反对称性。对任意 $f,g\in B^A$，若 $fRg\wedge gRf$，则对所有 $x\in A$，有 $f(x)\preccurlyeq g(x)\wedge g(x)\preccurlyeq f(x)$，从而有 $f(x)=g(x)$。由 x 的任意性知，$f=g$。所以 R 是反对称的。

这就证明了 R 是偏序关系。 □

(2) $\langle B^A,R\rangle$ 存在最大元当且仅当 $\langle B,\preccurlyeq\rangle$ 存在最大元。若 $\langle B,\preccurlyeq\rangle$ 中存在最大元 m，则常数函数 $f:A\to B,\forall x\in A,f(x)=m$ 就是 $\langle B^A,R\rangle$ 的最大元。

证明： 充分性。若 $\langle B,\preccurlyeq\rangle$ 存在最大元 m，则取 $f:A\to B$，对所有 $x\in A$，令 $f(x)=m$。显然，对任意 $g\in B^A$，$x\in A$，都有 $g(x)\preccurlyeq f(x)=m$，从而有 gRf。因此，$\langle B^A,R\rangle$ 有最大元 f。

必要性。反设 $\langle B,\preccurlyeq\rangle$ 不存在最大元，则对任意 $a\in A,f\in B^A$，必存在 $b\in B$，使得 $b\not\preccurlyeq f(a)$ (否则 $f(a)$ 将成为 B 的最大元)。令 $g:A\to B,\forall x,g(x)=b$，则 $g(a)\not\preccurlyeq f(a)$，从而 $g\not R f$，f 不是最大元。由 f 的任意性知，$\langle B^A,R\rangle$ 无最大元。 □

七、

证明： 充分性。若 G 为素数，则由 Lagrange 定理知，G 没有非平凡的子群。从而 G 是单群。

必要性。设 G 为单群。任取 G 中一个非单位元 $a\in G$ (本题应假定 G 是非平凡的，否则若 $G=\{e\}$，则 G 也是单群，但 $|G|=1$，不是素数)，则由于 $\langle a\rangle$ 是 G 的正规子群(因为 G 是 Abel 群，所以 G 的一切子群都是正规的)，且 a 不是单位元，所以 $|\langle a\rangle|=|a|>1$，$\langle a\rangle\neq\{e\}$。由单群定义知，必有 $\langle a\rangle=G$。从而 $G=\{a^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 是由 a 生成的循环群。假若 G 不是素数阶的，就存在 $k\mid|G|,1<k<|G|$，而 $1<|\langle a^k\rangle|=|a^k|=\dfrac{|G|}{k}<|G|$，从而 $\langle a^k\rangle$ 是 G 的一个非平凡的正规子群，矛盾。 □