$\square$

(2) 先证：

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varliminf_{k\to\infty} B_k = \varliminf_{k\to\infty} (A_k \cap B_k)$$

证明： $\forall x$，

$$\begin{aligned}
& x \in \varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varliminf_{k\to\infty} B_k \\
\iff & \exists n_1 (n_1 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k (k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_1 \to x \in A_k)) \wedge \\
& \exists n_2 (n_2 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k (k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_2 \to x \in B_k)) && \text{(集合交定义、下极限定义)} \\
\iff & \exists n_0 (n_0 \in \mathbb{N}_+ \wedge \forall k (k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n_0 \to x \in A_k \wedge B_k)) && \text{(引理 1.6)} \\
\iff & x \in \varliminf_{k\to\infty} (A_k \cap B_k) && \text{(集合交定义、下极限定义)}
\end{aligned}$$

$\square$

由引理 1.5 和教材定理 1.4(1) 立即有：

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varliminf_{k\to\infty} B_k \subseteq \varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

和

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varliminf_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cap \varliminf_{k\to\infty} B_k$$

下面证：

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varlimsup_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} (A_k \cap B_k)$$

和

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k \cap \varliminf_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} (A_k \cap B_k)$$

证明： $\forall x \in \varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varliminf_{k\to\infty} B_k$，由 $x \in \varliminf_{k\to\infty} A_k$ 知，存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$，使对所有满足 $k \geq n_0$ 的自然数 k 都有 $x \in A_k$。对任意给定的 $n \in \mathbb{N}_+$，我们令 $n' = \max(n, n_0)$，由于 $x \in \varliminf_{k\to\infty} B_k$，故存在 $k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n'$，使 $n \in B_k$。由 n' 的选择知，$k \geq n' \geq n_0$，因此必有 $x \in A_k$，从而有 $x \in A_k \cap B_k$。这就证明了：

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varlimsup_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} (A_k \cap B_k)$$

同理可证：

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k \cap \varlimsup_{k\to\infty} B_k \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} (A_k \cap B_k)$$

$\square$

最后证：

$$\varlimsup_{k\to\infty} (A_k \cap B_k) \subseteq \varlimsup_{k\to\infty} A_k \cap \varlimsup_{k\to\infty} B_k$$

证明： $\forall x$，

$$\begin{aligned}
& x \in \varlimsup_{k\to\infty} (A_k \cap B_k) \\
\iff & \forall n (n \in \mathbb{N}_+ \to \exists k (k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k \wedge x \in B_k)) && \text{(上极限定义、集合交定义)} \\
\iff & \forall n (n \in \mathbb{N}_+ \to \exists k (k \in \mathbb{N}_+ \wedge k \geq n \wedge x \in A_k \wedge
\end{aligned}$$