第十五章　代数系统

定理 15.1 设 $\circ$ 为 A 上的二元运算，若 $\circ$ 运算适合结合律，则 $\circ$ 运算适合广义结合律.

定理 15.2 设 $\circ$ 为 A 上的二元运算，若存在 $e_l \in A$ 和 $e_r \in A$ 满足 $\forall x \in A$ 有 $e_l \circ x = x$ 和 $x \circ e_r = x$，则 $e_l = e_r = e$，且 e 就是 A 中关于 $\circ$ 运算的惟一的单位元.

定理 15.3 设 $\circ$ 为 A 上的二元运算，若存在 $\theta_l \in A$ 和 $\theta_r \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $\theta_l \circ x = \theta_l$ 和 $x \circ \theta_r = \theta_r$，则 $\theta_l = \theta_r = \theta$，且 θ 是 A 中关于 $\circ$ 运算的惟一的零元.

定理 15.4 设集合 A 至少含有两个元素，e 和 θ 分别为 A 中关于 $\circ$ 运算的单位元和零元，则 $e \neq \theta$.

定理 15.5 设 $\circ$ 为 A 上可结合的二元运算且单位元为 e. 对于 $x \in A$ 若存在 $y_l, y_r \in A$，使得 $y_l \circ x = e$ 和 $x \circ y_r = e$，则 $y_l = y_r = y$，且 y 是 x 关于 $\circ$ 运算的惟一的逆元.

定理 15.6 设代数系统 $V_1 = \langle A, \circ_{11}, \circ_{12}, \cdots, \circ_{1r} \rangle, V_2 = \langle B, \circ_{21}, \circ_{22}, \cdots, \circ_{2r} \rangle$ 是同类型的，V 是 V_1 与 V_2 的积代数. 对任意的二元运算 $\circ_{1i}, \circ_{1j}, \circ_{2i}, \circ_{2j}$，

(1) 若 $\circ_{1i}, \circ_{2i}$ 在 V_1 和 V_2 中是可交换的(或可结合的，幂等的)，则 $\circ_i$ 在 V 中也是可交换的(或可结合的，幂等的).

(2) 若 $\circ_{1i}$ 对 $\circ_{1j}$ 在 V_1 上是可分配的，$\circ_{2i}$ 对 $\circ_{2j}$ 在 V_2 上是可分配的，则 $\circ_i$ 对 $\circ_j$ 在 V 上也是可分配的.

(3) 若 $\circ_{1i}, \circ_{1j}$ 在 V_1 上是可吸收的，且 $\circ_{2i}, \circ_{2j}$ 在 V_2 上也是可吸收的，则 $\circ_i, \circ_j$ 在 V 上是可吸收的.

(4) 若 e_1 (或 θ_1)为 V_1 中关于 $\circ_{1i}$ 运算的单位元(或零元)，e_2 (或 θ_2)为 V_2 中关于 $\circ_{12}$ 运算的单位元(或零元)，则 $\langle e_1, e_2 \rangle$ (或 $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$)为 V 中关于 $\circ_i$ 运算的单位元(或零元).

(5) 若 $\circ_{1i}, \circ_{2i}$ 为含有单位元的二元运算，且 $a \in A, b \in B$ 关于 $\circ_{1i}$ 和 $\circ_{2i}$ 运算的逆元分别为 a^{-1}, b^{-1}，则 $\langle a^{-1}, b^{-1} \rangle$ 是 $\langle a, b \rangle$ 在 V 中关于 $\circ_i$ 运算的逆元.

定理 15.7 设 $V_1 = \langle A, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_r \rangle, V_2 = \langle B, \bar{\circ}_1, \bar{\circ}_2, \cdots, \bar{\circ}_r \rangle$ 是同类型的代数系统，对于 $i = 1, 2, \cdots, r$，$\circ_i, \bar{\circ}_i$ 是 k_i 元运算. $\varphi: A \to B$ 是 V_1 到 V_2 的同态，则 $\varphi(A)$ 关于 V_2 中的运算构成代数系统，且是 V_2 的子代数，称为 V_1 在 φ 下的**同态像**.

定理 15.8 设 $V_1 = \langle A, \circ_1, \circ_2, \cdots, \circ_r \rangle, V_2 = \langle B, \bar{\circ}_1, \bar{\circ}_2, \cdots, \bar{\circ}_r \rangle$ 是同类型的代数系统，$\varphi: A \to B$ 是 V_1 到 V_2 的满同态，$\circ_i, \circ_j$ 是 V_1 中的两个二元运算.

(1) 若 $\circ_i$ 是可交换的(或可结合的，幂等的)，则 $\bar{\circ}_i$ 也是可交换的(或可结合的，幂等的).

(2) 若 $\circ_i$ 对 $\circ_j$ 是可分配的，则 $\bar{\circ}_i$ 对 $\bar{\circ}_j$ 也是可分配的.

(3) 若 $\circ_i, \circ_j$ 是可吸收的，则 $\bar{\circ}_i, \bar{\circ}_j$ 也是可吸收的.

(4) 若 e (或 θ)是 V_1 中关于 $\circ_i$ 运算的单位元(或零元)，则 $\varphi(e)$ (或 $\varphi(\theta)$)是 V_2 中关于 $\bar{\circ}_i$ 运算的单位元(或零元).