第18章 环和域

中国海洋大学 计算机系

Exercise 4

证：易见*运算在Z上是封闭的；

$a,b,c\in Z$有$a*b=b*a$, 所以*满足交换律；

$(a*b)*c=a+b+c-2=a*(b*c)$；所以*满足结合律；

1为*运算的单位元；2-a为a关于*运算的逆元；

因此<Z,*>构成Abel群。

易见°运算在Z上是封闭的；

$\forall a,b,c\in Z$, $(a°b)°c=a+b+c-ab-ac-bc+abc=a°(b°c)$,

所以°运算满足结合律,所以<Z, °>是半群.

$a°b=b°a$, 所以°满足交换律；0是°运算的单位；

$a,b,c\in Z$, $a°(b*c)=2a+b+c-1-ab-ac=(a°b)*(a°c)$，

由于°运算可交换，故°对*运算满足左、右分配律。

综合上述，<Z,*, °>是一个含幺环。

Exercise 5

证 (2) $\forall$ a$\in$R, $(a+a)^2$=a+a$\Rightarrow$a^2+a^2+a^2+a^2

=a+a+a+a=a+a$\Rightarrow$a+a=0 (加法消去律)

(1) $\forall$a,b$\in$R, (a+b)^2=a+b$\Rightarrow$a^2+ab+ba+b^2

=a+b+ab+ba=a+b$\Rightarrow$ab+ba=0

由(2)知ab+ab=0,所以ab+ba=ab+ab,由消去律知

ab=ba.

(3) |R|>2,所以存在a,b$\in$Z,a$\neq$b$\neq$0,若

1) ab=0,显然a,b是零因子, R不是整环;

2) ab$\neq$0,则ab(b-a)=ab^2-aba= ab-aab=ab-ab=0,因为b-a$\neq$0,所以ab和b-a是零因子。

综上所述，R不是整环。

Exercise11

11. 证明有限整环必是域.

证 R是整环，则R中乘法满足消去律，且R有限，由定理17.6知，R^*关于·构成群，即除了零元以为的每个元素都有逆元，整环中含有加法单位元0和乘法单位元1，所以$|R|\geq 2$, 因此R为域。