证明: 由教材定理 5.1 和等势关系的传递性知，$[0,1] \approx \mathbb{R}$。

下面只需证 $[0,1] \approx [a,b]$。

定义 $f:[0,1] \to [a,b], \forall x \in [0,1], f(x) = (b-a)x + a$。

显然，f 是函数且为双射。从而有 $[0,1] \approx [a,b]$。 □

5.4

证明: 由于 I_A 是双射，故 $A \approx A$。

由教材定理 3.9 知，若 $f: A \to B$ 是双射，则 $f^{-1}: B \to A$ 也是双射。从而有 $A \approx B \Rightarrow B \approx A$。

由教材定理 3.4(3) 知，若 $g: A \to B$ 和 $f: B \to C$ 都是双射，则 $f \circ g: A \to C$ 也是双射。故有 $A \approx B \land B \approx C \Rightarrow A \approx C$。 □

5.5

证明: 用数学归纳法证明。

令 $S = \{n \mid n \in \mathbb{N} \land \forall x(x \subset n \to \exists m(m \in n \land x \approx m))\}$。

(1) $0 \in S$。因为对任意 x，$x \subset 0$ 恒为假，故蕴涵式永真。

(2) 设 $n \in S$，对 n^+ 的任意真子集 x，分三种情况讨论：

① 若 $x = n$，就有 $x \approx n \in n^+$。

② 若 $x \subset n$，则依归纳假设，存在 $m \in n \subset n^+$，使 $x \approx m \in n^+$。

③ 若 $n \in x$，则 $x - \{n\} \subset n$ (若不然，就有 $n \subseteq x - \{n\}$，于是有 $n^+ = n \cup \{n\} \subseteq x - \{n\} \cup \{n\} = x$，与前提 $x \subset n$ 矛盾)。这时，依归纳假设，存在 $m \in n$，使 $x - \{n\} \approx m$。此时有，$x \approx m^+$ (这是因为，对任意函数 $f: x - \{n\} \to m$，令 $g: x \to m^+, \forall y \in x, g(y) = \begin{cases} f(y), & 若 y \neq n \\ m, & 若 y = n \end{cases}$。则 g 是双射当且仅当 f 是双射)。由教材定理 4.4 和 $m \in n$ 知，$x \approx m^+ \in n^+$。

注意到，对任意 $x \subset n^+$，上述三种情况必有一种成立，这是因为：由于 $x \subset n^+ = n \cup \{n\}$，若 $n \notin x$，则 x 的所有元素必然都在 n 里，即有 $x \subseteq n$，这时①和②至少有一种成立。反之，若 $n \in x$，则③成立。而对这三种情况都存在某个集合 $m \in n^+$，使 $x \approx m$。这样就证明了对任意 $n \in S$，有 $n^+ \in S$。从而有 $S = \mathbb{N}$。 □

5.6

证明: 由于 $I_A: A \to A$ 是单射，故 $A \preccurlyeq\cdot A$。

由教材定理 3.4(2) 知，若存在 $g: A \to B, f: B \to C$，且 f 和 g 都是单射，则 $f \circ g: A \to C$ 也是单射。故有 $A \preccurlyeq\cdot B \land B \preccurlyeq\cdot C \Rightarrow A \preccurlyeq\cdot C$。 □

5.7

证明: 只需证：A 是无穷可数集当且仅当存在 A 到 $\mathbb{N}$ 的双射。

充分性：

若存在 A 到 $\mathbb{N}$ 的双射，就有 $A \approx \mathbb{N}$。此时，若 A 有穷的，则 A 与一自然数 n 等势，从而由等势关系的传递性知 $\mathbb{N} \approx n$，也即，$\mathbb{N}$ 是有穷的，这与教材定理 5.5 推论 2(2) “$\mathbb{N}$ 是无穷集”矛盾。因此，A 是无穷的。

又由教材定理 5.7 推论 (2) 知，$A \approx \mathbb{N} \implies A \preccurlyeq\cdot \mathbb{N}$。因此，$A$ 是可数的。这就证明了定理的一个方向：若存在 A 到 $\mathbb{N}$ 的双射则 A 是无穷可数集。

必要性：

若 A 是无穷可数集，则由可数集定义知：$A \preccurlyeq\cdot \mathbb{N}$。又由教材定理 5.14 知，$\mathbb{N} \preccurlyeq\cdot A$。从而由 Schröder-Bernstein 定理知，$A \approx \mathbb{N}$。这就证明了定理的另一个方向。 □