$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) $v_2$ 到 $v_5$ 共有 $b_{25}^{(4)} = 5$ 条长度小于等于 4 的通路。

(2) 长度为 3 的通路有 $\sum\limits_{1\le i,j\le 5} a_{ij}^{(3)} = 20$ 条，其中有 $\sum\limits_{i=1}^{5} a_{ii}^{(3)} = 12$ 条是回路。

(3) 由于 $B_3$ 中每一项皆大于 0，所以 $D$ 是强连通的。

3.

(1)

**证明：**反设 $G$ 不连通，则 $G$ 至少有两个连通分支。从而必然有顶点数小于等于 $\dfrac{n}{2}$ 的连通分支 $G[V_i]$。设 $v \in G[V_i]$，则由 $G$ 是简单图和 $d(v) \ge \dfrac{n}{2}$ 知，$|V_i| \ge \dfrac{n}{2} + 1$，矛盾。 □

(2)

**证明：**由于 $G$ 是简单图，从图中删除一个顶点至多使 $G$ 中其它的顶点减少一度，对任意 $V_1 \subseteq V(G)$，若 $|V_1| = k-1$，则 $\delta(G-V_1) \ge \delta(G) - (k-1) = \dfrac{n-k+1}{2}$，而 $|G-V_1| = n-k+1$。由第 (1) 小题结论知，$G - V_1$ 是连通的。从而 $\kappa(G) \ge k$，$G$ 是 $k$-连通的。 □

五、

1. 不成立。
2. 不成立。(当 $A = \varnothing$ 时，对任意 $B, C$ 都有 $A \times B = A \times C = \varnothing$)。
3. 不成立。(显然对全域关系 $E_A$ 有 $E_A^2 = E_A$，但当 $|A| \ge 2$ 时 $E_A \ne I_A$)。
4. 不成立。($f^{-1}$ 未必是全函数，从而 $f^{-1}$ 未必属于 $B \to A$；若将题中“$f^{-1}: B \to A$”改为“$f^{-1}: B \nrightarrow A$”，则命题成立)。
5. 成立。(同态映射保持运算的交换律)。
6. 成立。
7. 成立。(任何代数系统都是它自身的子代数)。
8. 不成立。(积代数未必保持消去律)。

六、

1.

(1) 不是单射。例如，$f(\langle 1,0\rangle) = f(\langle 0,1\rangle) = 1$。

(2) 不是满射。例如，$3 \in \mathbb{N}$ 但 $3 \notin \operatorname{ran} f$。

(3) $f^{-1}(0) = \{\langle 0,0\rangle\}$。(注意，$f^{-1}(0)$ 是 $\operatorname{dom} f$ 的一个子集而不是一个元素，$f^{-1}(0) = \{\langle 0,0\rangle\} \ne \langle 0,0\rangle$)。

(4) $f \upharpoonright \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,2\rangle\} = \{\langle\langle 0,0\rangle, 0\rangle, \langle\langle 1,2\rangle, 5\rangle\}$。

2.

(1)

**证明：**自反性。对任何 $f \in B^A, x \in A$，有 $f(x) \preccurlyeq f(x)$，从而有 $fRf$。所以 $R$ 是自反的。

传递性。对任何 $f, g, h \in B^A$，若 $fRg \wedge gRh$，则对所有 $x \in A$，有 $f(x) \preccurlyeq g(x) \wedge g(x) \preccurlyeq h(x)$，由 $\preccurlyeq$ 关系的传递性，有 $f(x) \preccurlyeq h(x)$，从而有 $fRh$。所以 $R$ 是传递的。