

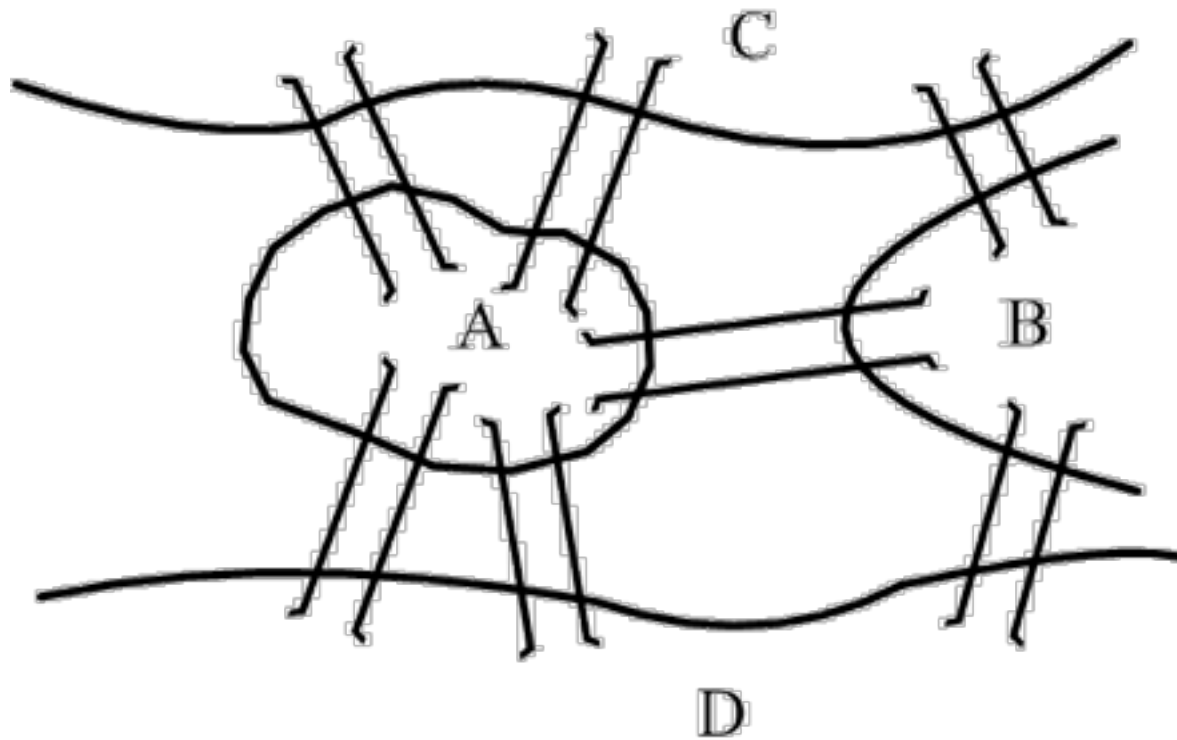


欧拉图

- 七桥问题,一笔画,欧拉通(回)路,欧拉图
- 判定欧拉图的充分必要条件
- 求欧拉回路的算法

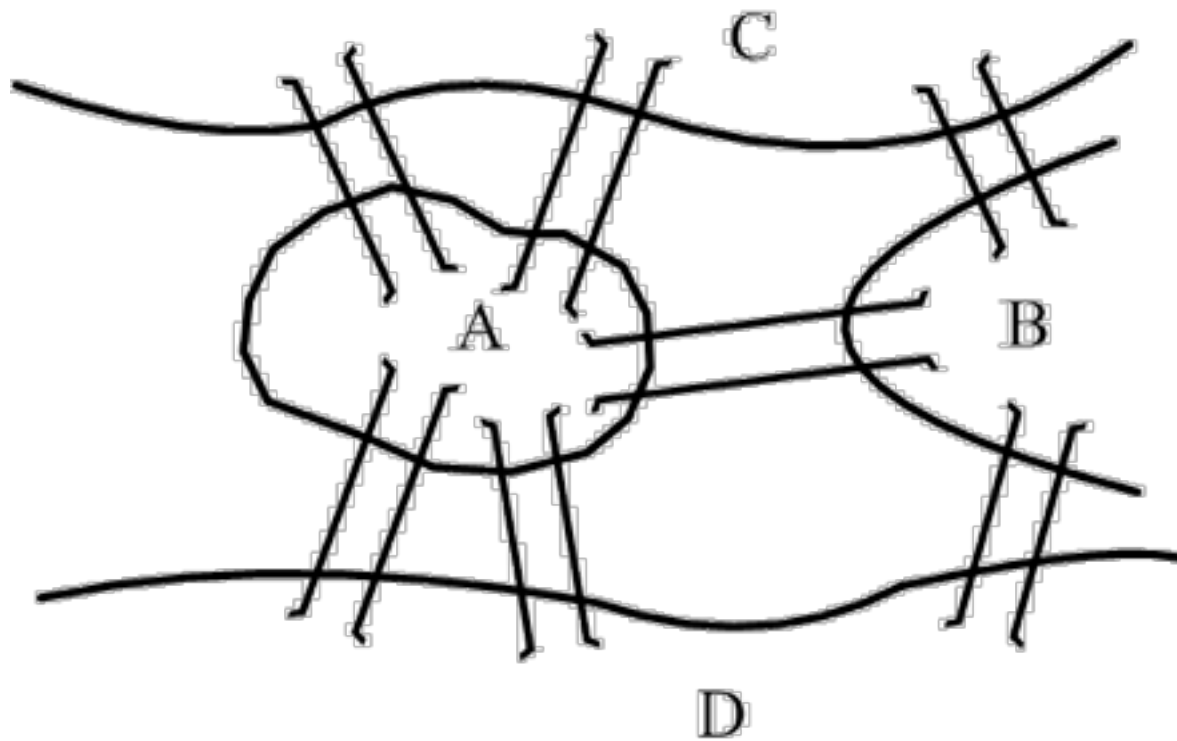
七桥问题

- 普鲁士的哥尼斯堡镇（现名加里宁格勒，属于俄罗斯共和国）被普雷格尔河支流分成四部分：河两岸、河中心岛以及两条支流中间的部分，在18世纪这四部分用7座桥连接起来，如下图：



七桥问题

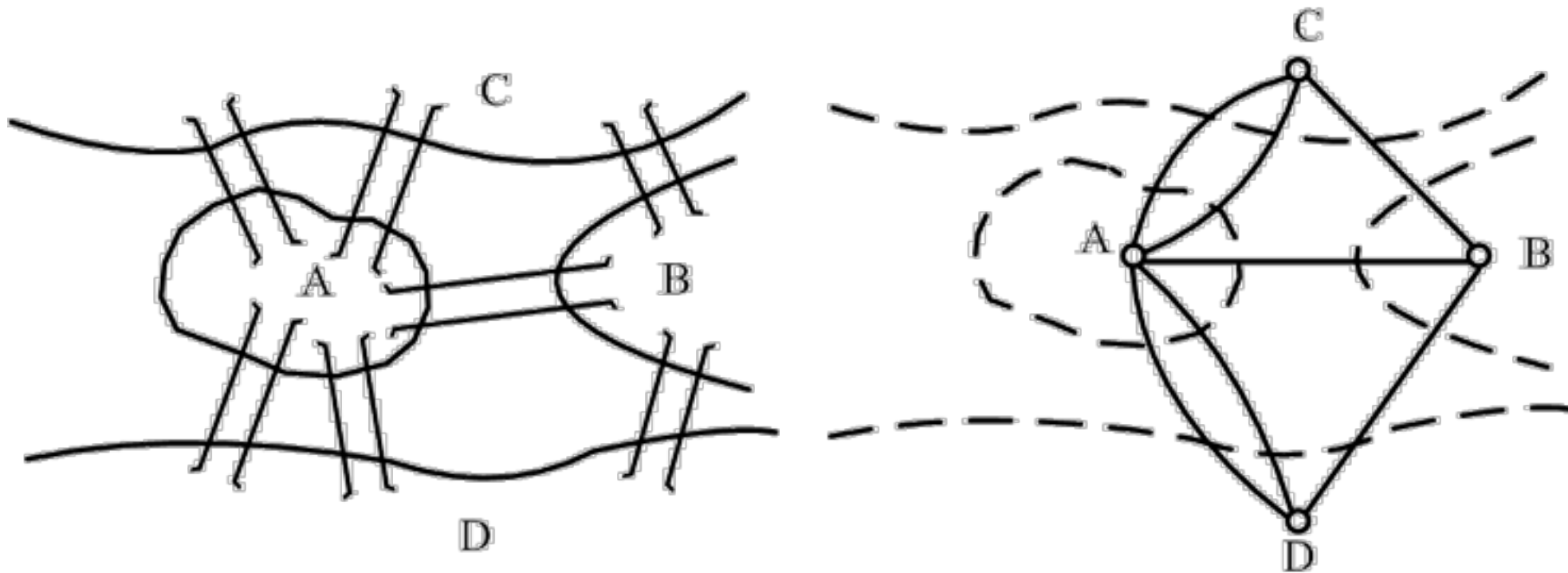
- 七桥问题(Seven bridges of Königsberg problem):
River Pregel, Kaliningrad, Russia: 镇上的人们想弄明白是否可能从镇里某个位置出发不重复的经过所有桥并且返回出发点。



Leonhard Euler



- Leonhard Euler(1707~1783)于1736年发表了他的解答，这也许是人们第一次使用图论.欧拉将问题抽象成一个多重图，问题变为：
在这个多重中是否存在包含所有边的简单回路？

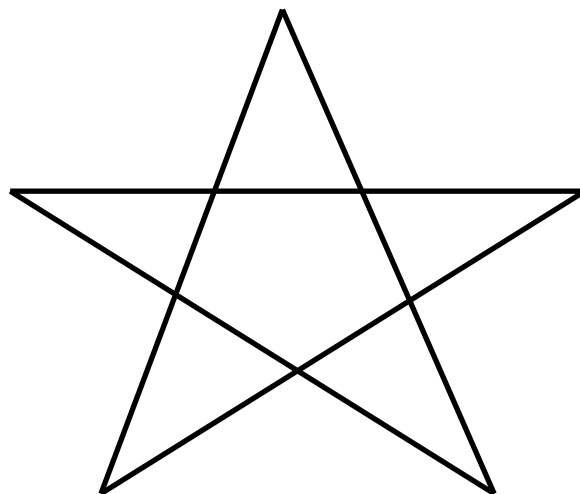
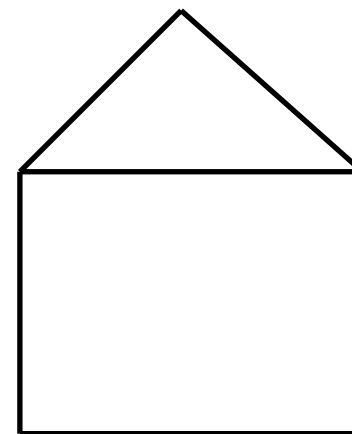
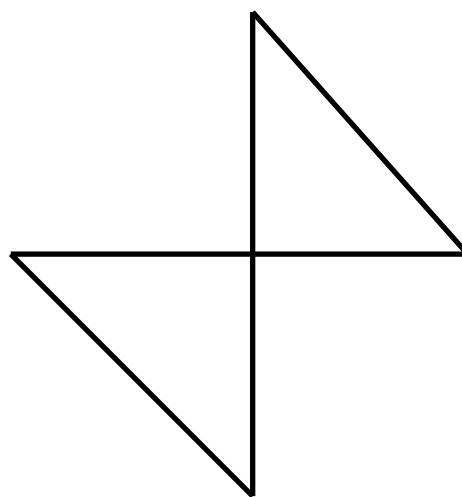
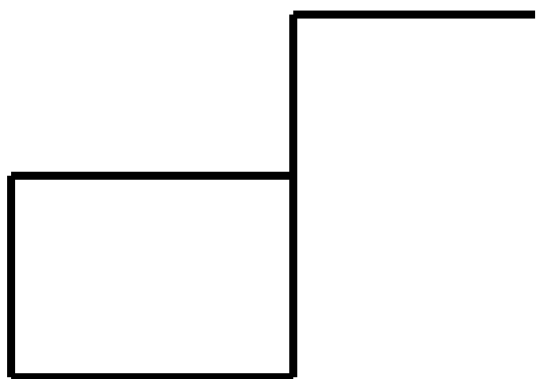




一笔画问题

■ “一笔画”指笔不离开纸，而且每条线都只画一次不准重复而画成的图形。

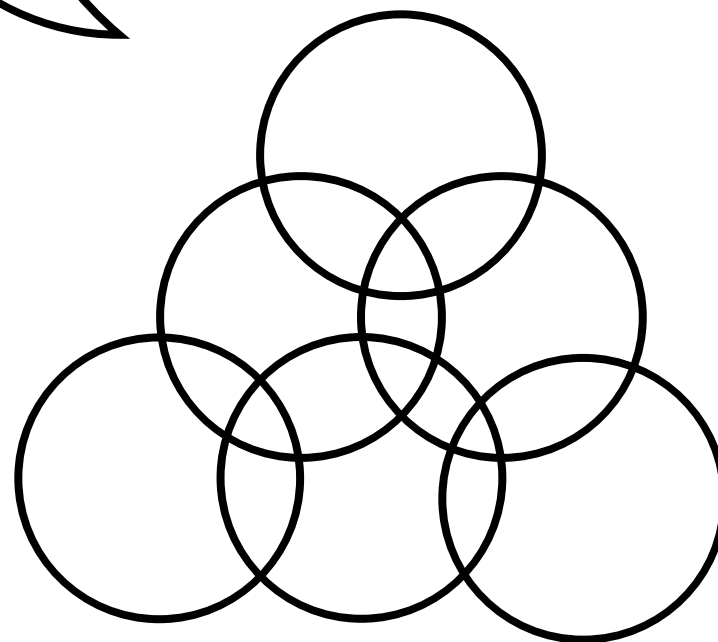
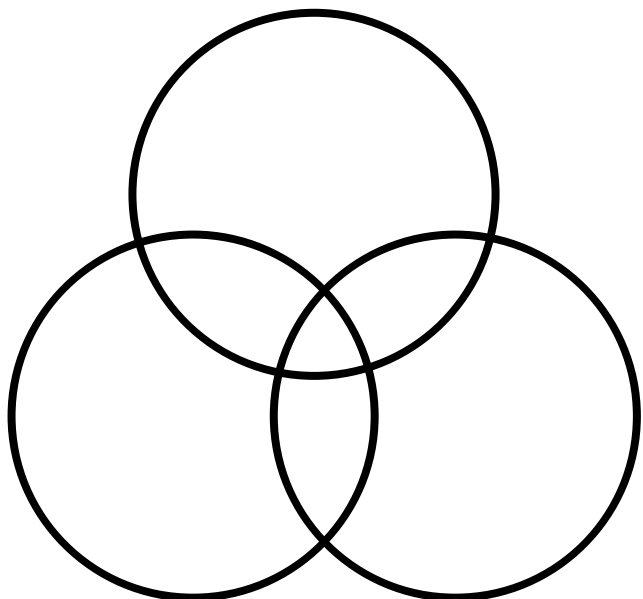
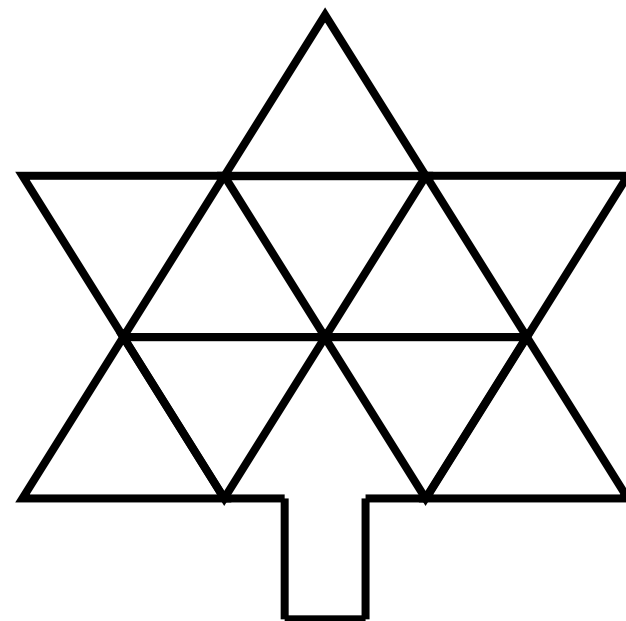
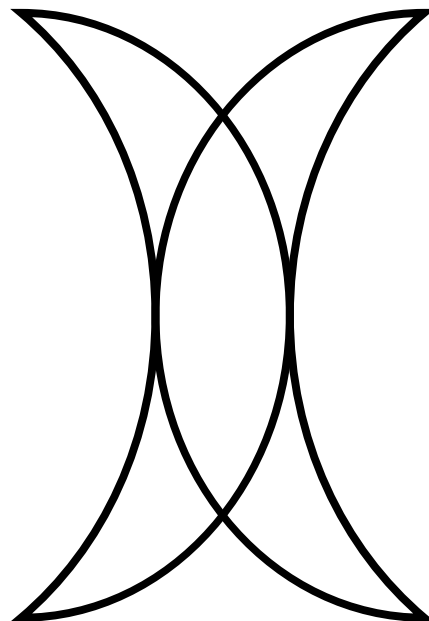
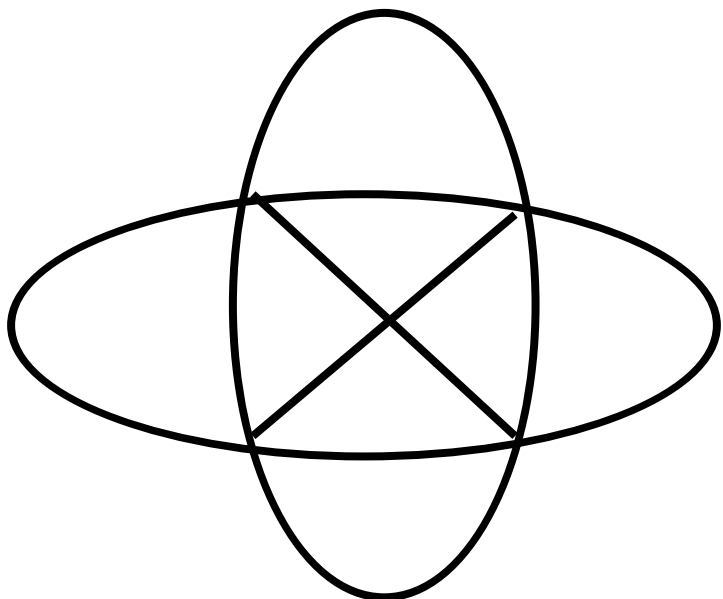
■ 你能用一笔画出下列图形吗？





一笔画问题

下面的图形可以一笔画出吗？





欧拉图(Eulerian)

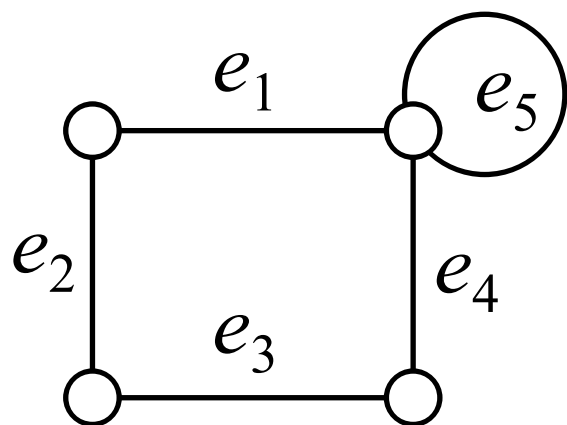
- **欧拉通路(Euler trail):** 经过图中所有边的简单通路
- **欧拉回路(Euler tour/circuit):** 经过图中所有边的简单回路
- **欧拉图(Eulerian):** 存在欧拉回路的图
- **半欧拉图(semi-Eulerian):** 存在欧拉通路的图

几点说明:

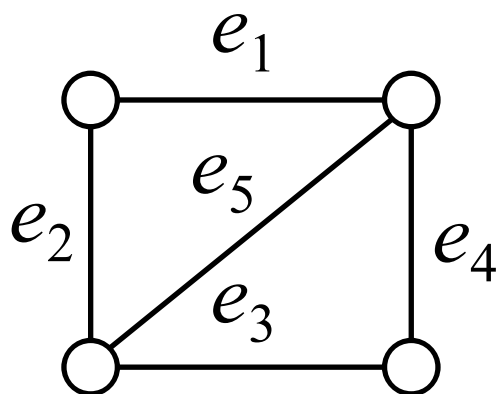
- 上述定义对无向图和有向图都适用;
- 规定平凡图为欧拉图;
- 欧拉路是简单通路, 欧拉回路是简单回路;
- 环不影响图的欧拉性.

欧拉图举例

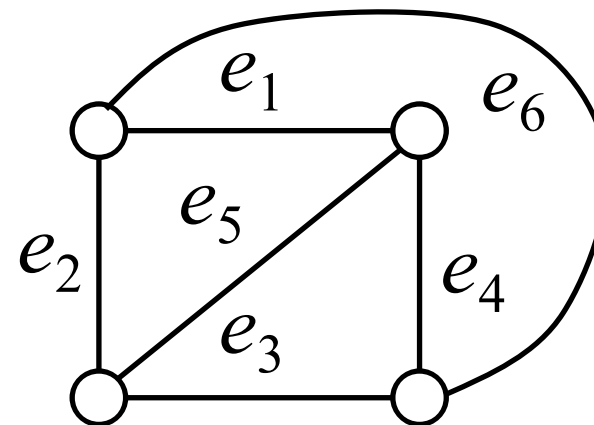
例 下列图中，哪些是欧拉图？哪些是半欧拉图？在非(半)欧拉图中至少增加几条边才能成为欧拉图？



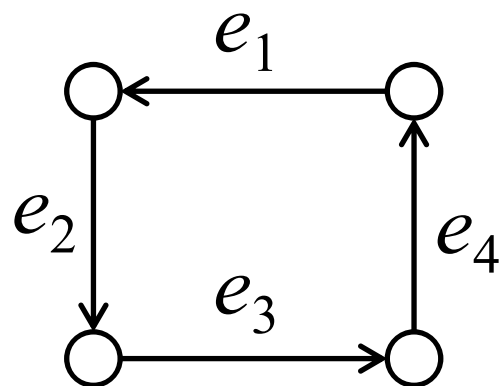
(1)



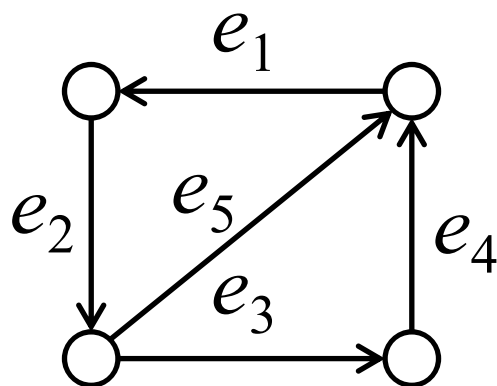
(2)



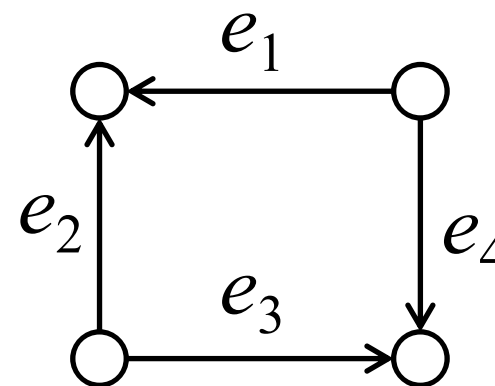
(3)



(4)



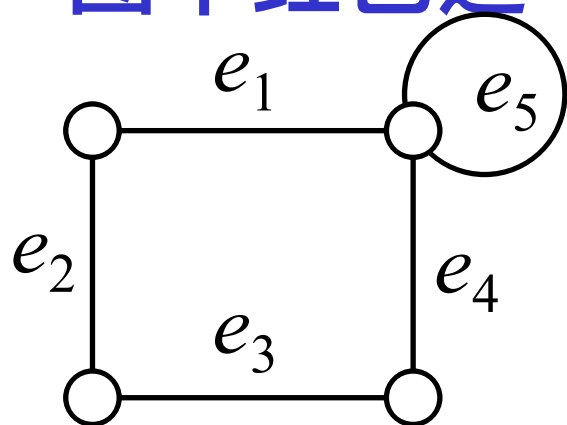
(5)



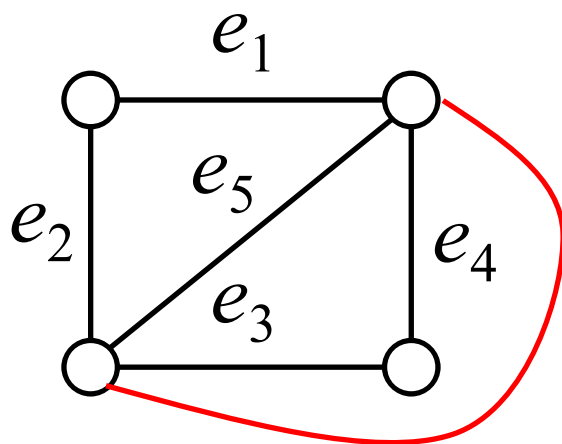
(6)

欧拉图举例

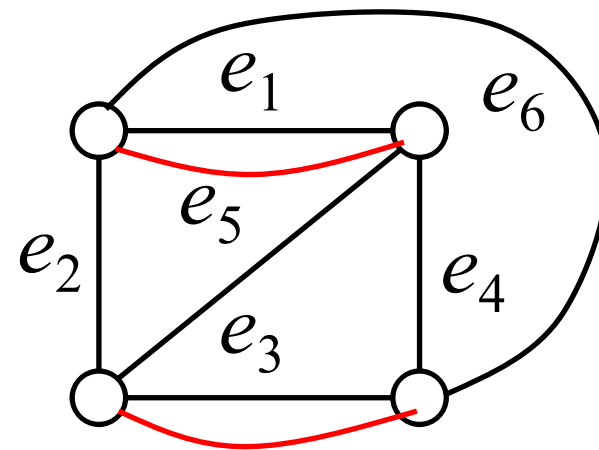
解 (1)(4)是欧拉图, (2)(5)是半欧拉图,对于非欧拉图增加图中红色边可以成为欧拉图。



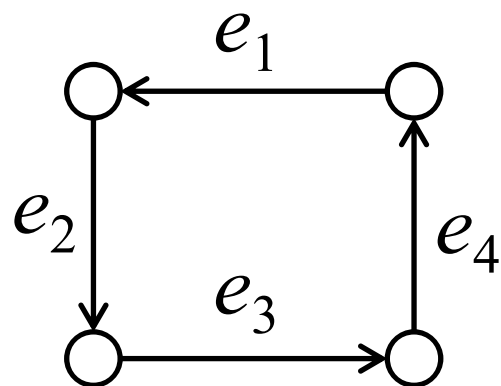
欧拉图



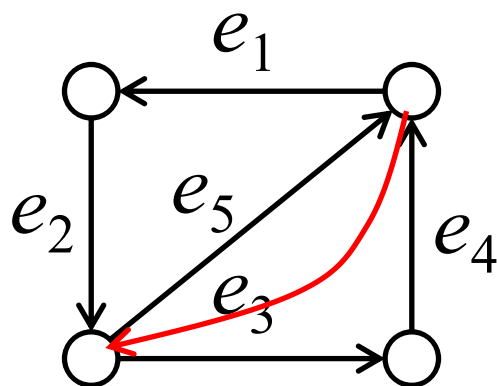
半欧拉图



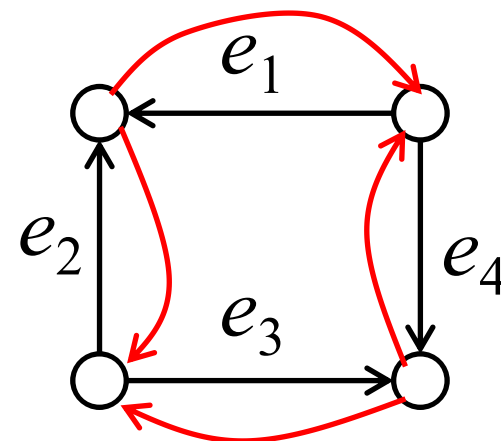
非 (半) 欧拉图



欧拉图



半欧拉图



非 (半) 欧拉图

无向欧拉图的充分必要条件

■ **定理1:** 设 G 是无向连通图,则

(1) G 是欧拉图

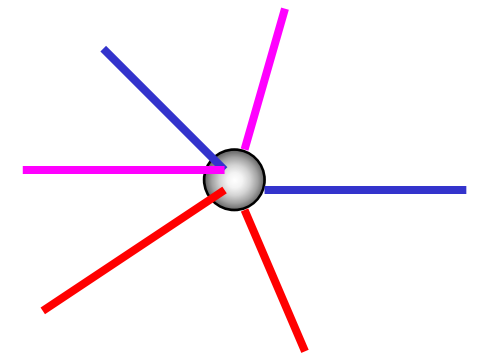
\Leftrightarrow (2) G 中所有顶点的度都是偶数

\Leftrightarrow (3) G 是若干个边不交的圈的并

证明: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

先证 $(1) \Rightarrow (2)$.

若欧拉回路总共 k 次经过顶点 v ,则 $d(v)=2k$.





定理1的证明(2) \Rightarrow (3)

再证(2) \Rightarrow (3). 对 G 的边 m 作归纳.

$m=1$ 时, G 必为环,因此结论成立.

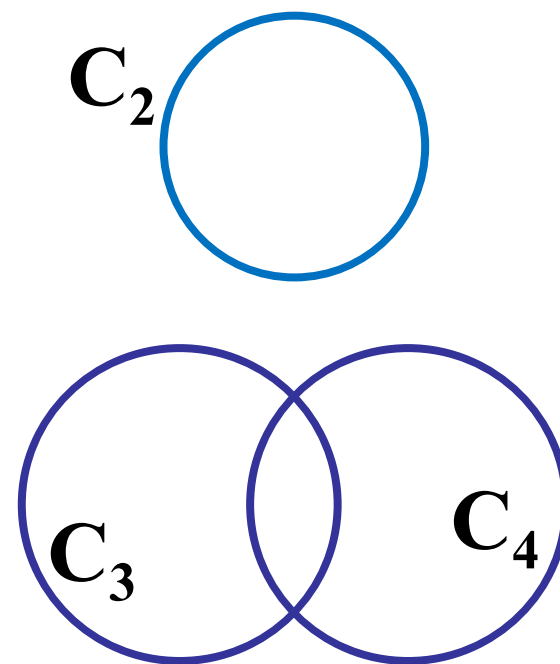
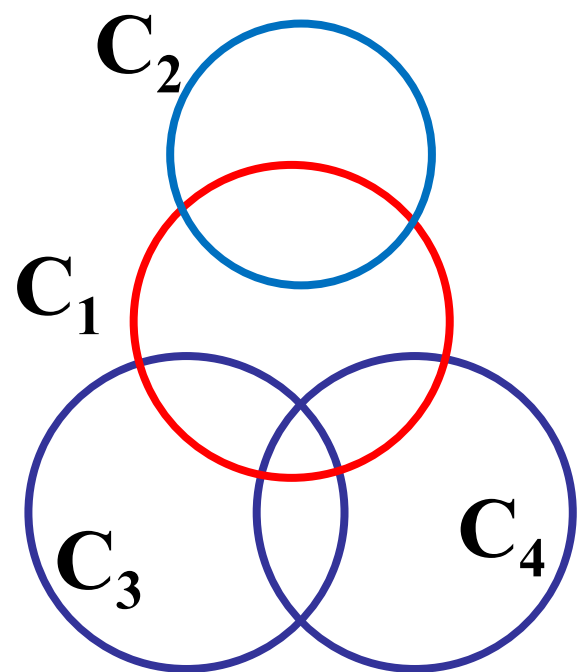
假设 $m \leq k$ 时结论成立,下面证明 $m=k+1$ 时结论也成立.

由已知得 $\delta(G) \geq 2$, 因而 G 中一定有长度大于等3的圈 C ,

设 $G'=G-C$, G' 的连通分支为 G_i , $1 \leq i \leq s$, 且 $|E(G')| \leq k$.

显然 G' 顶点的度都是偶数,由归纳假设 G_i 由若干边不交的圈的并构成,因此 G' 一定也由若干边不交的圈的并构成,显然 C 与这些圈都边不交, 因此得证.

定理1的证明(2) \Rightarrow (3)



定理1的证明(3) \Rightarrow (1)

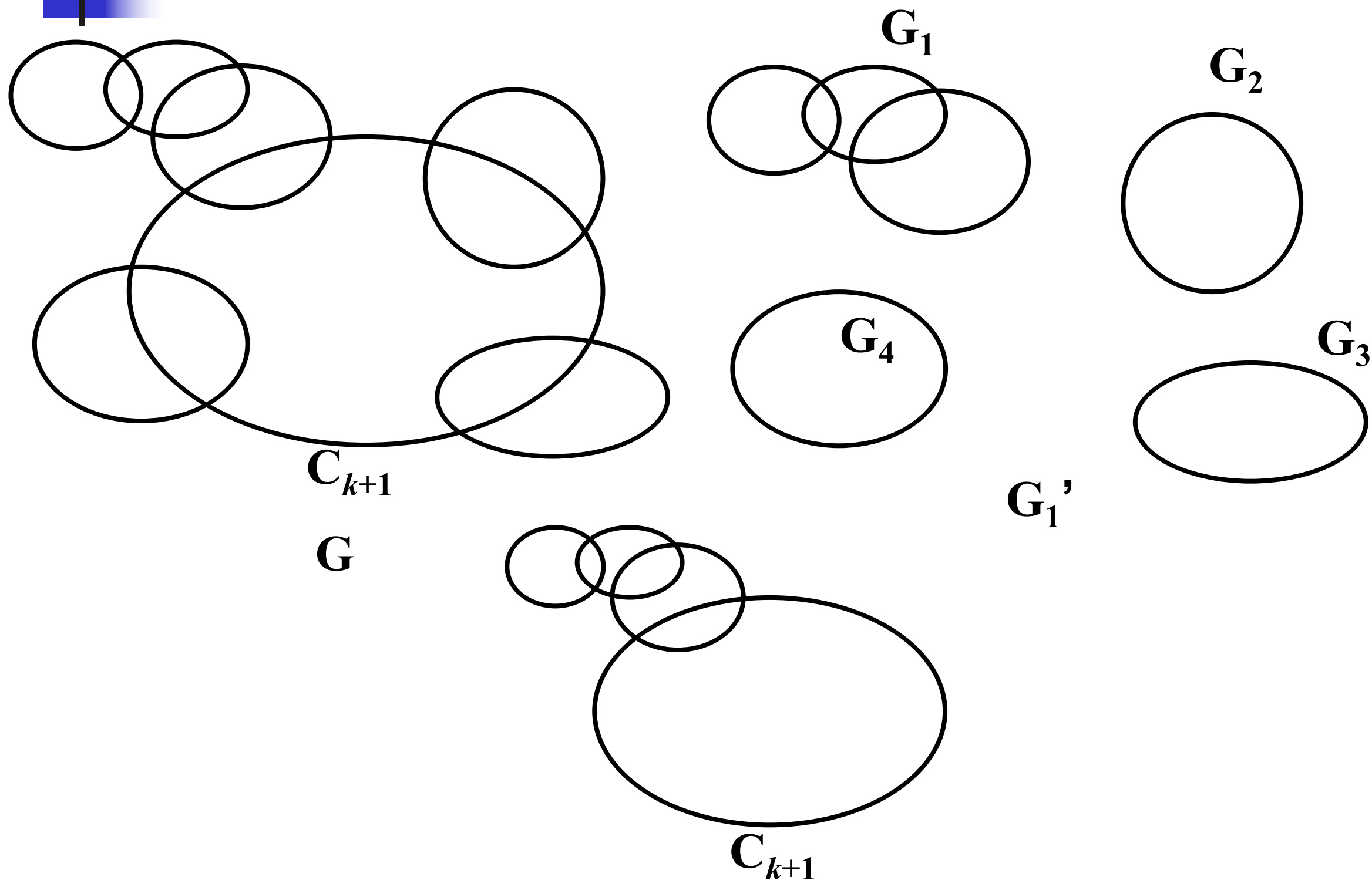
最后证明(3) \Rightarrow (1). 对 G 中的圈的个数 d 作归纳.

当 $d=1$ 时, $G=C_1$,显然 C_1 是 G 中的欧拉回路,所以 G 是欧拉图.

设 $d \leq k$ 时($k \geq 1$)时结论成立,下面证明 $d=k+1$ 时结论也成立.

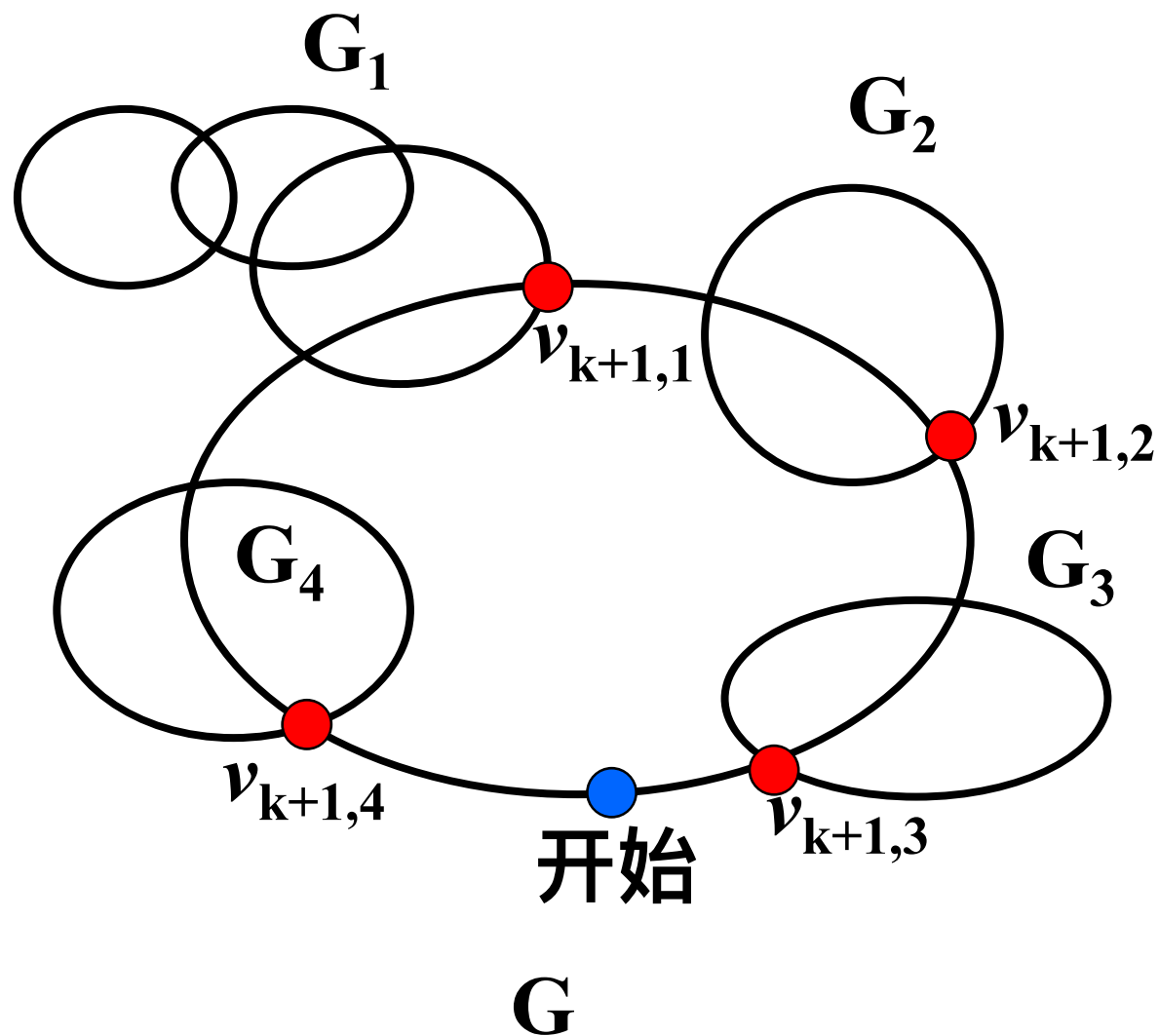
设 $G_1' = G - E(C_{k+1})$,其中 $G = \bigcup_{i=1}^{k+1} C_i$,并设 G_1' 有 s 个连通分支 G_1, G_2, \dots, G_s .显然 G_i 为若干个边不交的并,由归纳假设 G_i 为欧拉图,存在欧拉回路,记为 \widetilde{C}_i ,由于 G 连通,所以 C_{k+1} 与 \widetilde{C}_i 都有公共顶点, $i=1, 2, \dots, s$.

定理1的证明(3) \Rightarrow (1)



定理1的证明(3) \Rightarrow (1)

在 C_{k+1} 上任选一顶点作为开始点,沿 C_{k+1} 行进,遇到 C_{k+1} 与 G_i 的公共点,先行完 G_i 的欧拉回路,再继续沿 C_{k+1} 的行进,直到回到开始点为止,得到一条欧拉回路.



无向半欧拉图的充分必要条件

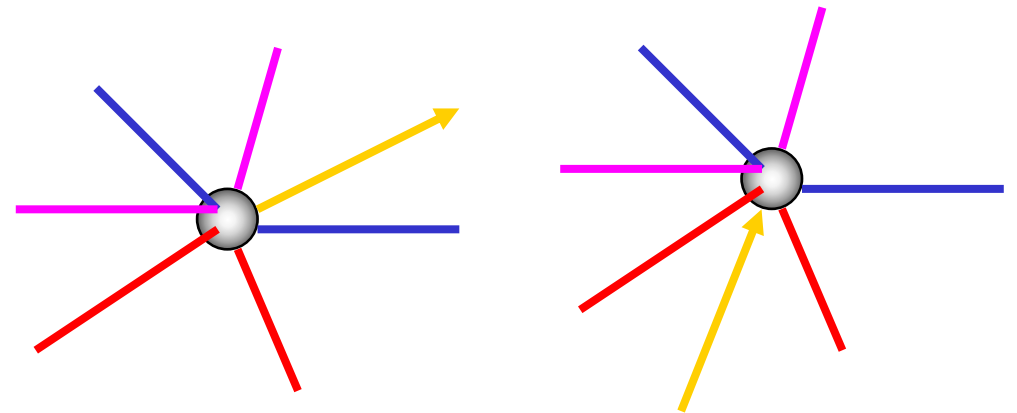
■ **定理2:** 设 G 是无向连通图,则

(1) G 是半欧拉图

\Leftrightarrow (2) G 中恰有2个奇度顶点

证明 先证(1) \Rightarrow (2). 欧拉通路的起点和终点是奇数度,其余顶点都是偶数度.

再证(2) \Rightarrow (1). 在两个奇数度顶点之间加1条新边,所有顶点都是偶数度,得到欧拉回路.从欧拉回路上删除所加边后,得到欧拉通路.



有向欧拉图的充分必要条件

■ **定理8.3:** 设 G 是有向连通图,则

(1) G 是欧拉图

\Leftrightarrow (2) $\forall v \in V(G), d^+(v) = d^-(v)$

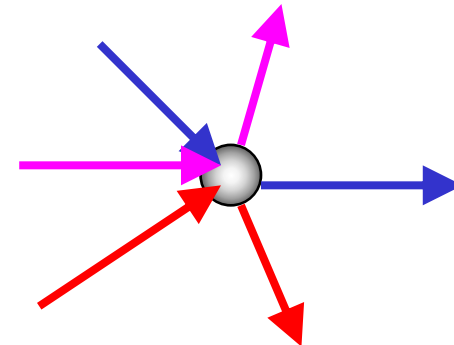
\Leftrightarrow (3) G 是若干个边不交的有向圈的并

证明 (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).

证(1) \Rightarrow (2). 若欧拉回路总共 k 次经过顶点 v ,则

$$d^+(v) = d^-(v) = k.$$

■ 其余与定理1类似.

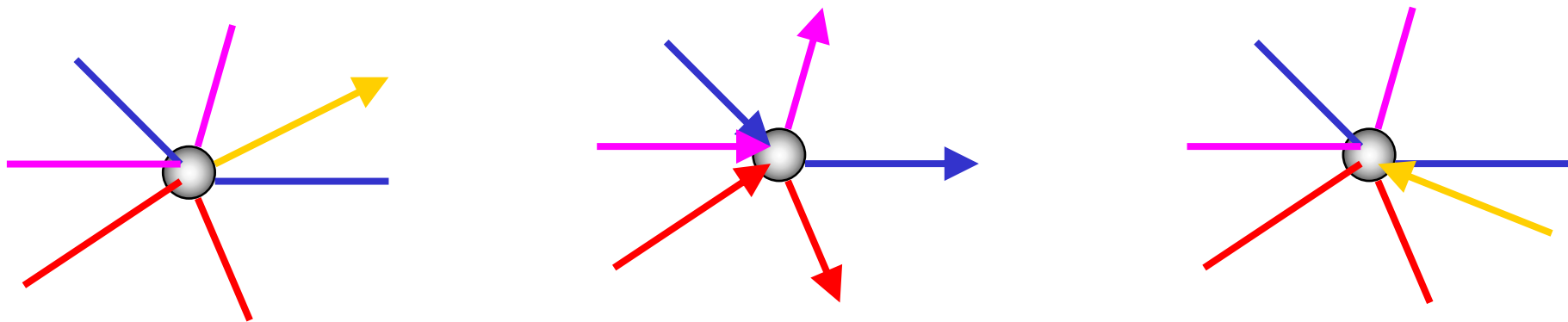


有向半欧拉图的充分必要条件

■ **定理8.4:** 设 G 是无向连通图,则

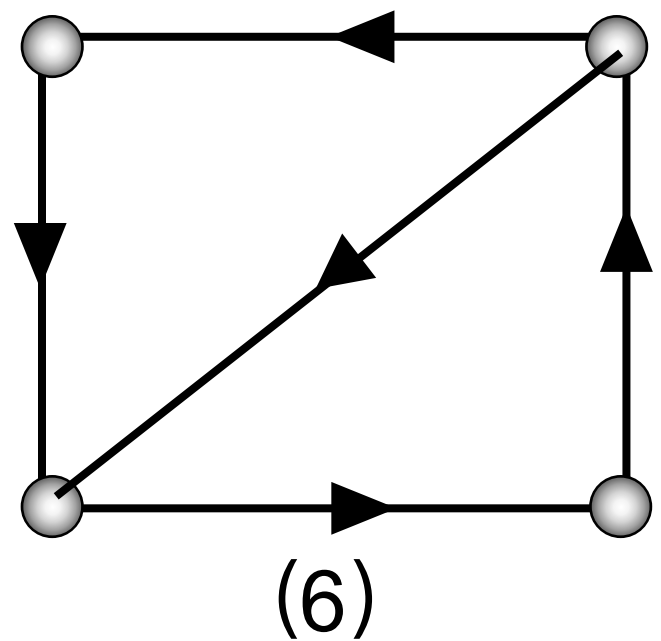
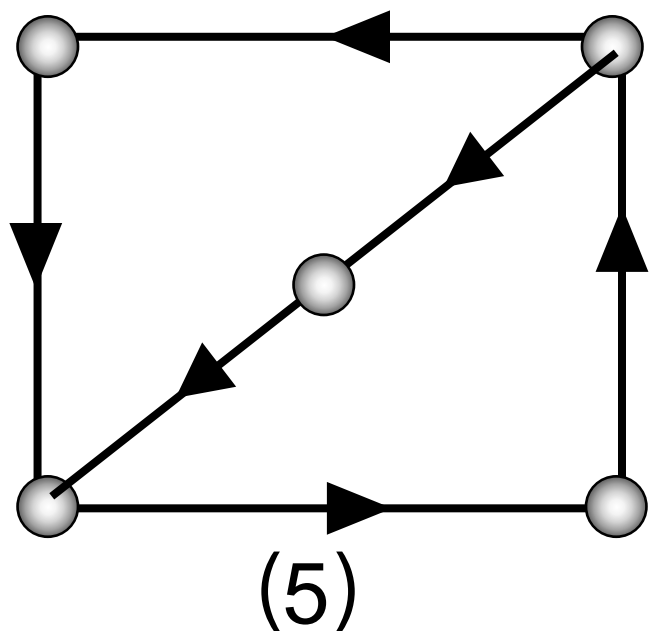
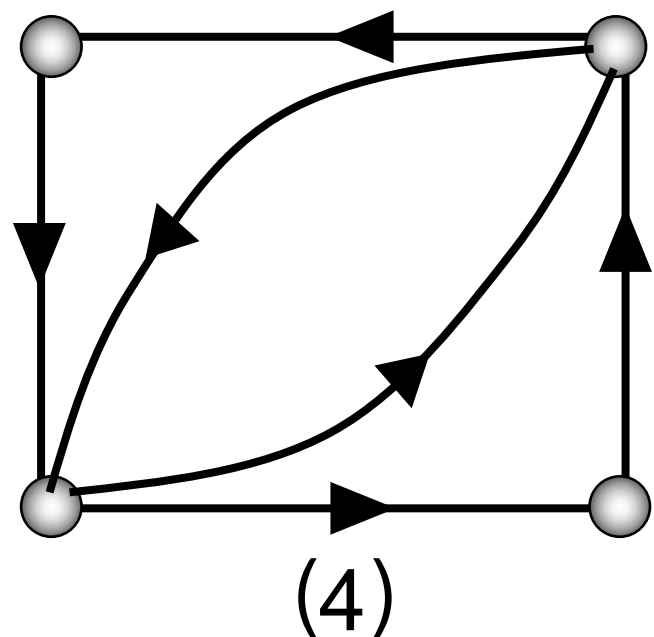
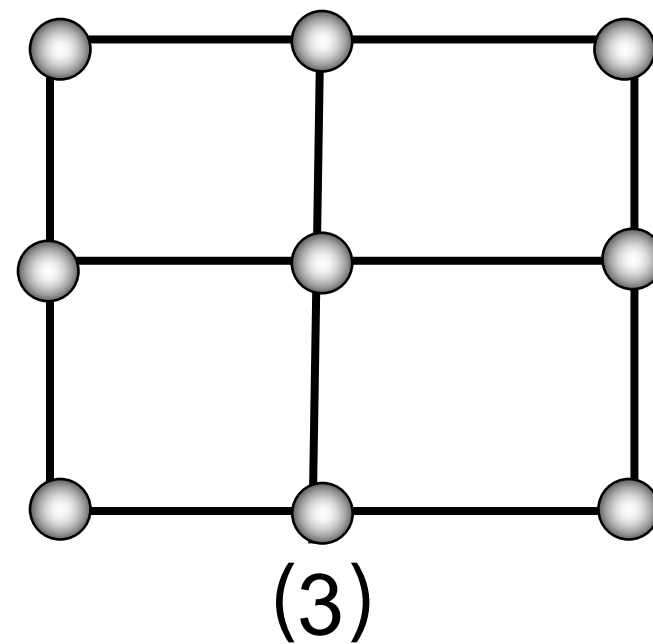
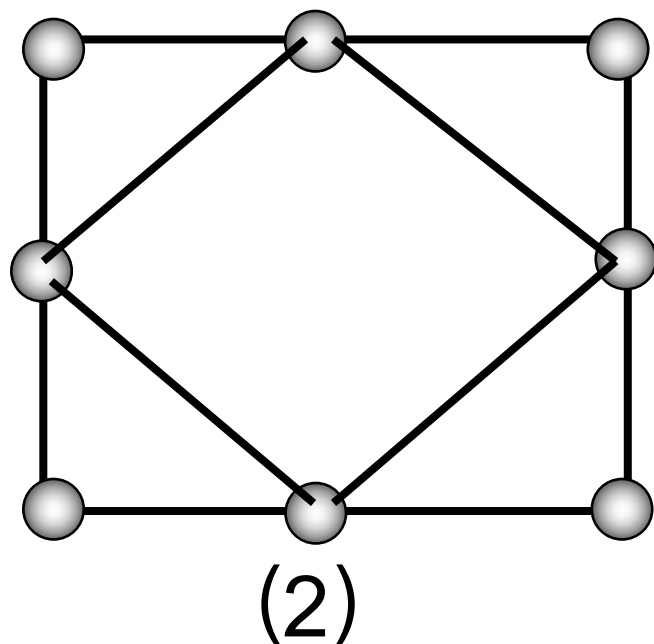
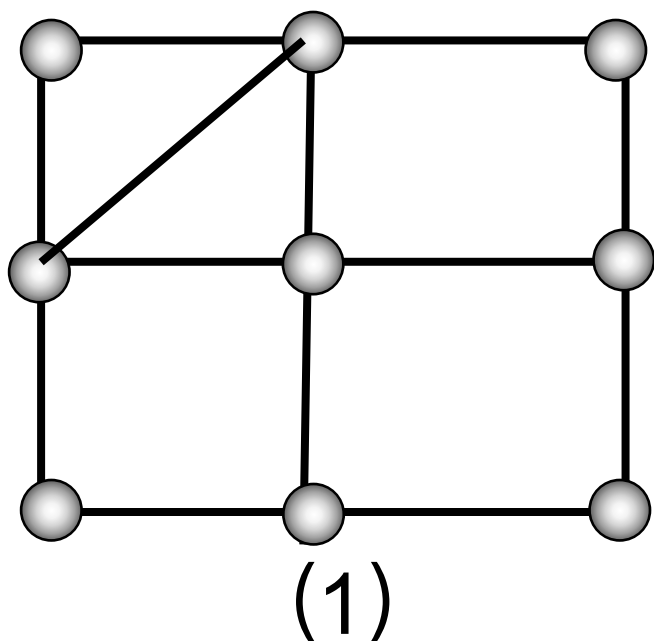
(1) G 是半欧拉图

\Leftrightarrow (2) G 中恰有2个奇度顶点, 其中1个入度比出度大1, 另1个出度比入度大1, 其余顶点入度等于出度.

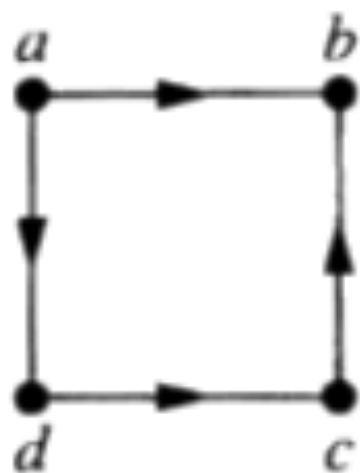
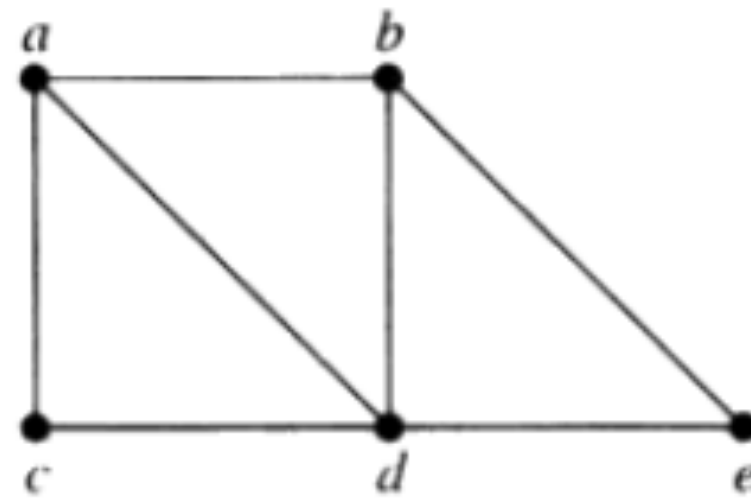
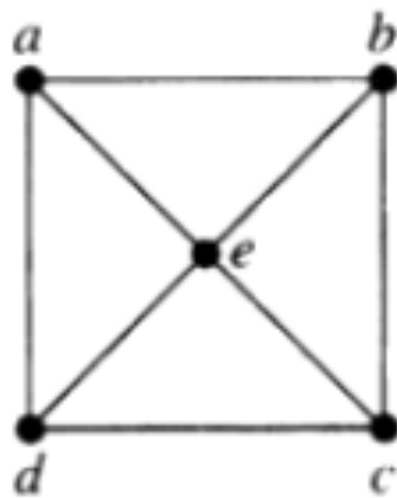
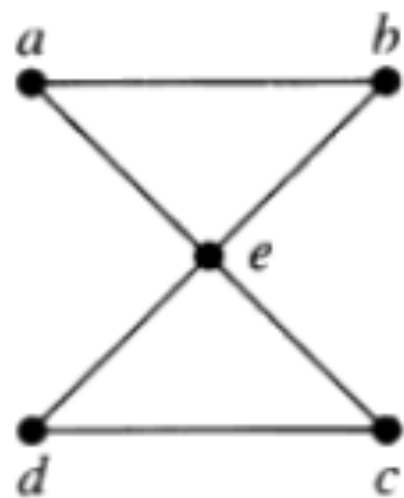




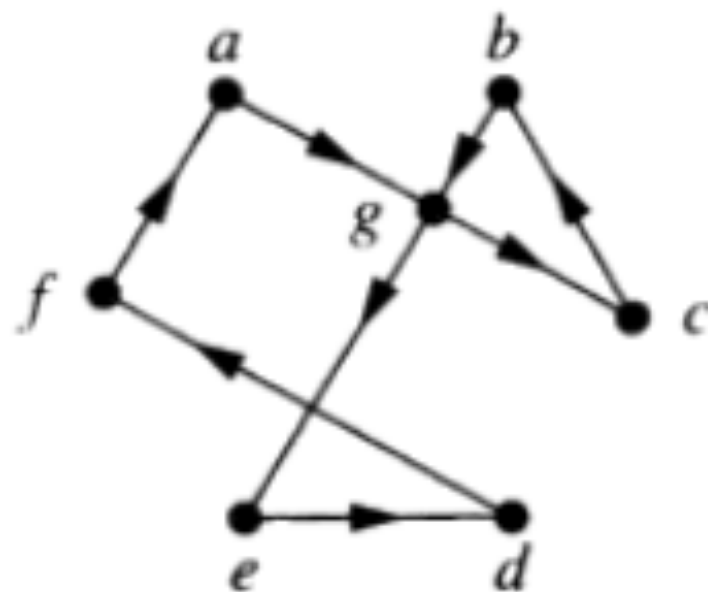
下面哪些图是欧拉图，哪些是半欧拉图



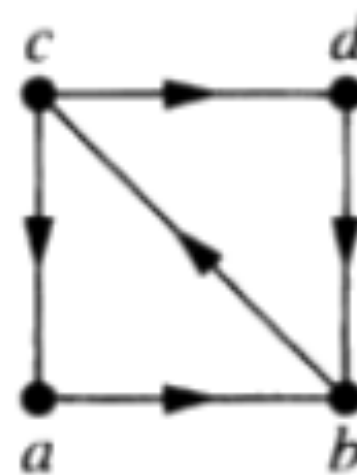
下面哪些图是欧拉图，哪些是半欧拉图



H_1



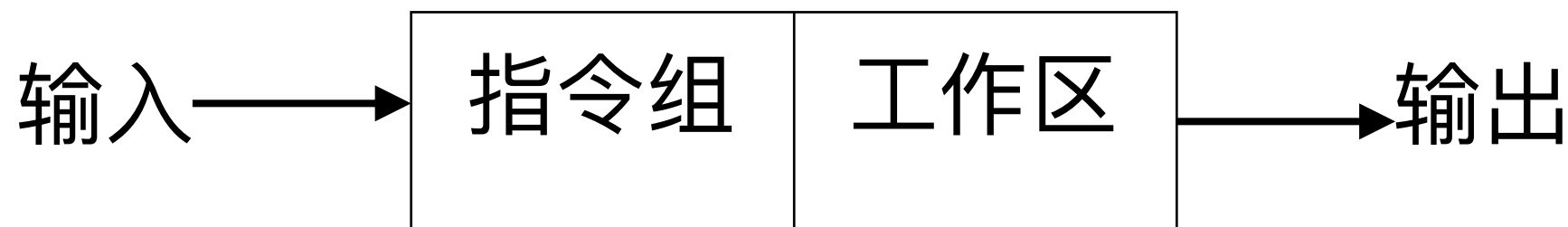
H_2



H_3

算法(algorithm)

- 一组有限条指令, 具有以下特征:
 - **输入**: 算法工作对象
 - **输出**: 算法工作结果
 - **确定性**: 算法根据输入和当前工作状态, 决定下一步采用的指令
 - **可行性**: 算法的指令都是可以实现的
 - **终止性**: 算法工作有穷步后停止





Fleury算法(弗罗莱算法)

- **输入:** 连通图 G , 起点 v , 终点 w . 若 $v \neq w$, 则除 v, w 外的顶点都有偶数度; 若 $v = w$, 则所有顶点都有偶数度.
- **输出:** 从 v 到 w 的欧拉通路/欧拉回路.
- **算法:** (下一页)



Fleury算法(递归形式)

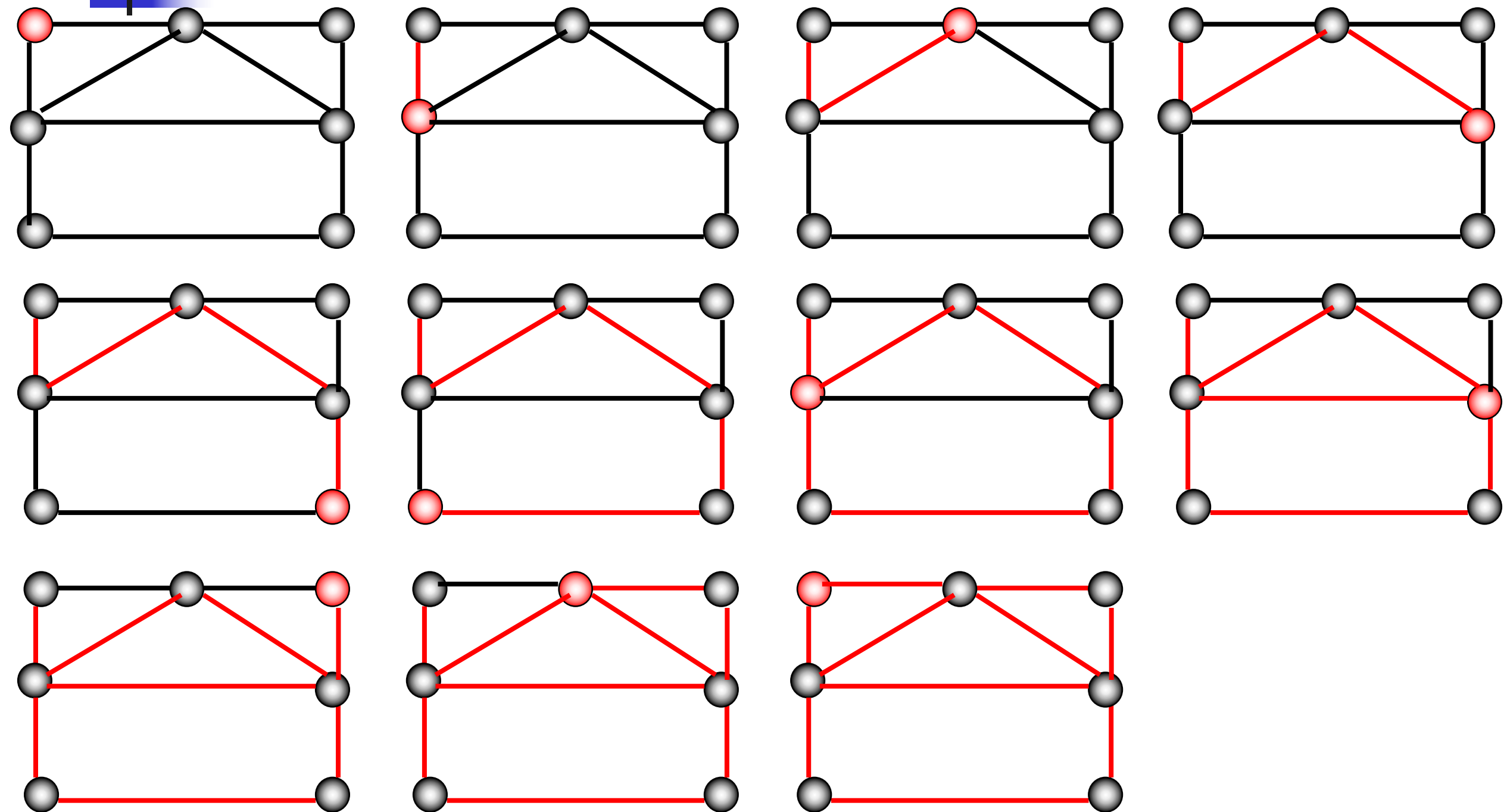
- (1) if $d(v) > 1$ then $e := v$ 关联的任意非割边
- (2) else $e := v$ 关联的唯一边
- (3) $u := e$ 的另一个端点.
- (4) 递归地求 $G - e$ 的从 u 到 w 的欧拉通路
- (5) 把 e 接续在递归地求出的通路上



Fleury算法(迭代形式)

- (1) $P_0 := v$;
- (2) 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i$ 已经行遍, 设 $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$,
 $e_{i+1} := G_i$ 中满足如下2条件的边:
 - (a) e_{i+1} 与 v_i 关联
 - (b) 除非别无选择, 否则 e_{i+1} 不是 G_i 中的桥
- (3) 若 $G_i \neq N_i$, 则回到(2); 否则算法停止

Fleury算法(举例)



Fleury算法(正确性证明)

- **定理5:** 设 G 是无向欧拉图,则Fleury算法终止时得到的简单通路是欧拉回路。

证明: (1) 证明 P_m 是回路。

(2) P_m 经过 G 中所有边: (反证)否则,

$G - P_m$ 的连通分支还是欧拉回路, 并且与 P_m 相交. 若 v_0 是交点, 则算法不应结束; 若 v_0 不是交点, 则算法在最后离开交点回到 v_0 时走了桥; 这都是矛盾!



逐步插入回路算法

(0) $i:=0$, $v^*:=v_1$, $v:=v_1$, $P_0=v_1$, $G_0=G$. //保存起始点,初始化

(1) $e:=$ 在 G_i 中与 v 关联的任意边 (v, v') ,

$P_{i+1}:=“P_i”ev'$. //通路增加1

(2) **if** $v' \neq v^*$ **then** $i:=i+1$, $v=v'$, **goto** (1).

//如果未回到起点,以 v' 为起点 继续扩大路径

(3) **if** $E(P_{i+1})=E(G)$ **then** 结束// P_{i+1} 是欧拉回路,结束

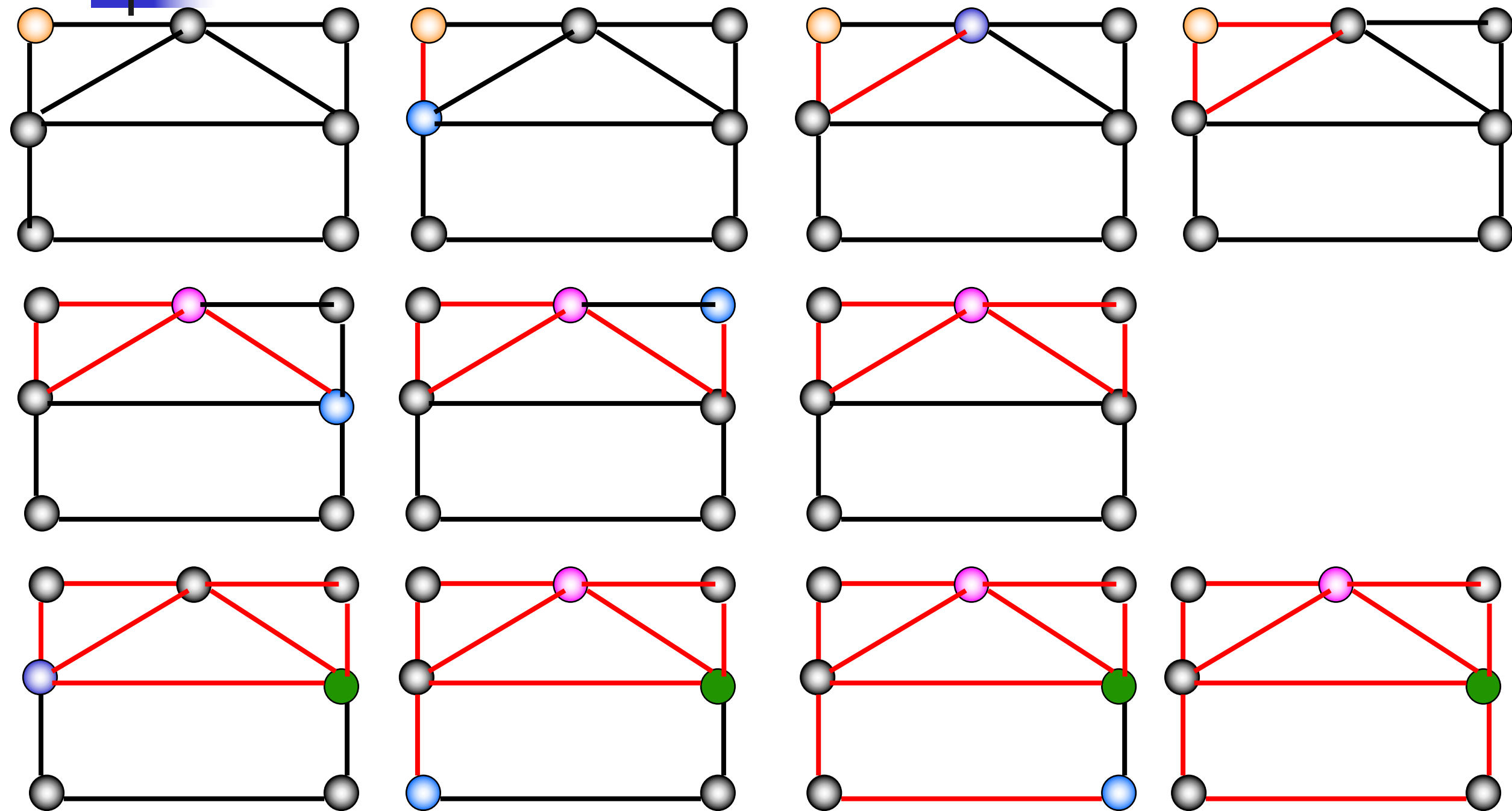
else $G_{i+1}:=G-E(P_{i+1})$, // P_{i+1} 不是欧拉回路,从交点开始寻找回路.

$e:=$ G_{i+1} 中与 P_{i+1} 上 v_k 关联的任意边,

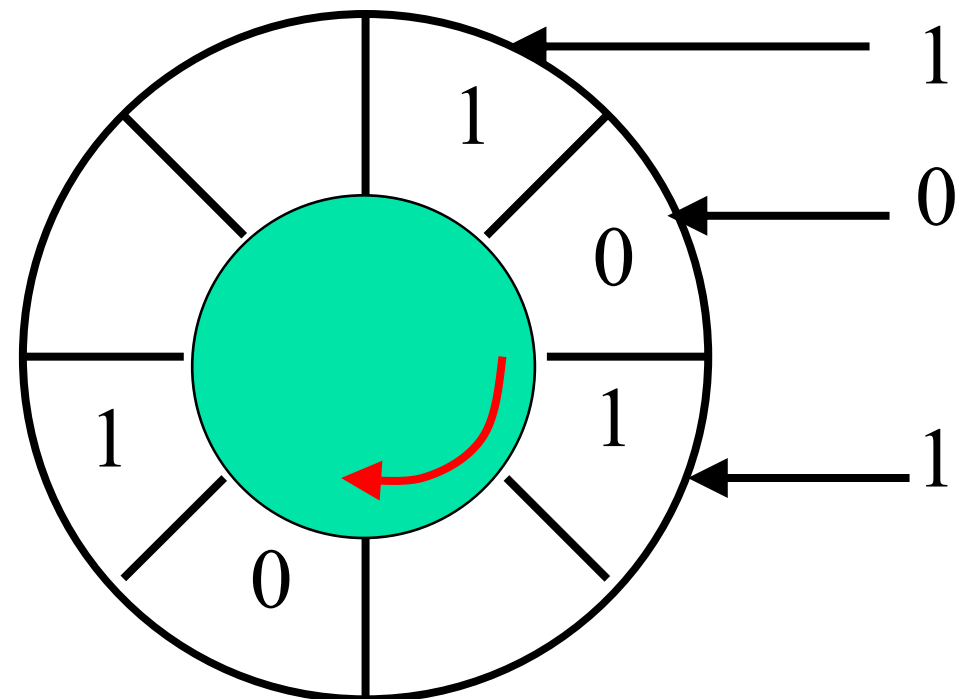
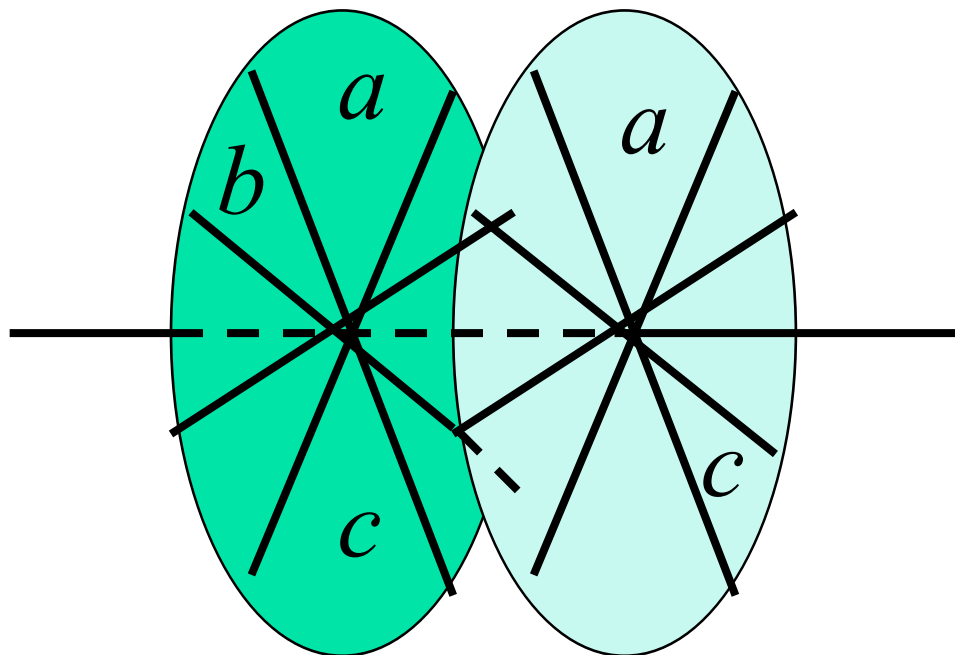
$P_{i+1}:= v_k \dots v_k$.

$v^*:= v_k$, $v:= v_k$, $i:=i+1$, **goto** (1).

逐步插入回路算法(举例)



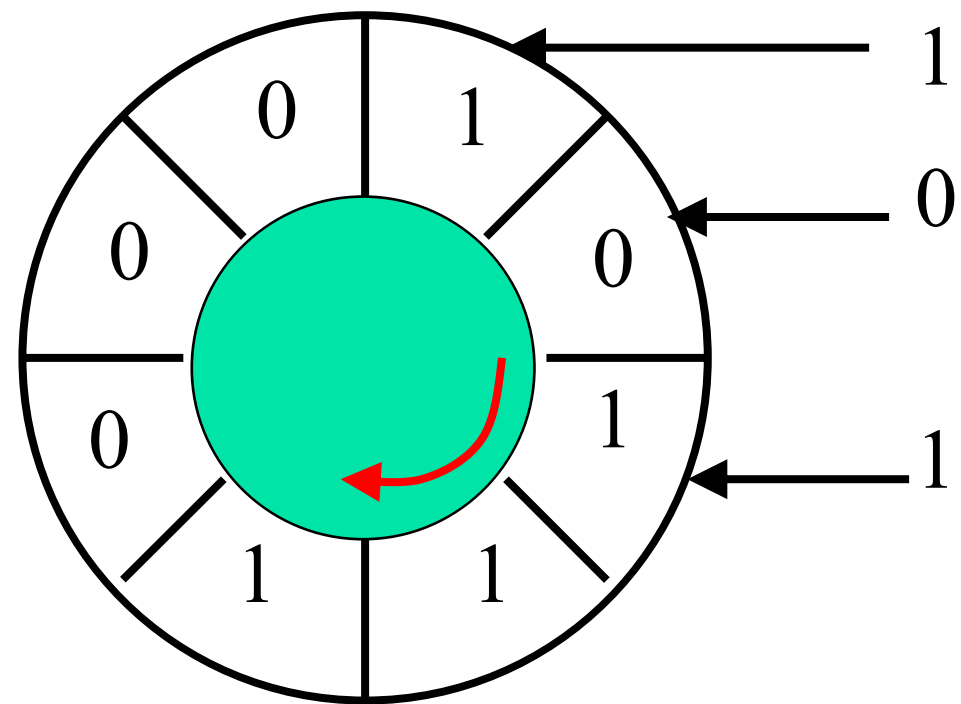
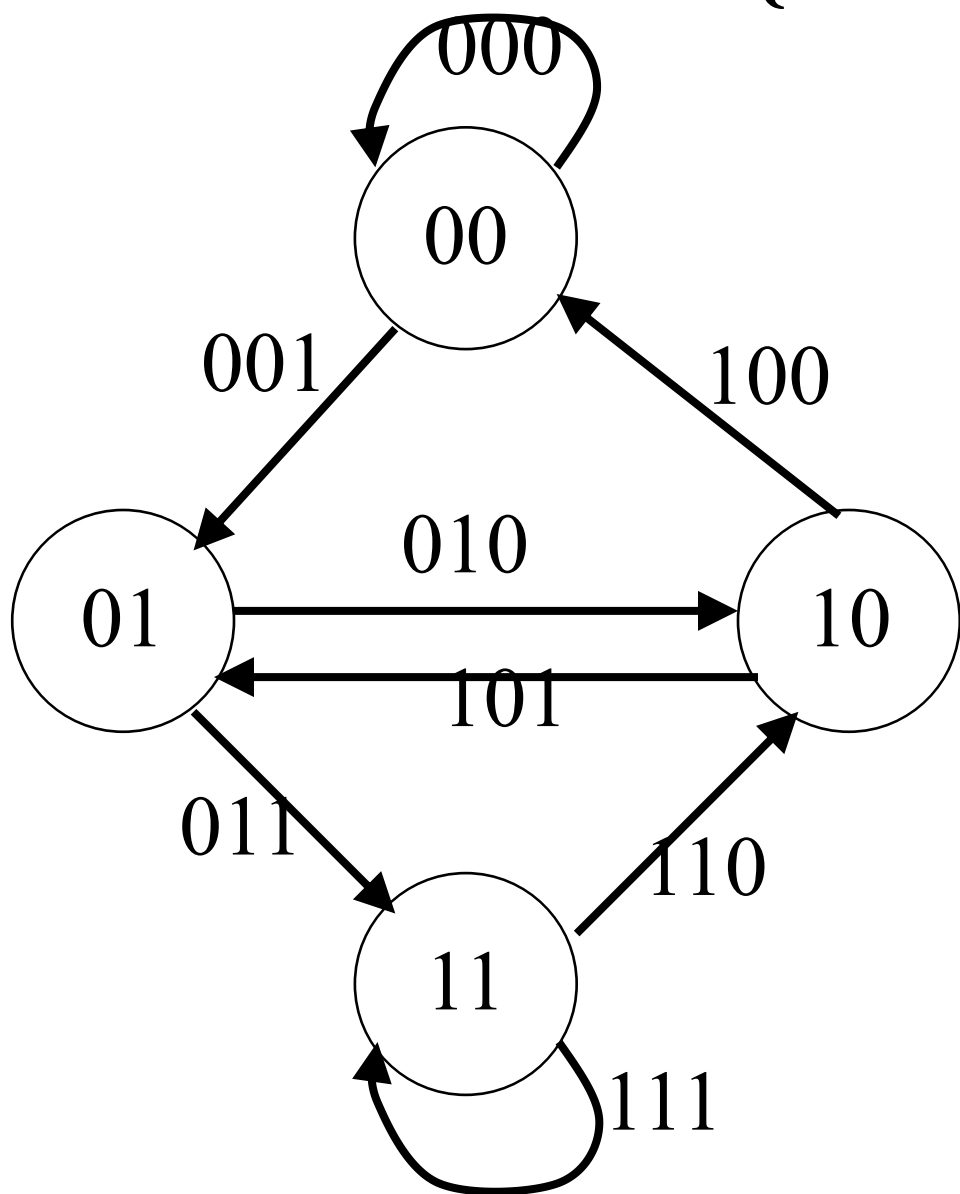
应用(轮盘设计)



应用(轮盘设计)

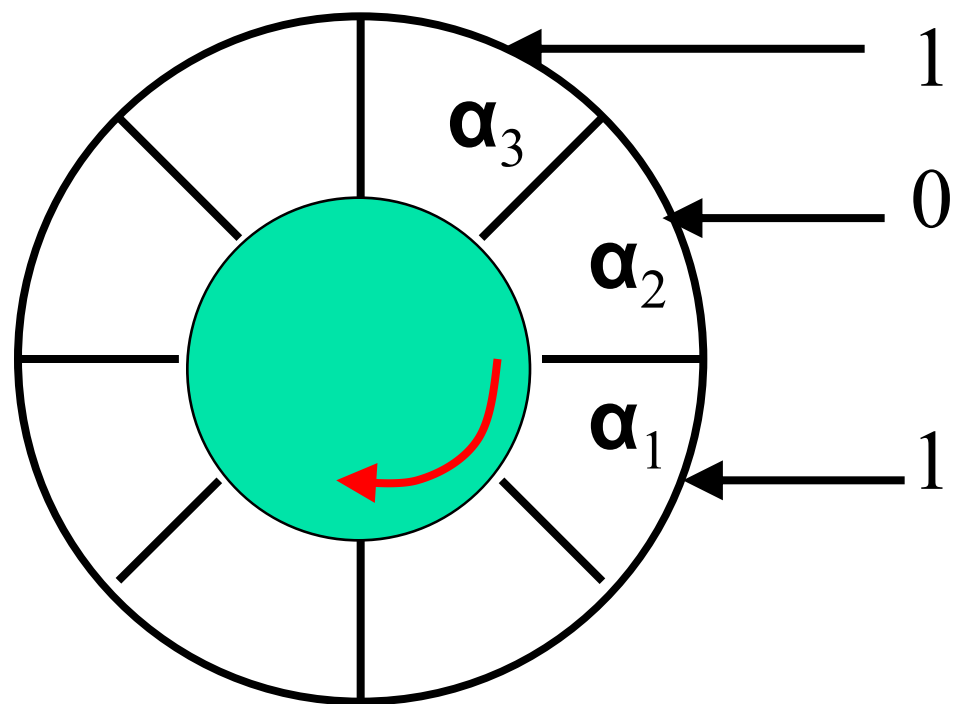
构造有向图 $D=\langle V,E\rangle$, $V=\{00,01,10,11\}$,

$$E=\{ abc=\langle ab, bc\rangle \mid a,b,c\in\{0,1\} \}$$



欧拉回路: 000 001 010 101 011 111
110 100,
在圆盘上的排列为01011100

应用(轮盘设计)



- 扩展问题：设有 m 个字母，输出长度为 n 的符号串，如何将 m^n 个排列在圆盘上，使圆盘每顺时针转动 1 格，输出一个新的符号串？

■ 有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \mid \alpha_i \in S, 1 \leq i \leq n-1 \}$,

$S = \{ a_1, a_2, \dots, a_m \}$, $|V| = m^{n-1}$

$E = \{ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}, \alpha_2 \dots \alpha_n \rangle \mid \alpha_i \in S, 1 \leq i \leq n-1 \}$

■ 显然 D 是欧拉图，每个顶点的入度 = 出度 = m ,

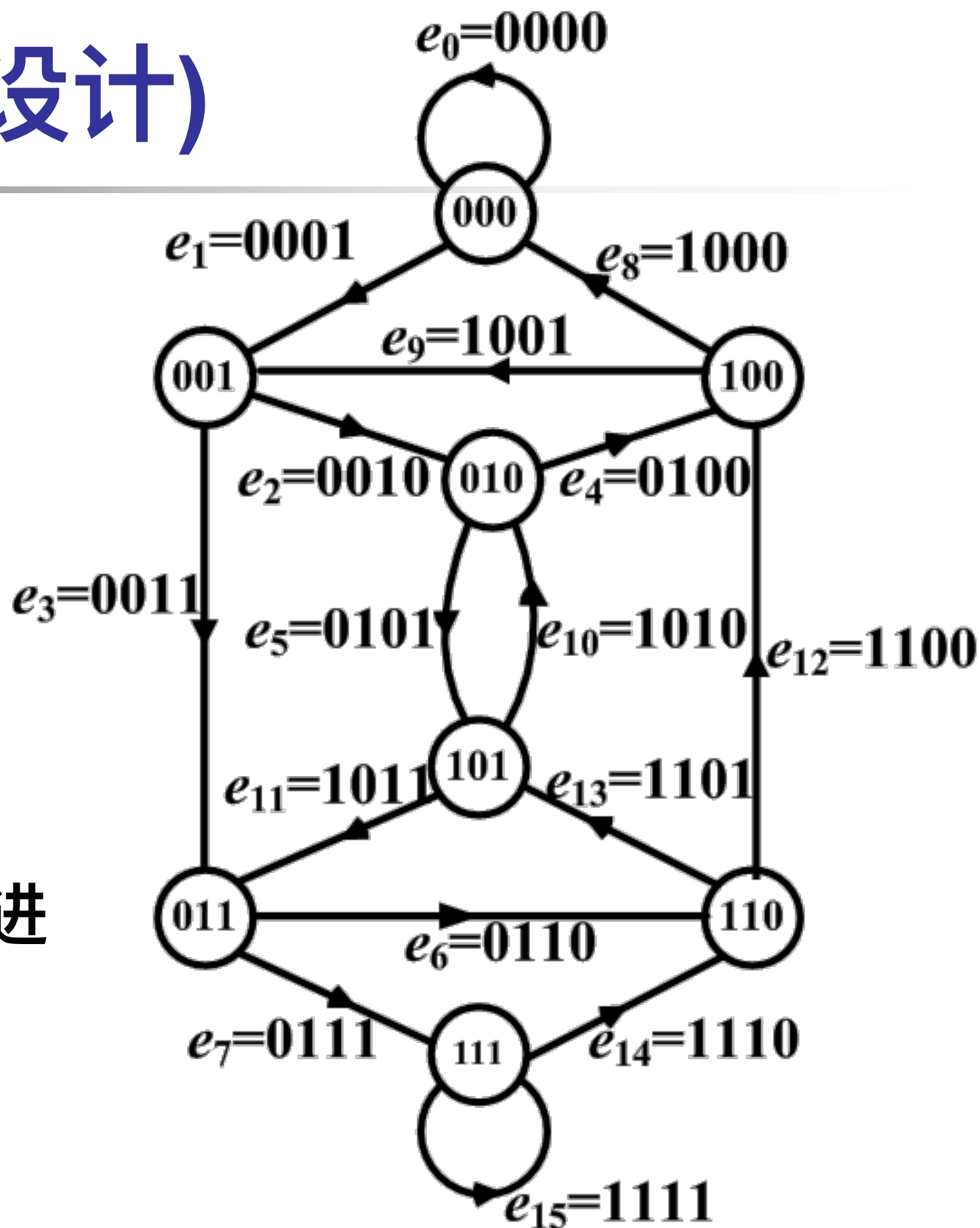
$|E| = m \cdot m^{n-1} = m^n$

应用(轮盘设计)

- 输出4位二进制数.
- $D=\langle V,E \rangle$,
 $V=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$,
 $E=\{abcd=\langle abc,bcd \rangle \mid a,b,c \in \{0,1\}\}$

所以欧拉图对应的二进制序列为

0000100110101111





欧拉图的应用

- 中国邮递员问题(Chinese postman problem): 求邮递员走遍管区所有街道的最短回路
管梅谷(Guan Mei-gu), 1962, 中国
解决方案: 运筹学、动态优化、智能计算
- 电路布线
- 网络组播
- 分子生物: 欧拉通路用于DNA测序



总结

- 七桥问题,一笔画,欧拉通(回)路,欧拉图
- 判定欧拉图的充分必要条件
- 求欧拉回路的算法
- 中国邮递员问题
- 作业:P142习题八,1,2,6,补充题: 判定图是否为欧拉图