第一章　　插 值

埃尔米特插值

问题的提出

不少实际问题不但要求在节点上函数值相等，而且还要求它的导数值也相等（即要求在节点上具有一阶光滑度），甚至要求高阶导数也相等，满足这种要求的插值多项式就是埃尔米特（**Hermite**）插值多项式。下面只讨论函数值与导数值个数相等的情况。

埃尔米特插值问题

不仅要求函数值重合，而且要求若干阶导数也重合。即：要求插值函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \varphi'(x_i) = f'(x_i) \\ \varphi^{(2)}(x_i) = f^{(2)}(x_i) \\ \qquad \vdots \\ \varphi^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i) \end{cases}$$

埃尔米特（Hermite）插值问题

我们只考虑 $\varphi(x_i) = f(x_i),\ \varphi'(x_i) = f'(x_i)$ 的情形。

问题描述

定义 已知 $f(x)$ 在节点 $x_0, \dots, x_n$ 处 $f(x_i)=f_i$ 及一阶导数值 $f'(x_i)=f'_i$ $(i=0,1,2,\dots,n)$，若存在函数 $H(x)$ 满足:

(1) $H(x)$ 是次数不超过 $2n+1$ 的多项式;

(2) $H(x_i)=f_i$， $H'(x_i)=f'_i$;

则称 $H(x)$ 为 埃尔米特插值多项式;

可以证明：满足以上两个条件的埃尔米特插值多项式是存在唯一的。

两点三次Hermite插值

- 设 $x_0 \neq x_1$，已知 $f(x_0)=y_0$、$f(x_1)=y_1$ 和 $f'(x_0)=y'_0$、$f'(x_1)=y'_1$，求多项式 $H_3(x)$ 满足：

$$H(x_i)=y_i,\quad H'(x_i)=y'_i,\quad i=0,1$$

解：模仿 Lagrange 多项式的思想

设 $H_3(x)=a_0\alpha_0(x)+a_1\alpha_1(x)+b_0\beta_0(x)+b_1\beta_1(x)$

其中 $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 均为3次多项式，且满足

$$\boxed{\alpha_j(x_i)=\delta_{ji},\quad \alpha_j'(x_i)=0,\quad \beta_j(x_i)=0,\quad \beta_j'(x_i)=\delta_{ji}}\quad i,j=0,1$$

将插值条件代入立即可得

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$$

两点三次Hermite 插值

$\alpha_0(x)$

$$\alpha_0(x_0)=1,\quad \alpha_0(x_1)=0,\ \alpha_0'(x_0)=0,\ \alpha_0'(x_1)=0$$

设 $\alpha_0(x)=(ax+b)l_0^2(x)=(ax+b)\left(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$

$$\alpha_0(x_0)=1,\ \alpha_0'(x_0)=0$$

$$a=-\frac{2}{x_0-x_1},\ b=\frac{3x_0-x_1}{x_0-x_1}=1+\frac{2x_0}{x_0-x_1}$$

$$\alpha_0(x)=\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

两点三次Hermite 插值

同理可得 $\alpha_1(x)=\left(1-2\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$

$\beta_0(x)$ $\beta_0(x_0)=0, \beta_0(x_1)=0, \beta_0'(x_0)=1, \beta_0'(x_1)=0$

设 $\beta_0(x)=(cx+d)l_0^2(x)=(cx+d)\left(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$

$\beta_0(x_0)=0, \beta_0'(x_0)=1$

$c=1, d=-x_0$ $\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$

同理可得 $\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$

两点三次Hermite插值

所以

$$H_3(x) = y_0\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 + y_1\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+\ y_0'(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 + y_1'(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

仿照Lagrange插值余项的证明方法，可得

$$\boxed{R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2} \quad \xi_x\in[x_0,x_1]$$

一般公式

n+1个节点可以唯一确定一个2n+1次Hermite插值多项式:

$$\boxed{H_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-2(x-x_k)l_k'(x_k))f_k l_k^2(x)+\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)f_k' l_k^2(x)}$$

余项

$$\boxed{R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)} \qquad \xi_x\in(a,b)$$

（条件：$f(x_0)$ 在插值区间 $[a,b]$ 内的 $2n+2$ 阶导数存在）

多项式插值余项的表示形式

从中我们可以发现多项式插值结果的余项组成规律:

如果已知条件有n个，则在余项中分母为n!;

相应的，分子上的导数阶数也是n;

如果条件中出现某点 x_i 的从0阶直到k阶的导数值则在后面的因式中存在 $(x-x_i)^{k+1}$

题2 求作次数≤2的多项式p(x)，使满足插值条件

$$p(0)=1, p(1)=2, p'(0)=0$$

解 求解这个简单问题可直接由待定系数法。

令所求的插值多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$p'(x)=a_1+2a_2x$$

依所给插值条件可列出方程

$$1 = p(0) = a_0$$

$$0 = p^{'}(0) = a_1$$

$$2 = p(1) = a_0 + a_1 + a_2$$

由此解出

$$a_0 = 1, a_1 = 0. a_2 = 1$$

故有 $$p(x) = 1 + x^2$$

题8 求作次数≤5的多项式p(x)，使满足下列插值条件：

x_i	0	1	2
y_i	2	1	2
y'_i	-2	-1	
y''_i	-10		

解　以泰勒公式，满足条件

$$q(0)=2, q^{'}(0)=-2, q^{'''}(0)=-10$$

的插值多项式　$q(x)=-5x^2-2x+2$

令

$$p(x)=-5x^2-2x+2+x^3(ax^2+bx+c)$$

$$p'(x)=-10x-2+3x^2(ax^2+bx+c)+x^3(2ax+b)$$

用剩下的插值条件列出方程

$$1 = p(1) = -5 + (a + b + c)$$

$$-1 = p'(1) = -12 + 3(a + b + c) + (2a + b)$$

$$2 = p(2) = -22 + 8(4a + 2b + c)$$

由此解出

$$a = 4, b = -15, c = 17$$

于是所求插值多项式

$$p(x) = 4x^5 - 15x^4 + 17x^3 - 5x^2 - 2x + 2$$

各种插值方法的总结

- 待定系数法

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

- 基函数法

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i$$

- 承袭法

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c w_n(x)$$

承袭性公式的证明

假设：$p_n(x)$满足已知的$n+1$个条件

则： 在这$n+1$个条件下$w_n(x)$的值为0

又因为：$p_{n+1}(x) = p_n(x) + cw_n(x)$

则在这$n+1$个条件下：$p_{n+1}(x) = p_n(x)$

即$p_{n+1}(x)$满足这已知的$n+1$个条件

因为已知条件共有$n+2$个

因此， 可以利用最后一个条件来确定系数c

问题：

当剩余的条件多于一个时，应该如何处理?

把常数c改为一个多项式，此多项式采用

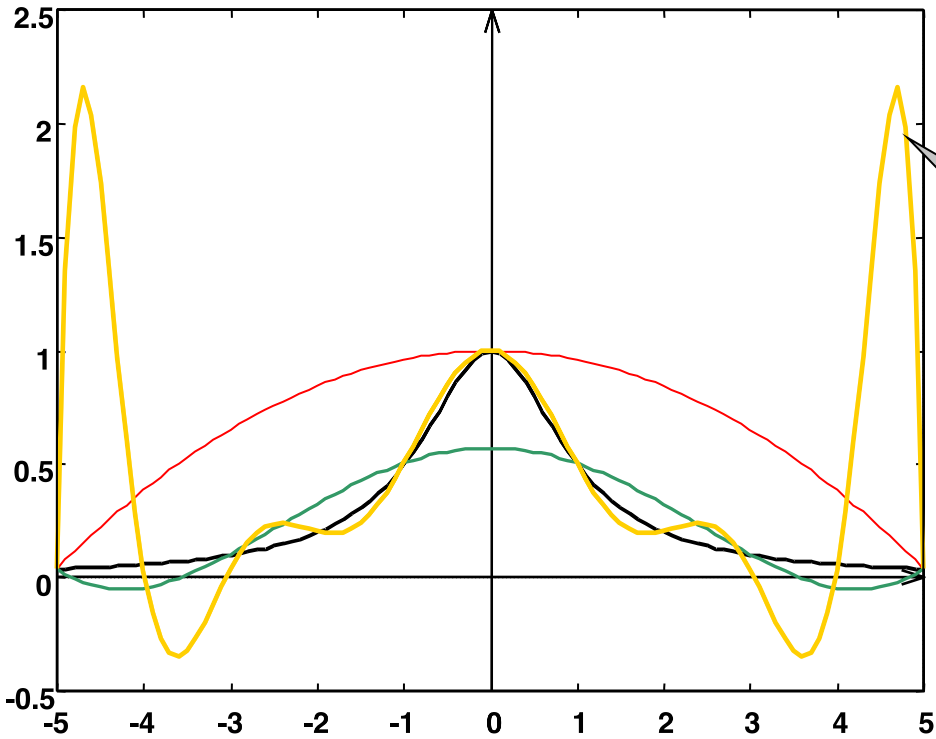
待定系数法的形式。

多项式的次数如何确定?

剩余条件个数-1

分段低次插值

例： 在[–5, 5]上考察 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 $L_n(x)$。取 $x_i=-5+\dfrac{10}{n}i \quad (i=0,\dots,n)$



$L_n(x) \not\rightarrow f(x)$

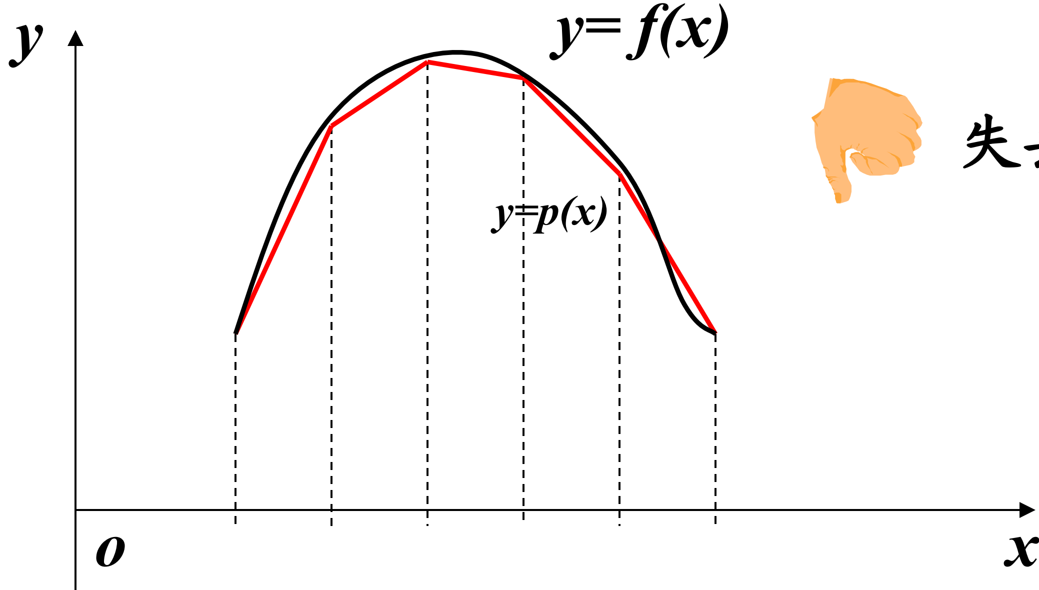
n 越大，
端点附近抖动
越大，称为
Runge 现象

分段线性插值

在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$上，用1阶多项式 (直线) 逼近$f(x)$:

$$f(x) \approx P_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

记 $h = \max |x_{i+1} - x_i|$，易证：当 $h \to 0$时，$P_1^h(x) \xrightarrow{\text{一致}} f(x)$



失去了原函数的光滑性。

分段线性插值的余项

$$\left|f(x)-s_1(x)\right| \le \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left|f(x)-s_1(x)\right|$$

$$\le \left| \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \frac{f''(\xi_i)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1}) \right|$$

$$\le \frac{\max\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left|f''(x)\right|}{2!} \left(\frac{x_j - x_i}{2} \right)^2 \le \frac{h_i^2}{8} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left|f''(x)\right|$$

分段Hermite插值

给定 $x_0, \ldots, x_n$； $y_0, \ldots, y_n$； $y'_0, \ldots, y'_n$

导数一般不易得到。

余项

$$\left|f(x)-s_1(x)\right| \le \frac{\max\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left|f^4(x)\right|}{4!}\left(\frac{x_j - x_i}{2}\right)^4 \le \frac{h_i^4}{384}\max_{x_i \le x \le x_{i+1}}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

分段低次插值

基本思想：用分段低次多项式来代替单个多项式。

具体作法：(1) 把整个插值区间分割成多个小区间;

(2) 在每个小区间上作低次插值多项式;

(3) 将所有插值多项式拼接整一个多项式。

优点：公式简单、运算量小、稳定性好、收敛性 ...

缺点：节点处的导数不连续，失去原函数的光滑性。

样条函数插值

❑ 样条函数

由一些按照某种光滑条件分段拼接起来的多项式组成的函数。

最常用的样条函数为三次样条函数，即由三次多项式组成，满足处处有二阶连续导数。

定义 设节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ ，若函数 $s(x)\in C^2[a,b]$ 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上是三次多项式，则称其为三次样条函数。如果同时满足 $s(x_i)=f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$，则称 $s(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的三次样条函数。

三次样条函数的确定

节点： $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$
函数值： $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$

$s(x)$ 满足： $s(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$

由定义可设：
$$s(x) = \begin{cases} s_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots \\ s_n(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

其中 $s_k(x)$ 为 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的三次多项式，且满足

$$s_k(x_{k-1}) = y_{k-1},\ s_k(x_k) = y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

边界条件

$s(x) \in C^2[a,b]$ ➡ $s'(x_k^-) = s'(x_k^+),\ s''(x_k^-) = s''(x_k^+)$

$$\boxed{s_k'(x_k^-) = s_{k+1}'(x_k^+),\ s_k''(x_k^-) = s_{k+1}''(x_k^+)}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1)$

每个 $s_k(x)$ 均为三次多项式，有4个待定系数，所以共有 $4n$ 个待定系数，需 $4n$ 个方程才能确定。前面已经得到 $2n + 2(n - 1) = 4n - 2$ 个方程，还缺 2 个方程！

- 实际问题通常对样条函数在端点处的状态有要求，即所谓的边界条件。

边界条件

- 第一类边界条件：给定函数在端点处的一阶导数，即

$$\boxed{s'(x_0)=f_0',\ s'(x_n)=f_n'}$$

- 第二类边界条件：给定函数在端点处的二阶导数，即

$$\boxed{s''(x_0)=f_0'',\ s''(x_n)=f_n''}$$

当 $s''(x_0)=s''(x_n)=0$ 时，称为自然边界条件，此时的样条函数称为自然样条函数。

- 第三类边界条件：设 $f(x)$ 是周期函数，并设 x_n-x_0 是一个周期，于是 $s(x)$ 满足

$$\boxed{s'(x_0)=s'(x_n),\ s''(x_0)=s''(x_n)}$$

三次样条函数的计算

- 设出 $s(x)$ 在各个节点处的二阶导数值，即

$$\boxed{s''(x_j)=M_j} \quad (j=0,1,2,\ldots,n)$$

考虑区间 $[x_{j-1},x_j]$，在此区间上， $s(x)=s_j(x)$ 是三次多项式，故 $s_j''(x)$ 为线性函数，且

$$s_j''(x_{j-1})=s''(x_{j-1})=M_{j-1},\ s_j''(x_j)=s''(x_j)=M_j$$

利用线性插值公式，即可得 $s_j''(x)$的表达式：

$$s_j''(x)=\frac{x_j-x}{h_j}M_{j-1}+\frac{x-x_{j-1}}{h_j}M_j, \quad h_j=x_j-x_{j-1}$$

积分两次后即可得 $s_j(x)$ 的表达式：

三次样条函数的计算

$$s_j(x)=\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}M_j+c_1x+c_2$$

将插值条件 $s_j(x_{j-1})=y_{j-1}$，$s_j(x_j)=y_j$ 代入可确定积分常数 c_1 和 c_2，整理上式得：

$$\boxed{\begin{aligned}s_j(x)&=\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}M_j\\&+\left(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{x_j-x}{h_j}+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x-x_{j-1}}{h_j}\end{aligned}}$$

只需确定 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 即可给出 $s(x)$ 的表达式。

三次样条函数的计算

$s(x)$ 在各个节点处的一阶导数存在 $s'(x_j^-)=s'(x_j^+)$

即有 $\boxed{s_j'(x_j^-)=s_{j+1}'(x_j^+)}$

对 $s_j(x)$ 求导得：

$$\boxed{\begin{aligned} s_j'(x) = & -\frac{(x_j-x)^2}{2h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j}M_j \\ & +\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}-\frac{M_j-M_{j-1}}{6}h_j \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{h_j}{2}M_j-\frac{h_j}{6}(M_j-M_{j-1})+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j} \\ & \qquad =-\frac{h_{j+1}}{2}M_j-\frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1}-M_j)+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} \end{aligned}}$$

三次样条函数的计算

整理后得关于 M_{j-1}, M_j 和 M_{j+1} 的方程：

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j$$

三弯矩方程

其中

$$\begin{cases} \mu_j = \dfrac{h_j}{h_j + h_{j+1}}, \quad \lambda_j = \dfrac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \\ d_j = \dfrac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(\dfrac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \dfrac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right) = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

$$\boxed{\mu_j + \lambda_j = 1}$$

$j = 1, 2, \ldots, n-1$

共 n-1 个方程，附加边界条件，补充两个方程后，即可确定 n+1 个未知量 $M_0, M_1, \cdots, M_n$。

第一类边界条件

- 第一类边界条件： $s'(x_0)=y_0'$， $s'(x_n)=y_n'$

  直接代入 $s_j(x)$ 的一阶导数表达式即得

$$2M_0+M_1=6\left((y_1-y_0)/h_1-y_0'\right)/h_1\equiv d_0$$

$$M_{n-1}+2M_n=6\left(y_n'-(y_n-y_{n-1})/h_n\right)/h_n\equiv d_n$$

与前面的 n-1 个方程联立得 n+1 阶线性方程组:

系数矩阵严格对角占优，故矩阵可逆，方程组存在唯一解。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

第二类边界条件

- 第二类边界条件：$s''(x_0)=y_0''$，$s''(x_n)=y_n''$

  直接可得 $\boxed{M_0=y_0'',\ M_n=y_n''}$

  前面方程中只含 n-1 个未知量，即可得 n-1 阶线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1-\mu_1 y_0'' \\ d_2 \\ \\ d_{n-2} \\ d_{n-1}-\lambda_{n-1}y_n'' \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，方程组存在唯一解。

第三类边界条件

- 第三类边界条件： $s'(x_0)=s'(x_n),\ s''(x_0)=s''(x_n)$

可得 $\boxed{M_0=M_n,\ \ \lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n}$

其中 $\lambda_n=h_1/(h_1+h_n),\mu_n=h_n/(h_1+h_n),$

$$d_n=6\big((y_1-y_0)/h_1-(y_n-y_{n-1})/h_n\big)/(h_1+h_n)$$

与前面的 n-1 个方程联立得 n 阶线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，方程组存在唯一解。

具体计算过程

- 综上所述，满足插值条件 $s(x_j)=y_j$ 和某一类边界条件的三次样条函数存在且唯一！

- 具体计算过程
  - ✓ 根据插值条件$s(x_j)=y_j$ 和给定的边界条件列出相应得方程组；
  - ✓ 解出该线性方程组的解 $M_0, M_1, \cdots, M_n$；

    具体求解方法参见第五章和第六章

  - ✓ 将 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 代入 $s_j(x)$ 的表达式，写出三次样条函数 $s(x)$ 在整个插值区间上的分段表达式。