1995 年计算机数学基础

三、

1.

(1) $\kappa = 2$；

(2) $\lambda = 3$；

(3) $\chi = 4$；

(4) 生成树中有 9 条树枝和 10 条弦。

2. 2 个(由于任何非平凡的树至少有 2 片树叶，而 G 的生成树上的树叶显然都不是割点，所以至少有 2 个非割点。考虑 G 恰为一条初级通路的情况，可知这个下界是 tight 的)。

3. 6 个。

4. 3 个(原式等价于 $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$)。

5. $\langle 1, 0 \rangle$。

6.

(1) $P_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ 个。

(2) $n!\left\{ {m \atop n} \right\}$ 个，其中 $\left\{ {m \atop n} \right\}$ 为第二类 Stirling 数。

四、

2.

证明： 由于 $R_1 = R \cap B \times B \subseteq B \times B$，所以 R_1 是 B 上的二元关系。下面证明 R_1 是偏序关系。

自反性。对任意 $b \in B$，有 $\langle b, b \rangle \in R$ 和 $\langle b, b \rangle \in B \times B$，从而有 $\langle b, b \rangle \in R_1$。因此，$R_1$ 是自反的。

传递性。对任意 $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \in R_1$，有 $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \in R$，从而由 R 的传递性有 $\langle a, c \rangle \in R$，又由 $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \in R_1 \subseteq B \times B$ 知 $a, b, c \in B$，从而 $\langle a, c \rangle \in B \times B$。从而有 $\langle a, c \rangle \in R_1$。因此，$R_1$ 是传递的。

反对称性。对任意 $a, b \in A$，若 $\langle a, b \rangle \in R_1 \subseteq R$ 且 $\langle b, a \rangle \in R_1 \subseteq R$，则由 R 的反对称性知，$a = b$。因此，R_1 是反对称的。

这就证明了 R_1 是 B 上的偏序关系。 □

3.

证明： 首先证明存在 $a \in G$，使得 $a^{-1} \neq a$。若不然，则对任意 $a, b \in G$，都有 $a = a^{-1}, b = b^{-1}$，从而：

$$aabb = aa^{-1}bb^{-1} \qquad (a^{-1} = a, b^{-1} = b)$$