变换群与置换群

变换群

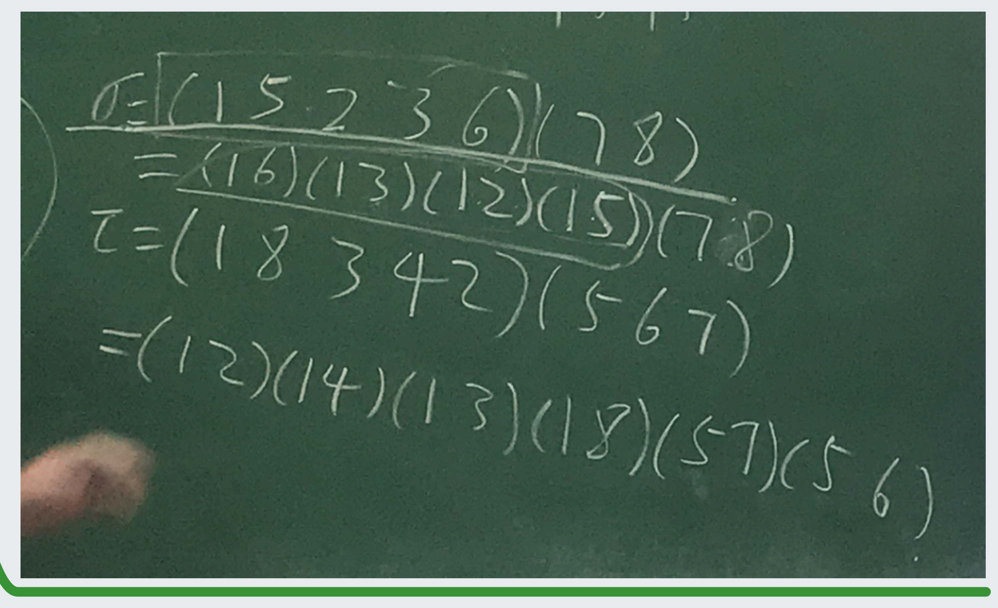
- 变换群的定义
  - 例如 $G=\{ e, a, b, c \}$,
    $f_e=\{<e,e>,<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$
    $f_a=\{<e,a>,<a,e>,<b,c>,<c,b>\}$
    $f_b=\{<e,b>,<a,c>,<b,e>,<c,a>\}$
    $f_c=\{<e,c>,<a,b>,<b,a>,<c,e>\}$
    $H=\{f_e ,f_a ,f_b ,f_c \}$
- A 上的变换：$f:A\to A$ A 上的一一变换：双射 $f:A\to A$
- A 上的一一变换群：$E(A)=\{ f \mid f :A\to A$ 为双射$\}$
- 关于变换合成构成群 A 上的变换群 G：$G\subseteq E(A)$

置换

- A 上的 n 元置换：$|A| = n$ 时 A 上的一一变换 表示法
  - 实际上有n!个，构成 Sn
    - 变换乘法构成的群　N元对称群
    - Sn的子群　N元置换群
- 置换的表示法：令 $A=\{ 1, 2, ..., n \}$,
  - 如：集合 $S=\{a,b,c,d\}$，将 a 映射到 b，b 映射到 d，c 映射到 a，d 映射到 c.这个置换可以表示为
    $$\sigma=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$$
- 轮换指数：$1^{C_1(S)}\,1^{C_2(S)}\cdots 1^{C_n(S)}$
  $C_k(\sigma)$: k-轮换的个数
  - 例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
    $=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix}$
    指数为 $1^3 2^1 3^1 4^0 5^0 6^0 7^0 8^0 = 1^3 2^1 3^1$

k 阶轮换

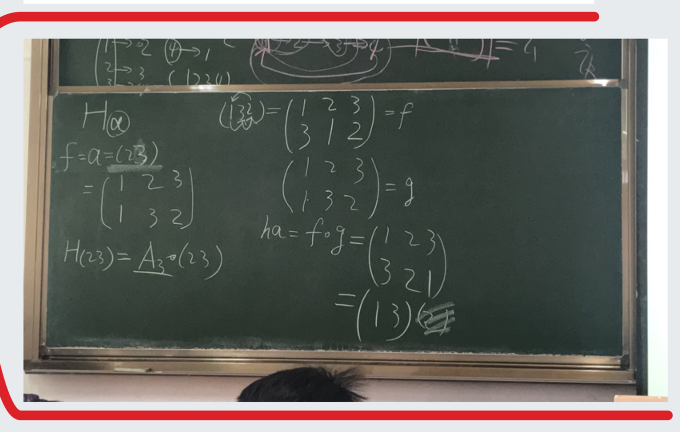
- 定义 设 σ 是 $S=\{1,2,...,n\}$ 上的 n 元置换。若 $\sigma(i_1)=i_2,\sigma(i_2)=i_3,...,\sigma(i_{k-1})=i_k,\sigma(i_k)=i_1$
  - 任何 n 元置换都可以表示成不交的轮换之积

  - 任何 n 元置 换都可以表成对换之积。
    - 例 设 $S=\{1,2,\ldots,8\}$,
      $$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}\quad \tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
      是8元置换。
      解 两个置换的分解式为
      $\sigma=(1\ 5\ 2\ 3\ 6)(4)(7\ 8)$
      $\tau=(1\ 8\ 3\ 4\ 2)(5\ 6\ 7)$
      其对换表示式分别为
      $\sigma=(1\ 5\ 2\ 3\ 6)(7\ 8)=(1\ 6)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 5)(7\ 8)$
      $\tau=(1\ 8\ 3\ 4\ 2)(5\ 6\ 7)=(1\ 2)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 8)(5\ 7)(5\ 6)$
- 元素的阶
  k 阶轮换 $(i_1\ i_2 \ldots i_k)$ 的阶为 k
  $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_l$ 是不交轮换的分解式，则
  $|\sigma| = [|\tau_1|, |\tau_2|, \cdots, |\tau_l|]$
  - 所有的不相交的k阶轮换群的阶的最小公倍数
- 且保持 S 中的其他元素对应关系不变，则称 σ 为 S 上的 k 阶轮换，记作 $(i_1 i_2 ... i_k)$.
- 若 $k=2$，也称 σ 为S上的对换。
- 存在性：对于任何 S 上的 n 元置换 σ 一定存在着一个有
- 限序列 $i_1,i_2,...,i_k,k\geq 1$，使得
- $\sigma(i_1)=i_2,\sigma(i_2)=i_3,...,\sigma(i_{k-1})=i_k,\sigma(i_k)=i_1$
- 不相交：设s$(i_1 i_2 ... i_k)$和t $(j_1 j_2 ... j_s)$是两个轮换，若
- $\{i_1 i_2 ... i_k\}$Ç$\{i_1 i_2 ... i_k\}$=Æ，则称s和t是不相交的.

群的分解

陪集定义及其实例

- 陪集定义 G 为群，$H\leq G, a\in G$，右陪集 $Ha=\{ha \mid h\in H\}$
  - 实例：
    S_3, $H=\{ (1), (12)\}, H(1)=H(12)$
    $H(13) =H(123) =\{(13),(123)\}$
    $H(23)=H(132)=\{(23),(132)\}$
    $V=<Z_6,+_6>$, $H=\{0,2,4\}$
    H0=H2=H4=H
    H1=H3=H5={1,3,5}
  - 
- Ha 中的 a 称为该陪集的代表元素
- 定理 G 为群，H 是 G 的子群，则
- 性质
  - (1) $He=H$；
    (2) $a\in Ha$；
    (3) $Ha\approx H$；
  - (4) $b\in Ha \Leftrightarrow Ha=Hb \Leftrightarrow ba^{-1}\in H$
  - (5) 在 G 上定义二元关系 R, $aRb\Leftrightarrow ba^{-1}\in H$，则 R 为
  - 等价关系，且 $[a]_R=Ha$
  - (6) $a,b\in G$, $Ha\cap Hb=\varnothing$ 或 $Ha=Hb$，$\cup Ha=G$

Lagrange定理