

1993 年计算机数学基础

四、

1.

- (1) K_5 和 K_6 中都有且仅有 2 条边不重的哈密顿回路。
- (2) 6 棵(最大度为 2, 4, 5 的各一棵, 最大度为 3 的 3 棵)。
- (3) 3 个(含 K_5 的 1 个, 含 $K_{3,3}$ 的 2 个)。

2.

证明: 考虑 G 的生成树 T , 由于任何非平凡的无向树至少有两片树叶, 所以 T 中存在树叶 $v_1, v_2 \in V(G)$, $v_1 \neq v_2$ 。由于 v_1, v_2 是树叶, 所以 $T - \{v_1, v_2\}$ 仍是连通的, 从而 $G - \{v_1, v_2\}$ 也是连通的。□

3. 可以安排。

证明: 按如下方式作图 $G = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$: 令 $V_1 = \{u_i \mid i = 1, \dots, 7\}$ 为 7 门课程对应顶点的集合, $V_2 = \{v_i \mid i = 1, \dots, 7\}$ 为 7 名教员对应顶点的集合。令 $(u_i, v_j) \in E(G)$ 当且仅当 v_j 对应的教员可以教 u_i 对应的课程。

显然, $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 是二部图。由题设, V_1 中每个顶点至少关联 3 条边, V_2 中每个顶点至多关联 3 条边。由教材定理 13.12 知, G 中存在完美匹配。而 G 中完美匹配所对应的安排方案即为所求。□

五、

1.

- (1) 不正确。(充要条件是 $B \subseteq A$)。
- (2) 不正确。($\mathcal{P}(A) - A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$)。
- (3) 正确。(令 $R = I_A$ 即可)。
- (4) 正确。($\langle 2x + y, 6 \rangle = \langle 5, x + y \rangle$ 当且仅当 $2x + y = 5 \wedge x + y = 6$)。
- (5) 不正确。($M_n(\mathbb{R})$ 中有不可逆元)。
- (6) 不正确。(A 对乘法不封闭, 不构成代数系统)。
- (7) 正确。(教材定理 19.21)。

2.

(1) 由于 $0 \in \mathbb{N}$ 但 $0 \notin \text{ran } f$, 所以 f 不是满射。由于 $f(\langle 0, 1 \rangle) = f(\langle 1, 0 \rangle) = 2$, 所以 f 不是单射。 f 自然也不是双射。

$$f(\mathbb{N} \times \{1\}) = \{x + 1 + 1 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x + 2 \mid x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} - \{0, 1\}。$$

(2) 由有序对性质知, 对任意 $x, y \in \mathbb{N}$, $\langle x, x + 1 \rangle = \langle y, y + 1 \rangle \Rightarrow x = y$, 所以 f 是单射。由于