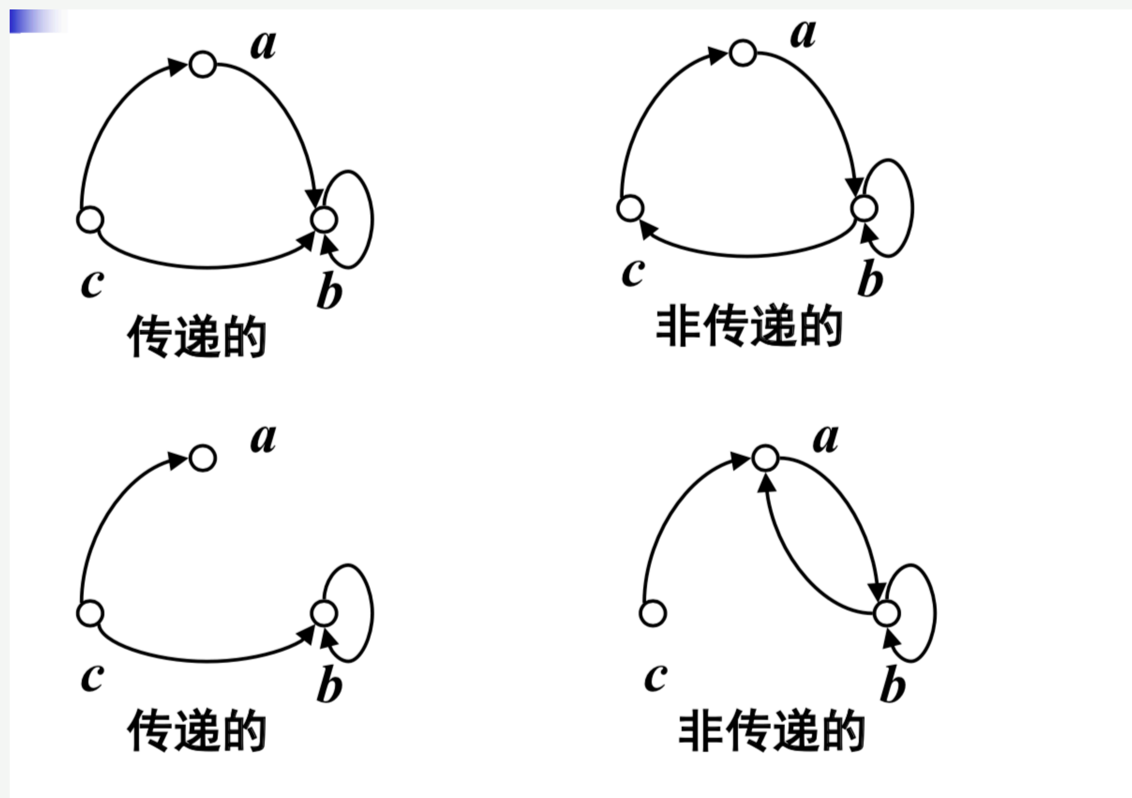
传递性(transitivity)

等价关系，空关系

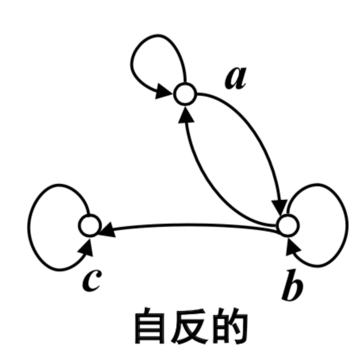


定理14: R是传递的
⇔ $R \circ R \subseteq R$ ⇔ R^{-1}是传递的
⇔ 在M($R \circ R$)中, $\forall i \forall j$,
若$r_{ij}'=1$,则$M(R)$中相应的元素$r_{ij}=1$.
⇔ 在$G(R)$中, $\forall x_i \forall x_j \forall x_k$,
若有有向边$\langle x_i,x_j\rangle$,$\langle x_j,x_k\rangle$,
则必有有向边$\langle x_i,x_k\rangle$.

R非传递⇔
$\exists x \exists y \exists z(x \in A \land y \in A \land z \in A \land xRy \land yRz \land \neg xRz)$

设R⊆A×A, 说R是传递的(transitive), 如果
$\forall x \forall y \forall z(x \in A \land y \in A \land z \in A \land xRy \land yRz \to xRz)$.

自反性reflexivity



自反性reflexivity

「1 ~ ~
 ~ 1 ~
 ~ ~ 1」

R是非自反的⇔$\exists x(x \in A \land \neg xRx)$

设R⊆A×A, R是自反的(reflexive),如果 $\forall x(x \in A \to xRx)$

自反的对立不是反自反

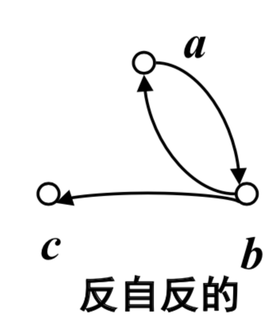
A={a,b,c}
R={<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>}

全域关系具有自反性

恒等关系具有自反性

如何证明二元关系自反?

反自反



反自反

「0 ~ ~
 ~ 0 ~
 ~ ~ 0」

n 设R⊆A×A, 说R是反自反的(irreflexive), 如果 $\forall x(x \in A \to \neg xRx)$.

n 定理11: R是反自反的
⇔ $I_A \cap R=\varnothing$
⇔ R^{-1}是反自反的
⇔ $M(R)$主对角线上的元素全为0 ⇔
$G(R)$的每个顶点处均无环.

n R是非反自反的⇔$\exists x(x \in A \land xRx)$

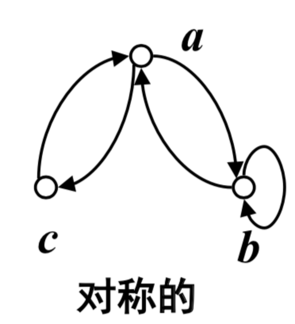
关系性质的判别方法（总结）

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$(\forall x)(x \in A \to xRx)$	$(\forall x)(x \in A \to \langle x,x\rangle \notin R)$	$(\forall x)(\forall y)(x \in A \land y \in A \land xRy \to yRx)$	$(\forall x)(\forall y)(x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \to x=y)$	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \land y \in A \land z \in A \land xRy \land yRz \to xRz)$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	对$M(R)^2$中1所在位置, M(R)中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 连通到x_k, 则存在$\langle x_i, x_k\rangle$

定理2.15: 设R_1, $R_2 \subseteq A \times A$都具有某种性质

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×
$\sim R_1$, $\sim R_2$	×	×	√	×	×

对称性(symmetry)



对称性(symmetry)

「~ 1 1
 1 ~ 0
 1 0 ~」

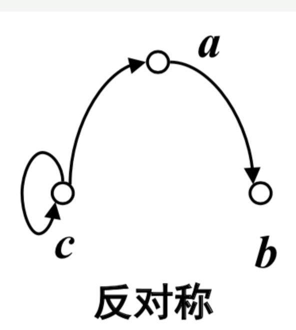
n 设$R \subseteq A \times A$, 说R是对称的(symmetric),如果 $\forall x \forall y(x \in A \land y \in A \land xRy \to yRx)$

不具有对称关系

非对称是对称性的对立面

「1 0 0
 1 1 1
 0 1 0」

包含关系是反对称的



包含关系是反对称的

设$R \subseteq A \times A$, 说R是反对称的(antisymmetric),若
$\forall x \forall y(x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \to x=y)$.
$\forall x \forall y(x \in A \land y \in A \land xRy \land x \neq y \to \neg yRx)$.

n R非反对称
⇔$\exists x \exists y(x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \land x \neq y)$

「1 0 1
 1 1 0
 0 1 0」

[1 0 0
 0 1 0
 0 0 0]

[1 0 0
 0 1 0
 0 1 0]

定理13: R是反对称的
⇔ $R^{-1} \cap R \subseteq I_A$
⇔ R^{-1}是反对称的
⇔ 在$M(R)$中, $\forall i \forall j(i \neq j \land r_{ij}=1 \to r_{ji}=0)$
⇔ 在$G(R)$中, $\forall x_i \forall x_j(i \neq j)$,
若有$\langle x_i,x_j\rangle$, 则必没有$\langle x_j,x_i\rangle$.