$$
\begin{aligned}
&= A \cup (\cup \cup \{F(x) \mid x \in \operatorname{seg}(n^+)\}) && (\text{值域、限制定义}) \\
&= A \cup (\cup \cup \{F(0), F(1), \cdots, F(n)\}) && (\operatorname{seg}(n^+) = \{0, 1, \cdots, n\}) \\
&= A \cup (\cup(F(0) \cup F(1) \cup \cdots \cup F(n))) && (\text{广义并定义}) \\
&= A \cup (\cup(F(n))) && (\text{归纳假设：} F(0) \subseteq F(1) \subseteq \cdots \subseteq F(n))
\end{aligned}
$$

这就证明了：$F(n^+) = A \cup (\cup F(n))$。

注意到，由于 $n \geq 1$，所以总有 $n-1 \in \mathbb{N}$。由归纳假设知：$n-1 \in S$。从而 $F(n) = A\cup(\cup F(n-1))$ 且 $F(n-1) \subseteq F(n)$。由教材例 1.8(1) 知，$F(n-1) \subseteq F(n) \Rightarrow \cup F(n-1) \subseteq \cup F(n)$。从而 $F(n) = A \cup (\cup F(n-1)) \subseteq A \cup (\cup F(n)) = F(n^+)$。

这就证明了：$\forall x \in \mathbb{N}, x < n \Rightarrow x \in S \Rightarrow n^+ \in S$。由 $\mathbb{N}$ 上的强归纳原则知，$S = \mathbb{N}$。

因此，对一切 $n \in \mathbb{N}$，都有 $F(n^+) = A \cup (\cup F(n))$。 □

(2)

证明： 由第 (1) 小题结论知，$F(n^+) = A \cup (\cup F(n))$。从而：

$$
\begin{aligned}
a \in F(n) &\Longrightarrow a \subseteq \cup F(n) && (\text{教材例 1.8(2)}) \\
&\Longrightarrow a \subseteq A \cup (\cup F(n)) && (F(n) \subseteq A \cup (\cup F(n))) \\
&\Longrightarrow a \subseteq F(n^+) && (F(n^+) = A \cup (\cup F(n)))
\end{aligned}
$$

□

(3)

证明： 因为 $\operatorname{ran} F = \{F(0), F(1), F(2), \cdots\}$，所以 $B = \cup \operatorname{ran} F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F(n)$。

因此，对任意 $x \in B$，必存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $x \in F(n)$。由第 (2) 小题结论知，$x \subseteq F(n^+)$。而 $F(n^+) \in \operatorname{ran} F$，从而 $x \subseteq F(n^+) \subseteq \cup \operatorname{ran} F = B$。也即，对任意的 $x \in B$，有 $x \subseteq B$。由教材定理 4.10 知，B 是传递集。

又因为 $A = F(0) \in \operatorname{ran} F$，所以有 $A \subseteq \cup \operatorname{ran} F = B$。 □

6.7

(1)

证明： $\prec$ 显然是拟序。

对 $\mathbb{Z}$ 的任意非空子集 A，作 $S = A \cap \mathbb{N}$。

若 $S \neq \varnothing$，则由 $\mathbb{N}$ 上的良序定理知，S 有最小元 s。对所有 $x \in A$，若 $x \in S$，则由最小元定义知，$x \preccurlyeq s$，若 $x \notin S$，则 $x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ 且 $s \in \mathbb{N}$，由 $\prec$ 的定义知，$s \prec x$。从而 s 是 A 的最小元。

若 $S = \varnothing$。则 $A \subseteq (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$，作 $f : (\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \to \mathbb{N}, \forall -x \in (\mathbb{Z} - \mathbb{N}), f(-x) = x$。由 $\mathbb{Z}$ 和 $\prec$ 定义知，f 是单射且 $x \prec y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$。从而由 $\mathbb{N}$ 上的良序定理和教材定理 6.3(3) 知，$\langle \mathbb{Z} - \mathbb{N}, \prec \rangle$ 是良序，从而 $A \subseteq (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$ 有最小元。

这就证明了 $\mathbb{Z}$ 的每个非空子集都有关于 $\prec$ 的最小元。由引理 6.1 知，$\langle \mathbb{Z}, \prec \rangle$ 是良序集。 □

(2) $E(3) = \{0, 1, 2\}$; $E(-1) = \mathbb{N}$; $E(-2) = \mathbb{N} \cup \{-1\}$; $E(-n) = \mathbb{N} \cup \{-m \mid m \in \mathbb{N}_+ \wedge m < n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$。

6.8

证明： 设 $f, g : A \to B$ 都是 $\langle A, \prec_A \rangle$ 到 $\langle B, \prec_B \rangle$ 的同构。由同构的定义知，f, g 是双射。从而由教材定理 3.9 知，$f^{-1} : B \to A$ 也是一个双射函数，且有 $f \circ f^{-1} = I_B$。从而：

$\forall x, y \in A$，

$$
x \prec_A y \iff g(x) \prec_B g(y) \qquad (g \text{ 是同构})
$$