5.8 由教材定理 5.17 立即得证。

5.9

证明： 当 $n=2$ 时，记这两个集合为 A 和 B，设他们的基数分别为：$\kappa=\operatorname{card}A$ 和 $\lambda=\operatorname{card}B$。

由可数集定义知：$\kappa\le\aleph_0,\lambda\le\aleph_0$。于是有：

$$
\begin{aligned}
\kappa\cdot\lambda &\le \kappa\cdot\aleph_0 && \text{(教材定理 5.22(2))}\\
&= \aleph_0\cdot\kappa && \text{(教材定理 5.21(1))}\\
&\le \aleph_0\cdot\aleph_0 && \text{(教材定理 5.22(2))}\\
&= \aleph_0 && \text{(例 5.9(4))}
\end{aligned}
$$

因此，$\operatorname{card}(A\times B)=\kappa\cdot\lambda\le\aleph_0$，是可数集。

设 $n=k(k\ge 2)$ 时命题成立，则当 $n=k+1$ 时，前 k 个集合的卡氏积 S 为可数集，应用上面 $n=2$ 时的结论可知，S 与第 $k+1$ 个集合的卡氏积也是可数集。故，当 $n=k+1$ 时，命题同样成立。 □

5.10

证明： 若不然，就有 $\mathcal{P}(A)$ 是可数集，即有 $\operatorname{card}\mathcal{P}(A)\le\aleph_0$，由教材定理 5.11 和 5.14 知：$\aleph_0\le\operatorname{card}A\le\operatorname{card}\mathcal{P}(A)\le\aleph_0$。由优势关系的传递性，可得：$\aleph_0\le\operatorname{card}A\le\aleph_0$ 和 $\aleph_0\le\operatorname{card}\mathcal{P}(A)\le\aleph_0$。再由 Schröder-Bernstein 定理得，$\operatorname{card}A=\operatorname{card}\mathcal{P}(A)=\aleph_0$，从而有 $A\approx\mathcal{P}(A)$。这与康托定理矛盾。

故，$\mathcal{P}(A)$ 不是可数集。 □

5.11

(1) 取 $f:\mathbb{N}\to A,\forall x\in\mathbb{N},f(x)=(x+1)^7$。显然 f 是双射。故 $\operatorname{card}A=\operatorname{card}\mathbb{N}=\aleph_0$。

(2) 取 $f:\mathbb{N}\to B,\forall x\in\mathbb{N},f(x)=(x+1)^{109}$。显然 f 是双射。故 $\operatorname{card}B=\operatorname{card}\mathbb{N}=\aleph_0$。

(3) 由教材定理 5.7 和 $\mathbb{N}\approx A\subseteq A\cup B$ 可知，$\mathbb{N}\preccurlyeq\cdot A\cup B$。又由 $A\cup B\subseteq\mathbb{N}$ 和教材定理 5.7 推论 (1) 知，$A\cup B\preccurlyeq\cdot\mathbb{N}$。从而由 Schröder-Bernstein 定理得：$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}\mathbb{N}=\aleph_0$。

(4) 令 $C=\{n^{763}\mid n\in\mathbb{N}\wedge n\ne 0\}$，取 $f:\mathbb{N}\to C,\forall x\in\mathbb{N},f(x)=(x+1)^{763}$。显然 f 是双射。因此有 $\mathbb{N}\approx C$。再由 $C\subseteq A\cap B$ 和教材定理 5.7 知，$\mathbb{N}\preccurlyeq\cdot A\cap B$。又由 $A\cap B\subseteq\mathbb{N}$ 和教材定理 5.7 推论 (1) 知 $A\cap B\preccurlyeq\cdot\mathbb{N}$。由 Schröder-Bernstein 定理知，$A\cap B\approx\mathbb{N}$。从而有 $\operatorname{card}(A\cap B)=\operatorname{card}\mathbb{N}=\aleph_0$。

5.12

证明： 由教材定理 5.20 知，$\operatorname{card}\mathcal{P}(A)=2^{\operatorname{card}A},\operatorname{card}\mathcal{P}(B)=2^{\operatorname{card}B}$。

下面证明：$2^{\operatorname{card}A}=2^{\operatorname{card}B}$。

由 $\operatorname{card}A=\operatorname{card}B$ 和教材定理 5.7 得 $\operatorname{card}A\le\operatorname{card}B$ 和 $\operatorname{card}B\le\operatorname{card}A$。对以上两式分别使用教材定理 5.22(4)，就有 $2^{\operatorname{card}A}\le 2^{\operatorname{card}B}$ 和 $2^{\operatorname{card}B}\le 2^{\operatorname{card}A}$，由 Schröder-Bernstein 定理即得：$2^{\operatorname{card}A}=2^{\operatorname{card}B}$。

从而有：$\operatorname{card}\mathcal{P}(A)=2^{\operatorname{card}A}=2^{\operatorname{card}B}=\operatorname{card}\mathcal{P}(B)$。 □

5.13

(1)