# 第十六章　半群与独异点

**16.1**

(1)

**证明:** 由普通加法和乘法的性质知，$\circ$ 对 $\mathbb{R}$ 是封闭的。

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$，

$$
\begin{aligned}
(a \circ b) \circ c &= (a + b + ab) \circ c && (\circ \text{ 定义}) \\
&= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c && (\circ \text{ 定义}) \\
&= a + b + c + ab + ac + bc + abc && (\text{加法交换律、结合律、乘法分配律}) \\
&= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) && (\text{加法交换律、结合律、乘法分配律}) \\
&= a \circ (b + c + bc) && (\circ \text{ 定义}) \\
&= a \circ (b \circ c) && (\circ \text{ 定义})
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\langle \mathbb{R}, \circ \rangle$ 是半群。 □

(2)

**证明:** 由第 (1) 小题已知 $\langle \mathbb{R}, \circ \rangle$ 是半群。而:

$\forall a \in \mathbb{R}$，

$$
\begin{aligned}
a \circ 0 &= a + 0 + a \cdot 0 && (\circ \text{ 定义}) \\
&= a + 0 + 0 && (0 \text{ 是乘法零元}) \\
&= a && (0 \text{ 是加法单位元}) \\
0 \circ a &= 0 + a + 0 \cdot a && (\circ \text{ 定义}) \\
&= 0 + a + 0 && (0 \text{ 是乘法零元}) \\
&= a && (0 \text{ 是加法单位元})
\end{aligned}
$$

这就证明了 0 是 $\circ$ 运算的单位元。从而证明了 $\langle \mathbb{R}, \circ \rangle$ 是独异点。 □

**16.2**

**证明:** 首先取 $x = a$。由题设，存在 $u_0, v_0 \in S$，满足：$a * u_0 = v_0 * a = a$。

下面证明 $v_0$ 是关于 $*$ 运算的左单位元:

由题设，$\forall x \in S$，有 $u, v \in S$，使得 $a * u = v * a = x$。从而:

$$
\begin{aligned}
v_0 * x &= v_0 * a * u && (a * u = x) \\
&= a * u && (v_0 * a = a) \\
&= x && (a * u = x)
\end{aligned}
$$

这就证明了 $v_0$ 是关于 $*$ 运算的左单位元。同理可证 $u_0$ 是关于 $*$ 运算的右单位元。从而由教材定理 15.2 知，$u_0 = v_0 = e$ 是单位元。