$\circ$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_2	φ_2	φ_4	φ_1	φ_3
φ_3	φ_3	φ_1	φ_4	φ_2
φ_4	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

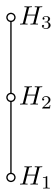
(2) 易于验证，$\mathrm{Aut}\,G$ 中共有 3 个子群：

$H_1 = \{\varphi_1\}$；

$H_2 = \{\varphi_1, \varphi_4\}$；

$H_3 = \mathrm{Aut}\,G$；

从而哈斯图为：



(3) 由于 $|S| < 5$，所以 $\langle S, R\rangle$ 是分配格，但因为 H_2 没有补元，所以不是有补格，从而也不是布尔格。(另证：反设 $\langle S, R\rangle$ 是有补格，则 $\langle S, R\rangle$ 是有补分配格，从而是布尔格。但有限阶布尔格都是 $2^k (k \in \mathbb{N})$ 阶的，这与 $|S| = 3$ 矛盾。所以 $\langle S, R\rangle$ 必定不是有补格)。

4.

证明： 首先证明 G 中无二阶元：若不然，不妨设 $a \in G$ 为二阶元，则 $\langle a\rangle = \{e, a\}$ 是 G 的子群，从而由 Lagrange 定理知，$2 = |\langle a\rangle| \mid |G|$。这与 $|G|$ 是奇数阶群矛盾。

令 $\mathscr{A} = \{\{x, y\} \mid x, y \in G \wedge xy = e\}$，则 $\mathscr{A}$ 是 G 的一个划分(因为每个元素均可逆，所以 $\cup\mathscr{A} = G$；又由逆元唯一性和 $(x^{-1})^{-1} = x$ 可知，$\forall A, B \in \mathscr{A}, A \cap B \neq \varnothing \to A = B$)。由于 G 中无二阶元，所以 $\forall A \in \mathscr{A}$，若 $A \neq \{e\}$，就必有 $|A| = 2$，从而总有 $\prod\limits_{x \in A} x = e$。由于 $\mathscr{A}$ 是 G 的划分，且 G 是 Abel 群，所以：

$$\prod_{x \in G} x = \prod_{A \in \mathscr{A}} \prod_{x \in A} x = \prod_{A \in \mathscr{A}} e = e.$$

□