17.64

证明：对任意 10 阶群 G，分两种情况讨论：

(1) 若 G 是 Abel 群，则由教材例 17.38 知，G 中存在 2 阶元 a 和 5 阶元 b。由教材例 17.6 知，$|ab| = |a||b| = 10$。从而 $G = \langle ab \rangle \cong \mathbb{Z}_{10}$ 是循环群(易证，任何无限阶循环群都同构于整数加群，任何 n 阶循环群都同构于模 n 加群。所以 n 阶循环群在同构意义下是唯一的)。

(2) 若 G 不是 Abel 群，则存在 5 阶元。这是因为：若不然，则 G 中所有非单位元都是 2 阶元，即，对任意 $x, y \in G$，有

$$
\begin{aligned}
& (xy)^2 = e = x^2y^2 && (x, y, xy \text{ 都是 2 阶或 1 阶元}) \\
\Longrightarrow\ & xyxy = xxyy && ((xy)^2 = x^2y^2) \\
\Longleftrightarrow\ & yx = xy && (\text{消去律})
\end{aligned}
$$

所以 G 是 Abel 群，与前提矛盾。

设 $a \in G$ 是一个 5 阶元，记 $\langle a \rangle = A$。下面证明，除 $a^i (i = 1, 2, 3, 4)$ 外，G 中再无其它 5 阶元。

若不然，设 $b \notin A$ 也是一个 5 阶元，则 $B = \langle b \rangle$ 也是 G 的一个 5 阶子群。令 $H = A \cap B$，则 $H \leqslant A$。由 Lagrange 定理知，$|H| \mid 5$。因为 $a \neq b$，所以 $|H|$ 不可能等于 5，于是必有 $|H| = 1$。由习题 17.33(1) 知，

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|} = 25 > 10$$

这与 $AB \subseteq G$ 矛盾。

这就是说，$G - A$ 中所有的元素只能是 2 阶元。

任取一个 2 阶元 b (显然有 $b \notin A$)，则 $G = A \cup Ab$ 是 G 的陪集分解。这就是说，$G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}$。

下面来讨论它们之间的运算规律。注意到，对任意 a^i，$i = 1, 2, 3, 4$，都应有 $(a^ib)^2 = e$。从而有 $a^iba^ib = e$，即 $ba^ib = (a^i)^{-1} = a^{5-i}$。

有了这个公式，就确定了 G 的运算表：G 中每一个元素都可以表示成 a^ib^j 的形式，其中 $i = 0, 1, 2, 3, 4$，$j = 0, 1$。对任意 $a^ib^j, a^kb^r \in G$，可运用上述等式将 $a^ib^ja^kb^r$ 化成 a^sb^t 的形式(反复使用 $ba^ib = (a^i)^{-1} = a^{5-i}$，直至 b^j 一项被消去。若 $r < j$，可以利用 $a^ib^ja^kb^r = a^ib^ja^kb^re^n = a^ib^ja^kb^{r+2n}$，加大 r)。

上述讨论说明，任何非交换的 10 阶群都可以表示成 $G = \{a^ib^j \mid i \in \mathbb{Z}_5, j \in \mathbb{Z}_2\}$ 的形式，且 $|a| = 5, |b| = 2, ba^ib = a^{5-i}$。这就证明了在同构意义下，仅有上述一种形式的 10 阶非交换群。

综上所述，在同构意义下，10 阶群只有两个，一个是 10 阶循环群 $\mathbb{Z}_{10}$，另一个是二面体群 D_5。[3] □

17.65 由习题 17.63 结论知，$|\mathrm{Inn}\, G| = 1$ 当且仅当 $[G : C] = |G/C| = 1$，即有 $C = G$。换言之，$\mathrm{Inn}\, G = \{I_G\}$ 当且仅当 G 为 Abel 群。

17.66

证明：定义 $\varphi : G_1 \times G_2 \to G_2 \times G_1$，对任意 $\langle g_1, g_2 \rangle \in G_1 \times G_2$，令 $\varphi(\langle g_1, g_2 \rangle) = \langle g_2, g_1 \rangle$。$\varphi$ 显然是双射。由积代数定义易于验证 φ 是同态。从而有 $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$。 □

17.67

[3] 正 n 边形的对称群称为**二面体群**(dihedral group)，记作 D_n。它具有结构：$G = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = I, \quad \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$。