环与域

- 不能构成群自然就不能构成环
- 定义
  - 定义:设代数系统<**R**,+,·>满足 <**R**,+> 构成**Abel** 群
    1. $a0 = 0a = 0$
    2. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
    3. $(-a)(-b) = ab$
    4. $a(b-c) = ab-ac$, $(b-c)a = ba-ca$
    5. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$
    6. $(na)b = a(nb) = n(ab)$
  - <**R**,·>构成半群
  - ·对+运算满足分配律
    - 例2 设<**A**,+,•>是一个环，**a**,**b**,**c**,**d**∈**A**， 计算(**a**+**b**)•(c+d)，(**a**-**b**)^2
      - $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b)$
        $= (a-b)\cdot a - (a-b)\cdot b$
        $= a^2-ba-(ab-b^2) = a^2-ba-ab+b^2$
  - 加法的单位元刚好是乘法的零元
  - 所谓的零因子是指两个因子的乘集是0, example:->2@3=0
- 定义 设<**A**,+,·>是环。
  - (1) 若<**A**, •>是可交换的，则称<**A**,+, •>是交换环。
  - (2) 若<**A**, •>含有单位元，则称<**A**,+, •>是含幺环。
  - (3) 若对任意的**a**,**b**∈**A**，**a**≠q∧**b**≠q 必有**a**·**b**≠q，则称<**A**,+, •>是无零因子环。
- 商环
  - 定义 **D**为**R**的理想，∀**x**∈**R**, *x = D + x = {d + x | d Î D}*
    - 称 <**R**/**D**,+,·>构成环，为**R** 关于**D** 的商环.
    - **实例：**$\langle Z_6,\oplus,\otimes\rangle$
      - **理想** $\{0\}, \{0,2,4\}, \{0,3\}, Z_6$
      - **商环** $Z_6/\{0\} = \{ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\} \}$,
        $Z_6/Z_6 = \{ Z_6 \}$
        $Z_6/\{0,3\} = \{ \{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\} \}$,
        $Z_6/\{0,2,4\} = \{ \{0,2,4\}, \{1,3,5\} \}$
      - $Z_6/\{0,3\}$**上的运算表**

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

  - *R / D = {x | x Î R}*
  - *x+y=x+y*
  - *x×y=x×y*
  - **环同态** $f: R_1 \to R_2$
    $f(x+y) = f(x) + f(y)$
    $f(xy) = f(x) f(y)$
    同态核： $\ker f = \{ x \mid x \in R_1, f(x)=0 \}$
    实例： $f_c: Z \to Z_c, f_c(x) = x \bmod c$，$c$ 为整数
    $\ker f_c = cZ$
    - 同态核是一种单位元
    -