第六章　序数*

6.1　若不要求 $\langle A, \prec_A\rangle, \langle B, \prec_B\rangle$ 为拟线序，则第 (1)、(2) 小题的答案都是否定的。举反例如下：

令 $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$，$\prec_A$ 为整除关系，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，$\prec_B$ 为小于关系。令 $f(1) = 1, f(2) = f(3) = 2, f(4) = 3, f(12) = 4$。

易于验证，$\langle A, \prec_A\rangle, \langle B, \prec_B\rangle$ 和 f 满足题目中的要求。但 $f(2) = f(3)$，故 f 不是单射。同时，$f(3) \prec_B f(4)$，但 $3 \not\prec_A 4$，因此 $f(x) \prec_B f(y) \not\Rightarrow x \prec_A y$。

若要求 $\langle A, \prec_A\rangle, \langle B, \prec_B\rangle$ 为拟线序，则 (1)、(2) 的答案都是肯定的。证明如下：

证明: (1)　反设 f 不是单射。则存在 $x, y \in A$，满足 $x \neq y \wedge f(x) = f(y)$。由于 $\langle A, \prec_A\rangle$ 是拟线序，故必有 $x \prec_A y$ 或 $y \prec_A x$。由题设，就有 $f(x) \prec_B f(y)$ 或 $f(y) \prec_B f(x)$。这与假设 $f(x) = f(y)$ 矛盾。故，f 必是单射。

(2)　反设存在 $x, y \in A$，使 $f(x) \prec_B f(y)$，但 $x \not\prec_A y$。由于 $\langle A, \prec_A\rangle$ 是拟线序，所以有 $x = y$ 或 $y \prec_A x$。若 $x = y$，则由 f 是函数可知，$f(x) = f(y)$，这与 $f(x) \prec_B f(y)$ 矛盾。若 $y \prec_A x$，则由题设知，$f(y) \prec_B f(x)$，这同样与前提 $f(x) \prec_B f(y)$ 矛盾。这就证明了 $\forall x, y \in A, x \prec_A y \Leftrightarrow f(x) \prec_B f(y)$。　□

6.2　由拟序关系定义和教材定理 2.15(2)、(5) 立即得证。

6.3

(1)

证明: 由全序定义知，对所有 $x, y \in A$，若 $x \neq y$，则 $\langle x, y\rangle$ 与 $\langle y, x\rangle$ 有且仅有一个属于 R。由于 $x \neq y$，故若 $\langle x, y\rangle$ 或 $\langle y, x\rangle$ 属于 R，则它们也属于 $R - I_A$。由组合数学结论知，这样的 x, y 有 $C_n^2 = n(n-1)/2$ 组。同时，由 $R - I_A$ 的定义知，$R - I_A$ 只有这 $n(n-1)/2$ 个元素。又因为 R 是全序，所以 $I_A \subseteq R$。从而由容斥原理有：$|R| = |I_A| + |R - I_A| - |I_A \cap (R - I_A)| = n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$。　□

(2)　由拟线序定义知，对所有 $x, y \in A$，若 $x \neq y$，则 $\langle x, y\rangle$ 与 $\langle y, x\rangle$ 有且仅有一个属于 R，又由于 $\forall x \in A, \langle x, x\rangle \notin R$，所以：$|R| = C_n^2 = n(n-1)/2$。

6.4　首先证明，良序集定义中的“$\langle A, \prec\rangle$ 为拟全序集”的条件可以弱化为“$\langle A, \prec\rangle$ 为拟序集”。

引理 6.1 *设 $\langle A, \prec\rangle$ 为一个拟序集，若对于 A 的任何非空子集 B 均有最小元，则 $\langle A, \prec\rangle$ 是拟全序集，从而是良序集。*

证明: 反设 $\langle A, \prec\rangle$ 不是拟全序，则存在 $x, y \in A$，使得 $x \neq y \wedge x \not\prec y \wedge y \not\prec x$。这时，取 $B = \{x, y\} \subseteq A$，B 为非空的。但由于 $x \not\prec y \wedge x \neq y$，所以 x 不是的最小元。同理，y 也不是最小元。从而 B 中无最小元，与题设矛盾。

因此 $\langle A, \prec\rangle$ 必是拟全序集。从而由良序定义知，$\langle A, \prec\rangle$ 是良序集。　□