$$
\begin{aligned}
&= \langle y_1 \circ_i y_2, x_1 \circ_i x_2\rangle && (\varphi\text{ 定义})\\
&= \langle y_1, x_1\rangle \overline{*}_i \langle y_2, x_2\rangle && (\text{积代数定义})\\
&= \varphi(\langle x_1, y_1\rangle)\overline{*}_i\varphi(\langle x_2, y_2\rangle) && (\varphi\text{ 定义})
\end{aligned}
$$

这就证明了 φ 是 $V_1 \times V_2$ 到 $V_2 \times V_1$ 的同态映射，且为双射。

从而有：$V_1 \times V_2 \overset{\varphi}{\cong} V_2 \times V_1$。 □

15.20 先证一个引理。

引理 15.1 对任意全函数 $f, g : A \to B$，若 $|B| = 2$，则有：$f = g$ 当且仅当 $\exists b_0(b_0 \in B \land \forall x(x \in A \to (f(x) = b_0 \leftrightarrow g(x) = b_0)))$。

证明： 必要性显然。下面证充分性：

反设 $f \neq g$，则存在 $x \in A$，使 $f(x) \neq g(x)$。由 $|B| = 2$ 和 $f(x) \neq g(x)$ 知，$f(x)$ 和 $g(x)$ 中有且仅有一个等于 b_0，这与条件 $\forall x(x \in A \to (f(x) = b_0 \leftrightarrow g(x) = b_0))$ 矛盾。 □

再证原题。

证明： 由命题逻辑矛盾律和排中律知，φ 是全函数(即，对任何 $x \in \mathcal{P}(\{a, b\})$，$a \in x$ 和 $a \notin x$ 有且仅有一个成立)。

由 $\{a\} \in \mathcal{P}(\{a, b\}), \varphi(\{a\}) = 1$ 和 $\{b\} \in \mathcal{P}(\{a, b\}), \varphi(\{b\}) = 0$ 知，φ 是满射。

下面验证 φ 是同态映射。

$\forall x, y \in A$，

$$
\begin{aligned}
\varphi(x \cup y) = 1 &\iff a \in x \cup y && (\varphi\text{ 定义})\\
&\iff a \in x \lor a \in y && (\text{集合并定义})\\
&\iff \varphi(x) = 1 \lor \varphi(y) = 1 && (\varphi\text{ 定义})\\
&\iff \varphi(x) + \varphi(y) = 1 && (\text{布尔加定义})
\end{aligned}
$$

注意到，可以将 $\varphi(x \cup y)$ 和 $\varphi(x) + \varphi(y)$ 看成两个从 $\mathcal{P}(a, b)$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数。再由 $|\{0, 1\}| = 2, 1 \in \{0, 1\}$ 和引理 15.1 可知：$\forall x, y \in A, \varphi(x \cup y) = \varphi(x) + \varphi(y)$。

$\forall x, y \in A$，

$$
\begin{aligned}
\varphi(x \cap y) = 1 &\iff a \in x \cap y && (\varphi\text{ 定义})\\
&\iff a \in x \land a \in y && (\text{集合交定义})\\
&\iff \varphi(x) = 1 \land \varphi(y) = 1 && (\varphi\text{ 定义})\\
&\iff \varphi(x) \cdot \varphi(y) = 1 && (\text{布尔乘定义})
\end{aligned}
$$

从而有：$\forall x, y \in A, \varphi(x \cap y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$。

$\forall x \in A$，

$$
\begin{aligned}
\varphi(\sim x) = 1 &\iff a \in \sim x && (\varphi\text{ 定义})\\
&\iff a \notin x && (\text{绝对补定义})\\
&\iff \varphi(x) = 0 && (\varphi\text{ 定义})\\
&\iff -\varphi(x) = 1 && (\text{布尔补定义})
\end{aligned}
$$

从而有：$\forall x \in A, \varphi(\sim x) = -\varphi(x)$。

由于 $a \notin \varnothing, a \in \{a, b\}$，从而有 $\varphi(\varnothing) = 0, \varphi(\{a, b\}) = 1$。

这就证明了 φ 是 V_1 到 V_2 的同态映射。再由 φ 是满射知，φ 是 V_1 到 V_2 的满同态。 □

15.21

(1)