因此有 $y \in [a,b]$。而

$$
\begin{aligned}
x \wedge y &= x \wedge ((\bar{x} \vee a) \wedge b) && (y = (\bar{x} \vee a) \wedge b)\\
&= (x \wedge (\bar{x} \vee a)) \wedge b && (\text{结合律})\\
&= (x \wedge a) \wedge b && (\text{习题 19.26 第 (2) 小题结论})\\
&= a \wedge b && (a \preccurlyeq x\text{、教材定理 19.2})\\
&= a && (a \preccurlyeq b\text{、教材定理 19.2})\\
x \vee y &= x \vee ((\bar{x} \vee a) \wedge b) && (y = (\bar{x} \vee a) \wedge b)\\
&= (x \vee (\bar{x} \vee a)) \wedge (x \vee b) && (\text{分配律})\\
&= ((x \vee \bar{x}) \vee a) \wedge (x \vee b) && (\text{结合律})\\
&= (1 \vee a) \wedge (x \vee b) && (x \vee \bar{x} = 1)\\
&= 1 \wedge (x \vee b) && (a \preccurlyeq 1\text{、教材定理 19.2})\\
&= x \vee b && (x \vee b \preccurlyeq 1\text{、教材定理 19.2})\\
&= b && (x \preccurlyeq b\text{、教材定理 19.2})
\end{aligned}
$$

从而 $y \in [a,b]$ 是 x 在 $[a,b]$ 中的补元。

这就证明了 $[a,b]$ 是布尔代数。 □

由于当 $a \neq 0$ 时，有 $0 \notin [a,b]$，当 $b \neq 1$ 时，有 $1 \notin [a,b]$。因此，除非 $a = 0$， $b = 1$，(此时 $[a,b] = B$，是 B 的平凡子代数)，否则 $[a,b]$ 将不能包括 $\langle B, \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1\rangle$ 中所有的代数常元，从而不是 $\langle B, \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1\rangle$ 的子代数。

19.34

(1)

证明： 对任意 $y \in B_2$，由于 φ 是双射，所以存在唯一的 $x \in B_1$，使得 $y = \varphi(x)$。若 $0 \prec y \preccurlyeq \varphi(a)$，则由教材定理 19.8 有 $0 \prec x \preccurlyeq a$ (这里 $0 \prec x$ 是因为由教材定理 19.24(1) 知， $\varphi(0) = 0$。而 $\varphi(x) \neq 0$，所以 $x \neq 0$。另一方面，由于 0 是全下界，所以有 $0 \preccurlyeq x$。综合就有 $0 \prec x$)。

由于 a 是原子，所以 $x = a$，从而 $y = \varphi(a)$。由 y 的任意性可知， $\varphi(a)$ 是原子。 □

(2)

证明： 由第 (1) 小题结论可知，对任意两个布尔代数 B_1 与 B_2，若 $B_1 \cong B_2$，则 B_1 与 B_2 的原子数量相同。从而，由有限布尔代数的表示定理可知，要证原题，只需证：对任何 n 元集合 A，幂集代数 $\mathcal{P}(A)$ 有且仅有 n 个原子。

首先证明，对任何 $a \in A$， $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ 是原子。这是因为，对任何 $a \in A$， $B \in \mathcal{P}(A)$，若 $0 \prec B \preccurlyeq \{a\}$，则有 $B \neq 0 = \varnothing$，即存在 $x \in B$。而 $x \in B \subseteq \{a\}$，也即 $x \in \{a\}$。由 $\{a\}$ 的描述法定义 $\{x \mid x = a\}$ 可知， $x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a$。也即， $B = \{x\} = \{a\}$。这就证明了对所有 $a \in A$， $\{a\}$ 都是原子，从则 $\mathcal{P}(A)$ 中至少有 n 个原子。

反设 $\mathcal{P}(A)$ 中还有其它的原子 $C \notin \{\{x\} \mid x \in A\}$，则由于 $C \neq 0 = \varnothing$，所以存在 $x \in A$，使得 $x \in C$。从而 $0 \prec \{x\} \preccurlyeq C$，而 $\{x\} \neq C$ (否则 $C = \{x\} \in \{\{x\} \mid x \in A\}$，矛盾)，这与 C 是原子矛盾。这就证明了 $\mathcal{P}(A)$ 中有且仅有 n 个原子。 □

19.35

证明：

(1) 由教材定理 19.24(1) 有 $\varphi(0) = 0$，所以有 $0 \in J$。

(2) 由 $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq a$ 和教材定理 19.7 可知， $0 = \varphi(0) \preccurlyeq \varphi(x) \preccurlyeq \varphi(a) = 0$，从而有 $\varphi(x) = 0$，