6) f:R→R,$f(x)=x^2-2x-15$　　不是满射，不是单射

5. 设 X={a,b,c,d},Y={1,2,3},f={<a,1>,<b,2>,<c,3>,}判断以下命题的真假:

(1)f 是从 X 到 Y 的二元关系,但不是从 X 到 Y 的函数; 对

(2)f 是从 X 到 Y 的函数,但不是满射,也不是单射的; 错

(3)f 是从 X 到 Y 的满射,但不是单射; 错

(4)f 是从 X 到 Y 的双射. 错

第十章部分课后习题参考答案

4．判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

（1） 整数集合 Z 和普通的减法运算。

封闭,不满足交换律和结合律，无零元和单位元

（2） 非零整数集合Z^*和普通的除法运算。不封闭

（3） 全体$n\times n$实矩阵集合M_n（R）和矩阵加法及乘法运算，其中 n≥2。

封闭 均满足交换律，结合律，乘法对加法满足分配律；

加法单位元是零矩阵，无零元；

乘法单位元是单位矩阵，零元是零矩阵；

（4）全体$n\times n$实可逆矩阵集合关于矩阵加法及乘法运算，其中 n≥2。不封闭

（5）正实数集合R^+和$\circ$运算，其中$\circ$运算定义为：

$$\forall a,\ b \in R^+,\ a\circ b = ab - a - b$$

不封闭 因为 $1\circ 1 = 1\times 1 - 1 - 1 = -1 \notin R^+$

（6）$n \in Z^+, nZ = \{nz \mid z \in Z\}$.nZ关于普通的加法和乘法运算。

封闭，均满足交换律，结合律，乘法对加法满足分配律

加法单位元是 **0**，无零元；

乘法无单位元（$n>1$），零元是 **0**； $n=1$单位元是 **1**

（7）$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ n≥ 2.$\circ$ 运算定义如下：

$$\forall a,\ b \in A,\ a\circ b = b$$

封闭 不满足交换律，满足结合律，

（8）$S = \{2x-1 \mid x \in Z^+\}$关于普通的加法和乘法运算。

封闭 均满足交换律，结合律，乘法对加法满足分配律

（9）S = {0,1},S 是关于普通的加法和乘法运算。

加法不封闭，乘法封闭；乘法满足交换律，结合律

（10）$S=\{x \mid x=2^n, n\in Z^+\}$,S 关于普通的加法和乘法运算。

加法不封闭，乘法封闭，乘法满足交换律，结合律

5．对于上题中封闭的二元运算判断是否适合交换律，结合律，分配律。

见上题

7．设 * 为Z^+上的二元运算$\forall x,y\in Z^+$，

$$X * Y = \min(x, y)$$，即 x 和 y 之中较小的数.

(1)求 4 * 6，7 * 3。

4,　3

(2)* 在Z^+上是否适合交换律，结合律，和幂等律？

满足交换律，结合律，和幂等律

(3)求*运算的单位元，零元及Z^+中所有可逆元素的逆元。

单位元无，零元 **1**，　所有元素无逆元

8．$S=Q\times Q$　Q为有理数集，*为 S 上的二元运算，$\forall\langle a,b\rangle,\langle x,y\rangle\in S$ 有

$$\langle a,b\rangle*\langle x,y\rangle=\langle ax, ay+b\rangle$$

（1）*运算在 S 上是否可交换，可结合？是否为幂等的？

不可交换：$\langle x,y\rangle*\langle a,b\rangle=\langle xa, xb+y\rangle\neq\langle a,b\rangle*\langle x,y\rangle$

可结合：$(\langle a,b\rangle*\langle x,y\rangle)*\langle c,d\rangle=\langle ax, ay+b\rangle*\langle c,d\rangle=\langle axc, axd+(ay+b)\rangle$

$\langle a,b\rangle*(\langle x,y\rangle*\langle c,d\rangle)=\langle a,b\rangle*\langle xc,xd+y\rangle=\langle axc, a(xd+y)+b\rangle$

$(\langle a,b\rangle*\langle x,y\rangle)*\langle c,d\rangle=\langle a,b\rangle*(\langle x,y\rangle*\langle c,d\rangle)$

不是幂等的

（2）*运算是否有单位元，零元？ 如果有请指出，并求 S 中所有可逆元素的逆元。

设$\langle a,b\rangle$是单位元，$\forall\langle x,y\rangle\in S$，$\langle a,b\rangle*\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle*\langle a,b\rangle=\langle x,y\rangle$

则$\langle ax,ay+b\rangle=\langle xa,xb+y\rangle=\langle x,y\rangle$，解的$\langle a,b\rangle=\langle 1,0\rangle$，即为单位。

设$\langle a,b\rangle$是零元，$\forall\langle x,y\rangle\in S$，$\langle a,b\rangle*\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle*\langle a,b\rangle=\langle a,b\rangle$

则$\langle ax,ay+b\rangle=\langle xa,xb+y\rangle=\langle a,b\rangle$，无解。即无零元。

$\forall\langle x,y\rangle\in S$，设$\langle a,b\rangle$是它的逆元$\langle a,b\rangle*\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle*\langle a,b\rangle=\langle 1,0\rangle$

$\langle ax,ay+b\rangle=\langle xa,xb+y\rangle=\langle 1,0\rangle$

$a=1/x, b=-y/x$

所以当 **x≠0** 时，$<x,y>^{-1}=\left\langle \frac{1}{x},-\frac{y}{x} \right\rangle$

10. 令 S={a，b}，S 上有四个运算：∗，°，·和□分别有表 10.8 确定。

∗	a	b
a	a	a
b	a	a

(a)

∘	a	b
a	a	b
b	b	a

(b)

·	a	b
a	b	a
b	a	a

(c)

□	a	b
a	a	b
b	a	b

(d)

(1)这 4 个运算中哪些运算满足交换律，结合律，幂等律？

(a) 交换律，结合律，幂等律都满足， 零元为 **a,**没有单位元;

(b)满足交换律和结合律，不满足幂等律，单位元为 **a,**没有零元

$$a^{-1}=a,\ b^{-1}=b$$

(c)满足交换律**,**不满足幂等律**,**不满足结合律

$$a\circ(b\circ b)=a\circ a=b,\quad (a\circ b)\circ b=a\circ b=a$$

$$a\circ(b\circ b)\neq(a\circ b)\circ b$$

没有单位元**,** 没有零元

(d) 不满足交换律，满足结合律和幂等律

没有单位元**,** 没有零元

(2)求每个运算的单位元，零元以及每一个可逆元素的逆元。

见上

16. 设 V=〈 N，+ ，·〉，其中+ ，·分别代表普通加法与乘法，对下面给定的每个集合确定它是否构成 V 的子代数，为什么？

（1）$S_1=\{2n \mid n\in Z\}$ 是

（2）$S_2=\{2n+1 \mid n\in Z\}$ 不是 加法不封闭

（3）S_3 = {-1，0，1} 不是，加法不封闭

第十一章部分课后习题参考答案

8. 设 S={0，1，2，3}，$\otimes$ 为模 4 乘法，即

$$\forall x,y\in S,\quad x\otimes y=(xy)\bmod 4$$

问〈S，$\otimes$〉是否构成群？为什么？

解：(1) $\forall$ x, y∈S, $x\otimes y=(xy) \bmod 4 \in S$，$\otimes$是 S 上的代数运算。

(2) $\forall$ x, y, z∈S, 设 xy=4k+r $\quad 0 \le r \le 3$

$(x\otimes y)\otimes z=((xy) \bmod 4)\otimes z=r\otimes z=(rz) \bmod 4$

$=(4kz+rz) \bmod 4=((4k+r)z) \bmod 4=(xyz) \bmod 4$

同理 $x\otimes(y\otimes z)=(xyz) \bmod 4$

所以，$(x\otimes y)\otimes z = x\otimes(y\otimes z)$，结合律成立。

(3) $\forall$ x∈S, $(x\otimes 1)=(1\otimes x)=x$,，所以 1 是单位元。

(4) $1^{-1}=1,\ 3^{-1}=3$, 0 和 2 没有逆元

所以，〈S，$\otimes$〉不构成群

9. 设 Z 为整数集合，在 Z 上定义二元运算。如下：

$$\forall x, y \in Z,\ xoy= x+y-2$$

问 Z 关于 o 运算能否构成群？为什么？

解：(1) $\forall$ x, y∈Z, $xoy= x+y-2 \in Z$，o 是 Z 上的代数运算。

(2) $\forall$ x, y, z∈Z,

(xoy) oz =(x+y-2)oz=(x+y-2)+z-2=x+y+z-4

同理(xoy)oz= xo(yoz)，结合律成立。

(3)设e是单位元，$\forall$ x∈Z, $xoe=eox=x$, 即 $x+e-2=e+x-2=x$, $\quad e=2$

(4) $\forall$ x∈Z，设 x 的逆元是 y, $xoy=yox=e$，即 x+y-2=y+x-2=2,

所以，$x^{-1}=y=4-x$

所以〈Z，o〉构成群

11. 设 $G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$，证明 G 关于矩阵乘法构成一个群.

解：(1) $\forall$ x, y∈G, 易知 xy∈G, 乘法是 Z 上的代数运算。

(2) 矩阵乘法满足结合律

(3)设$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$是单位元，

(4)每个矩阵的逆元都是自己。

所以 G 关于矩阵乘法构成一个群.

14. 设 G 为群，且存在 a∈G, 使得

$$G=\{a^k \mid k\in Z\}$$

证明：G 是交换群。

证明: ∀x, y∈G，设 $x=a^k$， $y=a^l$，则

$$xy=a^k a^l=a^{k+l}=\!=a^{l+k}=a^l a^k=yx$$

所以，G 是交换群

17. 设 G 为群，证明 e 为 G 中唯一的幂等元。

证明: 设 $e_0\in G$ 也是幂等元，则 $e_0^2=e_0$，即 $e_0^2=e_0 e$，由消去律知 $e_0=e$

18. 设 G 为群，a, b, c∈G, 证明

$$|abc|=|bca|=|cab|$$

证明：先证设 $(abc)^k=e\Leftrightarrow(bca)^k=e$

设 $(abc)^k=e$, 则 $(abc)(abc)(abc)\cdots(abc)=e$，

即 $$a(bc)(abc)(abc)\cdot a\cdot(bc)aa^{-1}=e$$

左边同乘 a^{-1}，右边同乘 a 得

$$(bca)(bca)(bca)\cdots(bca)=(bac)^k=a^{-1}ea=e$$

反过来，设 $(bac)^k=e$, 则 $(abc)^k=e$.

由元素阶的定义知，|abc|=|bca|，同理|bca|=|cab|

19. 证明：偶数阶群 G 必含 2 阶元。

证明：设群 G 不含 2 阶元，$\forall a\in G$，当 $a=e$ 时，a 是一阶元，当 $a\neq e$ 时，a 至少是 3 阶元, 因为群 G 时有限阶的，所以 a 是有限阶的，设 a 是 k 阶的, 则 a^{-1} 也是 k 阶的，所以高于 3 阶的元成对出现的，G 不含 2 阶元，G 含唯一的 1 阶元 e, 这与群 G 是偶数阶的矛盾。所以，偶数阶群 G 必含 2 阶元

20. 设 G 为非 Abel 群，证明 G 中存在非单位元 a 和 b, a≠b, 且 ab=ba.

证明：先证明 G 含至少含 3 阶元。

若 G 只含 1 阶元, 则 G={e}, G 为 Abel 群矛盾；

若 G 除了 1 阶元 e 外, 其余元a均为 2 阶元，则$a^2=e$，$a^{-1}=a$

$\forall a,b\in G, a^{-1}=a, b^{-1}=b, (ab)^{-1}=ab,$所以$ab=a^{-1}b^{-1}=(ba)^{-1}=ba$，

与 G 为 Abel 群矛盾；

所以，G 含至少含一个 3 阶元，设为a，则$a\neq a^2$，且$a^2a=aa^2$。

令$b=a^2$的证。

21. 设 G 是 $M_n(R)$ 上的加法群，n≥2，判断下述子集是否构成子群。

（1）全体对称矩阵　　　是子群

（2）全体对角矩阵　　　是子群

（3）全体行列式大于等于 0 的矩阵.　不是子群

（4）全体上（下）三角矩阵。　是子群

22. 设 G 为群，a 是 G 中给定元素，a 的正规化子 N（a）表示 G 中与 a 可交换的元素构成的集合，即

N（a）={x | x∈G∧xa=ax}

证明 N（a）构成 G 的子群。

证明：ea=ae, $e\in N(a)\neq\phi$

$\forall x,y\in N(a)$, 则　$ax=xa, ay=ya$

$a(xy)=(ax)y=(xa)y=x(ay)=x(ya)=(xy)a$, 所以$xy\in N(a)$

由 $ax=xa$，得 $x^{-1}axx^{-1}=x^{-1}xax^{-1}, x^{-1}ae=eax^{-1}$，即$x^{-1}a=ax^{-1}$，所以$x^{-1}\in N(a)$

所以 N（a）构成 G 的子群

31. 设φ_1是群 G_1 到 G_2 的同态，φ_2是 G_2 到 G_3 的同态，证明$\varphi_1\circ\varphi_2$是 G_1 到 G_3 的同态。

证明：有已知φ_1是 G_1 到 G_2 的函数，φ_2是 G_2 到 G_3 的函数，则$\varphi_1\cdot\varphi_2$是 G_1 到 G_3 的函数。

$\forall a,b\in G_1$，$(\varphi_1\circ\varphi_2)(ab)=\varphi_2(\varphi_1(ab))=\varphi_2(\varphi_1(a)\varphi_1(b))$

$=(\varphi_2(\varphi_1(a)))(\varphi_2(\varphi_1(b)))=(\varphi_1\circ\varphi_2)(a)(\varphi_1\circ\varphi_2)(b)$

所以: $\varphi_1\cdot\varphi_2$是 G_1 到 G_3 的同态。

33. 证明循环群一定是阿贝尔群，说明阿贝尔群是否一定为循环群，并证明你的结论。

证明：设 G 是循环群, 令 G=⟨a⟩, $\forall x,y\in G$, 令 $x=a^k, y=a^l$, 那么

$xy = a^k a^l = a^{k+l} = a^{l+k} = a^l a^k = yx$, G 是阿贝尔群

克莱因四元群, $G = \{e, a, b, c\}$

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

是交换群, 但不是循环群, 因为 e 是一阶元，a,b,c 是二阶元。

36. 设σ, τ 是 5 元置换，且

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 计算$\sigma\tau$, $\tau\sigma$, τ^{-1}, $\sigma^{-1}, \sigma^{-1}\tau\sigma$；

(2) 将$\tau\sigma$, $\tau^{-1}, \sigma^{-1}\tau\sigma$表成不交的轮换之积。

(3) 将（2）中的置换表示成对换之积，并说明哪些为奇置换，哪些为偶置换。

解：(1) $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\sigma^{-1}\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\tau\sigma = (1425)$ $\tau^{-1} = (14253)$ $\sigma^{-1}\tau\sigma = (143)(25)$

(3) $\tau\sigma = (14)(12)(15)$ 奇置换,

$\tau^{-1} = (14)(12)(15)(13)$ 偶置换

$\sigma^{-1}\tau\sigma = (14)(13)(25)$ 奇置换

第十四章部分课后习题参考答案

5、设无向图 G 有 10 条边，3 度与 4 度顶点各 2 个，其余顶点的度数均小于 3，问 G 至少有多少个顶点？在最少顶点的情况下，写出度数列、$\Delta(G)$、$\delta(G)$。

解：由握手定理图 G 的度数之和为：$2 \times 10 = 20$

3 度与 4 度顶点各 2 个，这 4 个顶点的度数之和为 14 度。

其余顶点的度数共有 6 度。

其余顶点的度数均小于 3，欲使 G 的顶点最少，其余顶点的度数应都取 2,

所以，G 至少有 7 个顶点， 出度数列为 3, 3, 4, 4, 2, 2, 2, $\Delta(G) = 4$，$\delta(G) = 2$.

7、设有向图 D 的度数列为 2，3，2，3，出度列为 1，2，1，1，求 D 的入度列，并求$\Delta(D),\delta(D)$，$\Delta^+(D),\delta^+(D)$，$\Delta^-(D),\delta^-(D)$.

解：D 的度数列为 2，3，2，3，出度列为 1，2，1，1，D 的入度列为 1,1,1,2.

$\Delta(D)=3,\delta(D)=2$，$\Delta^+(D)=2,\delta^+(D)=1$，$\Delta^-(D)=2,\delta^-(D)=1$

8、设无向图中有 6 条边，3 度与 5 度顶点各 1 个，其余顶点都是 2 度点，问该图有多少个顶点？

解：由握手定理图 G 的度数之和为：$2\times6=12$

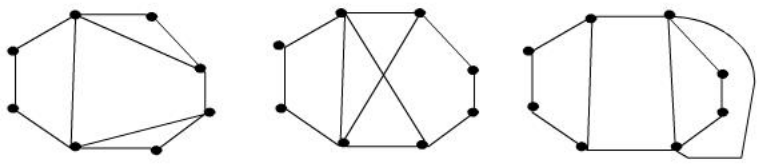
设 2 度点x个，则$3\times1+5\times1+2x=12$，$x=2$，该图有 4 个顶点.

14、下面给出的两个正整数数列中哪个是可图化的？对可图化的数列，试给出 3 种非同构的无向图，其中至少有两个时简单图。

（1）2, 2, 3, 3, 4, 4, 5　　　（2）2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4

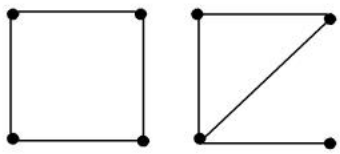
解：（1）2+2+3+3+4+4+5=23　是奇数，不可图化；

（2）2＋2+2+2+3+3+4+4=16，是偶数，可图化；



18、设有 3 个 4 阶 4 条边的无向简单图 G_1、G_2、G_3，证明它们至少有两个是同构的。

证明：4 阶 4 条边的无向简单图的顶点的最大度数为 3，度数之和为 8，因而度数列为 2，2，2，2；3，2，2，1；3，3，1，1。但 3，3，1，1 对应的图不是简单图。所以从同构的观点看，4 阶 4 条边的无向简单图只有两个：



所以，G_1、G_2、G_3 至少有两个是同构的。

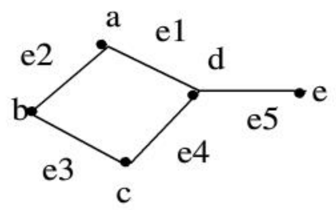
20、已知 n 阶无向简单图 G 有 m 条边，试求 G 的补图$\overline{G}$的边数m'。

解：$m'=\frac{n(n-1)}{2}-m$

21、无向图 G 如下图

(1)求 G 的全部点割集与边割集，指出其中的割点和桥；

(2) 求 G 的点连通度 $k(G)$ 与边连通度 $\lambda(G)$。

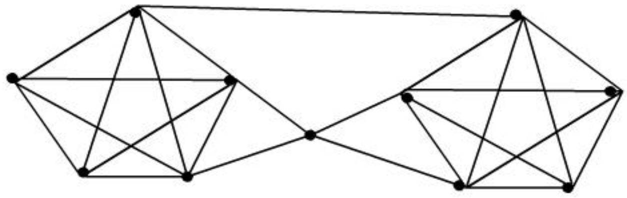


解：点割集: {a,b},(d)

边割集{e2,e3},{e3,e4},{e1,e2},{e1,e4}{e1,e3},{e2,e4},{e5}

$k(G)=\lambda(G)=1$

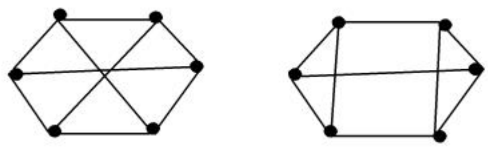
23、求 G 的点连通度 $k(G)$、边连通度 $\lambda(G)$ 与最小度数 $\delta(G)$。



解： $k(G)=2$、$\lambda(G)=3$ 、$\delta(G)=4$

28、设 n 阶无向简单图为 3-正则图，且边数 m 与 n 满足 2n-3=m 问这样的无向图有几种非同构的情况？

解： $\begin{cases} 3n=2m \\ 2n-3=m \end{cases}$ 得 n=6,m=9.



31、设图 G 和它的部图 $\overline{G}$ 的边数分别为 m 和 $\overline{m}$，试确定 G 的阶数。

解： $m+\overline{m}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 得 $n=\dfrac{-1+\sqrt{1+8(m+\overline{m})}}{2}$

45、有向图 D 如图

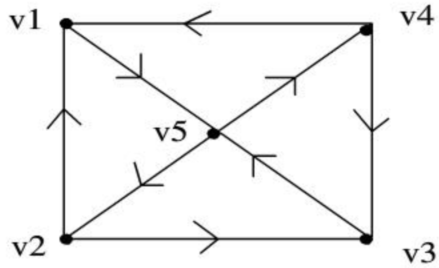
(1)求 v_2 到 v_5 长度为 1，2，3，4 的通路数；

(2)求 v_5 到 v_5 长度为 1，2，3，4 的回路数；

(3)求 D 中长度为 4 的通路数；

(4)求 D 中长度小于或等于 4 的回路数；

(5)写出 D 的可达矩阵。



解：有向图 D 的邻接矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}，\quad A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\2&0&2&0&0\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\\0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\\0&4&0&4&0\end{pmatrix}\qquad A+A^2+A^3+A^4=\begin{pmatrix}0&1&2&1&5\\5&2&5&2&2\\2&1&2&1&5\\4&2&5&2&2\\2&5&2&5&4\end{pmatrix}$$

(1) v_2 到 v_5 长度为 1，2，3，4 的通路数为 0,2,0,0；

(2) v_5 到 v_5 长度为 1，2，3，4 的回路数为 0,0,4,0；

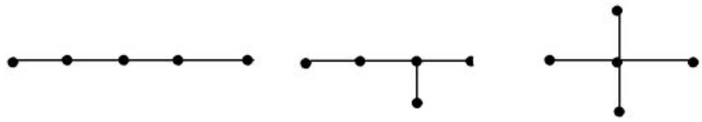
(3)D 中长度为 4 的通路数为 32；

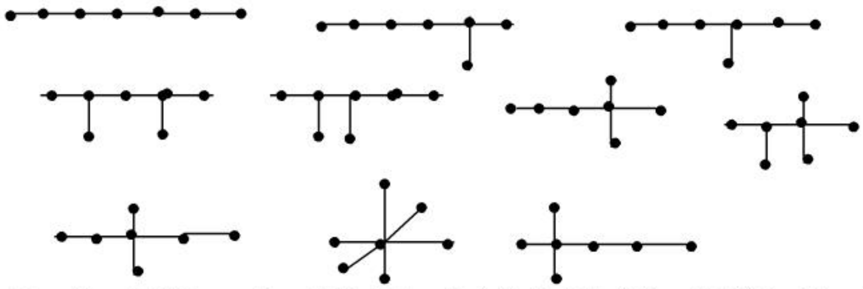
(4)D 中长度小于或等于 4 的回路数 10；

(4)出 D 的可达矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$

第十六章部分课后习题参考答案

1、画出所有 5 阶和 7 阶非同构的无向树.





2、一棵无向树 T 有 5 片树叶，3 个 2 度分支点，其余的分支点都是 3 度顶点，问 T 有几个顶点?

解：设 3 度分支点 x 个，则

$5\times1+3\times2+3x=2\times(5+3+x-1)$，解得 $x=3$

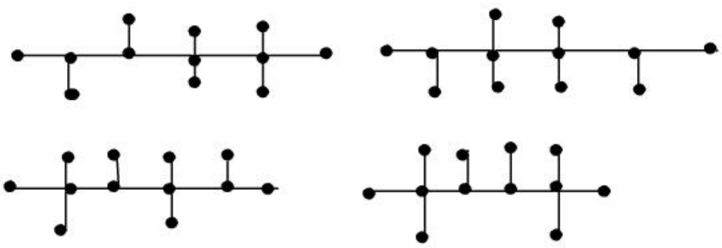
T 有 11 个顶点

3、无向树 T 有 8 个树叶，2 个 3 度分支点，其余的分支点都是 4 度顶点，问 T 有几个 4 度分支点？根据 T 的度数列，请至少画出 4 棵非同构的无向树。

解：设 4 度分支点 x 个，则

$8\times1+2\times3+4x=2\times(8+2+x-1)$，解得 $x=2$

度数列 111111113344



4、棵无向树 T 有 n_i (i=2，3，…，k)个 i 度分支点，其余顶点都是树叶，问 T 应该有几片树叶?

解：设树叶 x 片，则

$n_i\times i+x\times1=2\times(n_i+x-1)$，解得 $x=(i-2)n_i+2$

评论：2，3，4 题都是用了两个结论,一是握手定理，二是 $m=n-1$

5、n(n≥3)阶无向树 T 的最大度$\Delta(T)$至少为几？最多为几？

解：2，n-1

6、若 n(n≥3)阶无向树 T 的最大度$\Delta(T)$ =2，问 T 中最长的路径长度为几？

解：n-1

7、证明：n(n≥2) 阶无向树不是欧拉图.

证明：无向树没有回路，因而不是欧拉图。

8、证明：n(n≥2）阶无向树不是哈密顿图.

证明：无向树没有回路，因而不是哈密顿图。

9、证明：任何无向树 T 都是二部图.

证明：无向树没有回路，因而不存在技术长度的圈，是二部图。

10、什么样的无向树 T 既是欧拉图，又是哈密顿图?

解：一阶无向树

14、设 e 为无向连通图 G 中的一条边， e 在 G 的任何生成树中，问 e 应有什么性质?

解：e 是桥

15、设 e 为无向连通图 G 中的一条边， e 不在 G 的任何生成树中， 问 e 应有什么性质?

解：e 是环

23、已知 n 阶 m 条的无向图 G 是 k(k≥2)棵树组成的森林，证明：m = n-k.;

证明：数学归纳法。k=1 时, m = n-1，结论成立；

设 k=t-1(t-1≥1)时，结论成立，当 k=t 时, 无向图 G 是 t 棵树组成的森林,任取两棵树，每棵树任取一个顶点，这两个顶点连线。则所得新图有 t-1 棵树，所以 m = n-（k-1）.

所以原图中 m = n-k

得证。

24、在图 16.6 所示 2 图中，实边所示的生成子图 T 是该图的生成树.

(1)指出 T 的弦，及每条弦对应的基本回路和对应 T 的基本回路系统.

(2) 指出 T 的所有树枝， 及每条树枝对应的基本割集和对应 T 的基本割集系统.

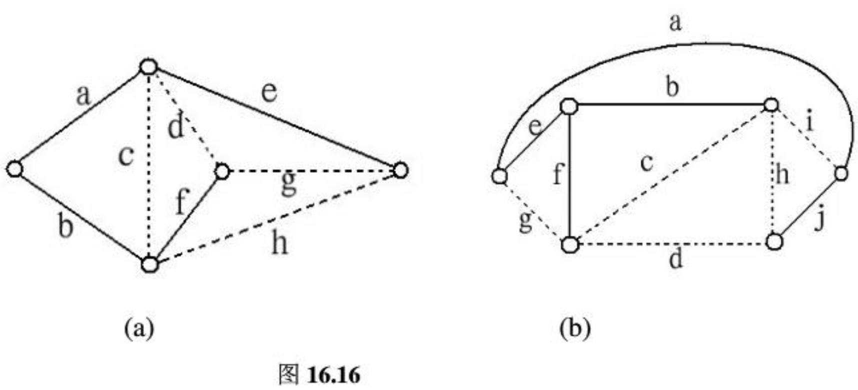


图 16.16

解：(a)T 的弦：c,d,g,h

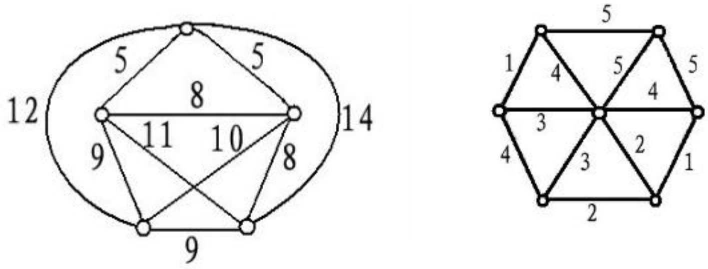
T 的基本回路系统: S={{a,c,b},{a,b,f,d},{e,a,b,h},{e,a,b,f,g}}

T 的所有树枝: e,a,b,f

T 的基本割集系统: S={{e,g,h},{a,c,d,g,h},{b,c,d,g,h},{f,d,g}}

(b)有关问题仿照给出

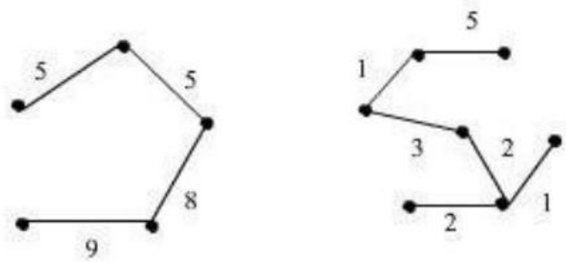
25、求图 16.17 所示带权图中的最小生成树.



(a)　　　　　　　　　　(b)

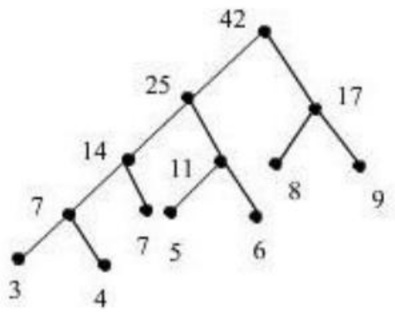
图 16.17

解：



注：答案不唯一。

37、画一棵权为 3，4，5，6，7，8，9 的最优 2 叉树，并计算出它的权.



38.下面给出的各符号串集合哪些是前缀码?

A1={0，10，110，1111}　是前缀码

A2={1，01，001，000}　是前缀码

A3={1，11，101，001，0011}　不是前缀码

A4={b，c，aa，ac，aba，abb，abc}　是前缀码

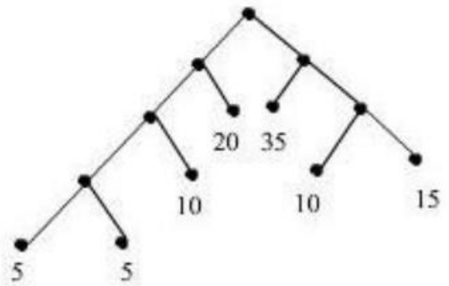
A5={ b，c，a，aa，ac，abc，abb，aba}　不是前缀码

41.设 7 个字母在通信中出现的频率如下:

a: 35%	b: 20%
c: 15%	d: 10%
e: 10%	f: 5%
g: 5%	

用 Huffman 算法求传输它们的前缀码.要求画出最优树，指出每个字母对应的编码.并指出传输 $10^n(n\geq 2)$个按上述频率出现的字母，需要多少个二进制数字.

解：



a:01　b:10　c:000　d:110　e:001　f:1111　g:1110

W(T)=5*4+5*4+10*3+10*3+15*3+20*2+35*2=255

传输 $10^n(n\geq 2)$个按上述频率出现的字母，需要 $255*10^{n-2}$ 个二进制数字.