

定义 若 $A \leftrightarrow B$ 为逻辑有效式，则称 A 与 B 是等值的，
记作 $A \Leftrightarrow B$ ，并称 $A \Leftrightarrow B$ 为等值式。

消去量词等值式 设 $D=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$
 $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$
 $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$

量词辖域收缩与扩张等值式

设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式， B 中不含 x 的出现

关于全称量词的：

$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$

$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$

$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \rightarrow B$

$\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA(x)$

关于存在量词的：

$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B$

$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$

$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B$

$\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA(x)$

量词否定等值式

设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式

$\neg \forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

$\neg \exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

量词分配等值式

$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

$\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ (\Leftarrow 成立)

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ (\Rightarrow 成立)

(1) $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

(3) $\forall xA(x) \rightarrow B(x) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$

(4) $\forall xA(x) \rightarrow B(x) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$

全称量词消去规则 $\forall-$

$\frac{\forall xA(x)}{\therefore A(y)}$ 或 $\frac{\forall xA(x)}{\therefore A(c)}$

全称量词引入规则 $\forall+$

$\frac{A(y)}{\therefore \forall xA(x)}$

存在量词消去规则 $\exists-$

$\frac{\exists xA(x) \quad A(y) \rightarrow B}{\therefore B}$ 或 $\frac{A(y) \rightarrow B}{\therefore \exists xA(x) \rightarrow B}$

$\frac{\exists xA(x) \quad A(c) \rightarrow B}{\therefore B}$ 或 $\frac{A(c) \rightarrow B}{\therefore \exists xA(x) \rightarrow B}$

存在量词引入规则 $\exists+$

$\frac{A(y)}{\therefore \exists xA(x)}$ 或 $\frac{B \rightarrow A(y)}{\therefore B \rightarrow \exists xA(x)}$

$\frac{A(c)}{\therefore \exists xA(x)}$ 或 $\frac{B \rightarrow A(c)}{\therefore B \rightarrow \exists xA(x)}$

基本等值式：

一些常用的重要推理定律。

一阶逻辑等值演算与推理