离散数学、十二、5.30、

2019年6月2日 11:04

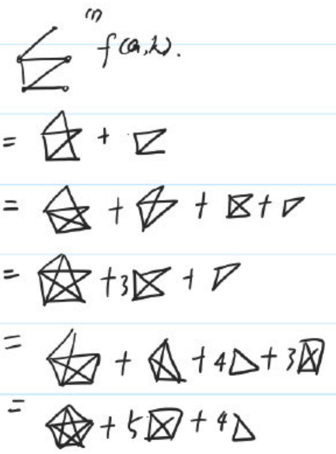
17150011001 陈扬 71

5月30、习题十二 1, 3, 5, 6, 9, 11, 14 (~~10, 12~~, ~~15~~)

图的着色

1. 如图，求色多项式 $f(G,k)$.

(1) $f(G,k)$.



$= f(K_5,k)+5f(K_4,k)+4f(K_3,k)$

$= k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)+5k(k-1)(k-2)(k-3)+4k(k-1)(k-2)$

(2) 由布鲁克斯定理得，$\chi(G) \le \Delta(G) = 3$.

(3) 计算：$f(G,\chi(G))$, $f(G,4)$.

$f(G,\chi(G)) = f(G,3) = 4\times 3\times 2 = 24$

$f(G,4) = 5f(K_4,4)+4f(K_3,4)$

$= 5\times 4\times 3\times 2\times 1+4\times 4\times 3\times 2$

$= 216$.

3. 设G是由一棵 $n\ (n\ge 2)$ 阶树和一个 $m\ (m\ge 3)$ 阶圈组成的图，求 $f(G,k)$.

由定理12.11与12.12得，

树：$f(T,k) = k(k-1)^{n-1}$

圈：$f(C_m,k) = (k-1)^m + (-1)^m(k-1)$.

由定理12.10得，

$$f(G,k)=f(T,k)\cdot f(C_m,k)$$
$$= k(k-1)^{n-1}[(k-1)^m-(-1)^m(k-1)].$$

5、设 G 是 n 阶 k-正则图，证明：
最小点色数 $\chi(G)\geq\frac{n}{n-k}$

proof：对 $\forall v\in V(G)$，$d(v)=k$（G 是 k-正则图）
∴ 有 k 个顶点不能与 v 涂同一样颜色
∴ 于是 G 中至少有 $k+1$ 种颜色，G 中至多有 $n-k$ 个顶点与对 v 同色

对于 $\forall v\in V(G)$，至少需要 $\lceil\frac{n}{n-k}\rceil$ 种颜色，
∴ $\chi(G)\geq\lceil\frac{n}{n-k}\rceil\geq\frac{n}{n-k}$.

6、设 G 是不含 K_3 的连通简单平面图，
(1) 证明 $\delta(G)\leq3$，
(2) 证明 G 是 4-可着色的。

proof：(1) 当 $n\leq3$ 时，$\delta(G)\leq3$，
当 $n\geq4$ 时，由于 G 中不含 K_3，
∴ $\forall$ 面 l，$r\geq4$.
$4r\geq2m$，$r\geq\frac{m}{2}$.
∵ G 连通平面图，由欧拉公式得，
$$2=n-m+r\leq\frac{m}{2}-m+\frac{m}{2}=0.$$
显然与题干矛盾。
∴ $2m\geq4n$，
$m\geq2n$. ——①
由 11.10 得，$m\leq\frac{l}{l-2}(n-2)\leq2n-4$ ——②
①与②矛盾，∴ $\delta(G)\leq3$.

(2) $n \leq 3$时，显然可4-着色

$n \geqslant 4$时，

假设 $n=k$ ($\geqslant 4$) 成立，

需证 $n=k+1$ 也成立，

由(1)可知，$\exists v \in V(G)$，$d(v) \leq 3$，

令 $G' = G - v$，所以 G'的阶 $n=k$

且 G'不含有K_3子图，

当 G'可4着色时，$G' \longrightarrow G$中，

与v相邻的3个顶点+v需要

4-着色

综上所述 G是4-可着色的，

9、证明，当一个地图G可2-面着色时，

当且仅当G是欧拉图，

必要性：显然，

充分性：G^*是G的对偶图，

G^*是可2-点着色的

$\therefore \chi(G^*)=2$，

$\therefore \chi^*(G^{**})=2$，

$\because$ G与G^{**}同态

$\therefore \chi(G)=\chi^*(G^{**})=2$，

$\therefore$ G是可2-面着色的，

11、设G~3正则哈密顿图，则G的边色数

$\chi'(G)=3$，

Proof

由 12.17，$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$，

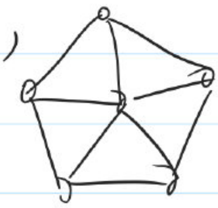
∵ G~3正则图 ∴ $3n=2m$.

∵ G是哈密顿图 ∴ G中至少存在一个圈 C.
圈 C ≥2 至少需要2个结合 α, β, 对 $\forall v\in V(G)$
且 $\exists v\notin V(C)$, 需要第三种颜色 γ
(由 G~3正则图) ∴ 至少存在一个结点 $v\notin V(C)$.
∴ 至少需要3种颜色.
∴ $\chi'(G)=3$.

14、 6门课，每人每天下午一门，
6门课 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.
$S(C_i)$ 为学生集合.
对 $\forall i\neq j$: $S(C_i)\cap S(C_j)\neq\emptyset$.

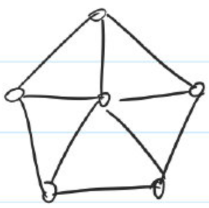
问至少安排几天考6门在至少天数的情况下，有多少种组合方案?

(1) W_6,



由1,2,3得，偶数轮图都是4-色图.

∴ $\chi(G)=4$,



$$= K_6+5K_5+5K_4$$
$$= k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)$$
$$+5k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$$
$$+5k(k-1)(k-2)(k-3)$$

$K=4$ 时, $f(G,4)=5\times4\times3\times2\times1=120$ 种.