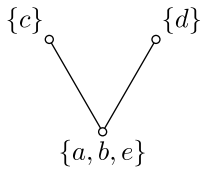
2002 年计算机数学基础

三、

1.

(1) $A/R_1 = \{\{a,b,e\},\{c\},\{d\}\}$。

(2)

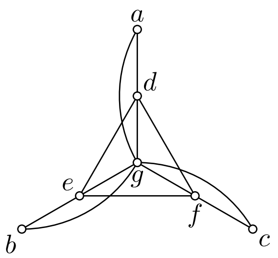


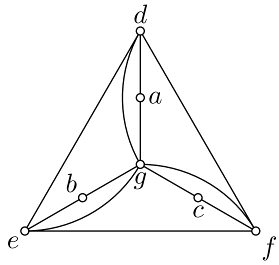
2.

(1) 每个顶点都偶数度的，所以 G 是欧拉图。

(2) G 不是哈密顿图。理由如下：对 G 中顶点进行标号(见下图)，反设存在哈密顿圈 Γ，因为顶点 a 的度为 2，所以它在 Γ 中必与它仅有的两个顶点相邻，也即，g 与 a 在 Γ 中相邻。同理，g 与 b,c 也在 Γ 中相邻。但 g 在 Γ 中只能出现一次，从而至多只能与两个顶点相邻，矛盾。

(3) G 是可平面的。右图是 G 的一个平面嵌入。





3.

(1)

证明： 若不然，则有多于 $\dfrac{n}{2}$ 个顶点的度数大于 $\dfrac{4m}{n}$，从而总度数大于 $\dfrac{4mn}{2n} = 2m$，与图论基本定理矛盾。 □

(2)

证明： 按如下方式构造点独立集 V^*：任取一个度数不超过 $\dfrac{4m}{n}$ 的顶点 v_1 加入 V^*。若 $V(G) - V^*$ 中仍存在度数不超过 $\dfrac{4m}{n}$ 且与 V^* 中任何顶点都不相邻的顶点 v_i，则将 v_i 加入 V^*。重复这一过程直至 G 中不再存在这样的顶点。设 $|V^*| = k$，下面证明 $k \geq \dfrac{n/2}{1 + 4m/n}$。

考虑 $N_g(V^*) = \{v \mid v \in V(G) \wedge \exists u(u \in V^* \wedge (u,v) \in E(G))\}$。由于 V^* 中每一个顶点的度