第三章　函数

3.1　$R_2, R_3, R_6, R_7 \in A \nrightarrow B$，其中 $R_2, R_6 \in A \to B$。

3.2

结论 1：$f \cap g$ 仍是函数。

证明: 由 $f, g \in A \to B$，得：

$$\begin{aligned}
& \forall x, y, z \\
& \langle x,y\rangle \in f\cap g \wedge \langle x,z\rangle \in f\cap g \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,y\rangle \in g \wedge \langle x,z\rangle \in f \wedge \langle x,z\rangle \in g && \text{(集合交定义)} \\
\Longrightarrow\ & \langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,z\rangle \in f && \text{(命题逻辑化简律)} \\
\Longrightarrow\ & y = z && (f\ \text{是函数})
\end{aligned}$$

也即，$f \cap g$ 符合函数的定义，是一个函数。 □

结论 2：$f \cap g \in A \to B$ 当且仅当 $f = g$。

证明: 充分性显然。下面证必要性。

若不然，就有 $\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,y\rangle \notin g$ 或 $\langle x,y\rangle \notin f \wedge \langle x,y\rangle \in g$。由对称性，不妨设 $\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,y\rangle \notin g$。

这时，将有 $x \notin \mathrm{dom}(f \cap g)$ (若不然，假设存在 z，使 $\langle x,z\rangle \in f \cap g$，这时由 $\langle x,z\rangle \in g$ 和 $\langle x,y\rangle \notin g$ 可知 $z \neq y$。但 $\langle x,y\rangle \in f$ 且 $\langle x,z\rangle \in f \cap g \subseteq f$。这就使 $y \neq z$ 且 $\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,z\rangle \in f$，与 f 是函数矛盾)，从而与 $f \cap g$ 是全函数矛盾。

这就证明了必要性。 □

结论 3：$f \cup g$是函数 $\Leftrightarrow f \cup g \in A \to B \Leftrightarrow f = g$。

先证：$f \cup g$是函数 $\Leftrightarrow f \cup g \in A \to B$。

证明: 由全函数定义即得充分性，即：$f \cup g \in A \to B \Rightarrow f \cup g$是函数。

再证必要性。

若 $f \cup g$ 是函数，则：

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f \cup g) &= \mathrm{dom}\, f \cup \mathrm{dom}\, g && \text{(教材定理 2.3(1))} \\
&= A \cup A && (f, g \in A \to B) \\
&= A && \text{(幂等律)}
\end{aligned}$$

由全函数定义有：$f \cup g \in A \to B$。

故有：$f \cup g$是函数 $\Rightarrow f \cup g \in A \to B$。

综合得：$f \cup g$是函数 $\Leftrightarrow f \cup g \in A \to B$。 □

再证：$f \cup g \in A \to B \Leftrightarrow f = g$。