逆。因此，$g = I_B \circ g = f^{-1} \circ f \circ g$。

因为 f^{-1} 和 $f \circ g$ 都是满射的，由教材定理 3.4(1) 得，$g = f^{-1} \circ f \circ g$ 也是满射的。 □

3.21 先证一个引理。

引理 3.3 对任意函数 $f, g \in A \to B$，$f = g$ 当且仅当 $\forall x(x \in A \to f(x) = g(x))$。

证明: 先证必要性。

若 $f = g$，则：

$\forall x$

$$
\begin{aligned}
& x \in A \\
\iff & \exists y(\langle x, y\rangle \in f) && (f \in A \to B) \\
\implies & \langle x, a\rangle \in f && (\exists\text{消去}) \\
\iff & f(x) = a && (f(x)\text{ 定义}) \\
\iff & f(x) = a \wedge f(x) = a && (\text{命题逻辑幂等律}) \\
\iff & f(x) = a \wedge \langle x, a\rangle \in f && (f(x)\text{ 定义}) \\
\iff & f(x) = a \wedge \langle x, a\rangle \in g && (f = g) \\
\iff & f(x) = a \wedge g(x) = a && (g(x)\text{ 定义}) \\
\iff & f(x) = g(x) && (\text{等号传递性})
\end{aligned}
$$

于是有：$f = g \Rightarrow \forall x(x \in A \to f(x) = g(x))$。

再证充分性。

若 $\forall x(x \in A \to f(x) = g(x))$，则：

$\forall x, y$

$$
\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in f \\
\iff & f(x) = y && (f(x)\text{ 定义}) \\
\iff & g(x) = y && (f(x) = g(x)) \\
\iff & \langle x, y\rangle \in g && (g(x)\text{ 定义})
\end{aligned}
$$

于是有：$\forall x(x \in A \to f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g$。

综合即得原题。 □

再证原题。

证明: 先证：$f \circ h_1 = g \circ h_1$。

由教材定理 3.3 知，$\operatorname{dom}(f \circ h_1) = \operatorname{dom}(g \circ h_1) = \operatorname{dom} h_1 = A$。

由引理 3.3 知，欲证：$f \circ h_1 = g \circ h_1$，只需证：$\forall x(x \in A \to f \circ h_1(x) = g \circ h_1(x))$。

由 A 定义知，对于任意 $x \in A$，有 $x \in X \wedge f(x) = g(x)$。于是：

$\forall x \in A,$

$$
\begin{aligned}
f \circ h_1(x) &= f(h_1(x)) && (\text{教材定理 3.3}) \\
&= f(x) && (h_1(x) = x) \\
&= g(x) && (f(x) = g(x)) \\
&= g(h_1(x)) && (h_1(x) = x) \\
&= g \circ h_1(x) && (\text{教材定理 3.3})
\end{aligned}
$$

从而证得原题。

下面证：$B \subseteq A$。