第9章 树

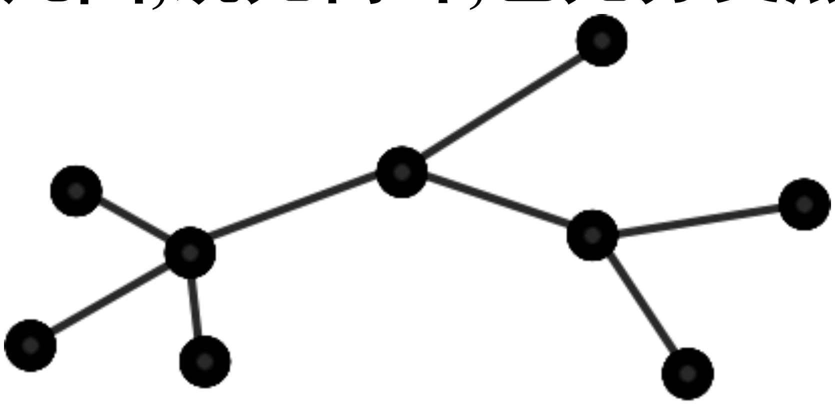
- 树：不含简单回路的连通图
- 应用
  - 计数某些化合物；
  - 构造有效编码
  - 博弈论中的取胜规则
  - 决策问题
  - 最大网络流问题

9.1无向树的定义及性质

- **无向树(T):**一个连通,无回路的无向图;

  任何树都是简单图吗?

- **森林:**每个连通分支都是树的无向图;
- **树叶v:** $d(v)=1$;
- **分枝点v:** $d(v)\geq 2$;
- **平凡树:** 平凡图,既无树叶,也无分支点;



无向树的6个等价定义

- **定理9.1** 设G=<V,E>为n阶m条边的无向图,则下面各命题是等价的:

(1) G是树(连通无回路);

(2) G中任二顶点之间存在唯一路径;

(3) G中无圈且$m=n-1$;

(4) G连通且$m=n-1$;

(5) G连通且每条边均为桥;

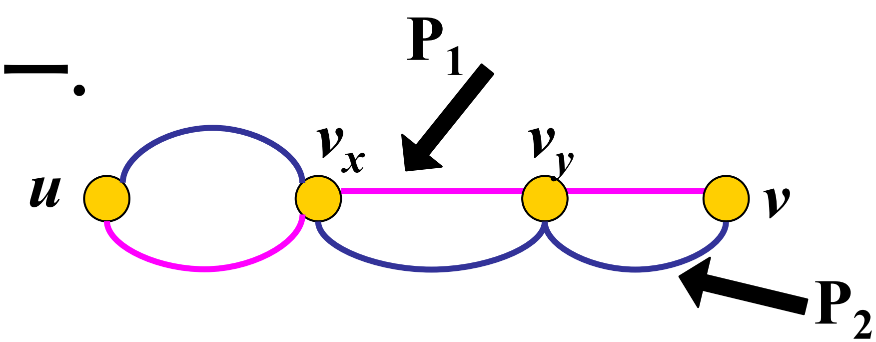
(6) G无圈,但在任二不同顶点之间增加新边,所得图含唯一的一个圈;

证明:(1) ⇒(2) ⇒(3) ⇒(4) ⇒(5) ⇒(6) ⇒(1)

G是树(连通无回路)⇒G中任二顶点之间存在唯一路径

证 先证存在性.由G连通可知,$\forall u,v\in V(G)$,u,v之间存在通路P_1.若P_1不是路径,则P_1中存在回路,与G中无回路矛盾,所以P_1是路径.

再证唯一性.设P_2是u,v之间相异于P_1的路径,设v_x,v_y是P_1与P_2的两个相邻交点,在P_1中v_x,v_y之间的路径为$P'(x,y)$,在P_2中v_x,v_y之间的路径为$P(x,y)$,则$P'(x,y)\cup P(x,y)$构成回路,矛盾,故u,v之间的路径唯一.



G中任二顶点之间存在唯一路径⇒G中无圈且$m=n-1$

先证无圈.反证法.若存在关联顶点v的环,则存在v到v的两条路径,长度分别为0和1,与已知矛盾.若存在长度大于等于2的圈,则圈上的任意两不同顶点之间存在两条不同路径,矛盾.

下面证$m=n-1$.(归纳法)

$n=1$时,无圈,$m=0$,结论成立.

设$n\le k(k\ge 1)$时,结论成立.

设$n=k+1$,G中至少有一条边,$e=(u,v)\in E(G)$.则G-e必有两个连通分支G_1,G_2.否则, 在G-e中u,v之间有路径P,P$\cup$\{e\}构成回路.n_i,m_i分别为G_i中的顶点数和边数,则$n_i \le k$,$i=1,2$.

由归纳假设知,$m_i=n_i-1$,

$$m=m_1+m_2+1=(n_1-1)+(n_2-1)+1=n_1+n_2+1-2=n-1$$

(3) G中无圈且$m=n-1 \Rightarrow$(4) G连通且$m=n-1$

只需证明G连通.

设G有s个连通分支$G_1, G_2, \ldots, G_s$,显然G_i中均无圈,即G_i连通无回路,所以G_i都是树,由(1)⇒(2)⇒(3)知$m_i=n_i-1$,其中m_i, n_i分别为G_i的顶点数和边数,因此

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\left(\sum_{i=1}^{s} n_i\right)-s=n-s$$

又$m=n-1$,故$s=1$,即G是连通的.

(4) G连通且$m=n-1$ $\Rightarrow$(5) G连通且每条边均为桥

只需证明G中的每边均为桥.

$\forall e \in E(G)$, $|E(G-e)|=n-2<n-1$,

由定理7.9知,连通图G的边数至少为n-1,

所以G-e是非连通的,故e为桥.

(5) G连通且每条边均为桥⇒(6) *G*无圈,但在任二不同顶点之间增加新边,所得图含唯一的一个圈

由于G的每边均为桥,所以G中不含有圈.

又G连通,故G是树,由(1)⇒(2)知,$\forall u,v\in V(G), u\neq v$,则$u,v$之间存在唯一的路径$P(u,v)$,那么$P(u,v)\cup(u,v)$是图$G\cup(u,v)$中的唯一的圈.

定理9.1的证明((6)⇒(1))

(6) G无圈,但在任二不同顶点之间增加新边,所得图含唯一的一个圈;

(1) G是树(连通无回路);

只需证明G是连通的.

$\forall u,v\in V(G),u\neq v$, $G\cup(u,v)$中有唯一的圈C,则C-(u,v)是u到v的通路,所以u,v连通,由u,v的任意性知,G是连通的.

无向树的性质

定理9.2 任一n阶非平凡无向树至少有两片树叶.

证 设$T=<V,E>$是无向树，其中$|V|=n$，$|E|=m$

设T有x片树叶,则剩余的n-x个结点的度均大于等于2,

由握手定理及定理9.1可知,

$$2m = 2(n-1) = \sum d(v_i) \geq x + 2(n-x)$$

解上式可得 $x \geq 2$.

定理得证. #

举例

例 一棵无向树T有5片树叶，3个2度分支点，其余的分支点都是3度结点，问T有几个结点。

解 设有n个结点，则

$$5\times1+3\times2+(n-8)\times3=2(n-1)$$

得$n=11$

举例（习题九：6）

例 设G为$n(n\geq 5)$阶简单图,证明G或G的补图中必含圈.

证 设简单图G和其补图的边数分别为m和m',则

$$m+m'= n(n-1)/2$$

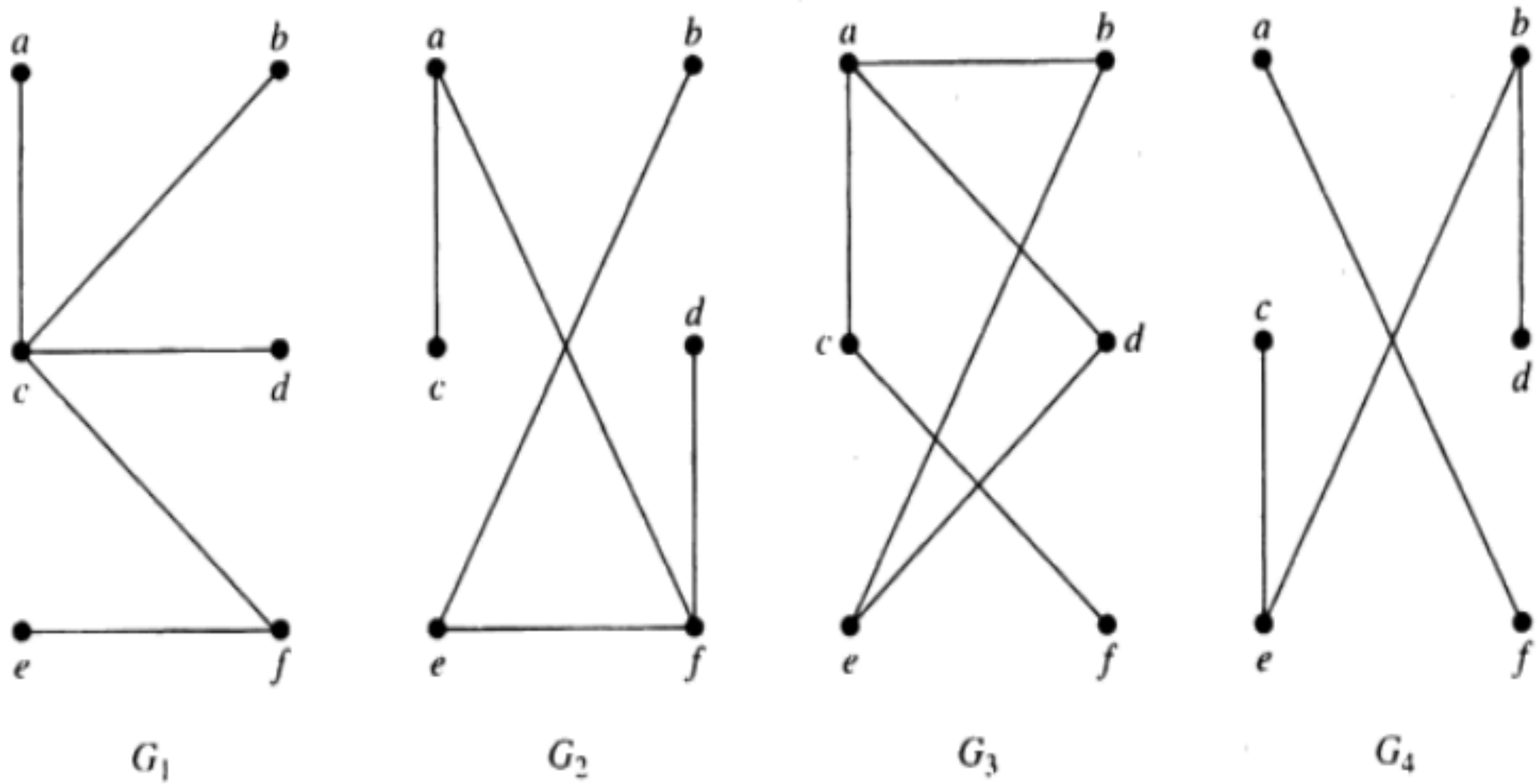
根据鸽巢原理,G与其补图必有一个边数$\geq n(n-1)/4$,不妨设G的边数$m\geq n(n-1)/4$,下面证G中必含有圈.

假设G中没有圈,且有$w(w\geq 1)$个连通分支,则每个连通分支都是树,$m_i=n_i-1$，$i=1,\ldots,w$，m_i,n_i分别为第i个连通分支的边数与阶数,所以有

$$m=\sum_{i=1}^{w} m_i=\sum_{i=1}^{w} n_i-w\leq n-1$$

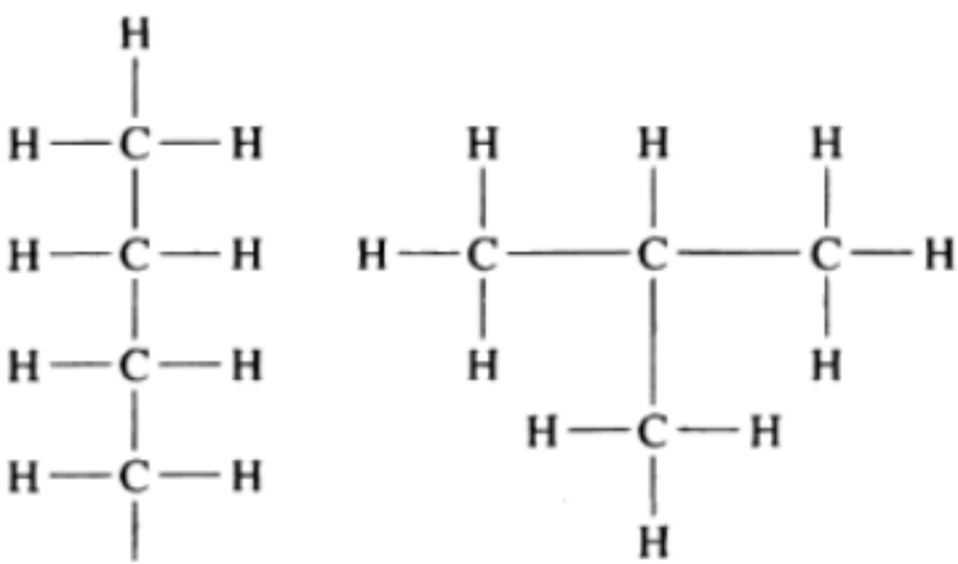
解得不等式 $\dfrac{n(n-1)}{4}\leq m\leq n-1$ 得 $1\leq n\leq 4$，与$n\geq 5$矛盾.

下列图中,哪些是树?



树作为模型-饱和碳氢化合物与树

英国数学家亚瑟•凯莱1857年发现了树用树表示分子，顶点表示原子, 用4度顶点表示每个碳原子,用1度顶点表示每个氢原子,边表示原子之间的化学键.



丁烷 异丁烷

n阶非同构无向树的棵数t_n

- 给定n,可以计算出t_n的值(见教材表9.1);
- 将t_n棵无向树均画出来,不容易;

举例

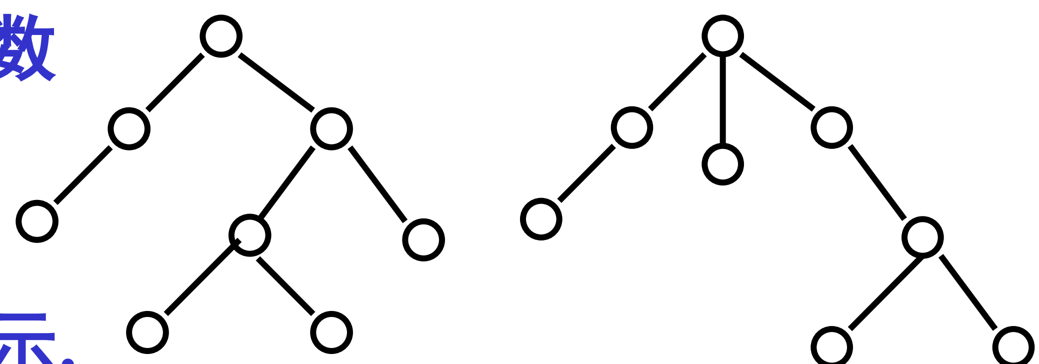
例 下面两个正整数序列中，哪个能充当无向树的度数序列？若能, 画出2棵非同构的无向树。

（1）1,1,1,1,2,3,3,4

（2）1,1,1,1,2,2,3,3

解 （1）不可以. 因为所有度数之和等于16, m=8, 而结点数也为8, 所以不可以.

（2）可以. 因为改整数序列可简单图化,且满足m=n-1,两棵非同构的树如右图所示.



总结

- 无向树的6个等价定义
- 不同的n阶无向树的棵树
- 作业:P154-155,习题九:2,3,7