第一章 集合

- 集合的概念
- 集合之间的关系
- 集合的运算
- 文氏图、容斥原理

什么是集合结构

- 离散数学的大部分内容是研究离散结构，表现离散对象。
- 很多重要的离散结构是用集合来构造的，即对象的联合。例如组合，计数，关系，用来表现关系的序偶集合，图，结点和联结结点的边的集合，用来模拟计算机的有限状态机等。
- 十九世纪数学最伟大成就之一，是数学的基础。

集合论(set theory)的发展-起源

- 集合论(Set Theory) 的起源可追溯到16世纪末，主要是对**数集**进行卓有成效的研究.
- 19世纪 70年代德国数学家**康托尔**(G · Cantor) 在无穷序列和分析的有关课题的理论研究中创立了集合论. 康托尔对具有任意特性的无穷集合进入了深入的探讨，提出了关于基数、序数、超穷数和良序集等理论，奠定了集合论的深厚基础. 因此，康托尔被誉为集合论的创始人.

集合论的发展-朴素集合论

康托尔集合论（朴素集合论）中的这三个公理:

①外延公理: 如果两个集合中各个元素都是相同的，则它们相等.

②抽象公理: 任给一个性质，都有一个满足该性质的客体所组成的集合.

③选择公理: 每个集合都有一个选择函数.

但是,抽象公理产生了悖论，选择性公理让人困惑.

集合论的发展-悖论

- 当人们认为集合论足够严谨时,在本世纪初,出现了许多悖论,如著名的罗素悖论(即理发师悖论), 有力冲击了或者说动摇了集合论的发展.
- 罗素悖论：由“不属于该集合的所有客体组成集合”会导出矛盾.
- 论证 把抽象公理符号化为：$(\exists y)(\forall x)(x\in y\leftrightarrow\varphi(x))$

  其中，$\varphi(x)$是不以y为自由变元的公式.

  把$\varphi(x)$取为“x不为y的成员”，即$\varphi(x) = \neg(x\in y)$.

  则罗素悖论符号化为 $(\exists y)(\forall x)(x\in y\leftrightarrow\neg(x\in y))$

  取$x=y$，可得$(\exists y)(\forall y)(y\in y\leftrightarrow\neg(y\in y))$

集合论的发展-公理化体系

- 许多数学家哲学家为克服这些矛盾而建立了各种**公理化集合论体系** (“这些原则必须足够狭窄，以保证排除一切矛盾；另一方面又必须充分广阔，使康托尔集合论中一切有价值的内容得以保存下来”)，其中以20世纪初、中期的ZFS(E·Zermelo, A·Fraenkel, T·Skolem)和NBG(Von Neurnann, P·Bernavs, K·Gödel)**公理化体系**最为流行.
- 到 20世纪 60年代，P·L·Cohen发明了强制方法而得到了关于**连续统**与**选择公理**的独立性成果，而后的研究结果推陈出新，大量涌现.

集合论的发展-其它分支

- 在同一时代，美国数学家 L · A·Zadeh提出了**Fuzzy集理论**, 以及 20世纪80年代波兰数学家Z · Pawlak发表了**Rough集理论**，这两种理论区别于以往的集合论，是一种新的**模糊集理论**，受到了学术界的重视和青睐，取得了喜人成果．还有多位著名学者也为集合论的发展作出了重要贡献．
- 在此基础上，逐步形成了**公理化集合论**和**抽象集合论**，使该学科成为数学中发展最为迅速的一个分支。
- 集合论观点已渗透到古典分析、泛函、概率、函数论以及信息论、排队论等现代数学各个领域。

集合(set)的定义

- 集合：不能精确定义。

  一些对象的整体就构成**集合**，

  这些对象称为**元素**(element)或**成员**(member)
- 用大写英文字母$A,B,C,\ldots$表示集合
- 用小写英文字母$a,b,c,\ldots$表示元素
- $a \in A$：表示a是A的元素，读作“a**属于**A”

  $a \notin \mathrm{A}$：表示a不是A的元素，读作“a**不属于**A”

集合的表示-列举法(roster)

- 列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来，例如

  $A=\{a,b,c,d,\ldots,x,y,z\}$

  $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

- 集合中的元素不规定顺序

  $C=\{2,1\}=\{1,2\}$

- 集合中的元素各不相同(多重集除外)

  $C=\{2,1,1,2\}=\{2,1\}$

集合的表示-描述法(defining predicate)

- $\{x|P(x)\}$表示使$P(x)$为真的元素组成的集合，是$\forall x P(x)$的真值集合
- $\{x \in S|P(x)\}$表示S中元素x使$P(x)$为真的元素组成的集合，是谓词$P(x)$)的真值集合。
- $\forall x(x \in S \to P(x))$ 常简写为$\forall x \in S(P(x))$
- $\exists x(x \in S \wedge P(x))$常简写为$\exists x \in S(P(x))$

例如，

（1）$A=\{x|\ P_1(x)\}=\{x|\ x$是英文字母$\}=\{a,b,c,d,\ldots,x,y,z\}$

（2）$\forall x \in R(P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in R(x^2 \geq 0)$，

$\exists x \in Z(x^2=1)$的真值集合是$\{x \in Z|x^2=1\}$

其中R是实数集合，Z是整数集合。

多重集(multiple set)

- **多重集**: 允许元素多次重复出现的集合，记作:

  $\{a_1 \bullet m_1, a_1 \bullet m_1, \ldots\ldots, a_n \bullet m_n\}$

  m_i是a_i的**重复度** ($m_i \geq 0$).

- 例如: 设多重集$A=\{a,a,b,b,c\}$,可记为

  $A=\{a \bullet 2, b \bullet 2, \quad c \bullet 1\}$

  元素a,b的重复度是2

  元素c的重复度是1

  元素d的重复度是0

特征函数法(characteristic function)

- **集合*A*的特征函数是** $\chi_A(x)$ **:*E*→{0,1}**

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

- **对多重集,** $\chi_A(x)$**: *x*在*A*中的重复度.**

计算机表示

- 设定一个全集U，它包含所有n个研究对象,U中的元素顺序是任意给定的，且集合$A \subseteq U$，A可以用一个n位二进制数表示：第i位为1表示U中的第i个元素属于A，否则，不属于A.
- 例如：Let $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,$U$中元素的顺序是升序，用10位二进制数表示出下列集合：

  1) U中所有奇数组成的集合A

  2) U中所有偶数组成的集合B

  3) U中所有不大于5的元素组成的集合C

常用的数集合

- N：自然数(natural numbers)集合

  $N=\{0,1,2,3,\ldots\}$

- $Z(I)$：整数(integers)集合

  $Z=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

- Q：有理数(rational numbers)集合
- R：实数(real numbers)集合
- C：复数(complex numbers)集合

集合之间的关系

- 子集、真子集、相等
- 空集、全集
- 幂集、n元集、有限集
- 集族

子集(subset)

- B包含于A, A包含B:

  $$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- B不是A的子集:

  $$B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

- $\neg \forall x(x \in B \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow \exists x \neg(\neg x \in B \vee x \in A)$

  $\Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge \neg x \in A) \Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$

- 任何一个非空集合A至少有两个子集：Φ和A

相等(equal)

- **相等:** $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$

  $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$

- $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq \mathrm{A}$ (=定义)

  $\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$ ($\subseteq$定义)

  $\Leftrightarrow\forall x((x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\in A))$ (量词分配)

  $\Leftrightarrow\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$ ($\leftrightarrow$等值式)

包含(⊆)的性质

- **$A \subseteq A$**

  证明: $A \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow 1$

- **若$A \subseteq B$,且$A \neq B$,则$B \not\subseteq A$**

  证明: $A \neq B \Leftrightarrow \neg(A = B)$

  $\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ (=定义)

  $\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \vee \neg(B \subseteq A)$ (德•摩根律)

  $\because A \subseteq B$ (已知)

  $\therefore \neg(B \subseteq A)$ (即$B \not\subseteq A$) (析取三段论)

  ($(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow q$ 析取三段论)

包含($\subseteq$)的性质(续)

- **若$A\subseteq B$, 且$B\subseteq C$, 则$A\subseteq C$　　(传递性)**

证明: $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

$\forall x, x\in A\wedge A\subseteq B$

$\Rightarrow x\in B$

又有$B\subseteq C$

因此$x\in B \wedge(x\in B\rightarrow x\in C) \Rightarrow x\in C$

$\therefore \forall x(x\in A\rightarrow x\in C)$, 即$A\subseteq C$.

真子集(proper subset)

- **真子集**: B**真包含**A:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

- $A \not\subset B \Leftrightarrow \neg(A \subseteq B \wedge A \neq B)$ ($\subset$**定义**)

$$\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \vee (A = B) \text{ (德•摩根律)}$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee (A = B) \text{ (} \nsubseteq \text{ 定义)}$$

真包含(⊂)的性质

- $A \not\subset A$

  证明: $A \subset A \Leftrightarrow A \subseteq A \wedge A \neq A \Leftrightarrow 1 \wedge 0 \Leftrightarrow 0.$

- 若$A \subset B$,则$B \not\subset A$

证明:(反证) 设$B \subset A$, 则

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \subseteq B$ (化简)

$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A \Rightarrow B \subseteq A$

所以$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ (=定义)

但是$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \neq B$ (化简)

矛盾!

真包含($\subset$)的性质(续)

- 若$A\subset B$, 且$B\subset C$, 则$A\subset C$

证明: $A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B \land A\neq B \Rightarrow A\subseteq B$ (化简律),

同理 $B\subset C \Rightarrow B\subseteq C$,

所以$A\subseteq C$.

假设$A=C$, 则 $B\subseteq C \Leftrightarrow B\subseteq A$,

又$A\subseteq B$, 故 $A=B$, 此与$A\subset B$矛盾,

所以$A\neq C$.

所以, $A\subset C$.

空集(empty set)

- 空集:没有任何元素的集合是空集,记作$\varnothing$。

  例如, $\{x \in R | x^2 + 1 = 0\}$

- 定理1: 对任意集合A, $\varnothing \subseteq A$

  证明: $\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$

  $\Leftrightarrow \forall x(0 \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow 1.$

- 推论: 空集是唯一的.

  证明: 设$\varnothing_1$与$\varnothing_2$都是空集, 则

  $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2 \wedge \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1 \Leftrightarrow \varnothing_1 = \varnothing_2$.

全集

- **全集**: 如果限定所讨论的集合都是某个集合的子集, 则称这个集合是全集,记作E。
- 全集是**相对的**, 视情况而定, 因此**不唯一**.

例如, 讨论(a, b)区间里的实数性质时, 可以选

$E=(a,b)$, $E=[a,b)$, $E=[a,b]$,$E=(a,+\infty)$,$E=(-\infty,+\infty)$等

n元集(n-set)

- n元集: 含有n个元素的集合称为n元集。
- 0元集: $\varnothing$。
- 1元集(或单元集),如$\{a\}$, $\{b\}$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$,…。
- $|A|$: 表示集合A中的元素个数,

$$A\text{是}n\text{元集} \Leftrightarrow |A|=n$$

- 有限集(fimite set): $|A|$是有限数, $|A|<\infty$,也叫有穷集.

集合的运算

- 两个集合可以已不同的方式结合在一起，如从学校主修数学课的集合和主修计算机科学课的集合，可以构成主修数学或计算机科学的学生集合，既主修数学又主修计算机科学的学生集合，主修数学但不主修计算机科学的学生集合… …
- 主要集合运算有
  - 幂集
  - 笛卡尔积
  - 并集∪、交集∩
  - 相对补集~、绝对补-、对称差⊕
  - 广义并集、广义交集

幂集(power set)

- **幂集**: A的全体子集组成的集合,称为A的幂集, 记作$P(A)$.

$$P(A)=\{x|x\subseteq A\}$$

- **注意**: $x\in P(A) \Leftrightarrow x\subseteq A$
- **例**: $A=\{a,b\}$, $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.
- 在许多问题中，要测试一个集合中的所有元素的组合是否满足某一个条件，这就要用到幂集

有限集幂集的大小

定理： $|A|=n \Rightarrow |P(A)|=2^n$.

证明: A的所有由 k 个元素组成的子集数为从n个元素中取 k 个的组合数 C_n^k, 另外 $\varnothing \subseteq A$，所以P(A)的元素总数为

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k,$$

又

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} C_n^k,$$

令 $x=y=1$, 可得 $2^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

有限幂集的编码

- **方法:** 设$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a_i对应于n位二进制数b的第i个位置。定义二进制数 b 所对应 A的子集B：与b中的1对应的A中元素组成的集合。
- **特点:**B与n位二进制数b一一对应，有多少个不同n位二进制就有多少个不同的子集。

例如：$A=\{a,b,c\}$,

$P(A)=\{A_i \mid i\in J\}$，$J=\{i \mid i$是3位二进制数且$000\le i\le 111\}$

例如 $A_3=A_{011}=\{b,c\}$, $A_6=A_{110}=\{a,b\}$等。

一般地 $P(A)=\{A_0, A_1, \cdots A_{2^n-1}\}$

集族(set family)

- **集族**: 由集合构成的集合. 幂集都是集族.
- **指标集**(index set): 设A是集族, 若

  $A=\{A_\alpha|\alpha\in S\}$, 则$S$称为$A$的指标集. S中的元素与A中的集合是一一对应的. 也记作

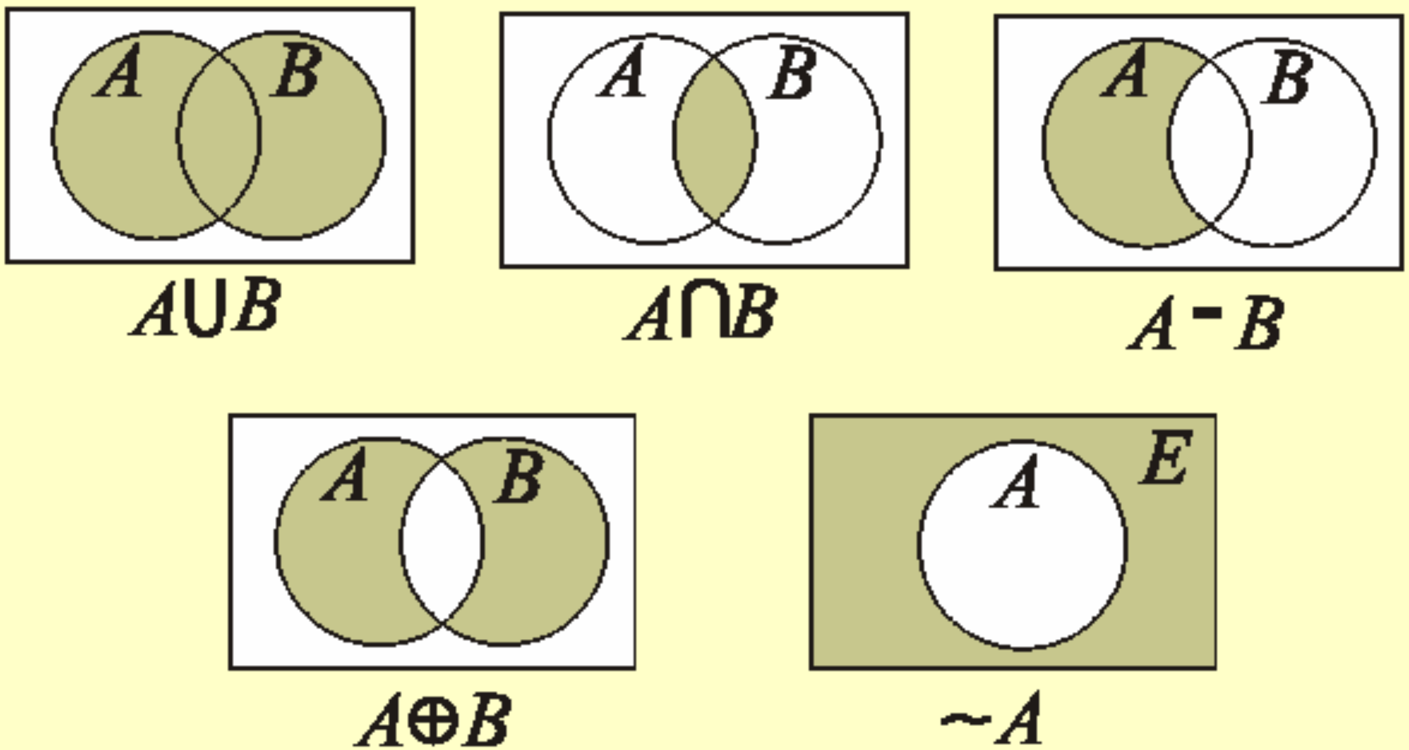
  $A=\{A_\alpha|\alpha\in S\}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$
- **如**:$A=\{a,b\}$，$P(A)=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$的指标集$S=\{0,1,2,3\}$

  $A_n=\{x\in N|x=n\}$, $A_0=\{0\}$, $A_1=\{1\}$, …

  $A=\{A_n|n\in N\}=\{\{0\},\{1\},\{2\},\ldots\}$, A的指标集是N。

文氏图 (Venn diagram)

文氏图(Venn Diagram)以英国数学家 John Venn命名.



并集(union)

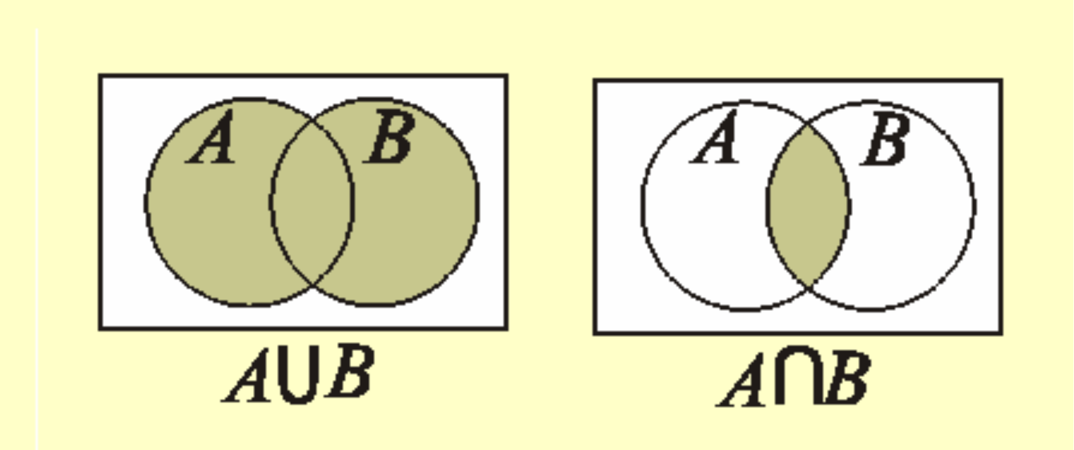
- **并集:** $A \cup B = \{\, x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \,\}$

  $$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

  $$\forall x(x \in A \cup B \leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \Leftrightarrow 1$$

- **交集:** $A \cap B = \{\, x \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \,\}$

  $$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$



不相交(disjoint)

- **不相交**: $A \cap B = \varnothing$.
- **互不相交**: 设$A_1, A_2, \ldots$是可数多个集合, 若对于任意的$i \neq j$, 都有$A_i \cap A_j = \varnothing$, 则说它们互不相交.
- **例**: 设$A_n = \{x \in R \mid n-1 < x < n\}$, $n = 1, 2, \ldots, 10$, 则$A_1, A_2, \ldots$是不相交的.即

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{10} = \varnothing$$

例1 求下列集合的并集和交集

例1 令$A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{0,3,6\}$,求

a) $A\cup B$; b)$A\cap B$

解： $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$A\cap B=\{3\}$

问题：

1）$A\neq E$, 如果$A\cup B=A\cup C$，那么$B=C$.成立么？

2）$A\neq\varnothing$,如果$A\cap B=A\cap C$，那么$B=C$.成立么？

广义并

- **初级并(广义并):包含那些至少是这组集合中一个集合成员的元素的集合**

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid \exists i(1 \le i \le n \wedge x \in A_i)\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

广义交

- **初级交(广义交):**

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \left\{ x \mid \forall i (1 \le i \le n \to x \in A_i) \right\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

例2 求集合族的广义并和广义交

例2: 设$A_n=\{x\in R|n-1\le x\le n\},n=1,2,\ldots,10,$

$B_n=\{x\in R|0\le x\le n\},n=1,2,\ldots,$

求 $\bigcup_{i}^{10} A_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$

则

$$\bigcup_{i=1}^{10} A_i=\{x\in R\,|\,0\le x\le 10\}=[0,10]$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i=\{x|x\in R\wedge 0\le x\le 1\}$$

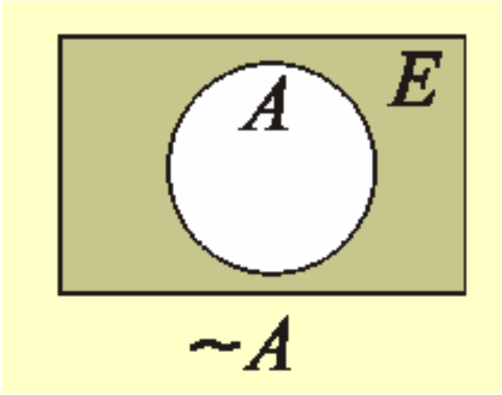
绝对补与相对补集

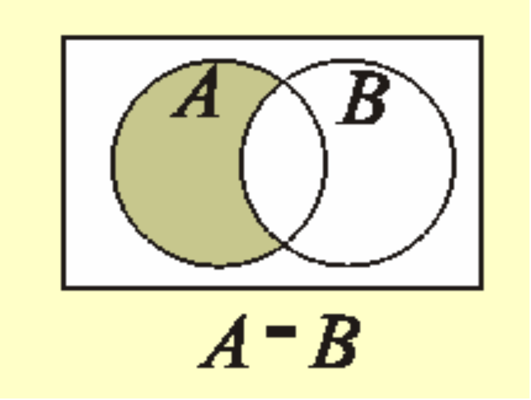
- **相对补集(set difference)：属于A而不属于B的全体元素, 称为B对A的补集, 记作A-B,称为A和B的差.**

$$A-B = \{ x \mid (x\in A) \wedge (x\notin B) \}=A\cap\sim B$$

- **绝对补(complement)：令E是全集, $\sim A=E-A$, 称为集合A的补集.**

$$\sim A=\{ x \mid (x\in E \wedge x\notin A)\}$$





例3 求下列集合的~A和A-B

例3 令$A=\{x|x\in N\wedge x\geq 9\}$,$B=\{x|x\in N\wedge x\geq 20\}$,全集$E=N$,

求$\sim A$和$A-B$

解 $\sim A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,9\}$

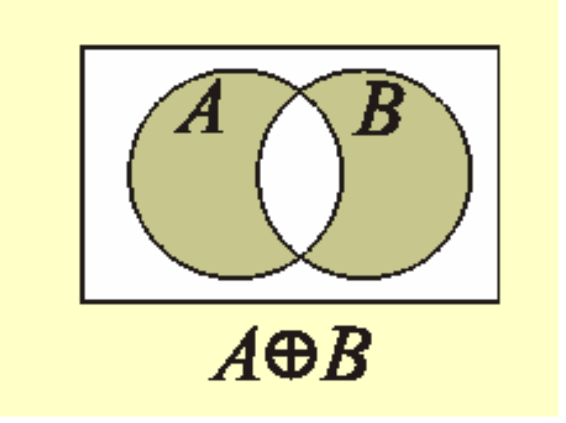
$A-B=\{x|x\in N\wedge 9\leq x<20\}$

对称差(symmetric difference)

- **对称差:** 属于A而不属于B, 或属于B而不属于A的全体元素, 称为A与B的对称差,记作$A\oplus B$。

$$A\oplus B=\{x|(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)\}$$

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$



例4 求下面两个集合的∪,∩,⊕,-

$A=\{x\in R|0\le x<2\}$, $B=\{x\in R|1\le x<3\}$

解：$A\cup B=\{x\in R|0\le x<3\}$,

$A\cap B=\{x\in R|1\le x<2\}$,

$A\oplus B=\{x\in R|(0\le x<1)\vee(2\le x<3)\}=[0,1)\cup[2,3)$

$A-B=\{x\in R|0\le x<1\}=[0,1)$

$B-A=\{x\in R|2\le x<3\}=[2,3)$

集合运算（应用举例）

F:一年级大学生的集合　　S：二年级大学生的集合

R：计算机系　　M：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合　L：爱好文学学生的集合

P：爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

$T \subseteq (M \cup R) \cap S$

$R \cap S \subseteq T$

$(M \cap F) \cap T = \varnothing$

$M \subseteq L \cup P$

$P \subseteq F \cup S$

$S - (M \cup R) \subseteq P$

容斥原理

设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_n$ 是 n 种性质, A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，i=1, 2, …, n. 则 S 中具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_n$的元素个数为

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

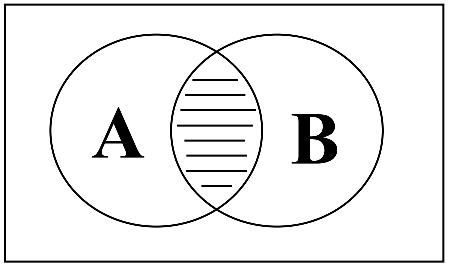
容斥原理

当n=2和3时，容斥原理分别表示为

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

容斥原理(证明)

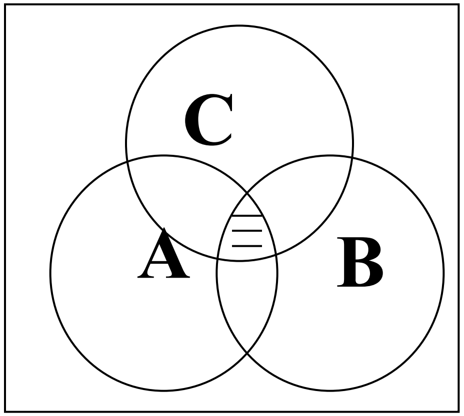


- n=2时的情况:

  $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

- 归纳证明: 以n=3为例:

  $$|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|$$



$$= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|$$

$$= |A|+|B|-|A\cap B|+|C|$$

$$-(|A\cap C|+|B\cap C|-|(A\cap C)\cap(B\cap C)|)$$

$$= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$$

$$+|A\cap B\cap C|$$

容斥原理（续）

推论 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_n$的元素个数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| \\
&= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\quad + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

例5

- **例5:** 在1到10000之间既不是某个整数的平方, 也不是某个整数的立方的数有多少?
- **解:** 设$S=\{x\in N|1\le x\le 10000\}$, $|S|=10000$

  $A=\{x\in E|x=k^2\wedge k\in Z\}$, $|A|=100$

  $B=\{x\in E|x=k^3\wedge k\in Z\}$, $|B|=21$

  $A\cap B=\{x\in E|x=k^6\wedge k\in Z\}$, $|A\cap B|=4$.

  则$|\sim(A\cup B)|=|E|-|A\cup B|$

  $=|E|-(|A|+|B|-|A\cap B|)$

  $=10000-100-21+4=9883$

例6

例6 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？

解： $S=\{\,x \mid x\in Z,\ 1\le x\le 1000\,\}$， $|S|=1000$

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C：

$A=\{\,x \mid x\in S,\ 5|x\,\}, |A|=\lfloor 1000/5\rfloor=200,$

$B=\{\,x \mid x\in S,\ 6|x\,\}, |B|=\lfloor 1000/6\rfloor=133$

$C=\{\,x \mid x\in S,\ 8|x\,\}, |C|=\lfloor 1000/8\rfloor=125$

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30\rfloor=33,\quad |A\cap C|=\lfloor 1000/40\rfloor=25,$

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24\rfloor=41,\ |A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/120\rfloor=8$

$|\sim A\cap\sim B\cap\sim C|=1000-(200+133+125)+(33+25+41)-8=600$

例7 解1

例7 有24名科技人员，每人至少会1门外语，英语13人，日语5人，德语10人，法语9人，英日2人，英德4人；英法4人，法德4人，会日语的不会法语、德语，

求：只会 1 种语言的人数，会 3 种语言的人数.

解： 设会三种语言的有x，只会英语的有y_1，只会德语有y_2，只会法语的有y_3，绘出文氏图。

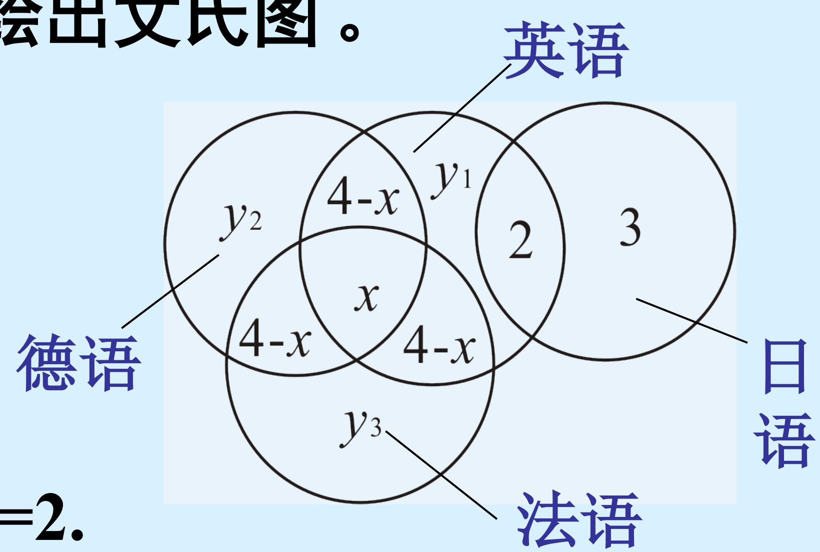
$x+2(4-x)+y_1+2=13$

$x+2(4-x)+y_2=10$

$x+2(4-x)+y_3=9$

$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$

解得 $x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$.



例7 解2

- 例7 有24名科技人员，每人至少会1门外语，英语13人, 日语5人, 德语10人, 法语9人, 英日2人, 英德4人； 英法4人，法德4人，会日语的不会法语、德语，求：只会 1 种语言的人数，会 3 种语言的人数.

解 设A,B,C,D分别为会说英、日、德、法语人的集合.由已知条件可知：

$|A|=13,|B|=5,|C|=10,|D|=9,|A\cap B|=2, |A\cap C|=4,$

$|A\cap D|= 4,|C\cap D|= 4, |B\cap C|= |B\cap D|=0,| |A\cup B \cup C \cup D|=24$

显然$|A \cap B\cap C|= |B\cap C\cap D|= |A\cap B\cap D|= |A\cap B\cap C \cap D|=0$

代入容斥原理，得$24=(13+5+10+9)-(2+4+4+4)-|A \cap C \cap D|$,

因此$|A \cap C \cap D|=1$，从而会 3 种语言的人数为1.

设只会说英、日、德、法语人数分别为x_1,x_2,x_3,x_4.

$x_1=|A|-|A\cap(B\cup C\cup D)|=13-|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)|$

而$|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)|=|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|$

$-(|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|)-|A\cap B\cap C\cap D|$

$=2+4+4-(0+0+1)-0$

$=9$

从而$x_1=13-9=4$

同理可求x_2,x_3,x_4.

容斥原理的应用--埃拉托色尼筛

- 用容斥原理可以找出不超过一个给定正整数的素数的个数
- 用到的公理：一个合数可以被一个不超过它的平方根的素数整除。
- 方法：比如，找出大于1不超过100的素数的个数

1.不超过100的合数一定有一个不超过10的素因

2.小于10的素数只有2，3，5，7

3.大于1不超过100的素数就是这4个数和大于1不超过100且不被2，3，5，7整除的正整数。

求不超过100的素数的个数

解 设$A_1=\{x \in Z+ | x$能被2整除$\}$,

$A_2=\{x \in Z+ | x$能被3整除$\}$,$A_3=\{x \in Z+ | x$能被5整除$\}$

$A_4=\{x \in Z+ | x$能被7整除$\}$,则

$|A_1|=\lfloor 100/2 \rfloor=50$, $|A_2|=\lfloor 100/3 \rfloor=33$, $|A_3|=\lfloor 100/5 \rfloor=20$,

$|A_4|=\lfloor 100/7 \rfloor=14$, $|A_1 \cap A_2|=\lfloor 100/6 \rfloor=16$,

$|A_1 \cap A_3|=\lfloor 100/10 \rfloor=10$, $|A_1 \cap A_4|=\lfloor 100/14 \rfloor=7$,

$|A_2 \cap A_3|=\lfloor 100/15 \rfloor=6$, $|A_2 \cap A_4|=\lfloor 100/21 \rfloor=4$,

$|A_3 \cap A_4|=\lfloor 100/35 \rfloor=2$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=\lfloor 100/30 \rfloor=3$,

求不超过100的素数的个数(续)

$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \lfloor 100/42 \rfloor = 2$, $|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \lfloor 100/70 \rfloor = 1$,

$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \lfloor 100/105 \rfloor = 0$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$,所以

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4|)$

$= 50+33+20+14-(16+10+7+6+4+2)+(3+2+1) = 78$

所有素数的个数为$4+(99-78)=25$

容斥原理的应用2-错位排序

- 求排列n个物品并使得没有一个物品在它的初始位置上的方式数；
- 比如，帽子认领问题：

  在一个餐厅里，一个新来的雇员寄存n个人的帽子时忘记把寄存号放到帽子上，当顾客取回他的帽子时，这个雇员从剩下的帽子中随机选择发给他们。问没有一个人收到自己的帽子的概率是多少？

答案：重新排列帽子使得没有帽子在它的初始位置上的方式数除以n个帽子的排列数$n!$.

总结

- **集合概念:** $\in$, $\varnothing$, E, $\subseteq$, $\subset$,
- **集合运算:** $\cap$, $\cup$, -, $\oplus$, ~, P(A)
- **文氏图**
- **容斥原理**
- $\cap$, $\cup$, -, $\oplus$, ~, **P(A)的谓词逻辑表达式**
- **运算**$\cap$, $\cup$, -, $\oplus$, ~, **P(A)的性质**
- **作业：3,6,8,10,16,18,31**

练习题

1.对于任意集合A,B,C,若A $\in$B,且B $\in$C,则A $\in$C.这个论述成立吗？为什么？

2.求集合A= $\varnothing$,B=$\{\varnothing\}$,C=$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$的幂集.

3.P20. 第9题