第四章　自然数

4.1

(1)　满足归纳集定义，是归纳集。

(2)　$\varnothing$ 不在集合中，此集不是归纳集。

(3)　集合中最后一个元素 $\varnothing^{++++++++}$ 的后继不在集合中，此集不是归纳集。

(4)　若 $a = \varnothing$，则是归纳集。否则，$\varnothing$ 不在集合中，此集不是归纳集。

4.2

(1)　$2 \cup 3 = 3$;

(2)　$2 \cap 3 = 2$;

(3)　$\cup 5 = 4$;

(4)　$\cap 6 = 0$;

(5)　$\cup \cup 7 = 5$;

4.3

证明: 用数学归纳法证明。

设 $S' = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0 \wedge \exists m(m \in \mathbb{N} \wedge n = m^+)\}$，再设 $S = S' \cup \{0\}$。下面证明 S 是 $\mathbb{N}$ 的归纳子集。

(1)　由 S 的定义有：$\varnothing = 0 \in S$。

(2)　假设 $n \in S$ (从而由 S 定义有 $n \in \mathbb{N}$)，则由 $\mathbb{N}$ 的定义知，$n^+ \in \mathbb{N}$，又由 $n \in n \cup \{n\} = n^+$ 知，$n^+ \neq 0$。最后由 n^+ 是 n 的后继知，$\exists m(m \in \mathbb{N} \wedge n = m^+)$。因此有 $n^+ \in S' \subseteq S$。

于是，S 是 $\mathbb{N}$ 的归纳子集，因而 $S = \mathbb{N}$。而 $S' = S - \{0\}$，故有，任意非 0 自然数都是某个自然数的后继。 □

4.4

证明: 用数学归纳法证明。

设 $S = \{n \mid \forall m \in \mathbb{N}(m \in m + n^+)\}$。

(1)　$0 \in S$。这是因为：$\forall m \in \mathbb{N}, m \in m \cup \{m\} = m^+ = (m+0)^+ = m + 0^+$。

(2)　设 $n \in S$，则 $\forall m \in \mathbb{N}, m \in m + n^+ \subseteq (m + n^+) \cup \{(m + n^+)\} = (m + n^+)^+ = (A_m(n^+))^+ = A_m(n^{++}) = m + (n^+)^+$。即有，$n^+ \in S$。所以，$S = \mathbb{N}$。 □

4.5

证明: 若 A 为传递集，则：

$\forall x$，

$x \in A^+$

$\Longleftrightarrow x \in A \cup \{A\}$ (后继函数定义)