关系的闭包

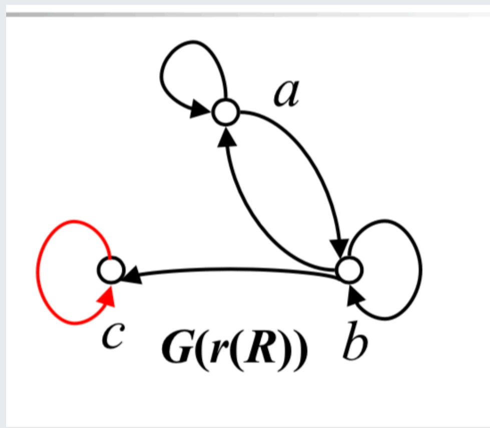
R的闭包是最小的包含关系R具有性质P的关系
自反闭包,对称闭包,传递闭包分别记为
$r(R)$,$s(R)$, $t(R)$

定理21: 设R_1,R_2 Í $A\times A$ 且$A\neq\varnothing$, 则
(1) $r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$;
(2) $s(R_1\cup R_2) = s(R_1)\cup s(R_2)$;
(3) $t(R_1\cup R_2) \supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

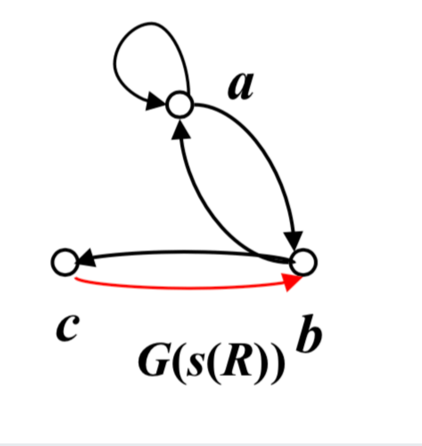
自反闭包$r(R)$

定义: 设$A\neq\varnothing$,$R\subseteq A\times A$,R的自反闭包(对称闭包、传 递闭包) R′满足如下条件:

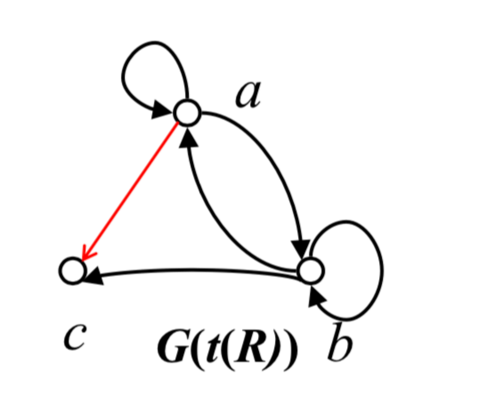
(1) R′是自反的(对称的、传递的);
(2) R⊆R′;
(3)∀S((R⊆S∧S自反) → R′⊆S).



对称闭包$s(R)$



传递闭包$t(R)$



定理 设R Í $A\times A$ 且$|A|=n$, 则$\exists k\leq n$, 使得 $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^k$;

Warshall算法描述1

Algorithm2 Warshall Algorithm

Procedure Warshall ($M_{R:}$ zero-one n×n matrix)

```
W:=M_R
for k:=1 to n
    for i=1 to n
        for j:=1 to n
            w_ij^(k)=w_ij^(k-1) ∨ ( w_ik^(k-1) ∧ w_kj^(k-1))
        end
    end
end   {W=[w_ij] is M_R*}
```

Warshall 算法计算传递闭包用需要 $2n^3$ 位运算。

闭包的性质, 求法, 相互关系

定理19: 设$R\subseteq A\times A$且$A\neq\varnothing$,则
(1) R自反$\Leftrightarrow r(R) = R$;
(2) R对称$\Leftrightarrow s(R) = R$;
(3) R传递$\Leftrightarrow t(R) = R$;

证明: (1) $R\subseteq R$ ∧ R自反$\Rightarrow r(R)\subseteq R$
又$R\subseteq r(R)$, $\therefore r(R) = R$.
(2)(3) 完全类似.

定理20: 设$R_1\subseteq R_2$, $R_1\subseteq A\times A$, $R_2\subseteq A\times A$, 且$A\neq\varnothing$, 则
(1) $r(R_1)\subseteq r(R_2)$;
(2) $s(R_1)\subseteq s(R_2)$;
(3) $t(R_1)\subseteq t(R_2)$;

证明: (1) $R_1\subseteq R_2$, $R_2\subseteq r(R_2)$ $\therefore R_1\subseteq r(R_2)$
又$\because r(R_2)$是自反的,即$r(R_2)$是包含R_1的自反关系
$\therefore r(R_1)\subseteq r(R_2)$
(2)(3) 类似可证.

定理21: 设$R_1,R_2\subseteq A\times A$ 且$A\neq\varnothing$, 则
(1) $r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$;
(2) $s(R_1\cup R_2) = s(R_1)\cup s(R_2)$;
(3) $t(R_1\cup R_2) \supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明: (1) $\because R_1\subseteq R_1\cup R_2$, $R_2\subseteq R_1\cup R_2$,由定理2.20得
$\therefore r(R_1)\subseteq r(R_1\cup R_2)$, $r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$
$\therefore r(R_1\cup R_2)\supseteq r(R_1)\cup r(R_2)$
$\because R_1\subseteq r(R_1)$,$R_2\subseteq r(R_2)$, $\therefore R_1\cup R_2\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$
又$\because r(R_1)\cup r(R_2)$是自反的, ∴由自反闭包的定义得
$r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$,$\therefore r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$
(2)同理可证.

25

定理22~24: 设$R\subseteq A\times A$ 且$A\neq\varnothing$, 则
(1) $r(R) = R\cup I_A$;
(2) $s(R) = R\cup R^{-1}$;
(3) $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$.

对比: R自反$\Leftrightarrow I_A\subseteq R$
R对称$\Leftrightarrow R=R^{-1}$
R传递$\Leftrightarrow R^2\subseteq R$

定理2.24: 设$R\subseteq A\times A$ 且$A\neq\varnothing$, 则
$t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$;
证明: 先证明$R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$是传递的
$(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^2 = R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$
$\Leftrightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$传递
$R\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\Rightarrow t(R)\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$;
再证明$R^n\subseteq t(R)$(证明过程自学)
$R\subseteq t(R)$ ∧ $t(R)$传递
$\Rightarrow R\subseteq t(R)\wedge R^2\subseteq t(R)\wedge R^3\subseteq t(R)\wedge\ldots$
$\Rightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq t(R)$
$\therefore t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$.

证明了闭包的正确性

定理2.25: 设$R\subseteq A\times A$且$A\neq\varnothing$,则
(1) R自反$\Rightarrow s(R)$和$t(R)$自反;
(2) R对称$\Rightarrow r(R)$和$t(R)$对称;
(3) R传递$\Rightarrow r(R)$传递;

增加的最小的有序对

"最小":任何包含同样对象,具有同样性质的集合,都包含这个闭包集合.

闭包(closure): R是A上的关系, 最小的包含R具有 性质P的关系S

总结

总结: 闭包运算保持下列关系性质.

	自反性	对称性	传递性
$r(R)$	√(定义)	√(定理25(2))	√(定理25(3))
$s(R)$	√(定理25(1))	√(定义)	×(反例)
$t(R)$	√(定理25(1))	√(定理25(2))	√ (定义)

定理26: 设$R\subseteq A\times A$ 且$A\neq\varnothing$, 则
(1) $rs(R) = sr(R)$;
(2) $rt(R) = tr(R)$;
(3) $st(R)\subseteq ts(R)$;(s(R)不能保持R的传递性)