图的着色(考计算题)

- 地图
  - ★ k-面着色:可用k种颜色对平面地图着色
  - ★ k-色地图：k-面着色,不可以k-1-面着色
  - 面色数$\chi^*(G)$
- 面色数$\chi^*(G)$
- 边色数$\chi'(G)$
- 五色定理
- k-(点,面,边)着色
  - 点着色
    - $\chi(G)=1 \Leftrightarrow$ G是零图
    - $\chi(K)=n$
    - $\chi(G)=2 \Leftrightarrow$ G是非零图二部图
      - 命题G:G2-着色⇔ G是二部图⇔ G无奇圈
    - 轮
      - $\chi(W_n)=\begin{cases}3 & n\text{是奇}\\4 & n\text{是偶}\end{cases}$
    - 轮
      - $\chi(W_n)=\begin{cases}2 & n\text{是奇}\\3 & n\text{是偶}\end{cases}$
    - 有色色数定理
      - ★ 定理12.5(Brooks) $\chi(G)\le\Delta(G)+1$
        证明: $\forall v\in V(G)$, $d_G(v)\le\Delta(G)$,对于图G的子图 $F_v=\{v\}\cup N(v)$, 将 F_v 中顶点着色全部需要 $\Delta(G)$ 种颜色, 所以至少需一种颜色可用来给v着色.
        petersen图为 3 色-着色
      - 点色数上界与最大度的关系
      - 例12.7 排课问题
        解:以点代表课程集,F集上每个集合代表课时段的一个子集,则:
        (1)每个子集是独立子集;
        (2)每个必修课不应出现在两个子集里;
        (3)若v1和v2不相邻且v1,v2, 则$d_{G\cup\{v_1,v_2\}}\le\Delta$, 则$d_{G\cup\{v_1,v_2\}}\le\Delta$, 已有$\cup_{i=1}^{\Delta+1}F_i$中,v1属于$F_{i_1}$,v2属于$F_{i_2}$,则$F_{i_1}\cup F_{i_2}$是一个独立子集,矛盾.
        12.7的解答
        解:令$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,$F=\{F_1,F_2,\ldots,F_k\}$,$F_i\cap F_j=\varnothing$,$\bigcup_{i=1}^{k}F_i=V$,
        $\forall v_i\in V$,$v_i\in F_{j_i}$,$1\le j_i\le k$,
        $\forall i\ne j$,$v_i\notin F_{j_i}\cup F_{j_j}$,
        $\Delta(G)=\max\{d_G(v_i)\mid v_i\in V\}$, 可推出:
        (1)+(2)⇒$\chi(G)\le\Delta+1$
        (3)⇒$\chi_{min}=\min\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ 有效算法?,其中k_i,是此种情况下此图中相邻节点的最大度+1,即:
        $k_i=\max\{d_G(v_j)\mid v_j\in N(v_i)\}+1$
        例12.7的解答
        (1)有已知条件得出下图。
        F={v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8}
        $\chi(G)=4$, 可推出下图。
        $\min\{\chi_{min}\}=\chi_{min}=4$ 需要最少多少课时时?
        例12.7(第,续)
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
      - 应用题(必考)
        - 课题题
          - 例6、例7课题,一般是要给予图来,即每节要时间的地点?课时时间上课,每个必修课?时间点是?,此外每一个时段最大值,使得每第一节课时间最多时间上的课程?
            解:令$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,$F=\{F_1,F_2,\ldots,F_k\}$,$F_i\cap F_j=\varnothing$,$\bigcup_{i=1}^{k}F_i=V$,
            $\forall v_i\in V$,$v_i\in F_{j_i}$,$1\le j_i\le k$,
            $\forall i\ne j$,$v_i\notin F_{j_i}\cup F_{j_j}$,
            $\Delta(G)=\max\{d_G(v_i)\mid v_i\in V\}$, 则有:
            $\chi_{min}=\min\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ 有效算法?,其中k_i,是此种情况下此图中相邻节点的最大度+1,即:
            $k_i=\max\{d_G(v_j)\mid v_j\in N(v_i)\}+1$
            例6、上课时,当课表安排时间相等,则是不相容?(一个学期?)。
          - 问题定义:每本此书,同等重,要求每门课,至少被要求一个课时?
            解:$\chi(G)=\min\{k\mid f(G,k)>0\}$
            $f(G,k)$是n次多项式(色多项式)
  - 边色数$\chi'(G)$
    - 例12.8 色多项式$f(G,k)$
      - $f(G,k)$=G的不同k-着色方案的总数
        - 递推公式:
          $f(G,k)=f(G\cup e,k)+f(G\cdot e,k)$, $e\notin E$
          $f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\cdot e,k)$, $e\in E$
          解:
          $f(G,k)=f(K_5,k)+3f(K_4,k)+f(K_3,k)$
          $=k^5+3k^4+k^3=k^5-7k^4+18k^3-20k^2+8k^1$.
          $\chi(G)=\min\{5,4,3\}=3$. $f(G,3)=6$.
        - 零图: $f(N_n,k)=k^n$
        - 完全图: $f(K_n,k)=k^n=k(k-1)\ldots(k-n+1)=n!C_k^n$
          - 推论: $f(G,k)=f(K_{n_1},k)+f(K_{n_2},k)+\ldots+f(K_{n_r},k)$,
            $\chi(G)=\min\{n_1,n_2,\ldots,n_r\}$
        - 树: $f(T,k)=k(k-1)^{n-1}$
        - 圈: $f(C_n,k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$
      - $\chi(G)=\min\{k\mid f(G,k)>0\}$
      - $f(G,k)$是n次多项式(色多项式)
- 点色数$\chi(G)$
- 五色定理
- 地图
  - ★ k-面着色:可用k种颜色对平面地图着色
  - ★ k-色地图：k-面着色,不可以k-1-面着色
  - 面色数$\chi^*(G)$
- 定理12.13: 地图G可k-面着色⇔ 对偶图G^*可k-着色.