(2) 当 (1) 不成立时，必有无限个 $\{A_k\}$ 中的集合不含 x，但由于 $x \in \varliminf\limits_{k\to\infty}(A_k \cup B_k)$，即，只有有限个k，使得 $x \notin (A_k \cup B_k)$，于是，必有无限个 k，使得 $x \in B_k$，即有 $x \in \varlimsup\limits_{k\to\infty} B_k$。

综合得：

$$\varliminf_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) \subseteq \varliminf_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

同理可证：

$$\varliminf_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf_{k\to\infty} B_k$$

∎

由引理 1.4 和教材定理 1.4(1) 立即有：

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

和

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varliminf_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

最后，只需证：

$$\varlimsup_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) = \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

即可完成本小题。

证明：先证：

$$\varlimsup_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

用反证法。由上极限定义可知，对任意 $x \in \varlimsup\limits_{k\to\infty}(A_k \cup B_k)$，必存在无限多个 k，使得 $x \in A_k \vee x \in B_k$。若 $x \notin \varlimsup\limits_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup\limits_{k\to\infty} B_k$，即 $x \notin \varlimsup\limits_{k\to\infty} A_k \wedge x \notin \varlimsup\limits_{k\to\infty} B_k$，则 $\{A_k\}$ 和 $\{B_k\}$ 中都至多只有有限个集合，使得 $x \in A_k \vee x \in B_k$。这与 $x \in \varlimsup\limits_{k\to\infty}(A_k \cup B_k)$ 矛盾。故有：

$$\varlimsup_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

再证：

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty}(A_k \cup B_k)$$

$\forall x$，

$$\begin{aligned}
& x \in \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cup \varlimsup_{k\to\infty} B_k \\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(n \in \mathbb{N}_+ \to (\exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k))) \vee \\
& \forall n(n \in \mathbb{N}_+ \to (\exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in B_k))) && \text{(集合并定义、上极限定义)} \\
\Longrightarrow\ & \forall n(n \in \mathbb{N}_+ \to (\exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k) \vee \\
& \qquad \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in B_k))) && \text{(一阶谓词推理定律)} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(n \in \mathbb{N}_+ \to \exists k((k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k) \vee \\
& \qquad (k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in B_k))) && \text{(量词分配等值式)} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall n(n \in \mathbb{N}_+ \to \exists k(k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge (x \in A_k \vee x \in B_k))) && \text{(命题逻辑分配律)} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \varlimsup_{k\to\infty}(A_k \cup B_k) && \text{(集合并定义、上极限定义)}
\end{aligned}$$