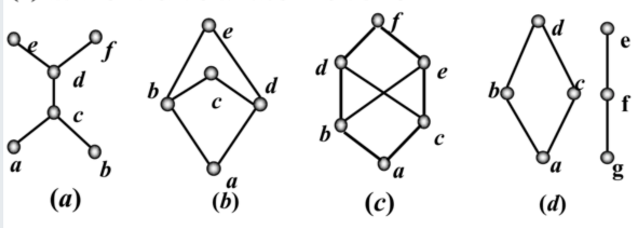
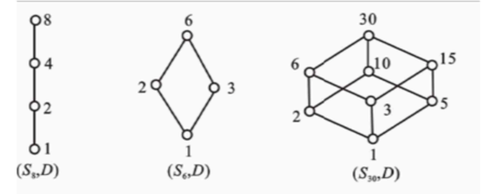
格与布尔代数

格的定义

- 格L的偏序集定义：
  - <S,≼>, S 的任何二元子集都有最大下界、最小上界. 求最大下界、最小上界构成格中的运算∧,∨
  - 格L与导出的代数系统<L,∧,∨>的对应关系: S上的两 个二元关系
- 格的实例：
  - n 的正因子格S_n(整除关系)
  - 幂集格$P(B)$（包含关系）
  - 子群格$L(G)$（G的子群集合为L(G)，包含关系）
    - (1) <Z, ≤>，其中Z是整数集，≤为小于或等于关系.
      (2) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.
      

      (1) 是格.
      (2) 都不是格.
      第三编 代数结构 5
    - 例1 设n是正整数，S_n是n的正因子的集合. |为整除关系，则偏序集 <S_n, |> 构成格.
      ∀$x, y \in S_n$，$x \vee y$ 是$[x,y]$，即x 与y 的最小公倍数.
      $x \wedge y$ 是(x,y)，即x 与y 的最大公约数.
      下图给出了格<S_8,D>，<S_6,D>和<S_{30},D>.
      

格的性质

- 格(自反、反对称、传递)中的基本不等式和等式
  - $a \leqslant a$
  - $a \leqslant b,\ b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$
  - $a \wedge b \leqslant a,\ a \wedge b \leqslant b$
  - $a \leqslant a \vee b,\ b \leqslant a \vee b$
  - $a \leqslant b,\ a \leqslant c \Rightarrow a \leqslant b \wedge c$
  - $a \geqslant b,\ a \geqslant c \Rightarrow a \geqslant b \vee c$
  - $a \leqslant b,\ b \leqslant a \Rightarrow a = b$
- 对偶命题：
  - 设P 是由格中元素及≼, ≽, =,∧,∨等表示的命题,
    - 若将P 中的≼,≽,∧,∨分别替换成 ≽, ≼, ∨,∧得到的命题称为 P 的对偶命题，记作P*.
  - 实例：
    P: $a \wedge b = b \wedge a$
    P^*: $a \vee b = b \vee a$
    性质：$(P^*)^* = P$.
  - 格中的基本等价条件
    $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$
  - <L,∧,∨>中交换律、结合律、幂等律、吸收律
- 引理 <S,*,○>是具有两个二元运算的代数系统. 如果*,○运算满足交换、结合、吸收律
  - (1) *,○满足幂等律
  - (2) $a*b = a \Leftrightarrow a \circ b = b$
- 定理 设<S,*,○>是具有两个二元运算的代数系统，若*和○运算满足交换、结合、吸收律，则可以适当定义S 上偏序≼，使得<S,≼>构成格，且<S,≼>导出的代数系统就是<S,*,○>.

代数定义

- 等价定义
  - 实例：
    <S_n, gcd, lcm> (gcd最大公约数,即(); lcm最小公倍数,即[])
    ∀$x, y \in Sn$,
    gcd (x, y) = gcd (y, x), lcm (x, y) = lcm (y, x)
    gcd (x, gcd (y, z)) = gcd (gcd (x, y), z)
    lcm (x, lcm (y, z)) = lcm (lcm (x, y), z)
    gcd (x, lcm (x, y)) = x, lcm (x, gcd (x, y)) = x
    $x \mid y \Leftrightarrow$ lcm (x, y) = $y \Leftrightarrow$ gcd (x, y) = x
    <S_n, |> 与 <S_n, gcd, lcm>是同一个格
- 设<L,∧,∨>是具有两个二元运算的代数系统,
- 如果∧,∨满足交换、结合、吸收律，则称<L, ∧,∨>是格.
-
  - (1) 保序不等式
    $a \preccurlyeq b,\ c \preccurlyeq d \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$,
    $a \vee c \preccurlyeq b \vee d$
  - (2) 分配不等式
    $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,
    $a \wedge (b \vee c) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
  - (3) 模不等式
    $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \vee (c \wedge b) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge b$