$g^{-1}(x) = x - 4$; $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$。

3.17

结论 1：对任意非空集合 A 和 A 上的等价关系 R，自然映射 $f : A \to A/R$ 有反函数当且仅当 $R = I_A$。

证明： 充分性显然。

下面证必要性。

由反函数的定义知，f 有反函数当且仅当 f 是双射的。因此：

$$
\begin{aligned}
& \forall x, y \in A \\
& \langle x, y \rangle \in R \\
\Longrightarrow\ & [x]_R = [y]_R && \text{(教材定理 2.27(2))} \\
\Longleftrightarrow\ & f(x) = f(y) && (f\ \text{定义}) \\
\Longleftrightarrow\ & x = y && (f\ \text{是双射}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x, y \rangle \in I_A
\end{aligned}
$$

可知 $R \subseteq I_A$。又由 R 是等价关系知，$I_A \subseteq R$。于是有 $R = I_A$。 □

结论 2：当 $R = I_A$ 时，f 有反函数 $f^{-1} : A/R \to A, f^{-1}([x]) = x$。

证明： 由教材定理 3.9、3.10 和结论 1 立即可得。 □

3.18

(1) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$；

$\operatorname{ran} f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$；

$\operatorname{dom} g = \mathbb{R}$；

$\operatorname{ran} g = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} - \mathbb{R}^- = [0, +\infty)$；

$\operatorname{dom} h = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} - \mathbb{R}^- = [0, +\infty)$；

$\operatorname{ran} h = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} - \mathbb{R}^- = [0, +\infty)$。

(2) 分别令 $\operatorname{dom} f, \operatorname{dom} g, \operatorname{dom} h$ 为 f, g, h 的前域即可。

3.19

(1) $f(A_1) = \{1, 2, 3\}$; $f^{-1}(B_1) = \{0, 4, 5, 6\}$。

(2) $g(A_2) = \mathbb{N}$; $g^{-1}(B_2) = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{6\}$。

(3) f 是双射的，有反函数。g 不是双射的，没有反函数。

3.20

(1)

证明： 由 $f \circ g$ 是单射的和教材定理 3.5(2) 可知，g 是单射的。由题设，g 是满射的。因而，g 是双射的。

由教材定理 3.9、3.10 和 g 是双射的可知，g^{-1} 也是双射的，而且既是 g 的左逆又是 g 的右逆。因此，$f = f \circ I_B = f \circ g \circ g^{-1}$。

因为 $f \circ g$ 和 g^{-1} 都是单射的，由教材定理 3.4(2) 得，$f = f \circ g \circ g^{-1}$ 也是单射的。 □

(2)

证明： 由 $f \circ g$ 是满射的和教材定理 3.5(1) 可知，f 是满射的。由题设，f 是单射的。因而，f 是双射的。

由教材定理 3.9、3.10 和 f 是双射的可知，f^{-1} 也是双射的，而且既是 f 的左逆又是 f 的右