第一章　集合

定理 1.1 空集是一切集合的子集.

推论 空集是惟一的.

定理 1.2 设 A 的元素个数 $|A|=n$ (n 为自然数), 则 $|\mathcal{P}(A)|=2^n$.

定理 1.3 (容斥原理) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个集合, 则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

定理 1.4 设 $\{A_k\}$ 为集合列, 则

$$(1)\quad \varliminf_{k\to\infty} A_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k; \qquad (2)\quad \varlimsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k; \qquad (3)\quad \varliminf_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

定理 1.5 设 $\{A_k\}$ 为集合列, B 为一集合, 则

$$(1)\quad B - \varlimsup_{k\to\infty} A_k = \varliminf_{k\to\infty}(B - A_k); \qquad (2)\quad B - \varliminf_{k\to\infty} A_k = \varlimsup_{k\to\infty}(B - A_k).$$

定理 1.6 设 $\{A_k\}$ 为一个集合列, 令 $E=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}_+} A_k$ 为全集, $B_k = {\sim}A_k, k=1,2,\cdots$, 则 $\{B_k\}$ 也是一个集合列, 且 $E = \varliminf\limits_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup\limits_{k\to\infty} B_k = \varlimsup\limits_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf\limits_{k\to\infty} B_k$.