2.3

4) R^n 中变元的极限.

定义：设$\{P_m\}$为R^n中的点列，$P_0\in R^n$，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N$，当$m>N$时，有$\|P_m-P_0\|<\varepsilon$，则称点列$\{P_m\}$存在极限或收敛，极限是P_0. 记为$\lim\limits_{m\to\infty}P_m=P_0$ 或 $P_m\to P_0\ (m\to\infty)$

定理：点列$\{P_m\}\subset R^n$收敛于P_0 $\Longleftrightarrow$ 若记$P_m=(x_1^m,\cdots,x_n^m)$，$P_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，则$\lim\limits_{m\to\infty}x_i^m=x_i^0$　$i=1,2,\cdots,n$

注：$|x_i^m-x_i^0|\le\left(\sum\limits_{k=1}^n(x_k^m-x_k^0)^2\right)^{\frac12}=\|P_m-P_0\|$
$\le\sum\limits_{k=1}^m|x_k^m-x_k^0|$
$i=1,2,\cdots,n$

二、多元函数的极限与连续

1. 多元函数概念

圆柱体体积 $V=\pi r^2h$

定义：设D是平面点集，若对每个点$P(x,y)\in D$，变量z按一定法则总有确定的值和它对应，则称z是变量x,y的二元函数. 记$z=f(x,y)$　(或$z=f(P)$)

D：定义域，　x,y—自变量　　z—因变量

$\{z\mid z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$：值域

$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$　n元函数

$n\ge2$ 的n元函数统称为多元函数.

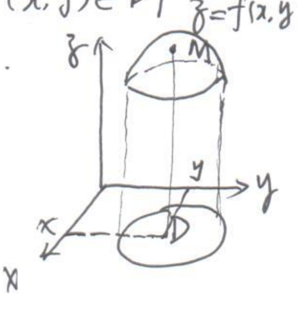
例：$u=\ln(x+y)$　　$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$

$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$　$z=f(x,y)$

二元函数的图形是一张曲面.

$z=ax+by+c$ 表示一张平面

$z=x^2+y^2$ 旋转抛物面.



二

2. 多元函数的极限

定义：设函数$f(x,y)$ [$f(P)=$] 的定义域为D，~~在开区域D内有定义~~，$P_0(x_0,y_0)$是D的内点或边界点，如果有常数A，若对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对满足$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$的一切点$P(x,y)\in D$，

都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$成立.

则称A为$f(x,y)$当$x\to x_0$，$y\to y_0$时的极限

记$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$

二元函数的极限叫二重极限.

注：① $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}f(x,y)=A$　② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=+\infty$

例1. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$

证：$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le|x^2+y^2|$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$，当$\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，

有$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le|x^2+y^2|<\delta^2=\varepsilon$

故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$.

例2. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证：设$y=kx$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$，由极限值的唯一性知，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

例3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\sin xy}{x}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to2}y$

$=2$.

例4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin xy}{x}$

不能按例3算法做!

$\because|\sin xy|\le|xy|$，$\therefore0\le\left|\frac{\sin xy}{x}\right|\le|y|$

又$\because\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|y|=0$　$\therefore$由夹逼准则得$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin xy}{x}=$

例5. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

当$x\to+\infty$，$y\to+\infty$时，$0\le(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\le\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$

而$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}\ \underline{\underline{t=x+y}}\ \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t}=0$

由夹逼准则得$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$