(5) 若 $\circ_i$ 是含有单位元的运算，$x^{-1} \in A$ 是 x 关于 $\circ_i$ 的逆元，则 $\varphi(x^{-1})$ 是 $\varphi(x)$ 关于 $\bar{\circ}_i$ 运算的逆元.

定理 15.9 设 $V = \langle A, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_r \rangle$ 是代数系统，对于 $i = 1, 2, \cdots, r$，$\circ_i$ 是 k_i 元运算. $\sim$ 是 V 上的同余关系，V 关于 $\sim$ 的商代数 $V/\!\sim\, = \langle A/\!\sim, \bar{\circ}_1, \bar{\circ}_2, \cdots, \bar{\circ}_r \rangle$. 令 $\circ_i, \circ_j$ 是 V 中的两个二元运算.

(1) 若 $\circ_i$ 是可交换的(或可结合的，幂等的)，则 $\bar{\circ}_i$ 在 $V/\!\sim$ 中也是可交换的(或可结合的，幂等的).

(2) 若 $\circ_i$ 对 $\circ_j$ 是可分配的，则 $\bar{\circ}_i$ 对 $\bar{\circ}_j$ 在 $V/\!\sim$ 中也是可分配的.

(3) 若 $\circ_i, \circ_j$ 满足吸收律，则 $\bar{\circ}_i, \bar{\circ}_j$ 在 $V/\!\sim$ 中也满足吸收律.

(4) 若 e (或 θ)是 V 中关于 $\circ_i$ 运算的单位元(或零元)，则 $[e]$ (或 $[\theta]$)是 $V/\!\sim$ 中关于 $\bar{\circ}_i$ 运算的单位元(或零元).

(5) 若 $\circ_i$ 为 V 中含有单位元的运算，且 $x \in A$ 关于 $\circ_i$ 的逆元为 x^{-1}，则在 $V/\!\sim$ 中 $[x]$ 关于 $\bar{\circ}_i$ 运算的逆元是 $[x^{-1}]$.

定理 15.10 设 $V_1 = \langle A, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_r \rangle, V_2 = \langle B, \bar{\circ}_1, \bar{\circ}_2, \cdots, \bar{\circ}_r \rangle$ 是同类型的代数系统，对于 $i = 1, 2, \cdots, r$，$\circ_i, \bar{\circ}_i$ 是 k_i 元运算. 令 $\varphi : A \to B$ 是 V_1 到 V_2 的同态，则由 φ 导出的 A 上的等价关系 $\sim$ 是 V_1 上的同余关系.

定理 15.11 设 $V = \langle A, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_r \rangle$ 是代数系统，其中 $\circ_i$ 为 k_i 元运算，$i = 1, 2, \cdots, r$. $\sim$ 为 V 上的同余关系，则**自然映射** $g : A \to A/\!\sim, g(a) = [a], \forall a \in A$ 是从 V 到 $V/\!\sim$ 上的同态映射.

定理 15.12 (同态基本定理) 设 $V_1 = \langle A, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_r \rangle, V_2 = \langle B, \circ'_1, \circ'_2, \cdots, \circ'_r \rangle$ 是同类型的代数系统，对于 $i = 1, 2, \cdots, r$，$\circ_i, \circ'_i$ 是 k_i 元运算. $\varphi : A \to B$ 是 V_1 到 V_2 的同态，关系 $\sim$ 是 φ 导出的 V_1 上的同余关系，则 V_1 关于同余关系 $\sim$ 的商代数同构于 V_1 在 φ 下的同态像，即 $V_1/\!\sim\, \cong \langle \varphi(A), \circ'_1, \circ'_2, \cdots, \circ'_r \rangle$.