第二章 二元关系

定理 2.1 $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ 的充要条件是 $a = c$ 且 $b = d$.

定理 2.2 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \cdots, b_n \rangle$ 当且仅当 $a_i = b_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

定理 2.3 设 F, G 为二集合，则

(1) $\mathrm{dom}(F \cup G) = \mathrm{dom}\, F \cup \mathrm{dom}\, G$;

(2) $\mathrm{ran}(F \cup G) = \mathrm{ran}\, F \cup \mathrm{ran}\, G$;

(3) $\mathrm{dom}(F \cap G) \subseteq \mathrm{dom}\, F \cap \mathrm{dom}\, G$;

(4) $\mathrm{ran}(F \cap G) \subseteq \mathrm{ran}\, F \cap \mathrm{ran}\, G$;

(5) $\mathrm{dom}\, F - \mathrm{dom}\, G \subseteq \mathrm{dom}(F - G)$;

(6) $\mathrm{ran}\, F - \mathrm{ran}\, G \subseteq \mathrm{ran}(F - G)$.

定理 2.4 设 F 为任一集合，则

(1) $\mathrm{dom}\, F^{-1} = \mathrm{ran}\, F$;

(2) $\mathrm{ran}\, F^{-1} = \mathrm{dom}\, F$;

(3) $(F^{-1})^{-1} \subseteq \mathrm{dom}\, F$，当 F 为关系时，等号成立.

定理 2.5 设 R_1, R_2, R_3 为三个集合，则
$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$$

定理 2.6 设 R_1, R_2, R_3 为三个集合，则

(1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3$;

(2) $(R_1 \circ R_2) \cup R_3 = R_1 \circ R_3 \cup R_2 \circ R_3$;

(3) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$;

(4) $(R_1 \circ R_2) \cap R_3 = R_1 \circ R_3 \cap R_2 \circ R_3$.

定理 2.7 设 F, G 为二集合，则
$$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}.$$

定理 2.8 设 $R, S, A, B, \mathscr{A}$ 为集合，$\mathscr{A} \neq \varnothing$，则

(1) $R \upharpoonright (A \cup B) = (R \upharpoonright A) \cup (R \upharpoonright B)$;

(2) $R \upharpoonright \cup \mathscr{A} = \cup \{R \upharpoonright A \mid A \in \mathscr{A}\}$;

(3) $R \upharpoonright (A \cap B) = (R \upharpoonright A) \cap (R \upharpoonright B)$;

(4) $R \upharpoonright \cap \mathscr{A} = \cap \{R \upharpoonright A \mid A \in \mathscr{A}\}$;

(5) $(R \circ S) \upharpoonright A = R \circ (S \upharpoonright A)$.

定理 2.9 设 $R, S, A, B, \mathscr{A}$ 为集合，$\mathscr{A} \neq \varnothing$，则

(1) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$;

(2) $R[\cup \mathscr{A}] = \cup \{R[A] \mid A \in \mathscr{A}\}$;

(3) $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$;

(4) $R[\cap \mathscr{A}] = \cap \{R[A] \mid A \in \mathscr{A}\}$;

(5) $R[A] - R[B] \subseteq R[A - B]$;

(6) $(R \circ S)[A] = R[S[A]]$.

定理 2.10 设 $R \subseteq A \times A$，则下面的命题是等价的:

(1) R 是自反的;

(2) $I_A \subseteq R$;

(3) R^{-1} 是自反的;

(4) $M(R)$ 主对角线上的元素全为 1;