引理 18.2 设 R 是交换环，D 是 R 的理想，令

$$N(D)=\{x \mid x\in R,\text{ 存在正整数 } n \text{ 使 } x^n\in D\},$$

则 $N(D)$ 是 R 的理想。

证明: 对任意 $x,y\in N(D)$，有 $m,n\in\mathbb{Z}^+$，使得 $x^m,y^n\in D$。由于 R 是交换环，所以

$$(x-y)^{m+n-1}=\sum_{i=0}^{m+n-1}C_{m+n-1}^{i}x^{m+n-1-i}y^i \tag{*}$$

(*) 式的前 n 项中，x 的指数均大于或等于 m。从而 $x^{m+n-1-i}y^i=x^m x^{n-1-i}y^i$。由于 $x^m\in D$，$x^{n-1-i}y^i\in R$，所以 $x^{m+n-1-i}y^i\in D$。(*) 式的其余 m 项中，y 的指数都大于或等于 n，从而 $x^{m+n-1-i}y^i=x^{m+n-1-i}y^{i-n}y^n$。由于 $x^{m+n-1-i}y^{i-n}\in R$，$y^n\in D$，所以 $x^{m+n-1-i}y^i\in D$。由 D 对加法的封闭性知，$(x-y)^{m+n-1}\in D$。从而 $x-y\in N(D)$。

对任意 $x\in N(D),y\in R(D)$，有 $m\in\mathbb{Z}^+$，使得 $x^m\in D$。由于 R 是交换环，所以 $(xy)^m=x^my^m$。由于 $x^m\in D$，$y^m\in R$，所以 $(xy)^m\in D$。从而就有 $xy=yx\in N(D)$。

这就证明了 $N(D)$ 是理想。 □

再证原题。

证明: 由定义可知，$N(\{0\})$ 即为 R 中全体幂零元构成的集合。而 $\{0\}$ 是 R 的理想。由引理 18.2 可知，$N(\{0\})$ 是 R 的理想，从而自然是 R 的子环。 □

18.18

证明: 由定义可知，$N(\{0\})$ 即为 R 中全体幂零元构成的集合。而 $\{0\}$ 是 R 的理想。从而由引理 18.2 即证原题。 □

18.19

证明: 设 $A,B\subseteq R$ 是 R 的两个理想。

对任意 $x,y\in A\cap B$，有 $x-y\in A$ 和 $x-y\in B$，所以有 $x-y\in A\cap B$。

对任意 $r\in R,x\in A\cap B$，有 $rx,xr\in A$ 和 $rx,xr\in B$。所以有 $rx,xr\in A\cap B$。

从而 $A\cap B$ 也是 R 的理想。 □

18.20

(1)

证明: 对任意 $x,y\in A+B$，存在 $a_1,a_2\in A,b_1,b_2\in B$，使 $x=a_1+b_1,y=a_2+b_2$。从而 $x-y=a_1+b_1-a_2+b_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\in A+B$。

对任意 $r\in R,x\in A+B$，存在 $a\in A,b\in B$，使 $x=a+b$。从而 $rx=r(a+b)=ra+rb$。由于 A,B 是理想，所以 $ra\in A,rb\in B$。从而 $rx=ra+rb\in A+B$，所以有 $r(A+B)\subseteq A+B$。同理可证 $(A+B)r\subseteq A+B$。这就证明了 $A+B$ 是理想。 □

(2) 考虑实数域 $\mathbb{R}$ 和高斯整数环 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$。由教材例 18.1 和例 18.5 知，他们都是环，且都是复数域 $\mathbb{C}$ 的子环。但 $\mathbb{R}+\mathbb{Z}[i]=\{x+ai\mid x\in\mathbb{R},b\in\mathbb{Z}\}$ 对乘法不封闭。例如，$\sqrt{2}+i\in\mathbb{R}+\mathbb{Z}[i]$，但 $(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i\notin\mathbb{R}+\mathbb{Z}[i]$。从而 $\mathbb{R}+\mathbb{Z}[i]$ 不是子环。

18.21

证明: 为方便讨论，用 E_{ij} 表示第 i 行第 j 列为 1，其余各项皆为 0 的矩阵。用 xE_{ij} 表示第 i 行第 j 列为 x，其余各项都为 0 的矩阵，其中 $x\in F$ 是数域中的任意元素。

设 D 是 $M_n(F)$ 上的任意理想，下面证明，若 $D\neq\{(0)\}$，则 $D=M_n(F)$。

由于 D 不是零理想，所以存在 $A\in D$，且 A 中有非零项。不妨设 $a_{kt}\neq 0(1\le k,t\le n)$。注意到，对任意 $E_{ij},i,j=1,2,\cdots n$，$x\in F$，有：

$$xE_{ij}=(xa_{kt}^{-1}E_{ik})AE_{tj}$$