证明： 对任意 $x \in \mathbb{Z}$，分两种情况：

情况一：若 $x = 2k(k \in \mathbb{Z})$ 为偶数，则 $f(\triangle x) = f(2k+1) = (2k+1) \bmod 2 = 1$，而 $\diamond f(x) = \diamond(2k \bmod 2) = \diamond 0 = 1 \bmod 2 = 1$，从而有 $f(\triangle x) = \diamond f(x)$。

情况二：若 $x = 2k+1(k \in \mathbb{Z})$ 为奇数，则 $f(\triangle x) = f(2k+2) = (2k+2) \bmod 2 = 0$，而 $\diamond f(x) = \diamond(2k+1 \bmod 1) = \diamond 1 = 2 \bmod 2 = 0$，从而也有 $f(\triangle x) = \diamond f(x)$。

这就是说，对任意 $x \in \mathbb{Z}$，都有 $f(\triangle x) = \diamond f(x)$，从而 f 是同态。 □

由于 $f(0) = 0, f(1) = 1$，所以 f 是满同态。又由于 $f(2) = f(0) = 0$，所以 f 不是单同态，从而不是同构。

2.

(1)

证明： 对任意 $x, y \in L$，有：

$$
\begin{aligned}
f_a(x \vee y) &= (x \vee y) \wedge a && (f_a \text{ 定义}) \\
&= (x \wedge a) \vee (y \wedge a) && (L \text{ 是分配格}) \\
&= f_a(x) \vee f_a(y) && (f_a \text{ 定义}) \\
f_a(x \wedge y) &= (x \wedge y) \wedge a && (f_a \text{ 定义}) \\
&= (x \wedge y) \wedge (a \wedge a) && (a \wedge a = a) \\
&= (x \wedge a) \wedge (y \wedge a) && (\text{交换律、结合律}) \\
&= f_a(x) \wedge f_a(y) && (f_a \text{ 定义})
\end{aligned}
$$

这就证明了 f_a 是自同态。同理可证 g_a 是自同态。 □

(2) 由幂集格定义知，对任意 $x \in L$，$x \in f_{\{1\}}(L)$ 当且仅当 $x \subseteq \{1\}$ (充分性：若 $x \subseteq \{1\}$，则 $x = x \cap \{1\} = f_{\{1\}}(x) \in f_{\{1\}}(L)$。必要性：若 $x \in\in f_{\{1\}}(L)$，则 $x = f_{\{1\}}(y) = y \cap \{1\} \subseteq \{1\}$)。从而 $f_{\{1\}}(L) = \{\varnothing, \{1\}\}$，$f_{\{1\}}$ 的同态像为 $\langle \{\varnothing, \{1\}\}, \wedge, \vee \rangle$。

同理可知，对任意 $x \in L$，$x \in g_{\{1\}}(L)$ 当且仅当 $\{1\} \subseteq x$。从而 $g_{\{1\}}(L) = \{\{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$，$g_{\{1\}}$ 的同态像为 $\langle \{\{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}, \wedge, \vee \rangle$。

3.

证明： 充分性。若 G 为素数，则由 Lagrange 定理知，G 没有非平凡的子群(从而也没有非平凡的正规子群)，所以 G 是单群。

必要性。设 G 为单群。任取 G 中一个非单位元 $a \in G$ (本题应假定 G 是非平凡的，否则若 $G = \{e\}$，则 G 也是单群，但 $|G| = 1$，不是素数)，则由于 $\langle a \rangle$ 是 G 的正规子群(因为 G 是 Abel 群，所以 G 的一切子群都是正规的)，且 a 不是单位元，所以 $|\langle a \rangle| = |a| > 1$，$\langle a \rangle \neq \{e\}$。由单群定义知，必有 $\langle a \rangle = G$。从而 $G = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 是由 a 生成的循环群。下面证明 G 是素数阶的。

反设 G 不是素数阶的，则分两种情况讨论。

情况一：若 G 是无限阶的，则 a 也是无限阶的，从而 $a^2 \neq e, a^2 \neq a$。这就是说，$\langle a^2 \rangle \neq G$ (因为 $a \notin \langle a^2 \rangle$) 且 $\langle a^2 \rangle \neq \{e\}$ (因为 $a^2 \in \langle a^2 \rangle$)，从而 $\langle a^2 \rangle$ 是 G 的一个非平凡的正规子群，这与 G 是单群矛盾。

情况二：若 G 是有限阶的且 $|G|$ 不是素数，则存在 $k \mid |G|, 1 < k < |G|$，而 $1 < |\langle a^k \rangle| = |a^k| = \dfrac{|G|}{k} < |G|$，从而 $\langle a^k \rangle$ 是 G 的一个非平凡的正规子群，矛盾。 □