证明: 先证必要性。

若已知 $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$，则 $\forall x$，

$$
\begin{aligned}
x \in C &\iff (x \in C) \wedge (x \in C) && \text{(命题逻辑幂等律)}\\
&\implies (x \in A) \wedge (x \in B) && \text{(前提、子集关系定义)}\\
&\iff x \in A \cap B && \text{(集合交定义)}
\end{aligned}
$$

再证充分性。

若已知 $C \subseteq A \cap B$，则 $\forall x$，

$$
\begin{aligned}
x \in C &\implies x \in A \cap B && \text{(前提、子集关系定义)}\\
&\iff x \in A \wedge x \in B && \text{(集合交定义)}
\end{aligned}
$$

□

1.27

证明: 对于任意集合 A，有：

$$
\begin{aligned}
& \varnothing \subseteq A && \text{(教材定理 1.1)}\\
\iff & \varnothing \in \mathcal{P}(A) && \text{(幂集定义)}\\
\iff & \{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(A) \wedge \varnothing \subseteq \mathcal{P}(A) && \text{(子集关系定义、教材定理 1.1)}\\
\iff & \{\varnothing\} \in \mathcal{PP}(A) \wedge \varnothing \in \mathcal{PP}(A) && \text{(幂集定义)}\\
\iff & \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subseteq \mathcal{PP}(A) && \text{(子集关系定义)}\\
\iff & \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \mathcal{PPP}(A) && \text{(幂集定义)}
\end{aligned}
$$

于是得到，$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \mathcal{PPP}(A)$。

由于上述证明中的 A 为任意集合，只需将 A 替换成 $\mathcal{P}(A)$，则证明的倒数第二行即为待证的第二部分：$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subseteq \mathcal{PPP}(A)$。 □

1.28 下面依次证 $(1) \Leftrightarrow (2), (1) \Leftrightarrow (3), (1) \Leftrightarrow (4), (1) \Leftrightarrow (5)$。

先证：$(1) \Leftrightarrow (2)$，即 $A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$。

证明:

$$
\begin{aligned}
A \subseteq B &\iff \forall x(x \in A \to x \in B) && \text{(子集关系定义)}\\
&\iff \forall x(\neg(x \in B) \to \neg(x \in A)) && \text{(命题逻辑假言易位)}\\
&\iff \forall x(x \notin B \to x \notin A) && \text{($\notin$ 定义)}\\
&\iff \forall x(x \in \sim B \to x \in \sim A) && \text{(绝对补定义)}\\
&\iff \sim B \subseteq \sim A && \text{(子集关系定义)}
\end{aligned}
$$

□

再证：$(1) \Leftrightarrow (3)$，即 $A \subseteq B \Leftrightarrow \sim A \cup B = E$。

证明:

$$
\begin{aligned}
A \subseteq B &\iff \forall x(x \in A \to x \in B) && \text{(子集关系定义)}\\
&\iff \forall x(\neg(x \in A) \vee (x \in B)) && \text{(蕴涵等值式)}\\
&\iff \forall x(x \notin A \vee x \in B) && \text{($\notin$ 定义)}\\
&\iff \forall x(x \in \sim A \vee x \in B) && \text{(绝对补定义)}\\
&\iff \forall x(x \in \sim A \cup B) && \text{(集合并定义)}\\
&\iff \sim A \cup B = E && \text{(全集定义)}
\end{aligned}
$$