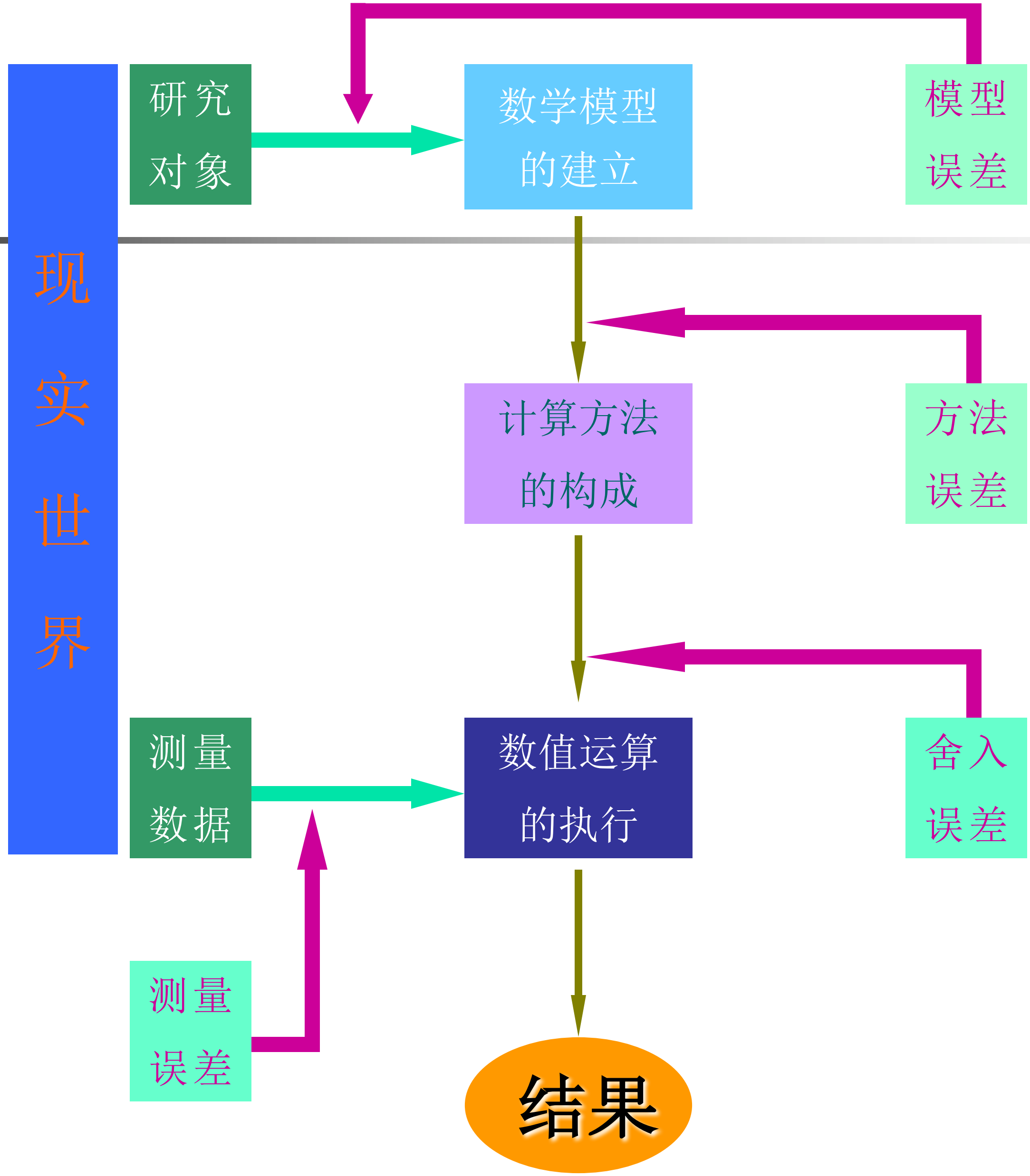
数值分析-误差

高　云


现实世界
研究对象
数学模型的建立
模型误差
计算方法的构成
方法误差
测量数据
数值运算的执行
舍入误差
测量误差
结果

误差的来源

误差举例

- 例：近似计算 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

解法之一：将 e^{-x^2} 作Taylor展开后再积分

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots)\, dx$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\times\frac{1}{5} - \frac{1}{3!}\times\frac{1}{7}}_{S_4} + \underbrace{\frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} - \cdots}_{R_4}$$

取 $\boxed{\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx S_4}$

则 $R_4 = \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} - \frac{1}{5!}\times\frac{1}{11} + \cdots$ 称为 截断误差

误差举例

$$S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42}$$

保留小数点后4位数字

$$\approx 1 - \underline{0.3333} + 0.1000 - \underline{0.0238}$$

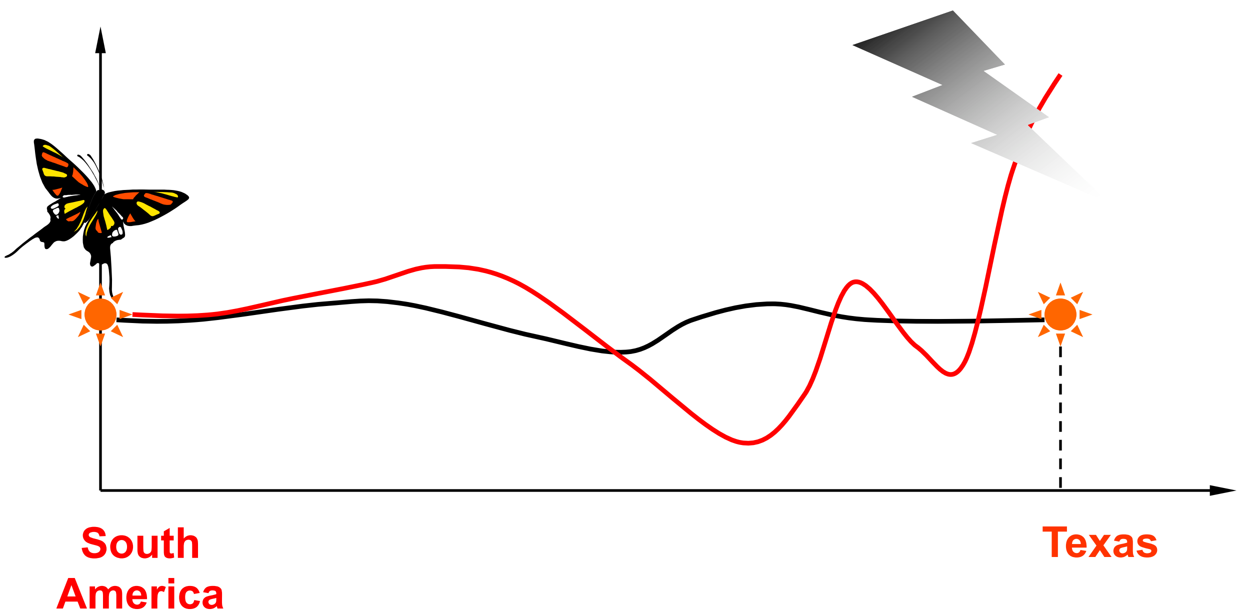
$$= 0.7429$$

舍入误差

误差的传播与积累

例：蝴蝶效应（气象学家洛伦兹，1963）

——南美洲亚马孙河流域热带雨林中的一只蝴蝶翅膀一拍，偶尔扇动几下翅膀，可能在两周后引起美国德克萨斯引起一场龙卷风？！



以上是一个病态问题 /* ill-posed problem*/

误差的传播与积累

- 其原因在于：蝴蝶翅膀的运动，导致其身边的空气系统发生变化，并引起微弱气流的产生，而微弱气流的产生又会引起它四周空气或其他系统产生相应的变化，由此引起连锁反映，最终导致其他系统的极大变化。

- 此效应说明，事物发展的结果，对初始条件具有极为敏感的依赖性，初始条件的极小偏差，将会引起结果的极大差异。

误差的传播与积累

- 误差的传播与积累

  原始数据的误差导致最终结果也有误差的过程称为误差的传播。

注意此公式**精确**成立

- 例：近似计算 $s_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx$，其中 **$n$=1, 2, ..., 8**。

解：由于

$$S_n + 5S_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x+5}dx = \int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{1}{n} - 5S_{n-1}}$$

易知 $S_0 = \ln 6 - \ln 5 \approx 0.182$（保留3位有效数字）

可得 $S_1 = 0.090,\ S_2 = 0.050,\ S_3 = 0.0833,\ S_4 = -0.166,$

$S_5 = 1.03,\ S_6 = -4.98,\ S_7 = 25.0,\ S_8 = -125.$

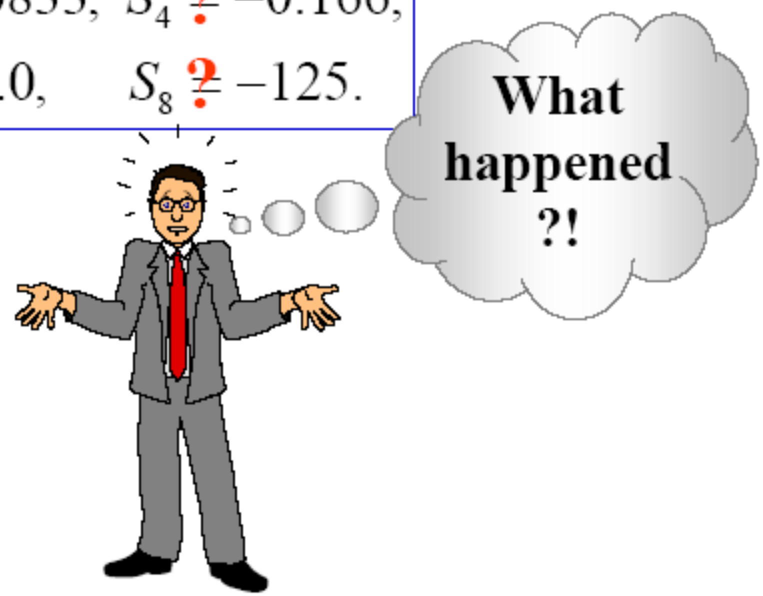
误差的传播与积累

但显然有

$$\frac{1}{6(n+1)}=\int_0^1 \frac{x^n}{6}dx \le S_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{5}dx=\frac{1}{5(n+1)}$$

$S_1=0.090,\ S_2=0.050,\ S_3=0.0833,\ S_4\overset{?}{=}-0.166,$

$S_5\overset{?}{=}1.03,\quad S_6\overset{?}{=}-4.98,\ S_7\overset{?}{=}25.0,\quad S_8\overset{?}{=}-125.$



误差的传播与积累

考察第n步的误差 　S_n^* 表示真值

$$e_n = S_n^* - S_n = (1/n - 5S_{n-1}^*) - (1/n - 5S_{n-1}) = -5(S_{n-1}^* - S_{n-1}) = -5e_{n-1}$$

即有

$$\boxed{|e_n| = 5|e_{n-1}| = 5^2|e_{n-2}| = \cdots = 5^n|e_0|}$$

可见误差以 **5** 倍的速度增长!

说明该计算过程是不稳定的!

我们需要改变算法!

误差的传播与积累

公式二： $S_n = \frac{1}{n} - 5S_{n-1}$ → $\boxed{S_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}S_n}$

方法：先估计一个 S_N，再反推要求的 S_n ($n < N$)。

$$S_8 \approx \left(\frac{1}{5(8+1)} + \frac{1}{6(8+1)} \right) \Big/ 2 \approx 0.0204$$

$$\boxed{\frac{1}{5(n+1)} \le S_n \le \frac{1}{6(n+1)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &S_1 = 0.0884,\ S_2 = 0.0580,\ S_3 = 0.0431,\ S_4 = 0.0343, \\ &S_5 = 0.0285,\ S_6 = 0.0244,\ S_7 = 0.0209,\ S_8 = 0.0204. \end{aligned}}$$

在我们今后的讨论中，误差将不可回避，算法的稳定性会是一个非常重要的话题。

误差限与有效数字

定义1：设x^*是准确值， x为x^*的一个近似值，称

$$e(x) = x - x^*$$

是近似值x的绝对误差，简称为误差。

例 2: 若用以厘米为最小刻度的尺去量桌子的长，大约为1.45米，求1.45米的绝对误差。

1.45米的
绝对误差=?

不知道！

误差限与有效数字

但实际问题往往可以估计出 $|e(x)|$ 不超过某个正数ε，即，

$|x^* - x| \le \varepsilon$ ，则称 ε 为绝对误差限，有了绝对误差限就可以知道x^*范围为

$$x - \varepsilon \le x^* \le x + \varepsilon$$

即x^*落在 $[x-\varepsilon \quad x+\varepsilon]$ 内。在应用上，常常采用下列写法来刻划x^*的精度。

$$x^* = x \pm \varepsilon$$

误差限与有效数字

❑有效数字的定义

如果近似值 **x**的误差限是它的某一位的半个单位，我们就说它“准确”到这一位，并且从这一位起直到前面第一个非零数字为止的所有数字均称有效数字**.**

$$\left|\pi - 3.1416\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4} \qquad \left|\pi - 3.14159\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$\pi - 3.14 = 0.0015926$$ 有效数位为3位

$$\pi - 3.1416 = -0.0000074$$ 有效数位为5位

$$\pi - 3.1415 = 0.0000926$$ 有效数位为4位

有效数字与误差限的关系

已知近似值**x**的标准式

$$x = 0.a_1 a_2 \cdots a_t \times 10^m$$

若

$$\left| x - x^* \right| \le \frac{1}{2} \times 10^n$$

则有效数字的个数为m-n

有效数字与误差限的关系

已知近似值**x**的标准式

$$x = 0.a_1a_2\cdots a_t \times 10^m$$

若有效数字的个数为**n**

则

$$\left|x - x^*\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

误差限与有效数字

注：e 可能取正，也可能取负。

ε 越小越具有参考价值。

但 ε 却不能很好地表示近似值的精确程度。

注：

0.2300有4位有效数字，而0.23只有2位有效数字

12300如果写成0.123×10^5，则表示只有3位有效数字。

数字末尾的0不可以随意添加或省略！

绝对误差与相对误差

I can tell that distance between two planets is 1 million light year ±1 light year.

I can tell that this part's diameter is 20cm±1cm.

Of course mine is more accurate！ The accuracy relates to not only the absolute error, but also to the size of the exact value.

相对误差限

定义

仍以 **x**代表 **x***的近似值，若

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \le \varepsilon$$

则称 ε 为近似数 **x**的相对误差限**.**

几点注意事项

- 避免相近的数相减

例：$a_1 = 0.12345$，$a_2 = 0.12346$，各有5位有效数字。

而 $a_2 - a_1 = 0.00001$，只剩下1位有效数字。

几种经验性避免方法：

$$\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}};$$

$$\ln(x+\varepsilon) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right);$$

当 $|x| << 1$ 时：$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$；

$$e^x - 1 = x\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \ldots\right)$$

几点注意事项

- 避免数量级相差很大的数相除

  可能会产生溢出的情形

- 避免大数吃小数

例：用单精度计算10^8+1。(ex02.m)

在计算机内，10^8存为0.1×10^9，1存为0.1×10^1。做加法时，两加数的指数先向大指数对齐，再将浮点部分相加。即1 的指数部分须变为10^9，则：$1 = 0.000000001 \times 10^9$，取单精度时就成为：

$$10^8+1=0.10000000\times10^9+0.000000001\times10^9=0.1000000\times10^9$$

例：计算级数 $1+1/2+1/3+1/4+\ldots$ 的部分和。(练习)

几点注意事项

- 简化计算，避免误差积累

例：已知 $p(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$，计算 **$p(3)$**的值。

如果直接代入计算，则需 **$n(n-1)/2$** 次乘法和 **n** 次加法运算。

如果将 **$p(x)$**改写为：$p(x)=x(x(\cdots(x(x+1)+1)+\cdots+1)+1$

此时只需 **$n-1$**次乘法和 **n** 次加法运算。

- 选用稳定的算法

秦九韶算法或**Horner**算法

数值计算中的误差估计

四则运算误差限的公式：

$$\varepsilon(x_1 \pm x_2) = \varepsilon(x_1) + \varepsilon(x_2);$$

$$\varepsilon(x_1 \times x_2) \approx |x_1|\varepsilon(x_2) + |x_2|\varepsilon(x_1)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx \frac{|x_1|\varepsilon(x_2) + |x_2|\varepsilon(x_1)}{|x_2|^2} \quad (x_2 \neq 0)$$

回答下面命题是否成立

- 误差是可以避免的
- 理论上正确的算法可以在计算机上得到正确的实现。
- 由计算软件得出的计算结果是精确的。
- 近似解是无用解。

本节小结

- 误差的来源
- 绝对误差限和相对误差限
- 有效数字以及与误差限之间的关系
- 关于误差的几点注意事项