设 x, y 在 (x_0, y_0) 处增量分别是 $\Delta x, \Delta y$，相应函数 f 在 (x_0, y_0) 处全增量 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

若 $\boxed{\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)}$

其中 A, B 仅与 (x_0, y_0) 有关的常数，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$o(\rho)$ 是较 ρ 高阶的无穷小，则称 f 在点 P_0 可微

$A\Delta x + B\Delta y$ 称为 f 在 (x_0, y_0) 的全微分，记为 $dz|_{(x_0, y_0)}$

$$\boxed{dz|_{(x_0, y_0)} = A\Delta x + B\Delta y}$$

注：函数 f 可微 $\Rightarrow$ f 连续

若 f 可微，则 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

$$\therefore \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)) = 0$$

$$\therefore \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0)$$ $\therefore$ f 连续.

(2) 可微必要条件

Th：若 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微，则 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处两个偏导数存在，且 $f'_x(x_0, y_0) = A$，$f'_y(x_0, y_0) = B$.

证：$\because z = f(x, y)$ 在 P_0 可微

$\therefore \Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ $\quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

令 $\Delta y = 0$，$(\Delta x \neq 0)$ 则关于 x 的偏增量 $\Delta_x z = A\Delta x + o(|\Delta x|)$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A$$

$\therefore f'_x(x_0, y_0) = A$.

同样 令 $\Delta x = 0$，$\Delta y \neq 0$ 得 $f'_y(x_0, y_0)$ 存在，且 $f'_y(x_0, y_0) = B$.