$$= b \qquad (a * b = b)$$

因此，无论对于何种情况，都有 $b * b = b$。 □

**16.6**

(1)

**证明：** 由题设，若 $a \circ a \neq a$，就有 $a \circ (a \circ a) \neq (a \circ a) \circ a$。与 $V$ 是半群矛盾。 □

(2)

**证明：** 由题设，若 $a \circ b \circ a \neq a$，就有 $a \circ (a \circ b \circ a) \neq (a \circ b \circ a) \circ a$。但：

$$\begin{aligned}
a \circ (a \circ b \circ a) &= (a \circ a) \circ (b \circ a) && \text{(结合律)} \\
&= a \circ (b \circ a) && \text{(第 (1) 小题结论)} \\
&= a \circ (b \circ a \circ a) && \text{(第 (1) 小题结论)} \\
&= (a \circ b \circ a) \circ a && \text{(结合律)}
\end{aligned}$$

矛盾。 □

(3)

**证明：** 由题设，若 $a \circ b \circ a \neq a \circ c$，就有 $(a \circ c) \circ (a \circ b \circ c) \neq (a \circ b \circ c) \circ (a \circ c)$。但：

$$\begin{aligned}
(a \circ c) \circ (a \circ b \circ c) &= (a \circ c \circ a) \circ (b \circ c) && \text{(结合律)} \\
&= a \circ (b \circ c) && \text{(第 (2) 小题结论)} \\
&= a \circ (b \circ (c \circ a \circ c)) && \text{(第 (2) 小题结论)} \\
&= (a \circ b \circ c) \circ (a \circ c) && \text{(结合律)}
\end{aligned}$$

矛盾。 □

**16.7**

**证明：** 由于 $V$ 是可交换半群，故 $*$ 运算满足交换律和结合律。从而：

$$\begin{aligned}
(a * b) * (a * b) &= a * (b * a) * b && \text{(结合律)} \\
&= a * (a * b) * b && \text{(交换律)} \\
&= (a * a) * (b * b) && \text{(结合律)} \\
&= a * b && (a, b \text{ 是幂等元})
\end{aligned}$$

□

**16.8**

**证明：** $\forall x, y \in S$，

$$\begin{aligned}
(x \circ \theta_l) \circ y &= x \circ (\theta_l \circ y) && \text{(结合律)} \\
&= x \circ \theta_l && (\theta_l \text{ 是左零元})
\end{aligned}$$

□

**16.9**

**证明：** 将这个半群记为 $V = \langle S, * \rangle$，由于 $S$ 是非空的，故存在元素 $a \in S$。又由于 $S$ 是有限的，由鸽巢原理知，存在 $i, j \in \mathbb{N}_+, i < j$，使得 $a^i = a^j$。记 $p = j - i$。

注意到，因为 $a^i = a^j = a^{i+p}$，所以有 $a^{i+2p} = a^{j+p} = a^j * a^p = a^i * a^p = a^j = a^i$。对 $n$ 作归纳可证：$\forall n \in \mathbb{N}, a^{i+np} = a^i$。于是有 $a^{i+ip} = a^i$，而 $(a^{ip}) * (a^{ip}) = a^{2ip} = a^{(i+ip)+(ip-i))} = a^{i+ip} * a^{ip-i} = a^i * a^{ip-i} = a^{ip}$。

从而 $a^{ip}$ 就是关于 $*$ 运算的一个幂等元。 □