**证明：** 分两情况讨论：

情况一：若 $G$ 中存在无限阶元 $a$，则 $\langle a\rangle, \langle a^2\rangle, \cdots, \langle a^k\rangle, \cdots$ $(k \in \mathbb{Z})$都是 $G$ 的子群，且为互不相同的子群。命题成立。

情况二：若 $G$ 中不存在无限阶元，则对任意 $g \in G$，$|\langle g\rangle| = |g|$ 是有限的。作 $S = \{\langle g\rangle \mid g \in G\}$，我们证明 $S$ 是无穷集合，从而证明 $G$ 有无穷多个不同的子群。

注意到，$G = \cup S$。从而：

$$\begin{aligned} |G| &= |\bigcup_{x\in S} x| && (G = \cup S) \\ &\le \sum_{x\in S} |x| && (\text{容斥原理}) \end{aligned}$$

若 $S$ 是有穷的，则 $\sum\limits_{x\in S} |x|$ 是有限个有限量之和，从而也是有穷的。这与 $G$ 是无限群矛盾。□

**17.24**

(1) $\sigma\tau = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{smallmatrix}\right)$， $\tau\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{smallmatrix}\right)$， $\sigma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{smallmatrix}\right)$， $\tau^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&1&4\end{smallmatrix}\right)$;

(2) $\sigma = (152)(34) = (12)(15)(34)$, $\tau = (14523) = (13)(12)(15)(14)$.

**17.25**

**证明：** 记 $A = \langle\{(12), (13), \cdots, (1n)\}\rangle, B = \langle\{(12), (23), \cdots, (n-1\; n)\}\rangle$。

$B \subseteq S_n$ 是显然的。下面分别证 $S_n \subseteq A$ 和 $A \subseteq B$，从而证明 $S_n = A = B$。

对任意置换 $\sigma \in S_n$，由教材定理 17.16 可知，$\sigma$ 可以表成若干个轮换之积。下面分两种情况证明每个轮换都是 $A$ 中若干个元素的乘积。从而证明 $\sigma \in A$。

情况一：若轮换 $\tau = (i_1 i_2 \cdots i_k)$ 中含有 1，即，存在 $1 \le j \le k$，使得 $i_j = 1$。则由轮换的定义可知：$\tau = (i_j i_{j+1} \cdots i_k i_1 i_2 \cdots i_{j-1})$。再由 $i_j = 1$ 和教材定理 17.17 知，$\tau = (1 i_{j-1}) \cdots (1 i_2)(1 i_1)(1 i_k) \cdots (1 i_{j+1})$。也即，$\tau$ 可以表示成 $A$ 中若干个元素的乘积。

情况二：若轮换 $\tau' = (i_1 i_2 \cdots i_k)$ 中不含 1，即，$i_j \ne 1 (1 \le j \le k)$。此时，易于验证，$\tau' = (1 i_2)(1 i_2 \cdots i_k)(1 i_1) = (1 i_2)(1 i_k) \cdots (1 i_2)(1 i_1)$。从而 $\tau'$ 亦可表示成 $A$ 中若干元素之积。

这就是说，任意 $n$ 元置换 $\sigma \in S_n$ 都能表示成 $A$ 中若干元素之积。从而由 $A$ 对置换乘法的封闭性知，$\sigma \in A$。这就证明了 $S_N \subseteq A$。

下面证明 $A \subseteq B$：

当 $n = 1, 2$ 时，由定义直接有 $A \subseteq B$。对任意 $n \ge 3$，对 $k$ 作归纳证明：$(1k) = (12)(23) \cdots (k-1\; k)$ $(2 \le k \le n)$。

当 $k = 2$ 时，等式自然成立。

若 $k = t$ 时，等式成立。则当 $k = t+1$ 时，由归纳假设有：$(12)(23) \cdots (t-1\; t)(t\; t+1) = (1t)(t\; t+1)$。直接验证 $(1t)(t\; t+1)$ 对 $1, t, t+1$ 的作用可知，$(1t)(t\; t+1) = (1\; t+1)$。

如此，就证明了对任意 $(1k) \in \{(12), (13), \cdots, (1n)\}$，有 $(1k) = (12)(23) \cdots (k-1\; k) \in B$。从而由 $A$ 的定义知，$A \subseteq B$。

综合得 $A = B = S_n$。 □

**17.26**

(1) $x = \sigma^{-1}\tau = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&5&3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&1&5\end{smallmatrix}\right)$,

$y = \tau\sigma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&5&3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&4&1\end{smallmatrix}\right)$;

(2) $|\sigma| = |(12354)| = 5^1$, $|\tau| = |(15423)| = 5^1$.

**17.27** $H = \{(1), (1234), (13)(24), (1432)\}$;

$H(1) = H(1234) = H(13)(24) = H(1432) = H$;