16.10 由于 $2 \otimes 2 = 0, 3 \otimes 3 = 1$。因此，含有 2 的子半群必含 0，含有 3 的子半群必含 1。由于 0 是零元，1 是单位元，它们的加入显然不改变一个子半群的封闭性(即，若 $\langle S, \otimes \rangle$ 是 V 的一个子半群，则 $\langle S \cup \{0\}, \otimes \rangle$ 和 $\langle S \cup \{1\}, \otimes \rangle$ 也是 V 的子群)。而 $2 \otimes 3 = 2$，这一结果对子半群的封闭性也没有影响(因为若这一运算能够在某个子半群中出现，说明运算数 2 和 3 都在这个子半群中，从而运算结果 2 自然在这个子半群中)。从而 V 的子半群有：

$V_1 = \langle \{0\}, \otimes \rangle$;

$V_2 = \langle \{1\}, \otimes \rangle$;

$V_3 = \langle \{0, 1\}, \otimes \rangle$;

$V_4 = \langle \{0, 2\}, \otimes \rangle$;

$V_5 = \langle \{1, 3\}, \otimes \rangle$;

$V_6 = \langle \{0, 1, 2\}, \otimes \rangle$;

$V_7 = \langle \{0, 1, 3\}, \otimes \rangle$;

$V_8 = V = \langle \mathbb{Z}_4, \otimes \rangle$;

由于 1 是单位元，因此所有含有 1 的子半群都是 V 的子独异点。此外，由于 V_1 中只有一个元素，它自然也是独异点[1]，但它不是 V 的子独异点，这是因为：按子独异点的定义，只有 $\langle Z_4, \otimes, 1 \rangle$ 的子代数系统才是“V 的子独异点”。而 V_1 对 $\langle Z_4, \otimes, 1 \rangle$ 中的代数常数 1 不封闭，因而不是 V 的子独异点。而 $2 \otimes 2 = 2 \otimes 0 = 0$，从而 V_4 无单位元，不是独异点。

因此，上面 7 个子半群中，除 V_4 外，都是独异点。除 V_1 和 V_4 外，都是 V 的子独异点。

16.11

$\bar{*}$	$[a]$	$[b]$
$[a]$	$[a]$	$[b]$
$[b]$	$[b]$	$[a]$

16.12

(1)

证明： $\forall a, b, c, d \in S, aRc \wedge bRd$，分两种情况讨论：

① 若 $a, b, c, d \notin I$，则由 R 的定义有：$a = c \wedge b = d$。从而有 $a \circ b = c \circ d$，由 R 的定义可知：$(a \circ b)R(c \circ d)$。

② 若不然，则 a, c 和 b, d 至少有一组在 I 中。若 $a, c \in I$，则由 $IS \subseteq I$ 知，$a \circ b \in I \wedge c \circ d \in I$。若 $b, d \in I$，则由 $SI \subseteq I$ 知，$a \circ b \in I \wedge c \circ d \in I$。

因此，无论在哪种情况下都有：$aRc \wedge bRd \Rightarrow (a \circ b)R(c \circ d)$。

这就证明了 R 是 V 上的同余关系。 □

(2) 由 R 的定义知，I 中所有元素构成一个等价类，$S - I$ 中每一个元素单独构成一个等价类。从而 $S/R = \{I\} \cup \{\{x\} \mid x \in S - I\}$。而由 I 的性质知，$I \bar{\circ} x = x \bar{\circ} I = I, \forall x \in S/R$。对于其它元素 $[x], [y] \in (S/R - \{I\})$，$\{x\} \bar{\circ} \{y\} = [x \circ y] = \begin{cases} \{x \circ y\}, & \text{若 } x \circ y \notin I \\ I, & \text{若 } x \circ y \in I \end{cases}$。而前一种情况可以统一于后者(因为对任意 $[x], [y] \in S/R$，若 $x \in I \vee y \in I$，则必有 $x \circ y \in I$，从而 $[x] \bar{\circ} [y] = I$)。

[1]对任意含有一个二元运算的代数系统 $\langle S, * \rangle$，若 S 中只有一个元素 a，则由运算封闭性知，$a * a = a$，从而 a 满足条件 $\forall x \in S(a * x = x * a = x)$，是单位元。因此，任何含一个二元运算和一个元素的代数系统必是独异点(而且也是群)。