考试说明：本课程为闭卷考试．满分 为： 100 分

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空题（每小题 3 分，共 27 分）

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=$____________.

2. 交换积分次序：$\int_1^3 dx \int_{x-1}^2 f(x,y)dy=$________________________.

3. 已知 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$____________.

4. 函数 $f(x,y,z)=x^2yz$ 在点 $(1,2,1)$ 处的梯度 $gradf=$____________.

5. 函数 $u=xyz$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿 $\vec{l}=\{1,1,1\}$ 方向的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=$______.

6. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数为________.

7. 函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极小值为________.

8. 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为________________.

9. 设 D：$x^2+y^2\le 2x$，则二重积分 $I=\iint\limits_D \sin(xy)^5 d\sigma=$______.

二、完成下列各题（每小题 10 分，共 60 分）

1．已知 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数且 $z=xf(xy,x)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2．计算三重积分：$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$，其中$\Omega$：$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$.

3．计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2 dv$．$\Omega$：$x^2+y^2+z^2\le 2z$.

4．已知方程 $f(x-z,y-2z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5．计算二重积分：$I=\iint\limits_{D}\max\{y,x^2\}dxdy$，其中$D$：$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$.

6．求函数 $f=xy^2z^3$ 在条件 $x+y+z=1$ $(x>0,y>0,z>0)$ 下的最大值.

三、 **解答题（共13分）**

已知曲面S：$x^2+y^2+z^2+xy+yz=a^2$（$a>0$）

1) S 是一个怎样的曲面？

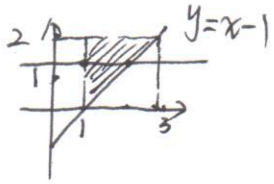
2) 求出曲面S上z坐标为最大、最小的点.

一、填空题.

1. $0 \le \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \frac{|x|+|y|}{|x^2-xy+y^2|} \le \frac{|x|+|y|}{|xy|} = \frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|} \to 0 \quad \begin{pmatrix} x\to\infty \\ y\to\infty \end{pmatrix}$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \underline{0}$.

2. $D: 1\le x\le 3,\ x-1\le y\le 2$



$\therefore D:\ 0\le y\le 2,\quad 1\le x\le 1+y$

$\underline{\int_0^2 dy \int_1^{1+y} f(x,y)\,dx}$.

3. $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\underline{0}$.

4. $\mathrm{grad} f|_P=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\Big|_{(1,2,1)}=\{2xyz,\ x^2z,\ x^2y\}\big|_{(1,2,1)}=\underline{\{4,1,2\}}$.

5. $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P=1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P=1 \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P=1$

$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt3} \qquad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_P=\frac{3}{\sqrt3}=\underline{\sqrt3}$.

6. $\frac{\partial f}{\partial l}=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|}=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\underline{1}$.

7. 令 $\begin{cases} f_x=3x^2-8x+2y=0 \\ f_y=2x-2y=0 \end{cases}$ $\quad\therefore$ 驻点 $(0,0),\ (2,2)$

$f_{xx}=6x-8 \qquad f_{xy}=2, \qquad f_{yy}=-2$

在 $(0,0)$ 点处，$A=f_{xx}(0,0)=-8,\quad B=2,\quad C=-2$

$B^2-AC=4-16<0 \qquad A<0 \qquad \therefore f(0,0)$ 极大值.

在(2,2)点处，$A=f_{xx}(2,2)=4$，$B=2$，$C=-2$.

$B^2-AC>0$ $\quad\therefore f(2,2)$ 不是极值.

无极小值.

8. 令 $F(x,y,z)=z-e^{z}+2xy-3$

法向量 $\vec{n}=\{2y,2x,1-e^{z}\}$ $\quad \vec{n}\,|_{(1,2,0)}=\{4,2,0\}$

$\therefore$ 切平面：$4(x-1)+2(y-2)=0$ 即 $\underline{2x+y-4=0}$

9. $D:(x-1)^2+y^2\le 1$ 关于x轴对称，$\sin(xy)^5$ 关于y奇函数.

$\therefore \iint\limits_D \sin(xy)^5\,d\sigma=\underline{\quad 0\quad}$

二、1. $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_1'$ $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2xf_1'+x^2\frac{\partial f_1'}{\partial x}=2xf_1'+x^2\cdot(f_{11}''y+f_{12}'')$

2. $I=\int_0^1 z^2dz\iint\limits_{D_z:x^2+y^2\le 1}dxdy=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{3}$

3. $\Omega:\ x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$

令 $T:\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=1+r\cos\varphi\end{cases}$ $\qquad dv=r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta$ $\qquad \Omega':\ \begin{matrix}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le r\le 1\end{matrix}$

$$I\overset{T}{=}\iiint\limits_{\Omega'}(r\sin\varphi\cos\theta+r\sin\varphi\sin\theta+1+r\cos\varphi)^2\cdot r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1(r^2+2r\cos\varphi+1)\,r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{5}\cdot 2+2\cdot\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 2\right]=\frac{32}{15}\pi$$

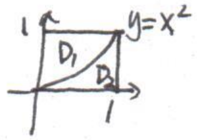
4. $f(x-z,y-2z)=0$ 对x求偏导得 $f_1'(1-\frac{\partial z}{\partial x})+f_2'\cdot(-2\frac{\partial z}{\partial x})=0$

$\therefore\ (-f_1'-2f_2')\frac{\partial z}{\partial x}=-f_1'$ $\qquad\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'}{f_1'+2f_2'}$

对y求偏导得 $f_1'(-\frac{\partial z}{\partial y})+f_2'(1-2\frac{\partial z}{\partial y})=0$

$(-f_1'-2f_2')\frac{\partial z}{\partial y}=-f_2'$ $\qquad\therefore\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f_2'}{f_1'+2f_2'}$ $\qquad\therefore\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f_1'+2f_2'}{f_1'+2f_2'}=1$

5. $\max\{y, x^2\} = \begin{cases} y, & (x,y)\in D_1 \\ x^2 & (x,y)\in D_2 \end{cases}$



$$I = \iint\limits_{D_1} y\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} x^2\,d\sigma$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 y\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x^2\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^4)\,dx + \int_0^1 x^4\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

6. 令拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda) = xy^2z^3 + \lambda(x+y+z-1)$

$$\begin{cases} L_x = y^2z^3 + \lambda = 0 & ① \\ L_y = 2xyz^3 + \lambda = 0 & ② \\ L_z = 3xy^2z^2 + \lambda = 0 & ③ \\ L_\lambda = x+y+z-1 = 0 & ④ \end{cases}$$

由①,②得 $x = \frac{1}{2}y$ ⑤ 由②③得 $z = \frac{3}{2}y$ ⑥

代⑤.⑥到④得 $y = \frac{1}{3}$ $\therefore x = \frac{1}{6}$, $z = \frac{1}{2}$

唯一驻点 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$，由实际问题知最大值存在，故 f 在 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 取得最大值，最大值为 $f_{max} = \frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{432}$.

三. 1) S是一个椭球面.

截痕法：用xoy面截S得交线 $x^2+y^2+xy=a^2$，即 椭圆 $\frac{3}{4}x^2+(y+\frac{1}{2}x)^2=a^2$

用yoz面截S得交线：$y^2+z^2+yz=a^2$，即椭圆 $\frac{3}{4}y^2+(\frac{1}{2}y+z)^2=a^2$

用zox面截S得交线 $x^2+z^2=a^2$. 圆

2) 设曲面S上点 $P(x,y,z)$ P到xoy面距离平方 $d^2=z^2$

设拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda) = z^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2+xy+yz-a^2)$

$$\begin{cases} L_x = 2\lambda x + \lambda y = 0 & ① \\ L_y = 2\lambda y + \lambda x + \lambda z = 0 & ② \\ L_z = 2z + 2\lambda z + \lambda y = 0 & ③ \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - a^2 = 0 & ④ \end{cases}$$

①.②.③得 $y = -2x$，$z = 3x$，$\lambda = -\frac{3}{2}$

代入④得 $x = \pm\frac{a}{\sqrt{6}}$，$\therefore y = \mp\frac{2a}{\sqrt{6}}$，$z = \pm\frac{3a}{\sqrt{6}}$

由问题知，曲面S上z坐标最大，最小点必存在．故z坐标最大的点是 $\left(\frac{a}{\sqrt{6}}, -\frac{2a}{\sqrt{6}}, \frac{3a}{\sqrt{6}}\right)$，最小的点 $\left(-\frac{a}{\sqrt{6}}, \frac{2a}{\sqrt{6}}, -\frac{3a}{\sqrt{6}}\right)$．

法2. $x^2+y^2+z^2+xy+yz = a^2$ 决定 $z = z(x,y)$

两边对x求偏导 $2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + y + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+y}{y+2z}$

又对y求偏导，$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + x + z + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

得 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+2y+z}{y+2z}$

令 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ 得 $y = -2x$，$z = 3x$ 代入原方程得 $x = \pm\frac{a}{\sqrt{6}}$．

$\therefore y = \mp\frac{2a}{\sqrt{6}}$，$z = \pm\frac{3a}{\sqrt{6}}$

由1)知z坐标最大值，最小点存在．$\therefore$ z坐标最大的点 $\left(\frac{a}{\sqrt{6}}, -\frac{2a}{\sqrt{6}}, \frac{3a}{\sqrt{6}}\right)$

小 $\left(-\frac{a}{\sqrt{6}}, \frac{2a}{\sqrt{6}}, -\frac{3a}{\sqrt{6}}\right)$