证明: 令 $f: A\times B\to AB$，$\forall\langle a,b\rangle\in A\times B$，$f(\langle a,b\rangle)=ab$。

f 显然是满射。从而 $\{f^{-1}[g]\mid g\in AB\}$ 是 $A\times B$ 的一个划分，其中 $f^{-1}[g]=\{\langle a,b\rangle\mid\langle a,b\rangle\in A\times B\wedge f(\langle a,b\rangle)=g\}$ 是 $\{g\}$ 的原象。从而有：

$$\begin{aligned}|A\times B|&=|\bigcup_{g\in AB}f^{-1}[g]|\\&=\sum_{g\in AB}|f^{-1}[g]|\end{aligned}$$

下面证明对任意 $g\in AB$，有 $|f^{-1}[g]|=|A\cap B|$。

由定义，对任意 $g\in AB$，存在 $a\in A,b\in B$，使得 $g=ab$。取 $S_g=\{\langle ac,c^{-1}b\rangle\mid c\in A\cap B\}$。易见，对 S_g 中的所有元素 $\langle ac,c^{-1}b\rangle$，有 $\langle ac,c^{-1}b\rangle\in A\times B$ 和 $f(\langle ac,c^{-1}b\rangle)=g$，从而有 $S_g\subseteq f^{-1}[g]$。反之，对任意 $\langle x,y\rangle\in f^{-1}[g]$，有：

$$\begin{aligned}&xy=ab &&(xy=g=ab)\\\Longrightarrow\ &x=aby^{-1}&&(\text{两边右乘 } y^{-1})\\\Longrightarrow\ &xa^{-1}=by^{-1}&&(\text{两边右乘 } a^{-1})\end{aligned}$$

令 $c=by^{-1}$，由 $b\in B,y\in B$ 知，$c\in B$。又因为 $c=by^{-1}=xa^{-1}\in A$，所以有 $c\in A\cap B$。从而 $\langle x,y\rangle=\langle ac,c^{-1}b\rangle\in S_g$。这就证明了 $f^{-1}[g]=S_g$。又由消去律知，$\forall c\in A\cap B$，$ac=ac'\Leftrightarrow c=c'$。从而 $|f^{-1}[g]|=|S_g|=|A\cap B|$。

这就是说，$|A||B|=|A\times B|=\sum\limits_{g\in AB}|f^{-1}[g]|=\sum\limits_{g\in AB}|A\cap B|=|AB||A\cap B|$。 □

(2)

证明: 由题设和习题 17.30 结论知，$A\cap B=\{e\}$。再由第 (1) 小题知，$|AB|=|AB||A\cap B|=|A||B|$。 □

17.34 首先证明以下引理：

引理 17.3 *设 $\sigma=(i_1i_2\cdots i_k)$ 为集合 A 上的任意 k 阶轮换，τ 是 A 上的任意置换，则 $\tau\sigma\tau^{-1}=(\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_k))$ 也是 A 上的一个 k 阶轮换。*

证明: 对任意 $x\in A$，分两种情况讨论：

情况一：若存在 $i_j\in\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，使得 $x=\tau(i_j)$，即 $i_j=\tau^{-1}(i_j)$，则：

$$\begin{aligned}\tau\sigma\tau^{-1}(x)&=\tau\sigma(i_j)&&(i_j=\tau^{-1}(i_j))\\&=\begin{cases}\tau(i_{j+1}), & j<k\\ \tau(i_1), & j=k\end{cases}&&(\sigma=(i_1i_2\cdots i_k))\\&=(\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_k))(x)&&(\text{轮换定义})\end{aligned}$$

情况二：若不存在 $i_j\in\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，使得 $x=\tau(i_j)$，即 $\tau^{-1}(x)\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，从而由轮换定义知，$\sigma(\tau^{-1}(x))=\tau^{-1}(x)$。因此有：

$$\begin{aligned}\tau\sigma\tau^{-1}(x)&=\tau(\tau^{-1}(x))&&(\sigma(\tau^{-1})=\tau^{-1})\\&=x&&(\tau\tau^{-1}=(1))\\&=(\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_k))(x)&&(\text{轮换定义})\end{aligned}$$

□

再证原题：

证明: 只需证明：对任意置换 $\sigma,\tau\in S_n$，$\tau\sigma\tau^{-1}$ 与 σ 具有相同的轮换指数。

设 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$ 是 σ 是不相交轮换的分解式。令 $\sigma_i'=\tau\sigma_i\tau^{-1},i=1,2,\cdots,t$。由引理 17.3 知，对所有 $1\leq i\leq t$，σ_i' 也是一个轮换，且长度与 σ_i 相同。同时，对任何两个