第8章习题讲解

中国海洋大学

计算机系

习题八:1

[分析]证明任意删除1条边后仍然连通或者证明G中不存在桥.

证明 因为G是欧拉图, 则G中每个顶点的度都是偶数, 则$\delta(G)\geq 2$.
任取$e=(u,v)\in E(G)$, $G'=G-\{e\}$,则G'中必有2个奇度顶点u与v,故而G'是半欧拉图,所以G'是连通的, G'是G的子图,因此$\lambda(G)\geq 2$.

习题八:2

分析 当G是块时,结论显然为真.当G中有割点时,利用定理8.1证明.

证明 当G是块时,结论显然为真.

(⇒)只需证明G的每个块都是若干条边不重复的圈的并.

因为G是欧拉图,由定理8.1可知G为若干条边不重复的圈的并,即$\cup_{i=1}^{d} C_i$,$E(C_i) \cap E(C_j)=\emptyset, i\neq j$.其中$C_i(i=1,2,\ldots,d)$为圈.下面证明G中任意圈只能在一个块中.否则,存在圈C_i至少在两个块G_1和G_2中,设$e_1 \in C_i$, $e_1 \in G_1$, $e_2 \in C_i$, $e_2 \in G_2$,从e_1出发经过e_2行遍C_i,至少经过G的一个割点,即C_i为非圈的简单回路,与C_i是圈矛盾.故G中每个块都是$\{C_i|i=1,2,\ldots,d\}$中若干个圈的并,因此每个块都是欧拉图.

习题八:2(续)

($\Leftarrow$)由于G是连通的,只需证明G中无奇数度结点.

$\forall v\in V(G)$,若v只在一个块G_i中,因为G_i是欧拉图,故$d_G(v)$是偶数.

若v在多个块$G_{i_1},G_{i_2},..G_{i_k}$ ($k\geq 2$)中,显然v是割点.则

$d_G(v)=d_{G_{i_1}}(v)+d_{G_{i_2}}(v)+\ldots+d_{G_{i_k}}(v)$,其中$d_{G_{i_s}}(v)$是偶数

($s=1,2,\ldots,k$),故$d_G(v)$是偶数,所以G为欧拉图.

习题八:3

[分析]增加k条互不相邻的新边,得到欧拉回路,再删除新边,得到k条边不重复的通路.

证明:设G中的2k个奇数度结点分别为$v_{i_1}, v_{i_2},\ldots, v_{i_{2k}}$,将这2k个结点两两分为1组,共分成$k$组,在每组中的两个结点之间增加新边,得到图G′,共增加k条新边$e_1, e_2,\ldots, e_k$,使得这2k个结点的度均为偶数,因此G′是欧拉图.G′中存在欧拉回路C,且$\{e_1, e_2,\ldots, e_k\}$在C中互不相邻,因此在$G=C- \{e_1, e_2,\ldots, e_k\}$中必有k条边不重复的通路,得证.

习题八:4

- 4.[分析](⇒)只需证明G中的任意圈都经过v_0.(v_0是所有圈的公共交点）

  (⇐)用定理8.1中(3)

- 证明:(⇒)反证法.设圈C′不经过v_0,令G′=G-E(C′),则G′中无奇数度结点.

(1)若G′连通,则G ′是欧拉图.从v_0出发行遍G中欧拉回路时,只要G′中的边未行遍完就行遍G′中的边,由于G′是欧拉图,当行遍G′的欧拉回路时,必可以回到v_0.因为v_0不在C′中,故无法从v_0出发再行遍C′上的边,这与v_0是可以任意行遍的相矛盾.

(2)若G ′非连通,共有s个连通分支G_1, G_2,…, G_s,显然G_i都是欧拉图.设v_0在G_i中,从v_0出发行遍G的欧拉回路时,先行遍G_1中的欧拉回路,由于不连通以及v_0不在C′上,所以G_2,G_3,…,G_k以及C′都无法行遍.这与v_0是可以任意行遍的相矛盾.

习题八:4(续)

($\Leftarrow$)因为G为欧拉图,有定理8.1可知G为若干个边不重复的圈的并,即$\cup_{i=1}^{d}C_i$,$E(C_i)\cap E(C_j)=\varnothing$,$i\neq j$,其中$C_i$(i=1,2,…,d)为圈.因为G-$v_0$中无圈,所以G中每个圈都经过$v_0$,即$v_0$是G中所有圈的公共顶点,所以$C_1$, C_2,…, C_d都经过v_0.从v_0出发开始行遍G中的欧拉回路时,随意地行遍完C_1, C_2,…, C_d,最后回到v_0,走一条欧拉回路,所以v_0是可任意行遍的.

习题八:5

- 解 做有向图D=<V,E>

$V=\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 |\ \alpha_i=0 \vee \alpha_i=1,\ i=1,2,3\}$

$E=\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \mid \alpha_i=0 \vee \alpha_i=1,\ \ i=1,2,3\}$

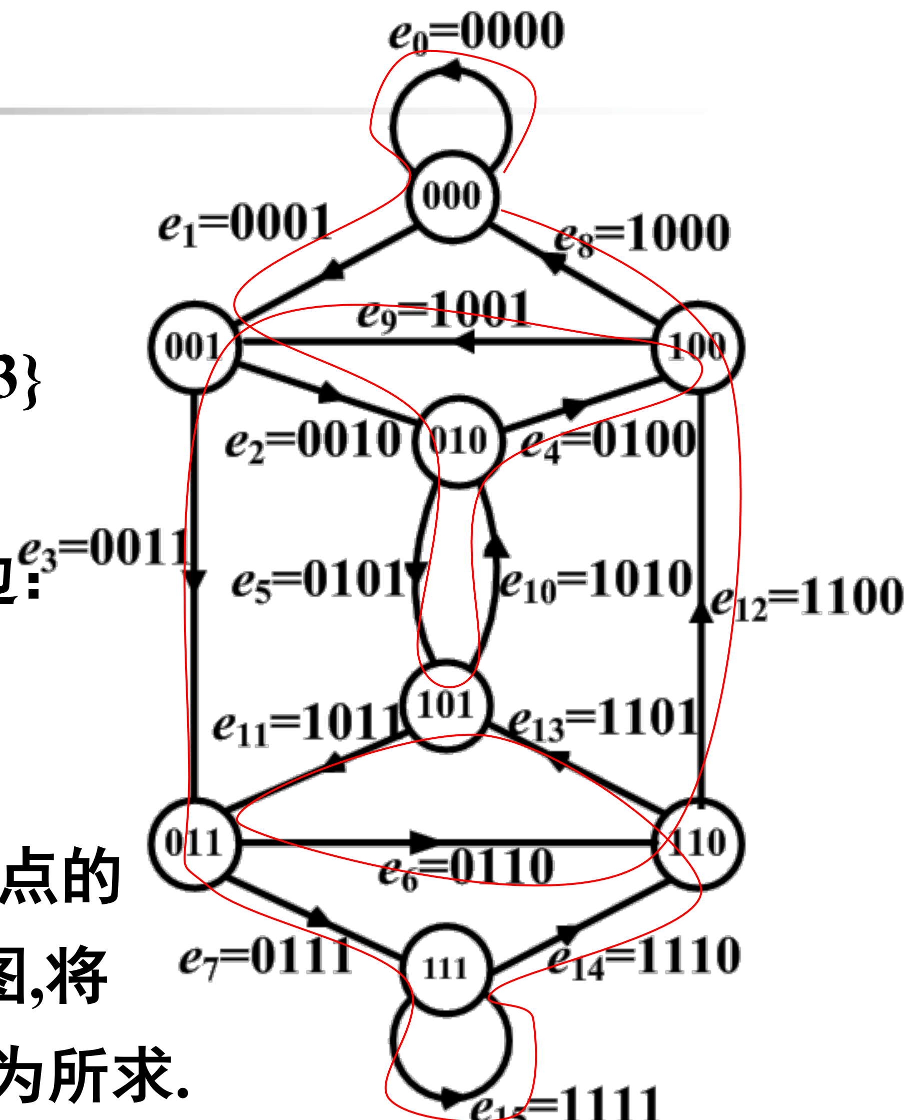
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=<\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\alpha_2\alpha_3\alpha_4>$

显然$\forall\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\in V$,共有两条射出边:

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 0=<\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\alpha_2\alpha_3 0>$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 1=<\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\alpha_2\alpha_3 1>$

所以D中共有2|V|=16条边,每个结点的入度和出度相等,都为2,D为欧拉图,将欧拉回路中各边最后一位排列即为所求.



C={0000,0001,0010,0101,1010,0100,1001,0011,0111,1111,1110,1101,1011,0110,1100,1000},所求排列为0101001111001000

习题八:6

解 构造图D=<V,E>,

V={$a_1a_2|a_i\in\{\alpha, \beta, \gamma\}, i=1,2$}

E={$a_1a_2a_3|a_i\in\{\alpha, \beta, \gamma\}, i=1,2,3$}

$\forall\ a_1a_2a_3\in E,\ a_1a_2a_3=\langle a_1a_2, a_2a_3\rangle$

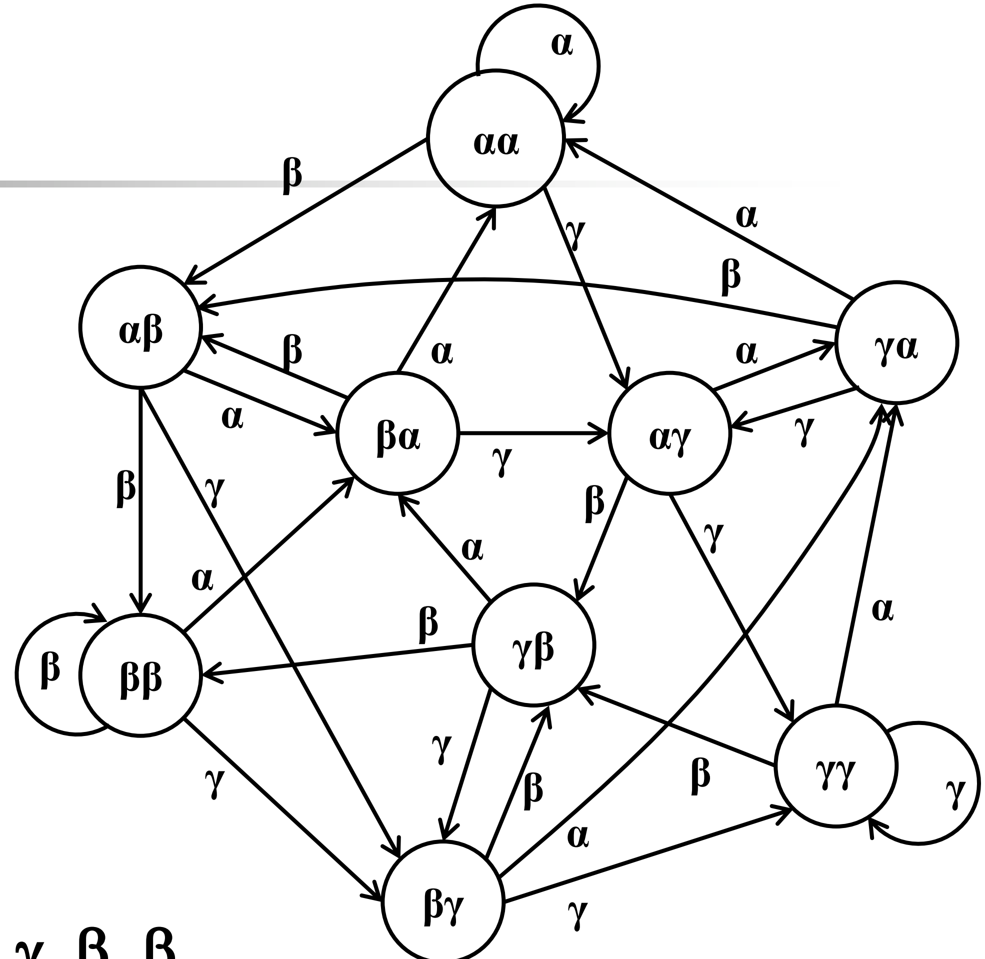
$\forall\ a_1a_2\in V$,其射出边有3条:

$a_1a_2\alpha,\ a_1a_2\beta,\ a_1a_2\gamma$.

具体如右图所示.D是欧拉图,有

欧拉回路C={α, β, β, β, γ, β, γ, γ, γ, β, β, α, β, α, α, γ, α, γ, β, α, γ, γ, α, β, γ, α, α},

对应的排列方案为αβββγβγγγββαβααγαγβαγγαβγαα

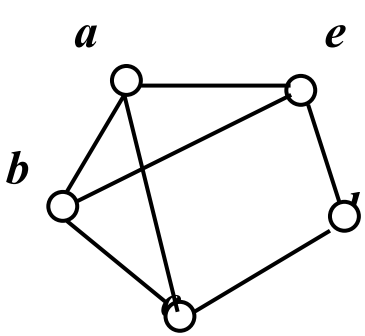


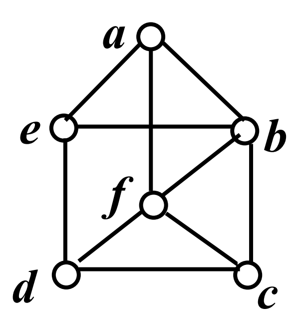
补充题

判定下列图中,哪些具有欧拉回路?如果存在欧拉回路,请构造出这样的回路;如果不存在欧拉回路,哪些图具有欧拉通路?如果存在欧拉通路,请构造出这样的通路;

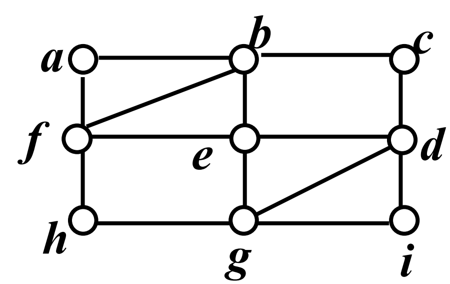
解 G_1,G_3既没有欧拉回路也没有欧拉通路.

G_2有欧拉回路.如*abcdighfegdebfa*





G_3

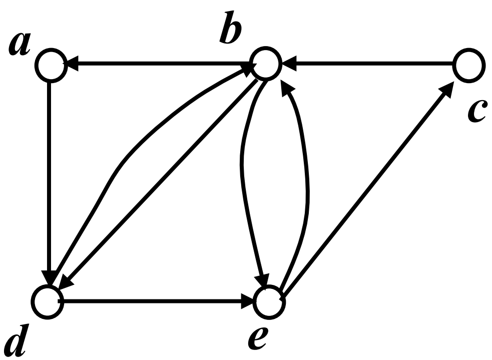


G_2

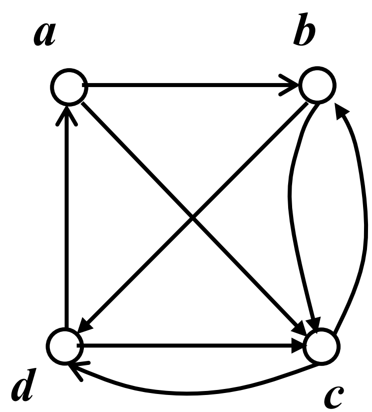
补充题

D_1有欧拉回路.如*adbecbdeba*

D_2有欧拉通路.如*abcbdcdac*



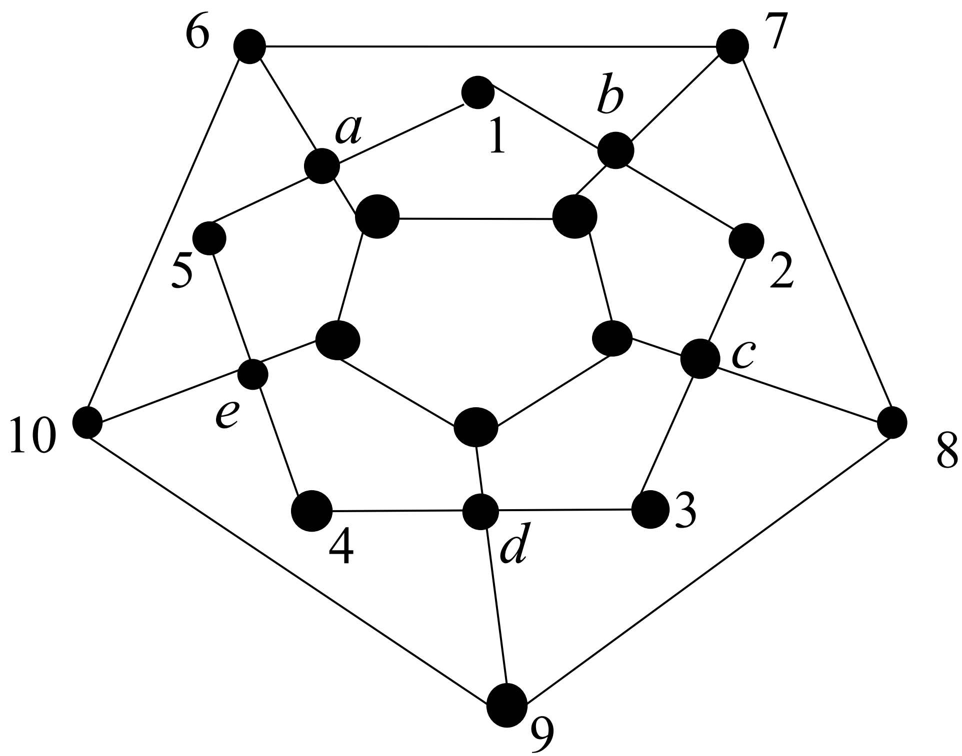
D_1



D_2

习题八:7

- 使用哈密顿图的必要条件,即定理8.6.



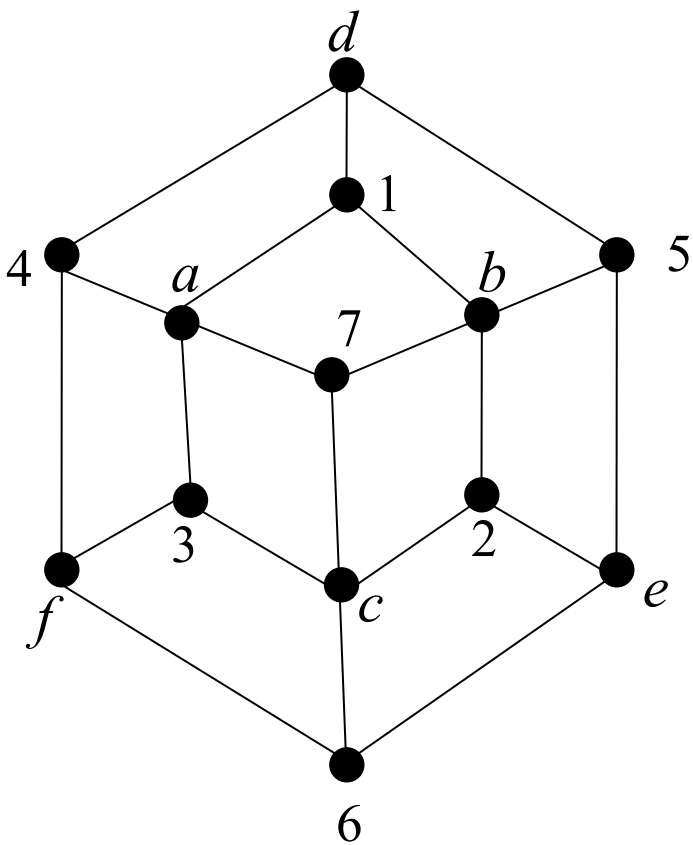
对图进行标定，

令$V_1=\{a,b,c,d,e\}$,

则$p(G-V_1)=7>|V_1|$

习题八:7

- **使用哈密顿图的必要条件,即定理8.6.**



对图进行标定,

令$V_1=\{a,b,c,d,e,f\}$,

则$p(G-V_1)=7>|V_1|$

或者

显然图中不存在奇回路,因此该图是二部图,所以不可能存在长度为13的哈密顿回路.

$V_1=\{1,2,3,4,5,6,7\},V_2=\{a,b,c,d,e\}$

习题八:9

9.[分析]只需 证明$\forall u,v\in V(G),(u,v)\notin E(G)$,有$d(u)+d(v)\geq n$.

证明: 反证法.设$\exists u,v\in V(G)$,且$(u,v)\notin E(G)$,有$d(u)+d(v)\leq n-1$.

由握手定理可知 $\sum d_G(v_i)=2m=(n-1)(n-2)+4$ (1)

令$G'=G-\{u,v\}$,则G'为n-2阶无向简单图,由握手定理可知

$\sum d_{G'}(v_i)=2m'\geq 2(m-(n-1))\geq 2m-2(n-1)$ (2)

$m'\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-(n-2)+1=\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$

由于G'为n-2阶无向简单图,所以$m'\leq \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$,故推出矛盾.

习题八:9（续）

方法2：反证法

若$\exists u,v \in V(G)$,且$(u,v) \notin E(G)$,有$d(u)+d(v) \le n-1$.在K_n中与$\{u,v\}$关联的边共有$2n-3$条, 则这$2n-3$条边中至少有$(2n-3)-(n-1)=n-2$条边不在G中，故

$$|E| \le |E(K_n)|-(n-2)=(1/2)n(n-1)-(n-2)$$

$$=1/2(n-1)(n-2)+1< 1/2(n-1)(n-2)+2,$$

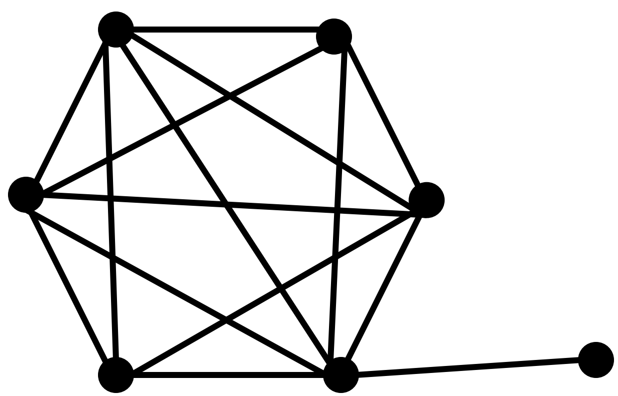
与已知条件矛盾。

习题八:9(续)

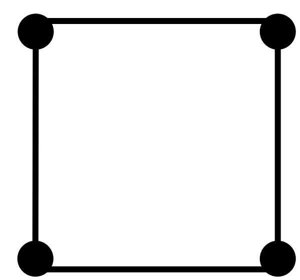
1) 在无向完全图K_{n-1}之外放置一个结点,使其与K_{n-1}中的某一个结点相邻,记得到的图为G,则G的边数m= $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$.因为存在桥,所以G不是哈密顿图.

2) $n=3, m=2$，显然不连通，所以不是哈密顿图.

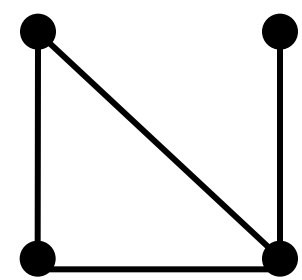
3) $n=4$，$m=4$时，如图(2)和(3)



(1)



(2)



(3)

Exercise 10

- 证明：使用反证法。假设C不是G中的哈密顿回路，即有结点不在C上，因为G是连通图，所以C之外的结点中必存在一个结点与C上的某个结点相邻，不妨设结点*w*不在C上，且与C中的结点*u*相邻，设C上与*u*相邻的两个结点分别是*s*和*t*,那么删除C-(*u*,*s*)并(*w*,*u*)形成新的路径，该路径比删除C上的任意一条边后得到的路径更长，与已知矛盾。得证。

习题八:11

解 构造无向图G=<V,E>,V={a,b,c,d,e,f,g},

$\forall u,v\in V,(u,v)\in E\Leftrightarrow u$与$v$会讲同一种语言.

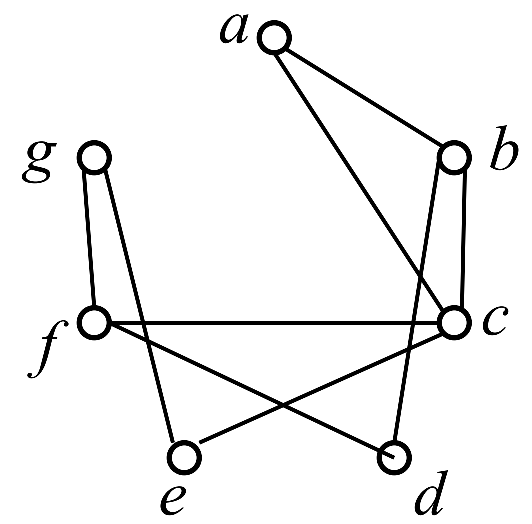
根据已知条件可得下图。

所求问题是求图G中的H回路.

显然可以找到H回路,

如$abdfgeca$,这就是一种圆桌

安排方案。



习题八:12

证 构造无向图$G=\langle V,E\rangle$,$V=\{u|u$是人$\}$,$E=\{(u,v)|u$与v能组成小组完成他们共同熟悉的任务$\}$.

由题意知，$\forall u\in V, d(u)=k$, 因此有

$\forall u,v\in V, d(u)+d(v)=2k=n$,所以G中含有哈密顿回路。找出其中任意一条哈密顿回路C，C上相邻的两个元素两两一组去完成他们共同熟悉的任务。

习题八:13

13.[分析]用(半)欧拉图的充分条件定理8.7及推论证明.

证明: 构造无向简单图G:

$V=\{v|v$为n人之一$\}$, $E=\{(u,v)|u,v\in V,u\neq v,u$与$v$互相认识$\}$

则G为n阶简单图,$\forall v_i,v_j\in V$,$d(v_i)+d(v_j)\geq n-2$, $i\neq j$.

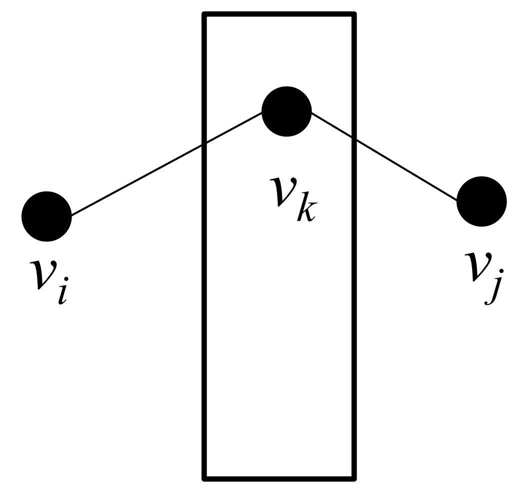
(1)若v_i与v_j认识 ,则$d(v_i)+d(v_j)\geq n-2+2=n$.

(2)若v_i与v_j不认识 ,则$\forall v_k\in V,k\neq i,k\neq j$,都有

$$(v_i, v_k)\in E\wedge (v_j, v_k)\in E.$$

否则, 若$(v_i, v_k)\in E\wedge (v_j, v_k)\notin E$,则$v_j$和$v_k$都不认识$v_j$,即 v_i和v_k合起来至多认识其余的n-3人,

与已知矛盾.同理可得 $(v_i, v_k)\notin E$不成立。



习题八:13(续)

那么$d(v_i)+d(v_j)=(n-2)+(n-2)=2(n-2)$

当$n \geq 3$时,$2(n-2) \geq n-1$,由定理8.7知,G是半哈密顿图,G中存在哈密顿通路,故这n个人能排成满足要求的一列.

当$n \geq 4$时,$2(n-2) \geq n$,由定理8.7的推论知,G是哈密顿图,G中存在哈密顿回路,故这n个人能排成满足要求的圆圈.

习题八:13(续)

- 方法2：

先证明$\forall v \in V(G)$，有$d(v) \geq n-2$.

否则,存在u,$d(u) \leq n-3$,则存在两个顶点$s,t \in V(G)$,且$(s,u) \notin E(G)$, $(t,u) \notin E(G)$,显然s,t合起来不认识u,与题意矛盾。

当$n \geq 3$时, $\forall v_i \in V(G)$, $\forall v_j \in V(G)$,

$d(v_i)+d(v_j) \geq 2(n-2)=2n-4 \geq n-1$,所以G中存在哈密顿通路, 任意一条哈密顿通路即为一种排列方式。

当$n \geq 4$时，$d(v_i)+d(v_j) \geq 2(n-2) \geq n$,所以G含有哈密顿回路，任意一条哈密顿回路即为一种排列方式。