$\Longrightarrow \exists a\exists b(a^{-1} \in H_1 \land b^{-1} \in H_2 \land x^{-1} = ab)$ ($H_1, H_2$ 是群)

$\Longrightarrow \exists a\exists b(b^{-1}a^{-1} \in H_2H_1 \land x^{-1} = ab)$ ($H_2H_1$ 定义)

$\Longleftrightarrow \exists a\exists b((ab)^{-1} \in H_2H_1 \land x^{-1} = ab)$ (教材定理 17.2(2))

$\Longrightarrow \exists a\exists b((x^{-1})^{-1} \in H_2H_1)$ ($x^{-1} = ab$)

$\Longleftrightarrow \exists a\exists b(x \in H_2H_1)$ (教材定理 17.2(1))

这就证明了 $H_1H_2 \subseteq H_2H_1$。再证 $H_2H_1 \subseteq H_1H_2$ (由于题设不保证 $H_2H_1$ 为群，故 $H_2H_1 \subseteq H_1H_2$ 的证明方法略有不同)：

$\forall x$，

$x \in H_2H_1$

$\Longleftrightarrow \exists a\exists b(a \in H_1 \land b \in H_2 \land x = ba)$ ($H_2H_1$ 定义)

$\Longrightarrow \exists a\exists b(a^{-1} \in H_1 \land b^{-1} \in H_2 \land x = ba)$ ($H_1, H_2$ 是群)

$\Longrightarrow \exists a\exists b(a^{-1}b^{-1} \in H_1H_2 \land x = ba)$ ($H_1H_2$ 定义)

$\Longleftrightarrow \exists a\exists b((ba)^{-1} \in H_1H_2 \land x = ba)$ (教材定理 17.2(2))

$\Longrightarrow \exists a\exists b((x)^{-1} \in H_1H_2)$ ($x = ba$)

$\Longrightarrow \exists a\exists b(((x)^{-1})^{-1} \in H_1H_2)$ ($H_1H_2$ 是群)

$\Longleftrightarrow \exists a\exists b(x \in H_1H_2)$ (教材定理 17.2(1))

这就证明了 $H_2H_1 \subseteq H_1H_2$。从而证明了 $H_1H_2 = H_2H_1$。[1] □

## 17.17

**证明:** 先证 $H_1H_2 \cap H_1' \cap H_2' \subseteq (H_1 \cap H_2')(H_1' \cap H_2)$。对左边集合中的任意元素 $x$，都存在 $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$，使得 $x = h_1h_2 \in (H_1' \cap H_2')$。注意到，$h_2 \in H_2 \subseteq H_2'$，从而 $h_2^{-1} \in H_2'$。从而 $h_1 = (h_1h_2)h_2^{-1} \in H_2'$。这样就证明了 $h_1 \in H_1 \cap H_2'$。同理可证 $h_2 \in H_1' \cap H_2$。从而有 $x = h_1h_2 \in (H_1 \cap H_2')(H_1' \cap H_2)$。

再证 $(H_1 \cap H_2')(H_1' \cap H_2) \subseteq H_1H_2 \cap H_1' \cap H_2'$。对任意元素 $x \in (H_1 \cap H_2')(H_1' \cap H_2)$，存在 $a \in H_1 \cap H_2', b \in H_1' \cap H_2$，使得 $x = ab$。注意到，$a \in H_1, b \in H_2$，所以显然有 $x = ab \in H_1H_2$。同时，由于 $H_1 \subseteq H_1', H_2 \subseteq H_2'$。所以有 $a, b \in H_1' \cap H_2'$。已知 $H_1', H_2'$ 都是子群，则由教材例 17.12 知，$H_1' \cap H_2'$ 也是子群。从而得：$x = ab \in H_1' \cap H_2'$。这就证明了 $(H_1 \cap H_2')(H_1' \cap H_2) \subseteq H_1H_2 \cap H_1' \cap H_2'$。

综上所述，有 $H_1H_2 \cap H_1' \cap H_2' = (H_1 \cap H_2')(H_1' \cap H_2)$。 □

## 17.18

(1) 由于 $G$ 同构于 Klein 四元群，故 $G$ 的子群和子群格与教材例 17.14 类似。

$G$ 的子群有：

$H_1 = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$;

$H_2 = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)\}$;

$H_3 = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$;

$H_4 = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)\}$;

$H_5 = G$.

子群格如下：

[1]注意到，按照 $H_1H_2$ 的定义，对任意 $x, y \in G$，$xy \in H_1H_2$ 只能推出存在两个元素 $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$，使得 $xy = h_1h_2$。而不能直接由 $xy \in H_1H_2$ 推出 $x \in H_1 \land y \in H_2$。因此，本题的必要性部分不可以这样证：$\forall a \in H_1, b \in H_2$，$ab \in H_1H_2 \iff (ab)^{-1} \in H_1H_2 \iff b^{-1}a^{-1} \in H_1H_2 \iff b^{-1} \in H_1 \land a^{-1} \in H_2 \iff b \in H_1 \land a \in H_2 \iff ab \in H_2H_1$。因为 $b^{-1}a^{-1} \in H_1H_2$ 不能推出 $b^{-1} \in H_1$ 和 $a^{-1} \in H_2$。