证明: 用反证法。

假设不存在这样的 u，使得 u 的先驱元集中的元素均在 P_E 中。即 $\forall u \in T_E, \exists w(u \neq w)$ 使得 $w \in T_E$ 且 $w \in \Gamma^-(u)$。

由教材定义 14.1(2) 知，D 中有一个入度为 0 的顶点 v_1，而 v_1 在 P_E 中，即 T_E 中的点的先驱元集均不为空，由于 $T_E \neq \varnothing$，在 T_E 中任取一点，记为 u_1，由假设知 $\exists u_2(u_2 \neq u_1) u_2 \in T_E$ 且 $u_2 \in \Gamma^-(u_1)$。由假设知，$\exists u_3(u_3 \neq u_2)$，由 D 中无回路知：$u_3 \neq u_1, u_3 \in T_E$ 且 $u_3 \in \Gamma^-(u_1)$。由 D 是 n 阶图知，D 是有限图，$|T_E|$ 是有限值。继续直到 u_{T_E}，由假设知 $u_{|T_E|+1}$，$u_{|T_E|+1} \in T_E$，由抽屉原则知，$u_{|T_E|+1}$ 必为 $u_1 \cdots u_{|T_E|}$ 中的一个。推出 D 中有回路，与教材定义 14.1 矛盾，假设错误，即存在这样的 u。 □

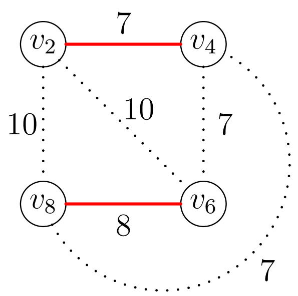
14.7

证明: 用反证法。

假设不存在这样的 u，使得 u 的后继元集中的元素均在 P_L 中。即 $\forall u \in T_L, \exists w(u \neq w)$ 使得 $w \in T_L$ 且 $w \in \Gamma^+(u)$。

由 V_n 在 P_L 中且 D 中有一个顶点出度为 0 知，存在这样的 w。在 T_L 中任取一点 u_1，由假设知：$\exists u_2(u_2 \neq u_1)$ 使得 $u_2 \in T_L$ 且 $u_2 \in \Gamma^+(u_1)$。继续构造 $u_3, u_4, \cdots$，新点不能与已构造序列中的任何一点相同，否则会产生回路。而由 D 是有限图知，T_L 为有限值，当构造完 $u_{|T_L|}$ 时，由抽屉原则知，$u_{|T_L|+1}$ 必与 $u_1, u_2, \cdots u_{|T_L|}$ 中的某一点重合，产生回路，与教材定义 14.1(1) 相矛盾。故假设错误，即存在这样的 u。 □

14.8 奇度顶点集 $V' = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$，$|V'| = 4$。用 $Dijkatra$ 算法容易求出：
v_2 到 v_4 的最短路径为 $v_2v_1v_4$，其权为 7；v_2 到 v_6 的最短路径为 $v_2v_5v_6$，其权为 10；
v_2 到 v_8 的最短路径为 $v_2v_5v_8$，其权为 10；v_4 到 v_6 的最短路径为 $v_4v_5v_6$，其权为 7；
v_4 到 v_8 的最短路径为 $v_4v_5v_8$，其权为 7；v_6 到 v_8 的最短路径为 $v_6v_5v_8$，其权为 8。
这 4 个顶点所对应的完全图 K_4 如下图所示。图中两条红色路径为最小完美匹配 $M = \{(v_2, v_4), (v_6, v_8)\}$。



在题图中，将 K_4 中 v_2v_4 和 v_6v_8 对应的最短路径上的各边重复一次所得到的欧拉图如下图所示。