1997 年计算机数学基础

三、

3. 由于 $m=17$，所以树上共有 18 个顶点。题目中已给出 17 个顶点的度数，故，唯一度数未知的顶点即是树根。设树根的度数为 d，则由图论基本定理知 $d+4\cdot 4+1\cdot 3+12=2m=34$，解得，$d=3$。因此，树根的度数为 3。

4.

证明: 要证 $\lambda(G^*)\geq 2$，即要证 G^* 中无桥。由于 G 是连通图，所以 G^* 的对偶图 $G^{**}\cong G$。反设 G^* 中有桥 e^*，则由对偶图的性质知，在 G^{**} 中与 e^* 对应的边 e^{**} 是环(这是因为，若 e^* 为桥，则 G^*-e^* 是不连通的，因此，e^* 的两侧都是 G^* 的外部面，而外部面是唯一的，从而 e^{**} 是环)，这与 $G^{**}\cong G$ 是简单图矛盾。这就证明了 G^* 中无桥，从而有 $\lambda(G^*)\geq 2$。

由于极大平面图的每个面的次数皆为 3，所以对任意 $v_i^*\in G^*$，有 $d_{G^*}(v_i^*)=\deg(R_i)=3$。从而 G^* 是 3-正则的。 □

四、

1. $R=\{\langle 0,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 12,0\rangle\}$，从而 $R^2=\{\langle 3,3\rangle,\langle 12,4\rangle\}$。

2. 若 A 为无穷集，则 B 中无极大元和最大元，B 中的极小元集合为 $\{x\mid x\in P(A)\wedge |x|=1\}$。若 A 为有穷集，记 $n=|A|$，则 B 中极大元的集合为 $\{x\mid x\in P(A)\wedge |x|=n-1\}$，极小元的集合为 $\{x\mid x\in P(A)\wedge |x|=1\}$，$B$ 中无最大元。

3. $G(1)=\{1,2\},G(2)=\{3\},G(3)=\varnothing$，可见 G 是单射。但 G 不是满射(例如，$\{1\}\in\mathcal{P}(A)$ 但 $\{1\}\notin\operatorname{ran}G$)，从而不是双射。$\operatorname{ran}G=\{\varnothing,\{1,2\},\{3\}\}$。

4.

证明: 由理想的定义可知，I 对 $\vee$ 运算封闭。

对任意 $a,b\in I$，由 $\wedge$ 运算定义有 $a\wedge b\in A$ 且 $a\wedge b\preccurlyeq a$，从而由理想的定义知，$a\wedge b\in I$。所以 I 对 $\wedge$ 运算也封闭。

这就证明了 I 是子格。 □

5.

(1)

证明: 对任意 $x,y\in G$ 有:

$$
\begin{aligned}
& xax^{-1}=yay^{-1} & \\
\Longleftrightarrow\ & ax^{-1}y=x^{-1}ya & (\text{左乘 } x^{-1}\text{、右乘 } y)\\
\Longleftrightarrow\ & x^{-1}y\in N(a) & (N(a)\ \text{定义})
\end{aligned}
$$