定理 4.18 设 $m, n, k \in \mathbb{N}$，则

(1) $m+(n+k)=(m+n)+k$;

(2) $m+n=n+m$;

(3) $m \cdot (n+k)=m \cdot n+m \cdot k$;

(4) $m \cdot (n \cdot k)=(m \cdot n) \cdot k$;

(5) $m \cdot n=n \cdot m$.

定理 4.19 $\Subset_{\mathbb{N}}$ $(\leq_{\mathbb{N}})$ 为 $\mathbb{N}$ 上的线序关系，$\in_{\mathbb{N}}$ $(<_{\mathbb{N}})$ 为 $\mathbb{N}$ 上的拟线序关系.

定理 4.20 设 $m, n, k \in \mathbb{N}$，则

(1) $m \in n \Leftrightarrow (m+k) \in (n+k)$ $(m<n \Leftrightarrow m+k<n+k)$;

(2) $m \in n \Leftrightarrow m \cdot k \in n \cdot k$ $(m<n \Leftrightarrow m \cdot k<n \cdot k), k \neq 0$.

定理 4.21 设 n, m, k 为自然数，

(1) 如果 $m+k=n+k$，则 $m=n$;

(2) 如果 $k \neq 0$，且 $m \cdot k=n \cdot k$，则 $m=n$.

定理 4.22 ($\mathbb{N}$ 上的良序定理) 设 A 为 $\mathbb{N}$ 的非空子集，则存在惟一的 $m \in A$，使得对于一切的 $n \in A$，有 $m \Subset n$ (这样的 m 称为 A 的最小元).

定理 4.23 ($\mathbb{N}$ 上的强归纳原则) 设 A 为 $\mathbb{N}$ 的一个子集，对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，如果小于 n 的元素都属于 A，就有 $n \in A$，则 $A=\mathbb{N}$.