2.5 关系的幂运算

定义 关系的n次幂(nth power): 设$R \subseteq A \times A$, $n \in N$, 则R的n次幂记作R^n， 其中

(1) $R^0 = I_A$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$, ($n \geq 1$).

$R^n = R \circ R \circ \ldots \circ R$ 表示n个R的合成

EXA. 设A={1,2,3,4},$R \subseteq A \times A$,

R={<1,1>,<2,1>,<3,2>,<4,3>},求R^n,n=2,3,4,…

解 R^2={<1,1>,<2,1>,<3,1>,<4,2>},

R^3={<1,1>,<2,1>,<3,1>,<4,1>}, $R^4=R^3$,

$R^5=R^4 \circ R=R^3 \circ R=R^4=R^3$

幂的求法

- 用集合表示关系R时， R^n 就是n个R复合 .
- 用矩阵表示R时: n个矩阵相乘, 其中相加采用逻辑加.
- 用关系图G表示R时：R^n的关系图G'：

G'的顶点集与G相同.考察G的每个顶点x_i,如果在G中从x_i出发经过n步长的路径到达顶点x_j,则在G'中加一条从x_i到x_j的边.找到所有这样的边，就得到图G'.其中

n步长的路径是指该路径中包含n条首尾相连的边。

例1

例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,

求R,R^2,R^3,R^4, 分别用矩阵和关系图表示.

解

$$M(\mathrm{R})=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

例1 续

$$M(R^3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

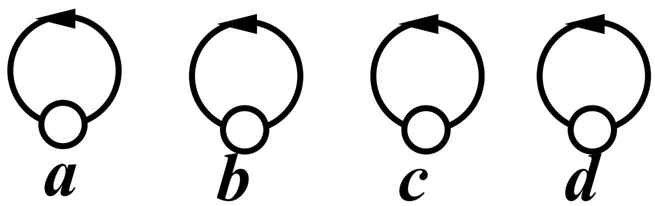
$$M(R^4)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M(R^{2k})=M(R^2), k\geq 1, k\in N$

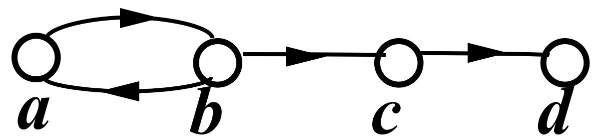
$M(R^{2k+1})=M(R^1), k\in N$

例1（续）

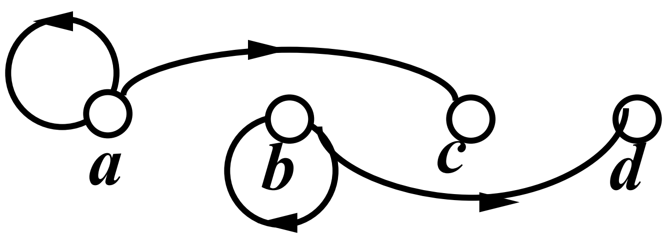
$R^0, R^1, R^2, R^3,\ldots$的关系图如下图所示



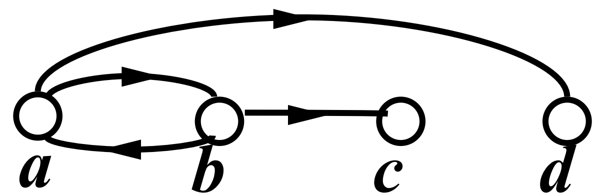
R^0



$R^1=R$



$R^2=R^4$



$R^3=R^5$

关系幂运算服从指数律

定理2.17 设$R\subseteq A\times A$, $m,n\in \mathrm{N}$,则下面等式成立:

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

思考:在什么条件下等式$I_A=R\circ R^{-1}=R^{-1}\circ R$ 成立?

$R^{-n} = (R^{-1})^n = (R^n)^{-1}$.

例如: $(R^2)^{-1}=(R\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ R^{-1}=(R^{-1})^2$

$(R^3)^{-1}=(R^2\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ(R^{-2})=R^{-1}\circ(R^{-1})^2=(R^{-1})^3$

定理17 (1)的证明

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;

证明: (1) 给定m, 对n归纳.

n=0时, $R^m \circ R^n = R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$.

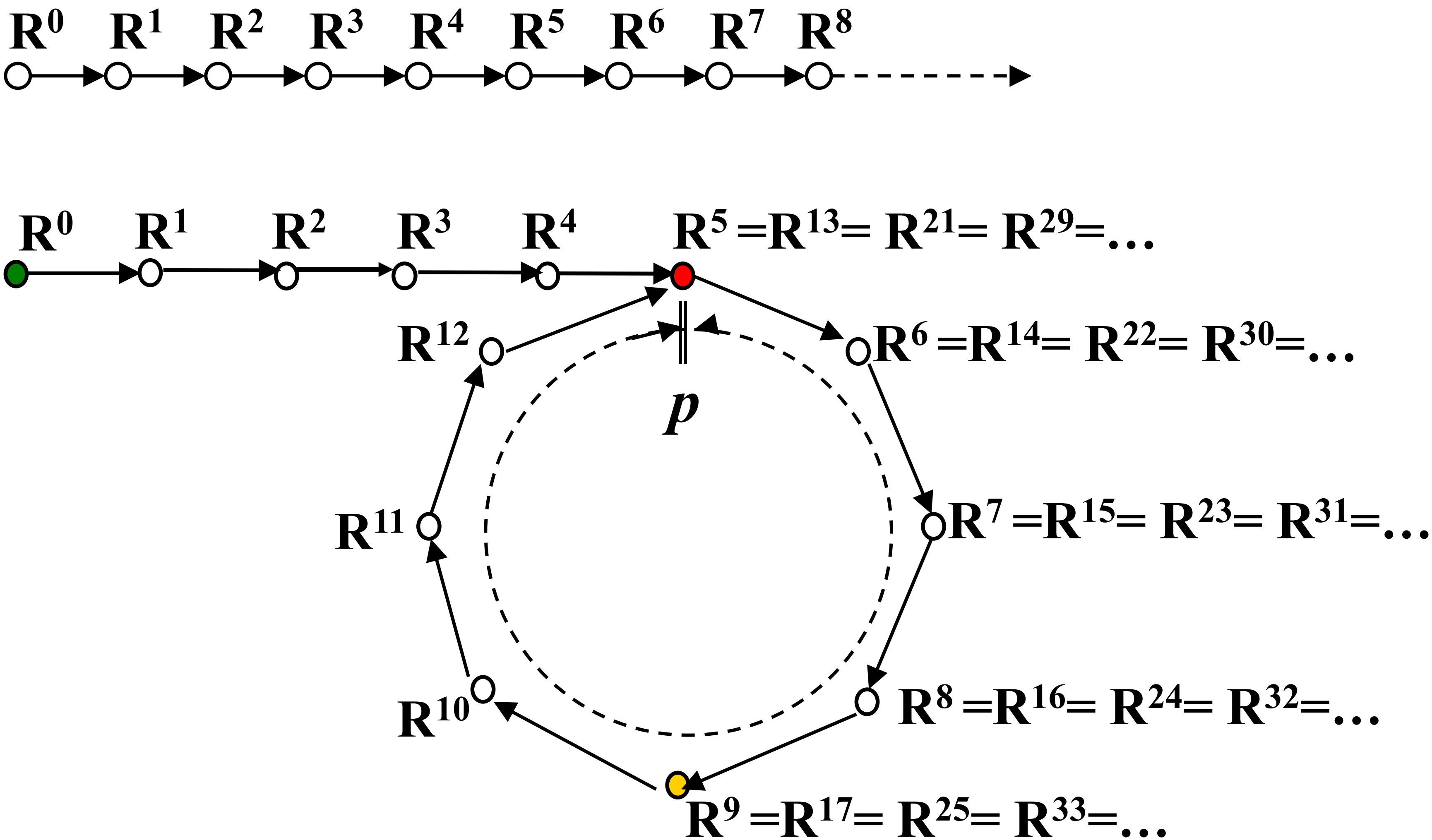
假设$R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则

$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R^1) = (R^m \circ R^n) \circ R^1 = R^{m+n} \circ R =$

$R^{(m+n)+1} = R^{m+(n+1)}$.

(2) 同样对n归纳.

$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$是否互不相等?



定理2.16 指数运算的周期性

定理16: 设$|A|=n$, $R \subseteq A\times A$, 则$\exists\, s, t\in N$, $0 \le s < t \le 2^{n^2}$，使得 $R^s = R^t$.

证明: $P(A\times A)$对幂运算是封闭的, 即

$\forall\, R, R\in P(A\times A) \Rightarrow R^k\in P(A\times A), (k\in N)$.

$|P(A\times A)| = 2^{n^2}$, 根据鸽巢原理，在$R^0,R^1,R^2,\ldots, R^{2^{n^2}}$

这$2^{n^2}+1$ 个集合中, 必有两个是相同的.

所以$\exists\, s,t\in N$, 并且 $0 \le s < t \le 2^{n^2}$，使得$R^s = R^t$.

鸽巢原理(pigeonhole principle)

- **鸽巢原理**(pigeonhole principle): 若把n+1只鸽子装进n只鸽巢, 则至少有一只鸽巢装2只以上的鸽子.
- 又名**抽屉原则**(Dirichlet drawer principle),

  (Peter Gustav Lejeune Dirichlet,1805~1859)
- 推广形式: 若把 m 件物品装进k只抽屉, 则至少有一只抽屉装$\lceil m/k \rceil$件以上的物品.

定理2.18

定理18: 设$R \subseteq A \times A$, 若$\exists s,t \in N$ $(s<t)$,使得

$R^s = R^t$, 则

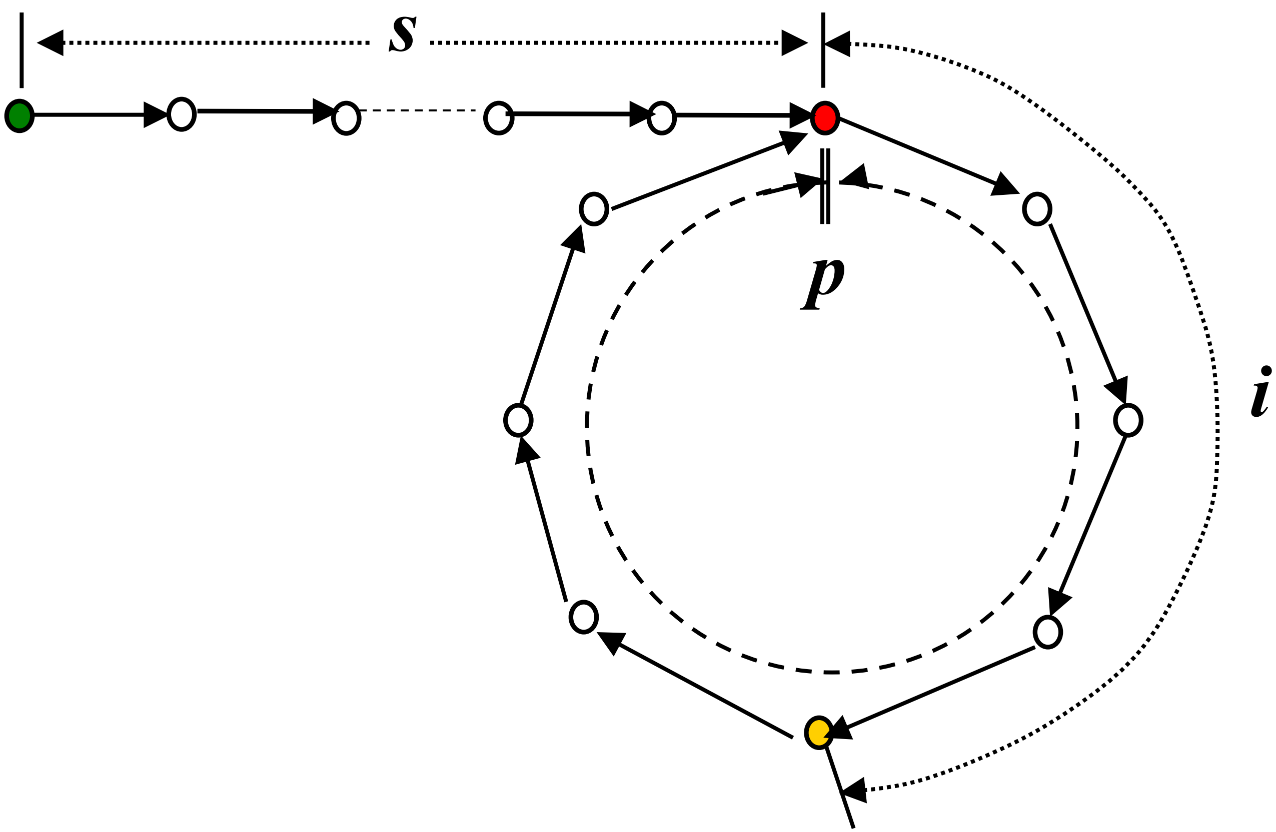
(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$;

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i \in \mathrm{N}$, $p=t-s$;

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q \in \mathrm{N}$, $R^q \in \mathrm{S}$.

定理18的图示

泵(pumping): $R^{s+kp+i} = R^{s+i}\ \ (p=t\text{-}s)$



定理18 的证明(1)(3)

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$;

证明: (1) $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$;

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i \in N$, $p=t-s$;

证明: 对k归纳。

若$k=0$，则有 $R^{s+0 \times p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中$p = t-s$，则

$$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i} \circ R^p = R^{s+i} \circ R^p = R^{s+p+i}$$

$$= R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

由归纳法可知命题得证。

定理18的证明(2)

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q\in\mathrm{N}$, $R^q\in \mathrm{S}$.

证明 若$q>t-1\geq s$, 则令$q=s+kp+i$,

其中$k,i\in\mathrm{N}$, $p=t-s$,

显然$i<p$，即$s+i<t$;

于是$R^q=R^{s+kp+i}=R^{s+i}\in S$

例2 幂指数的化简

方法: 利用定理16, 定理18.

例2: 设$R \subseteq A \times A$, 化简R^{100}的指数. 已知

(1) $R^7 = R^{15}$; (2) $R^3 = R^5$; (3) $R^1 = R^3$.

解:

(1) $R^{100}=R^{7+11\times 8+5}=R^{7+5}=R^{12}\in\{R^0,R^1,\ldots,R^{14}\}$;

(2) $\mathrm{R}^{100}=\mathrm{R}^{3+48\times 2+1}=\mathrm{R}^{3+1}=\mathrm{R}^4\in\{R^0,R^1,\ldots,R^4\}$;

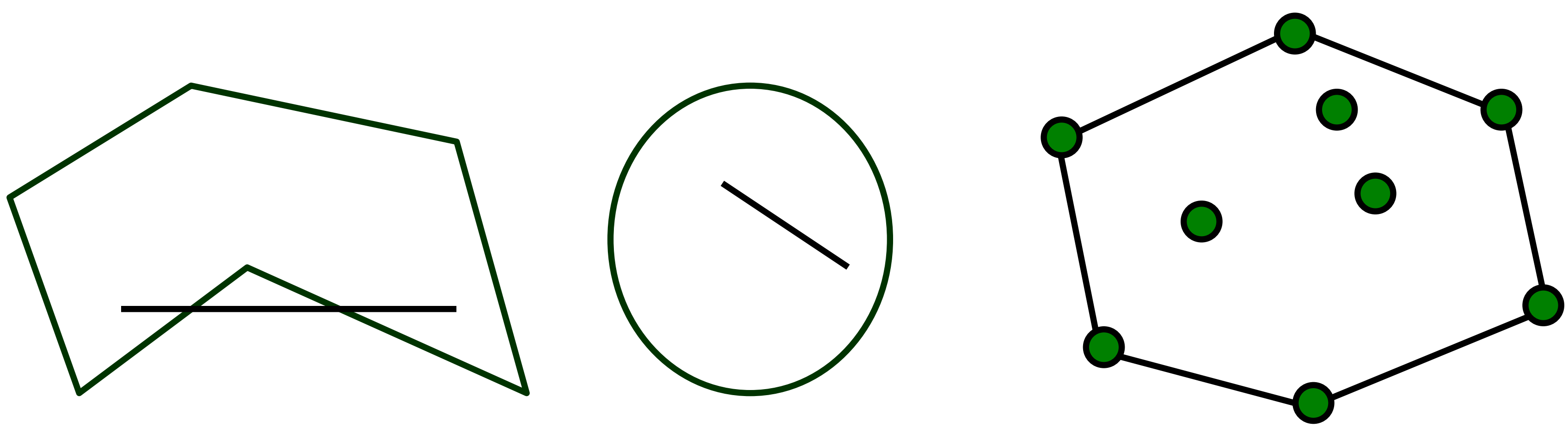
(3) $R^{100}=R^{1+49\times 2+1}=R^{1+1}=R^2\in\{R^0,R^1,R^2\}$.

2.6 关系的闭包

- 自反闭包$r(R)$
- 对称闭包$s(R)$
- 传递闭包$t(R)$
- 闭包的性质, 求法, 相互关系

什么是闭包

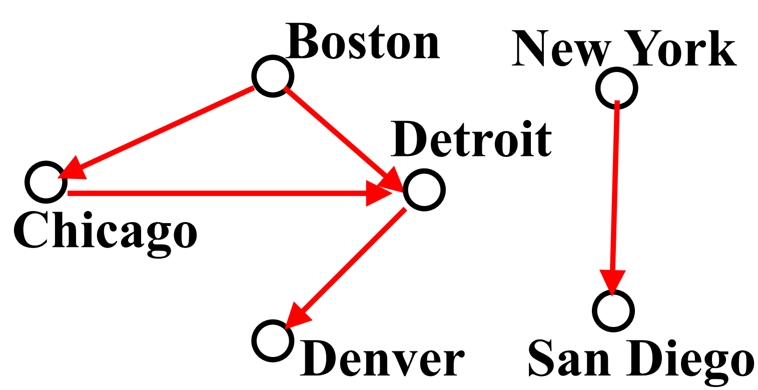
- 闭包(closure): R是A上的关系，最小的包含R具有性质P的关系S
- “最小”：任何包含同样对象, 具有同样性质的集合, 都包含这个闭包集合.
- 例: (平面上点的凸包)



关系的闭包运算

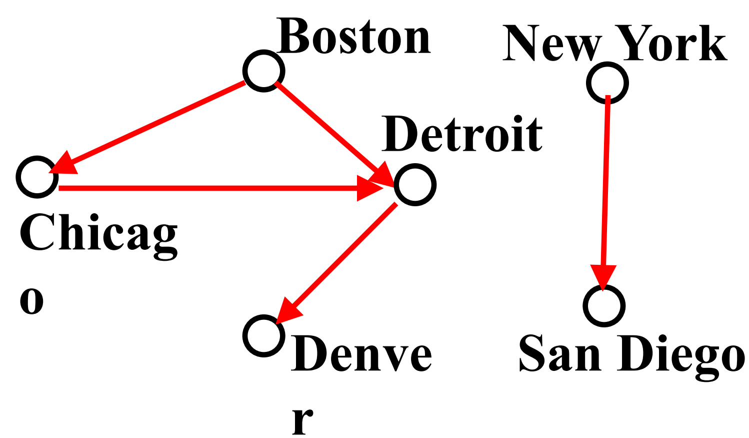
一个计算机网络, 在Boston, Chicago, Denver, Detroit, New York和San Diego有数据中心. 从Boston到Chicago, 从Boston到 Detroit, 从Chicago到Detroit, 从Detroit到Denver, 从New York到San Diego有单向电话线路直接相连。我们如何判断从一个数据中心到另一个数据中心之间存在连接呢？（可能是非直接的，由一条或多条电话线路组成）

定义关系R: xRy 当且仅当 x与y之间有电话线路直接相连。



由于不是所有的连接都是直接的，比如从Boston到Denver，途经Detroit。所以关系R不能直接回答“*x*到*y*是否有连接”的问题。从关系性质来看，关系R不是传递的，所以它不能包含所有能被连接的结点对。

在本节中，我们将寻找所有彼此有连接的元素对。通过构造一个包含R的传递关系S，使S是每个包含R的传递关系的子集，即S是包含R的最小的传递关系。



自反 / 对称 / 传递闭包(reflexive / symmetric / transitive closure)

定义: 设$A\neq\varnothing$,$R\subseteq A\times A$,R的自反闭包（对称闭包、传递闭包）R′满足如下条件:

(1) R'是自反的（对称的、传递的);

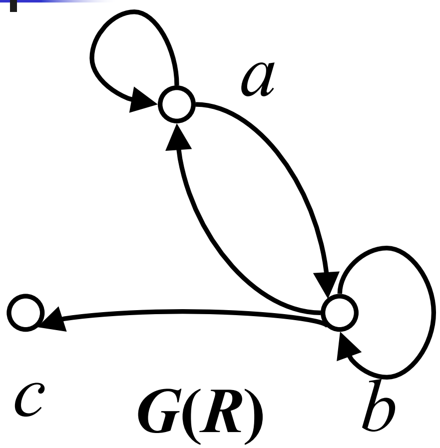
(2) $R\subseteq R'$;

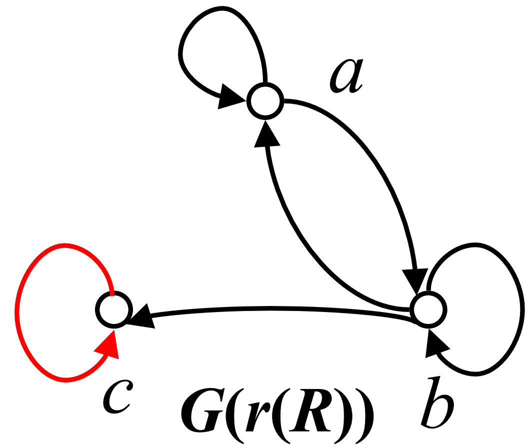
(3) $\forall S((R\subseteq S \wedge S\text{自反}) \rightarrow R'\subseteq S)$.

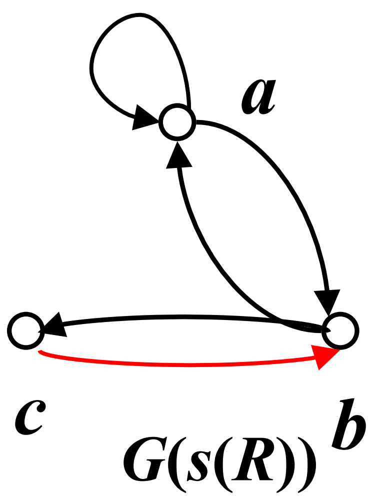
R的闭包是最小的包含关系R具有性质P的关系

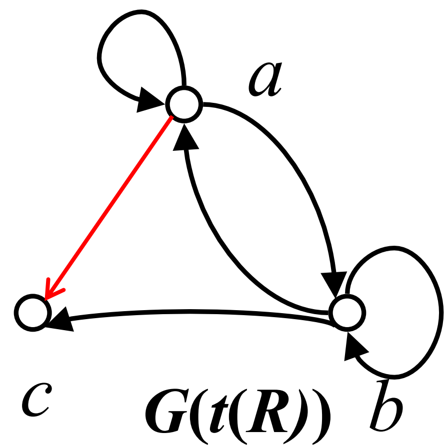
自反闭包,对称闭包,传递闭包分别记为$r(R)$,$s(R)$, $t(R)$

例3 求$\{a,b,c\}$上关系R的闭包









例4 求关系R的闭包

设集合$A=\{0,1,2,3\}$,$R\subseteq A\times A$,

$R=\{<0,1>,<1,1>,<1,2>,<2,0>,<2,2>,<3,0>\}$,求$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

解 $r(R)=R\cup\{<0,0>,<3,3>\}$

$s(R)=R\cup\{<1,0>,<2,1>,<0,2>,<0,3>\}$

$t(R)=R\cup\{<0,2>,<1,0>,<2,1>,<3,1>\}\cup\{<0,0>,<3,2>\}$

定理2.19

定理19: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反$\Leftrightarrow r(R) = R$;

(2) R对称$\Leftrightarrow s(R) = R$;

(3) R传递$\Leftrightarrow t(R) = R$;

证明: (1) $R \subseteq R \wedge R$自反$\Rightarrow r(R) \subseteq R$

又$R \subseteq r(R)$, $\therefore r(R) = R$.

(2)(3) 完全类似.

定理20(r,s,t对子集的保持性)

定理20: 设$R_1 \subseteq R_2$, $R_1 \subseteq A \times A$, $R_2 \subseteq A \times A$, 且$A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$;

证明: (1) $R_1 \subseteq R_2$, $R_2 \subseteq r(R_2)$ $\therefore R_1 \subseteq r(R_2)$

又$\because r(R_2)$是自反的,即$r(R_2)$是包含R_1的自反关系

$\therefore r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2)(3) 类似可证.

定理2.21($r(R)$,$s(R)$,$t(R)$对并的分配性)

定理21: 设$R_1,R_2 \subseteq A\times A$ 且$A\neq\varnothing$, 则

$$(1)\ r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2);$$

$$(2)\ s(R_1\cup R_2) = s(R_1)\cup s(R_2);$$

$$(3)\ t(R_1\cup R_2) \supseteq t(R_1)\cup t(R_2).$$

证明: (1) $\because R_1\subseteq R_1\cup R_2$, $R_2\subseteq R_1\cup R_2$,由定理2.20得

$\therefore r(R_1)\subseteq r(R_1\cup R_2)$, $r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$

$\therefore r(R_1\cup R_2)\supseteq r(R_1)\cup r(R_2)$

$\because R_1\subseteq r(R_1)$,$R_2\subseteq r(R_2)$, $\therefore R_1\cup R_2\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$

又$\because r(R_1)\cup r(R_2)$是自反的, $\therefore$由自反闭包的定义得

$r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$,$\therefore$ $r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$

(2)同理可证.

定理2.21 证明(3)

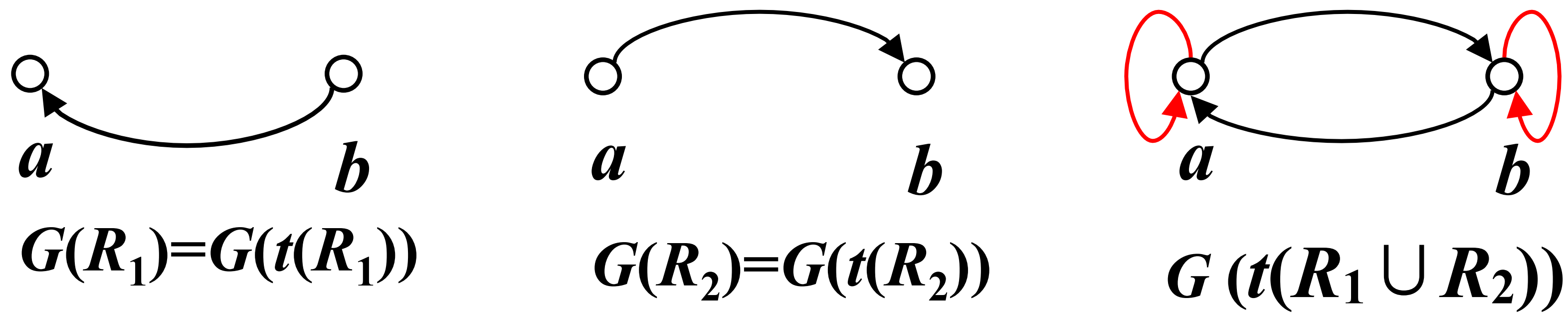
(3) $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.

证明: $\because R_1 \subseteq R_1 \cup R_2,\ R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$,由定理2.20得

$\therefore t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2),\ t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

所以 $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.

反例: $t(R_1 \cup R_2) \supset t(R_1) \cup t(R_2)$.



如何求闭包?

问题:

(1) $r(R) = R \cup$?

(2) $s(R) = R \cup$?

(3) $t(R) = R \cup$?

定理2.22~24 闭包的求法

定理22~24: 设$R \subseteq A \times A$ 且$A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$;

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

对比: R自反$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

R对称$\Leftrightarrow R = R^{-1}$

R传递$\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

定理2.22的证明

定理2.22: 设$R\subseteq A\times A$ 且$A\neq\varnothing$, 则$r(R)=R\cup I_A$;

证明: $I_A\subseteq R\cup I_A$,显然$R\cup I_A$是自反的,

所以$r(R\cup I_A)=R\cup I_A$

$R\subseteq R\cup I_A\Rightarrow r(R)\subseteq r(R\cup I_A)\Rightarrow r(R)\subseteq R\cup I_A$

$R\subseteq r(R)\wedge r(R)$是自反的

$\Rightarrow R\subseteq r(R)\wedge I_A\subseteq r(R)$

$\Rightarrow R\cup I_A\subseteq r(R)$;

$\therefore r(R)=R\cup I_A$.

定理2.23的证明

定理2.23: 设$R \subseteq A \times A$ 且$A \neq \varnothing$, 则

$$s(R) = R \cup R^{-1};$$

证明: $(R \cup R^{-1})^{-1} = R \cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow R \cup R^{-1}$对称$\Leftrightarrow s(R \cup R^{-1}) = R \cup R^{-1}$

$R \subseteq R \cup R^{-1} \Rightarrow s(R) \subseteq s(R \cup R^{-1}) \Rightarrow s(R) \subseteq R \cup R^{-1}$

$R \subseteq s(R) \land s(R)$对称

$\Rightarrow R \subseteq s(R) \land R^{-1} \subseteq s(R) \Rightarrow R \cup R^{-1} \subseteq s(R)$

$\therefore s(R) = R \cup R^{-1}$.

有关传递闭包

$r(R)$, $s(R)$都是通过在R上添加有序对得到，那么$t(R)$是否也可以通过这种方式得到呢？

例：$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,3>,<1,4>,<2,1>,<3,2>\}$,

添加$<1,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>$后，

$R'=\{<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,4>,<3,2>, <3,1>\}$

R'仍然不是传递关系,如R'含有$<1,2>,<2,1>$, 但是不含$<1,1>$.

所以，寻找$t(R)$更加复杂。需要通过添加新的有序对，并不断重复这个步骤，直至不再需要新的有序对。

定理2.24

定理2.24: 设$R \subseteq A \times A$ 且$A \neq \varnothing$, 则

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$$

证明: 先证明$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$是传递的

$(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)^2 = R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

$\Leftrightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$传递

$R \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \Rightarrow t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$

再证明$R^n \subseteq t(R)$（证明过程自学）

$R \subseteq t(R) \land t(R)$传递

$\Rightarrow R \subseteq t(R) \land R^2 \subseteq t(R) \land R^3 \subseteq t(R) \land \ldots$

$\Rightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$

$\therefore t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots.$

定理24的推论

推论: 设$R \subseteq A \times A$ 且$0<|A|<\infty$, 则$\exists k \in \mathrm{N}$, 使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k;$$

证明: 由定理2.16知$\exists s,t \in \mathrm{N}$, 使得$R^s = R^t$.

由定理2.18知$R,R^2,R^3,\ldots \in \{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$.

取$k = t-1$, 由定理2.24知

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

$$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k$$

$$\therefore\ t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k$$

传递闭包的定理

定理 设$R \subseteq A \times A$ 且$|A|=n$, 则$\exists k \le n$, 使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k;$$

证明 任取$<x,y>$

$<x,y> \in t(R) \Rightarrow \exists p(p>0 \wedge <x,y> \in R^p)$,

即存在序列$e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$, 有$xRe_1, e_1Re_2, \ldots, e_{p-1}Ry$。

假设满足上述条件的最小p大于n,则在上述序列中必有$0 \le i \le q \le p$，使$e_i = e_q$,

传递闭包的定理（续）

因此序列就成为

$$\underbrace{x\,Re_1, e_1\,Re_2, \cdots, e_{i-1}\,Re_i}_{i个}, \underbrace{e_i\,Re_{q+1}, \cdots, e_{p-1}Ry}_{(p-q)个}$$

这表明$<x,y>\in R^k$,其中$k=i+p-q=p-(q-i)<p$,这与p是最小的假设矛盾,故$p>n$不成立.

说明：如果$x_i\,t(R)\,x_j$成立,则在关系图中存在从x_i到x_j的最短路经, 路径长度不超过n.

例5

例5 设$A=\{a,b,c\}$，R是A上的二元关系，

$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$，求$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 。

解:

$r(R)=R\cup I_A=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<b,a>,<c,b>,<a,c>\}$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3$

$= R\cup\{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}\cup\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

$=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<a,c>,<b,a>,<c,b>,$

$<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

例5 利用矩阵求解

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad M(r(R))=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix},$$

$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

例5 利用矩阵求解 续1

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\mathrm{M(R)}$$

例5 利用矩阵求解 续2

继续这个运算有：$R=R^4=\ldots=R^{3n+1}$

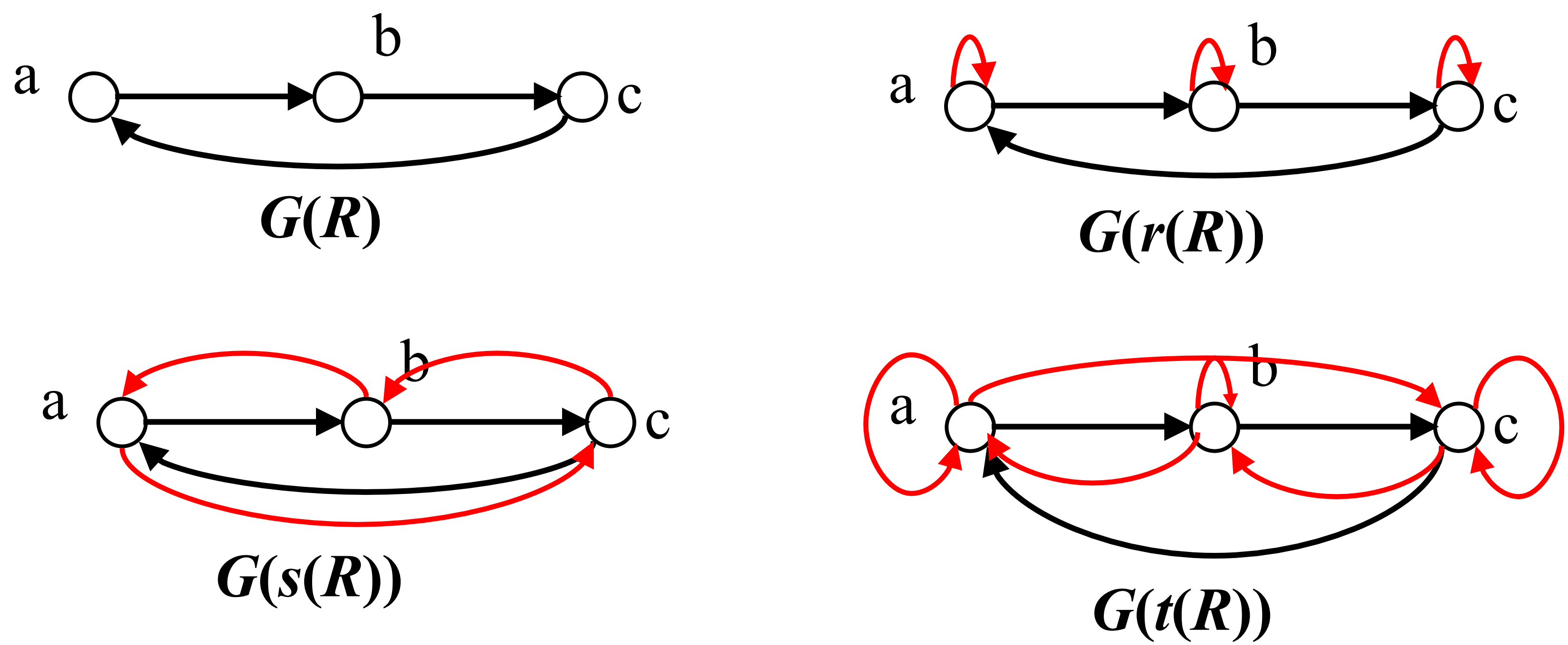
$R^2=R^5=\ldots=R^{3n+2}$

$R^3=R^6=\ldots=R^{3n+3}$ $(n=1,2,\ldots)$

$$\mathrm{M(t(R))}=\mathrm{M}(R)\vee\mathrm{M(R^2)}\vee\mathrm{M(R^3)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

例5 使用关系图求解

$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.



求解传递闭包的算法

- 直接计算 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$
- Algorithm 1 A Procedure for Computing t(R).

Procedure Transitive closure (M_R: zero-one $n \times n$ matrix)

$A := M_R$

$B := A$

For i=2 to n

$A := A \odot M_R$

$B := B \vee A$

End

- 复杂度分析：

共 $(n-1)n^2(2n-1) + (n-1)n^2 = 2n^3(n-1)$位运算, 为$O(n^4)$位运算.

若n是大数,则计算量太大.

Warshall算法

路经$a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b$ 的内部结点为 $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

R是定义在n元集上的关系，设 $v_1, v_2, \ldots, v_n$是这n个元素的任意排列.

- Warshall算法构造一系列的0-1矩阵, $W_0, W_1, \ldots, W_n$, 其中$W_0=M_R$, $W_k=[w_{ij}^{(k)}]$, $w_{ij}^{(k)}=1$, 当从v_i到 v_j存在路,且该路的内部结点都在集合$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$中, 否则, $w_{ij}^{(k)}=0$.

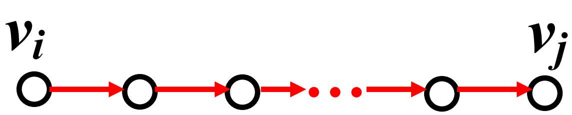
$W_n=M_{R^*}=M_{t(R)}$, M_{R^*}的(i, j)位置为1,当且仅当从v_i到 v_j存在路,且该路的内部结点都在 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$中.

Warshall算法的基本思想

基本思想

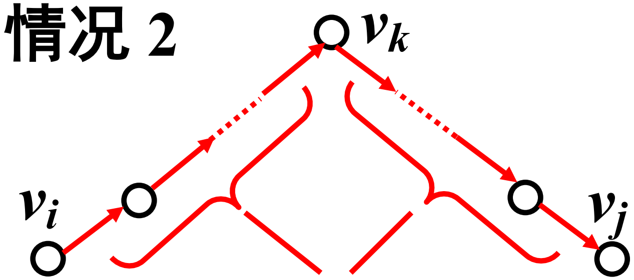
$$w_{ij}^{(k)}=w_{ij}^{(k-1)} \vee (w_{ik}^{(k-1)} \wedge w_{kj}^{(k-1)})$$

情况 1



内部结点都在$\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$

情况 2



内部结点都在$\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$

Warshall算法描述1

Algorithm2 Warshall Algorithm

Procedure Warshall (M_{R}: zero-one n×n matrix)

$W := M_R$

for k:=1 to n

for i=1 to n

for j:=1 to n

$w_{ij}^{(k)} = w_{ij}^{(k-1)} \vee (w_{ik}^{(k-1)} \wedge w_{kj}^{(k-1)})$

end

end

end {$W=[w_{ij}]$ is M_{R^*}}

Warshall 算法计算传递闭包用需要 $2n^3$ 位运算。

Warshall算法描述2

Warshall 算法的等价描述

(1) 置新矩阵$A:=M$;

(2) 置$k:=1$

(3) 对所有i, 如果$A[i, k]=1$,则对 $j=1,2,\ldots,n$,

$$A[i, j]:=A[i, j]+A[k, j];$$

(4) $k=k+1$;

(5) 如果$k<=n$, 则转第三步, 否则停止.

例6 使用Warshall算法求$t(R)$

例6

已知 $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 $t(R)$

例6（续）

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k=1$时，第1列中非零元$A[1,1]=1$，将第1行加到第1行上,得到M_2.

例6（续）

$x_1R^{(2)}x_2 \wedge x_2R^{(2)}x_4 \Rightarrow x_1R^{(3)}x_4$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k=2$时,第2列中的非零元$A[1,2]=1$, $A[4,2]=1$,将第2行分别加到第1行、第4行上,得到M_3.

例6（续）

$$M_3 = M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k=3时,第3列中没有非零的元素,M_4=M_3

k=4时第4列中$A[1,4]=A[2,4]=A[4,4]=1$,把第4行分别加到第1、2、4行上,得到M_5

例6（续）

$$M_5=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad M_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

k=5时, A[3,5]＝1,把第5行加到第3行上,由于第5行中没有非零的元素,M_6=M_5

k＝6, 7时,由于第6、7列中没有非零的元素,所以 M_7=M_8=M_5

闭包运算是否保持关系原有性质?

- **问题:**

(1) R自反$\Rightarrow s(R), t(R)$自反?

(2) R对称$\Rightarrow r(R), t(R)$对称?

(3) R传递$\Rightarrow s(R), r(R)$传递?

定理2.25

- **定理2.25:** 设$R\subseteq A\times A$且$A\neq\varnothing$,则

(1) R自反$\Rightarrow s(R)$和$t(R)$自反;

(2) R对称$\Rightarrow r(R)$和$t(R)$对称;

(3) R传递$\Rightarrow r(R)$传递;

- **证明:**

(1) $I_A\subseteq R$, $R\subseteq R\cup R^{-1}$, $R\cup R^{-1}=s(R)\Rightarrow I_A\subseteq s(R)$

$\therefore s(R)$自反.

$I_A\cup t(R)=I_A\cup(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)=(I_A\cup R)\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots=t(R)\Rightarrow I_A\subseteq t(R)$

$\therefore t(R)$自反.

定理2.25 证明(2)

(2) R对称$\Rightarrow r(R)$和$t(R)$对称;

证明:

$r(R)^{-1}=(I_A\cup R)^{-1}=I_A^{-1}\cup R^{-1}$

$=I_A\cup R^{-1}=I_A\cup R=r(R)$ $\therefore$ $r(R)$对称.

$t(R)^{-1}=(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^{-1}$

$=R^{-1}\cup(R^2)^{-1}\cup(R^3)^{-1}\cup\ldots$

$=R^{-1}\cup(R^{-1})^2\cup(R^{-1})^3\cup\ldots$ $\quad$ ($(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$)

$=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots=t(R)$, $\therefore$ $t(R)$对称.

定理2.25 证明(3)

(3) R传递$\Rightarrow r(R)$传递;

证明: $r(R)\circ r(R) = (I_A \cup R)\circ(I_A \cup R)$

$= (I_A\circ I_A)\cup(I_A\circ R)\cup(R\circ I_A)\cup(R\circ R)$

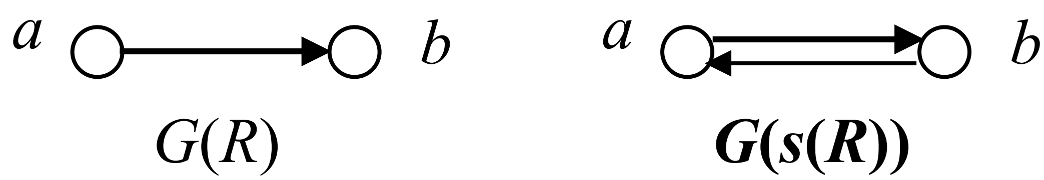
$\subseteq I_A \cup R \cup R \cup R$

$= I_A \cup R = r(R)$

$\therefore r(R)$传递

若R是传递的,$s(R)$不一定是传递的

反例: R传递, 但是$s(R)$非传递.



总结： 闭包运算保持下列关系性质.

	自反性	对称性	传递性
$r(R)$	√(定义)	√(定理25(2))	√(定理25(3))
$s(R)$	√(定理25(1))	√(定义)	×(反例)
$t(R)$	√(定理25(1))	√(定理25(2))	√ (定义)

闭包运算是否可以交换顺序?

问题:

(1) $rs(R) = sr(R)$?

(2) $rt(R) = tr(R)$?

(3) $st(R) = ts(R)$?

说明: $rs(R) = r(s(R))$

定理2.26

定理26: 设$R \subseteq A \times A$ 且$A \neq \varnothing$, 则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$;(s(R)不能保持R的传递性)

定理2.26 证明(1)

(1) $rs(R) = sr(R)$;

证明: $rs(R) = r(s(R)) = r(R \cup R^{-1})$

$= I_A \cup (R \cup R^{-1}) = (I_A \cup R) \cup (I_A^{-1} \cup R^{-1})$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^{-1} = r(R) \cup r(R)^{-1}$

$= s(r(R)) = sr(R)$.

$\therefore\ rs(R) = sr(R)$.

定理2.26 证明(2)

(2) $rt(R) = tr(R)$;

证明:

$rt(R) = r(t(R)) = r(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)$

$= I_A \cup (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R \cup R^2) \cup (I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3) \cup \ldots$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^2 \cup (I_A \cup R)^3 \cup \ldots$

$= r(R) \cup r(R)^2 \cup r(R)^3 \cup \ldots = t(r(R))$.

$\therefore rt(R) = tr(R)$.

定理2.26 证明(3)

(3) st(R) $\subseteq$ ts(R);

证明:

$st(R) \subseteq st(s(R))$

$st(s(R)) = sts(R) = s(ts(R))$ ($ts(R)$对称, 定理2.25(2))

$= ts(R)$

$\therefore st(R) \subseteq ts(R)$

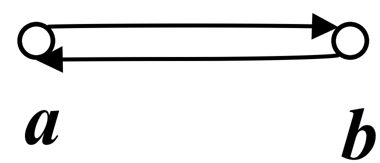
定理2.26 (3)的反例

(3) st(R) = ts(R) ?

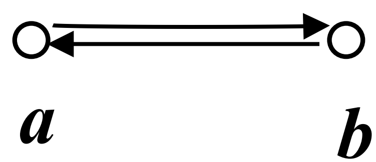
反例: $st(R) \subset ts(R)$

G(R)

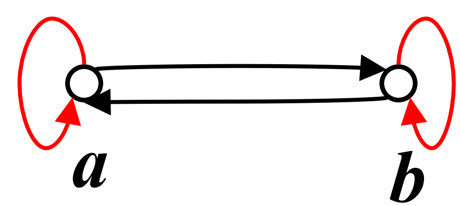
G(t(R))



G (s(t(R)))



G(s(R))



G (t(s(R)))

总结

- 能使用关系的三种表示方法求其幂
- 能使用关系的三种表示方法求闭包

- 作业：p55: 28,29,30,31