*n*元关系(n-ary relation)

- 定义：若集合F中的全部元素都是**有序$n(n\geq 2)$元组**是则称F为n元关系
- 当n=2时，称F为二元关系，简称为关系
- F是二元关系，若$<x,y>\in$F, 可记为xFy或$F(x,y)$,分别称为后缀、中缀和前缀表示,称x和y有关系F.若$<x,y>\notin$F,称x和y没有关系F,记为$x\cancel{F}y$

  例如：2<15 ⇔⇔ <2,15>∈<⇔<(2,15)
- 规定空集∅既是n元空关系，也是二元空关系，简称为空关系

二元关系(binary relation)

例如

F_1={<1,2,3,4>,<物理,化学,生物,数学>}，F_1是4元关系.

F_2={<a,b,c>,<大李,小李,老李>}，F_2是3元关系.

R_1={<1,2>,<α,β>,<a,b>}，R_1是2元关系.

R_2={<1,2>,<3,4>,<白菜,小猫>}，R_2是2元关系.

A={<a,b>,<1,2,3>, a,α,1}，A不是关系.

A到B的二元关系

- 定义 A,B为集合, $A\times B$的任意子集称为A到B的二元关系
- 若R是$A\times A$的子集，称R是A上的二元关系 记作 $R\subseteq A\times A$或$R\in P(A\times B)$

  R是集合A上的二元关系$\Leftrightarrow R\subseteq A\times A \Leftrightarrow R\in P(A\times A)$
- 计数

  若$|A|=m,|B|=n$, 则$|A\times B|=mn$, 故$|P(A\times B)|=2^{mn}$

  即A到B不同的二元关系共有2^{mn}个

  集合A上的二元关系共有2^{m^2}个

例

设A是中国所有城市的集合，B是中国所有省、直辖市、自治区的集合，如下定义关系R：如果城市a在省（直辖市、自治区）b中,则$<a,b>\in$R,或者a和b有关系R.

如<青岛,山东>$\in R$, <贵阳,云南>$\notin R$

例

例: 设$A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b\}$,求A到B和B到A的所有关系

解 $A\times B=\{<a_1,b>, <a_2,b>\}$

$P(A\times B)=\{\varnothing, \{<a_1,b>\}, \{<a_2,b>\}, \{<a_1,b>,<a_2,b>\}$

所以A到B的二元关系共有4个:

$R_1=\varnothing$, $R_2=\{<a_1,b>\}$, $R_3=\{<a_2,b>\}$, $R_4=\{<a_1,b>,<a_2,b>\}$

同理B到A的二元关系也有4个:

$R_5=\varnothing$, $R_6=\{<b,a_1>\}$,$R_7=\{<b,a_2>\}$, $R_8=\{<b,a_1>,<b,a_2>\}$

例 求A上的所有二元关系

例 设$A=\{a_1,a_2\}$,求A上的所有二元关系

解 $A\times A=\{<a_1,a_1>, <a_1,a_2>, <a_2,a_1>, <a_2,a_2>\}$

则A上的所有二元关系如下：

$R_1 = \varnothing$

$R_2 = \{<a_1,a_1>\}$

$R_3 = \{<a_1,a_2>\}$

$R_4 = \{<a_2,a_1>\}$

$R_5 = \{<a_2,a_2>\}$

$R_6 = \{ <a_1,a_1>, <a_1,a_2> \}$

$R_7 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_1> \}$

$R_8 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_2> \}$

$R_9 = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_1> \}$

$R_{10} = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_2> \}$

$R_{11} = \{ <a_2,a_1>, <a_2,a_2>\}$

$R_{12} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1>\}$

例 求A上的所有二元关系(续)

$R_{13} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>, <a_2,a_2> \}$

$R_{14} = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$

$R_{15} = \{<a_1,a_2>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$

$R_{16} = \{<a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2>\}.$

特殊关系

- 空关系∅:
- A上的恒等关系I_A:

  $I_A=\{<x,y>|x\in A,y\in A,x=y\}=\{<x,x>\mid x\in A\}$
- A上的全域关系E_A:

  $E_A=A\times A=\{<x,y>\mid x\in A \wedge y\in A\}$

  设$A\subseteq R$,可定义如下关系:
- A上的整除关系D: $D=\{<x,y>|x\in R,y\in R, x|y=0\}$

特殊关系(续)

- A上小于等于(less than or equal to)关系≤:

  $\leq_A = \{<x,y> | x \in R, y \in R, x \leq y\}$

- A上小于 (less than)关系$<_A$:

  $< = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x<y \}$

- 集簇A上的包含关系$\subseteq_A$:

  $\subseteq_A = \{<X,Y> | X \in A, Y \in A, X \subseteq Y\}$

- 集簇A上的真包含关系$\subset_A$:

  $\subset_A = \{<X,Y> | X \in A, Y \in A, X \subset Y\}$

例 求集合A上的特殊关系

- **例:** $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,

  $I_A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<6,6>\}$

  $E_A=A\times A$

  $D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>, <2,2>,$

  $<2,4>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<4,4>, <5,5>,<6,6>\}.$

$\leq=I_A\cup\{<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,3>,<2,4>,$

$<2,5>,<2,6>,<3,4>,<3,5>,<3,6>,<4,5>,<4,6>,<5,6>\}$

求P(B)上的包含关系$\subseteq_{P(B)}$

设$B=\{a,b\}$,求$P(B)$上的包含关系$\subseteq_{P(B)}$

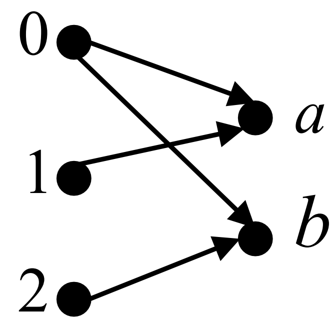
解

$P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$$\subseteq_{P(B)}=\{<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a,b\}>,$$
$$<\{b\},\{a,b\}>\}\cup I_{P(B)}$$

关系的表示

- **集合：目前为止都是使用集合形式表示**
- **图形:**有向线段表示有序对



右图表示的关系是

$R=\{<0,a>,<1,a>,<0,b>,<2,b>\}$

- **表格:**×表示对应的行和列有关系R

R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

关系的定义域,值域,域

对任意集合R, 可以定义:

- 定义域(domain) :

  $\text{dom } R = \{ x \mid \exists y(xRy) \}$

- 值域(range):

  $\text{ran } R = \{ y \mid \exists x(xRy) \}$

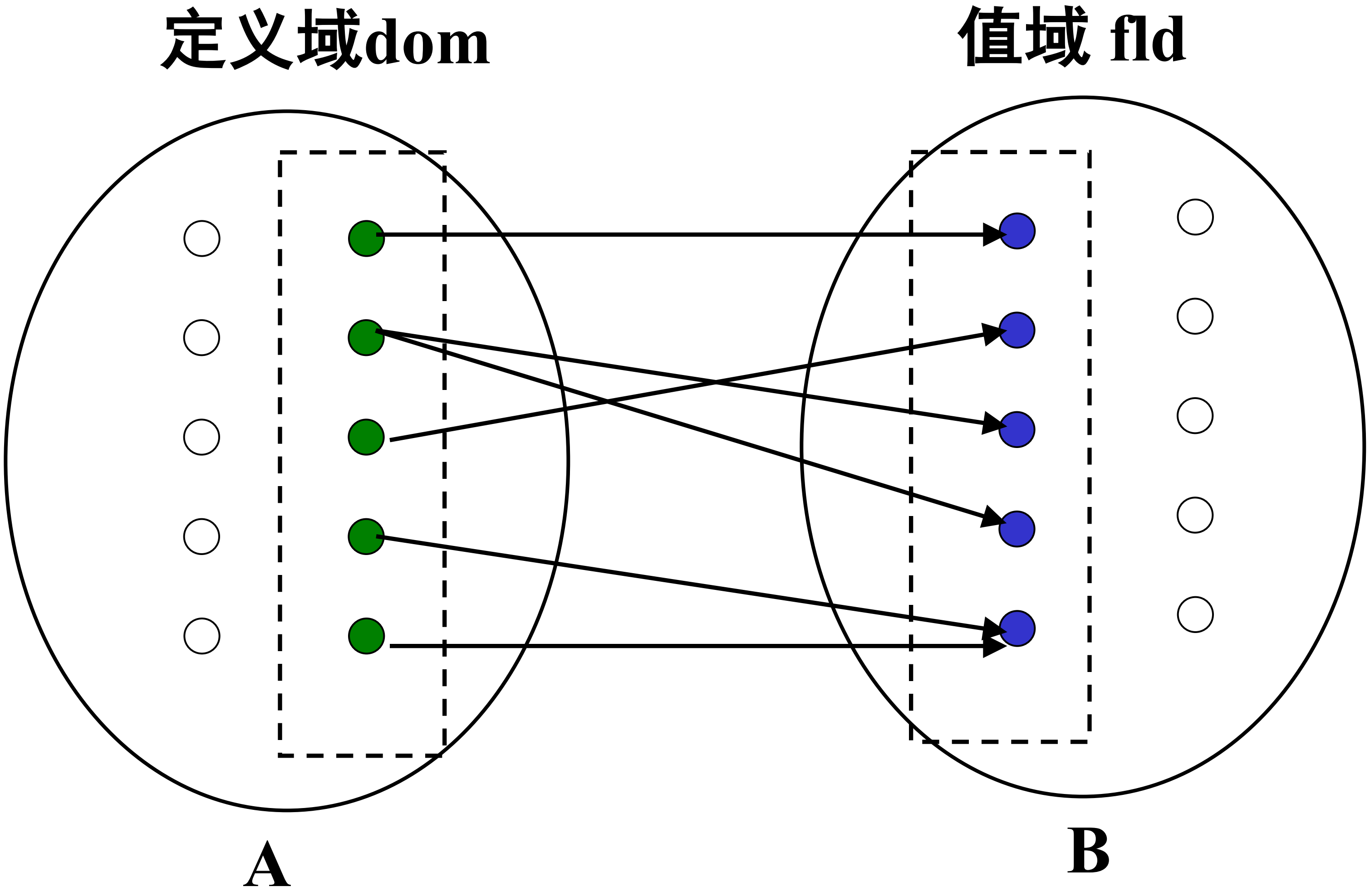
- 域(field):

  $\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$

例 集合A={1,2,3,4},A上的关系

R={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,4>,求 dom R,ran R, fld R

关系的定义域,值域,域的图示



例 求dom R /ran R / fld R

- **例:** $R_1=\{a,b\}$, $R_2=\{a,b,<c,d>,<e,f>\}$,

  $R_3=\{<1,2>,<3,4>,<5,6>\}$.

当a,b不是有序对时, R_1和R_2不是关系.

dom $R_1=\varnothing$, ran $R_1=\varnothing$, fld $R_1=\varnothing$

dom $R_2=\{c,e\}$, ran $R_2=\{d,f\}$, fld $R_2=\{c,d,e,f\}$

dom $R_3=\{1,3,5\}$, ran $R_3=\{2,4,6\}$,

fld $R_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.

关系的逆 / 合成(复合)

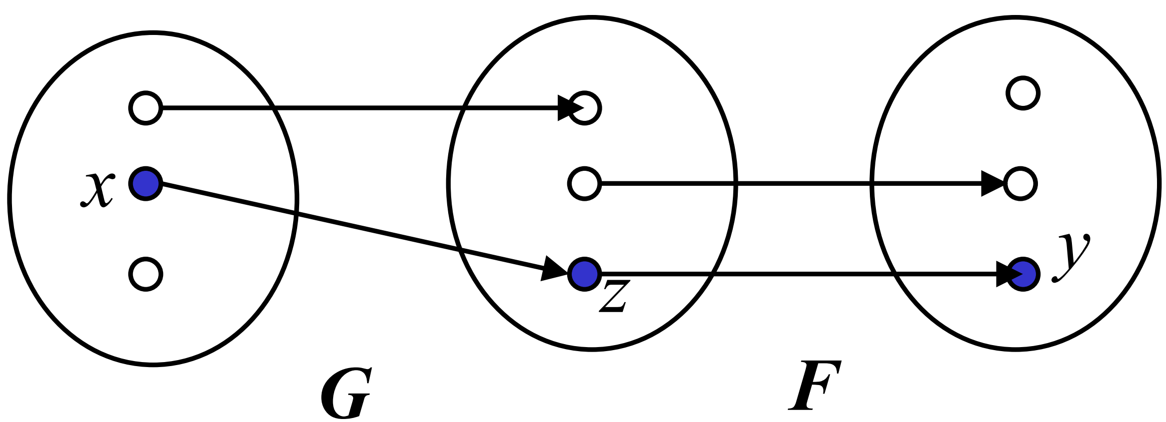
定义 对任意集合F,G,

- **逆(inverse) F^{-1}**：

  $$F^{-1} = \{ <x,y> \mid yFx \}$$

- **合成(复合)(composite) $F \circ G$:**

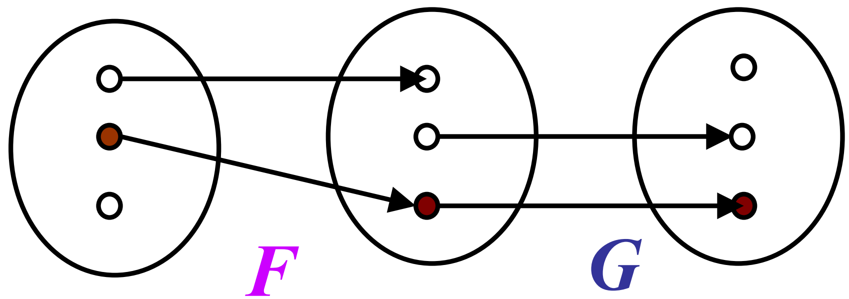
  $$F \circ G = \{ <x,y> \mid \exists z(xGz \wedge zFy) \}$$



关于合成

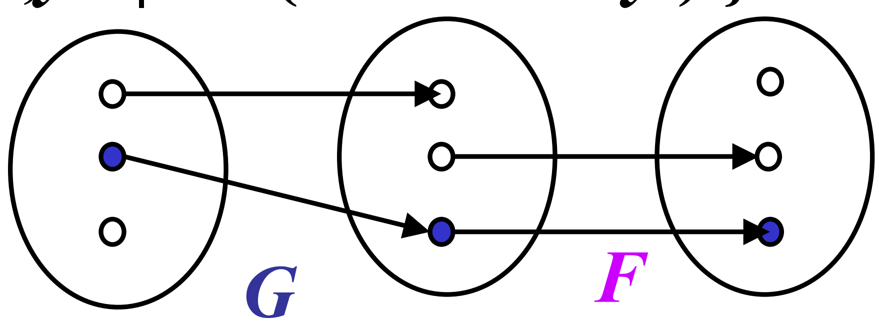
- **顺序合成(右合成):**

$F \circ G = \{ <x,y> \mid \exists z(xFz \land zGy) \}$



- **逆序合成(左合成):**

$F \circ G = \{ <x,y> \mid \exists z(xGz \land zFy) \}$



例求 F的逆和$F\circ G$

集合$A=\{1,2,3\},B=\{1,2,3,4\},C=\{0,1,2\},F$是从$A$到$B$上的关系，$G$是从$B$到$C$上的关系，

$F=\{<1,1>,<1,4>,<2,3>,<3,1>,<3,4>\}$

$G=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>,<3,2>,<4,1>\}$

求F^{-1}，$G\circ F$，$F\circ G$

Tip：1. F^{-1}是B到A的关系，$G\circ F$是A到C的关系，但$F\circ G$不是B到B的关系

2. 在定义中不规定F和G一定是关系，但F^{-1}和$F\circ G$一定是关系

限制,象

定义 对任意集合F,A,

- 限制(restriction):F在A上的限制

$$F\upharpoonright A = \{ <x,y> \mid xFy \land x\in A \}$$

- 象(image):A在F下的像

$$F[A] = ran(F\upharpoonright A) = \{ y \mid \exists x(x\in A \land xRy)\}$$

例如：$R_1=\{<a,b>,<b,d>,<c,c>,<c,d>\}$,

$R_2=\{<a,c>,<b,d>,<d,b>,<d,d>\}$, $A=\{a,c>$

求$R_1\upharpoonright A$, $R_1[A]$, $R_2\upharpoonright A$, $R_2[A]$

单根,单值

定义 对任意集合F,

- 单根(single rooted): 不存在多对一，F是单根的$\Leftrightarrow$

$$\forall y(y \in \text{ran } F \rightarrow \exists! x(x \in \text{dom } F \wedge xFy))$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in \text{ran } F)(\exists! x \in \text{dom } F)(xFy)$$

- 单值(single valued): 不存在一对多，F是单值的$\Leftrightarrow$

$$\forall x(x \in \text{dom } F \rightarrow \exists! y(y \in \text{ran } F \wedge xFy))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \text{dom } F)(\exists! y \in \text{ran } F)(xFy)$$

例如：$R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$是单根的，不是单值的

$R_2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,d\rangle\}$,不是单根的，是单值的

例1

例 设$A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,<c,d>\}$,

$R=\{ <a,b>, <c,d> \}$,

$F=\{ <a,b>, <a,\{a\}>, <\{a\},\{a,\{a\}\}> \}$,

$G=\{ <b,e>,<d,c> \}$.

求: (1) A^{-1}, B^{-1},R^{-1}.

(2) $B\circ R^{-1}$, $G\circ B$, $G\circ R$, $R\circ G$.

(3) $F\uparrow\{a\}$, $F\uparrow\{\{a\}\}$, $F\uparrow\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\uparrow\{\{a\}\}$.

(4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

例1的解(续1)

已知: $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,<c,d>\}$,

$R=\{ <a,b>, <c,d> \}$,

求: (1) A^{-1}, B^{-1}, R^{-1}.

解: (1) $A^{-1} = \varnothing$,

$B^{-1} = \{<d,c>\}$,

$R^{-1} = \{<b,a>,<d,c>\}$.

例1的解(续2)

已知: $B=\{a,b,<c,d>\}$, $R=\{ <a,b>, <c,d> \}$,

$G=\{ <b,e>,<d,c> \}$.

求: (2) $B\circ R^{-1}$, $G\circ B$, $G\circ R$, $R\circ G$.

解: (2) $B\circ R^{-1}=\{<d,d>\}$

$G\circ B=\{<c,c>\}$

$G\circ R=\{<a,e>,<c,c>\}$

$R\circ G=\{<d,d>\}$

例1的解(续3)

已知: $F=\{ \langle a,b\rangle, \langle a,\{a\}\rangle, \langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle \}$,

求: (3) $F\upharpoonright\{a\}$, $F\upharpoonright\{\{a\}\}$, $F\upharpoonright\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}$.

解: (3) $F^{-1} =\{ \langle b,a\rangle, \langle \{a\},a\rangle, \langle \{a,\{a\}\}, \{a\}\rangle \}$

$$F\upharpoonright\{a\} = \{ \langle a,b\rangle, \langle a,\{a\}\rangle \}$$

$$F\upharpoonright\{\{a\}\} = \{ \langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle \}$$

$$F\upharpoonright\{a,\{a\}\} = F$$

$$F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}=\{ \langle \{a\},a\rangle \}$$

关系运算的举例(解(4))

已知: $F=\{ <a,b>, <a,\{a\}>, <\{a\},\{a,\{a\}\}> \}$,

求: (4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

解: (4) $F[\{a\}] = \{ b, \{a\} \}$

$F[\{a,\{a\}\}] = \{ b, \{a\}, \{a,\{a\}\} \}$

$F^{-1} =\{ <b,a>, <\{a\},a>, <\{a,\{a\}\}, \{a\}> \}$

$F^{-1}[\{a\}] = \varnothing$

$F^{-1}[\{\{a\}\}] = \{ a \}$

例2

例2 设$R=\{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in Z \wedge y=|x| \}$,

$A=\{ 0, 1, 2\}$, $B=\{ 0, -1, -2 \}$

求: (1) $R[A\cap B]$ 和$R[A]\cap R[B]$;

(2) $R[A]-R[B]$ 和$R[A-B]$.

解: (1) $R[A\cap B]=R[\{0\}]=\{0\}$

$R[A]\cap R[B]=\{0,1,2\}\cap\{0,1,2\}=\{0,1,2\}$

(2) $R[A]-R[B]=\{0,1,2\}-\{0,1,2\}=\varnothing$

$R[A-B]=R[\{1,2\}]=\{1,2\}$

note

在无括号时，关系的运算优先级如下

- 求逆运算优先于其它
- 求域、合成、限制、像运算优先于并、交、相对补、绝对补、对称差等集合运算

定理3

定理3: 设F,G是任意集合, 则

(1) $\mathrm{dom}(F \cup G) = \mathrm{dom}F \cup \mathrm{dom}G$

(2) $\mathrm{ran}(F \cup G) = \mathrm{ran}F \cup \mathrm{ran}G$

(3) $\mathrm{dom}(F \cap G) \subseteq \mathrm{dom}F \cap \mathrm{dom}G$

(4) $\mathrm{ran}(F \cap G) \subseteq \mathrm{ran}F \cap \mathrm{ran}G$

(5) $\mathrm{dom}F - \mathrm{dom}G \subseteq \mathrm{dom}(F - G)$

(6) $\mathrm{ran}\, F - \mathrm{ran}G \subseteq \mathrm{ran}(F - G)$

我们只给出(1)(4)(5)的证明

定理3-- (1)的证明

(1) dom(F∪G) = domF ∪ domG

证明: (1) $\forall x$,

$x \in \mathrm{dom}(F \cup G) \Leftrightarrow \exists y(\, x(F \cup G)y\,)$

$\Leftrightarrow \exists y(xFy \vee xGy)$

$\Leftrightarrow \exists y(xFy) \vee \exists y(xGy)$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}F \vee x \in \mathrm{dom}G$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}F \cup \mathrm{dom}G$

$\therefore \mathrm{dom}(F \cup G) = \mathrm{dom}F \cup \mathrm{dom}G.$

定理3-- (4)的证明

(4) $\mathrm{ran}(F\cap G) \subseteq \mathrm{ran}F \cap \mathrm{ran}G$

证明: (4) $\forall y$,

$$y\in\mathrm{ran}(F\cap G) \Leftrightarrow \exists x(\ x(F\cap G)y\ )$$

$$\Leftrightarrow \exists x(xFy \wedge xGy)$$

$$\Rightarrow \exists x(xFy) \wedge \exists x(xGy)$$

$$\Leftrightarrow y\in\mathrm{ran}F \wedge y\in\mathrm{ran}G$$

$$\Leftrightarrow y\in \mathrm{ran}F \cap \mathrm{ran}G$$

$$\therefore \mathrm{ran}(F \cap G) \subseteq \mathrm{ran}F \cap \mathrm{ran}G.$$

定理3-- (5)的证明

(5) dom$F$-dom$G \subseteq$ dom(F-G)

证明: (5) $\forall x$,

$x \in \mathrm{dom}F - \mathrm{dom}G \Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}F \wedge x \notin \mathrm{dom}G$

$\Leftrightarrow \exists y(xFy) \wedge \neg \exists y(xGy)$

$\Leftrightarrow \exists y(xFy) \wedge \forall y \neg(xGy) \Rightarrow \exists y(xFy) \wedge \exists y \neg(xGy)$

$\Rightarrow \exists y(xFy \wedge \neg(xGy)) \Leftrightarrow \exists y(x(F-G)y)$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(F-G)$

$\therefore \mathrm{dom}F - \mathrm{dom}G \subseteq \mathrm{dom}(F-G)$.

定理4

定理4: 设F是任意集合, 则

(1) $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$;

(2) $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$;

(3) $(F^{-1})^{-1} \subseteq F$, 当$F$是关系时, 等号成立.

定理4(1)的证明

(1) $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$;

证明: (1) $\forall x$,

$x \in \mathrm{dom}F^{-1}$

$\Leftrightarrow \exists y\,(x\,F^{-1}\,y)$

$\Leftrightarrow \exists y(yFx)$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{ran}F$

$\therefore\ \mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$.

(2)可类似证明.

定理4 (3)的证明

(3) $(F^{-1})^{-1} \subseteq F$, 当$F$是关系时, 等号成立.

证明: 设F是关系, 则$\forall <x,y>$,

$<x,y> \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow yF^{-1}x \Leftrightarrow xFy$.

这时$(F^{-1})^{-1} = F$.

当F不是关系时, $(F^{-1})^{-1} \subset F$,

例如, 设$F=\{<a,b>,a\}$, 则

$F^{-1}=\{<b,a>\}$, $(F^{-1})^{-1} =\{<a,b>\} \subset F$

$\therefore (F^{-1})^{-1} \subseteq F$

定理5

定理5: 设R_1,R_2,R_3为集合, 则

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3)$$

证明: $\forall <x,y>$,

$$<x,y>\in(R_1\circ R_2)\circ R_3$$

$$\Leftrightarrow \exists z(\, xR_3z \wedge z(R_1\circ R_2)y\,)$$

$$\Leftrightarrow \exists z(\, xR_3z \wedge \exists t(\, zR_2t \wedge tR_1y\,)\,)$$

$$\Leftrightarrow \exists z\exists t(\, xR_3z \wedge (\, zR_2t \wedge tR_1y\,)\,)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\exists z(\, xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y\,)$$

定理5(续)

$\Leftrightarrow \exists t(\ \exists z(\ xR_3z \land zR_2t) \land tR_1y\ )$

$\Leftrightarrow \exists t(\ x(R_2\circ R_3)t \land tR_1y\ )$

$\Leftrightarrow xR_1\circ(R_2\circ R_3)y$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1\circ(R_2\circ R_3)$

$\therefore\ (R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3).$

说明: 合成运算具有结合律.

$$x \xrightarrow{R_3} z \xrightarrow{R_2} t \xrightarrow{R_1} y$$

定理6

定理6: 设R_1,R_2,R_3是集合,则

(1) $R_1\circ(R_2\cup R_3) = (R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$

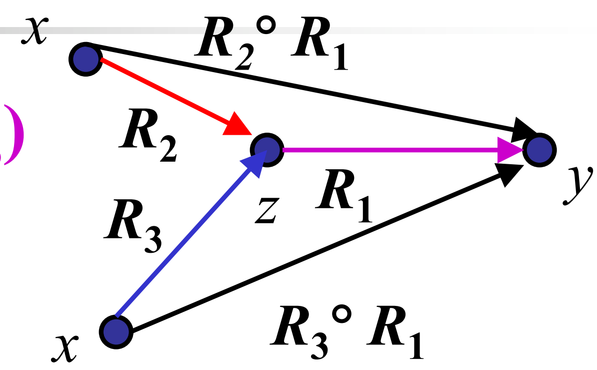
(2) $(R_1\cup R_2)\circ R_3 = (R_1\circ R_3)\cup(R_2\circ R_3)$

(3) $R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$

(4) $(R_1\cap R_2)\circ R_3\subseteq(R_1\circ R_3)\cap(R_2\circ R_3)$

请自行证明(2)(4)

定理6 (1)的证明



(1) $R_1\circ(R_2\cup R_3) = (R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$

证明: $\forall\langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle\in R_1\circ(R_2\cup R_3)$

$\Leftrightarrow\exists z(x(R_2\cup R_3)z\wedge zR_1y)$（合成的定义）

$\Leftrightarrow\exists z((xR_2z\vee xR_3z)\wedge zR_1y)$（并的定义）

$\Leftrightarrow\exists z((x R_2 z\wedge z R_1 y)\vee(x R_3 z\wedge z R_1 y))$（ ∧对∨分配律）

$\Leftrightarrow\exists z(x R_2 z\wedge z R_1 y)\vee\exists z(x R_3 z\wedge z R_1 y)$（∃对∨分配）

$\Leftrightarrow x(R_1\circ R_2)y\vee x(R_1\circ R_3)y$（合成的定义）

$\Leftrightarrow x((R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3))y$（并的定义）

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$

定理6 (3)的证明

(3) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

证明: $\forall <x,y>$,

$<x,y> \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3)$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z> \in R_2 \cap R_3 \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z> \in R_2 \wedge <x,z> \in R_3) \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z> \in R_2 \wedge <z,y> \in R_1) \wedge (<x,z> \in R_3 \wedge <z,y> \in R_1)))$

$\Rightarrow \exists z(<x,z> \in R_2 \wedge <z,y> \in R_1)) \wedge \exists z(<x,z> \in R_3$
$\wedge <z,y> \in R_1))$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R_1 \circ R_2 \wedge <x,y> \in R_1 \circ R_3$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$

定理6 (3)的讨论

(3) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

反例：说明=不成立:

设$R_1 = \{<b,d>,<c,d>\}$, $R_2 = \{<a,b>\}$, $R_3 = \{<a,c>\}$.

则$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = R_1 \circ \varnothing = \varnothing$

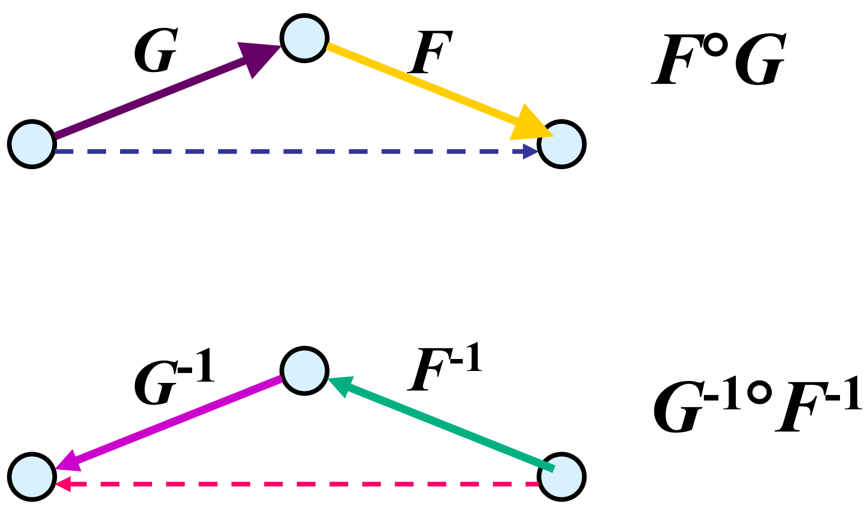
$R_1 \circ R_2 = \{<a,d>\}$,

$R_1 \circ R_3 = \{<a,d>\}$,

$(R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3) = \{<a,d>\}$

定理7

定理7: 设F,G为二集合, 则$(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$.



定理7的证明

求证$(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证明: $\forall\langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in (F\circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in (F\circ G)$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle y,z\rangle \in G \wedge \langle z,x\rangle \in F)$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle z,y\rangle \in G^{-1} \wedge \langle x,z\rangle \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists z((xF^{-1}z \wedge zG^{-1}y)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in G^{-1}\circ F^{-1}$

定理8

定理8: 设$R, S, A, B, \mathcal{A}$为集合, $\mathcal{A} \neq \varnothing$,则

(1) $R \restriction (A \cup B) = (R \restriction A) \cup (R \restriction B)$;

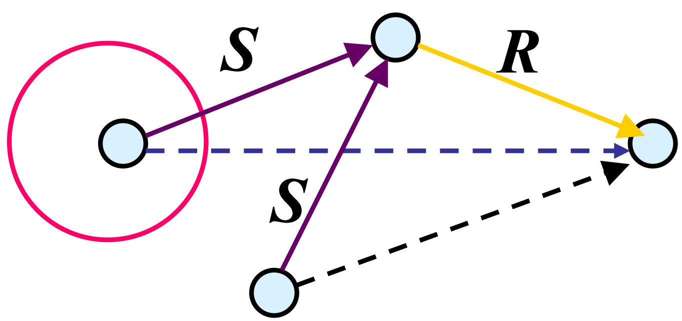
(2) $R \restriction \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{ R \restriction A \mid A \in \mathcal{A} \}$;

(3) $R \restriction (A \cap B) = (R \restriction A) \cap (R \restriction B)$;

(4) $R \restriction \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{ R \restriction A \mid A \in \mathcal{A} \}$;

(5) $(R \circ S) \restriction A = R \circ (S \restriction A)$.

请同学自行学习!



定理8 (2)的证明

(2) $R\upharpoonright\cup\mathscr{A} = \cup\{R\upharpoonright A \mid A\in\mathscr{A}\}$;

证明: $\forall\langle x,y\rangle$,

$x(R\upharpoonright\cup\mathscr{A})y \Leftrightarrow xRy\wedge x\in\cup\mathscr{A}$ (限制的定义)

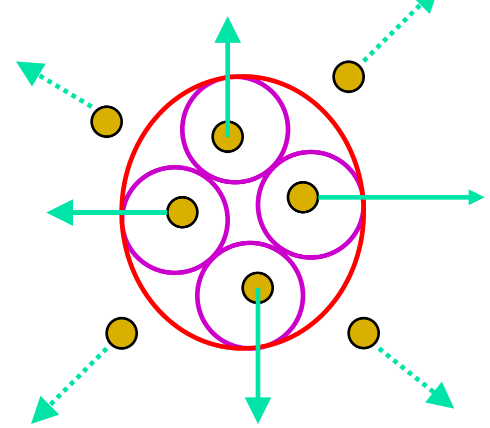
$\Leftrightarrow xRy\wedge\exists A(A\in\mathscr{A}\wedge x\in A)$ (广义并的定义)

$\Leftrightarrow \exists A(xRy\wedge x\in A\wedge A\in\mathscr{A})$ ($\exists$量词作用域的扩张)

$\Leftrightarrow \exists A(x(R\upharpoonright A)y\wedge A\in\mathscr{A})$ (限制的定义)

$\Leftrightarrow x(\cup\{R\upharpoonright A \mid A\in\mathscr{A}\})y$. (广义并的定义)

$\therefore R\upharpoonright\cup\mathscr{A} = \cup\{R\upharpoonright A \mid A\in\mathscr{A}\}$



定理8 (4)的证明

(4) $R\upharpoonright\cap\mathcal{A}=\cap\{R\upharpoonright A \mid A\in\mathcal{A}\}$;

证明: $\forall <x,y>$,

$x(R\upharpoonright\cap\mathcal{A})y \Leftrightarrow xRy\wedge x\in\cap\mathcal{A}$

$\Leftrightarrow xRy\wedge\forall A(A\in\mathcal{A}\rightarrow x\in \mathrm{A})$

$\Leftrightarrow\forall A(xRy\wedge(\neg A\in\mathcal{A}\vee x\in \mathrm{A})$

$\Leftrightarrow\forall A((xRy\wedge\neg A\in\mathcal{A})\vee(xRy\wedge x\in \mathrm{A})$

$\Leftrightarrow\forall A(\neg(<\mathrm{x,y}>\notin \mathrm{R}\vee A\in\mathcal{A})\vee<\mathrm{x,y}> R\upharpoonright A)$

$\Leftrightarrow\forall A((\neg A\in\mathcal{A})\vee<\mathrm{x,y}> R\upharpoonright A)$

$\Leftrightarrow\forall A(A\in\mathcal{A}\rightarrow <\mathrm{x,y}> R\upharpoonright A)$

$\Leftrightarrow<x,y> \in(\cap\{R\uparrow A \mid A\in\mathcal{A}\})$

$\therefore R\uparrow\cap\mathcal{A}=\cap\{R\uparrow A \mid A\in\mathcal{A}\}$

定理8 (5)的证明

$(5)\ (R\circ S)\uparrow A = R\circ(S\uparrow A)$.

证明: $\forall <x,y>$, $x((R\circ S)\uparrow A)y$

$\Leftrightarrow x(R\circ S)y \wedge x\in A \Leftrightarrow \exists z(xSz\wedge zRy) \wedge x\in A$

$\Leftrightarrow \exists z(xSz\wedge zRy \wedge x\in A)$

$\Leftrightarrow \exists z((xSz\wedge x\in A) \wedge zRy)$

$\Leftrightarrow \exists z(x(S\uparrow A)z \wedge zRy) \Leftrightarrow x(R\circ(S\uparrow A))y$.

$\therefore (R\circ S)\uparrow A = R\circ(S\uparrow A)$. #

定理9

定理9: 设$R,S,A,B,\mathcal{A}$,为集合, $\mathcal{A}\neq\varnothing$,则

(1) $R[A\cup B] = R[A]\cup R[B]$;

(2) $R[\cup\mathcal{A}] = \cup\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A} \}$;

(3) $R[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$;

(4) $R[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$;

(5) $R[A]-R[B] \subseteq R[A-B]$;

(6) $(R\circ S)[A] = R[S[A]]$.

本定理请同学们自行学习！

定理9 (2)的证明

(2) $R[\cup\mathcal{A}] = \cup\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A} \}$;

证明: $\forall y, y\in R[\cup\mathcal{A}] \Leftrightarrow \exists x(xRy \land x\in\cup\mathcal{A})$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \land \exists A(A\in \mathcal{A} \land x\in A))$

$\Leftrightarrow \exists A(A\in\mathcal{A} \land \exists x(xRy \land x\in A))$

$\Leftrightarrow \exists A(A\in\mathcal{A} \land y\in R[A])$

$\Leftrightarrow y\in\cup\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A} \}$.

$\therefore R\uparrow\cup\mathrm{A} = \cup\{ R\uparrow A \mid A\in\mathcal{A}\}$.

定理9 (4)的证明

(4) $R[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$;

证明: $\forall y, y\in R[\cap\mathcal{A}] \Leftrightarrow \exists x(xRy\land x\in\cap\mathcal{A})$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy\land\forall A(A\in\mathcal{A}\to x\in A))$

$\Leftrightarrow \exists x\forall A(xRy\land(A\in\mathcal{A}\to x\in A))$

$\Rightarrow \forall A\exists x(xRy\land(A\in\mathcal{A}\to x\in A))$ (*)

$\Rightarrow \forall A\exists x(A\in\mathcal{A}\to(xRy\land x\in A))$ (**)

$\Leftrightarrow \forall A(A\in\mathcal{A}\to\exists x(xRy\land x\in A))\Leftrightarrow\forall A(A\in\mathcal{A}\to y\in R[A])$

$\Leftrightarrow y\in\cap\{ \mathrm{R}[A] \mid A\in\mathcal{A} \}$.

$\therefore\ \mathrm{R}[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{ \mathrm{R}[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$.

定理9 (4)的证明 续

(*) $\exists x\forall A(xRy\wedge(A\in\mathcal{A}\to x\in A))$

$\Rightarrow\forall A\exists x(xRy\wedge(A\in\mathcal{A}\to x\in A))$

(**) $\forall A\exists x(xRy\wedge(A\in\mathcal{A}\to x\in A))$

$\Rightarrow\forall A\exists x(A\in\mathcal{A}\to(xRy\wedge x\in A))$

容易证明:

(*) $\exists x\forall yB(x,y)\Rightarrow\forall y\exists xB(x,y)$

(**) $p\wedge(q\to r)\Rightarrow q\to(p\wedge r)$

定理9 (5)的证明

(5) $R[A]-R[B] \subseteq R[A-B]$;

证明: $\forall y, y\in R[A]-R[B] \Leftrightarrow y\in R[A] \land \neg y\in R[B]$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \land x\in A) \land \neg\exists x(xRy \land x\in B)$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \land x\in A) \land \forall x(\neg xRy \lor \neg x\in B)$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \land x\in A) \land \forall x(xRy \to \neg x\in B)$

$\Rightarrow \exists x(xRy \land x\in A \land \neg x\in B)$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \land x\in A-B) \Leftrightarrow y\in R[A-B]$.

$\therefore R[A]-R[B] \subseteq R[A-B]$.

定理9 (5)的证明 续

$\exists x(xRy \wedge x \in A) \wedge \forall x(xRy \to \neg x \in B)$

$\Rightarrow \exists x(xRy \wedge x \in A \wedge \neg x \in B)$

前提: $\exists x(xRy \wedge x \in A)$, $\forall x(xRy \to \neg x \in B)$

结论: $\exists x(xRy \wedge x \in A \wedge \neg x \in B)$

证明: (1) $\exists x(xRy \wedge x \in A)$,前提引入

(2) $cRy \wedge c \in A$, (1)EI

(3) $\forall x(xRy \to \neg x \in B)$, 前提引入

(4) $cRy \to \neg c \in B$, (3)UI

(5) cRy, (2)化简

(6) $\neg c \in B$, (4)(5)假言推理

(7) $cRy \wedge c \in A \wedge \neg c \in B$, (2)(6)合取

(8) $\exists x(xRy \wedge x \in A \wedge \neg x \in B)$ (7)EG. #

定理9 (6)的证明

(6) $(R\circ S)[A] = R[S[A]]$.

证明: $\forall y, y\in(R\circ S)[A]$

$$\Leftrightarrow \exists x(\, x(R\circ S)y \wedge x\in A\,)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(\, \exists z(\, xSz \wedge zRy\,) \wedge x\in A\,)$$

$$\Leftrightarrow \exists z(\, zRy \wedge \exists x(\, xSz \wedge x\in A\,)\,)$$

$$\Leftrightarrow \exists z(\, zRy \wedge z\in S[A]) \Leftrightarrow y\in R[S[A]].$$

$\therefore (R\circ S)[A] = R[S[A]]$. #

定理9的讨论

讨论: 当R为单根关系时, (3)(4)(5)中等号成立.

(3) $R[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$;

(4) $R[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$;

(5) $R[A]-R[B] \subseteq R[A-B]$;

总结

- 1. 有序对与卡氏积:

  $<a,b>$, $A \times B$

- 2. 二元关系:

  $R \subseteq A \times B$, $R \subseteq A \times A$; $\varnothing$, I_A, E_A; xRy

- 3. 二元关系的基本运算及其性质:

  dom(R), ran(R), fld(R);

  $R \upharpoonright A$, $R[A]$; R^{-1}, $R \circ S$

- 作业：习题二 9, 11