第四章　自然数

定理 4.1 $\mathbb{N}$ 是归纳集.

定理 4.2 设 $\mathbb{N}$ 为自然数的集合，$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且 $\sigma(n) = n^+$ (称 σ 为后继函数)，则 $\langle \mathbb{N}, \sigma, \varnothing \rangle$ 是 Peano 系统.

定理 4.3 任意自然数的元素都是它的子集.

定理 4.4 对于任意的自然数 m, n，则 $m^+ \in n^+$ 当且仅当 $m \in n$.

定理 4.5 任何自然数都不是自己的元素.

定理 4.6 空集属于除零外的一切自然数.

定理 4.7 (三歧性定理) 对于任意的自然数 m, n，下面三式中有且仅有一式成立:

$$m \in n, m = n, n \in m.$$

定理 4.8 ($\mathbb{N}$ 上的递归定理) 设 A 为一个集合，且 $a \in A$，$F : A \to A$，则存在惟一的一个函数 $h : \mathbb{N} \to A$，使得 $h(0) = a$，且对于任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$h(n^+) = F(h(n)).$$

定理 4.9 设 $\langle M, F, e \rangle$ 为任意一个 Peano 系统，则 $\langle \mathbb{N}, \sigma, 0 \rangle \sim \langle M, F, e \rangle$.

定理 4.10 设 A 为一个集合，则下面的命题是等价的:

(1) A 是传递集;

(2) $\cup A \subseteq A$;

(3) 对于任意的 $y \in A$，则 $y \subseteq A$;

(4) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

定理 4.11 设 A 为一个集合，则 A 为传递集当且仅当 $\mathcal{P}(A)$ 为传递集.

定理 4.12 设 A 是传递集，则 $\cup(A^+) = A$.

定理 4.13 每个自然数都是传递集.

定理 4.14 自然数集合 $\mathbb{N}$ 是传递集.

定理 4.15 设 $m, n \in \mathbb{N}$，则

$$m + 0 = m, \qquad \text{(加法规则 1)}$$
$$m + n^+ = (m + n)^+. \qquad \text{(加法规则 2)}$$

定理 4.16 设 $m, n \in \mathbb{N}$，则

$$m \cdot 0 = 0, \qquad \text{(乘法规则 1)}$$
$$m \cdot n^+ = m \cdot n + m. \qquad \text{(乘法规则 2)}$$

定理 4.17 对于任意的自然数 m, n，则

$$m^0 = 1, \qquad \text{(指数运算规则 1)}$$
$$m^{n^+} = m^n \cdot m. \qquad \text{(指数运算规则 2)}$$