

p53 第二章 习题解答-3,4,5

3. 解 不能成立, 因为 $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle = \{\{a\}, \{a, \{\{b\}, \{b, c\}\}\}\}$,
而 $\langle a, b, c \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle = \{\{\{\{a\}, \{a, b\}\}\}, \{\{\{a\}, \{a, b\}\}, c\}\}$,
 $a \neq \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \neq c$

4. 解 $\langle \emptyset, \emptyset \rangle = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}\}$, 所以(3)成立。
 $\langle a, \{a\} \rangle = \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$, 所以(7)成立

5. 解 (1) $A = \emptyset \vee B = \emptyset$

(2) $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$

(3) $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee C = \emptyset$

p54 6.(1)

6. 设A,B,C为任意集合，证明下列各式成立.

$$(1) (A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$$

$$(2) (A-B) \times (C-D) \subseteq (A \times C) - (B \times D)$$

证明 (1) 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \vee \langle x, y \rangle \in B \times D$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in D)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in C \vee y \in D)$$

$$\wedge (x \in A \vee y \in D) \wedge (y \in C \vee x \in B)$$

$$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in C \vee y \in D) \quad (\text{注：使用了化简规则})$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C \cup D)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \cup B) \times (C \cup D)$$

$$\text{故 } (A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$$

p54 6.(2)

方法2:

$$(1) (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$$

显然 $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$

$$(2) \text{ 求证 } (A-B) \times (C-D) \subseteq (A \times C) - (B \times D)$$

证 任取 $\langle x, y \rangle$, $\langle x, y \rangle \in (A-B) \times (C-D)$

$$\Leftrightarrow x \in A-B \wedge y \in C-D$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in \sim B) \wedge (y \in C \wedge y \in \sim D)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in \sim B \wedge y \in \sim D)$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in \sim B \vee y \in \sim D) \quad (P \wedge Q \Rightarrow P \Rightarrow P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge y \in D)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \wedge \langle x, y \rangle \notin B \times D$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) - (B \times D)$$

第二章 习题解答-7

■ 7. 设A,B,C为任意集合，证明下列各式成立.

$$(1) (A-B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

$$(2) (A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$$

■ 证明 任意 $\langle x, y \rangle \in (A-B) \times C$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B$$

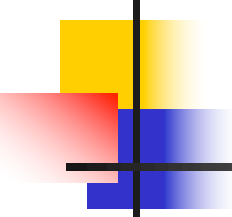
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C) \quad (\text{注意})$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \wedge \langle x, y \rangle \notin B \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) - (B \times C). \text{ 得证.}$$



- (2) $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$

- **证明** $(A \oplus B) \times C$

$$= ((A - B) \cup (B - A)) \times C$$

$$= ((A - B) \times C) \cup ((B - A) \times C)$$

$$= ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C))$$

$$= (A \times C) \oplus (B \times C)$$

得证.



p54 8的解

8. 设 A, B 为二集合，在什么条件下，有 $A \times B \subseteq A$ 成立？
等号能成立吗？

解 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$ 时，必有 $A \times B \subseteq A$ 成立。

当 $A = \emptyset$ 时，有等号成立。



习题9

9. 设 A 是 n 元集, B 是 m 元集, A 到 B 共有多少个不同的二元关系? 设 $A=\{a,b,c\}, B=\{1\}$, 写出 A 到 B 和 B 到 A 的全部二元关系。

解 A 到 B 有 2^{nm} 个不同的二元关系。

$$A \times B = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}$$

A 到 B 的所有二元关系如下:

$$R_1 = \{ \langle a, 1 \rangle \}, R_2 = \{ \langle b, 1 \rangle \}, R_3 = \{ \langle c, 1 \rangle \},$$

$$R_4 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle \}, R_5 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \},$$

$$R_6 = \{ \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}, R_7 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}, R_8 = \emptyset.$$



习题9 续

$$B \times A = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 1, c \rangle \}$$

B到A的所有二元关系如下：

$$R_1 = \{ \langle 1, a \rangle \}, \quad R_2 = \{ \langle 1, b \rangle \}, \quad R_3 = \{ \langle 1, c \rangle \},$$

$$R_4 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}, \quad R_5 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, c \rangle \},$$

$$R_6 = \{ \langle 1, b \rangle, \langle 1, c \rangle \}, \quad R_7 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 1, c \rangle \},$$

$$R_8 = \emptyset.$$



习题11

11. 设 $R_1 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$,

$R_2 = \{ \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, d \rangle \}$, $A = \{ a, c \}$, 求:

解 (1) $R_1 \cup R_2 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, d \rangle \}$

$$R_1 \cap R_2 = \{ \langle b, d \rangle \}$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{ \langle a, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, d \rangle \}$$

(2) $\text{dom} R_1 = \{ a, b, c \}$, $\text{dom} R_2 = \{ a, b, d \}$,

$$\text{dom} (R_1 \cup R_2) = \{ a, b, c, d \}$$

(3) $\text{ran} R_1 = \{ b, d, c \}$, $\text{ran} R_2 = \{ b, c, d \}$,

$$\text{ran } R_1 \cap \text{ran} R_2 = \{ b, c, d \}$$

11 (续)

$$(4) R_1 \upharpoonright A = \{ \langle a, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle \},$$

$$R_1 \upharpoonright \{c\} = \{ \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

$$(R_1 \cup R_2) \upharpoonright A = \{ \langle a, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, c \rangle \}$$

$$R_2 \upharpoonright A = \{ \langle a, c \rangle \}$$

$$(5) R_1[A] = \{ b, c, d \}$$

$$R_2[A] = \{ c \}$$

$$(R_1 \cap R_2)[A] = \emptyset.$$

$$(6) R_1 \circ R_2 = \{ \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle d, d \rangle \}$$

$$R_2 \circ R_1 = \{ \langle a, d \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

$$R_1 \circ R_1 = \{ \langle a, d \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

习题12

设 $R = \{ \langle \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \emptyset \rangle \}$, 求:

解 (1) $R^{-1} = \{ \langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle, \langle \emptyset, \emptyset \rangle \}$

(2) $R^{\circ}R = \{ \langle \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle \}$

(3) $R \upharpoonright \emptyset = \emptyset$

$$R \upharpoonright \{\emptyset\} = \{ \langle \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rangle, \langle \emptyset, \emptyset \rangle \}$$

$$R \upharpoonright \{\{\emptyset\}\} = \{ \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle \}$$

$$R \upharpoonright \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = R$$



习题12 续

(4) $R[\emptyset] = \emptyset$

$$R[\{\emptyset\}] = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$R[\{\{\emptyset\}\}] = \{\emptyset\}$$

$$R[\{\emptyset, \{\emptyset\}\}] = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

(5) $\text{dom } R = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$$\text{ran } R = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\text{fld } R = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$



习题15

15. 设 A 为一集合, $R,S,T \subseteq P(A) \times P(A)$,其中

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P(A) \wedge x \subset y \}$$

$$S = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P(A) \wedge x \cap y = \emptyset \}$$

$$T = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P(A) \wedge x \cup y = A \}$$

试分析 R, S, T 的性质.

解 $A \neq \emptyset$ 时, 则

R 是反自反、反对称, 传递

S 是对称的.

T 是对称的.

注意: $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \Leftrightarrow \emptyset S \emptyset$, S 不是自反的也不是反自反的.

$A \cup A = A \Leftrightarrow A T A$, T 不是自反的也不是反自反的.



15 续

A=∅时,

$$P(A)=\{\emptyset\}, P(A) \times P(A)=\{<\emptyset, \emptyset>\}$$

R=∅, 故R具有反自反性、对称性、反对称性、传递性

S={<∅, ∅>}, 具有自反性、对称性、反对称性、传递性

T={<∅, ∅>}具有自反性、对称性、反对称性、传递性



习题16

16. 设 $A=\{0,1,\dots,12\}$, $R,S\subseteq A\times A$, 其中

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x+y=10\}$$

$$S=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x+3y=12\}$$

用列举法表示出 R 和 S ; 分析 R 和 S 的性质.

解 (1) $R=\{\langle 0,10\rangle,\langle 1,9\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 5,5\rangle,$
 $\langle 6,4\rangle,\langle 7,3\rangle,\langle 8,2\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 10,0\rangle\}$

$$S=\{\langle 0,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 12,0\rangle\}$$

(2) R 是对称的;

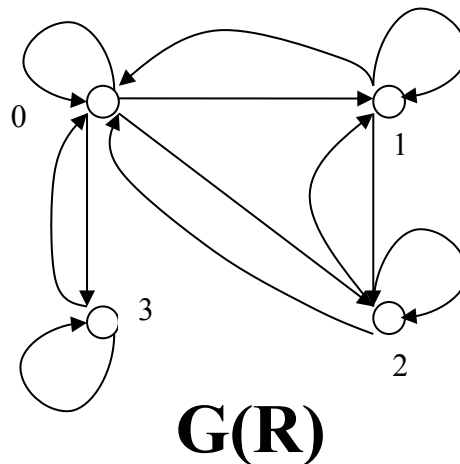
S 是反对称的.

习题17

17. 设 $A=\{0,1,2,3\}$. $R\subseteq A\times A$, 且 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x=y \vee x+y\in A\}$, 求 R 的关系矩阵 $M(R)$ 和关系图 $G(R)$, 并讨论 R 的性质.

解

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



R 具有自反性、对称性.

$\langle 3,0\rangle\in R, \langle 0,1\rangle\in R$, 但 $\langle 3,1\rangle\notin R$. 所以 R 不是传递的



习题18

18. 设 $A=\{a,b,c\}$,图2.7中给出了4个二元关系 R_1, R_2, R_3, R_4 的关系图, 写出每个关系的集合表达式和关系矩阵, 并讨论每个关系的性质。

解 $R_1=\{<a,a>, <b,b>, <c,c>, <a,b>, <c,b>\}$

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R_1 有自反性、反对称性、传递性



18 续

$$R_2 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \}$$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \text{ 有反自反性、反对称性}$$

$$R_3 = \{ \langle a, b \rangle, \langle c, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle \},$$

$$M_{R_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \text{ 有反自反性}$$



18续

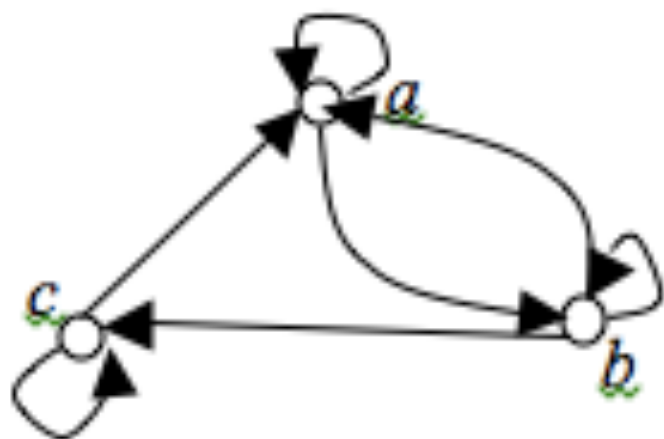
$$R_4 = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$$

$$M_{R_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R_4 有自反性、对称性、反对称性、传递性

19. 设 $A=\{a,b,c\}$, $R_1, R_2, R_3, R_4 \subseteq A \times A$, 它们的关系矩阵分别为....., 写出各关系的集合表达式, 画出关系图并讨论它们的性质。

解 $R_1 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, c \rangle \}$



$G(R_1)$

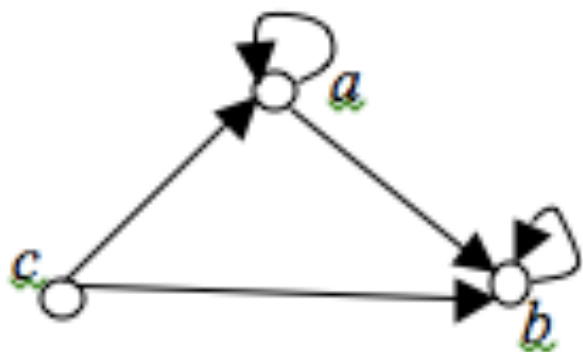
R_1 有自反性;

$\langle c, a \rangle \in R_1$, $\langle a, b \rangle \in R_1$, 但 $\langle c, b \rangle \notin R_1$

所以 R_1 无传递性。

19续

$$R_2 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle \}$$



$G(R_2)$

$\langle a, a \rangle \in R_2$, 所以 R_2 没有反自反性。

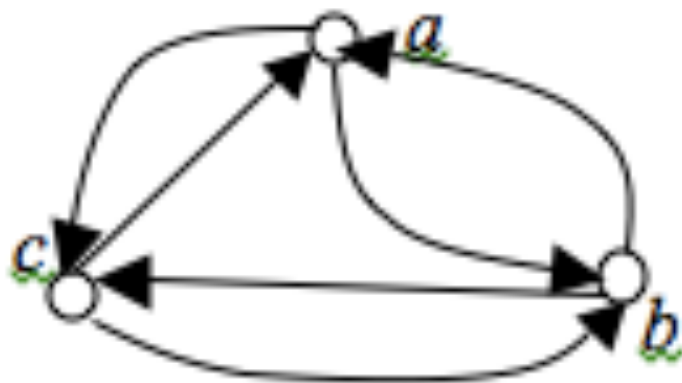
$\langle c, c \rangle \notin R_2$, 所以 R_2 没有自反性。

$\langle c, a \rangle \in R_2$, $\langle a, c \rangle \notin R_2$, 所以 R_1 没有对称性

R_2 有反对称性、传递

19续

$$R_3 = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle \}$$



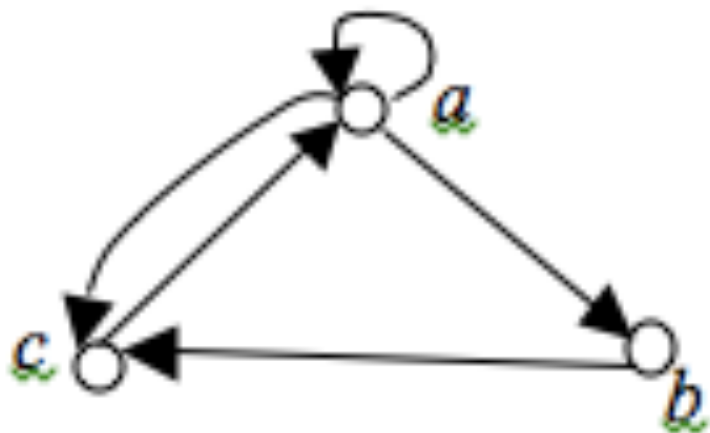
$G(R_3)$

$\langle c, a \rangle \in R_3, \langle a, c \rangle \in R_3, \langle c, c \rangle \notin R_3$
所以 R_3 没有传递性。

R_3 有反自反性、对称性；

19 续

$$R_4 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle \}$$



$G(R_4)$

$\langle c, a \rangle \in R_4, \langle a, b \rangle \in R_4, \langle c, b \rangle \notin R_4$
所以 R_4 没有传递性。

R_4 不具有任何性质

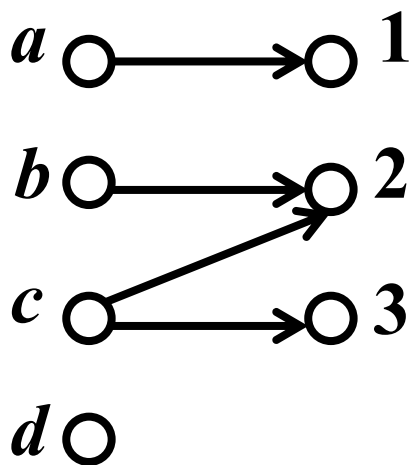
习题20

画出下列二元关系的关系图，并写出关系矩阵。

$A_1 = \{a, b, c, d\}, B_1 = \{1, 2, 3\}, R_1 \subseteq A_1 \times B_1$, 且

$R_1 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}$

解 关系图和关系矩阵如下



$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

22. 设 R 是非空集合 A 上的二元关系, 试证明, 如果 R 是自反的, 并且是传递的, 则 $R \circ R = R$, 但其逆不真.

证 由于 R 是传递的, 故 $R \circ R \subseteq R$.

任取 $\langle x, y \rangle \in R$, 则有 $\langle y, y \rangle \in R$.

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, y \rangle \in R \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \circ R$, 即 $R \subseteq R \circ R$

因此, $R \circ R = R$

如果 $R \circ R = R$, R 不一定是自反的和传递的. **反例:**

$A = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 1 \rangle\}$, 则 $R \circ R = R$, 但 R 不是自反的.



22(续)

方法2：证 由于R是传递的，故 $R^\circ R \subseteq R$.

由于R是自反的，所以 $I_A \subseteq R$ ，故而有 $R = R \cup I_A$.

$$\begin{aligned} R^\circ R &= (R \cup I_A)^\circ (R \cup I_A) = R^\circ R \cup R^\circ I_A \cup I_A^\circ R \cup I_A^\circ I_A \\ &= R^\circ R \cup R \cup I_A = R^\circ R \cup R \end{aligned}$$

所以 $R \subseteq R^\circ R$

因此， $R^\circ R = R$

方法3： 由于R是传递的，故 $R^\circ R \subseteq R$.

$$R \cup (R^\circ R) = (R^\circ I_A) \cup (R^\circ R) = R^\circ (I_A \cup R) = R^\circ R$$

所以 $R \subseteq R^\circ R$

23. 设 R, S 是非空集合 A 上的二元关系, 且它们都是对称的. 证明 $R \circ S$ 具有对称性当且仅当 $R \circ S = S \circ R$.

证 【 R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ 】

先证必要性. 已知 $R \circ S$ 具有对称性, 且 R, S 都有对称性, 所以有

$$R \circ S = (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R$$

再证充分性. 已知 $R \circ S = S \circ R$.

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R = R \circ S$$

故 $R \circ S$ 是对称的.



习题23 方法2

23. 设 R, S 是非空集合 A 上的二元关系, 且它们都是对称的.
证明 $R^\circ S$ 具有对称性当且仅当 $R^\circ S = S^\circ R$.

证 【 R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ 】

先证 \Rightarrow : 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in R^\circ S$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R^\circ S$$

$$\Leftrightarrow \exists z (\langle y, z \rangle \in S \wedge \langle z, x \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (\langle z, y \rangle \in S \wedge \langle x, z \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in S^\circ R$$

所以 $R^\circ S = S^\circ R$



习题23 方法2 续

23. 设 R, S 是非空集合 A 上的二元关系, 且它们都是对称的.
证明 $R \circ S$ 具有对称性当且仅当 $R \circ S = S \circ R$.

证 【 R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ 】

再证 \Leftarrow : 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in R \circ S$$

$$\Leftrightarrow \exists z (\langle x, z \rangle \in S \wedge \langle z, y \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow \exists z (\langle z, x \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in S \circ R$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \circ S$$

所以 $R \circ S$ 是对称的



p56 Exercises 26

26. 解 1)

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M(R^2) = M^2(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(R^3) = M^3(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R^2 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle \}$$

$$R^3 = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle \}$$



Exercises 26

2)

$$M(R^4) = M^4(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

显然, $R^2=R^4$, 即 $m=2$, $n=4$

3) $R^2= R^4= R^6=\dots= R^{2k}, (k \geq 1),$

$R^3= R^5= R^7=\dots= R^{2k+1}, (k \geq 1)$

习题27

- **27.** 设 R_1, R_2 是 $n(n \geq 2)$ 元集 A 上的二元关系, 已知 $\text{fld} R_1 \cap \text{fld} R_2 = \emptyset$, 证明 $(R_1 \cup R_2)^m = R_1^m \cup R_2^m$ ($m \geq 0$).

- **证** 归纳法

当 $m=1$ 时, $R_1 \cup R_2 = R_1 \cup R_2$

假设 $m=k$ 时成立, 当 $m=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}(R_1 \cup R_2)^{k+1} &= (R_1 \cup R_2)^k \circ (R_1 \cup R_2) = (R_1^k \cup R_2^k) \circ (R_1 \cup R_2) \\ &= (R_1^k \circ R_1) \cup (R_2^k \circ R_2) \cup (R_1^k \circ R_2) \cup (R_2^k \circ R_1)\end{aligned}$$

因为 $\text{fld} R_1 \cap \text{fld} R_2 = \emptyset$, 故 $(R_1^k \circ R_2) = \emptyset$ $R_2^k \circ R_1 = \emptyset$

因此 $(R_1 \cup R_2)^{k+1} = (R_1^k \circ R_1) \cup (R_2^k \circ R_2) = R_1^{k+1} \cup R_2^{k+1}$

得证.

28. 设 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $R\subseteq A\times A$, 且
 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,g\rangle,\langle g,h\rangle,\langle h,d\rangle\}$, 求最小的自然数 $m,n(m\leq n)$, 使得 $R^m=R^n$.

解 $R=R_1\cup R_2$, 其中

$$R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\},$$

$$R_2=\{\langle d,e\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,g\rangle,\langle g,h\rangle,\langle h,d\rangle\}$$

$$R^m=(R_1\cup R_2)^m=R_1^m\cup R_2^m.$$

$$R_1^{3k}=I_{\text{fld}R_1}, R_1^{5k}=I_{\text{fld}R_2}, k\in\mathbb{N}.$$

$$R^{15k}=(R_1\cup R_2)^{15k}=R_1^{15k}\cup R_2^{15k}=I_{\text{fld}R_1}\cup I_{\text{fld}R_2}=I_A.$$

取 $m=0, n=15$, 有 $R^0=R^{15}=I_A$. 0 和 15 满足要求.

29. 设 $A=\{a,b,c,d\}, R\subseteq A\times A, R=\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$.

求 (1) $r(R)$ (2) $s(R)$ (3) $t(R)$

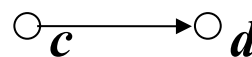
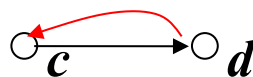
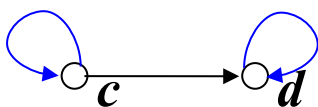
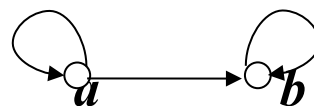
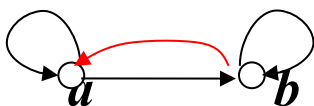
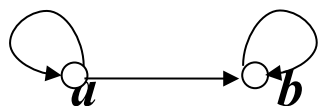
并画出它们的关系图.

解

$$r(R) = I_A \cup R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$$

$$s(R) = R \cup R^{-1} = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle b,a\rangle, \langle d,c\rangle\}$$

$$t(R) = R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$$



$r(R)$

$s(R)$

$t(R)$



30.

30. 设 R 是非空集合 A 上的二元关系, 记传递闭包 $t(R)=R^+$,

记 $\bigcup_{i=0}^{\infty} R^i = R^{\oplus}$, 证明:

$$(1) (R^+)^+ = R^+; \quad (2) (R^{\oplus})^{\oplus} = R^{\oplus};$$

$$(3) R^{\circ} R^{\oplus} = R^+ = R^{\oplus} \circ R.$$

解 (1) 因为 R^+ 是传递的, 因此 $(R^+)^+ = t(R^+) = R^+$

(2) $R^{\oplus} = I_A \cup R^+ = rt(R)$, 因此 R^{\oplus} 是传递的,

$$\text{即 } t(R^{\oplus}) = R^{\oplus}$$

$$\begin{aligned} (R^{\oplus})^{\oplus} &= (R^{\oplus})^+ \cup I_A = t(R^{\oplus}) \cup I_A = R^{\oplus} \cup I_A = R^+ \cup I_A \cup I_A \\ &= R^+ \cup I_A = R^{\oplus} \end{aligned}$$

30 (续)

另一种方法:

$$R^{\oplus} = I_A \cup R^+ = \text{rt}(R),$$

$$(R^{\oplus})^{\oplus} = \text{rt}(\text{rt}(R)) = \text{rt}(R) = R^{\oplus}$$

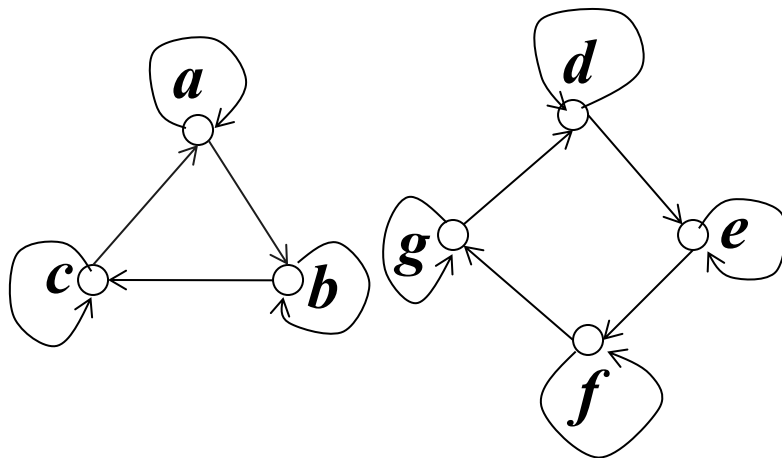
$$(3) R^{\circ} R^{\oplus} = R^{\circ} \cup_{i=0}^{\infty} R^i = \cup_{i=0}^{\infty} R^{i+1} = \cup_{i=1}^{\infty} R^i = R^+$$

$$R^{\oplus} \circ R = (\cup_{i=0}^{\infty} R^i)^{\circ} R = \cup_{i=0}^{\infty} R^{i+1} = \cup_{i=1}^{\infty} R^i = R^+$$

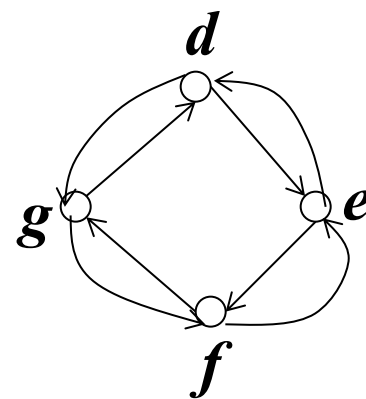
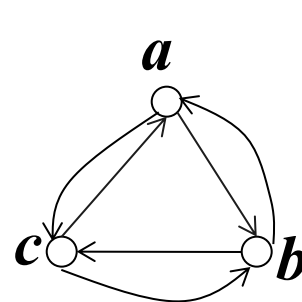
$$\text{所以 } R^{\circ} R^{\oplus} = R^{\oplus} \circ R$$

Exercises 31

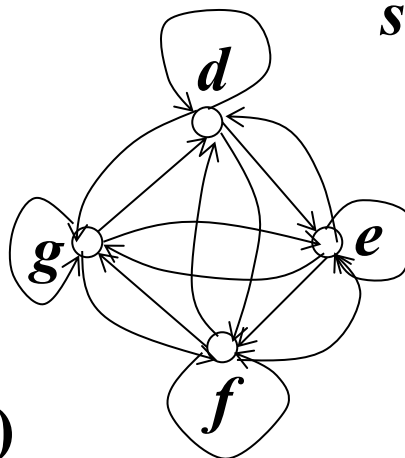
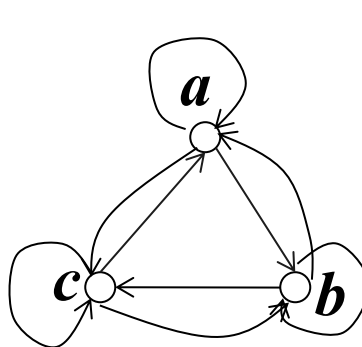
31. $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图如下:



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$



Exercise 34

解

- (1) 不是。因为 $\sim R$ 不是自反的
(2) 不是。因为 $R_1 - R_2 (R_2 - R_1)$ 不是自反的

(3) 不是，可能没有传递性，如

$$A = \{0, 1, 2\}, R_1 = A \times A, R_2 = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle \} \cup I_A$$

$R_1 - R_2$ 没有传递性

(4) 不是，具有自反，但不一定是对称和传递的，如

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, R_1 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \} \cup I_A$$

$$R_2 = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \} \cup I_A$$

$$R_1 \circ R_2 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \} \cup I_A$$



Exercises 35

35. 设 R 是非空集合 A 上的二元关系, R 满足下面条件:

(1) R 是自反的;

(2) $\forall x, y, z \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, z \rangle \in R$, 则 $\langle y, z \rangle \in R$.

证明 R 是 A 上的等价关系.

证 只需证明 R 是对称的和传递的. 任取 $\langle x, y \rangle$,

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, x \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$, 故 R 是**对称的**;

任取 $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$

$\Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$,

故 R 是**传递的**.

因此 R 是等价关系.



Exercise 37

证明 $\forall x \in A, x \equiv x \pmod{5}$, 所以 xRx , 因此 R 是自反的.

$\forall xRy \Rightarrow x-y=5k \Rightarrow y-x=5(-k) \Rightarrow yRx, k \in \mathbb{Z}$, 故 R 是对称的

$\forall xRy, yRz \Rightarrow x-y=5k_1, y-z=5k_2 \Rightarrow x-z=5(k_1+k_2) \Rightarrow xRz, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, 故 R 是传递的.

综上所述, R 是等价关系。

$$[x] = \{y \mid yRx\} = \{y \mid y \equiv x \pmod{5}, y \in A\}$$

$$[0] = \{5, 10, 15, 20\}, [1] = \{1, 6, 11, 16\}, [2] = \{2, 7, 12, 17\}, [3] = \{3, 8, 13, 18\}, [4] = \{4, 9, 14, 19\}$$

$$A/R = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

39. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\pi = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ 是 A 的一个划分.

(1) 求 π 诱导出的 A 上的等价关系 R_π 及商集 A/R_π ;

(2) 求 π 的所有加细诱导出的 A 上的等价关系及其商集.

证 (1)
$$R_\pi = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \cup \{4\} \times \{4\}$$
$$= I_A \cup \{<1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <2, 3>, <3, 2>\}$$

$$A/R_\pi = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$$

(2) π 的所有加细 :

$$\pi_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \quad R_{\pi_1} = I_A \cup \{<1, 2>, <2, 1>\}, \quad A/R_{\pi_1} = \pi_1,$$

$$\pi_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\} \quad R_{\pi_2} = I_A \cup \{<2, 3>, <3, 2>\}, \quad A/R_{\pi_2} = \pi_2$$

$$\pi_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}, \quad R_{\pi_3} = I_A \cup \{<1, 3>, <3, 1>\}, \quad A/R_{\pi_3} = \pi_3$$

$$\pi_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} \quad R_{\pi_4} = I_A, \quad A/R_{\pi_4} = \pi_4$$

$$\pi_5 = \pi \quad R_{\pi_5} = R, \quad A/R_{\pi_5} = \pi$$

41. 设 R_1 是 A 上的等价关系, R_2 是 B 上的等价关系, A, B 均非空. $R_3 = \{ \langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \mid x_1 R_1 x_2 \wedge y_1 R_2 y_2 \}$, 证明 R_3 是 $A \times B$ 上的等价关系.

证: 任意 $\langle x, y \rangle \in A \times B$,

$x R_1 x \wedge y R_2 y \Rightarrow \langle \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \rangle \in R_3$, 所以 R_3 是 $A \times B$ 上的自反关系;

任意 $\langle x_1, y_1 \rangle R_3 \langle x_2, y_2 \rangle$,

$\langle x_1, y_1 \rangle R_3 \langle x_2, y_2 \rangle \Rightarrow x_1 R_1 x_2 \wedge y_1 R_2 y_2 \Rightarrow x_2 R_1 x_1 \wedge y_2 R_2 y_1 \Rightarrow \langle x_2, y_2 \rangle R_3 \langle x_1, y_1 \rangle$, 所以 R_3 是 $A \times B$ 上的对称关系;

任意 $\langle x_1, y_1 \rangle R_3 \langle x_2, y_2 \rangle$, $\langle x_2, y_2 \rangle R_3 \langle x_3, y_3 \rangle$,

$\langle x_1, y_1 \rangle R_3 \langle x_2, y_2 \rangle \wedge \langle x_2, y_2 \rangle R_3 \langle x_3, y_3 \rangle \Rightarrow x_1 R_1 x_2 \wedge y_1 R_2 y_2 \wedge x_2 R_1 x_3 \wedge y_2 R_2 y_3 \Rightarrow x_1 R_1 x_3 \wedge y_1 R_2 y_3 \Rightarrow \langle x_1, y_1 \rangle R_3 \langle x_3, y_3 \rangle$, 所以 R_3 是 $A \times B$ 上的传递关系;

- ▶ 求偏序集 $\langle \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}, \leq \rangle$ ，其中 \leq 是加细关系，并画出哈斯图。
- ▶ 解 $\leq = \{ \langle \pi_4, \pi_1 \rangle, \langle \pi_4, \pi_2 \rangle, \langle \pi_4, \pi_3 \rangle, \langle \pi_4, \pi_5 \rangle, \langle \pi_1, \pi_5 \rangle, \langle \pi_2, \pi_5 \rangle, \langle \pi_3, \pi_5 \rangle, \langle \pi_1, \pi_1 \rangle, \langle \pi_2, \pi_2 \rangle, \langle \pi_3, \pi_3 \rangle, \langle \pi_4, \pi_4 \rangle, \langle \pi_5, \pi_5 \rangle \}$

(2) π 的所有加细：

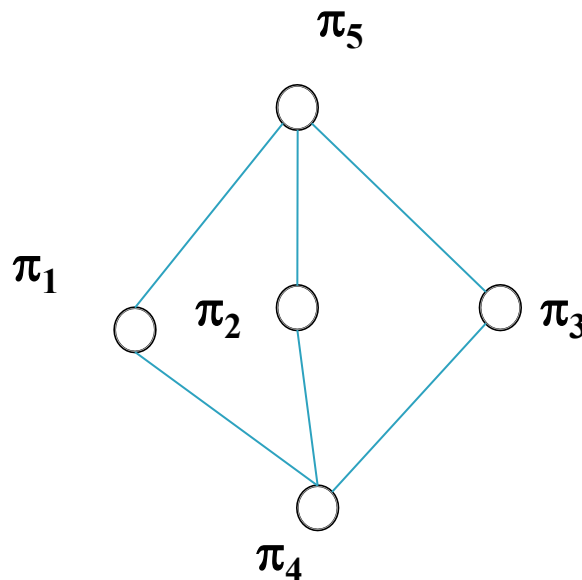
$$\pi_1 = \{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}\},$$

$$\pi_2 = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}\}$$

$$\pi_3 = \{\{1,3\}, \{2\}, \{4\}\},$$

$$\pi_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$$

$$\pi_5 = \pi$$



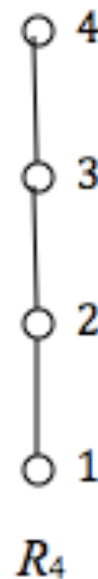
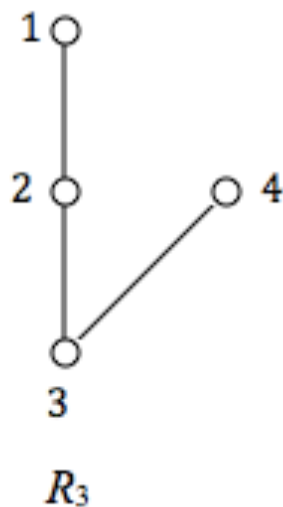
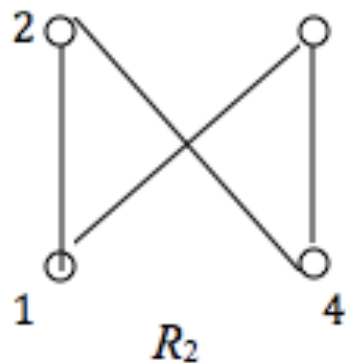
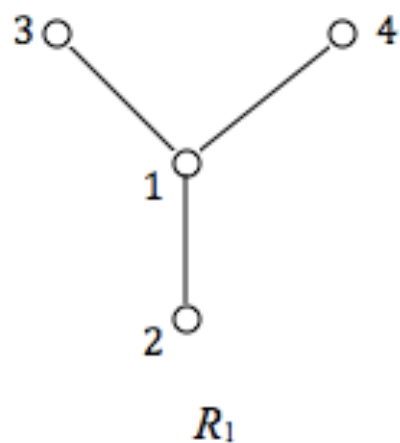
Exercises 43

► 解

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 \begin{Bmatrix} 5 \\ i \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 5 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix} \\&= 1 + (2\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix}) + (3\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}) + (4\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix}) + 1 \\&= 2 + 3\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} + 1 + 4\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} + 4 = 7 + 3\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} + 4\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} \\&= 7 + 3(2\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}) + 4(3\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}) = 7 + 10\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} + 3\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + 12\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \\&= 7 + 10 \times 3 + 3 \times 1 + 12 \times 1 = 52\end{aligned}$$

Exercise 44

► (1) 哈斯图



► (2) R_4 是全序关系。



Exercises 45

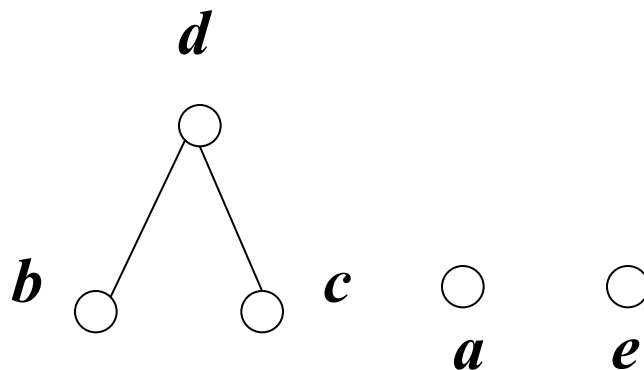
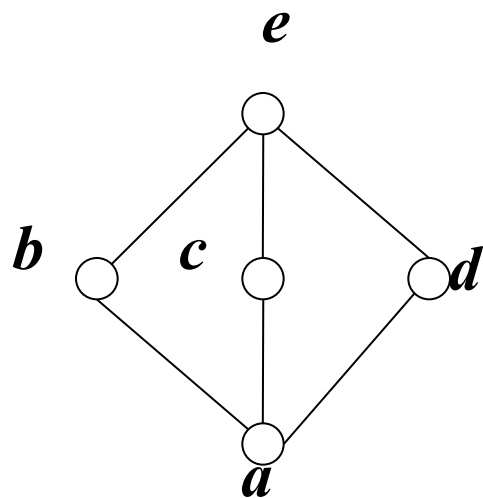
45. 分别画出下列偏序集的哈斯图，并指出 A 的最大元、最小元、极大元、极小元.

(1) 偏序集 $\langle A_1, \preceq_1 \rangle$, 其中, $A_1 = \{a, b, c, d, e\}$,
 $\preceq_1 = I_{A_1} \cup \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle\}$.

(2) 偏序集 $\langle A_2, \preceq_2 \rangle$, 其中, $A_2 = \{a, b, c, d, e\}$,
 $\preceq_2 = I_{A_2} \cup \{\langle c, d \rangle, \langle b, d \rangle\}$

Exercises 45

- (1) 哈斯图如下图左图所示. 最大元、极大元是 e , 最小元、极小元是 a
- (2) 哈斯图如下图右图所示. 无最大元、极大元是 a, d, e , 无最小元, 极小元是 a, b, c, e .





Exercise 46

46. 在偏序集 $\langle \mathbb{Z}^+, \leq \rangle$ 中, \mathbb{Z}^+ 为正整数集合, \leq 为整除关系,设 $B=\{1,2,\dots,10\}$,求B的上界、上确界、下界、下确界.

解: B的上界是 $2520k$, k 是整数

B的上确界是2520,

B的下界是1, 下

确界是1.

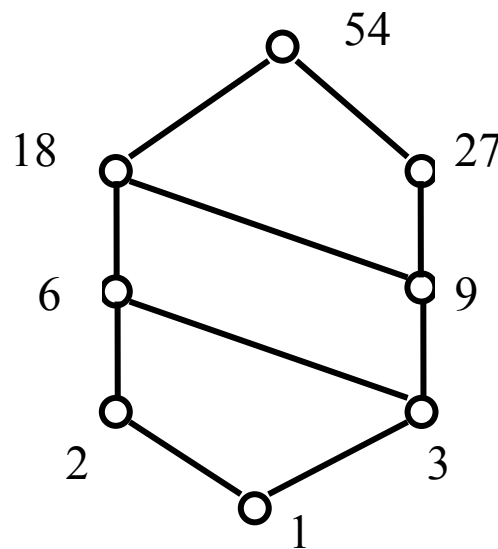
47. 设偏序集为 $\langle A, | \rangle$, 其中 A 是54的因子的集合, $|$ 为整除关系, 画出哈斯图, 指出 A 中有多少条最长链, 并指出 A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链. 又至多可以划分成多少个互不相交的反链.

解 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$

最长链有4条.

因为偏序集中的最长链的长度为5,
根据定理 A 中至少存在5个互不相交
的反链.

$|A|=8$, 因此 A 中的元素至多可划分为
8个互不相交的反链, A 中8个元素组成的
8个单元子集满足要求.



Exercises 50

证 任取 $\langle x, y \rangle \in A \times B$, 则 $x \in A, y \in B$

$\langle x, x \rangle \in R_1 \wedge \langle y, y \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \rangle \in R$, 故 R 是自反的.

任取 $\langle \langle x, y \rangle, \langle m, n \rangle \rangle \in R \wedge \langle \langle m, n \rangle, \langle x, y \rangle \rangle \in R$

$$\Leftrightarrow \langle x, m \rangle \in R_1 \wedge \langle y, n \rangle \in R_2 \wedge \langle m, x \rangle \in R_1 \wedge \langle n, y \rangle \in R_2$$

$\Leftrightarrow x = m \wedge y = n \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \langle m, n \rangle$, 故 R 是反对称的.

任取 $\langle \langle x, y \rangle, \langle m, n \rangle \rangle \in R \wedge \langle \langle m, n \rangle, \langle p, q \rangle \rangle \in R$

$$\Leftrightarrow \langle x, m \rangle \in R_1 \wedge \langle y, n \rangle \in R_2 \wedge \langle m, p \rangle \in R_1 \wedge \langle n, q \rangle \in R_2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, p \rangle \in R_1 \wedge \langle y, q \rangle \in R_2$$

$\Leftrightarrow \langle \langle x, y \rangle, \langle p, q \rangle \rangle \in R$, 故 R 是传递的.

因此 R 是偏序关系.

Exercises 50

证 任取 $\langle x, y \rangle \in A \times B$, 则 $x \in A, y \in B$

$\langle x, x \rangle \in R_1 \wedge \langle y, y \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \rangle \in R$, 故 R 是自反的.

任取 $\langle \langle x, y \rangle, \langle m, n \rangle \rangle \in R \wedge \langle \langle m, n \rangle, \langle x, y \rangle \rangle \in R$

$$\Leftrightarrow \langle x, m \rangle \in R_1 \wedge \langle y, n \rangle \in R_2 \wedge \langle m, x \rangle \in R_1 \wedge \langle n, y \rangle \in R_2$$

$\Leftrightarrow x = m \wedge y = n \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \langle m, n \rangle$, 故 R 是反对称的.

任取 $\langle \langle x, y \rangle, \langle m, n \rangle \rangle \in R \wedge \langle \langle m, n \rangle, \langle p, q \rangle \rangle \in R$

$$\Leftrightarrow \langle x, m \rangle \in R_1 \wedge \langle y, n \rangle \in R_2 \wedge \langle m, p \rangle \in R_1 \wedge \langle n, q \rangle \in R_2$$

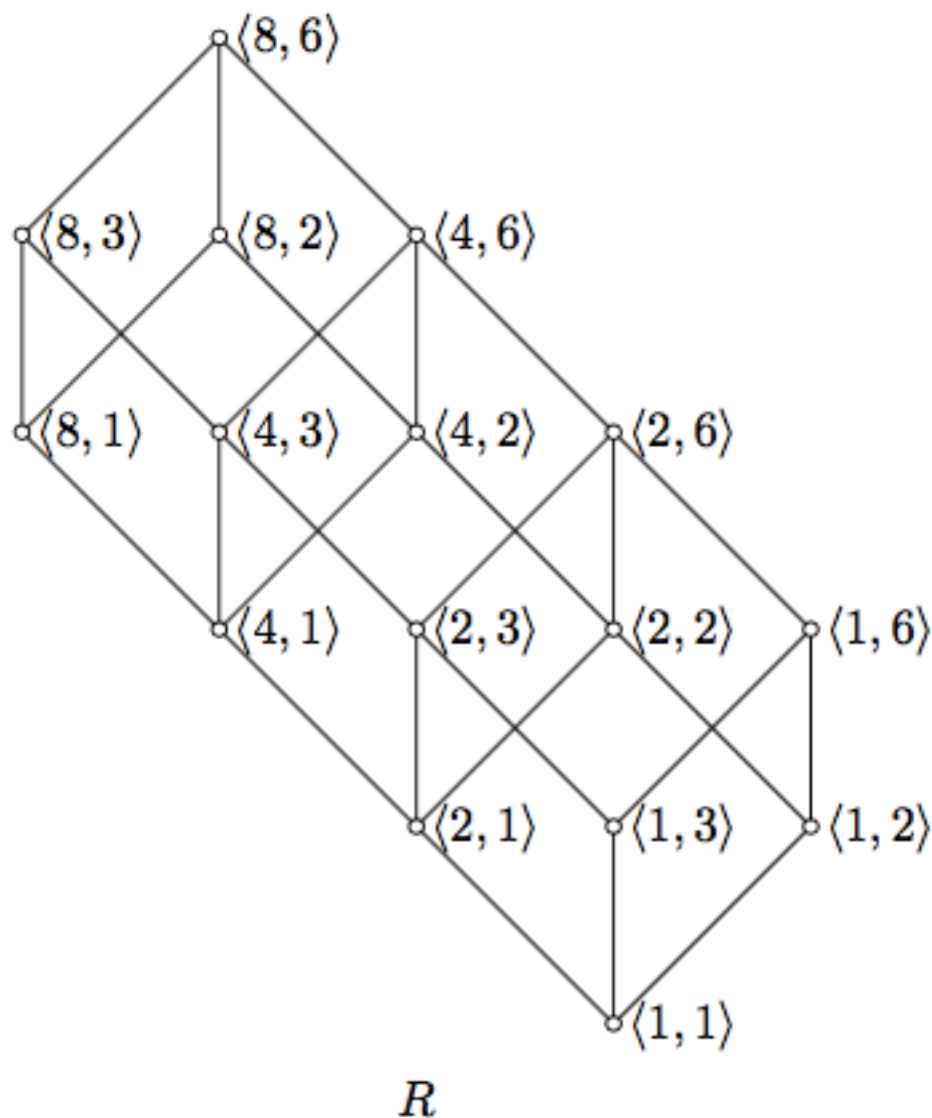
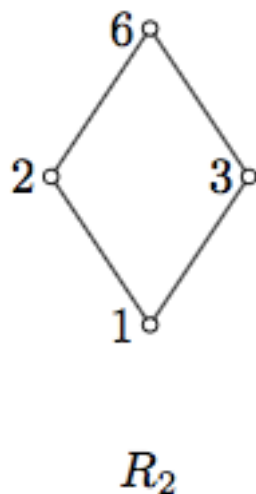
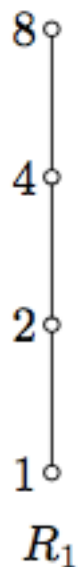
$$\Leftrightarrow \langle x, p \rangle \in R_1 \wedge \langle y, q \rangle \in R_2$$

$\Leftrightarrow \langle \langle x, y \rangle, \langle p, q \rangle \rangle \in R$, 故 R 是传递的.

因此 R 是偏序关系.

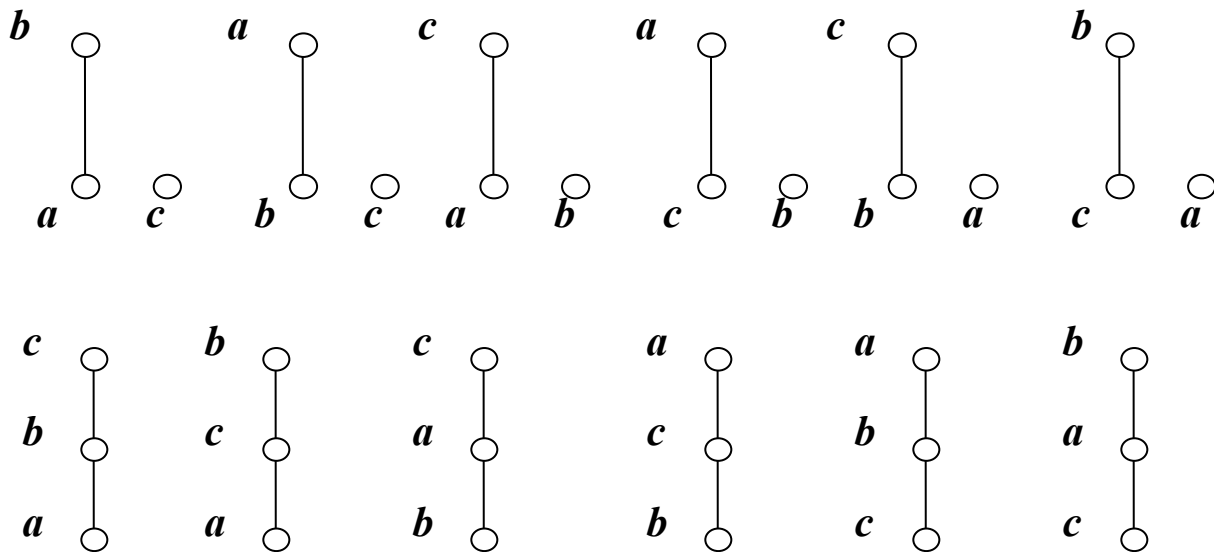
Exercises 51

解



52.

- **52.** 设A是3元集,问A上共有多少个偏序关系.
- **解** 三个元素的哈斯图中至多有2条边,所以没有边的有1个,有一条边的有6个,有2条边的有12个,共计有19个.



52.解 (续)

