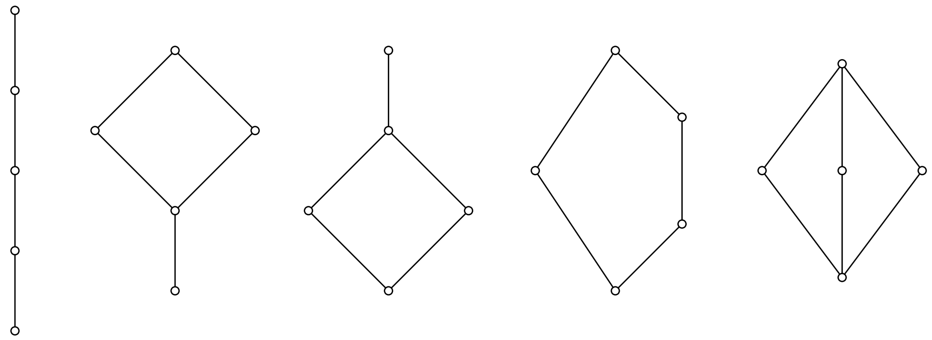

L_1 L_2 L_3 L_4 L_5

其中 L_1, L_2, L_3 是分配格，L_4 不是模格，从而也不是分配格，L_5 是模格但不是分配格。只有 L_4 和 L_5 是有补格。

19.19

证明: 对任意 $x \in L$，令 $T(x) = \{y \mid y \in L \text{ 且 } y \preccurlyeq x\}$，$i_x = |T(x)|$。显然，对任意 $x \in L$，有 $1 \le i_x \le t+1$。注意到:

引理 19.1 *若 L 是链，则对任意 $x, y \in L$，有*

$$x \preccurlyeq y \iff i_x \le i_y.$$

证明: 必要性显然，下面证充分性。

由于 L 是链，所以 $x \preccurlyeq y$ 与 $y \preccurlyeq x$ 至少有一式成立。反设 $x \not\preccurlyeq y$，则必有 $y \preccurlyeq x$。由 $y \preccurlyeq x$ 和偏序关系传递性可知，$T(y) \subseteq T(x)$，但由于 $x \not\preccurlyeq y$，所以 $x \in T(x)$，$x \notin T(y)$，从而 $T(y) \subset T(x)$，$i_y < i_x$，矛盾。 □

作 $\varphi : L \to L(G)$，对任意 $x \in L$，令 $\varphi(x) = \langle a^{p^{t-i_x+1}} \rangle$。$\varphi$ 显然是函数。

对任意 $x, y \in L$，若 $\varphi(x) = \varphi(y)$，则必有 $i_x = i_y$ (这是因为，由 $p^{t-i_x+1}, p^{t-i_y+1} \mid p^t$ 和教材例 17.16 可知，$|\varphi(x)| = p^{i_x-1}$，$|\varphi(y)| = p^{i_y-1}$，若 $i_x \ne i_y$，则 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 不等势，与 $\varphi(x) = \varphi(y)$ 矛盾)。由引理 19.1 就有 $x \preccurlyeq y$ 和 $y \preccurlyeq x$，从而 $x = y$。这就是说，φ 是单射。

由教材定理 17.13 可知，$L(G) = \{\langle a^{p^i} \rangle \mid i = 0, 1, \cdots, t\}$，下面证明，对任意 $0 \le i \le t$，必然存在一个 $x \in L$，使得 $i = t - i_x + 1$：若不然，则由鸽巢原理可知，存在 $x, y \in L$，使得 $x \ne y$ 且 $i_x = i_y$。但由 $i_x = i_y$ 和引理 19.1 应有 $x = y$，矛盾。这就证明了，对任意 $y \in L(G)$，必然存在 $x \in L$，使得 $\varphi(x) = y$。这就证明了 φ 是满射，从而是双射。

最后证明 $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \varphi(x) \preccurlyeq \varphi(y)$。

充分性。

注意到，对任意 $x, y \in L$，有 $0 \le t - i_x + 1, t - i_y + 1 \le t$，从而由教材例 17.16 可知，$|\langle a^{p^{t-i_x+1}} \rangle| = \dfrac{p^t}{(p^t, p^{t-i_x+1})} = \dfrac{p^t}{p^{t-i_x+1}} = p^{i_x-1}$，$|\langle a^{p^{t-i_y+1}} \rangle| = \dfrac{p^t}{(p^t, p^{t-i_y+1})} = \dfrac{p^t}{p^{t-i_y+1}} = p^{i_y-1}$。因此有，

$$\begin{aligned}
& \varphi(x) \preccurlyeq \varphi(y) \\
\iff & \langle a^{p^{t-i_x+1}} \rangle \subseteq \langle a^{p^{t-i_y+1}} \rangle && (\varphi \text{ 定义}) \\
\implies & |\langle a^{p^{t-i_x+1}} \rangle| \le |\langle a^{p^{t-i_y+1}} \rangle| && (\text{教材定理 5.7 推论}) \\
\iff & p^{i_x-1} \le p^{i_y-1} && (|\langle a^{p^{t-i_x+1}} \rangle| = p^{i_x-1}, |\langle a^{p^{t-i_y+1}} \rangle| = p^{i_y-1}) \\
\iff & i_x \le i_y && (\text{指数函数性质}) \\
\iff & x \preccurlyeq y && (\text{引理 19.1})
\end{aligned}$$