$$
\begin{aligned}
&= ((a^{-1})^n)^s && \text{(引理 17.1)}\\
&= (a^{-1})^{ns} && \text{(教材定理 16.1(2))}\\
&= a^{-ns} && \text{(幂运算定义)}\\
&= a^{nm} && (m=-s)
\end{aligned}
$$

④ 若 $m<0$ 且 $n<0$，令 $s=-m, t=-n$，则有：

$$
\begin{aligned}
(a^n)^m &= (a^{-t})^{-s} && (m=-s, n=-t)\\
&= (((a^{-1})^t)^{-1})^s && \text{(幂运算定义)}\\
&= (((a^t)^{-1})^{-1})^s && \text{(引理 17.1)}\\
&= (a^t)^s && \text{(教材定理 17.2(1))}\\
&= a^{ts} && \text{(幂运算定义)}\\
&= a^{nm} && (ts=nm)
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\forall m,n\in\mathbb{Z},(a^n)^m=a^{nm}$。 □

(5)

证明： 首先用归纳法证明 $n\in\mathbb{N}$ 的情况。

当 $n=0$ 时，等式显然成立。

若 $n=k$ 时，等式成立，则当 $n=k+1$ 时：

$$
\begin{aligned}
(ab)^{k+1} &= (ab)^k ab && \text{(幂运算定义)}\\
&= a^k b^k ab && \text{(归纳假设)}\\
&= a^k a b^k b && (G\text{ 是 Abel 群})\\
&= a^{k+1}b^{k+1} && \text{(幂运算定义)}
\end{aligned}
$$

从而证明了：$\forall n\in\mathbb{N},(ab)^n=a^nb^n$。

对于 $n<0$ 的情况，令 $t=-n$，则 $t>0$，且：

$$
\begin{aligned}
(ab)^n &= (ab)^{-t} && (n=-t)\\
&= ((ab)^{-1})^t && \text{(幂运算定义)}\\
&= (b^{-1}a^{-1})^t && \text{(教材定理 17.2(2))}\\
&= (b^{-1})^t(a^{-1})^t && (\forall n\in\mathbb{N},(ab)^n=a^nb^n)\\
&= b^{-t}a^{-t} && \text{(幂运算定义)}\\
&= b^na^n && (n=-t)\\
&= a^nb^n && (G\text{ 是 Abel 群})
\end{aligned}
$$

这就证明了原命题。 □

17.9

(1)

证明： $\forall k\in\mathbb{Z}$，

$$
\begin{aligned}
&(b^{-1}ab)^k=e\\
\Longleftrightarrow\ &(b^{-1}ab)^{k+1}=(b^{-1}ab) && \text{(代入规则、消去律)}\\
\Longleftrightarrow\ &a^{k+1}=a && \text{(习题 17.7 结论)}\\
\Longleftrightarrow\ &a^k=e && \text{(代入规则、消去律)}
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\{k\mid k\in\mathbb{Z}^+\wedge(b^{-1}ab)^k=e\}=\{k\mid k\in\mathbb{Z}^+\wedge a^k=e\}$，从而它们的最小元也是