3. 等价。

证明: 将一个人抽象为一个顶点，在能直接对话的人所对应的顶点间添加边。则题中两个条件的等价性可以描述成：一个有限阶无向简单图 G 是连通的当且仅当对 $V(G)$ 的任意二阶划分 $\{V_1, V_2\}$，存在 $u \in V_1, v \in V_2$ 使得 $(u, v) \in E(G)$。

下面证明这一命题。

必要性。若不然，则存在划分 $\{V_1, V_2\}$，使 V_1, V_2 之间无边。从而不存在 V_1 中顶点到 V_2 中顶点的通路。这与 G 的连通性矛盾。

充分性。对任意顶点 $v \in V(G)$，令 $N_G^{(k)}(v)$ 为与 v 的距离小于等于 k 的顶点的集合，$N_G^{(0)}(v) = \{v\}$。对任意 $k \in \mathbb{N}$，显然有 $v \in N_G^{(k)}(v)$，从而 $N_G^{(k)}(v)$ 非空。若 $N_G^{(k)}(v) \neq V(G)$，则 $\{N_G^{(k)}(v), V(G) - N_G^{(k)}(v)\}$ 是 $V(G)$ 的一个划分，从而由条件二可知，存在 $N_G^{(k)}(v)$ 到 $V(G) - N^{(k)}$ 的边，而 $V(G) - N^{(k)}$ 中与这些边关联的顶点将属于 $N_G^{(k+1)}(v)$。从而 $N_G^{(0)}(v) \subset N_G^{(1)}(v) \subset \cdots \subset N_G^{(k)}(v) \subset N_G^{(k+1)}(v) \subset \cdots \subseteq G$。由于 G 是有限图，所以一过程必将在有限步后结束(事实上，当 $N_G^{(k)}(v) \neq V(G)$ 时，$N_G^{(k+1)}(v)$ 至少比 $N_G^{(k)}(v)$ 多一个顶点，从而 $|N_G^{(k)}(v)| \geq k$，当 $k \geq n$ 时，必有 $N_G^{(k)}(v) = V(G)$)。这就是说，v 与 G 中的每一个顶点之间都有通路。由 v 的任意性知，G 是连通图。 □

4. 不存在。

证明: 反设存在这样的 5 个国家。考虑地图的对偶图 G^*。由于地图是平面图，所以地图的对偶图也是平面图。又由于每个国家都是一块连通的区域，所以每个国家在对偶图中恰好对应一个顶点。若任何两个国家都相邻，则这 5 个国家在对偶图中所对应的顶点将构成 K_5，从而有 $K_5 \subseteq G^*$，G^* 不是平面图。矛盾。 □

5. 不可能。

证明: 以这 $3 \times 3 \times 3$ 个小块为顶点集 $V(G)$，在两个顶点间添加边当且仅当它们所对就的小块有公共的侧面。若在老鼠起点所在的角和立方体的中心之间再添一条边，则题目的问题等价于：G 中是否存在 27 阶圈(哈密顿回路)?

注意到，若令 V_1 为大立方体的 8 个角对应的顶点和大立方体 6 个侧面中央的 6 个小立方体所对应的顶点。令 V_2 为 G 中其余的顶点(即，12 个侧棱中段所对应的顶点和大立方体中心所对应的顶点)，则 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 是一个二部图。而二部图中无奇圈，从而不可能存在 27 阶的圈。□

6.

(1) 由于整数集对加、减、乘法封闭，所以对 $*$ 运算也封闭。从而 $\langle A, * \rangle$ 是代数系统。对任意 $x, y, z \in A$：

由于 $x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x$，所以运算满足交换律。

由于 $(x * y) * z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz = x * (y * z)$，所以运算满足结合律。

由于 $x * x = x + x - x^2$，当 $x \neq 0, 1$ 时，$x * x \neq x$，所以运算不满足幂等律。

由于 $x * 0 = 0 * x = x$，因此有运算有单位元 $0 \in \mathbb{Z}$。

由 $x * y = x + y - xy = 0$ 解得：当 $x = 1$ 时，等式无解。当 $x \neq 1$ 时，$y = \dfrac{x}{x-1}$。因此，仅当 $x = 0, 2$ 时，有 $y = x^{-1} \in \mathbb{Z}$。此时 y 分别为 0 和 2。因此，仅 $0, 2$ 为可逆元，它们的逆元即是它们自身。

(2) 由于实数集对减法和绝对值运算封闭，所以对 $*$ 运算也封闭。从而 $\langle A, * \rangle$ 是代数系统。对任意 $x, y, z \in A$：

由于 $x * y = |x - y| = |y - x| = y * x$，所以运算满足交换律。

令 $x = 2, y = z = 1$，则 $(x * y) * z = ||x - y| - z| = 0 \neq 2 = |x - |y - z|| = x * (y * z)$，所以