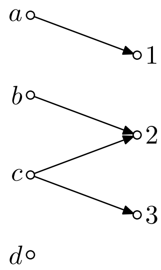
非自反：$\langle b,b\rangle \notin R_4$。
非反自反：$\langle a,a\rangle \in R_4$。
非对称：$\langle a,b\rangle \in R_4$，但 $\langle b,a\rangle \notin R_4$。
非反对称：$\langle a,c\rangle \in R_4 \wedge \langle c,a\rangle \in R_4$，但 $a \neq c$
非传递：$\langle c,a\rangle \in R_4 \wedge \langle a,b\rangle \in R_4$，但 $\langle c,b\rangle \notin R_4$。

2.20

$$M(R_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$



$G(R_1)$

2.21

$$M(R_1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad M(R_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$M(R_2\circ R_1)=M(R_1)\cdot M(R_2)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

得：$R_2\circ R_1=\{\langle 1,\beta\rangle\}$。

2.22

证明： 由 R 的自反性和教材定理 2.19(1) 知，$R=r(R)=R\cup I_A$。从而：

$$\begin{aligned} R &\subseteq (R\circ R)\cup R && (\text{引理 } 1.3)\\ &=(R\circ R)\cup(R\circ I_A) && (R\circ I_A=R)\\ &=R\circ(R\cup I_A) && (\text{教材定理 } 2.6(1))\\ &=R\circ R && (R=R\cup I_A)\end{aligned}$$

而由 R 的传递性和教材定理 2.14 知，$R\circ R\subseteq R$。

从而有 $R\circ R=R$。 □

举反例证明逆定理不成立。

证明： 令 $A=\{a,b\}$，$R=\{\langle a,a\rangle\}$，则有 $R\circ R=\{\langle a,a\rangle\}=R$，但 $\langle b,b\rangle\notin R$，因而 R 不是自反的。

故有：$R\circ R=R \not\Rightarrow (R\text{是自反的}\wedge R\text{是传递的})$。 □

2.23

证明： 先证必要性。

若 $R\circ S$ 具有对称性，则：

$\forall x,y$

$\langle x,y\rangle\in R\circ S$