2003 年计算机专业基础

三、

1. 条件 I 是条件 II 的充分必要条件。

证明： 充分性。

若存在 $A \subseteq X, B \subseteq Y$，使得 $R = A \times B$，则对任意 $x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$ 有

$$\begin{aligned}
& \langle x_1, y_1\rangle \in R \wedge \langle x_2, y_2\rangle \in R \\
\Longrightarrow\ & x_1 \in A \wedge y_2 \in B && (R = A \times B) \\
\Longrightarrow\ & \langle x_1, y_2\rangle \in R && (R = A \times B)
\end{aligned}$$

必要性。

取 $A = \operatorname{dom} R \subseteq X, B = \operatorname{ran} R \subseteq Y$，下面证明对任意 $x \in A, y \in B$ 有 $\langle x, y\rangle \in R$，从而有 $R = A \times B$。

$\forall x \in X, y \in Y$，

$$\begin{aligned}
& x \in A \wedge y \in B \\
\Longleftrightarrow\ & \exists w(\langle x, w\rangle \in R) \wedge \exists z(\langle z, y\rangle \in R) && (\operatorname{dom}, \operatorname{ran}\ \text{定义}) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists w \exists z(\langle x, w\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in R) && (\text{量词辖域扩张等值式}) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists w \exists z(\langle x, y\rangle \in R) && (\text{条件 I}) \\
\Longrightarrow\ & \langle x, y\rangle \in R && (\exists\text{消去})
\end{aligned}$$

□

2.

(1) 当且仅当 N 为大于 0 的偶数时，B_N 是欧拉图。

因为 B_N 是 N-正则图。当且仅当 N 为偶数时，B_N 中每个顶点都是偶数度的。

(2) 当且仅当 $N \geq 2$ 时，B_N 为哈密顿图。

用归纳法证明。直接验证可知 B_0, B_1 不是哈密顿图，B_2 是哈密顿图。对任意 $N \geq 2$，若 B_N 是哈密顿图，则可如下构造 B_{N+1} 上的哈密顿圈：先取 B_{N+1} 的一半(正好是一个 B_N)，寻找上面的一个哈密顿圈，从中删去任意一条边，成为哈密顿路，在 B_{N+1} 的另一半上以同样找一个哈密顿圈，删去与之对应的一条边。将两边的哈密顿路拼接成一个 B_{N+1} 上的哈密顿圈即可。

(3) 当且仅当 $N \leq 3$ 时，B_N 为可平面的。

易于验证，B_0, B_1, B_2, B_3 是可平面的。

注意到，由于 B_N 是二部图(这一点将在第 (4) 小题中证明)，因此不存在长度为 3 的圈，由公式 $m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-2)$ 知，若 B_N 为平面图则 $m \leq 2n - 4 < 2n = 4 \cdot 2^{N-1}$。另一方面，由图论基本定理知，$2m = N2^N$，$m = N2^{N-1}$。从而由 $N2^{N-1} = m < 4 \cdot 2^{N-1}$ 解得 $N < 4$。

(4) 对所有 $N \geq 1$，B_N 都是二部图。