第16章 代数系统

中国海洋大学 计算机系

习题十六: Exercises 2.

证 对于a 存在$u_0, v_0 \in S$,使得

$$a*u_0=v_0*a=a.$$

下面证明u_0为右单位元, v_0为左单位元.

任取$x \in S, \exists u,v \in S$,使得

$$a*u=v*a=x$$

因此 $x*u_0=(v*a)*u_0=v*(a*u_0)=v*a=x;$

$$v_0*x=v_0*(a*u)=(v_0*a)*u=a*u=x;$$

由定理可得$u_0= v_0$=e是V中的唯一单位元.

Exercises3

证 (1) 显然运算o在S上是封闭的.

$\forall x,y,z\in S$，有$(x \circ y) \circ z=x\circ z=x$, $x\circ(y\circ z)=x$

所以$(x \circ y) \circ z=x\circ(y\circ z)$,满足结合律

(2) 取$e\notin S$, 令$A=S\cup\{e\}$,定A上的运算*:

$\forall\ x,y\in S$, $x*y= x\circ y=x$,

$e\circ e=e$, $x\circ e=e\circ x=x$

<A, *>是独异点.

Exercises 4

证明 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$= a \circ (c \circ b)$

$= (a \circ c) \circ b$

$= (c \circ a) \circ b$

$= c \circ (a \circ b)$

因此$a \circ b$与c可交换.

Exercises 5.

证 (1) $a*b=a*(a*a)=(a*a)*a=b*a$

(2) 假设$b*b=a$,若$a*b=a$,则

$$(a*b)*b=a*b=a,\ a*(b*b)=a*a=b$$

与结合律矛盾.

若$a*b=b$,则

$$(a*a)*b=b*b=a,\ a*(a*b)=a*b=b$$

与结合律矛盾.

因此$b*b=b$.

Exercises 7

设V=<S,*>是可交换半群，若$a,b\in$ S是V中的幂等元，证明$a*b$也是V中的幂等元.

证明 $(a*b)*(a*b)=a*(b*a)*b=a*(a*b)*b$

$=(a*a)*(b*b)=a*b$

所以$a*b$为幂等元.

Exercises 10

10. $V=\langle Z_4, \otimes \rangle$,其中$\otimes$表示模4乘法.找出V的所有子半群.并说明哪些子半群是V的子独异点.

解 V的所有子半群:

$\langle 0\rangle=\{0\}$; $\langle 1\rangle=\{1\}$; $\langle 2\rangle=\{0,2\}$; $\langle 3\rangle=\{1,3\}$;

$\langle\langle 0\rangle\cup\langle 1\rangle\rangle=\{0,1\}$; $\langle\langle 0\rangle\cup\langle 3\rangle\rangle=\{0,1,3\}$

$\langle\langle 1\rangle\cup\langle 2\rangle\rangle=\{0,1,2\}$; $\langle\langle 2\rangle\cup\langle 3\rangle\rangle=V$

所以V的所有子半群有:

$\{0\},\{1\},\{0,2\},\{1,3\},\{0,1\},\{0,1,3\},\{0,1,2\},V$.

其中 $\{1\},\{0,1\},\{1,3\},\{0,1,2\},\{0,1,3\},V$是子独异点.

Exercises 11

V=<A,*>是半群,其中A={a,b,c,d},*运算由运算表16.4给定,~为A上的同余关系,且同余类是[a]=[c],[b]=[d].试给出商代数V/~的运算表.

解　由同余类是[a]=[c],[b]=[d],可得

[a]=[c]={a,c},[b]=[d]={b,d}

$\forall [x],[y]\in A/\sim, [x]\bullet[y]=[x*y]$

运算表如下：

$\bullet$	$[a]$	$[b]$
$[a]$	$[a]$	$[b]$
$[b]$	$[b]$	$[a]$

Exercises 12

证明：(1) 先证R是等价关系。

$\forall x\in S$, $x=x\Leftrightarrow xRx$,所以R是自反关系

$xRy \Leftrightarrow (x=y)\vee(x\in I\wedge y\in I) \Leftrightarrow yRx$, 所以$R$是对称的

$xRy\wedge yRz \Leftrightarrow ((x=y)\vee(x\in I\wedge y\in I))\wedge((y=z)\vee(y\in I\wedge z\in I))$

$\Leftrightarrow((x=y)\wedge(y=z))\vee(x\in I\wedge y\in I\wedge z\in I)\vee((x=y)\wedge(y\in I\wedge z\in I))$

$\vee((y=z)\wedge(x\in I\wedge y\in I))$

$\Leftrightarrow(x=z)\vee(x\in I\wedge y\in I\wedge z\in I)$

所以xRz, R满足传递性。

再证R具有置换性.

任取xRy, uRv, 考察$x \circ u$和$y \circ v$:

1) 当$x=y$, $u=v$时, $x \circ u = y \circ v$,有$(x \circ u)R(y \circ v)$

2) 当$x \in I, y \in I, u=v$时, $x \circ u \in IS$且$y \circ v \in IS$,则$x \circ u \in I$, $y \circ v \in I$,

所以$(x \circ u)R(y \circ v)$

3) 当$x \in I, y \in I, u=v$时, $x \circ u \in IS$且$y \circ v \in IS$,则$x \circ u \in I$, $y \circ v \in I$,

所以$(x \circ u)R(y \circ v)$

4) 当$x=y$, $u \in I, v \in I$, $x \circ u \in SI$且$y \circ v \in SI$,则$x \circ u \in I$, $y \circ v \in I$,

所以$(x \circ u)R(y \circ v)$

因此R具有置换性.

综上所述R是V上的同余关系.

(2) 先求同余类.

$[x]=\{y|y\in S,xRy\}=\{y|y\in S,(x=y)\vee(x\in I\wedge y\in I)\}$

当$x\in I$时，$[x]=I$

当$x\notin I$时，$[x]=\{x\}$

$\bar{\circ}$的运算如下：

$[x]\ \bar{\circ}[y]=[x\circ y]$,

当$x\in I$时，$y\in S$,有$x\circ y\in IS$,即$x\circ y\in \mathrm{I}$.即$[x]\ \bar{\circ}[y]=[x\circ y]=\mathrm{I}$

当$x\notin I$，$y\in I$时,有$x\circ y\in SI$,即$x\circ y\in \mathrm{I}$.即$[x]\ \bar{\circ}[y]=[x\circ y]=\mathrm{I}$

当$x\notin I$，$y\notin I$时, $[x]\ \bar{\circ}[y]=[x\circ y]=\{x\circ y\}$

因此，$\mathrm{I}\bar{\circ}\mathrm{I}=\mathrm{I}$, $\{x\}\bar{\circ}\mathrm{I}=\mathrm{I}$, $\mathrm{I}\bar{\circ}\{x\}=\mathrm{I}$, $[x]\ \bar{\circ}[y]=\{x\}\ \bar{\circ}\{y\}=\{x\circ y\}$,

其中$x,y\in \mathrm{S}\text{-}\mathrm{I}$