2006 年计算机数学基础

二、集合论与图论部分

1. 是。

证明: 首先证明对任何集合 X, Y，有 $Y = (X \cup Y) - (X - Y)$。这是因为:

$$\begin{aligned}
Y &= \varnothing \cup Y && \text{(同一律)} \\
&= (X \cap \sim X) \cup Y && \text{(矛盾律)} \\
&= (X \cup Y) \cap (\sim X \cup Y) && \text{(分配律)} \\
&= (X \cup Y) \cap \sim(X \cap \sim Y) && \text{(德·摩根律)} \\
&= (X \cup Y) - (X - Y) && \text{(补交转换律)}
\end{aligned}$$

由题设和上述结论可知，$B = (A \cup B) - (A - B) = (A \cup C) - (A - C) = C$。 □

2.

(1) 无解。反设存在集合 $X = \mathcal{P}(X)$，则由等势的性质有 $X \approx \mathcal{P}(X)$。这与康托定理矛盾。

(2) 有解。$A = \varnothing$ 即为一个解。[1]

3. 由 $R^7 = R^{15}$ 和教材定理 2.18(2) 可知，$R^{2006} = R^{7+249*8+7} = R^{7+7} = R^{14}$。

4. t 的最大值为 k。

证明: 为表述方便，对任意一个由 k 个初级回路(有向或无向)组成的图，记这 k 个初级回路为 $C_1, C_2, \cdots, C_k$。对任意给定的 k，令 $S_k = \{G \mid G \text{ 是由 } k \text{ 个初级回路组成的图}\}$。对任意 $G \in S_k$，令 $f(G)$ 为“使 G 成为欧拉图所应添加的最少边数”(从而 f 是从 S_k 到自然数集的函数)，则题目所求即为 $t_{max} = \max f(S_k)$。

下面首先证明，对任意给定的 k，存在 $G \in S_k$，使得 $f(G) = k$ (从而有 $t_{max} \geq k$)。

考虑这样的 $G \in S_k$，它所对应的初级回路组 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 中，任何两个不同的初级回路 $C_i, C_j (i \neq j)$ 间都没有公共顶点。显然，这样的 G 有且仅有 k 个连通分支，这 k 个连通分支恰为上述 k 个初级回路。由初级回路的性质可知，G 中每个顶点的度数皆为偶数。设 E' 是一个使 $G' = G \cup E'$ 成为欧拉图的最小边集，$H = \langle V', E' \rangle$ 是 E' 的导出子图，则:

(1) 要将两个连通分支连接起来，就需要添加一条横跨两个连通分支的边，所以 H 中的边必须覆盖到 G 的每一个连通分支(即，对每个连通分支 G_i，都存在某条边 $e_j \in E'$，使得 e_j 的某个端点在 G_i 中)，否则，若某个 G_i 中不含 E' 的任何端点，则在 G' 中，$V(G_i)$ 与 $V(G) - V(G_i)$ 间仍然没有边，这与 G' 是连通图矛盾。由于各连通分支间没有公共顶点，所以 H 覆盖 k 个连通分支意味着 H 中至少有 k 个不同的顶点，即 $|V'| \geq k$。

(2) 由于 $G \cup H = G \cup E' = G'$ 是欧拉图，所以 $G \cup H$ 中各顶点仍是偶数。又因为 G 与

[1] 可以证明，除空集外，任意有限集合都不是方程 $A = \cup A$ 的解。对于无限的情形则有许多解。详细分析见 1990 年离散真题七 1(2) 的解答。