$$
\begin{aligned}
& \qquad k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in B_k)) && \text{(命题逻辑幂等律、交换律)} \\
\Longrightarrow\ & \forall n(n \in \mathbb{N}_+ \to (\exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k) \wedge \\
& \qquad \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in B_k))) && \text{(一阶谓词推理定律)} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in \mathbb{N}_+ \vee (\exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k) \wedge \\
& \qquad \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in B_k))) && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall n((\neg n \in \mathbb{N}_+ \vee \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \qquad (\neg n \in \mathbb{N}_+ \vee \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in B_k))) && \text{(命题逻辑分配律)} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(\neg n \in \mathbb{N}_+ \vee \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \forall n(\neg n \in \mathbb{N}_+ \vee \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in B_k)) && \text{(量词分配等值式)} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(n \in \mathbb{N}_+ \to \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k)) \wedge \\
& \forall n(n \in \mathbb{N}_+ \to \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in B_k)) && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cap \varlimsup_{k\to\infty} B_k && \text{(上极限定义、集合交定义)}
\end{aligned}
$$

□

(3)

证明： 令 $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} (A_k \cup B_k)$ 为全集，则有：

$$
\begin{aligned}
\varlimsup_{k\to\infty} (A_k - B_k) &= \varlimsup_{k\to\infty} (A_k \cap {\sim} B_k) && \text{(补交转换律)} \\
&\subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cap \varlimsup_{k\to\infty} ({\sim} B_k) && \text{(第 (1) 小题结论)} \\
&= \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cap \varlimsup_{k\to\infty} (E - B_k) && \text{(绝对补定义)} \\
&= \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cap (E - \varliminf_{k\to\infty} B_k) && \text{(教材定理 1.5(1))} \\
&= \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cap ({\sim} \varliminf_{k\to\infty} B_k) && \text{(绝对补定义)} \\
&= \varlimsup_{k\to\infty} A_k - \varliminf_{k\to\infty} B_k && \text{(补交转换律)}
\end{aligned}
$$

□

(4)

证明： 令 $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} (A_k \cup B_k)$ 为全集，则有：

$$
\begin{aligned}
\varliminf_{k\to\infty} (A_k - B_k) &= \varliminf_{k\to\infty} (A_k \cap {\sim} B_k) && \text{(补交转换律)} \\
&= \varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varliminf_{k\to\infty} ({\sim} B_k) && \text{(第 (2) 小题结论)} \\
&= \varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varliminf_{k\to\infty} (E - B_k) && \text{(绝对补定义)} \\
&= \varliminf_{k\to\infty} A_k \cap (E - \varlimsup_{k\to\infty} B_k) && \text{(教材定理 1.5(2))} \\
&= \varliminf_{k\to\infty} A_k \cap ({\sim} \varlimsup_{k\to\infty} B_k) && \text{(绝对补定义)} \\
&= \varliminf_{k\to\infty} A_k - \varlimsup_{k\to\infty} B_k && \text{(补交转换律)}
\end{aligned}
$$

□