定理 2.21 设 $A \neq \varnothing$，$R_1, R_2 \subseteq A \times A$，则下列各式成立:

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$;　　(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

定理 2.22 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$，则

$$r(R) = R \cup I_A.$$

定理 2.23 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$，则

$$s(R) = R \cup R^{-1}.$$

定理 2.24 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$，则

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots.$$

推论 设 A 为非空且为有穷集合，$R \subseteq A \times A$，则存在自然数 l，使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^l.$$

定理 2.25 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$，则

(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的;

(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的;

(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的.

定理 2.26 设 $R \subseteq A \times A \wedge A \neq \varnothing$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$.

定理 2.27 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对于任意的 $x, y \in A$，下面各式成立:

(1) $[x]_R \neq \varnothing$ 且 $[x]_R \subseteq A$;　　(2) 若 $\langle x, y\rangle \in R$，则 $[x]_R = [y]_R$;

(3) 若 $\langle x, y\rangle \notin R$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;　　(4) $\cup\{[x]_R \mid x \in A\} = A$.

定理 2.28 设 A 为一个非空集合.

(1) 设 R 为 A 上的任意一个等价关系，则 A 关于 R 的商集 A/R 为 A 的一个划分;

(2) 设 $\mathscr{A}$ 为 A 上的任意一个划分，令 $R_{\mathscr{A}} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x, y$ 属于 $\mathscr{A}$ 的同一个划分块$\}$，则 $R_{\mathscr{A}}$ 是为 A 上的等价关系.

定理 2.29 设 $\preccurlyeq$ 为非空集合 A 上的偏序关系，$\prec$ 为 A 上的拟序关系. 则

(1) $\prec$ 是反对称的;

(2) $\preccurlyeq - I_A$ 为 A 上的拟序关系;

(3) $\prec \cup I_A$ 为 A 上的偏序关系.

定理 2.30 设 $\prec$ 为非空集合 A 上的拟序关系，则 $\forall x, y \in A$，

(1) $x \prec y, x = y, y \prec x$，三式中至多有一式成立;

(2) 若 $(x \prec y \vee x = y) \wedge (y \prec x \vee x = y)$，则 $x = y$.

定理 2.31 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为一个偏序集，若 A 中最长链的长度为 n，则

(1) A 中存在极大元;

(2) A 存在 n 个划分块的划分，每个划分块都是反链.