学号：________ 姓名：________ 专业年级：________ 授课教师：________ 考场教室号：________

装 订 线

考试说明：本课程为闭卷考试，共 2 页，满分为 100 分，可携带考场规定的必需用品。

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

## 一、 填空题(每题 3 分，共 21 分)

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\left(\dfrac{1+\sin(xy)}{x^2+y^2}\right)^{|xy|}=$______.

2. 交换积分次序：$\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx =$________________________.

3. 函数 $f(x,y,z)=(\dfrac{x}{z})^y$ 在点 $(1,1,1)$ 处的梯度 $gradf=$________.

4. 函数 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $(0,0,0)$ 处沿 $z$ 轴正向的方向导数为________.

5. 已知 $F(u,v)$ 有连续偏导数，方程 $F(cx+az,cy-bz)=x^2+y^2$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

6. 曲线 $\Gamma:\begin{cases} y=2x \\ z=3x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,2,7)$ 处的切线方程为____________.

7. 曲面 $z=3-x^2-y^2$ 上与平面 $2x+2y+z=6$ 平行的切平面方程为________________.

## 二、 选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. 已知 $f'_x(0,0) = 2$，$f'_y(0,0) = -2$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

A. 连续；　　B. 全微分 $df = 2dx - 2dy$；

C. 沿 $y$ 轴反向的方向导数为2；　　D. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在.

2. 极限 $\lim\limits_{\rho\to 0^+} \dfrac{1}{\rho^2} \iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} \cos(xy)^2 d\sigma =$（　　）.

A. 1；　　B. 0；　　C. $\pi$；　　D. $\rho$.

3. 设 $\Omega$：$x^2+y^2+z^2 \le R^2$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz =$（　　）.

A. $\dfrac{2}{5}\pi R^4$；　　B. $\dfrac{4}{5}\pi R^4$；　　C. $\dfrac{2}{5}\pi R^5$；　　D. $\dfrac{4}{5}\pi R^5$.

4. 已知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 的邻域内有连续偏导数，则在该点的梯度 $grad\,(uv)$ 等于（　　）.

A. $u\cdot gradv$；　　B. $v\cdot gradu$；

C. $(gradu)\cdot(gradv)$；　　D. $u\cdot gradv + v\cdot gradu$.

三、 完成下列各题(第1，2，3，4每题10分；第5，6，7每题9分，共67分)

1. 已知 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，$w = f(xy, yz^2)$，求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

2. 设 $D$：$x^2+y^2 \le 2y$，计算二重积分 $I = \iint\limits_D x^2 dxdy$.

3. 记 $\Omega$ 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围空间区域，计算三重积分

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz.$$

4. 设 $\Omega$：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ z \le 0 \end{cases}$，计算三重积分 $I = \iiint\limits_{\Omega}(x+z)^2 dxdydz$.

5. 求函数 $f(x,y) = 2(y-x^2)^2 - y^2 - \dfrac{1}{7}x^7$ 的极值.

6. 求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在点 $\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿椭圆曲线 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ 在该点的内法线方向的方向导数.

7. 证明曲面 $S$：$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\pi$ 上任一点处的切平面在三个坐标轴上的截距之和为一常数.

学号:______ 姓名:______ 专业年级:______ 授课教师:______ 考场教室号:______ 座号:______

装 订 线

一、

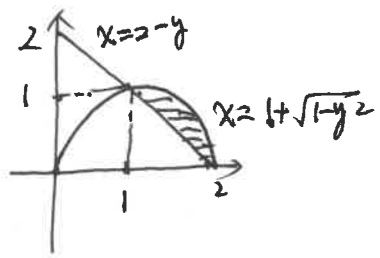
1. ∵ $0 \le \left|\dfrac{1+\sin(xy)}{x^2+y^2}\right| < \dfrac{1+|\sin(xy)|}{x^2+y^2} < \dfrac{1+|xy|}{2|xy|}$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{1+|xy|}{2|xy|}\right)^{|xy|} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{2}\right)^{|xy|}\cdot\left(\frac{1+|xy|}{|xy|}\right)^{|xy|}$$

$$= 0\cdot e = 0$$

由两边夹得 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\dfrac{1+\sin(xy)}{x^2+y^2}\right)^{|xy|} = 0$

2. $D:\ 0\le y\le 1,\quad 2-y\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}$




$D:\ 1\le x\le 2,\quad 2-x\le y\le \sqrt{2x-x^2}$

∴ $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$

3. $f'_x = y\left(\frac{x}{z}\right)^{y-1}\cdot\frac{1}{z}$

$f'_y = \left(\frac{x}{z}\right)^{y}\ln\frac{x}{z}$

$f'_z = x^y\cdot(-y)\,z^{-y-1}$

∴ $\mathrm{grad} f(1,1,1) = \{1, 0, -1\}$.

4. $\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)} = \lim\limits_{z\to 0^+}\dfrac{f(0,0,z)-f(0,0,0)}{z}$

$= \lim\limits_{z\to 0^+}\dfrac{z}{z} = 1$.

5. $F(cx+az,\ cy-bz) = x^2+y^2$

两边对x求偏导，

$F_1'\cdot\left(c+a\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F_2'\cdot(-b)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$

∴ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x-F_1'c}{F_1'a-F_2'b}$

对y求偏导.

$F_1'\cdot a\frac{\partial z}{\partial y} + F_2'\left(c-b\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2y$

∴ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y-F_2'\cdot c}{F_1'\cdot a+F_2'(-b)}$

6. $\begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = 7x^2 \end{cases}$

∴ $\vec{T} = \{1, 2, 14x\}$.

$\vec{T}|_{(1,2,7)} = \{1, 2, 14\}$

切线方程：$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-7}{14}$

7. $\vec{n} = \{-2x, -2y, -1\} \parallel \{2, 2, 1\}$

∴ $x=1,\ y=1$

∴切点 $(1, 1, 1)$

切平面方程：$2(x-1)+2(y-1)+z-1=0$

即 $2x+2y+z-5=0$

二. 1. C、 2. C. 3. D. 4. D 5.

1. 偏导数连续 → 可微 → 方向导数存在

偏导数存在

连续 → 极限存在

A, B, D 不对.

2. 由积分中值定理得

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{1}{\rho^2}\cos(\xi\eta)^2\cdot\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}d\sigma$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\pi\cos(\xi\eta)^2 \qquad (\xi,\eta)\in x^2+y^2\le\rho^2$$

$$=\pi\cos(0\cdot0)^2=\pi.$$

3. $\overset{\text{球}}{=}\iiint_\Omega r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^4\sin\varphi\,dr$$

$$=2\pi\cdot2\cdot\frac{1}{5}R^5=\frac{4}{5}\pi R^5$$

4. $$\operatorname{grad}uv=\left\{\frac{\partial(uv)}{\partial x},\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right\}.$$

$$=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y}\right\}$$

$$=v\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+u\left\{\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right\}$$

$$=v\cdot\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v.$$

三. 1. $$\frac{\partial w}{\partial z}=f_2'\cdot2yz$$

$$\frac{\partial^2w}{\partial z^2}=f_{22}''(2yz)^2+f_2'\cdot2y$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=f_1'\cdot x+f_2'\cdot z^2$$

$$\frac{\partial^2w}{\partial y^2}=(f_{11}'x+f_{12}''z^2)x+(f_{21}''x+f_{22}''z^2)z^2$$

2. $D:\ x^2+(y-1)^2\le1$

极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$


$D':\ 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le r\le2\sin\theta$

$$I=\iint_{D'}(r\cos\theta)^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\cos^2\theta\,d\phi.$$

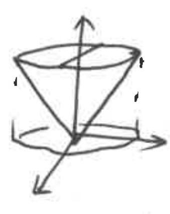
$$=\int_0^{\pi}4\cos^2\theta\sin^4\theta\,d\theta.$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\sin^4\theta\,d\theta$$

$$=8\left[\frac{3!!}{4!!}-\frac{5!!}{6!!}\right]\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

3. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=1\end{cases}$



得投影区域 $D:\ x^2+y^2\le1$

柱坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ $\quad\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le2\pi\\ 0\le r\le1\\ r\le z\le1\end{cases}$

座号：　考场教室号：　授课教师：　专业年级：　姓名：　学号：

装　订　线

$I_{柱} = \iiint_{\Omega'} z^2 r \cdot r \, dr \, d\theta \, dz$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 z^2 r^2 dz$

$= 2\pi \int_0^1 \frac{1-r^3}{3} \cdot r^2 dr$

$= \frac{\pi}{9}$

4. $I = \iiint_\Omega (x^2+2xz+z^2)\, dV$

$\Omega$关于$yoz$面对称，$2xz$关于$x$奇函数

故 $\iiint_\Omega 2xz \, dV = 0$

$\therefore I = \iiint_\Omega x^2 dV + \iiint_\Omega z^2 dV$

球坐标变换 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$\Omega: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le R. \end{cases}$

$\therefore I \overset{球}{=} \iiint_{\Omega'} r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta \cdot r^2\sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$

$+ \iiint_{\Omega'} r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^R r^4 \sin^3\varphi\cos^2\theta \, dr +$

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^R r^4 \cos^2\varphi\sin\varphi \, dr$

$= \frac{1}{15}R^5 \cdot 1 \cdot 2\pi + \frac{2}{15}\pi R^5 = \frac{4}{15}\pi R^5$

5. 令 $\begin{cases} f'_x(x,y) = x(-4y+8x^2-x^5) = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y - 4x^2 = 0 \end{cases}$

$\therefore$ 驻点 $(-2,8)$，$(0,0)$

$f''_{xx} = 24x^2 - 8y - 6x^5$

$f''_{xy} = -8x$　　$f''_{yy} = 2$

在$(-2,8)$处　$A=176$，$B=16$，$C=2$

$B^2 - AC < 0$　　$A > 0$

$\therefore f(-2,8) = -\frac{96}{7}$ 极小值

在$(0,0)$处，$A=0$，$B=0$，$C=2$

$B^2 - AC = 0$　判别法失效

在$(0,0)$点处，$f(0,0) = 0$

在$(0,0)$邻域　$y = x^2$，$x > 0$，$f(x,y) < 0$

在$(0,0)$邻域　$x = 0$，$f(x,y) > 0$

$\therefore f(0,0)$不是极值.

6. $f'_x = 2x$，　$f'_y = 2y$

椭圆参数方程 $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$

$(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}})$ 对应 $t = \frac{\pi}{4}$.

切向量 $\vec{T} = \{-3\sin t, 4\cos t\}$

$\vec{T}|_{(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}})} = \{-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\}$

内法线向量 $\vec{n}|_{(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}})}=\{-\frac{4}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}\}$

$\because f$ 可微 $\therefore \frac{\partial f}{\partial n}|_{(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}})}=f_x'(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}})\cos\alpha+f_y'(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}})\cos\beta$

其中 $\cos\alpha=\frac{-\frac{4}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(-\frac{4}{\sqrt{2}})^2+(\frac{3}{\sqrt{2}})^2}}=-\frac{4}{5}$

$\cos\beta=\frac{-\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{4}{\sqrt{2}})^2+(-\frac{3}{\sqrt{2}})^2}}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial n}|_{(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}})}=3\sqrt{2}\cdot(-\frac{4}{5})+4\sqrt{2}(-\frac{3}{5})$

$=-\frac{24}{5}\sqrt{2}$.

7. 证明：设 S 在任意点 $(x_0,y_0,z_0)$

切平面法向量 $\vec{n}|_{(x_0,y_0,z_0)}$

$\vec{n}|_{(x_0,y_0,z_0)}=\{\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\}|_{(x_0,y_0,z_0)}$

$=\{\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\frac{1}{2\sqrt{y_0}},\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\}$

切平面方程：$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$

而 $(x_0,y_0,z_0)$ 在 s 上，故 $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=a$

切平面方程为：$\frac{x}{a\sqrt{x_0}}+\frac{y}{a\sqrt{y_0}}+\frac{z}{a\sqrt{z_0}}=1$

截距分别为 $X=a\sqrt{x_0}$，$Y=a\sqrt{y_0}$，$Z=a\sqrt{z_0}$

$\therefore X+Y+Z=a(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a\cdot a=a^2$

故切平面在三个坐标轴截距之和为一常数。

4（法二）．将 $\Omega$ 扩展为 $\Omega_1$：$x^2+y^2+z^2\le R^2$

由轮换对称性

$\iiint_{\Omega_1}x^2dxdydz=\iiint_{\Omega_1}y^2dxdydz=\iiint_{\Omega_1}z^2dxdydz$

$\Omega$ 关于 $yoz$ 面对称，$2xz$ 关于 $x$ 奇函数

$\therefore \iiint_{\Omega}2xz\,dxdydz=0$

$I=\iiint_{\Omega}(x^2+2xz+z^2)dxdydz$

$=\iiint_{\Omega}(x^2+z^2)dxdydz$

$=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega_1}(x^2+z^2)dxdydz$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\iiint_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$

$\overset{\text{球}}{=}\frac{1}{3}\iiint_{\Omega_1}r^2\cdot r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta$

$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^4\sin\varphi\,dr$

$=\frac{1}{3}\cdot2\pi\cdot2\cdot\frac{1}{5}R^5$

$=\frac{4}{15}\pi R^5$.

1. $\Omega$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成立体

求 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$

错解：$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\,dz$

$=\iint\limits_{D_{xy}} \underbrace{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}_{\times} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz.$

$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_{xy}\\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\end{cases}$

这里 $z\geq\sqrt{x^2+y^2}$，所以不能替换.

错解：$I\overset{柱}{=}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\underbrace{\int_0^1}_{\times} z^2\cdot r\cdot r\,dz$

$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，$\therefore r\le z\le 1$

---

2. $\Omega:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ z\le 0\end{cases}$ 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)^2\,dxdydz$

错解：$I=\iint\limits_{D_{xz}}(x+z)^2dxdz\underbrace{\int_{-R}^{R}}_{\times}dy$

$\Omega$ 投影到 $zox$ 面，$D_{zx}$，此时 $y$ 的范围：

$-\sqrt{R^2-x^2-z^2}\le y\le\sqrt{R^2-x^2-z^2}$

不是找 $y$ 的最大值和最小值.

错解：$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\,dxdydz$

$=\underbrace{\frac{2}{3}R^2}_{\times}\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$

$\Omega:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ z\le 0\end{cases}$

不能替换为 $R^2$

在 $\Omega$ 上，$\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz\neq\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz$

在 $\Omega_1$：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$\iiint\limits_{\Omega_1}x^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_1}z^2dxdydz$