

5.

(1)

证明: 反设 G 中不存在度数小于等于 3 的顶点, 则由图论基本定理可知 $2m = \sum_{v \in G} d(v) \geq \sum_{v \in G} 4 = 4n$, 即 $m \geq 2n$ 。又由于 G 中不存在长度为 3 或 4 的圈, 所以 G 中每个面的次数至少为 5。

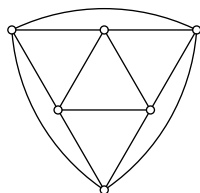
从而有:

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{5}{5-2}(n-2) \\ &= 2n - \frac{n+10}{3} \\ &< 2n \end{aligned} \quad (\text{教材定理 11.9})$$

矛盾。

□

(2) 不成立。举 6 阶反例如下:



三、

1. $V/\sim = \langle \mathbb{N}/\sim, \oplus \rangle$, 其中 $\mathbb{N}/\sim = \{2\mathbb{N}, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 。 \oplus 的运算表为: $\forall x, y \in \mathbb{N}/\sim$, $x \oplus y = \begin{cases} 2\mathbb{N}, & \text{当 } x = 2\mathbb{N} \text{ 或 } y = 2\mathbb{N}; \\ \{mn\}, & \text{当 } x = \{m\}, y = \{n\}, m, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

2.

证明: 由于 xH 是 G 的子群, 所以 $e \in xH$ 。即, $\exists y \in H$, 使得 $xy = e$ 。由消去律知, $y = x^{-1} \in H$ 。由 $x^{-1} \in H$ 和 H 是群知, $x = (x^{-1})^{-1} \in H$ 。 □