$\Longrightarrow \langle y,x\rangle \in R\circ S$ ($R\circ S$ 是对称的)

$\Longleftrightarrow \exists z(\langle y,z\rangle \in S \wedge \langle z,x\rangle \in R)$ (合成运算定义)

$\Longrightarrow \exists z(\langle z,y\rangle \in S \wedge \langle x,z\rangle \in R)$ ($R$ 和 $S$ 都是对称的)

$\Longleftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in R \wedge \langle z,y\rangle \in S)$ (命题逻辑交换律)

$\Longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in S\circ R$ (合成运算定义)

于是有 $R\circ S \subseteq S\circ R$。

同理可证：$S\circ R \subseteq R\circ S$。

于是证得：若 $R\circ S$ 具有对称性，则 $R\circ S = S\circ R$。

下面证充分性。

若 $R\circ S = S\circ R$，则：

$\forall x,y$

$\langle x,y\rangle \in R\circ S$

$\Longleftrightarrow \langle x,y\rangle \in S\circ R$ ($R\circ S = S\circ R$)

$\Longleftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in R \wedge \langle z,y\rangle \in S)$ (合成运算定义)

$\Longrightarrow \exists z(\langle z,x\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in S)$ ($R$ 和 $S$ 都是对称的)

$\Longleftrightarrow \exists z(\langle y,z\rangle \in S \wedge \langle z,x\rangle \in R)$ (命题逻辑交换律)

$\Longleftrightarrow \langle y,x\rangle \in R\circ S$ (合成运算定义)

充分性得证。

综合即得原题。 □

**2.24** $R_1 = \varnothing$；

$R_2 = \{\langle 1,1\rangle\}$；

$R_3 = \{\langle 2,2\rangle\}$；

$R_4 = \{\langle 1,2\rangle\}$；

$R_5 = \{\langle 2,1\rangle\}$；

$R_6 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$；

$R_7 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle\}$；

$R_8 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$；

$R_9 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$；

$R_{10} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$；

$R_{11} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$；

$R_{12} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$；

$R_{13} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$；

$R_{14} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$；

$R_{15} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$；

$R_{16} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$；

其中：

$R_8, R_{13}, R_{14}, R_{16}$ 是自反的。

$R_1, R_4, R_5, R_9$ 是反自反的。

$R_1, R_2, R_3, R_8, R_9, R_{12}, R_{15}, R_{16}$ 是对称的。

$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_{10}, R_{11}, R_{13}, R_{14}$ 是反对称的。