$\Longleftrightarrow p\theta_l + qx + r = \theta_l$ （$\circ$ 运算定义）

解得 $q = 0, p\theta_l + r = \theta_l$。

当 $r = 0$ 时，有 $p = 1$，θ_l 为任意实数。当 $p \neq 1$ 时，有 $\theta_l = r/(1-p)$。

当 $r \neq 0, p = 1$ 时，方程无解。 □

结论 $5b$：运算有右零元当且仅当 $p = 0 \wedge ((q = 1 \wedge r = 0) \vee q \neq 1)$。

证明： 与 $5a$ 类似。 □

结论 $5c$：运算有零元当且仅当 $p = q = 0$。

证明： 充分性：易见，当 $p = q = 0$ 时，r 是零元。

必要性：由结论 $5a$ 和 $5b$ 即得。 □

15.9 适合交换律、结合律，不适合幂等律。单位元是 0。零元是 1。除 1 以外的有理数 x 都有逆元 $x^{-1} = x/(x-1)$。

15.10

一元运算有 4 个：

x	a	b
$\Delta_1 x$	a	a

x	a	b
$\Delta_2 x$	a	b

x	a	b
$\Delta_3 x$	b	a

x	a	b
$\Delta_4 x$	b	b

二元运算有 16 个：

$\circ_1$	a	b
a	a	a
b	a	a

$\circ_2$	a	b
a	a	a
b	a	b

$\circ_3$	a	b
a	a	a
b	b	a

$\circ_4$	a	b
a	a	a
b	b	b

$\circ_5$	a	b
a	a	b
b	a	a

$\circ_6$	a	b
a	a	b
b	a	b

$\circ_7$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\circ_8$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\circ_9$	a	b
a	b	a
b	a	a

$\circ_{10}$	a	b
a	b	a
b	a	b

$\circ_{11}$	a	b
a	b	a
b	b	a

$\circ_{12}$	a	b
a	b	a
b	b	b

$\circ_{13}$	a	b
a	b	b
b	a	a

$\circ_{14}$	a	b
a	b	b
b	a	b

$\circ_{15}$	a	b
a	b	b
b	b	a

$\circ_{16}$	a	b
a	b	b
b	b	b

其中 $\circ_3, \circ_5, \circ_{11}, \circ_{12}, \circ_{13}, \circ_{14}$ 是既不可交换也不可结合的。

15.11 不适合交换律。例如，$\langle 1,2\rangle \circ \langle 3,4\rangle = \langle 1*3, 1*4+2\rangle = \langle 3,6\rangle$，而 $\langle 3,4\rangle \circ \langle 1,2\rangle = \langle 3*1, 3*2+4\rangle = \langle 3,10\rangle$，也即 $\langle 1,2\rangle \circ \langle 3,4\rangle \neq \langle 3,4\rangle \circ \langle 1,2\rangle$。

适合结合律。因为 $(\langle a,b\rangle \circ \langle c,d\rangle) \circ \langle e,f\rangle = \langle ac, ad+b\rangle \circ \langle e,f\rangle = \langle ace, acf+ad+b\rangle$，同时，$\langle a,b\rangle \circ (\langle c,d\rangle \circ \langle e,f\rangle) = \langle a,b\rangle \circ \langle ce, cf+d\rangle = \langle ace, acf+ad+b\rangle$，即对任意 $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle e,f\rangle \in A$，有 $(\langle a,b\rangle \circ \langle c,d\rangle) \circ \langle e,f\rangle = \langle a,b\rangle \circ (\langle c,d\rangle \circ \langle e,f\rangle)$。

易于验证，$\langle 1,0\rangle$ 是 $\circ$ 运算的单位元，$\langle 0,x\rangle$ 为左零元(其中 $x \in \mathbb{Q}$ 为任意有理数)。$\circ$ 运算无右零元，因为由加法性质知，不存在 d，满足 $\forall a,b \in \mathbb{Q}, ad+b = d$。

对任意 $\langle a,b\rangle \in A$，当 $a \neq 0$ 时，有逆元 $\langle 1/a, -b/a\rangle$ (代入即证)。当 $a = 0$ 时无逆元，因为不存在一个 c，使得 $0c = 1$。

15.12

(1) 注意到，若令 $\varphi : A \to \mathbb{Z}_3, \varphi(a) = 0, \varphi(b) = 1, \varphi(c) = 2$，则 $\langle A, \circ, a\rangle \overset{\varphi}{\cong} \langle \mathbb{Z}_3, \oplus, 0\rangle$，其中 $\oplus$ 是