5.

证明： 由于 G 中没有长为 3 的圈，所以 G 中面的次数至少为 4 (若 G 中无圈，则 G 中只有一个外部面，由 G 是连通图和 $n \geq 3$ 知，外部面的次数为 $2m \geq 2(n-1) \geq 2(4-1)=6$)，由教材定理 11.8 有

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2) \leq 2(n-2) = 2n-4,$$

若 $\delta(G) \geq 4$，则有 $m \geq 2n > 2n-4$，矛盾。 □

四、

1.

(1) 由于整数集对加、减、乘法封闭，所以对 $*$ 运算也封闭。从而 $\langle A, *\rangle$ 是代数系统。对任意 $x, y, z \in A$：

由于 $x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x$，所以运算满足交换律。

由于 $(x * y) * z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz = x * (y * z)$，所以运算满足结合律。

由于 $x * x = x + x - x^2$，当 $x \neq 0, 1$ 时，$x * x \neq x$，所以运算不满足幂等律。

由于 $x * 0 = 0 * x = x$，因此有运算有单位元 $0 \in \mathbb{Z}$。

由 $x * y = x + y - xy = 0$ 解得：当 $x = 1$ 时，等式无解。当 $x \neq 1$ 时，$y = \dfrac{x}{x-1}$。因此，仅当 $x = 0, 2$ 时，有 $y = x^{-1} \in \mathbb{Z}$。此时 y 分别为 0 和 2。因此，仅 $0, 2$ 为可逆元，它们的逆元即是它们自身。

(2) 由对称差的性质可知，A 对 $*$ 运算封闭。从而 $\langle A, *\rangle$ 是代数系统。

由对称差的性质知，运算满足交换律、结合律。

对任意 $x \in A$，有 $x * x = x \oplus x = \varnothing$，当 $x \neq \varnothing$ 时，$x * x \neq x$，所以运算不满足幂等律。

显然 $\varnothing$ 是单位元，且所有元素都是自身的逆元。

(3) 当 $|B| \geq 2$ 时，$*$ 运算对 A 不封闭。因为当 $|B| \geq 2$ 时，任取 $a, b \in B, a \neq b$。则 $\{a\}, \{b\} \in A$，但 $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing \notin A$。从而当 $|B| \geq 2$ 时，$\langle A, *\rangle$ 不是代数系统。

2. $|x| = 3$。

证明： 首先，由于 y 是二阶元，所以有 $y^{-1} = y$。同时：

$$
\begin{aligned}
& yxy^{-1} = x^2 \\
\iff\ & yx = x^2 y && \text{(右乘 } y\text{)} \\
\iff\ & x = y^{-1}x^2 y && \text{(左乘 } y^{-1}\text{)} \\
\implies\ & x^2 = (y^{-1}x^2y)(y^{-1}x^2y) && \text{(两边取平方)} \\
\iff\ & x^2 = y^{-1}x^4 y && (yy^{-1} = e) \\
\iff\ & x^2 = yx^4y^{-1} && (y = y^{-1})
\end{aligned}
$$

从而有 $yx^4y^{-1} = x^2 = yxy^{-1}$。由消去律知 $x^3 = e$。从而 $|x| \mid 3$。因为 x 不是单位元，所以 $|x| \neq 1$，因此只能有 $|x| = 3$。 □