必然一个是 u，另一个是 v (若不然，就有 $v_r = v_{s+1}$，则 $\Gamma_1\Gamma_2$ 就是 G 中一个从 x 到 y 的通路，矛盾)。这就是说，在 G 中存在 x 到 u (或 v)的通路 Γ_1 和从 y 到 v (或 u) 的通路 Γ_2。从而必有 $x \in V(G_i) \wedge y \in V(G_j)$ 或者 $x \in V(G_j) \wedge y \in V(G_i)$。这就证明了命题的另一个方向。

由上面的讨论可知：

(1) 当 $i = j$ 时，x, y 在 G' 中连通当且仅当它们在 G 中连通。从而连通分支数量不变(只是 G_i 中增加了一条新边 e)。

(2) 当 $i \neq j$ 时，x, y 在 G' 中连通当且仅当它们在 G 连通，或者它们在 G 中分别属于 G_i 和 G_j 这两个连通分支。从而边 e 将把 G_i 与 G_j 连接成一个新的连通分支，而其它的连通分支保持不变。 □

推论 设 E' 为图 G 的一个割集，则 $p(G - E') = p(G) + 1$。

证明: 设 E' 为 G 的任意割集，反设 $p(G-E') \geq p(G)+2$，则任取 $e \in E'$，令 $E'' = E' - \{e\} \subset E'$，则有 $p(G-E'') = p((G-E') \cup e)$，而由引理 9.1 可知，$p((G-E') \cup e) \geq p(G-E') - 1 \geq p(G)+1$。这与割集的定义矛盾。 □

引理 9.2 设 C 为无向图 G 中的一个圈，$S \subseteq E(G)$ 为 G 中任意边割集，若 $S \cap E(C) \neq \varnothing$，则 $|S \cap E(C)| \geq 2$。

证明: 若不然，就有 $|S \cap E(C)| = 1$，即，存在唯一的 $e = (u, v) \in S \cap E(C)$。记 $G' = G - S$，$S' = S - \{e\}$，由割集的定义可知，$p(G') > p(G' \cup e) = p(G - S') = p(G)$。这就是说，向 G' 中加入边 e 会使连通分支数减少，从而由引理 9.1可知，u 和 v 在 G' 中属于两个不同的连通分支。然而，由于 u, v 在圈 C 上，而 $C - e$ 是一条从 u 到 v 的通路。而由前提，e 是 $S \cap E(C)$ 中唯一的元素，这就是说，C 中其它的边都在 G' 中，也即 $C - e \subseteq G'$。这就是说，u 与 v 在 G' 中是连通的。矛盾。 □

再证原题。

证明: 设 C 所在的连通分支为 G_1。令 $C' = C - e_1$。显然，C' 中无圈。由教材例 9.1 可知，存在 G_1 的一棵生成树 T，使得 $C' \subseteq T$。考虑由 T 的树枝 e_2 产生的基本割集 S_{e_2}。因为 $e_2 \in S_{e_2} \cap E(C)$，从而由引理 9.2 可知，$S_{e_2}$ 与 C 至少还应有一条公共边 e。注意到，S_{e_2} 是基本割集，因此，除了 e_2 之外，其余的边都只能是 T 的弦，也即，$e \notin E(T)$，而由于 $C' \subseteq T$，因此，满足 $e \in E(C)$，$e \notin E(T)$ 的只有 e_1。从而必有 $e_1 = e \in S_{e_2}$。这就是说，S_{e_2} 即为题中要求的割集。 □

9.13 首先证明下述结论。

引理 9.3 设 G_1、G_2 是 G 的两个子图，满足 $V(G_1) = V(G_2) = V'$ 和 $E(G_1) \subseteq E(G_2)$，则

(1) 设 $\sim_1, \sim_2 \subseteq V' \times V'$ 分别是 G_1 与 G_2 中的“连通关系”，则 $V'/{\sim_1}$ 是 $V'/{\sim_2}$ 的加细。

(2) $p(G_2) \leq p(G_1)$。

证明: 由于 G_2 可以通过向 G_1 中反复新边得到，而由引理 9.1，加入新边要么不改变各连通分支所对应的顶点集，要么使两个连通分支合并为一个，从而使连通分支数减少。对 $|E(G_2) - E(G_1)|$ 作归纳即得原题。 □

引理 9.4 对 G 的任意割集 $E' \subseteq E(G)$，任取 $e = (u, v) \in E'$，设 $G_1 \subseteq G - E'$ 是 $G - E'$ 中 u 所在的连通分支，则 $E' = (V(G_1), \overline{V(G_1)})$ 是一个断集。

证明: 记 $G' = G - E'$，$S = (V(G_1), \overline{V(G_1)})$。设 G_2 为 $G - E'$ 中 v 所在的连通分支。显然有 $G_1 \neq G_2$ (否则由引理 9.1 可知，在 G' 中加入 (u, v) 不会影响其连通分支数，从而与 E' 是割集矛盾)。下面证明，$E' = S$。

首先，显然有 $S \subseteq E'$。若不然，设 $(x, y) \in S$，但 $(x, y) \notin E'$，则，依照定义，有 $x \in G_1$，$y \notin G_1$，且 $(x, y) \in E(G')$。由于 $x \in G_1$ 且 x 与 y 在 G' 中连通，所以 y 也应在连通分支 G_1 中，