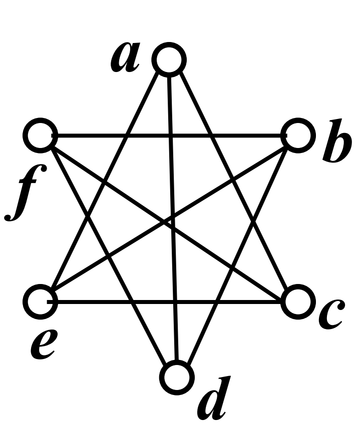
第11章 习题讲解

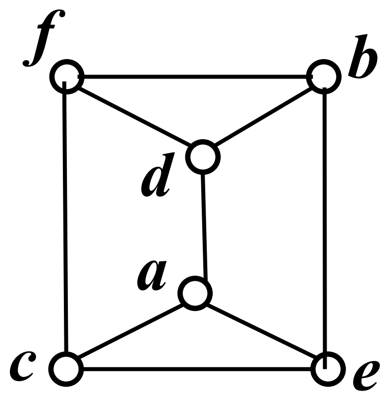
中国海洋大学

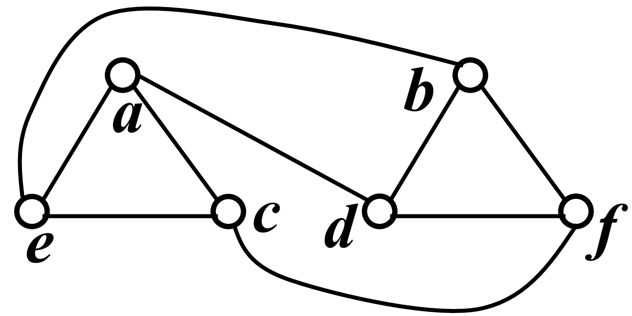
计算机系

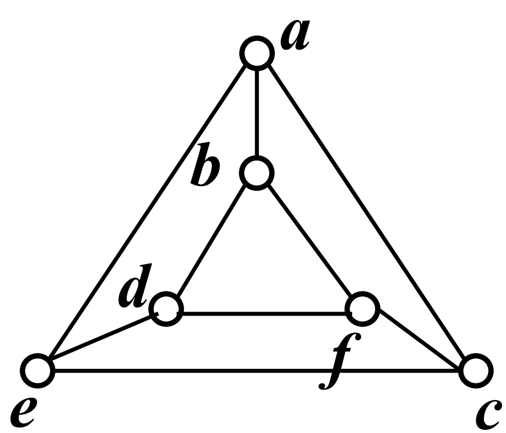
Ch11:1

解 (a)的平面嵌入如下图所示



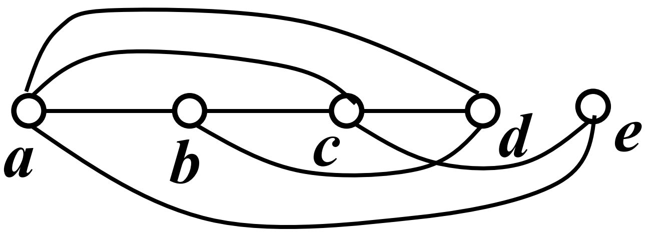


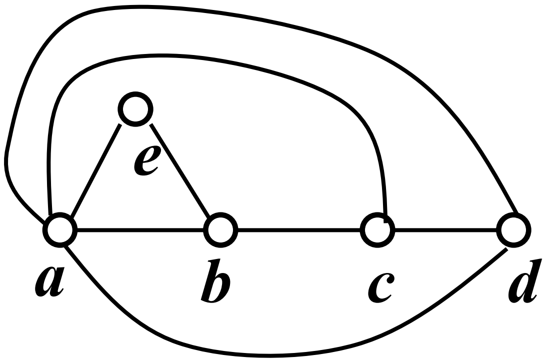


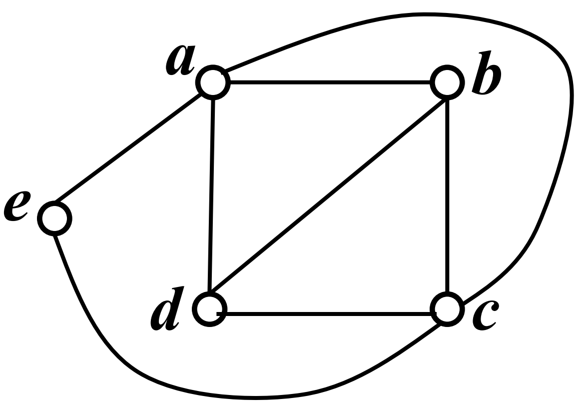


Ch11:1

(b)有的平面嵌入如下图所示







Ch11:4

(1) 证明：反证。

假设G中任何面的次数均大于等于5,则有 $2m \geq 5r$,

$$m \geq \frac{5}{2} r$$

又因为$\delta \geq 3$,所以$2m \geq 3n$, $n \leq \frac{2}{3} m$

又$n - m + r \geq 2$,

$$r \geq m - n + 2 \geq m - \frac{2}{3} m + 2 = \frac{1}{3} m + 2 \geq \frac{5}{6} r + 2$$

$$\therefore r \geq 12$$

与已知条件$r<12$矛盾.

Ch11:4

- 方法二：

因为G是简单图且$\delta \geq 3$, 所以$2m \geq 3n$, 得到$n \leq (2/3)m$

$r<12$, 代入$2 \leq n-m+r$,得到 $m<30$。

假设所有面的次大于等于5，则$2m \geq 5r$, 即$r \leq (2/5)m$, 又

$n \leq (2/3)m$，一同代入$2 \leq n-m+r$,得$m \geq 30$,矛盾。

(2) 如正12面体：r=12,d(v)=3，deg(R_i)=5

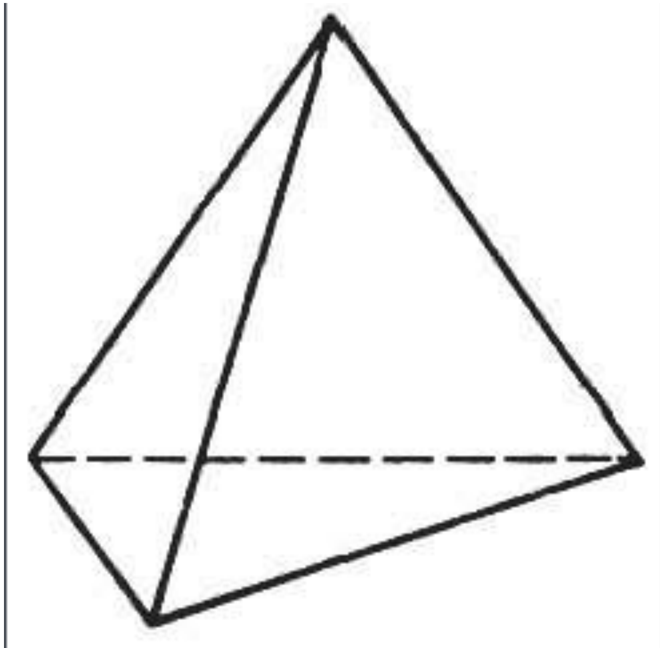


图 1　正四面体

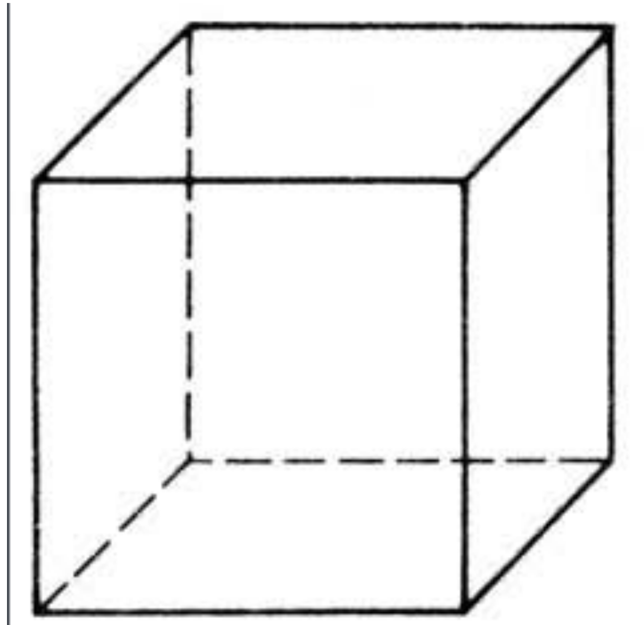


图 4　正六面体

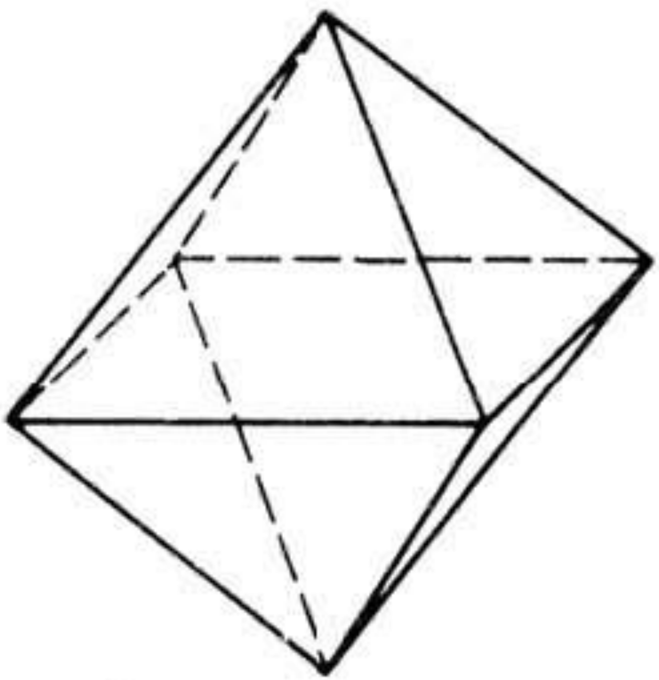


图 2　正八面体

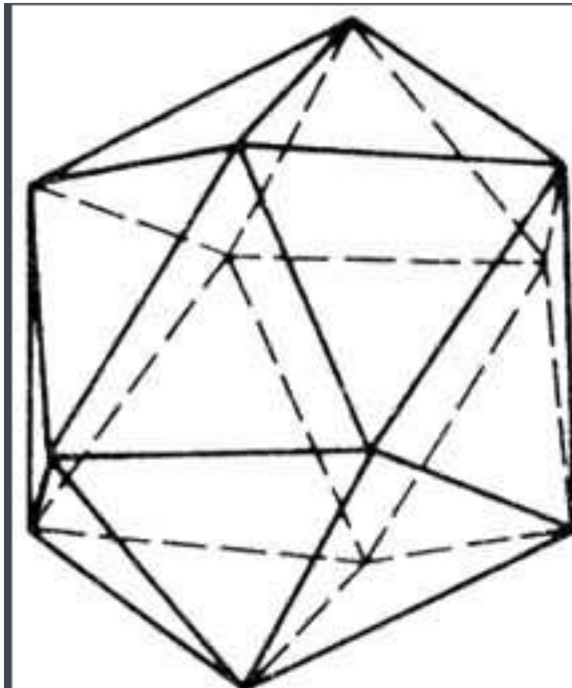


图 3　正二十面体

类型	面数	棱数	顶点数	每面边数	每顶点棱数
正4面体	4	6	4	3	3
正6面体	6	12	8	4	3
正8面体	8	12	6	3	4
正12面体	12	30	20	5	3
正20面体	20	30	12	3	5

Ch11: 5

5. 设G是n阶m条边的简单平面图,已知m<30,证明存在顶点v,d(v)≤4.

[分析]反证法,利用定理11. 10

证明 假设任意顶点v,d(v) ≥5, 则2m ≥5n， 得n ≤(2/5)m, 代入m ≤3n-6，可得m ≤(6/5)m-6，即m ≥30．这与已知m<30 矛盾。

Ch11:6

分析：利用欧拉公式及平面图的性质.

【方法1】将n=7,m=15代入 n-m+r=2, 得 r=10,显然G不是树,G中存在圈, 又G是简单图,则任意面的次数≥3.

$$2m=\sum_{i=1}^{r}deg(\mathrm{R_i})=30,\quad \text{故}\forall Ri,\ deg(\mathrm{R_i})=3$$

【方法2】 同上,任意面的次数≥3,下证任意面的次数≤3.若存在R_i,deg(R_i)≥4,

$2m>3r=3*(2+m-n)\Rightarrow m<3n-6\Rightarrow 15<15$.矛盾.

【方法3】(反证法)设G不是极大平面图,则对任意不相邻顶点u,v, G∪(u,v)=G′, G′仍为平面图.对于G′, n'=7,

m′=16>3n'-6=15, 则G′不是平面图,矛盾.

Ch11:6

【方法四】

将n=7,m=15代入 n-m+r=2, 得 r=10.

假设G不是极大平面图,则一定存在次数大于等于4的面，因此有2m>3r，即30>30,矛盾。

Ch11: 7

7. 设G是$n(n\geq 11)$阶无向简单图,则G或$\overline{G}$必为非平面图.

[分析]用解二次不等式的方法，利用定理11.10

证明：若G和$\overline{G}$都是平面图，则

$$m+m'=\frac{1}{2}n(n-1),$$

$$m\leq 3n-6,\ m'\leq 3n-6$$

则 $n^2-13n+24\leq 0$

$2.22\leq n\leq 10.78$，与$n\geq 11$矛盾.

Ch11: 7

7. 设G是$n(n\geq 11)$阶无向简单图,则G或$\overline{G}$必为非平面图.

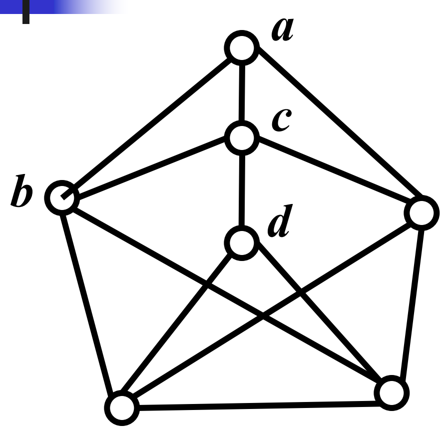
证明：G和$\overline{G}$中至少有一个图其边数≥(1/4)n(n-1),不妨将其设为G, 则

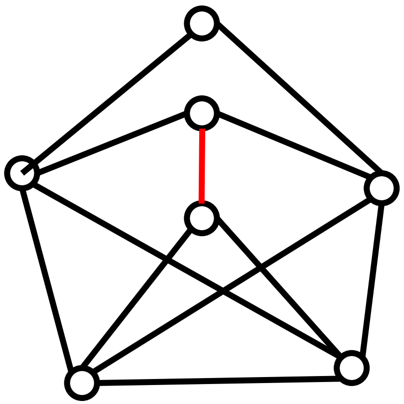
$$(1/4)n(n-1)\leq m\leq 3n-6$$

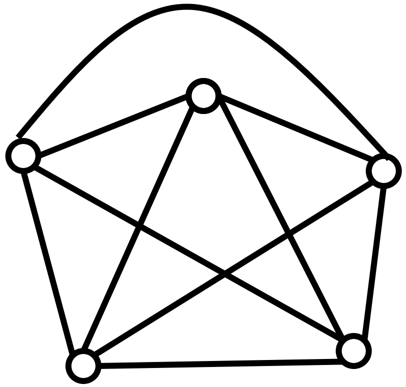
则 $n^2-13n+24\leq 0$

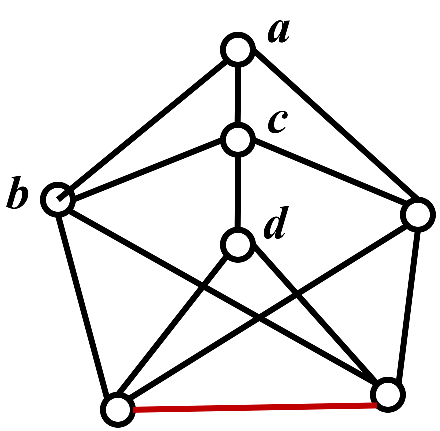
$2.22\leq n\leq 10.78$, 与$n\geq 11$矛盾.

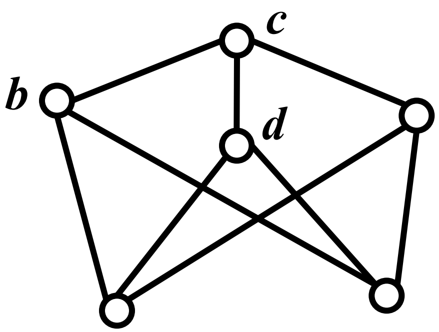
Ch11:9





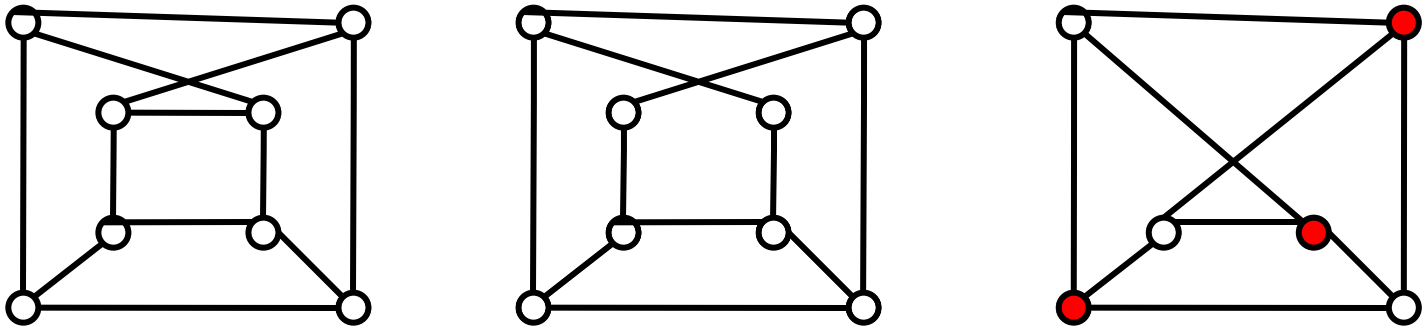




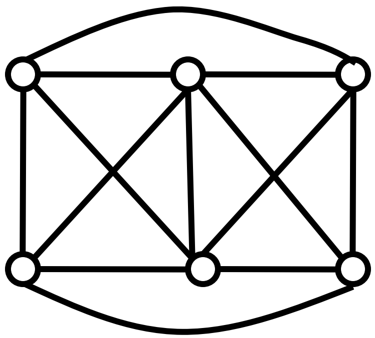


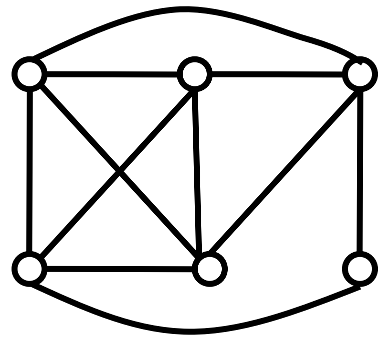
删除顶点a和红色的边

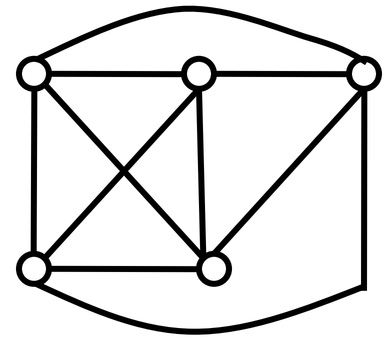
Ch11:9



Ch11:9

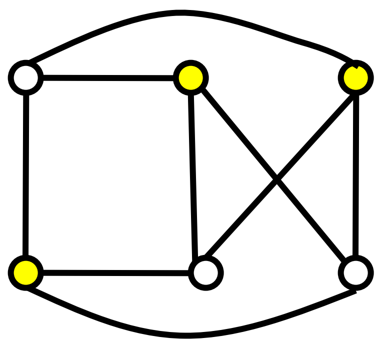






K_5

或者



$K_{3,3}$

Ch11：11

11. 设n阶m条边的平面图是自对偶图,证明 $m=2n-2$

[分析]利用自对偶图的定义和欧拉公式

证明 设G为自对偶图,则G与G* 同构, 因为G*是连通的，所以G一定连通。

$m=m^*$， $n=n^*=r$,

由欧拉公式可得 $n-m+r=n-m+n=2$,

故 $m=2n-2$.

Ch11：12

证 因为G是极大平面图，所以G是简单图，因此G中无自环和平行边 且G中每个面的次都是3，故G*中每个结点的度都是3，即G*是3正则图。

假如G*的边连通度小于2，即G*中存在桥，那么G必存在自环，这与G是极大平面矛盾，所以G*的边连通度大于等2，即G*是2-边连通图。

综上所述，得证。

Ch11：13

13. 设G是2-边连通的简单平面图,且每两个面的边界至多一条公共边,证明G中至少两个面的次数相同.

[分析]利用鸽巢原理

证明 G是简单图,$\forall R_i$, $deg(R_i) \geq 3$,又G是2-边连通图,则G无桥,每条边都是两个不同面的公共边界,且每两个面至多一条公共边界,则$\forall R_i$, $deg(R_i) \leq r\text{-}1$,

$$\forall R_i,\ 3 \leq deg(R_i) \leq r\text{-}1,$$

由鸽巢原理,可知G 中至少两个面的次数相同.

[方法二]求对偶图G*；再证$\forall v^*$, $2 \leq d(v^*) \leq r\text{-}1$；最后由鸽巢原理得证.

Ch11：14

14. 证明：平面图G的对偶图G*是欧拉图当且仅当G中每个面的次数均为偶数.

[分析]利用欧拉图的充分必要条件和对偶图的性质.

证明 **平面图G的对偶图G*是欧拉图**

$\Leftrightarrow$ **G* 中任意顶点** v_i*, $d(v_i{*})$ **mod2≡0,**

$d(v_i{*})=deg(R_i)$.

$\Leftrightarrow$ **G中每个面的次数均为偶数.**

Ch11:15

15.证明：不存在具有5个面，且每两个面的边界都共享一条公共边的平面图。

证明：

假设存在满足要求的图G，令G*是G的对偶图，则$n^*=5$. 因为G中每两个面共享一条公共边界，则G*中任意顶点v_i^*,d(v_i^*)＝4，且G*中不存在自环和平行边,显然G*是K_5，是非平面图,与G*是G的对偶图矛盾.

Ch11:16

16.设G是连通的3-正则平面图,r_i是G中次数i的面的个数,证明

$12=3r_3+2r_4+r_5-r_7-2r_8-3r_9-\ldots$

证明

因为 G 是 3-正则平面图，所以有$2m = 3n = \sum_{i=3} ir_i$

可得：$m = \frac{1}{2}\sum_{i=3} ir_i$，　$n = \frac{1}{3}\sum_{i=3} ir_i$

代入欧拉公式 n-m+r=2,得

$$\frac{1}{3}\sum_{i=3} ir_i - \frac{1}{2}\sum_{i=3} ir_i + \sum_{i=3} r_i = 2$$

解得

$$6\sum_{i=3} r_i - \sum_{i=3} i r_i = \sum_{i=3} (6-i) r_i = 12$$

因此有 $12=3r_3+2r_4+r_5-r_7-2r_8-3r_9-\ldots$