第12章 习题讲解

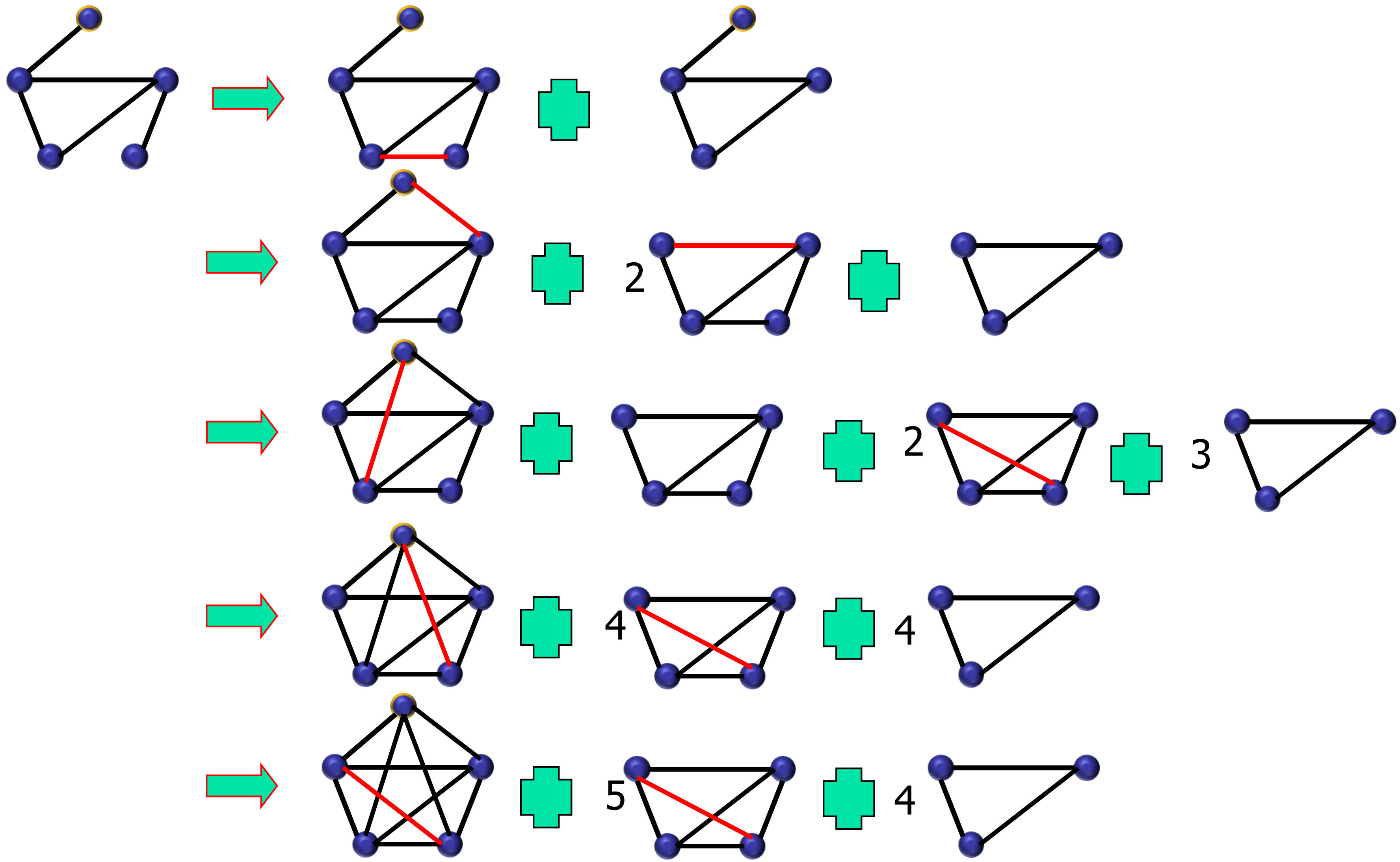
中国海洋大学

计算机系

Ch12:1

- [分析]利用定理12.9或者利用定理12.10

(1)



Ch12: 1

(1) $f(G,k)=f(K_5,k)+5\,f(K_4,k)+4\,f(K_3,k)$

$=k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)+5k(k-1)(k-2)(k-3)+4k(k-1)(k-2)$

$=k^5-5k^4+9k^3-7k^2+2k$

(2) $\chi(G)=\min(5,4,3)=3$

(3) $f(G,\chi(G))=f(G,3)=0+0+4\,f(K_3,3)=24$

$f(G,4)=0+5\,f(K_4,4)+4\,f(K_3,4)=216$

Ch12 3

3. 解

$$f(G,k)=f(T_n,k)f(C_m,k)=k(k-1)^{n-1}((k-1)^m+(-1)^m(k-1))$$

Ch12: 5

5. 设G是n阶k-正则图,证明$\chi(G) \geq n/(n\text{-k})$.

[分析] k-正则图,点着色定义

证 $\forall v_i \in V(G)$, $d(v_i)=k$, 故G 中至多有n-k个顶点与v的涂色相同,至少需要$\lceil n/(n\text{-k}) \rceil$种颜色给G着色,又

$$\lceil n/(n\text{-k}) \rceil \geq n/(n\text{-k}),$$

故$\chi(G) \geq n/(n\text{-k})$.

Ch12: 6

6. 设G是不含K_3的连通的简单平面图.

(1) 证明 $\delta(G) \le 3$；(2) 证明 G是4-可着色的.

证 (1) 假设$\delta(G) \ge 4$,则$2m \ge 4n$, 即$m \ge 2n$.

又G是不含K_3,所以G中每个面的次至少是4,因此有 $m \le 2n-4$.显然与$m \ge 2n$矛盾.得证

Ch12: 6

(2) 归纳法

当$n\leq 4$时 显然G是4-可着色的

当$n\geq 5$时 假设$n=k$时G是4-可着色的, 当$n=k+1$时,G中必存在度小于等于3的结点, 不妨设为u, 因此G-u是4-可着色的. 用4中颜色为G-u着色,因为u最多有3个邻接点,其邻接点最多使用3种颜色,因此可以使用剩余的颜色为u着色.

Ch12：7

7.设G是连通的简单平面图,围长g(G)=l≥4.

(1) $\delta(G) \le l-1$；(2) G是l-可着色的.

[分析]利用握手定理和定理11.2

证 (1) $2m=\sum d(v_i)=\sum \deg(R_i)$,且$\forall R_i, \deg(R_i)\ge 4$.

[反证法] 否则,$\delta(G)\ge l$, 则

$nl \le 2m \Rightarrow n\le 2m/l$; (握手定理)

又围长 g(G)=l≥4,于是 $rl \le 2m \Rightarrow r \le 2m/l$;(定理11.11.2)

G是连通的简单平面图,

$2=n-m+r \le (2m/l)-m+(2m/l)=(4-l)m/l \le 0$;

矛盾，故$\delta(G) \le l-1$.

Ch12：7(2)

(2) 当$n<l$时, G 为l-可着色的.

$n\geq l$, 对n归纳

a）$n=l$, 用l色可完成对G的点涂色, G 为l-可着色的。

b) 假设$n=k(k \geq l)$, G为l-可着色的.

当$n=k+1$时,由(1)可知,存在顶点v,$d(v)\leq l-1$, 令$G'=G-v$, 则G'的阶数$n'=k$, 且G'的围长$g(G') \geq l \geq 4$, 由归纳假设,G'是l-可着色的.

在G'中,原来与v相邻的顶点在G'中着色,至多用了l-1色. 因而将G’还原成G时, l 种颜色中至少还剩 1 色可给v着色,即G是l-可着色的.

Ch12：8

8. 设G是简单图, $\chi(G)=k$, $\forall v\in V(G)$,$\chi(G-v)<\chi(G)$,则称G是 k-临界图。

(1) 给出所有的2-临界图和3-临界图；

(2) 给出一些4-临界图；

解 (1) Th12.14 推论1:$\chi(G)=2$当且仅当G为非零图的二部图

只有K_2满足条件, 2-临界图为K_2.

对于奇圈C_{2k+1} $(k\geq 1)$,$\chi(G)=3$, 且$\forall v \in V(G)$,

$\chi(C_{2k+1}-v)=\chi(C_{2k+1}-v)$ $(k\geq 1)$ $=2 <\chi(C_{2k+1})=3$

Ch12：8(续)

(2) 对于所有的偶阶轮图$W_{2k}(k \geq 1)$, $\chi(G)=4$,

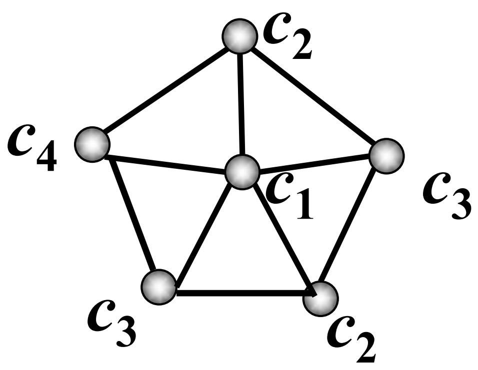
且$\forall v \in V(G)$,$\chi(G-v)= \chi(W_{2k}-v) =3 < \chi(W_{2k})=4$

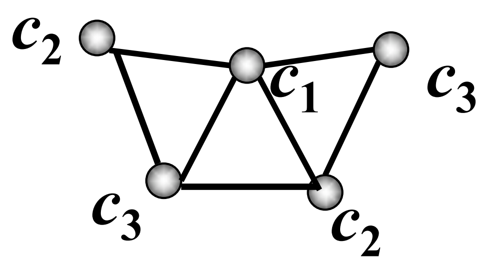
讨论$\chi(W_{2k}-v)$:

(1)v是中间的点. $W_{2k}-v$是奇圈,故$\chi(W_{2k}-v) =3$.

(2)v是外边界上的点, 对$W_{2k}-v$进行如下图着色.

故$\chi(W_{2k}-v) =3$.





Ch12: 8

(3) 设G是k-临界图,证明$\forall v \in V(G), d(v) \geq k-1$.

[分析]用反证法.

证明 否则,$\exists v \in V, d(v) \leq k-2$,设$v$的邻域$N(v)=\{v_1,v_2,\ldots,v_s\}(s \leq k-2)$.
令$G_1=G-v$,由于G是k-临界图,所以$\chi(G_1)<k$. 在G_1的着色中,$N(v)$的顶点至多用了s ($s \leq k-2$) 种颜色,即在k种颜色中至少有2种颜色(如色p和色q),没有使用. 可以证明在G_1的着色中,使用所有k种颜色.

若G_1着色,至多用了色p和色q中一种颜色(例如p),则将G_1还原成G时,可以用p、q中的一个给v着色（例如排）,即G是(k-1)-可着色的,与$\chi(G)=k$矛盾.

因此$\chi(G_1)=k$，与$\chi(G_1)<k$矛盾.

Ch12: 9

9.证明: 一个地图G是2-面可着色的当且仅当G是欧拉图.

证明：必要性. 因为G是地图,所以G不含桥和自环,G是2-面可着色,所以G*是2-可着色的,且G*不能是零图, 所以G*的色数大于等于2,又G*是2-可着色的,故G*的色数等于2,所以G*是二部图, G*中无奇圈,则G*中的每个面的次都是偶数,则G中每个结点的度都是偶数,即G是欧拉图.

Ch2:9（续）

充分性.

G是欧拉图,G的每个结点度为偶数,G*中每个面的次为偶数,那么G*中无奇回路, G*是二部图,G*的点色数是2,也就是G的面色数是2,所以G是2-面可着色的.

Ch2:10

10. 设G是连通的简单的平面图，已知G中每个内部面的次数均小于等于4，证明G是4-面可着色的。

证明：由于G的每个内部面的次数小于等于4，所以G的对偶图G*中存在度小于等于4的结点,下面证明G*是4−可着色的。

对G*的结点数n*归纳.

当n*≤4时,显然G*是4−可着色的。

当n*≥5时,假设n*=k时，G*是4−可着色的。

当$n*=k+1$时,在$G*$中删除任意一个结点u,$G_1=G*-\{u\}$是4-可着色的.按照一个着色方案给G_1着色,模仿G_1给$G*$着色,则$G*$中只有u没有着色,$d(u)\leqslant 4$,分两种情况讨论:

(1) u的邻接点没有使用完全部4种颜色,那么可以用未被使用的颜色给u着色;

(2) u的邻接点使用了全部的4种颜色。设$\Gamma(u)=\{a,b,c,d\}$,分别使用颜色c1,c2,c3,c4,那么从a到c只包含颜色c_1、c_3的路径和从b到d颜色只包含颜色c_2、c_4的路径不能同时存在。

不妨设从a到c只包含颜色c_1、c_3的路径不存在，那么在着颜色c_1、c_3的结点导出的子图H_{13}中a和c不连通，在a所在的连通分支中，着颜色c_1的结点改为着颜色c_3，着颜色c_3的结点改为颜色c_1,那么a的颜色是c_3,u可以着颜色c_1.

综上所述,G*是4-可着色的,因此G是4-面可着色的。

Ch12：11

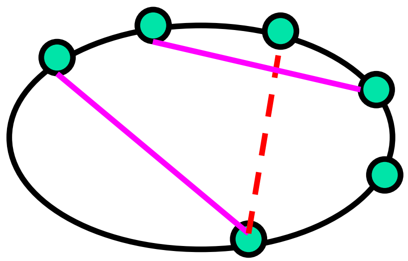
[分析]先由维津定理得$\chi'(G) \geq 3$;

再找到一种3着色方案

证明：由维津定理, $\chi'(G) \geq \Delta=3$

下证 $\chi'(G) \leq 3$.

G是3-正则图,由握手定理得$2m=3n$,故n为偶数.设C为G中的哈密顿回路,则C为n阶偶圈,因而可以用两种颜色给C的边着色.不妨设这两种颜色分别为a,b, G中不在C上的边彼此不相邻 (G 为3-正则图),因而可以用第三种颜色,如c给不在C上的边着色,这就完成了对G 的边着色.故$\chi'(G) \leq 3$.



Ch12: 13

13. 设G是连通的简单平面图,证明G既是2-面可着色的又是2-顶点可着色的当且仅当G是不含奇圈的欧拉图.

证明 由于G是连通简单平面图,因而G不含桥,所以G是地图.G是2-面可着色的当且仅当G是欧拉图(第9题结论).G是2-可着色的当且仅当G是二部图,G是二部图当且仅当G 中不含奇圈.

Ch12: 14

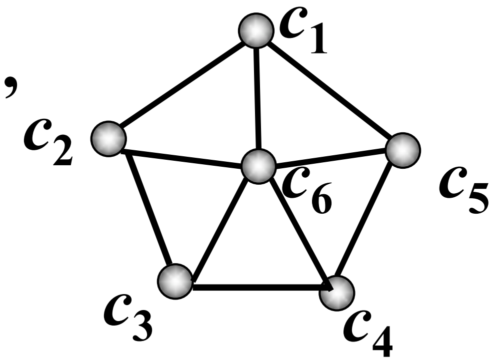
14. 某年级学生共选修6门课程,每人每天至多考一门课,设6门课程分别为c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6, $S(c_i)$为选修c_i的学生集合.已知$S(c_i)$ 与$S(c_6)$ 交集非空,i=1, …,5. $S(c_i)$ 与$S(c_{i+1})$ 交集非空,i=1,2,3,4. $S(c_5)$与$S(c_1)$ 交集非空,i=1,2,3,4.

(1) 问至少安排几天才能考完6门课程?

(2) 在天数不增加的条件下至多有几种安排方案?

解 令$G=\langle C,E\rangle$,如下图所示.

$C=\{c_1,c_2,\ldots,c_5\}$,$E=\{\,(c_i,c_j)\mid$ 有学生同时选c_i和c_j $\}$,



(1) [求点色数]

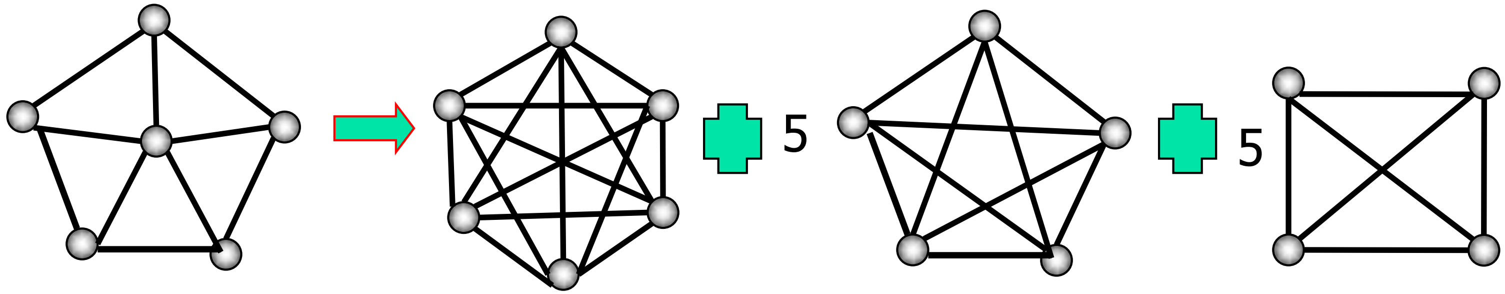
G为6阶轮图W_6,则$\chi(G)=4$.

因而至少用4天可以考完6门课程.

Ch12：14(2)

(2)[分析]求色多项式,确定着色方案数.

- 方法1：Th12.9,求$f(G,k)$,图的变化可得



$f(G,k)=f(K_6,k)+5f(K_5,k)+5f(K_4,k)$

$f(G,4)= 5f(K_4,4)=5!=120$

- 方法2： W_6的轮心点共4种着色方案,去掉W_6的轮心点,得到C_5,C_5为3-着色,共$(3-1)^5-(3-1)=30$种方案,故一共有4*30=120种方案.