p53 第二章 习题解答-3,4,5

3. 解 不能成立，因为$<a,<b,c>>=\{\{a\},\{a,\{\{b\},\{b,c\}\}\}\}$,
而$<a,b,c>=<<a,b>,c>=\{\{\{\{a\},\{a,b\}\}\},\{\{\{a\},\{a,b\}\},c\}\}$,
$a\neq<a,b>,<b,c>\neq c$

4. 解 $<\varnothing,\varnothing>=\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\varnothing\}\}=\{\{\varnothing\}\}$，所以(3)成立。
$<a,\{a\}>=\{\{a\},\{a,\{a\}\}\}$，所以(7)成立

5. 解 (1) $A=\varnothing \vee B=\varnothing$
(2) $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee A=B$
(3) $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$

p54 6.(1)

6.设A,B,C为任意集合，证明下列各式成立.

(1) $(A\times C)\cup(B\times D)\subseteq(A\cup B)\times(C\cup D)$

(2) $(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$

证明 (1) 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in(A\times C)\cup(B\times D)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times C\vee<x,y>\in B\times D$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(y\in C\vee y\in D)$

$\wedge(x\in A\vee y\in D)\wedge(y\in C\vee x\in B)$

$\Rightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(y\in C\vee y\in D)$ （注：使用了化简规则）

$\Leftrightarrow(x\in A\cup B)\wedge(y\in C\cup D)$

$\Leftrightarrow<x,y>\in(A\cup B)\times(C\cup D)$

故$(A\times C)\cup(B\times D)\subseteq(A\cup B)\times(C\cup D)$

p54 6.(2)

方法2：

(1) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$

显然$(A\times C)\cup(B\times D)\subseteq(A\cup B)\times(C\cup D)$

(2) 求证$(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$

证 任取$\langle x,y\rangle$，$\langle x,y\rangle\in(A-B)\times(C-D)$

$\Leftrightarrow x\in A-B\wedge y\in C-D$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in\sim B)\wedge(y\in C\wedge y\in\sim D)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in\sim B\wedge y\in\sim D)$

$\Rightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in\sim B\vee y\in\sim D)$ $(P\wedge Q\Rightarrow P\Rightarrow P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge\neg(x\in B\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\wedge\langle x,y\rangle\notin B\times D$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)-(B\times D)$

第二章 习题解答-7

- 7. 设A,B,C为任意集合，证明下列各式成立.

(1) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

(2) $(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

- 证明 任意$<x,y>\in(A-B)\times C$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge y\in C\wedge y\notin C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\notin B\vee y\notin C)$ (注意)

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\wedge\neg(x\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow<x,y>\in A\times C\wedge<x,y>\notin B\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times C)-(B\times C)$. 得证.

- (2) $(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$
- **证明** $(A\oplus B)\times C$

$$=((A-B)\cup(B-A))\times C$$
$$=((A-B)\times C)\cup((B-A)\times C)$$
$$=((A\times C)-(B\times C))\cup((B\times C)-(A\times C))$$
$$=(A\times C)\oplus(B\times C)$$

得证.

p54 8的解

8. 设A,B为二集合，在什么条件下，有$A\times B\subseteq A$成立？等号能成立吗？

解 $A=\varnothing$或$B=\varnothing$时，必有$A\times B\subseteq A$成立。

当$A=\varnothing$时，有等号成立。

习题9

9. 设A是n元集，B是m元集，A到B共有多少个不同的二元关系？设A=$\{a,b,c\}$,B=$\{1\}$,写出A到B和B到A的全部二元关系。

解 A到B有2^{nm}个不同的二元关系。

$A\times B=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$

A到B的所有二元关系如下：

$R_1=\{<a,1>\}$, $R_2=\{<b,1>\}$, $R_3=\{<c,1>\}$,

$R_4=\{<a,1>,<b,1>\}$, $R_5=\{<a,1>,<c,1>\}$,

$R_6=\{<b,1>,<c,1>\}$, $R_7=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$, $R_8=\varnothing$.

习题9 续

$B\times A=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>\}$

B到A的所有二元关系如下：

$R_1=\{<1,a>\}$, $R_2=\{<1,b>\}$, $R_3=\{<1,c>\}$,

$R_4=\{<1,a>,<1,b>\}$, $R_5=\{<1,a>,<1,c>\}$,

$R_6=\{<1,b>,<1,c>\}$, $R_7=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>\}$,

$R_8=\varnothing$.

习题11

11.设$R_1=\{<a,b>,<b,d>,<c,c>,<c,d>\}$,

$R_2=\{<a,c>,<b,d>,<d,b>,<d,d>\}$，$A=\{a,c>$,求：

解 (1) $R_1 \cup R_2=\{<a,b>,<b,d>,<c,c>,<c,d>, <a,c>, <d,b>,<d,d>\}$

$R_1 \cap R_2=\{<b,d>\}$

$R_1 \oplus R_2=\{<a,b>,<c,c>,<c,d>, <a,c>, <d,b>,<d,d>\}$

(2) $\mathrm{dom}R_1=\{a,b,c\}$, $\mathrm{dom}R_2=\{a,b,d\}$,

$\mathrm{dom}\,(R_1 \cup R_2)=\{a,b,c,d\}$

(3) $\mathrm{ran}R_1=\{b,d,c\}$, $\mathrm{ran}R_2=\{b,c,d\}$,

$\mathrm{ran}\,R_1 \cap \mathrm{ran}R_2=\{b,c,d\}$

11（续）

(4) $R_1\upharpoonright A=\{<a,b>,<c,c>,<c,d>\}$,

$R_1\upharpoonright\{c\}=\{<c,c>,<c,d>\}$

$(R_1\cup R_2)\upharpoonright A=\{<a,b>,<c,c>,<c,d>,<a,c>\}$

$R_2\upharpoonright A=\{<a,c>\}$

(5) $R_1[A]=\{b,c,d\}$

$R_2[A]=\{c\}$

$(R_1\cap R_2)[A]=\varnothing$.

(6) $R_1\circ R_2=\{<a,c>,<a,d>,<d,d>\}$

$R_2\circ R_1=\{<a,d>,<b,b>,<b,d>,<c,b>,<c,d>\}$

$R_1\circ R_1=\{<a,d>, <c,c>,<c,d>\}$

习题12

设$R=\{<\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}>,<\{\varnothing\},\varnothing>,<\varnothing,\varnothing>\}$,求：

解 (1) $R^{-1}=\{<\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\varnothing>,<\varnothing,\{\varnothing\}>,<\varnothing,\varnothing>\}$

(2) $R\circ R=\{<\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}>,<\{\varnothing\},\varnothing>,<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}>\}$

(3) $R\upharpoonright\varnothing=\varnothing$

$R\upharpoonright\{\varnothing\}=\{<\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}>,<\varnothing,\varnothing>\}$

$R\upharpoonright\{\{\varnothing\}\}=\{<\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$R\upharpoonright\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=R$

习题12 续

(4) $R[\varnothing]=\varnothing$

$R[\{\varnothing\}]=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$,

$R[\{\{\varnothing\}\}]=\{\varnothing\}$

$R[\{\varnothing,\{\varnothing\}\}]=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

(5) $\mathrm{dom}\ R=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$\mathrm{ran}\ R=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

$\mathrm{fld}\ R=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

习题15

15. 设A为一集合,R,S,T$\subseteq$P(A)$\times$P(A),其中

R=$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P(A)\wedge x\subset y\}$

S=$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P(A)\wedge x\cap y=\varnothing\}$

T=$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in P(A)\wedge x\cup y=A\}$

试分析R,S,T的性质.

解 A$\neq\varnothing$时, 则

R是反自反、反对称，传递

S是对称的.

T是对称的.

注意: $\varnothing\cap\varnothing=\varnothing\Leftrightarrow\varnothing S\varnothing$,S不是自反的也不是反自反的.

$A\cup A=A\Leftrightarrow ATA$,T不是自反的也不是反自反的.

15 续

A=∅时,

$P(A)=\{\varnothing\}, P(A)\times P(A)=\{<\varnothing, \varnothing>\}$

R=∅, 故R具有反自反性、对称性、反对称性、传递性

S={<∅, ∅>},具有自反性、对称性、反对称性、传递性

T={<∅, ∅>}具有自反性、对称性、反对称性、传递性

习题16

16. 设$A=\{0,1,\ldots,12\}$,$R,S\subseteq A\times A$,其中

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x+y=10\}$$

$$S=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x+3y=12\}$$

用列举法表示出R和S;分析R和S的性质.

解 (1) $R=\{\langle 0,10\rangle,\langle 1,9\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 5,5\rangle,$

$\langle 10,0\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 8,2\rangle,\langle 7,3\rangle,\langle 6,4\rangle\}$

$S=\{\langle 0,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 12,0\rangle\}$

(2) R是对称的;

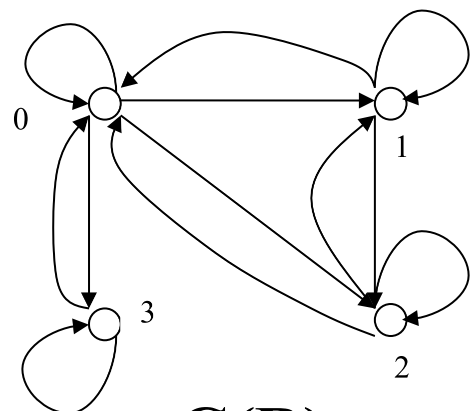
S是反对称的.

习题17

17. 设A={0,1,2,3}.R⊆A×A,且R={<x,y>|x=y∨x+y∈A},求R的关系矩阵M(R)和关系图G(R),并讨论R的性质.

解

$$M(R)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$



G(R)

R具有自反性、对称性.

<3,0>∈R,<0,1>∈R,但<3,1>∉R.所以R不是传递的

习题18

18. 设A={a,b,c},图2.7中给出了4个二元关系R_1,R_2,R_3,R_4的关系图，写出每个关系的集合表达式和关系矩阵，并讨论每个关系的性质。

解 $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

R_1有自反性、反对称性、传递性

18 续

$R_2=\{<a,b>,<b,c>\}$

$$M_{R_2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

R_2有反自反性、反对称性

$R_3=\{<a,b>,<c,b>,<a,c>,<c,a>\}$,

$$M_{R_3}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

R_3有反自反性

18续

$R_4=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

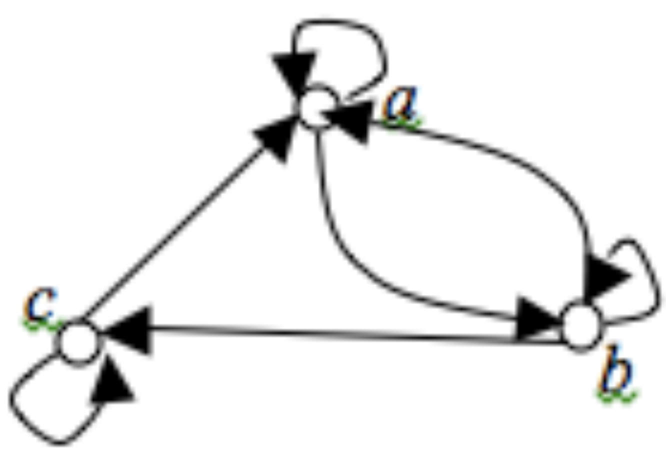
$$M_{R_4}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

R_4有自反性、对称性、反对称性、传递性

19

19. 设A={a,b,c},$R_1,R_2,R_3,R_4 \subseteq A\times A$,它们的关系矩阵分别为……，写出各关系的集合表达式，画出关系图并讨论它们的性质。

解$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,c>\}$



G(R1)

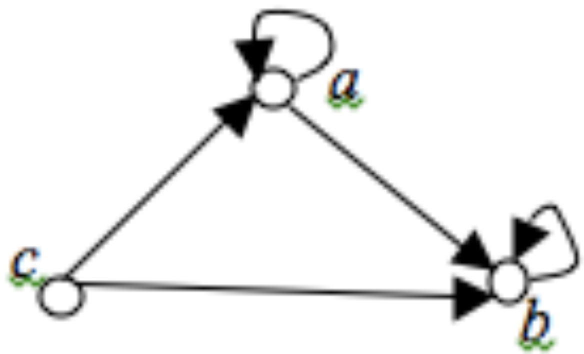
R_1有自反性；

$<c,a>\in R_1$, $<a,b>\in R_1$,但$<c,b>\notin R_1$

所以R_1无传递性。

19续

$R_2=\{<a,a>,<a,b>, <b,b>, <c,a>,<c,b>\}$



G(R_2)

$<a,a>\in R_2$,所以R_2没有反自反性。

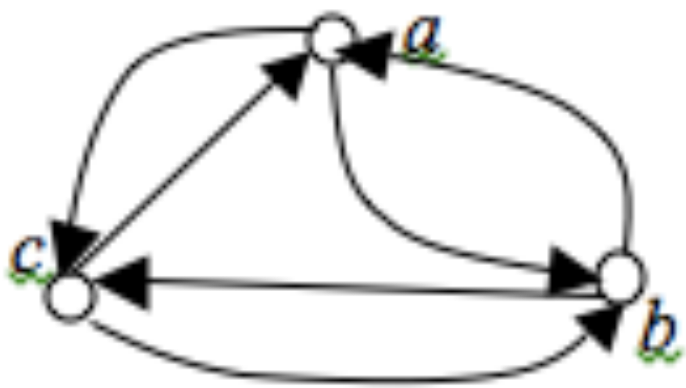
$<c,c>\notin R_2$,所以R_2没有自反性。

$<c,a>\in R_2$, $<a,c>\notin R_2$,所以R_1没有对称性

R_2有反对称性、传递

19续

$R_3=\{<a,b>,<a,c>,<b,a>, <b,c>,<c,a>,<c,b>\}$



$G(R_3)$

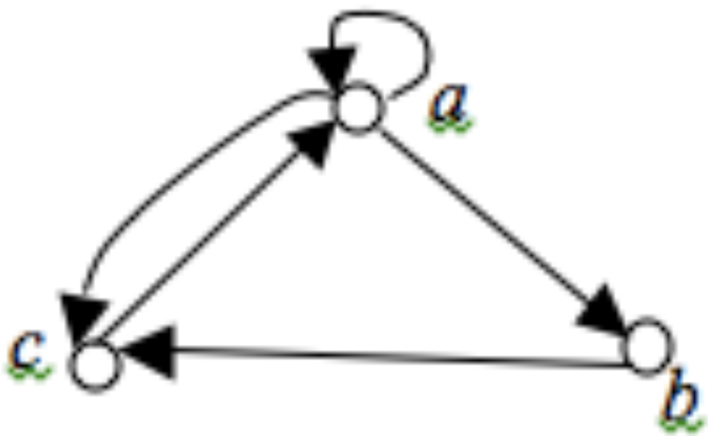
$<c,a>\in R_3$, $<a,c> \in R_3$,$<c,c>\notin R_3$

所以R_3没有传递性。

R_3有反自反性、对称性；

19 续

$R_4=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,a>\}$



G(R4)

$<c,a>\in R_4$, $<a,b>\in R_4$, $<c,b>\notin R_4$

所以R_4没有传递性。

R_4不具有任何性质

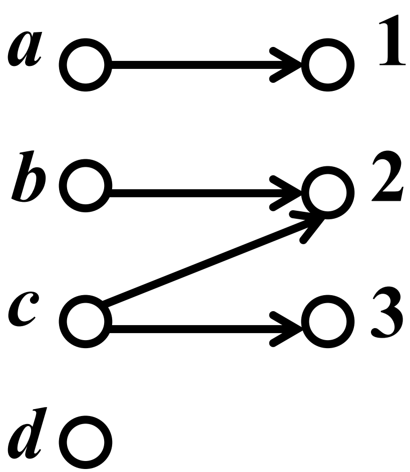
习题20

画出下列二元关系的关系图，并写出关系矩阵.

$A_1=\{a,b,c,d\},B_1=\{1,2,3\},R_1\subseteq A_1\times B_1$,且

$R_1=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>,<c,3>\}$

解 关系图和关系矩阵如下



$$M_{R_4}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

22

22.设R是非空集合A上的二元关系,试证明,如果R是自反的，并且是传递的,则$R\circ R=R$,但其逆不真.

证 由于R是传递的，故$R\circ R\subseteq R$.

任取$<x,y>\in R$，则有$<y,y>\in R$.

$<x,y>\in R\wedge <y,y>\in R\Rightarrow <x,y>\in R\circ R$，即$R\subseteq R\circ R$

因此, $R\circ R=R$

如果$R\circ R=R$,R不一定是自反的和传递的.反例：

$A=\{1,2\}$,$R=\{<1,1>\}$,则$R\circ R=R$，但R不是自反的.

22(续)

方法2：证 由于R是传递的，故$R\circ R\subseteq R$.

由于R是自反的,所以$I_A\subseteq R$,故而有$R=R\cup I_A$.

$R\circ R=(R\cup I_A)\circ(R\cup I_A)= R\circ R\cup R\circ I_A\cup I_A\circ R\cup I_A\circ I_A$

$= R\circ R\cup R\cup I_A= R\circ R\cup R$

所以$R\subseteq R\circ R$

因此, $R\circ R=R$

方法3： 由于R是传递的，故$R\circ R\subseteq R$.

$R\cup(R\circ R)=(R\circ I_A)\cup(R\circ R)=R\circ(I_A\cup R)= R\circ R$

所以$R\subseteq R\circ R$

23

23.设R,S是非空集合A上的二元关系,且它们都是对称的.证明R°S具有对称性当且仅当R°S=S°R.

证 【R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$】

先证必要性.已知R°S具有对称性,且R,S都有对称性,所以有

$$R\circ S=(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R$$

再证充分性.已知R°S=S°R.

$$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R=R\circ S$$

故$R\circ S$是对称的.

习题23 方法2

23.设R,S是非空集合A上的二元关系,且它们都是对称的.证明$R\circ S$具有对称性当且仅当$R\circ S=S\circ R$.

证 【R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$】

先证$\Rightarrow$： 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in R\circ S$

$\Leftrightarrow <y,x>\in R\circ S$

$\Leftrightarrow \exists z(<y,z>\in S \wedge <z,x>\in R)$

$\Leftrightarrow \exists z(<z,y>\in S \wedge <x,z>\in R)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in S\circ R$

所以$R\circ S=S\circ R$

习题23 方法2 续

23.设R,S是非空集合A上的二元关系,且它们都是对称的.
证明R°S具有对称性当且仅当R°S=S°R.

证 【R是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$】

再证$\Leftarrow$： 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in R\circ S$

$\Leftrightarrow\exists z(<x,z>\in S\wedge<z,y>\in R)$

$\Leftrightarrow\exists z(<z,x>\in S\wedge<y,z>\in R)$

$\Leftrightarrow<y,x>\in S\circ R$

$\Leftrightarrow<y,x>\in R\circ S$

所以$R\circ S$是对称的

p56 Exercises 26

26. 解 1)

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ M(R^2)=M^2(R)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M(R^3)=M^3(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$R^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$

$R^3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$

Exercises 26

2)

$$M(R^4) = M^4(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

显然，$R^2=R^4$,即$m=2$，$n=4$

3) $R^2= R^4= R^6=\ldots= R^{2k},(k\geq1)$,

$R^3= R^5= R^7=\ldots= R^{2k+1},(k\geq1)$

习题27

- **27**. 设R_1,R_2是$n(n\geq 2)$元集A上的二元关系,已知$\mathrm{fld}R_1\cap\mathrm{fld}R_2=\varnothing$,证明$(R_1\cup R_2)^m=R_1^m\cup R_2^m$ $(m\geq 0)$.
- **证** 归纳法

当m=1时, $R_1\cup R_2=R_1\cup R_2$

假设m=k时成立,当m=k+1时,

$$(R_1\cup R_2)^{k+1}=(R_1\cup R_2)^k\circ(R_1\cup R_2)=(R_1^k\cup R_2^k)\circ(R_1\cup R_2)$$

$$=(R_1^k\circ R_1)\cup(R_2^k\circ R_2)\cup(R_1^k\circ R_2)\cup(R_2^k\circ R_1)$$

因为$\mathrm{fld}R_1\cap\mathrm{fld}R_2=\varnothing$，故 $(R_1^k\circ R_2)=\phi\quad R_2^k\circ R_1=\phi$

因此$(R_1\cup R_2)^{k+1}=(R_1^k\circ R_1)\cup(R_2^k\circ R_2)=R_1^{k+1}\cup R_2^{k+1}$

得证.

28

28. 设$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,$R\subseteq A\times A$,且$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<d,e>,<e,f>,<f,g>,<g,h>,<h,d>\}$,求最小的自然数$m,n(m\leq n)$,使得$R^m=R^n$.

解 $R=R_1\cup R_2$,其中

$R_1=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$,

$R_2=\{<d,e>,<e,f>,<f,g>,<g,h>,<h,d>\}$

$R^m=(R_1\cup R_2)^m=R_1{}^m\cup R_2{}^m$.

$R_1{}^{3k}=\mathrm{I}_{\mathrm{fldR}_1}$, $R_1{}^{5k}=\mathrm{I}_{\mathrm{fldR}_2}$,$\mathrm{k}\in\mathrm{N}$.

$R^{15k}=(R_1\cup R_2)^{15k}=R_1{}^{15k}\cup R_2{}^{15k}=\mathrm{I}_{\mathrm{fldR}_1}\cup\mathrm{I}_{\mathrm{fldR}_2}=I_A$.

取$m=0,n=15$,有$R^0=R^{15}=I_A$.0和15满足要求.

29

29. 设$A=\{a,b,c,d\}, R\subseteq A\times A, R=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<c,d>\}$.

求 (1) $r(R)$　　(2) $s(R)$　　(3) $t(R)$

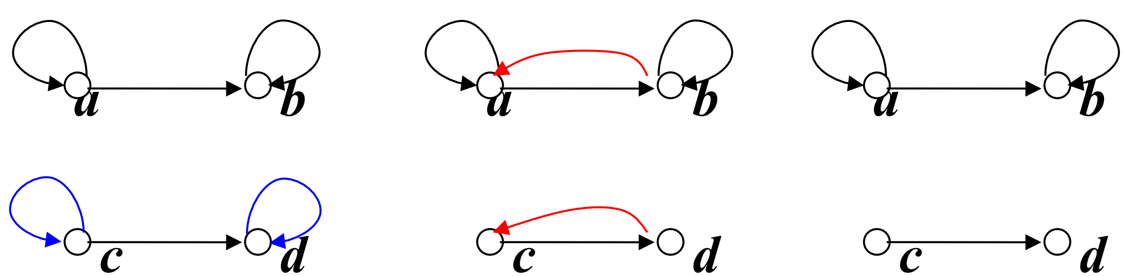
并画出它们的关系图.

解

$$r(A)=I_A\cup R=\{<a,a>,<b,b><c,c>,<d,d>,<a,b>,<c,d>\}$$

$$s(R)=R\cup R^{-1}=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<c,d>,<b,a>,<d,c>\}$$

$$t(R)=R=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<c,d>\}$$



r(R)　　s(R)　　t(R)

30.

30.设R是非空集合A上的二元关系,记传递闭包$t(R)=R^+$,

记$\bigcup_{i=0}^{\infty} R^i=R^{\oplus}$,证明:

（1）$(R^+)^+=R^+$; （2）$(R^{\oplus})^{\oplus}=R^{\oplus}$;

（3）$R\circ R^{\oplus}=R^+=R^{\oplus}\circ R$.

解 （1）因为R^+是传递的,因此$(R^+)^+=t(R^+)=R^+$

（2）$R^{\oplus}=I_A\cup R^+=rt(R)$,因此$R^{\oplus}$是传递的,

即$t(R^{\oplus})=R^{\oplus}$

$(R^{\oplus})^{\oplus}=(R^{\oplus})^+\cup I_A=t(R^{\oplus})\cup I_A=R^{\oplus}\cup I_A=R^+\cup I_A\cup I_A$

$=R^+\cup I_A=R^{\oplus}$

30（续）

另一种方法：

$R^{\oplus}=I_A\cup R^{+}=rt(R)$,

$(R^{\oplus})^{\oplus}=rt(rt(R))=rt(R)=R^{\oplus}$

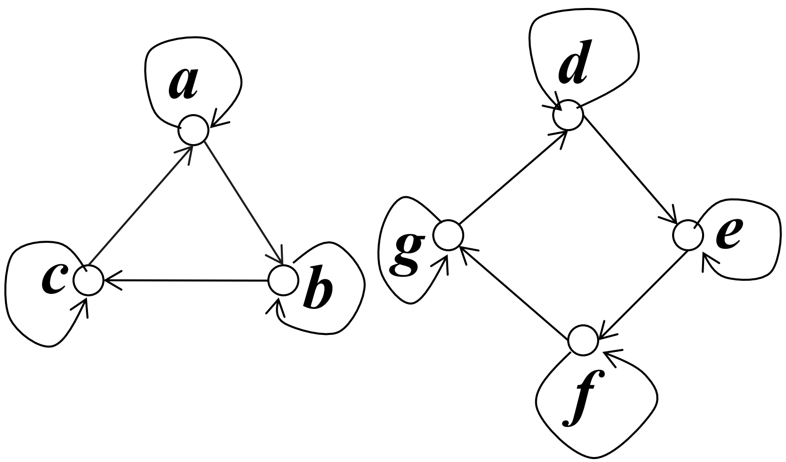
(3) $R\circ R^{\oplus}=R\circ\bigcup_{i=0}^{\infty}R^i=\bigcup_{i=0}^{\infty}R^{i+1}=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R^{+}$

$R^{\oplus}\circ R=(\bigcup_{i=0}^{\infty}R^i)\circ R=\bigcup_{i=0}^{\infty}R^{i+1}=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R^{+}$

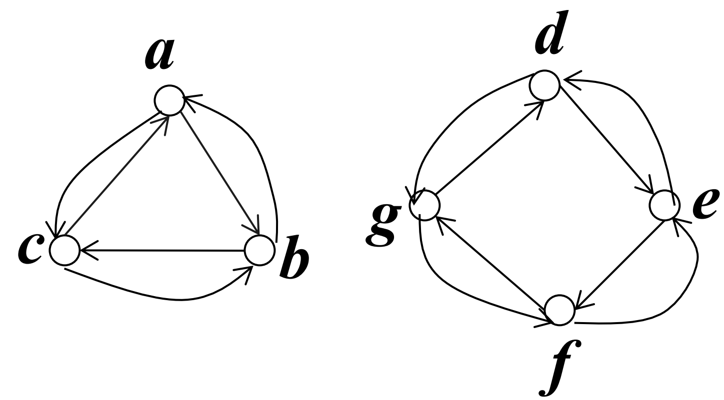
所以$R\circ R^{\oplus}=R^{\oplus}\circ R$

Exercises 31

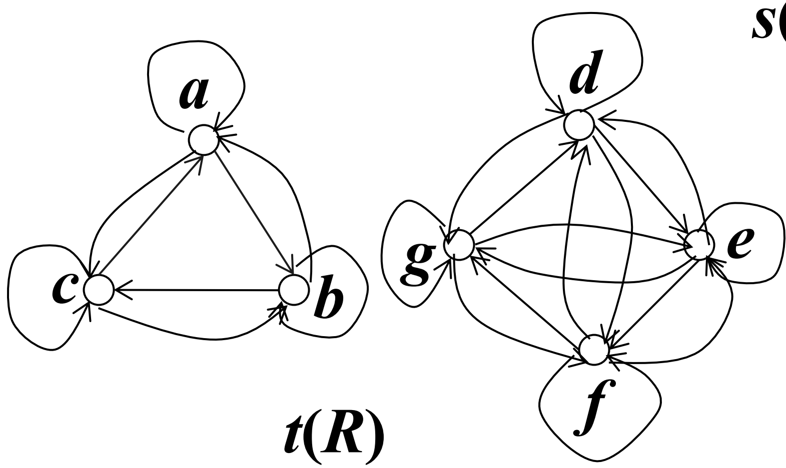
31. r(R), s(R), t(R)的关系图如下：



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

Exercise 34

解

(1) 不是。因为$\sim$R不是自反的

(2) 不是。因为R_1-R_2(R_2-R_1)不是自反的

(3) 不是，可能没有传递性，如

$A=\{0,1,2\}, R_1=A\times A, R_2=\{<0,1>,<1,0>\}\cup I_A$

R_1-R_2没有传递性

(4) 不是，具有自反，但不一定是对称和传递的，如

$A=\{1,2,3,4\}, R_1=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

$R_2=\{<2,3>,<3,2>\} \cup I_A$

$R_1 \circ R_2=\{<1,2>,<2,1>,<3,1>,<2,3>,<3,2>\} \cup I_A$

Exercises 35

35.设R是非空集合A上的二元关系,R满足下面条件:

(1) R是自反的;

(2) $\forall x,y,z\in$A,若$<x,y>\in R\wedge<x,z>\in R$,则$<y,z>\in R$.

证明R是A上的等价关系.

证 只需证明R是对称的和传递的.任取$<x,y>$,

$<x,y>\in R\wedge<x,x>\in R\Rightarrow<y,x>\in R$,故$R$是对称的;

任取$<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R$

$\Rightarrow<y,x>\in R\wedge<y,z>\in R\Rightarrow<x,z>\in R$,

故R是传递的.

因此R是等价关系.

Exercise 37

证明 $\forall x \in A$, $x \equiv x \pmod{5}$, 所以xRx,因此R是自反的.

$\forall xRy \Rightarrow x-y=5k \Rightarrow y-x=5(-k) \Rightarrow yRx, k \in Z$,故$R$是对称的

$\forall xRy, yRz \Rightarrow x-y=5k_1, y-z=5k_2 \Rightarrow x-z=5(k_1+k_2) \Rightarrow xRz, k_1, k_2 \in Z$, 故$R$是传递的.

综上所述，R是等价关系。

$[x]=\{y|yRx\}=\{y|y \equiv x \pmod{5}, y \in A\}$

$[0]=\{5,10,15,20\}$,$[1]=\{1,6,11,16\}$,$[2]=\{2,7,12,17\}$,$[3]=\{3,8,13,18\}$,$[4]=\{4,9,14,19\}$

$A/R=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$

39.设A={1,2,3,4},π={{1,2,3},{4}}是A的一个划分.

(1)求π诱导出的A上的等价关系R_π及商集A/R_π;

(2)求π的所有加细诱导出的A上的等价关系及其商集.

证 (1) $$R_\pi=\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}\cup\{4\}\times\{4\}$$

$$=I_A\cup\{<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>,<2,3>,<3,2>\}$$

$$A/R_\pi=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$$

(2) π的所有加细：

$\pi_1=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$, $R_{\pi_1}=I_A\cup\{<1,2>,<2,1>\}$, $A/R_{\pi_1}=\pi_1$,

$\pi_2=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ $R_{\pi_2}=I_A\cup\{<2,3>,<3,2>\}$, $A/R_{\pi_2}=\pi_2$

$\pi_3=\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$, $R_{\pi_3}=I_A\cup\{<1,3>,<3,1>\}$, $A/R_{\pi_3}=\pi_3$

$\pi_4=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ $R_{\pi_4}=I_A$, $A/R_{\pi_4}=\pi_4$

$\pi_5=\pi$ $R_{\pi_5}=R$, $A/R_{\pi_5}=\pi$

41.设R_1是A上的等价关系, R_2是B上的等价关系,A,B均非空.$R_3=\{<<x_1,y_1>,<x_2,y_2>>|x_1R_1x_2 \wedge y_1R_2y_2\}$,证明$R_3$是A×B上的等价关系.

证：任意$<x,y> \in A \times B$,

$xR_1x \wedge yR_2y \Rightarrow <<x,y>,<x,y>> \in R_3$,所以$R_3$是A×B上的自反关系;

任意$<x_1,y_1>R_3<x_2,y_2>$,

$<x_1,y_1>R_3<x_2,y_2> \Rightarrow x_1R_1x_2 \wedge y_1R_2y_2 \Rightarrow x_2R_1x_1 \wedge y_2R_2y_1 \Rightarrow$

$<x_2,y_2>R_3<x_1,y_1>$,所以R_3是A×B上的对称关系;

任意$<x_1,y_1>R_3<x_2,y_2>$, $<x_2,y_2>R_3<x_3,y_3>$,

$<x_1,y_1>R_3<x_2,y_2> \wedge <x_2,y_2>R_3<x_3,y_3> \Rightarrow x_1R_1x_2 \wedge y_1R_2y_2$

$x_2R_1x_3 \wedge y_2R_2y_3 \Rightarrow x_1R_1x_3 \wedge y_1R_2y_3 \Rightarrow <x_1,y_1>R_3<x_3,y_3>$,

所以R_3是A×B上的传递关系;

- 求偏序集$<\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\},\leq>$，其中$\leq$是加细关系，并画出哈斯图。
- 解 $\leq=\{<\pi_4, \pi_1>, <\pi_4, \pi_2>, <\pi_4, \pi_3>, <\pi_4, \pi_5>, <\pi_4, \pi_2>, <\pi_1, \pi_5>, <\pi_2, \pi_5>, <\pi_3, \pi_5>, <\pi_1, \pi_1>, <\pi_2, \pi_2>, <\pi_3, \pi_3>, <\pi_4, \pi_4>, <\pi_5, \pi_5>\}$

(2) π的所有加细：

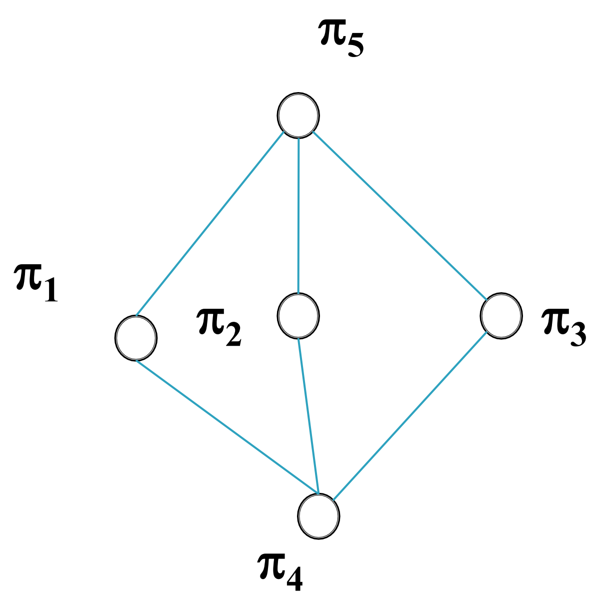
$$\pi_1 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\},$$

$$\pi_2 = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$$

$$\pi_3 = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\},$$

$$\pi_4 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$$

$$\pi_5 = \pi$$



Exercises 43

- **解**

$$\sum_{i=1}^{5}\begin{Bmatrix}5\\ i\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}5\\ 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}5\\ 3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}5\\ 4\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}5\\ 5\end{Bmatrix}$$

$$=1+(2\begin{Bmatrix}4\\ 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\ 1\end{Bmatrix})+(3\begin{Bmatrix}4\\ 3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\ 2\end{Bmatrix})+(4\begin{Bmatrix}4\\ 4\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\ 3\end{Bmatrix})+1$$

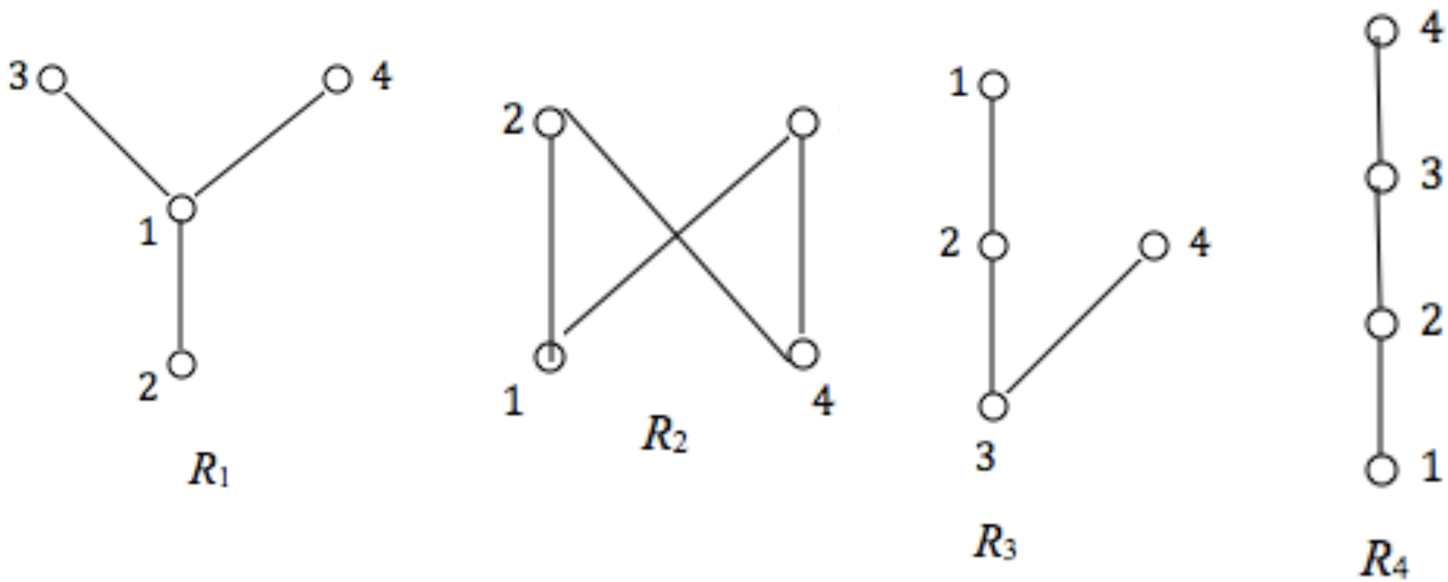
$$=2+3\begin{Bmatrix}4\\ 2\end{Bmatrix}+1+4\begin{Bmatrix}4\\ 3\end{Bmatrix}+4=7+3\begin{Bmatrix}4\\ 2\end{Bmatrix}+4\begin{Bmatrix}4\\ 3\end{Bmatrix}$$

$$=7+3(2\begin{Bmatrix}3\\ 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}3\\ 1\end{Bmatrix})+4(3\begin{Bmatrix}3\\ 3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}3\\ 2\end{Bmatrix})=7+10\begin{Bmatrix}3\\ 2\end{Bmatrix}+3\begin{Bmatrix}3\\ 1\end{Bmatrix}+12\begin{Bmatrix}3\\ 3\end{Bmatrix}$$

$$=7+10\times 3+3\times 1+12\times 1=52$$

Exercise 44

- （1）哈斯图



- （2）R_4是全序关系。

Exercises 45

45. 分别画出下列偏序集的哈斯图，并指出A的最大元、最小元、极大元、极小元.

(1) 偏序集$<A_1, \preccurlyeq_1>$,其中, $A_1=\{a,b,c,d,e\}$,

$\preccurlyeq_1=I_{A_1}\cup\{<a,b>,<a,c>,<a,d>,<a,e>,<b,e>,<c,e>,<d,e>\}$.

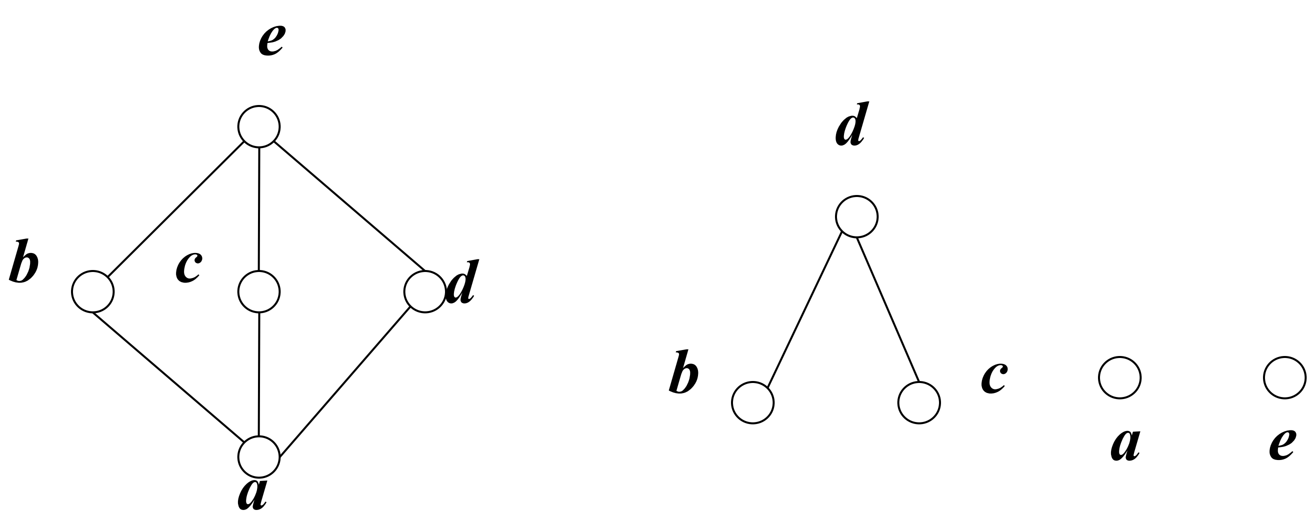
(2)偏序集$<A_1, \preccurlyeq_1>$,其中, $A_2=\{a,b,c,d,e\}$,

$\preccurlyeq_2=I_{A_2}\cup\{<c,d>,<b,d>\}$

Exercises 45

(1) 哈斯图如下图左图所示. 最大元、极大元是e，最小元、极小元是a

(2)哈斯图如下图右图所示. 无最大元、极大元是a,d,e，无最小元，极小元是a,b,c,e.



Exercise 46

46. 在偏序集<Z+, ≤ >中,Z+为正整数集合, ≤ 为整除关系,设B={1,2,…,10},求B的上界、上确界、下界、下确界.

解：B的上界是2520*k*,*k*是整数

B的上确界是2520，

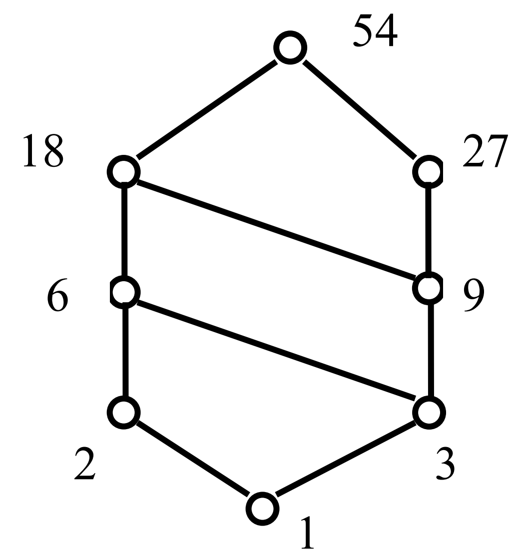
B的下界是1，下

确界是1.

47. 设偏序集为<A,|>,其中A是54的因子的集合, |为整除关系,画出哈斯图,指出A中有多少条最长链,并指出A中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链.又至多可以划分成多少个互不相交的反链.

解 $A=\{1,2,3,6,9,18,27,54\}$

最长链有4条.



因为偏序集中的最长链的长度为5,根据定理A中至少存在5个互不相交的反链.

$|A|=8$,因此A中的元素至多可划分为8个互不相交的反链,A中8个元素组成的8个单元子集满足要求.

Exercises 50

证 任取$<x,y>\in A\times B$，则$x\in A, y\in B$

$<x,x>\in R_1\wedge<y,y>\in R_2\Leftrightarrow<<x,y>,<x,y>>\in R$,故R是自反的.

任取$<<x,y>,<m,n>>\in R\wedge<<m,n>,<x,y>>\in R$

$\Leftrightarrow<x,m>\in R_1\wedge<y,n>\in R_2\wedge<m,x>\in R_1\wedge<n,y>\in R_2$

$\Leftrightarrow x=m\wedge y=n\Leftrightarrow<x,y>=<m,n>$,故R是反对称的.

任取$<<x,y>,<m,n>>\in R\wedge<<m,n>,<p,q>>\in R$

$\Leftrightarrow<x,m>\in R_1\wedge<y,n>\in R_2\wedge<m,p>\in R_1\wedge<n,q>\in R_2$

$\Leftrightarrow<x,p>\in R_1\wedge<y,q>\in R_2$

$\Leftrightarrow<<x,y>,<p,q>>\in R$，故R是传递的.

因此R是偏序关系.

Exercises 50

证 任取$<x,y>\in A\times B$，则$x\in A, y\in B$

$<x,x>\in R_1 \wedge <y,y>\in R_2 \Leftrightarrow <<x,y>,<x,y>>\in R$,故R是自反的.

任取$<<x,y>,<m,n>>\in R \wedge <<m,n>,<x,y>>\in R$

$\Leftrightarrow <x,m>\in R_1 \wedge <y,n>\in R_2 \wedge <m,x>\in R_1 \wedge <n,y>\in R_2$

$\Leftrightarrow x=m \wedge y=n \Leftrightarrow <x,y>=<m,n>$,故R是反对称的.

任取$<<x,y>,<m,n>>\in R \wedge <<m,n>,<p,q>>\in R$

$\Leftrightarrow <x,m>\in R_1 \wedge <y,n>\in R_2 \wedge <m,p>\in R_1 \wedge <n,q>\in R_2$

$\Leftrightarrow <x,p>\in R_1 \wedge <y,q>\in R_2$

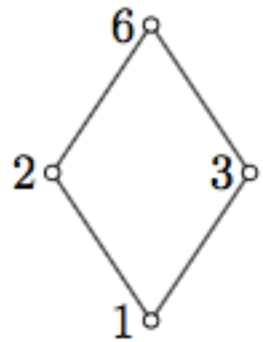
$\Leftrightarrow <<x,y>,<p,q>>\in R$，故R是传递的.

因此R是偏序关系.

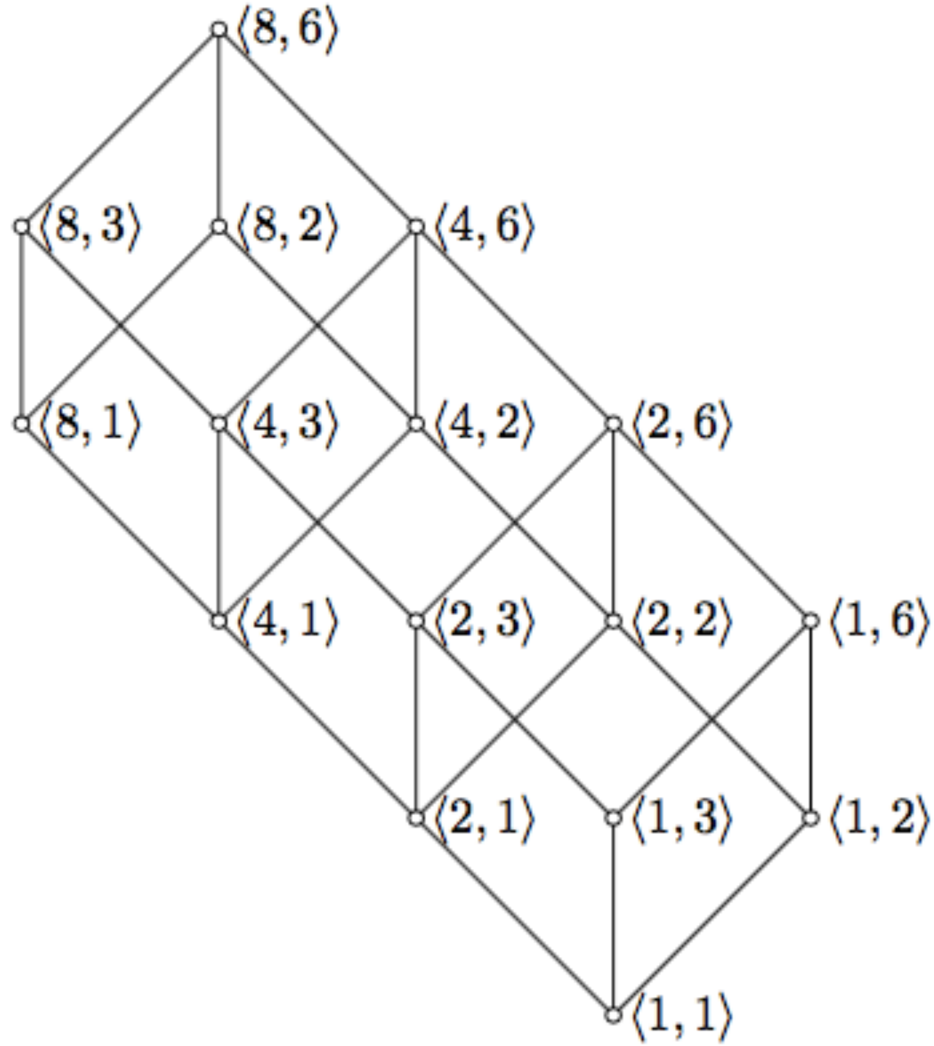
Exercises 51

解

R_1



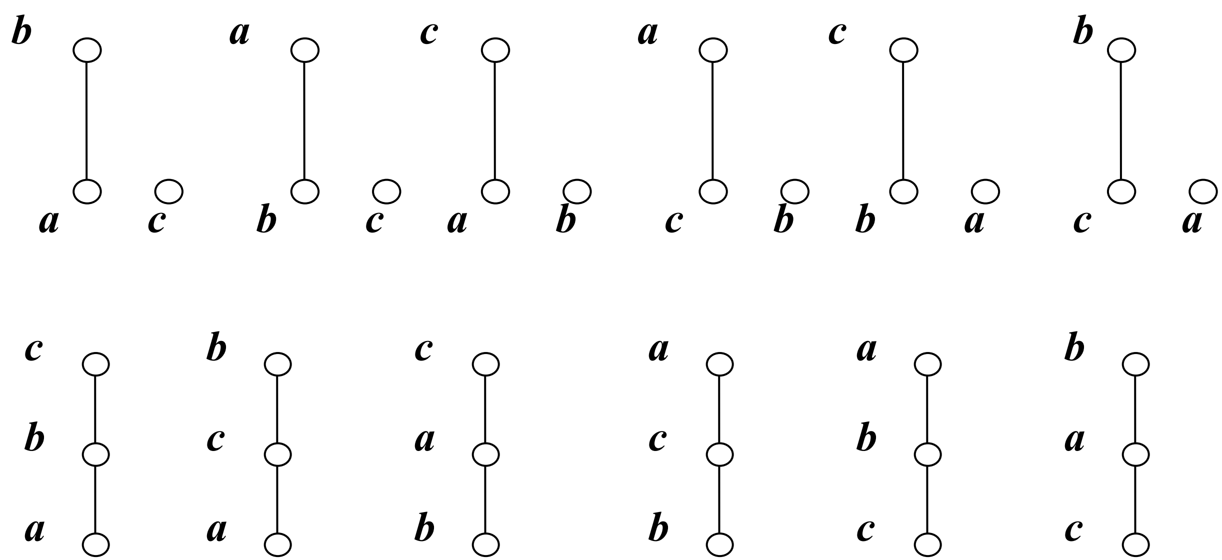
R_2



R

52.

- **52. 设A是3元集,问A上共有多少个偏序关系.**
- **解 三个元素的哈斯图中至多有2条边,所以没有边的有1个,有一条边的有6个,有2条边的有12个,共计有19个.**



52.解（续）