必要性。

$$\begin{aligned}
& x \preccurlyeq y \\
\Longleftrightarrow\ & i_x \leq i_y && (\text{引理 19.1}) \\
\Longleftrightarrow\ & p^{t-i_y+1} \mid p^{t-i_x+1} && (t-i_y+1 \leq t-i_x+1) \\
\Longrightarrow\ & \langle a^{p^{t-i_x+1}} \rangle \subseteq \langle a^{p^{t-i_y+1}} \rangle && (\text{生成子群定义}) \\
\Longleftrightarrow\ & \varphi(x) \preccurlyeq \varphi(y) && (\varphi\ \text{定义})
\end{aligned}$$

由教材定理 19.8 知，φ 是同构。 □

19.20

证明： 对任意 $x, y \in L$，有

$$\begin{aligned}
f(x \wedge y) &= (x \wedge y) \vee a && (f\ \text{定义}) \\
&= (x \vee a) \wedge (y \vee a) && (\text{分配律}) \\
&= f(x) \wedge f(y) && (f\ \text{定义}) \\
f(x \vee y) &= (x \vee y) \vee a && (f\ \text{定义}) \\
&= (x \vee y) \vee (a \vee a) && (\text{教材定理 19.3(3)}) \\
&= (x \vee a) \vee (y \vee a) && (\text{结合律、交换律}) \\
&= f(x) \vee f(y) && (f\ \text{定义})
\end{aligned}$$

从而 f 是自同态。同理可证，g 是自同态。 □

由定义，对任意 $x \in f(L)$，存在 $y \in L$，使得 $x = f(y) = y \vee a$。从而由教材定理 19.1(2) 知，$a \preccurlyeq x$。另一方面，对任意 $x \succcurlyeq a$，由教材定理 19.2 有 $f(x) = x \vee a = x$，$x \in f(L)$。这就是说，$f(L) = \{x \mid x \in L \text{ 且 } a \preccurlyeq x\}$。

同理可得，$g(L) = \{x \mid x \in L \text{ 且 } x \preccurlyeq a\}$。

19.21

证明： 由习题 19.9 结论可知，X 和 Y 都是格。

下面证明 f 是 X 到 Y 的双射。

f 显然是函数。对任意 $x_1, x_2 \in X$，

$$\begin{aligned}
& f(x_1) = f(x_2) \\
\Longleftrightarrow\ & x_1 \vee b = x_2 \vee b && (f\ \text{定义}) \\
\Longrightarrow\ & a \wedge (x_1 \vee b) = a \wedge (x_2 \vee b) && (x_1 \vee b = x_2 \vee b) \\
\Longleftrightarrow\ & (a \wedge x_1) \vee (a \wedge b) = (a \wedge x_2) \vee (a \wedge b) && (\text{分配律}) \\
\Longleftrightarrow\ & x_1 \vee (a \wedge b) = x_2 \vee (a \wedge b) && (x_1, x_2 \preccurlyeq a\text{、教材定理 19.2}) \\
\Longleftrightarrow\ & x_1 = x_2 && (a \wedge b \preccurlyeq x_1, x_2\text{、教材定理 19.2})
\end{aligned}$$

从而 f 是单射。

对任意 $y \in Y$，由于 $b \preccurlyeq y$，所以 $a \wedge b \preccurlyeq a \wedge y$，又由于 $y \preccurlyeq a \vee b$，所以 $a \wedge y \preccurlyeq a \wedge (a \vee b) = a$。从而 $a \wedge y \in X$。而

$$\begin{aligned}
f(a \wedge y) &= (a \wedge y) \vee b && (f\ \text{定义}) \\
&= (a \vee b) \wedge (y \vee b) && (\text{分配律}) \\
&= (a \vee b) \wedge y && (b \preccurlyeq y\text{、教材定理 19.2}) \\
&= y && (y \preccurlyeq a \vee b\text{、教材定理 19.2})
\end{aligned}$$