$\square$

3.7 先证一个引理(即为本章第 10 题)。

引理 3.2 设 $f, g \in A \rightarrow\!\!\!\!\!+ B$，已知 $f \subseteq g$ 且 $\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} f$，则 $f = g$。

证明: 由题设知 $f \subseteq g$，现只需证：$g \subseteq f$。

$$
\begin{aligned}
& \forall x, y \\
& \langle x, y\rangle \in g \\
\Longrightarrow\ & x \in \operatorname{dom} g && \text{(dom定义)} \\
\Longrightarrow\ & x \in \operatorname{dom} f && (\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} f) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z(\langle x, z\rangle \in f) && \text{(dom定义)} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists z(\langle x, z\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f) && \text{(命题逻辑幂等律)} \\
\Longrightarrow\ & \exists z(\langle x, z\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in g) && (f \subseteq g) \\
\Longrightarrow\ & \exists z(\langle x, z\rangle \in f \wedge z = y) && (g \text{ 是函数、} \langle x, y\rangle \in g) \\
\Longrightarrow\ & \langle x, y\rangle \in f && \text{(外延原则)}
\end{aligned}
$$

$\square$

由引理 3.2 即证原题。

3.8 由引理 3.2 立即得证。

3.9 令 $A = \mathbb{N}, f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x + 1, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$，则：由加法性质知 f 是单射的，但 f 不是满射的(因为 $0 \in \mathbb{N}$，但 $0 \notin \operatorname{ran} f$)。对任意 $k \in \mathbb{N}$，有 $\langle 2k, k\rangle \in g$，故 g 是满射的，但对任意 $k \in \mathbb{N}$，有 $\langle 2k, k\rangle \in g \wedge \langle 2k+1, k\rangle \in g \wedge 2k \neq 2k+1$，故而 g 不是单射的。

3.10 即为引理 3.2。

3.11

证明: 首先证明一个结论。

结论 1：$\forall y(y \in \operatorname{dom} g \rightarrow g(y) \neq \varnothing)$。

证明:

$$
\begin{aligned}
& \forall y \\
& y \in \operatorname{dom} g \\
\Longleftrightarrow\ & y \in B && (\operatorname{dom} g = B) \\
\Longrightarrow\ & \exists x(x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in f) && (f \text{ 是满射}) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists x(x \in g(y)) && (g \text{ 定义}) \\
\Longleftrightarrow\ & g(y) \neq \varnothing && (\varnothing \text{ 定义})
\end{aligned}
$$

$\square$

下面证明 g 是单射的。

$$
\begin{aligned}
& \forall y_1, y_2 \in B, s \in \mathcal{P}(A) \\
& \langle y_1, s\rangle \in g \wedge \langle y_2, s\rangle \in g \\
\Longrightarrow\ & \forall x(x \in s \rightarrow \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge \forall x(x \in s \rightarrow \langle x, y_2\rangle \in f) \wedge s = g(y_1) && (g \text{ 定义}) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall x((x \in s \rightarrow \langle x, y_1\rangle \in f) \wedge (x \in s \rightarrow \langle x, y_2\rangle \in f)) \wedge s = g(y_1) && \text{(量词分配等值式)}
\end{aligned}
$$