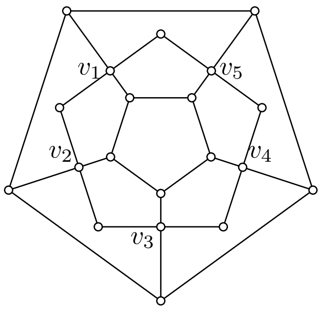
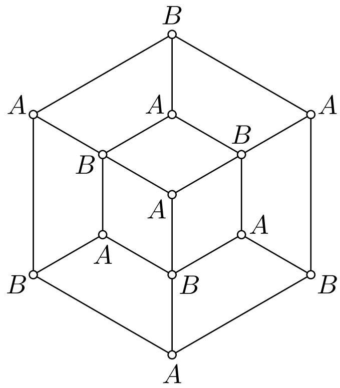


(a)



(b)

证明:

(a)　删除图中所有的 4 度顶点(即上图中标记为 $v_1, v_2, \cdots, v_5$ 的顶点)，则原图将成为一个有 7 个连通分支的非连通图。由教材定理 8.6 可知，此图不是哈密顿图。

(b)　令 X 为上图中所有标记为 A 的顶点构成的集合，令 Y 为图中所有标记为 B 的顶点构成的集合。易见，$G = \langle X, Y, E \rangle$ 是一个二部图。注意到，G 中共有 13 个顶点。反设 G 是哈密顿图，则图中存在一个长度为 13 的圈，这与教材定理 7.8 矛盾。 □

8.8　证明繁琐，暂略。

8.9

证明: 设 G 为 n 阶无向简单图，边数 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$。首先由于 G 是简单图，所以有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2 = m \leq \frac{1}{2}n(n-1)$，解得，$n \geq 3$。

下面证明，对 G 中任意两个不相邻的顶点 $u, v \in V(G)$，$u \neq v$，$(u, v) \notin E(G)$，必有 $d(u) + d(v) \geq n$。

若不然，就有 $d(u)+d(v) \leq n-1$。注意到，在 K_n 中，与 u 或 v 相关联的边总共有 $2n-3$ 条。若 $d(u)+d(v) \leq n-1$，则这 $2n-3$ 条边中，至少有 $(2n-3)-(n-1) = n-2$ 条边不在图 G 中。从而 $m \leq |E(K_n)|-(n-2) = \frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)+1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1 < \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，矛盾。

这就是说，$|G| \geq 3$ 且对 G 中任意两个不相邻的顶点 u, v 都有 $d(u)+d(v) \geq n$。从而由教材定理 8.7 推论 1 可知，G 是哈密顿图。 □

当 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 时 G 不一定是哈密顿图。反例如下：取 $n = 3$，则 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1 = 2$。此时，令 $G = T$ 为任意 3 阶树。由于树中无圈，所以也不会有哈密顿圈。此时，G 不是哈密顿图。

再举一个 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 时 G 是哈密顿图的例子：取 $n = 4$，则 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1 = 4$。此时令 $G = C$ 为一个 4 阶圈。显然，G 本身就是一个哈密顿圈，从而 G 是哈密顿图。

总之，当 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 时，G 未必是哈密顿图。

8.10

证明: 反设 $C = v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}$ 不是哈密顿回路，则 $V(G)-V(C) \neq \varnothing$。这时，考虑 C 的邻域 $N(C) = \{v_s \mid v_s \in V(G)-V(C) \wedge \exists v_{i_j}(v_{i_j} \in V(C) \wedge (v_{i_j}, v_s) \in E(G))\}$。$N(C)$ 必不空(若 $N(C)$ 为空，则 $V(C)$ 与 $V(G)-V(C)$ 的顶点之间没有通路，从而与前提“G 是连通图”矛盾)。任取 $v_s \in N(C)$，由 $N(C)$ 定义知，存在 $v_{i_j} \in V(C)$，使得 $(v_{i_j}, v_s) \in E(G)$。这时，