(1) 因为 $(b*c)*c=d*c=d\neq b=b*a=b*(c*c)$，所以该运算不满足结合律。

(2) a 是单位元，d 是零元。

(3) 令 $x_1=x_2=y_1=b, y_2=c$，则 x_1Ry_1, x_2Ry_2，但 $x_1*y_1=b*b=a$，$b*c=x_2*y_2=d$，$\langle a,d\rangle\notin R$。从而 R 不是 $\langle A,*\rangle$ 上的同余关系。

2.

证明： 注意到，由于 A 是正规子群，所以 $y^{-1}xy\in A$ 且 $x^{-1}\in A$，从而 $x^{-1}y^{-1}xy\in A$。同理，由于 B 是正规子群，所以 $x^{-1}y^{-1}x\in B$ 且 $y\in B$，从而 $x^{-1}y^{-1}xy\in B$。而 $A\cap B=\{e\}$，所以有 $x^{-1}y^{-1}xy=e$。等式两侧依次左乘 x 和 y，即得 $xy=yx$。 □

3.

(1) 可交换的二元关系可以看作是从 $A\&A$ 中一个子集，其中 $A\&A=\{\{x,y\}\mid x,y\in A\}$ 为 A 与自身的无序积。由于这样的无序对有 $C_3^2+3=6$ 个(C_3^2 为从 3 个数中取两个不同的元素的方法数，加 3 是因为可以取相同的元素进行运算)，而由于是自反的，所以有三个无序对必须选择，从而可交换且自反的二元关系有 $2^3=8$ 个。

(2) $A\times A$ 中共有 3 个 $\langle x,x\rangle$ 形式的有序对。对每一个这样的有序对，一个反对称的二元关系可以选择包含它，或不包含它。从而在这一步骤中，共有 2^3 种不同的选法。$A\times A$ 中还有 3 组 $\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle$ 形式的有序对，其中 $x,y\in A, x\neq y$。对每一组这样的有序对，一个反对称的二元关系可以选择不包含任意一个，或包括其中的一个(共计 3 种不同的选择方式)，从而在这一步骤中，共有 3^3 种不同选法。总计就有 $2^3\cdot 3^3=6^3$ 种选法。

(3) 由前两小题的分析易知，对称的二元关系有 2^6 个，反对称的二元关系有 6^3 个，即对称又反对称的二元关系有 2^3 个。A 上的二元关系有 2^9 个。从而由德·摩根律和容斥原理可知，既不对称，也不是反对称的二元关系有 $2^9-2^6-6^3+2^3=240$ 个。