# 1992 年计算机数学基础

11.

(1) $A \oplus A = \varnothing$，$\operatorname{card} A = 2$。

(2) $A$ 上可以定义 16 个二元关系，其中有 4 个自反的关系，4 个反自反的关系，8 个对称的关系，12 个反对称的关系，2 个等价关系，3 个偏序关系。

(3) $A^A$ 中有 4 个函数，其中有 2 个是满射的，2 个是单射的，2 个是双射的。

(4) $A$ 上可以定义 4 个一元运算，16 个二元运算。

(5) 以 $A$ 的元素作为群的元素，可以构成 1 个不同构的群。以 $A$ 的元素作为格的元素，可以构成 1 个不同构的格。

12.

**证明:** 充分性。首先，由逆元的唯一存在性可知，$f$ 是函数且为单射。又由于 $\forall x \in G, x = (x^{-1})^{-1}$，所以 $x = f(x^{-1}) \in \operatorname{ran} f$，从而 $f$ 是双射。

若 $G$ 是交换群，则对任意 $x, y \in G$，

$$\begin{aligned} f(xy) &= (xy)^{-1} && (f \text{ 定义}) \\ &= y^{-1}x^{-1} && (\text{教材定理 17.2}) \\ &= x^{-1}y^{-1} && (G \text{ 是交换群}) \\ &= f(x)f(y) && (f \text{ 定义}) \end{aligned}$$

这就证明了 $f$ 是自同构。

必要性。若 $f$ 是自同构，则对任意 $x, y \in G$，

$$\begin{aligned} xy &= ((xy)^{-1})^{-1} && (\text{教材定理 17.2}) \\ &= f((xy)^{-1}) && (f \text{ 定义}) \\ &= f(y^{-1}x^{-1}) && (\text{教材定理 17.2}) \\ &= f(y^{-1})f(x^{-1}) && (f \text{ 是自同构}) \\ &= (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} && (f \text{ 定义}) \\ &= yx && (\text{教材定理 17.2}) \end{aligned}$$

从而 $G$ 是交换群。 □

13.

(1) $a, c, d$ 能构成无向图的度数列。

(2) $c, d$ 能构成无向简单图的度数列。

(3) $c$ 能构成无向树的度数列(由于无向树的边数等于顶点数减一，无向树的度数列应满足度数和的一半等于项数减一)。

(4) 以 $c$ 为度数列的树有 5 个：