$\iff \forall x(x \in A \cup B \to x \in {\sim}C \cup B)$ (子集定义)

$\iff \forall x((x \in A \vee x \in B) \to (\neg x \in C \vee x \in B))$ (集合并运算、绝对补运算定义)

$\iff \forall x(\neg(x \in A \vee x \in B) \vee (\neg x \in C \vee x \in B))$ (蕴涵等值式)

$\iff \forall x((\neg x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (\neg x \in C \vee x \in B))$ (命题逻辑德·摩根律)

$\iff \forall x((\neg x \in A \vee \neg x \in C \vee x \in B) \wedge (\neg x \in B \vee \neg x \in C \vee x \in B))$ (命题逻辑分配律)

$\iff \forall x((\neg x \in A \vee \neg x \in C \vee x \in B) \wedge 1)$ (命题逻辑排中律、零律)

$\iff \forall x(\neg x \in A \vee \neg x \in C \vee x \in B)$ (命题逻辑同一律)

$\iff \forall x(\neg(x \in A \wedge x \in C) \vee x \in B)$ (命题逻辑德·摩根律)

$\iff \forall x((x \in A \wedge x \in C) \to x \in B)$ (蕴涵等值式)

$\iff \forall x((x \in A \cap C) \to x \in B)$ (集合交定义)

$\iff x \in A \cap C \subseteq B$ (子集定义)

下面证明 $*$，即，对任意集合 A, B，有 $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$。

若 $A \cap B = A$，则：

$\forall x$,

$x \in A$

$\iff x \in A \cap B$ $(A \cap B = A)$

$\iff x \in A \wedge x \in B$ (集合交定义)

$\implies x \in B$ (命题逻辑化简律)

从而有 $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$。

若 $A \subseteq B$，则：

$\forall x$,

$x \in A$

$\implies x \in B$ (子集定义)

$\iff 1 \wedge x \in B$ (命题逻辑同一律)

$\iff x \in A \wedge x \in B$ (前提)

$\iff x \in A \cap B$ (集合交定义)

从而有 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$。

综合得 $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$。 □

2.

(1) $f(\mathbb{N} \times \{1\}) = \{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$。

(2) $f^{-1}(\{0\}) = \{\langle m, n\rangle \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge mn = 0\} = \{\langle 0, n\rangle, \langle n, 0\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$。

(3) f 不是单射(例如 $f(\langle 1, 4\rangle) = f(\langle 2, 2\rangle) = 4$，但 $\langle 1, 4\rangle \neq \langle 2, 2\rangle$)，从而也不是双射。

(4) f 是满射，因为对任何 $n \in \mathbb{N}$，有 $\langle n, 1\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f(\langle n, 1\rangle) = n$。

3.

(1) 易知 $\operatorname{Aut} G = \{\varphi_i \mid i = 1, 2, 3, 4\}$，其中 $\varphi_i : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5 (i = 1, 2, 3, 4)$ 定义为 $\forall x \in \mathbb{Z}_5, \varphi_i(x) = ix \bmod 5$。

运算表如下：