§6.4 方向导数与梯度

回忆: $f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

f在$P_0(x_0,y_0)$可微 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\rho}=0$

1. 方向导数 — 沿某一方向变化率

(1) 定义: 设$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$邻域内有定义, l是从P_0出发一条射线, $\forall P\in l$ 且 $P\in U(P_0)$, ρ表示P与P_0两点间距离. 若极限

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}\ \text{存在}$$

则称此极限为f在P_0沿方向l的方向导数. 记 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$ 或 $f_l'(P_0)$

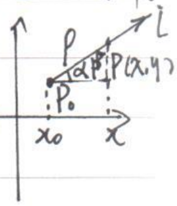
注: 1) 若 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}>0$, 表明$f$在$P_0$点沿$l$方向是增加的.

2) 若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}$ 存在, 则f在P_0点沿x轴正向的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}$

则f在P_0点沿x轴负向的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}$

(2) 方向导数的存在性与计算

定理: 若$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$点可微, 则f在点P_0沿任意方向的方向导数都存在, 且 $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=f_x'(P_0)\cos\alpha+f_y'(P_0)\cos\beta.}$ 其中α,β是方向l的方向角



证: 射线l参数方程为: $\begin{cases}x=x_0+\rho\cos\alpha\\ y=y_0+\rho\cos\beta\end{cases}$ (ρ参数,为PP_0距离)

$\forall P\in l$ 且 $P\in U(P_0)$. 由f在P_0点可微得

$$\Delta z=f(P)-f(P_0)=f_x'(P_0)\Delta x+f_y'(P_0)\Delta y+o(\rho)$$