证明: 只需证 $G = C$。

由于 $C \trianglelefteq G$，所以有 $|C| \mid |G| = p^2$。即，C 的取值只能是 1，p 或 p^2。

由群的分类方程知:

$$|C| = |G| - \sum_{i=1}^{k}[G : N(a_i)]$$

其中 $a_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是含有至少两个元素的共轭类的代表元。由于 $2 \leq [G : N(a_i)] \mid p^2$ 且 $[G : N(a_i)] < p^2$，所以必有 $[G : N(a_i)] = p$，$i = 1, 2, \cdots, k$。从而有:

$$|C| = p^2 - kp = (p - k)p$$

这就证明了 $|C| \neq 1$。

$|C|$也不可能为 p。因为若 $|C| = p$，就有 $|G/C| = p$，从而 G/C 是循环群。由引理 17.6 知，G 是 Abel 群，$C = G$ 是 p^2 阶群，矛盾。

因此，只能有 $|C| = p^2$。从而 $G = C$ 是 Abel 群。 □

17.58 先证明如下引理。

引理 17.7 *设 G 是循环群，H 是 G 的任意子群，则 G/H 是循环群。*

证明: 由于循环群都是交换的，所以 H 必是正规的。由教材定理 15.11 自然映射是从 G 到 G/H 的满同态。由 G 是循环群和教材定理 17.34 可知，G/H 也是循环群。 □

再证原题。

证明: 由教材例 17.38 知，G 中存在 p 阶元 a 和 q 阶元 b。由教材例 17.6 知，$|ab| = |a||b| = pq$。从而 $G = \langle ab \rangle$ 是循环群。再由引理 17.7 知，G/H 也是循环群。 □

17.59

证明: 设 $G = \{e, a, b, c\}$为 Klein 群，$G' = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq S_4$。令 $\varphi : G \to G', \varphi(e) = (1), \varphi(a) = (12)(34), \varphi(b) = (13)(24), \varphi(c) = (14)(23)$。易于验证，$\varphi$ 是同构。由于 G 是群，所以 $G' \cong G$ 也是群。

注意到，G' 是 S_4 中的恒等置换和所有轮换指数为 2^2 的置换构成的集合。由习题 17.34 结论知，S_n 中同一共轭类的元素都具有相同的轮换指数，所以对任意$\sigma \in S_4, \tau \in G'$，$\sigma\tau\sigma^{-1}$ 的轮换指数只能是 1 或 2^2。无论对于哪种情况，都有 $\sigma\tau\sigma^{-1} \in G'$。由教材定理 17.32 知，$G' \trianglelefteq S_4$。□

17.60

证明: 由习题 17.23 结论知，G 必为有限群。记 $|G| = n$，由于 φ 是满自同态，故 $\varphi(G) = G$。由群同态基本定理知，$G/\ker\varphi \cong G$。从而由 Lagrange 定理知

$$|\ker\varphi| = \frac{|G|}{[G : \ker\varphi]} = \frac{|G|}{|G|} = 1$$

于是有 $\ker\varphi = \{e\}$。从而由教材定理 17.33 知，φ 是单同态，从而是同构。 □

17.61

证明: 充分性。

由群中逆元的唯一存在性和等式 $(x^{-1})^{-1} = x$ 可知，φ 是双射。对任意 $a, b \in G$，

$$\begin{aligned}
\varphi(ab) &= (ab)^{-1} && (\varphi\ \text{定义}) \\
&= b^{-1}a^{-1} && (\text{教材定理 17.2(2)}) \\
&= a^{-1}b^{-1} && (G\ \text{是交换群}) \\
&= \varphi(a)\varphi(b) && (\varphi\ \text{定义})
\end{aligned}$$