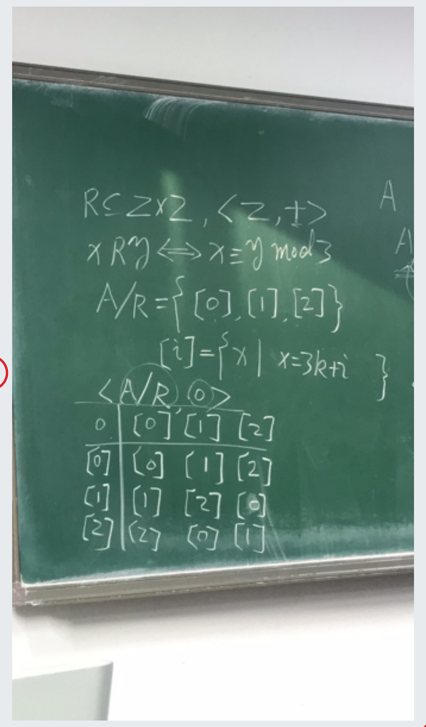
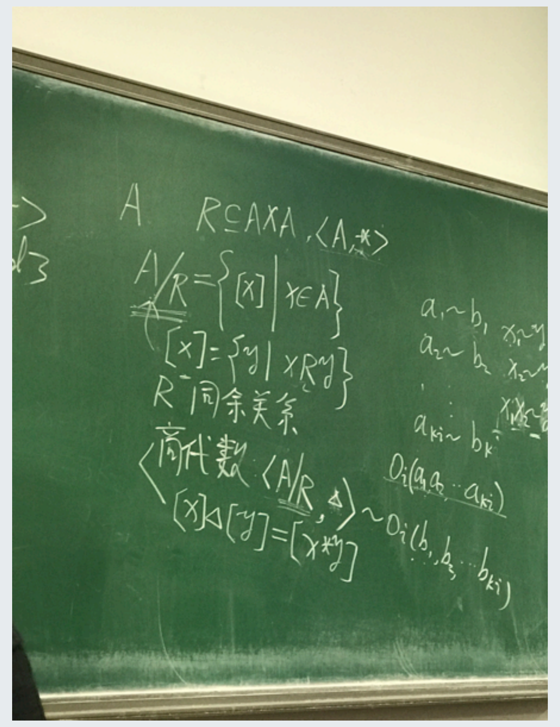
同余关系与商代数

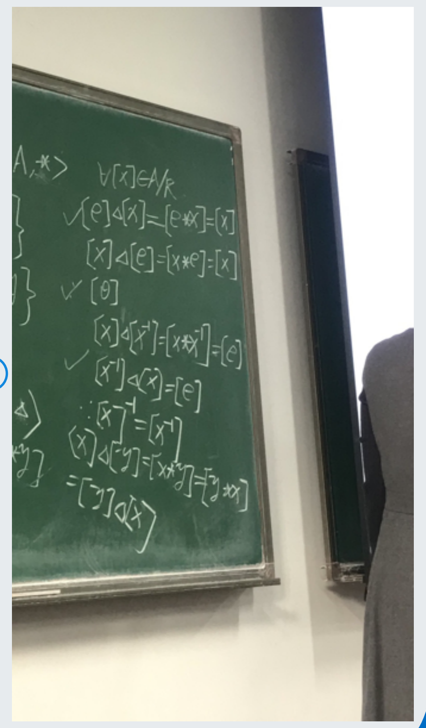
- 同余关系
- 同余关系与同余类
- 同余关系的实例

商代数定义

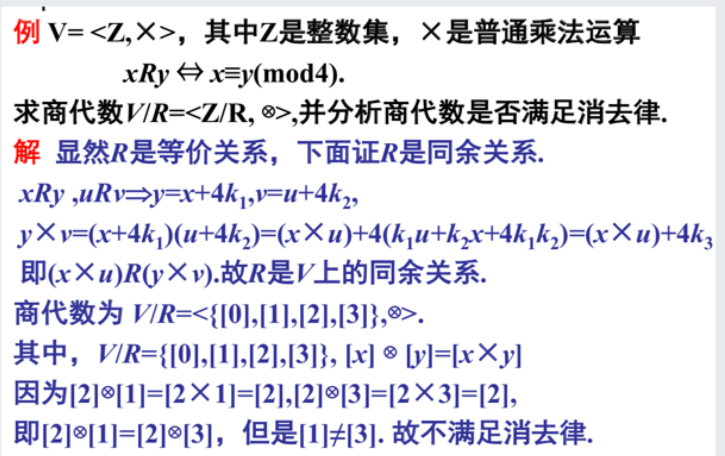


商代数性质





商代数



例 V= <Z,×>，其中Z是整数集，×是普通乘法运算

$xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 4$.

求商代数$V/R=\langle Z/R, \otimes\rangle$,并分析商代数是否满足消去律.

解 显然R是等价关系，下面证R是同余关系.

$xRy, uRv \Rightarrow y=x+4k_1, v=u+4k_2$,

$y\times v=(x+4k_1)(u+4k_2)=(x\times u)+4(k_1u+k_2x+4k_1k_2)=(x\times u)+4k_3$

即$(x\times u)R(y\times v)$.故R是V上的同余关系.

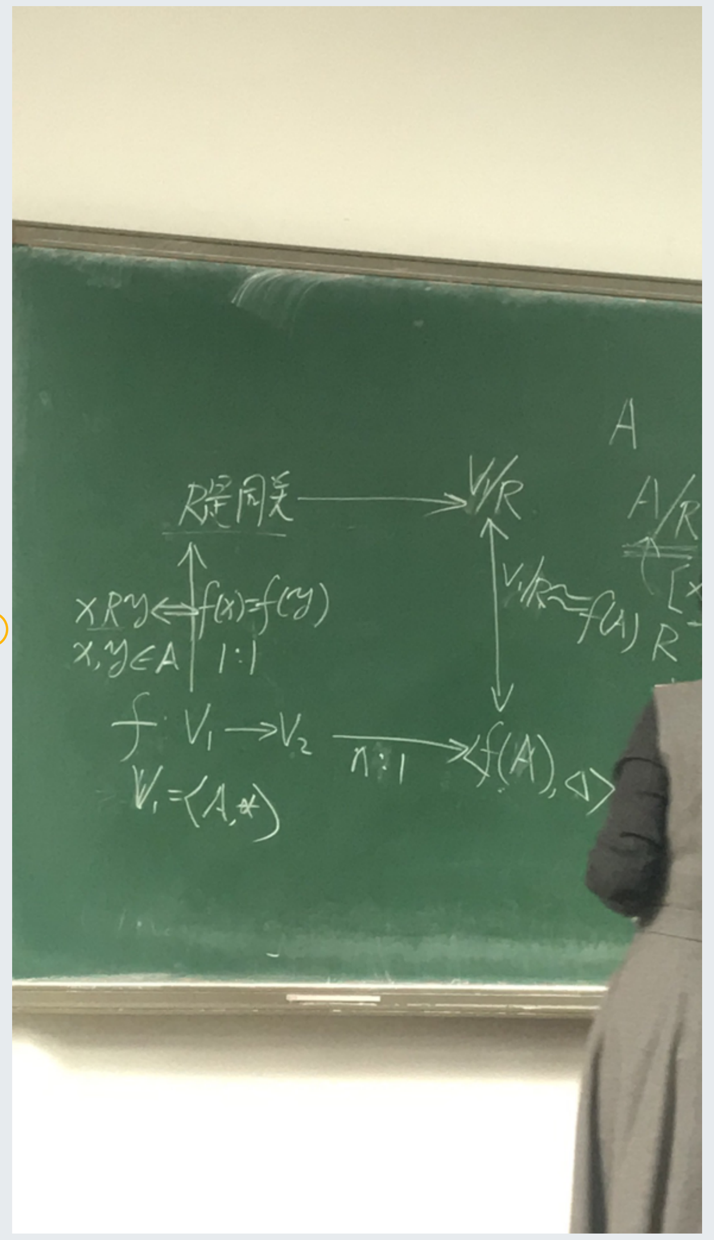
商代数为 $V/R=\langle\{[0],[1],[2],[3]\},\otimes\rangle$.

其中，$V/R=\{[0],[1],[2],[3]\}$, $[x]\otimes[y]=[x\times y]$

因为$[2]\otimes[1]=[2\times 1]=[2]$,$[2]\otimes[3]=[2\times 3]=[2]$,

即$[2]\otimes[1]=[2]\otimes[3]$，但是$[1]\neq[3]$. 故不满足消去律.

同态映射、同余关系与商代数之间的联系

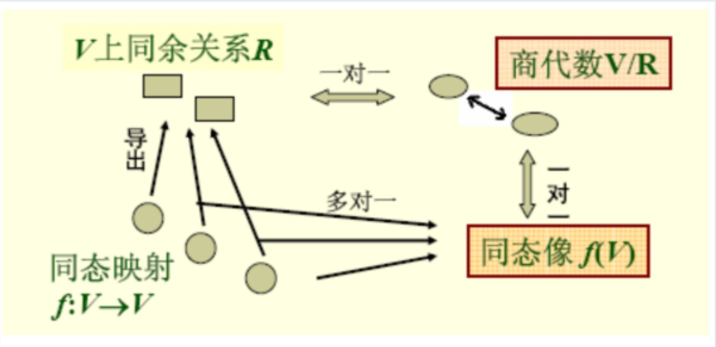


定理1 设$V_1=\langle A,o_1,o_2,...,o_r\rangle$与$V_2=\langle B,o_1',o_2',...,o_r'\rangle$是同类 型的代数系统，对于$i=1,2,...,r$，$o_i$为$k_i$元运算，函数$f:A\to B$为代数系统$V_1$到$V_2$的同态映射，则由$f$导出 的$A$上的等价关系为$V_1$上的同余关系.

定理2 设代数系统$V=\langle A,o_1,o_2,...,o_r\rangle$，其中$o_i$为$k_i$元运 算，$i=1,2,...,r$, R是V上的同余关系，则自然映射

$g:A\to A/R$, $g(a)=[a]$, $\forall a\in A$,

是从V到V/R的同态映射.



定理3 设$V_1=\langle A,o_1,o_2,...,o_r\rangle$与$V_2=\langle B,o_1',o_2',...,o_r'\rangle$是 同类型的代数系统，对于$i=1,2,...,r$，$o_i$与$o_i'$都是$k_i$元运 算，$f:A\to B$是$V_1$到$V_2$的同态，关系$R$是$f$导出的$V_1$上的 同余关系，则$V_1$关于同余关系$R$的商代数同构于$V_1$在$f$下 的同态像，即

$V_1/R \cong \langle f(A),o_1',o_2',...,o_r'\rangle$

定理2 任何商代数都是同态像

定理3 任何同态像在同构意义下是商代数