证明： 由定义知，$0 \preccurlyeq a$，又由教材定理 19.1(2) 知，$a \preccurlyeq a \vee b = 0$。从而有 $a = 0$。同理可证 $b = 0$。 □

(2)

证明： 由定义知，$a \preccurlyeq 1$，又由教材定理 19.1(1) 知，$1 = a \wedge b \preccurlyeq a$。从而有 $a = 1$。同理可证 $b = 1$。 □

19.16

(1)

证明： 反设 L 中存在以自身为补元的元素 a。则对任意 $x \in L$，有 $x \preccurlyeq 1 = a \vee a = a$ 和 $a = a \wedge a = 0 \preccurlyeq x$，从而有 $x = a$。由 x 的任意性知，$L = \{a\}$，$|L| = 1$，矛盾。 □

(2)

证明： 由于 $|L| \geq 3$，所以存在 $a \in T$，满足 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$。反设 a 有补元 b，则有 $a \vee b = 1$。由于 L 是链，所以 $a \preccurlyeq b$ 和 $b \preccurlyeq a$ 中至少有一式成立。若 $b \preccurlyeq a$，则由教材定理 19.2 有 $a = a \vee b = 1$，与 $a \neq 1$ 矛盾，因此只能有 $a \preccurlyeq b$。然而，若 $a \preccurlyeq b$，则 $a \wedge b = a \neq 0$，这与 b 是 a 的补元矛盾。所以 $a \in L$ 不存在补元，从而 L 不是有补格。 □

19.17

证明： 由定义，对任意 $a, b \in L_1$，有 $\bar{a}, \bar{b} \in L$，从而 $\bar{a} \wedge \bar{b}, \bar{a} \vee \bar{b} \in L$。而

$$
\begin{aligned}
(a \vee b) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b}) &= (a \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b})) \vee (b \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b})) && \text{(分配律)}\\
&= ((a \wedge \bar{a}) \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge (\bar{b} \wedge \bar{a})) && \text{(交换律)}\\
&= ((a \wedge \bar{a}) \wedge \bar{b}) \vee ((b \wedge \bar{b}) \wedge \bar{a}) && \text{(结合律)}\\
&= (0 \wedge \bar{b}) \vee (0 \wedge \bar{a}) && (a \wedge \bar{a} = b \wedge \bar{b} = 0)\\
&= 0 \vee 0 && (0 \preccurlyeq \bar{a}\text{、}0 \preccurlyeq \bar{b}\text{、教材定理 19.2})\\
&= 0 && \text{(教材定理 19.3(3))}\\
(a \vee b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) &= ((a \vee b) \vee \bar{a}) \wedge ((a \vee b) \vee \bar{b}) && \text{(分配律)}\\
&= (\bar{a} \vee (a \vee b)) \wedge (a \vee (b \vee \bar{b})) && \text{(交换律)}\\
&= ((\bar{a} \vee a) \vee b) \wedge (a \vee (b \vee \bar{b})) && \text{(结合律)}\\
&= (1 \vee b) \vee (a \vee 1) && (\bar{a} \vee a = b \vee \bar{b} = 1)\\
&= 1 \vee 1 && (a, b \preccurlyeq 1\text{、教材定理 19.2})\\
&= 1 && \text{(教材定理 19.3(3))}
\end{aligned}
$$

因此 $a \vee b$ 有补元 $\bar{a} \wedge \bar{b} \in L$，从而 $a \vee b \in L_1$。同理可证 $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \in L$，从而 $a \wedge b \in L_1$。这就证明了 L_1 是子格。 □

19.18 共有如下 5 个 5 元格。