集合	运算	封闭	交换	结合	幂等	消去	分配	吸收	单位元	零元
$\mathbb{Z}$	普通减法	是	否	否	否	是	—	—	无	无
$\mathbb{Z}^*$	普通乘法	是	是	是	否	是	—	—	1	无
$\mathbb{N}_{奇}$	普通加法	否	—	—	—	—	—	—	—	—
	普通乘法	是	是	是	否	是	—		1	无
$M_n(\mathbb{R})$	矩阵加法	是	是	是	否	是	否	否	全 0 矩阵	无
	矩阵乘法	是	否	是	否	否	对加法		单位矩阵	全 0 矩阵
$GL_n(\mathbb{R})$	矩阵加法	否	—	—	—	—	—	—	—	—
	矩阵乘法	是	否	是	否	是	—		单位矩阵	无
$n\mathbb{Z}$	普通加法	是	是	是	否	是	否	否	0	无
	普通乘法	是	是	是	否	是	对加法		无[注]	0
$\mathbb{R}^+$	$ab-a-b$	否	—	—	—	—	—	—	—	—
$\{a_i\}$	$a \circ b = b$	是	否	是	是	否	—	—	无	无
$R(A)$	关系合成	是	否	是	否	否	—	—	I_A	$\varnothing$
$\mathbb{Z}^+$	$\gcd(a,b)$	是	是	是	是	否	对 lcm	是	无	1
	$\mathrm{lcm}(a,b)$	是	是	是	是	否	对 gcd		1	无

注：仅当 $n=1$ 时，$n\mathbb{Z}$ 有乘法单位元 1。

15.5

(1) 不能，除非允许 a,b,c 全等(此时令 $a=b=c=0$ 即可)。

(2) 能。令 $A=\{-1,0,1\}$ 即可。

15.6

(1) 构成代数系统。运算适合交换律、结合律。单位元是取值恒为 0 的常数函数，无零元。

(2) 构成代数系统。运算不适合交换律，也不适合结合律。无单位元(取值恒为 0 的常数函数是右单位元)，无零元。

(3) 构成代数系统。运算适合交换律、结合律。单位元是取值恒为 1 的常数函数，零元是取值恒为 0 的常数函数。

(4) 不构成代数系统。当 $g(x)$ 取值为 0 时，函数 $f/g \notin S$。故运算在 S 上不封闭。

15.7

(1) 构成代数系统。运算适合交换律、结合律、幂等律。单位元是 1，无零元。

(2) 构成代数系统。运算适合交换律、结合律、幂等律。零元是 1，无单位元。

(3) 构成代数系统。运算不适合交换律、结合律或幂等律。1 是左零元和右单位元。运算无右零元和左单位元，因而没有零元和单位元。

(4) 不构成代数系统。当 $ab \nmid a+b$ 时，函数 $a/b+b/a \notin \mathbb{Z}^+$。故运算在 $\mathbb{Z}^+$ 上不封闭。

15.8

结论 1：运算满足交换律当且仅当 $p=q$。

证明： 充分性显然。下面证必要性：

取 $a=1, b=0$，若运算满足交换律，则有：

$$
\begin{aligned}
& a \circ b = b \circ a \\
\Longleftrightarrow\ & pa+qb+r = qa+pb+r && (\circ \text{ 运算定义}) \\
\Longleftrightarrow\ & p+r = q+r && (a=1, b=0) \\
\Longleftrightarrow\ & p=q && (\text{加法消去律})
\end{aligned}
$$