(2) 根据教材定理 15.10 我们知道，对 V 上的任何同态导出的等价关系都是 V 的同余关系。容易证明：

引理 15.2 对任意代数系统 $V = \langle A, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_n \rangle$，$V$ 上的每一个同余关系都可以由 V 的某个自同态导出。

证明： 设 $\sim$ 是 V 上的一个同余关系，作自然映射 $g : A \to A/{\sim}, \forall x \in A, g(x) = [x]$。由教材定理 15.11 可知，$g$ 是从 V 到 $V/{\sim}$ 的同态。同时，根据选择公理，存在函数 $f : A/{\sim} \to A$，使得 $\forall x \in A/{\sim}, f(x) \in x$。由商代数的定义立即有：$f$ 是 $V/{\sim}$ 到 V 的同态。从而由同态关系的传递性(证明见习题 5.23)知：$f \circ g : A \to A$ 是 V 的一个自同态。再由 f 和 g 的定义知，$\sim$ 正是 $f \circ g$ 导出的等价关系。如此就证明了：V 上的每一个同余关系都可以由 V 的某个自同态导出。 □

利用这个引理，我们知道，要找出 V 上的所有同余关系，只需逐一检查前面找到的 13 个自同态即可。

记 $\sim_i$ 为 φ_i 在 A 上导出的等价关系，则：

① $\sim_1 = \sim_2 = I_A$，是 A 上的恒等关系。

② $\sim_3 = \sim_4 = \{\langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\} \cup I_A$，对应于划分 $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$。

③ $\sim_5 = E_A$，是 A 上的全域关系。

④ $\sim_6 = \sim_7 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle\} \cup I_A$，对应于划分 $\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$。

⑤ $\sim_8 = \sim_{11} = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, d\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle\} \cup I_A$，对应于划分 $\{\{a, b, d\}, \{c\}\}$。

⑥ $\sim_9 = \sim_{13} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\} \cup I_A$，对应于划分 $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$。

⑦ $\sim_{10} = \sim_{12} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\} \cup I_A$，对应于划分 $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$。

从而得知，V 上共有 7 个同余关系。

15.32

证明： 记 $V_1 \times V_2 = \langle A \times B, \otimes, \Delta', \langle k, \overline{k}\rangle\rangle$。

作 $\varphi : A \times B \to A, \forall \langle a, b\rangle \in A \times B, \varphi(\langle a, b\rangle) = a$。由定义显然有，$R$ 是 φ 导出的 A 上的等价关系。下面只要证明 φ 是同态映射，就可以分别由教材定理 15.10 和同态基本定理得证：R 是 $V_1 \times V_2$ 上的同余关系和 $V_1 \times V_2 \big/ R \cong V_1$。

φ 显然是函数。

$\forall \langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in A \times B$，

$$
\begin{aligned}
\varphi(\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle) &= \varphi(\langle a * c, b \circ d\rangle) && \text{(积代数定义)}\\
&= a * c && (\varphi\ \text{定义})\\
&= \varphi(\langle a, b\rangle) * \varphi(\langle c, d\rangle) && (\varphi\ \text{定义})\\
\varphi(\Delta'\langle a, b\rangle) &= \varphi(\langle \Delta a, \overline{\Delta} b\rangle) && \text{(积代数定义)}\\
&= \Delta a && (\varphi\ \text{定义})
\end{aligned}
$$

这就证明了 φ 是 $V_1 \times V_2$ 到 V_1 的同态。

从而由 R 是 φ 在 A 上导出的等价关系和教材定理 15.10 得到：R 是 $V_1 \times V_2$ 上的同余关系。

又由于 B 是非空的(由代数系统定义，代数系统的载体是非空集合)，因而对任意 $a \in A$，都有 $b \in B$，使得 $\langle a, b\rangle \in A \times B, \varphi(\langle a, b\rangle) = a$。这就证明了 $\varphi(A \times B) = A$，从而 V_1 就是 $V_1 \times V_2$ 在 φ 下的同态像。由同态基本定理知，$V_1 \times V_2 \big/ R \cong V_1$。 □