第十章　图的矩阵表示

定理 10.1 n 阶无向连通图 G 的关联矩阵的秩 $r(M(G)) = n-1$.

定理 10.2 n 阶无向连通图 G 的基本关联矩阵的秩 $r(M_f(G)) = n-1$.

推论 1 设 n 阶无向图 G 有 p 个连通分支，则 $r(M(G)) = r(M_f(G)) = n-p$，其中 $M_f(G)$ 是从 $M(G)$ 的每个对角块中删除任意一行而得到的矩阵.

推论 2 G 是连通图当且仅当 $r(M(G)) = r(M_f(G)) = n-1$.

定理 10.3 设 $M_f(G)$ 是 n 阶连通图 G 一个基本关联矩阵. M_f' 是 $M_f(G)$ 中任意 $n-1$ 列组成的方阵，则 M_f' 中各列所对应的边集 $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{n-1}}\}$ 的导出子图 $G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{n-1}}\}]$ 是 G 的生成树当且仅当 M_f' 的行列式 $|M_f'| \neq 0$.

定理 10.4 设 A 是 n 阶有向标定图 D 的邻接矩阵，A 的 $l(l \geq 2)$ 次幂 $A^l = A^{l-1} \cdot A$ 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 v_i 到 v_j 长度的 l 的通路数，$\sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数，则 $\sum\limits_i a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设 A 是 n 阶有向标定图 D 的邻接矩阵，B_r 中元素 $b_{ij}^{(r)}$ 为 v_i 到 v_j 长度小于等于 r 的通路数，$\sum\limits_i \sum\limits_j b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的通路总数，而 $\sum\limits_i b_{ii}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的回路数.

定理 10.5 设 G 是 n 阶无向简单图，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$A$ 是 G 的相邻矩阵，A^k 中元素 $a_{ij}^{(k)} \left(= a_{ji}^{(k)}\right) (i \neq j)$ 为 G 中 v_i 到 v_j (v_j 到 v_i)长度为 k 的通路数. 而 $a_{ii}^{(k)}$ 为 v_i 到 v_j 长度为 k 的回路数.

推论 1 在 A^2 中，$a_{ii}^{(2)} = d(v_i)$.

推论 2 若 G 是连通图，对于 $i \neq j, v_i, v_j$ 之间的矩离 $d(v_i, v_j)$ 为使 A^k 中元素 $a_{ij}^{(k)} \neq 0$ 的最小正整数 k.