$\iff \langle y,x\rangle \in R^{-1}\cup R$ (集合并定义)

$\iff \langle y,x\rangle \in R\cup R^{-1}$ (交换律)

从而 $R\cup R^{-1}$ 是对称的。

对任意包含 R 的对称二元关系 R'，有：

$\forall\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle \in R\cup R^{-1}$

$\iff \langle x,y\rangle \in R\vee\langle x,y\rangle \in R^{-1}$ (集合并定义)

$\iff \langle x,y\rangle \in R\vee\langle y,x\rangle \in R$ (逆关系定义)

$\implies \langle x,y\rangle \in R'\vee\langle y,x\rangle \in R'$ ($R\subseteq R'$)

$\iff (\langle x,y\rangle \in R'\wedge\langle x,y\rangle \in R')\vee(\langle y,x\rangle \in R'\wedge\langle y,x\rangle \in R')$ (命题逻辑幂等律)

$\iff (\langle x,y\rangle \in R'\wedge\langle x,y\rangle \in R'\wedge 1)\vee(\langle y,x\rangle \in R'\wedge\langle y,x\rangle \in R'\wedge 1)$ (命题逻辑同一律)

$\iff (\langle x,y\rangle \in R'\wedge(\langle x,y\rangle \in R'\wedge(\langle x,y\rangle \in R'\to\langle y,x\rangle \in R')))\vee$

$(\langle y,x\rangle \in R'\wedge(\langle y,x\rangle \in R'\wedge(\langle y,x\rangle \in R'\to\langle x,y\rangle \in R')))$ (R' 是对称的)

$\implies (\langle x,y\rangle \in R'\wedge\langle y,x\rangle \in R')\vee(\langle x,y\rangle \in R'\wedge\langle y,x\rangle \in R')$ (假言推理)

$\iff \langle x,y\rangle \in R'\wedge\langle y,x\rangle \in R'$ (命题逻辑幂等律)

$\implies \langle x,y\rangle \in R'$ (命题逻辑化简律)

即有 $R\cup R^{-1}\subseteq R'$。

综上所述，$R\cup R^{-1}$ 是包含 R 的最小的对称二元关系。 □

(2)

证明：由 R 是二元关系易知，$R\cap R^{-1}$ 也是二元关系。

由引理 1.2 知，$R\cap R^{-1}\subseteq R$，即 $R\cap R^{-1}$ 含于 R。

而对任意 $\langle x,y\rangle$，有：

$\langle x,y\rangle \in R\cap R^{-1}$

$\iff \langle x,y\rangle \in R\wedge\langle x,y\rangle \in R^{-1}$ (集合并定义)

$\iff \langle y,x\rangle \in R^{-1}\wedge\langle y,x\rangle \in R$ (逆关系定义)

$\iff \langle y,x\rangle \in R^{-1}\cap R$ (集合并定义)

$\iff \langle y,x\rangle \in R\cap R^{-1}$ (交换律)

从而 $R\cap R^{-1}$ 是对称的。

对任意含于 R 的对称二元关系 $R'\subseteq R$，有：

$\forall\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle \in R'$

$\iff \langle x,y\rangle \in R'\wedge\langle y,x\rangle \in R'$ (R' 是对称的)

$\implies \langle x,y\rangle \in R\wedge\langle y,x\rangle \in R$ ($R'\subseteq R$)

$\iff \langle x,y\rangle \in R\wedge\langle x,y\rangle \in R^{-1}$ (逆关系定义)

$\iff \langle x,y\rangle \in R\cap R^{-1}$ (集合交定义)

即有 $R'\subseteq R\cap R^{-1}$。

综上所述，$R\cap R^{-1}$ 是含于 R 的最大的对称二元关系。 □

2.14