$$
\begin{aligned}
& \langle x,y\rangle \in R\restriction B \wedge \langle y,x\rangle \in R\restriction B \\
\iff & \langle x,y\rangle \in R\cap B\times B \wedge \langle y,x\rangle \in R\cap B\times B && (R\restriction B\text{ 定义}) \\
\iff & \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in B\times B \wedge \langle y,x\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in B\times B && (\text{集合交定义}) \\
\iff & \langle x,y\rangle \in R \wedge x\in B \wedge y\in B \wedge \langle y,x\rangle \in R \wedge y\in B \wedge x\in B && (\text{卡氏积定义}) \\
\iff & \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R && (\text{命题逻辑化简律}) \\
\implies & x=y && (R\text{ 是反对称的})
\end{aligned}
$$

最后证：$R\restriction B$ 是传递的。(证明同 (1)，略)

综上所述，可知 $R\restriction B$ 是偏序关系。 □

(3)

证明: 由 (2) 知，$R\restriction B$ 是偏序关系。现只需证任意 $x,y\in B$ 在 $R\restriction B$ 下皆可比。

$$
\begin{aligned}
& \forall x,y \\
& x\in B\wedge y\in B \\
\iff & x\in B\wedge y\in B\wedge x\in B\wedge y\in B && (\text{命题逻辑幂等律}) \\
\implies & x\in A\wedge y\in A\wedge x\in B\wedge y\in B && (B\subseteq A) \\
\implies & (\langle x,y\rangle\in R\vee\langle y,x\rangle\in R)\wedge x\in B\wedge y\in B && (R\text{ 是全序关系}) \\
\iff & (\langle x,y\rangle\in R\wedge x\in B\wedge y\in B)\vee \\
& (\langle y,x\rangle\in R\wedge y\in B\wedge x\in B) && (\text{命题逻辑分配律、交换律}) \\
\iff & \langle x,y\rangle\in R\restriction B\vee\langle y,x\rangle\in R\restriction B && (R\restriction B\text{ 定义})
\end{aligned}
$$

故有，$R\restriction B$ 是全序关系。 □

(4)

证明: 由 (3) 知，$R\restriction B$ 是全序关系。现只需证明任意 $C\subseteq B$ 在 $R\restriction B$ 下皆有最小元。

对任意 $C\subseteq B$，由 $B\subseteq A$ 和 $\subseteq$ 的传递性可知，$C\subseteq A$。由 R 是 A 上的是良序关系知，$\exists y(y\in C\wedge\forall x(x\in C\wedge\langle y,x\rangle\in R))$。由于 $C\subseteq B$，故对前式中的 x,y 有 $x\in B\wedge y\in B$。于是有 $\langle y,x\rangle\in R\restriction B$。故得，$R\restriction B$ 是 B 上的良序关系。 □

2.49

证明: 先证：R 是反自反的。

$$
\begin{aligned}
& \forall x,y \\
& \langle x,y\rangle\in A\times B \\
\iff & x\in A\wedge y\in B && (\text{卡氏积定义}) \\
\implies & \neg\langle y,y\rangle\in R_2\wedge\neg\langle x,x\rangle\in R_1 && (R_1,R_2\text{ 是反自反的}) \\
\implies & \neg\langle y,y\rangle\in R_2\wedge(\neg\langle x,x\rangle\in R_1\vee y=y) && (\text{命题逻辑附加律}) \\
\iff & \neg\langle y,y\rangle\in R_2\wedge\neg(\langle x,x\rangle\in R_1\wedge y=y) && (\text{命题逻辑德·摩根律}) \\
\iff & \neg(\langle y,y\rangle\in R_2\vee(\langle x,x\rangle\in R_1\wedge y=y)) && (\text{命题逻辑德·摩根律}) \\
\iff & \neg(\langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R) && (R\text{ 定义}) \\
\iff & \langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\notin R && (\notin\text{ 定义})
\end{aligned}
$$

再证：R 是传递的。

$\forall x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3$