这就是说，对任意 $y \in Y$，有 $y = f(a \wedge y) \in f(X)$。因此，$f$ 是满射，从而是双射。

由上题结论可知，f 是 L 上的自同态，从而也是 $X, Y \subseteq L$ 上的同态。

这就证明了 f 是从 X 到 Y 的同构。

注意到，对任意 $x \in X$，有

$$
\begin{aligned}
g \circ f(x) &= g(f(x)) && \text{(函数合成运算定义)}\\
&= (x \vee b) \wedge a && \text{(f, g 定义)}\\
&= (x \wedge a) \vee (b \wedge a) && \text{(分配律)}\\
&= x \vee (b \wedge a) && \text{($x \preccurlyeq a$、教材定理 19.2)}\\
&= x && \text{($b \wedge a \preccurlyeq x$、教材定理 19.2)}
\end{aligned}
$$

这就是说，g 是 f 的左逆。由 f 是双射和教材定理 3.10(4) 可知，$g = f^{-1}$ 是 f 唯一的逆，从而是 Y 到 X 的同构(“同构映射的逆也是同构映射”这一结论的证明见习题 15.23 第 (2) 小题)。□

19.22

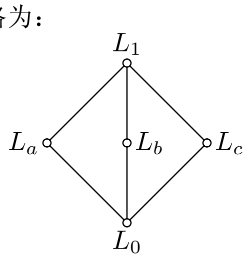
证明： 对任意 $f, g \in A, x, y \in L$，有

$$
\begin{aligned}
f \circ g(x \wedge y) &= f(g(x \wedge y)) && \text{(合成运算定义)}\\
&= f(g(x) \wedge g(y)) && \text{(g 是自同态)}\\
&= f(g(x)) \wedge f(g(y)) && \text{(f 是自同态)}\\
&= f \circ g(x) \wedge f \circ g(y) && \text{(合成运算定义)}\\
f \circ g(x \vee y) &= f(g(x \vee y)) && \text{(合成运算定义)}\\
&= f(g(x) \vee g(y)) && \text{(g 是自同态)}\\
&= f(g(x)) \vee f(g(y)) && \text{(f 是自同态)}\\
&= f \circ g(x) \vee f \circ g(y) && \text{(合成运算定义)}
\end{aligned}
$$

这就证明了，对任意 $f, g \in A$，有 $f \circ g \in A$。从而 $\circ$ 是 A 上的二元运算。

由于函数合成运算满足结合律，而恒等映射 $I_L \in A$ 是关于函数合成运算的单位元。因此，A 关于合成运算构成独异点。□

19.23 L 的理想有：$L_0 = \{0\}$，$L_a = \{0, a\}$，$L_b = \{0, b\}$，$L_c = \{0, c\}$，$L_1 = \{0, a, b, c, 1\}$。理想格为：



19.24

证明： 作 $\varphi : L \to I_0(L)$，$\forall x \in L$，$\varphi(x) = \{x \mid x \in L \text{ 且 } x \preccurlyeq a\}$。教材定理 19.12 已证明，$\varphi$ 是从 L 到 $I_0(L)$ 的单同态。现在只需证明 $\varphi(L) = I(L)$ 即可。

首先，对任何 $x \in L$，由 φ 定义和教材定理 19.12 有 $\varphi(x) \in I_0(L) = I(L) \cup \{\varnothing\}$，而 $x \in \varphi(x)$，从而 $x \neq \varnothing$。这就是说，$\varphi(x) \in I(L)$。由 x 的任意性知，$\varphi(L) \subseteq I(L)$。

由于 L 是有限格，所以对任意 $I \in I(L)$，$\vee I = \bigvee\limits_{x \in I} x$ 是存在的，记 $a = \vee I$。注意到，由理想对 $\vee$ 运算的封闭性有 $a \in I$。下面证明 $I = \varphi(a) \in \varphi(L)$。