第**1**讲
基础数据结构

刘汝佳

目录

- 线性结构
- 二叉堆
- 并查集
- 哈希表
- 应用举例

一、线性结构

基础知识

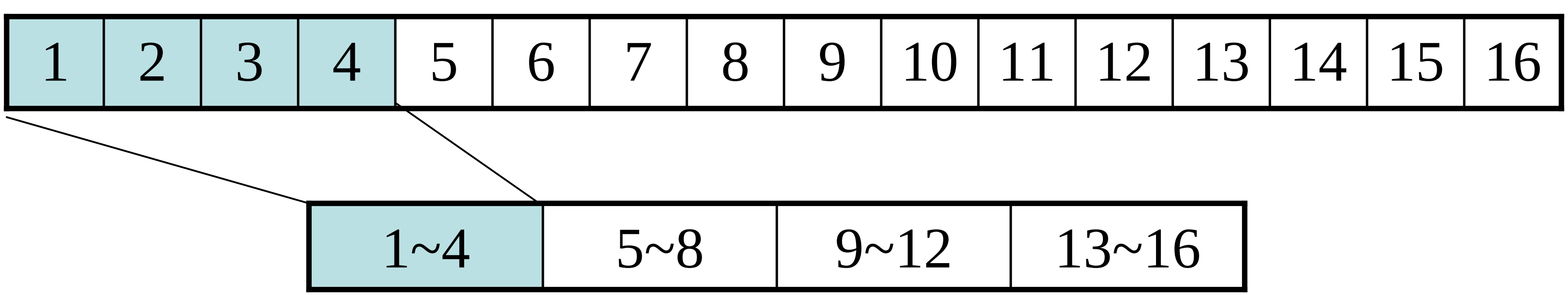
- 数组
- 带头结点的双链表
  - Head结点: 虚拟头结点
  - First结点: 第一个有实际内容的结点
- 队列: 循环队列与Open-Close表

例1. 最小值

- 实现一个n个元素的线性表A。每次可以修改其中一个元素，也可以询问闭区间[p, q]中元素的最小值。
- 1<=n,m<=100000

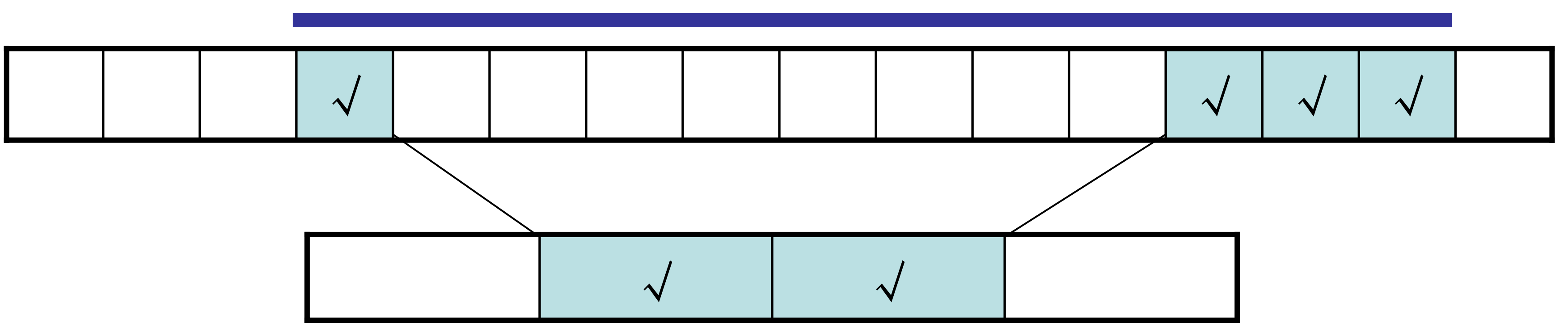
分析

- 利用二级检索的思想
  - 设块长为L, 则一共有n/L个块
  - 维护数组B, 保存每个块的最小值
- Modify(x, y)
  - A[x] = y　　O(1)
  - 重算x所在块的最小值(更新B)　　O(L)



Min操作

- Min(a, b)
  - 把区间[a, b]分成若干部分
  - 完整块: 一共最多n/L个块 O(n/L)
  - 非完整块: 首尾各最多L-1个元素 O(L)
- 每次操作时间复杂度: O(n/L+L)
  - 设L=O($n^{1/2}$)则渐进时间复杂度为O($n^{1/2}$)



例2. 最接近的值

- 给一个n个元素的线性表A，对于每个数A_i，找到它之前的数中，和它最接近的数。即对于每个i，计算

$$C_{\mathrm{i}}=\min\{|A_i-A_j| \mid 1<=j<i\}$$

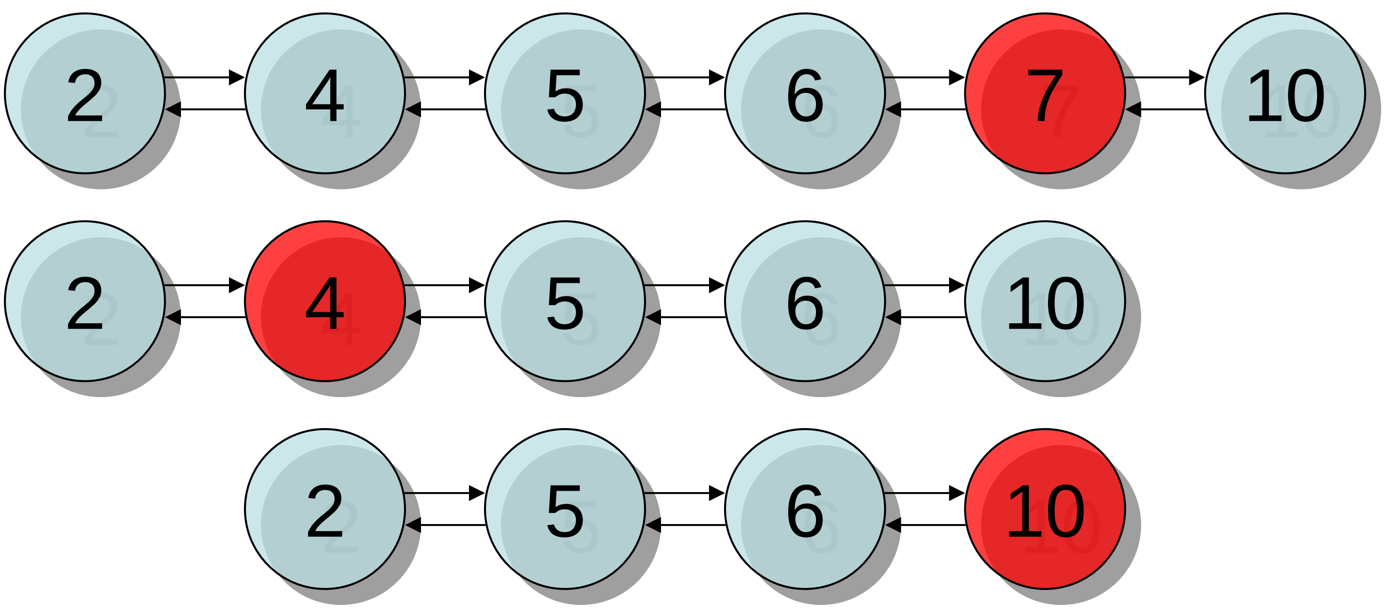
- 规定$C_1=0$。

分析

- 问题的关键: 你只需要解决离线问题
  - 在线问题: 每输入一个A_i, 立刻输出C_i
  - 离线问题: 在给出任何输出之前得到所有A_i
- 预处理: 用O(nlogn)时间给所有A_i排序
  - 很快就会学到了☺
- 主算法
  - 根据从小到大的顺序构造双向链表
  - 依次计算C_n, C_{n-1}, …, C_1　　在线问题可能么?

主算法

- A={2, 6, 5, 10, 4, 7}, 依次计算C_6, C_5, C_4
  - 每次计算C_i时, 链表中恰好是计算C_i需要的元素
  - 计算C_i只需比较两个元素，然后删除A_i **O(1)**



例3. 移动窗口

- 有一个长度为n 的数组，还有一个长度为k<=n 的窗口。窗口一开始在最左边的位置，能看到元素1, 2, 3, …k。每次把窗口往右移动一个元素的位置，直到窗口的右边界到达数组的元素n。

窗口内元素位置	窗口最小值	窗口最大值
[2 7 1] 6 -3 2 5 0 4	1	7
2 [7 1 6] -3 2 5 0 4	1	7
2 7 [1 6 -3] 2 5 0 4	-3	6
2 7 1 [6 -3 2] 5 0 4	-3	6
2 7 1 6 [-3 2 5] 0 4	-3	5
2 7 1 6 -3 [2 5 0] 4	0	5
2 7 1 6 -3 2 [5 0 4]	0	5

分析

- 考虑最小值。假设窗口从左往右移动

…	2	3	5	4	…

- 保存5是不明智的，因为从现在开始一直到5离开窗口，5始终被4“压制”，永远都不可能成为最小值。删除5不会影响结果
- 启发：算最小值的有用元素形成一个递增序列，最小值就是队首元素
- 关键：窗口右移操作

分析

- 窗口右移：队首出队，新元素入队，然后在队列中删除它前面比它大的元素

…	3	3	~~5~~	~~7~~	~~9~~	~~11~~	~~12~~	4	…

- 实现
  – 用链表储存窗口内有用元素
  – 则窗口右移的时间和删除元素的总次数成正比
- 元素被删除后不会再次被插入，因此每个元素最多被删除一次，总次数为O(n), 即：

算法时间总复杂度为 **O(n)**

例4. 程序复杂度

- 给出一段程序，计算它的时间复杂度。这段程序只有三种语句：
  - OP <x>：执行一条时间耗费为x 的指令。这里的x 为不超过100 的正整数。
  - LOOP <x>：与END 配套，中间的语句循环x 次，其中x 可以为规模n，也可以是不超过100 的正整数。
  - END：与LOOP 配套，循环终止。
- 注意：OP 语句的参数不能为变量n，而LOOP 语句的参数可以为变量n，但不允许有其他名字的变量。这样，整个程序的时间复杂度应为n 的多项式。你的任务就是计算并显示出这个多项式。

例4. 程序复杂度

- 输出仅包含一行，即时间复杂度的多项式。这个多项式应该按通常的方式显示处理，即不要输出0n 这样的项，n项也不要输出为n^1，等等。

```
OP 1
LOOP n
  LOOP 10
    LOOP n OP 7 END
    OP 1
  END
END
```

```
70n^2+10n+1
```

分析

- 考虑特殊情况：没有变量n只有常数的情况
- 两种思路
  - 递归求解：不直接，附加开销大☹
  - 基于栈的扫描算法：实现简单明了，效率高☺
- 扫描过程（基本想法）
  - LOOP x和OP x, 把语句入栈
  - END, 不断从栈里弹出语句，直到弹出LOOP
    - 弹出过程中累加操作数x，然后乘以循环次数y
    - 把OP x*y压入栈中，相当于用一条OP等效一个LOOP

分析

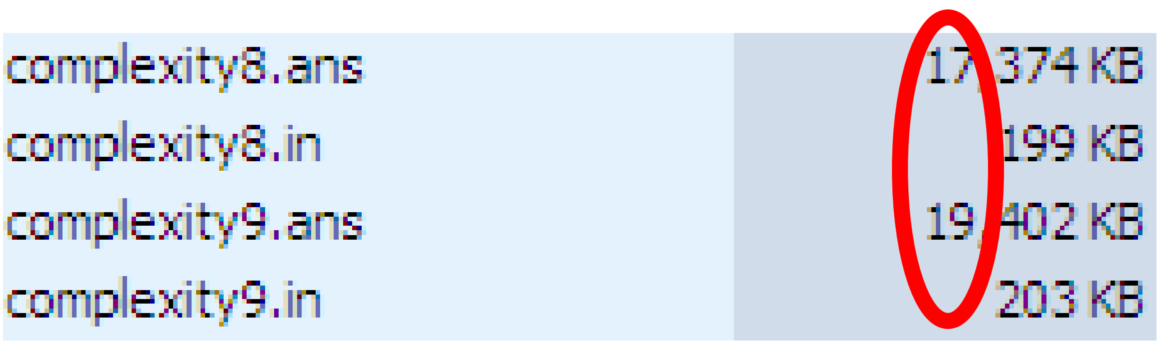
- 栈扫描算法的直接推广
  - 栈里的每个操作数不是数，而是多项式
  - 多项式加法，多项式与整数的乘积
  - 所有通过至少一个数据的同学都采用此法
- 问题
  - 多项式如何表示
  - 多项式操作的时间复杂度是怎样的？

复杂性

- 大部分数据涉及到高精度整数运算
- 高精度运算的复杂性
  - 写起来相对麻烦
  - 时间复杂度：$O(n^2)$ (nlogn is possible, but…)
  - 空间复杂度
- 实际情况：所有使用了高精度运算的同学在时间“爆”掉之前空间先“爆”掉
  - 每个数10000位, n次数可达10000（或更多）
  - 栈里面可以有10000个多项式，**10^{12}=1T !!!!!**

空间…空间…空间…

- 是否可以找到一个空间需求比较小的算法？哪怕时间效率略一点都可以
- 输出文件已经不小了，需要尽量少的保存中间结果，因此最好不要栈！
  – 只要有栈，最坏情况中间结果的空间大小就是输出大小乘以栈的最大深度，而输出…



complexity8.ans	17,374 KB
complexity8.in	199 KB
complexity9.ans	19,402 KB
complexity9.in	203 KB

“把括号展开”

- 先想办法去掉所有LOOP/END
- 借助当前乘数确定这次OP的最终效果

```
OP 1
LOOP n
    LOOP 10
        LOOP n
            OP 7
        END
        OP 1
    END
END
```

```
OP 1 * 1



OP (n*10*n) * 7

OP (n*10) * 1
```

基本算法

- 设当前乘数为m, 结果多项式为ans
  – 初始化m= 1, ans = 0
- 主循环：一条一条语句处理
  – 遇到LOOP x，m = m * x
  – 遇到END，m = m / x
  – 遇到OP x, ans = ans + m * x
- 数据结构：设$m = an^b$，则用数对(a, b)表示m，a是高精度整数，b是int类型
- 除了结果多项式ans和a，其他空间可忽略

二、二叉堆

堆

- 堆(heap)经常被用来实现优先队列(priority queue): 可以把元素加入到优先队列中, 也可以从队列中取出<u>优先级最高</u>的元素
  - **Insert(T, x):** 把x加入优先队列中
  - **DeleteMin(T, x):** 获取优先级最高的元素x, 并把它从优先队列中删除

堆的操作

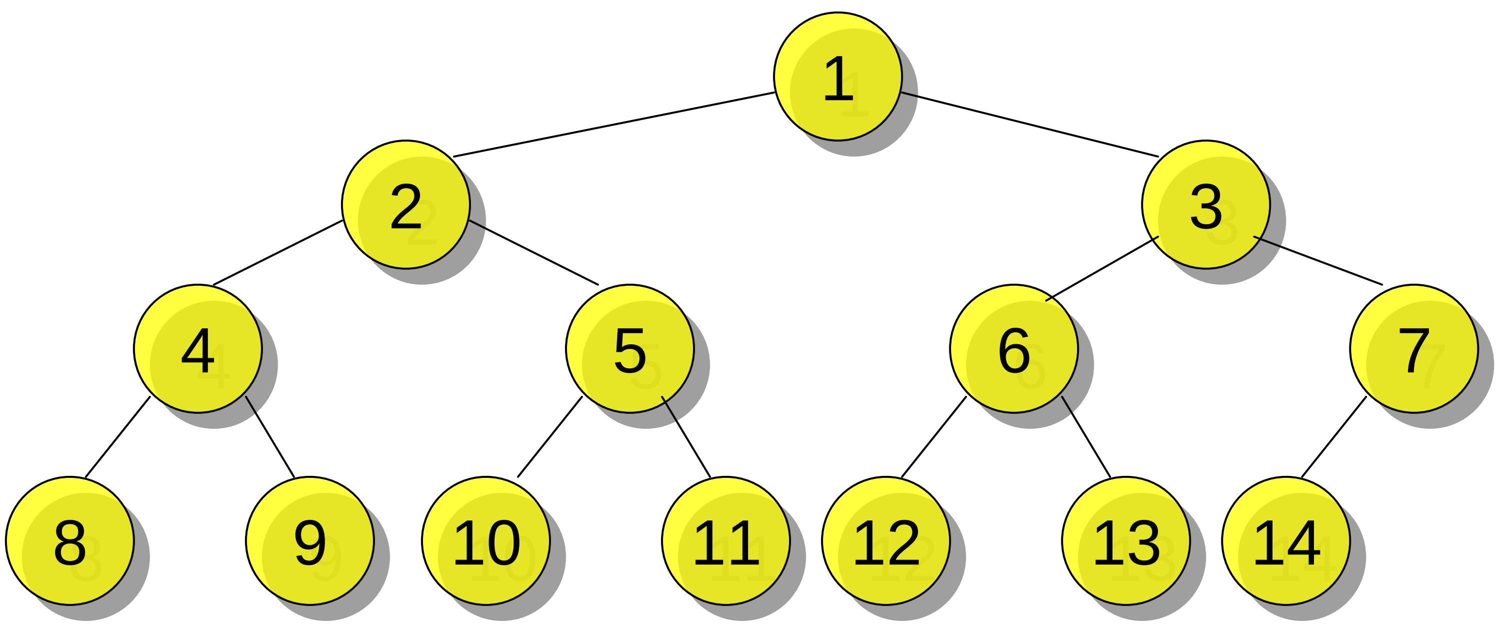
- 除了实现优先队列, 堆还有其他用途, 因此操作比优先队列多
  - **Getmin(T, x):** 获得最小值
  - **Delete(T, x):** 删除任意已知结点
  - **DecreaseKey(T, x, p):** 把x的优先级降为p
  - **Build(T, x):** 把数组x建立成最小堆
- 显然, 用堆很容易实现优先队列

堆的定义

- 堆是一个完全二叉树
  - 所有叶子在同一层或者两个连续层
  - 最后一层的结点占据尽量左的位置
- 堆性质
  - 为空, 或者最小元素在根上
  - 两棵子树也是堆

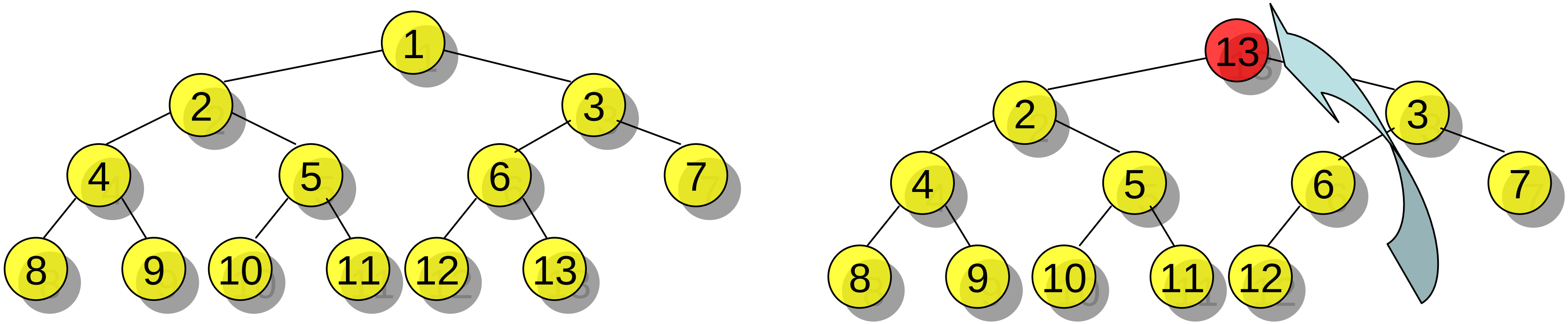
存储方式

- 最小堆的元素保存在heap[1..hs]内
  - 根在heap[1]
  - K的左儿子是2k, K的右儿子是2k+1,
  - K的父亲是[k/2]



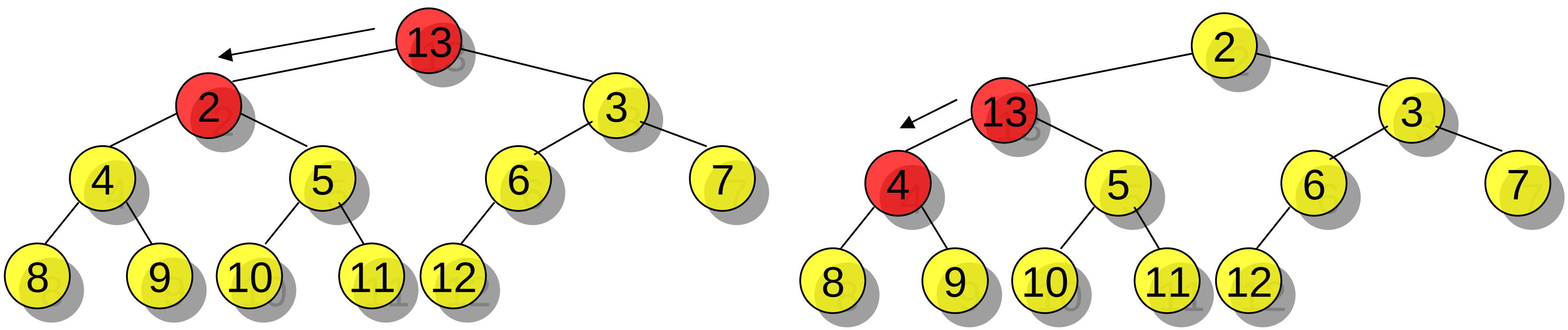
删除最小值元素

- 三步法
  - 直接删除根
  - 用最后一个元素代替根上元素
  - <u>向下调整</u>



向下调整

- 首先选取当前结点p的较大儿子. 如果比p大, 调整停止, 否则交换p和儿子, 继续调整




```
void swim(int p){
    int q = p>>1, a = heap[p];
    while(q && a<heap[q]){ heap[p]=heap[q]; p=q; q=p>>1; }
    heap[p] = a;
}
```

插入元素和向上调整

- 插入元素是先添加到末尾, 再向上调整
- 向上调整: 比较当前结点p和父亲, 如果父亲比p小，停止; 否则交换父亲和p, 继续调整

```
void sink(int p){
   int q=p<<1, a = heap[p];
   while(q<=hs){
      if(q<hs&&heap[q+1]<heap[q])q++;
      if(heap[q]>=a) break;
      heap[p]=heap[q]; p=q; q=p<<1;
   }
   heap[p] = a;
}
```

堆的建立

- 从下往上逐层向下调整. 所有的叶子无需调整, 因此从hs/2开始. 可用数学归纳法证明循环变量为i时, 第i+1, i+2, …n均为最小堆的根

```
void insert(int a)
{ heap[++hs]=a; swim(hs); }
int getmin()
{ int r=heap[1]; heap[1]=heap=[hs--];
  sink(1); return r; }
int decreaseKey(int p, int a)
{ heap[p]=a; swim(p); }
void build()
{ for(int i=hs/2;i>0;i--) sink(i); }
```

时间复杂度分析

- 向上调整/向下调整
  - 每层是常数级别, 共logn层, 因此O(logn)
- 插入/删除
  - 只调用一次向上或向下调整, 因此都是O(logn)
- 建堆
  - 高度为h的结点有$n/2^{h+1}$个,总时间为

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil \times O(h) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^h} \right)$$

例1. k路归并问题

- 把k个有序表合并成一个有序表.
- 元素共有n个.

分析

- 每个表的元素都是从左到右移入新表
- 把每个表的当前元素放入二叉堆中, 每次删除最小值并放入新表中, 然后加入此序列的下一个元素
- 每次操作需要logk时间, 因此总共需要nlogk的时间

例2. 序列和的前n小元素

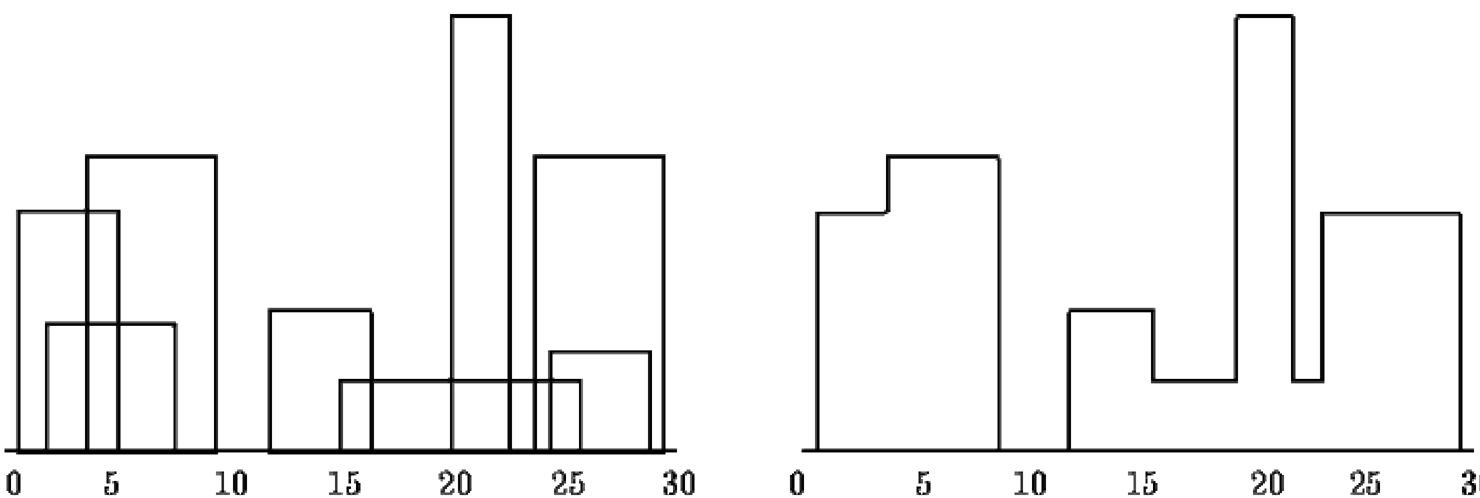
- 给出两个长度为n的有序表A和B, 在A和B中各任取一个, 可以得到n^2个和. 求这些和最小的n个

分析

- 可以把这些和看成n个有序表:
  - A[1]+B[1] <= A[1]+B[2] <= A[1]+B[3] <=…
  - A[2]+B[1] <= A[2]+B[2] <= A[2]+B[3] <=…
  - …
  - A[n]+B[1] <= A[n]+B[2] <= A[n]+B[3] <=…
- 类似刚才的算法, 每次O(logn), 共取n次最小元素,共O(nlogn)

例3. 轮廓线

- 每一个建筑物用一个三元组表示(L, H, R), 表示左边界, 高度和右边界
- 轮廓线用X, Y, X, Y…这样的交替式表示
- 右图的轮廓线为: (1, 11, 3, 13, 9, 0, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)
- 给N个建筑，求轮廓线



分析

- 算法一: 用数组记录每一个元线段的高度
  - 离散化, 有n个元线段
  - 每次插入可能影响n个元线段, O(n), 共$O(n^2)$
  - 从左到右扫描元线段高度, 得轮廓线
- 算法二：每个建筑的左右边界为事件点
  - 把事件点排序, 从左到右扫描
  - 维护建筑物集合, 事件点为线段的插入删除
  - 需要求最高建筑物, 用堆, 共O(nlogn)

例4. 丑数

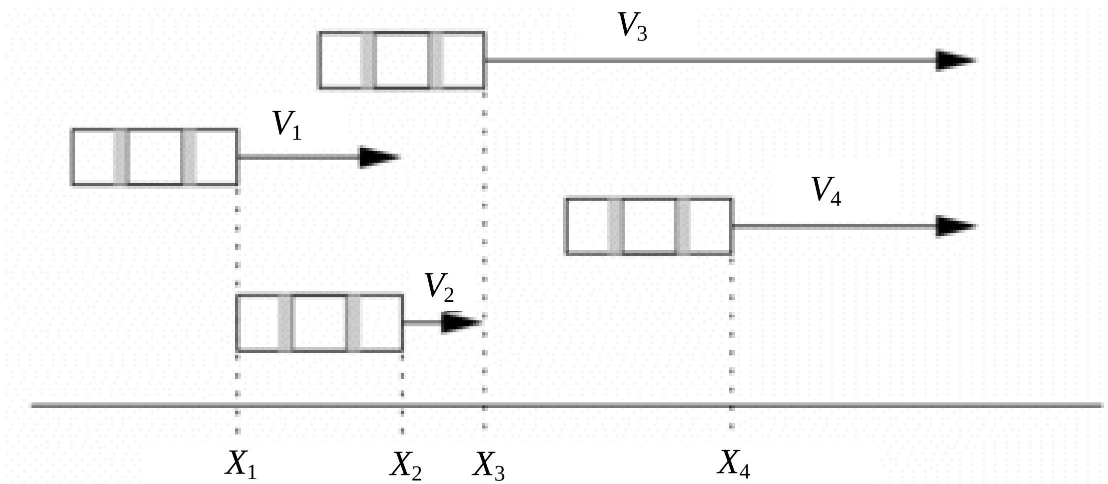
- 素因子都在集合{2, 3, 5, 7}的数称为ugly number
- 求第n大的丑数

分析

- 初始：把1放入优先队列中
- 每次从优先队列中取出一个元素k，把2k, 3k, 5k, 7k放入优先队列中
- 从2开始算，取出的第n个元素就是第n大的丑数
- 每取出一个数，插入4个数，因此任何堆里的元素是O(n)的，时间复杂度为O(nlogn)

例5. 赛车

- 有n辆赛车从各不相同的地方以各种的速度(速度 $0<v_i<100$)开始往右行驶，不断有超车现象发生。



- 给出n辆赛车的描述（位置x_i，速度v_i），赛车已按照位置排序（$x_1<x_2<\ldots<x_n$）
- 输出超车总数以及按时间顺序的前m个超车事件

分析

- 事件个数O(n^2), 因此只能一个一个求
- 给定两辆车，超越时刻预先可算出
- 第一次超车可能在哪些辆车之间？
  - 维护所有车的前方相邻车和追上时刻
    - 局部：此时刻不一定是该车下个超车时刻！
    - 全局：所有时刻的最小值就是下次真实超车时刻
- 维护：超车以后有什么变化？
  - 相对顺序变化…改变三个车的前方相邻车
  - 重新算追上时刻，调整三个权
  - 简单的处理方法：删除三个再插入三个

例6. 可怜的奶牛

- 农夫John有*n*（*n*≤100 000）头奶牛，可是由于它们产的奶太少，农夫对它们很不满意，决定每天把产奶最少的一头做成牛肉干吃掉。但还是有一点舍不得，John打算如果不止有一头奶牛产奶最少，当天就大发慈悲，放过所有的牛。
- 由于John的奶牛产奶是周期性的，John在一开始就能可以了解所有牛的最终命运，不过他的数学很差，所以请你帮帮忙，算算最后有多少头奶牛可以幸免于难。每头奶牛的产奶周期T_i可能不同，但不会超过10。在每个周期中，奶牛每天产奶量不超过200。

分析

- 如果采用最笨的方法，每次先求出每头牛的产奶量，再求最小值，则每天的复杂度为O(n)，总复杂度为O(Tn)，其中T是模拟的总天数。由于周期不超过10，如果有的牛永远也不会被吃掉，那么我们需要多模拟2520天（1，2，3，…，10的最小公倍数）才能确定
- 周期同为t的奶牛在没有都被吃掉之前，每天的最小产奶量也是以t为周期的。因此如果把周期相同的奶牛合并起来，每天只需要比较10类奶牛中每类牛的 最小产奶量就可以了，每天的复杂度为O(k)，其中k为最长周期

分析

- 假设周期为6的牛有4头，每次只需要比较*k*组牛的“代表”就可以了，每天模拟的时间复杂度为*O*(*k*)。

项　目	第6*n*+1天	第6*n*+2天	第6*n*+3天	第6*n*+4天	第6*n*+5天	第6*n*+6天
牛1	2	5	3	5	7	4
牛2	3	1	6	7	5	4
牛3	5	3	3	5	3	9
牛4	4	4	3	8	8	2
合并结果	2（牛1）	1（牛2）	3（多）	5（多）	3（牛3）	2（牛4）

分析

- 只要周期为6的牛都不被吃掉，这个表一直是有效的。但是在吃掉一头奶牛后，我们需要修改这个表，使它仍然记录着每天的最小产奶量
  - 方法一: 重新计算，时间O(h)，其中h是该组的牛数
  - 方法二: 把一个周期中每天的最小产奶量组织成堆，每次删除操作的复杂度是O(klogh)
- 由于每头奶牛最多被吃掉一次，因此用在维护“最小产奶量结构”的总复杂度不超过O(nklogn)。每天复杂度为O(k)，总复杂度为O(Tk+nklogn)

例7. 黑匣子

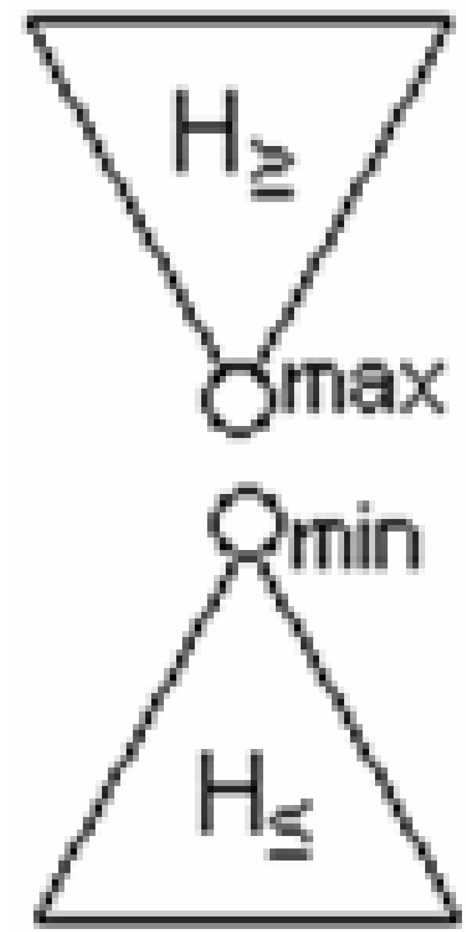
- 我们使用黑匣子的一个简单模型。它能存放一个整数序列和一个特别的变量*i*。在初始时刻，黑匣子为空且*i*等于0。这个黑匣子执行一序列的命令。有两类命令：
- ADD(*x*)：把元素*x*放入黑匣子；
- GET：*i*增1的同时，输出黑匣子内所有整数中第*i*小的数。牢记第*i*小的数是当黑匣子中的元素以非降序排序后位于第*i*位的元素

例7. 黑匣子

编号	命令	i	黑匣子内容	输出
1	ADD(3)	0	3	
2	GET	1	**3**	3
3	ADD(1)	1	1, 3	
4	GET	2	1, **3**	3
5	ADD(-4)	2	-4, 1, 3	
6	ADD(2)	2	-4, 1, 2, 3	
7	ADD(8)	2	-4, 1, 2, 3, 8	
8	ADD(-1000)	2	-1000, -4, 1, 2, 3, 8	
9	GET	3	-1000, -4, **1**, 2, 3, 8	1
10	GET	4	-1000, -4, 1, **2**, 3, 8	2
11	ADD(2)	4	-1000, -4, 1, 2, 2, 3, 8	

分析

- 降序堆$H_{\geq}$和升序堆$H_{\leq}$如图放置
- $H_{\geq}$根节点的值$H_{\geq}[1]$在堆$H_{\geq}$中最大，$H_{\leq}$根节点的值$H_{\leq}[1]$在堆$H_{\leq}$中最小，并满足
  - $H_{\geq}[1] \leq H_{\leq}[1]$
  - size$[H_{\geq}]=i$
- ADD(x): 比较x与$H_{\geq}[1]$，若$x \geq H_{\geq}[1]$，则将x插入$H_{\leq}$，否则从$H_{\geq}$中取出$H_{\geq}[1]$插入$H_{\leq}$，再将x插入$H_{\geq}$
- GET: $H_{\leq}[1]$就是待获取的对象。输出$H_{\leq}[1]$，同时从$H_{\leq}$中取出$H_{\leq}[1]$插入$H_{\geq}$ ，以维护条件(2)



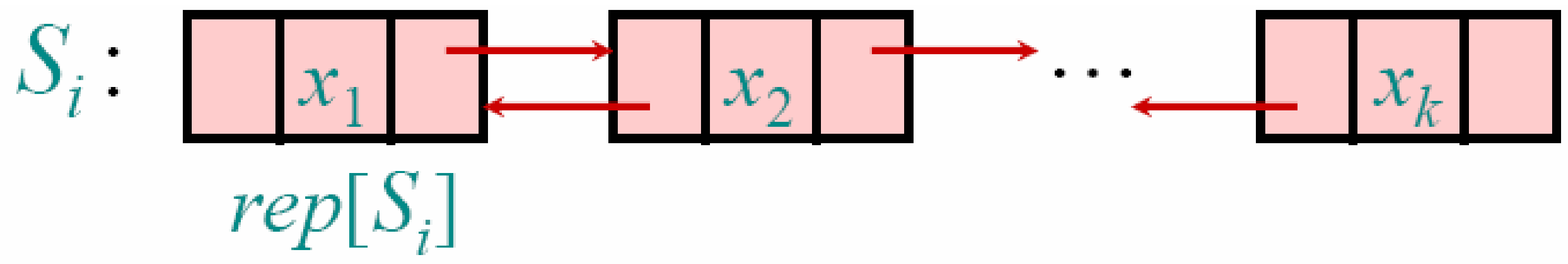
三、并查集

并查集

- 并查集维护一些不相交集合$S=\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$, 每个集合$S_r$都有一个特殊元素rep[$S_i$], 称为集合代表. 并查集支持三种操作
  - **Make-Set(x):** 加入一个集合{x}到S, 且rep[{x}] = x. 注意, x不能被包含在任何一个S_i中, 因为S里任何两个集合应是不相交的
  - **Union(x, y):** 把x和y所在的两个不同集合合并. 相当于从S中删除S_x和S_y并加入$S_x \cup S_y$
  - **Find-Set(x):** 返回x所在集合S_x的代表rep[S_x]

链结构

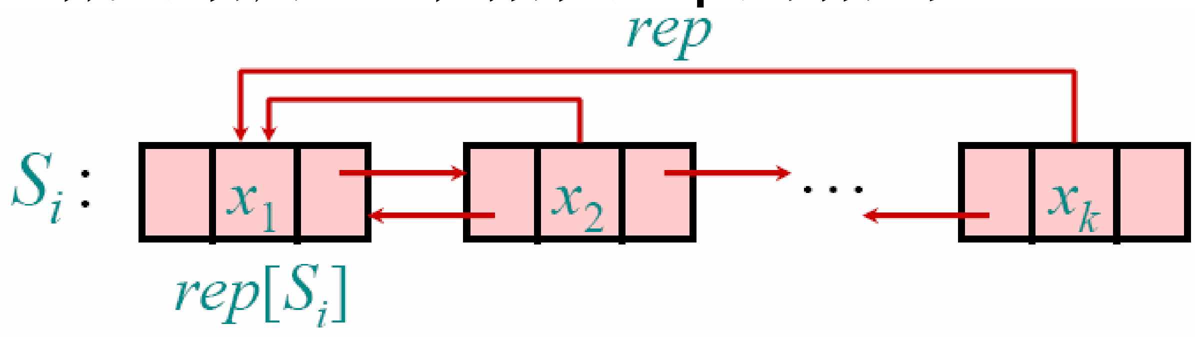
- 每个集合用双向链表表示, rep[S_i]在链表首部



- **Make-Set(x):** 显然是O(1)的
- **Find-Set(x):** 需要不断往左移, 直到移动到首部. 最坏情况下是O(n)的
- **Union(x, y):** 把S_y接在S_x的尾部, 代表仍是rep[S_x]. 为了查找链表尾部, 需要O(n)

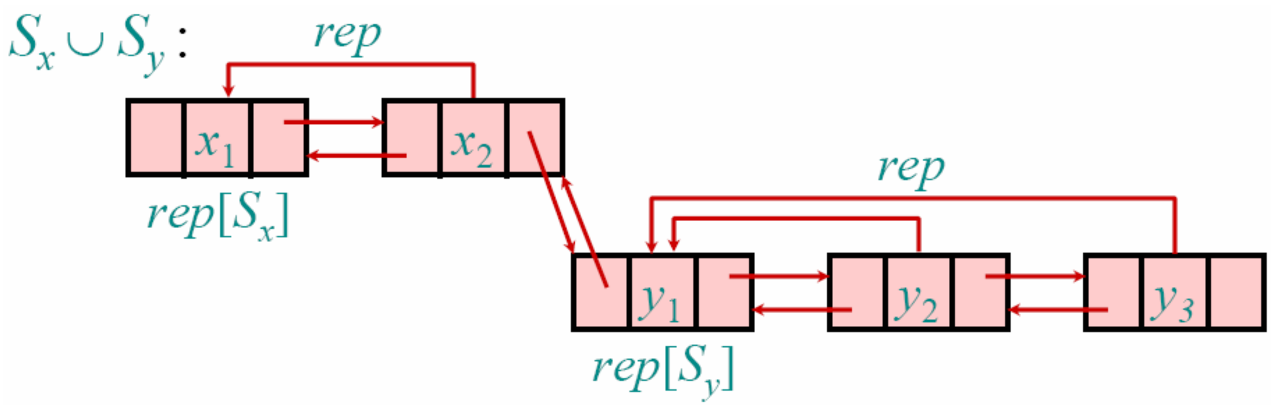
增强型链结构

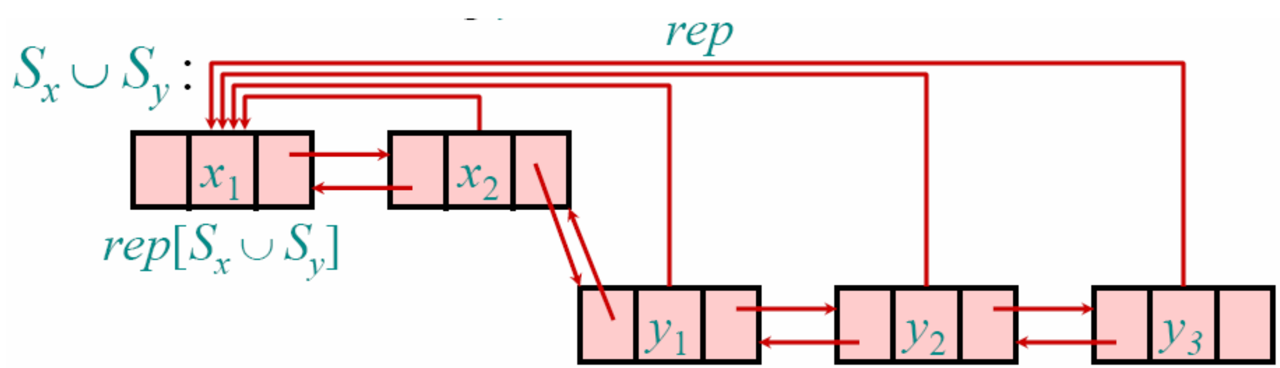
- 给每个结点增加一个指回rep的指针



- **Make-Set(x):** 仍为常数
- **Find-Set(x):** 降为常数(直接读rep)
- **Union(x, y):** 变得复杂: 需要把S_y里所有元素的rep指针设为rep[Sx]!

增强型链结构的合并





- 可以把x合并到y中，也可以把y合并在x中

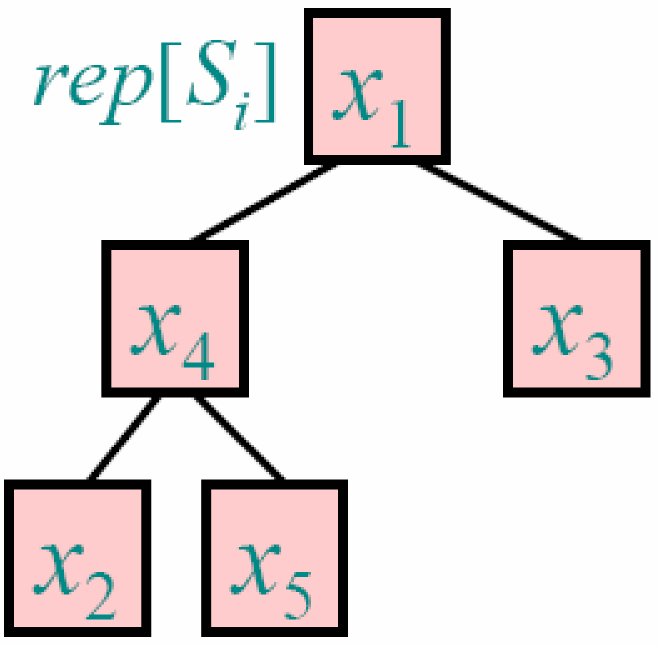
技巧1: 小的合并到大的中

- 显然, 把小的合并到大的中, <u>这一次</u>Union操作会比较节省时间, 更精确的分析?
- 用n, m, f分别表示Make-Set的次数, 总操作次数和Find-Set的次数, 则有
- 定理: 所有Union的总时间为O(nlogn)
- 推论: 所有时间为O(m + nlogn)
- 证明: 单独考虑每个元素x, 设所在集合为S_x, 则修改rep[x]时, S_x至少加倍. 由于S_x不超过n, 因此修改次数不超过$\log_2 n$, 总nlogn

树结构

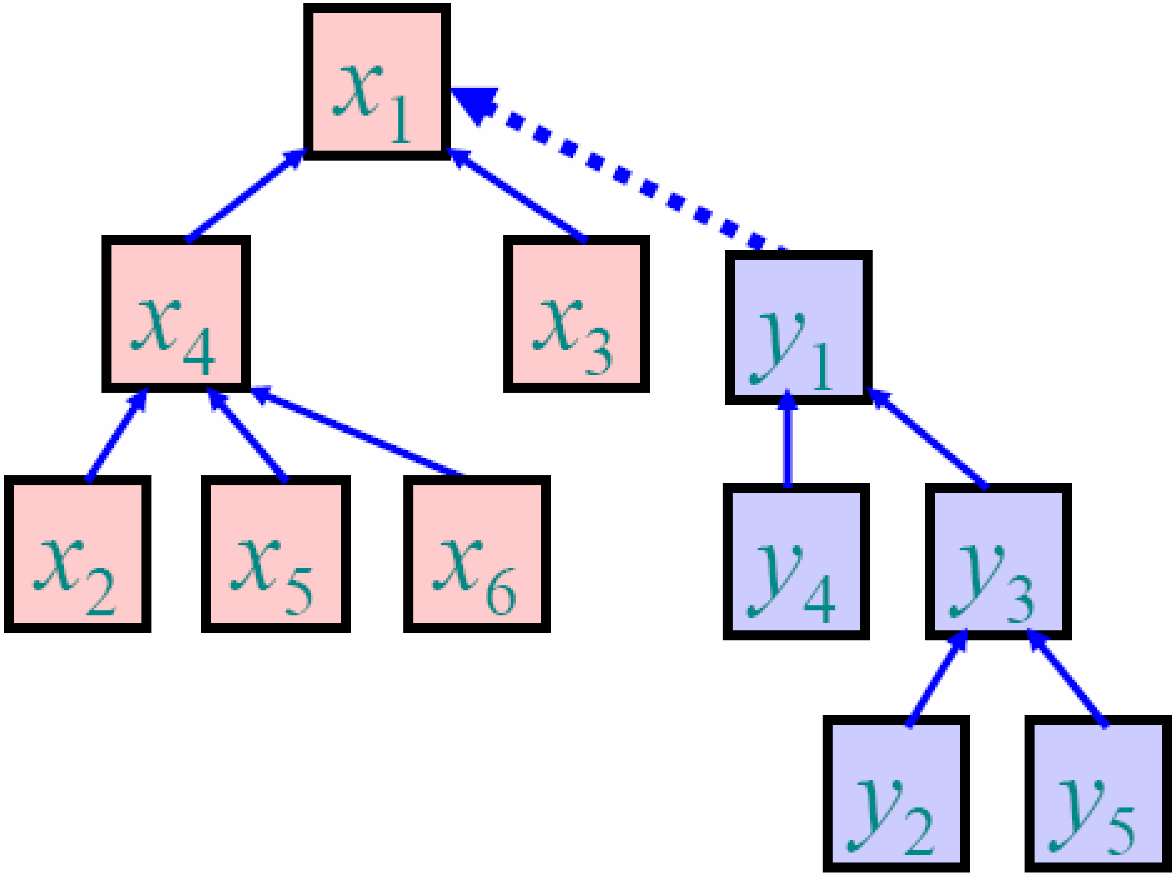
- 每个集合用一棵树表示, 根为集合代表

$$S_i = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$



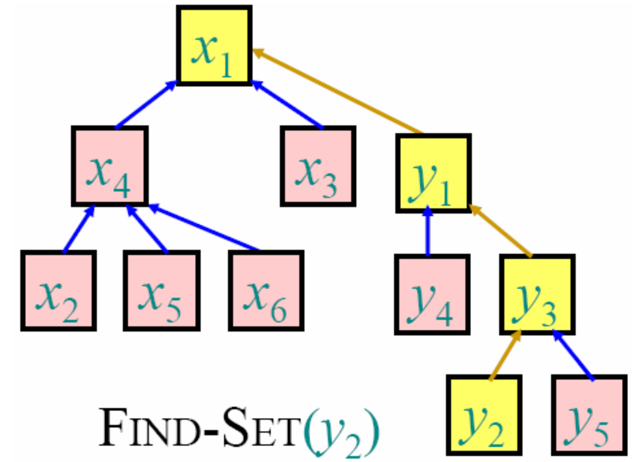
树结构的合并

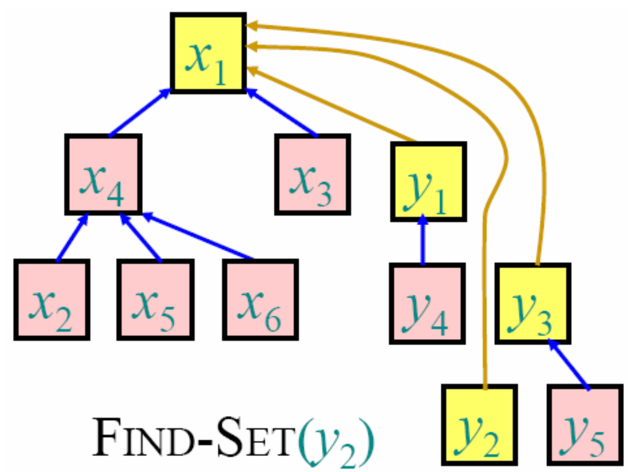
- 和链结构类似, 小的合并到大的中

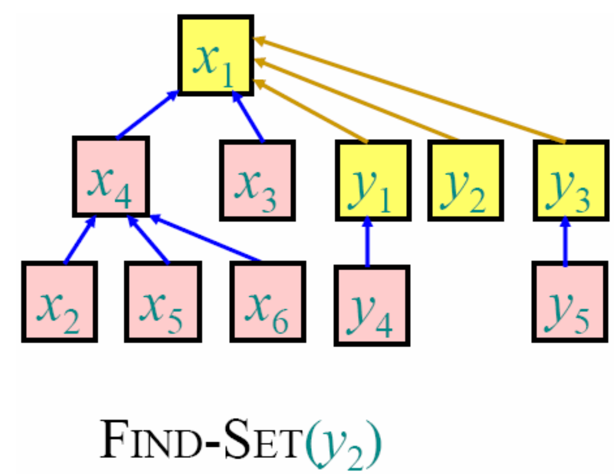


技巧2: 路径压缩

- 查找结束后顺便把父亲设置为根, 相当于有选择的设置rep指针而不像链结构中强制更新所有rep







路径压缩的分析

- 设w[x]为x的子树的结点数, 定义势能函数

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma_i \lg weight[x_i]$$

- **Union(x_i, x_j)增加势能.** 最多会让w[rep[xi]] 增加w[rep[xj]]<=n, 因此势能增加不超过logn
- **Find-Set(x)减少势能.** 把路径压缩看作是从根到结点x的向下走过程, 则除了第一次外的其他向下走的步骤p→c会让c的子树从p的子树中移出, 即w[p]减少w[c], 而其他点的w值保持不变

路径压缩的分析

- Find-Set除了第一次外的其他向下走的步骤p→c会让c的子树从p的子树中移出
  - 情况一: $w[c]>=w[p]/2$, 则势能将至少减少1
  - 情况二: $w[c]<w[p]/2$, 这种情况最多出现logn次, 因为$w[p]$最多进行logn次除2操作就会得到1
- Union操作积累起来的mlogn的势能将被Find-Set消耗, 情况一最多消耗mlogn次, 情况二本身不超过mlogn次, 因此
- **定理:** Find-Set的总时间为O(mlogn)

路径压缩的分析

- 定理: 如果所有Union发生在Find-Set之前, 则所有操作的时间复杂度为O(m)
- 证明: 每次Find-Set将会让路径上除了根的所有结点为根的儿子. 所有结点只会有一次改变，因此总时间复杂度为O(m)
- 也就是说
  - 只使用技巧1(启发式合并): O(m+nlogn)
  - 只使用技巧2(路径压缩): O(mlogn)
- 同时使用呢?

Ackermann函数及其反函数

Define $A_k(j) = \begin{cases} j+1 & \text{if } k=0, \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{if } k \ge 1. \end{cases}$ – iterate j+1 times

$A_0(j) = j + 1$

$A_1(j) \sim 2j$

$A_2(j) \sim 2j\,2^j > 2^j$

$A_3(j) > \left. 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^j}}}}}} \right\} j$

$A_4(j)$ is a lot bigger.

$A_0(1) = 2$

$A_1(1) = 3$

$A_2(1) = 7$

$A_3(1) = 2047$

$A_4(1) > \left. 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2047}}}}}}} \right\} 2048$

Define $\alpha(n) = \min\,\{k : A_k(1) \ge n\} \le 4$ for practical n.

树结构的完整结论

- 定理: m个操作的总时间复杂度为 $O(m\alpha(n))$

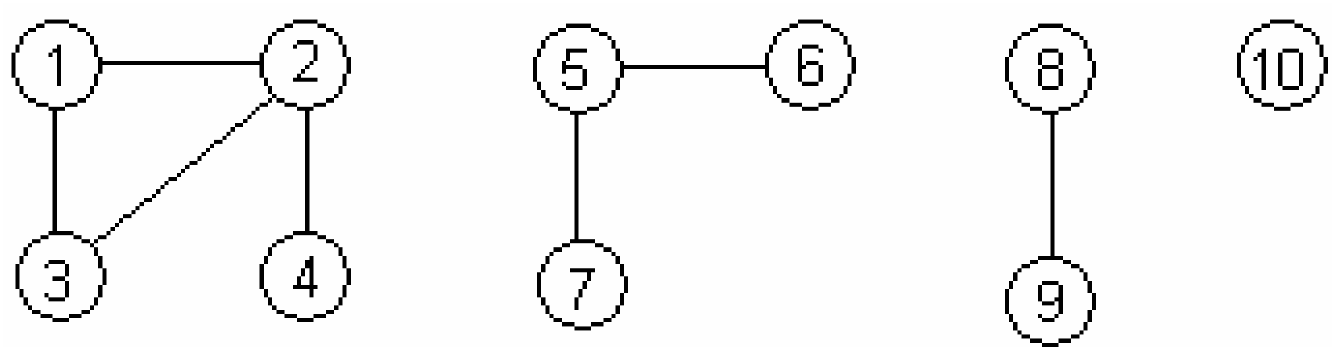
```
void makeset(int x){ rank[x] = 0; p[x]=x; }
int findset(int x){
    int i, px = x;
    while (px != p[px]) px = p[px];
    while (x != px) { i = p[x]; p[x] = px; x = i; }
    return px;
}
void unionset (int x , int y){
    x = findset(x); y = findset(y);
    if(rank[x] > rank[y]) p[y] = x;
    else { p[x] = y; if(rank[x] == rank[y]) rank[y]++; }
}
```

例1. 亲戚

- 或许你并不知道，你的某个朋友是你的亲戚。他可能是你的曾祖父的外公的女婿的外甥女的表姐的孙子。如果能得到完整的家谱，判断两个人是否亲戚应该是可行的，但如果两个人的最近公共祖先与他们像个好几代，使得家谱十分庞大，那么检验亲戚关系实非人力所能及。在这种情况下，最好的帮手就是计算机。
- 为了将问题简化，你将得到一些亲戚关系的信息，如同Marry和Tom是亲戚，Tom和Ben是亲戚，等等。从这些信息中，你可以推出Marry和Ben是亲戚。请写一个程序，对于我们的关于亲戚关系的提问，以最快的速度给出答案。

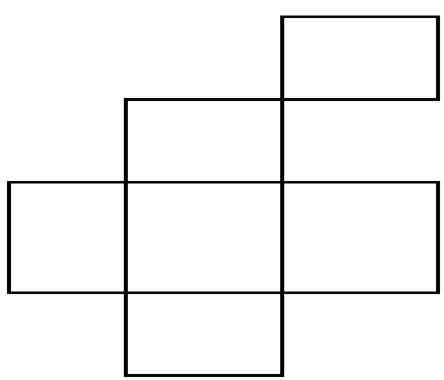
分析

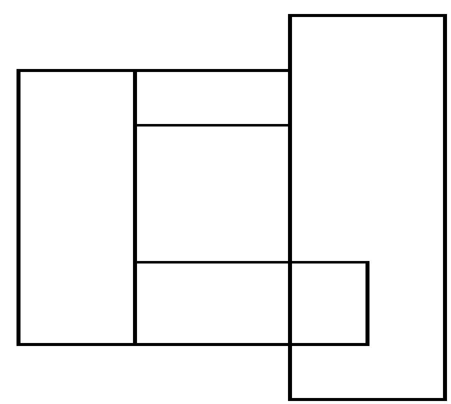
- 本质: 是否在图的同一个连通块
- 问题: 图太庞大, 每次还需要遍历
- 解决: 用并查集



例2. 矩形

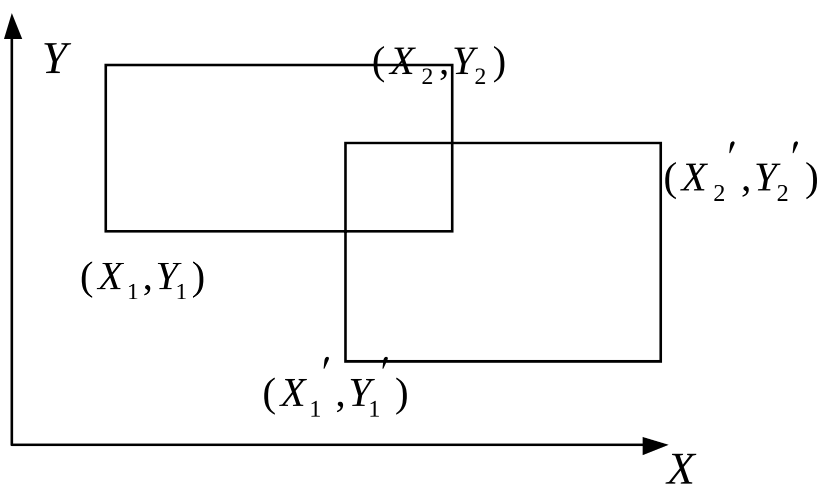
- 在平面上画了N个长方形，每个长方形的边平行于坐标轴并且顶点坐标为整数。我们用以下方式定义印版：
  - 每个长方形是一个印版；
  - 如果两个印版有公共的边或内部，那么它们组成新的印版，否则这些印版是分离的
- 数出印版的个数. 左图有两个，右图只有一个





分析

- 把矩形看作点，有公共边的矩形连边，问题转化为求连通分量的个数
- 判断方法：



例3. 代码等式

- 由元素0和1组成的非空的序列称为一个二进制代码。一个代码等式就是形如$x_1x_2..x_l=y_1y_2..y_r$,这里x_i和y_j是二进制的数字（0或1）或者是一个变量（如英语中的小写字母）
- 每一个变量都是一个有固定长度的二进制代码，它可以在代码等式中取代变量的位置。我们称这个长度为变量的长度
- 对于每一个给出的等式，计算一共有多少组解。
- 例: a,b,c,d,e的长度分别是4,2,4,4,2, 则1bad1 = acbe有16组解

分析

- 长度为k的变量拆成k个长度为1的变量
- 每位得到一个等式
  - 1=1或者0=0：冗余等式
  - 1=0或者0=1：无解
  - a=b：a和b相等（a为变量b可以为常数）
- 相等关系用并查集处理，最后统计集合数为n，答案为2^n。

例4. 围墙

- 按顺序给出M个整点组成的线段，找到最小的k，使得前k条线段构成了封闭图形。（任意两条线段只可能在端点相交）

分析

- 将所有出现过的坐标用整数表示，初始时候每个独立成树。读入连接A和B的线段后，将A、B所在的树和并。如果A、B在同一棵树，那么就出现了封闭图形（因为x个点x条边的图必定出现圈）
- 把坐标转换成编号的步骤，可以通过对坐标进行排序，再删除重复。
- 时间: O(MlogM)

例5. 可爱的猴子

- 树上挂着n只可爱的猴子（$n \leqslant 2*10^5$）。
- 猴子1的尾巴挂在树上
- 每只猴子有两只手，每只手可以抓住最多一只猴子的尾巴，也可以不抓。猴子想抓谁一定抓得到
- 所有猴子都是悬空的，因此如果一旦脱离了树，猴子会立刻掉到地上。
- 第0，1，...，m（$1 \leqslant m \leqslant 400\,000$）秒中每一秒都有某个猴子把他的某只手松开，因此常有猴子掉在地上
- 请计算出每个猴子掉到地上的时间

分析

- 并查集？
- “时光倒流”
- 如何标记每只猴子的时间？
  - 枚举并查集的元素
  - 需要访问兄弟/儿子？
  - 链表即可
  - 不用指针

例6. 奇数偶数

- 你的朋友写下一个由0和1组成的字符串，并告诉你一些信息，即某个连续的子串中1的个数是奇数还是偶数。你的目标是找到尽量小的i，使得前i+1条不可能同时满足
  - 例如，序列长度为10，信息条数为5
  - 5条信息分别为1 2 even，3 4 odd，5 6 even，1 6 even，7 10 odd
- 正确答案是3，因为存在序列(0,0,1,0,1,1)满足前3条信息，但是不存在满足前4条的序列

分析

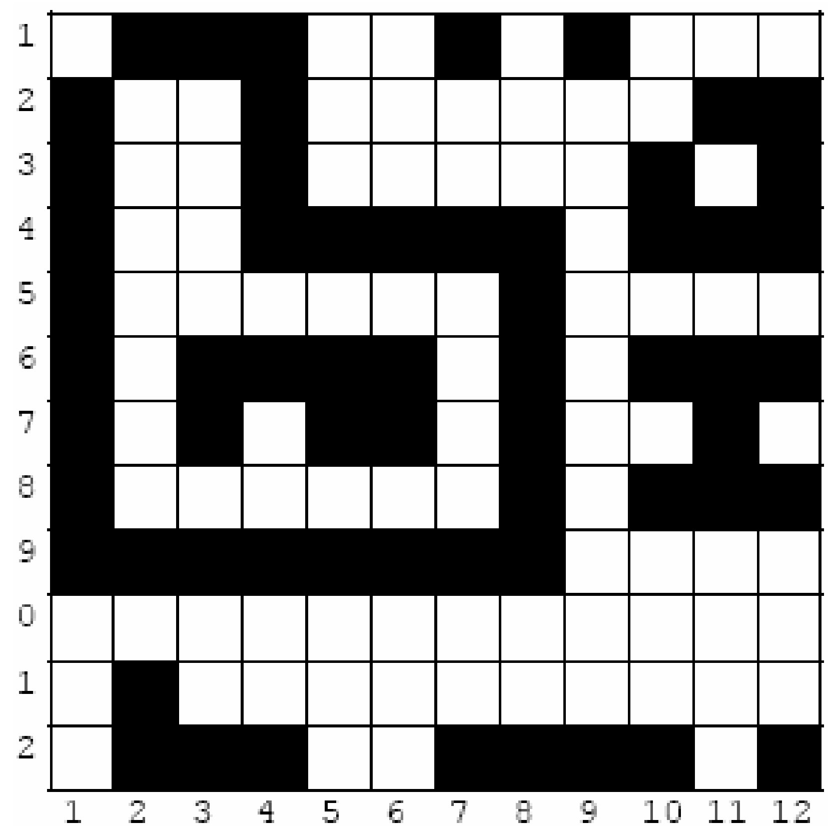
- 部分序列
  - 可以从s的奇偶性恢复整个序列
  - a b even等价于s[b], s[a-1]同奇偶
  - a b odd等价于s[b], s[a-1]不同奇偶
- 一开始每个s[i]自成一集合
  - a b even→合并s[b], s[a-1]
  - a b odd→???
- 矛盾的标志？

例7. 团伙

- 如果两个认识, 那么他们要么是朋友要么是敌人, 规则如下
  - 朋友的朋友是朋友
  - 敌人的敌人是敌人
- 给出一些人的关系(朋友、敌人), 判断一共最多可能有多少个团伙

例8. 船

- 给一个01矩阵, 黑色代表船. 右图有一个29吨的, 3个7吨的, 两个4吨的和三个一吨的.
- 输入行数N(<30000)和每行的黑色格子(区间数和每个区间)
- 输出每种重量的个数
- 一共不超过1000个船, 每个的重量不超过1000



例9. 离线最大值

- 设计一个集合, 初始为空， 每次可以插入一个1~n的数(1~n各恰好被插入一次),也可以删除最大值, 要求m次操作的总时间尽量小.

分析

- 在最后加入n-m次虚拟的MAX操作, 并记第i个MAX操作为M_i, 记M_1之前的插入序列为S_1, M_{i-1}(1<i<=m) 和M_i之间的插入序列为S_i
- 如果n在S_j中被插入，则M_j的输出一定是n. 然后删除M_j，即**把S_j合并到S_{j+1}中**，然后再查找n-1所在的序列S_k，则M_k的输出为n-1…如此下去，从n到1依次查找每个数所在序列，就可以得到它后面的MAX操作的结果, 并把它和紧随其后的序列合并

例10. 合并队列

- 初始时n个数1~n各在单独的一列中, 需要执行两个操作
  - Move(i, j): 把i所在列接到j所在列的尾部
  - Check(i, j): 询问i和j是否在同一列, 如果是, 输出二者之间的元素个数

分析

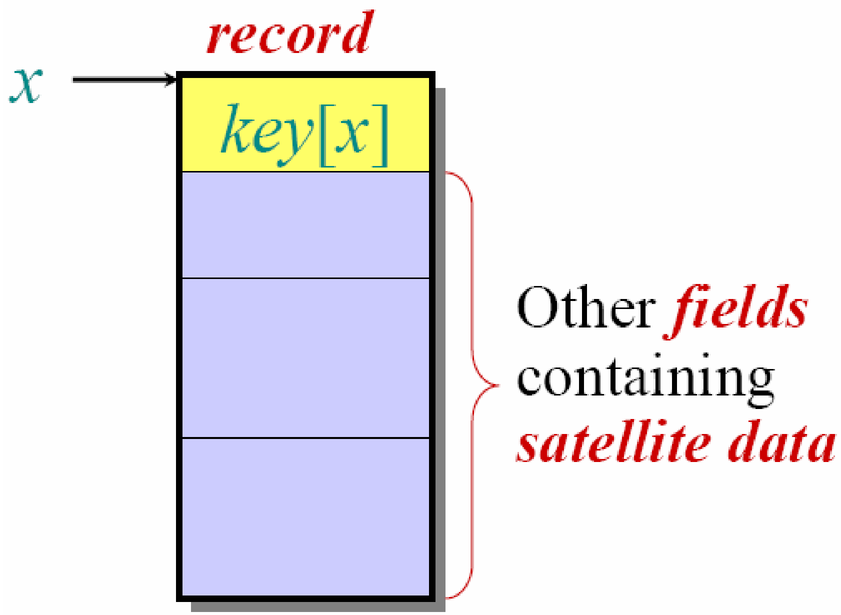
- 每个数i的p[i]表示i和p[i]在同一队列, 且p[i]是i之前的第d[i]个元素
- 对于队首x, 有p[x]=x, 附加变量tot[x]表示以x为首的队列一共有多少个元素
  - Move需要进行两次查找和一次合并
  - Check需要两次查找
- FIND: 修改p[i]时要修改d[i]
- MERGE: 可以启发式合并么???

四、哈希表

哈希表

- 哈希表(Hash table)经常被用来做字典(dictionary), 或称符号表(symbol-table)

Symbol table T holding n ***records***:



Operations on T:
- INSERT(T, x)
- DELETE(T, x)
- SEARCH(T, k)

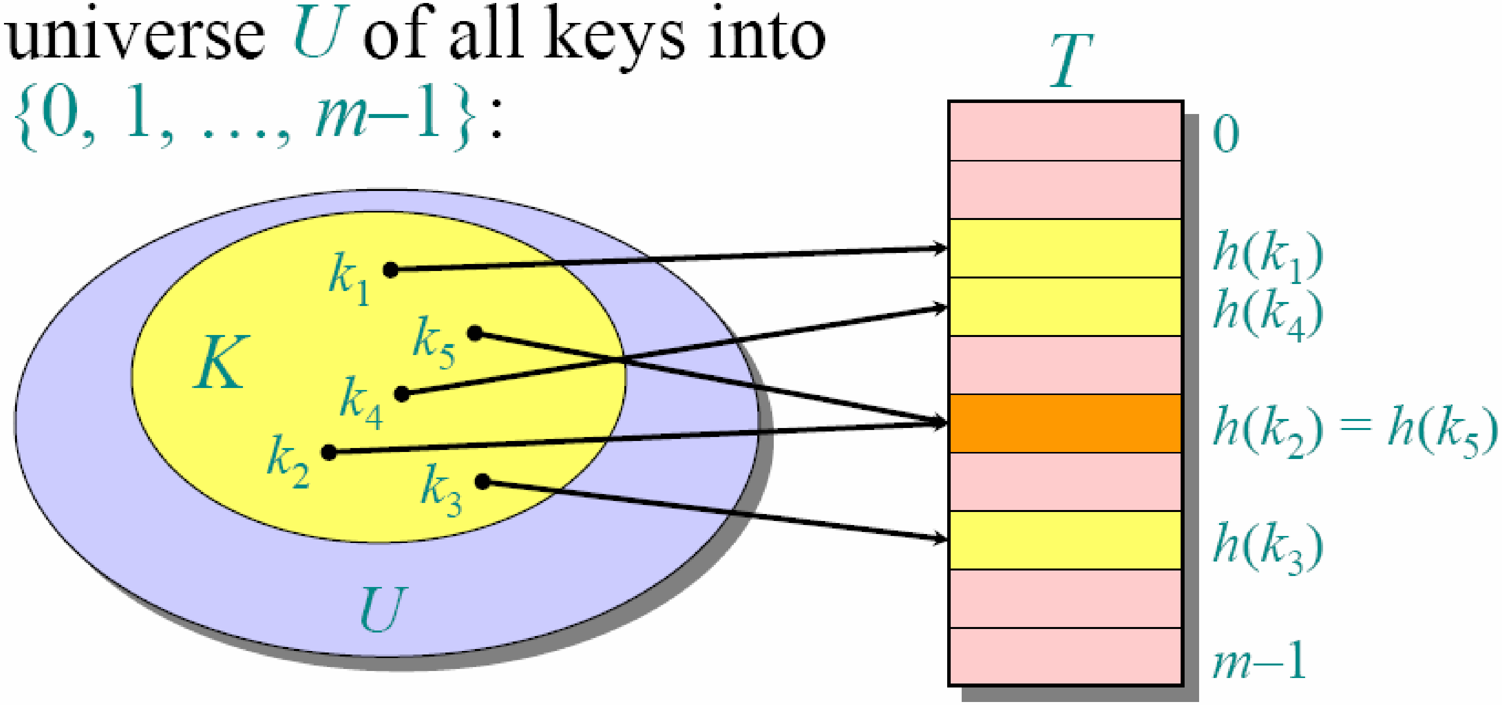
How should the data structure T be organized?

直接存取表

- 直接存取表(Direct-access table)的基本思想是: 如果key的范围为0~m-1而且所有key都不相同, 那么可以设计一个数组T[0..m-1], 让T[k]存放key为k的元素, 否则为空(NIL)
- 显然, 所有操作都是O(1)的
- 问题: key的范围可能很大! 64位整数有18,446,744,073,709,551,616种可能, 而字符串的种类将会更多!

解决方案: 哈希函数

Solution: Use a ***hash function*** h to map the universe U of all keys into $\{0, 1, \ldots, m-1\}$:



When a record to be inserted maps to an already occupied slot in T, a ***collision*** occurs.

哈希函数的选取

- 严格均匀分布的哈希函数很难寻找, 但一般说来有三种方法在实际使用中效果不错
  - 取余法: 取$h(k) = k \bmod m$
  - 乘积法: 取$h(k) = (A*k \bmod 2^w) \text{ rsh } (w-r)$
  - 点积法: 随机向量a和k的m进制向量做点积
- 实践中经常采用取余法

取余法

- 一般来说不要取m=2^r^, 因为它只取决于k的后r位

If $k = 1011000111\underbrace{011010}_{h(k)}{}_2$ and $r = 6$, then
$h(k) = 011010_2$.

- 一般取m为不太接近2或10的幂

乘积法

- 取$m=2^r$, 计算机字长为w, 则

$$H(k) = (A*k \bmod 2^w) \text{ rsh } (w-r)$$

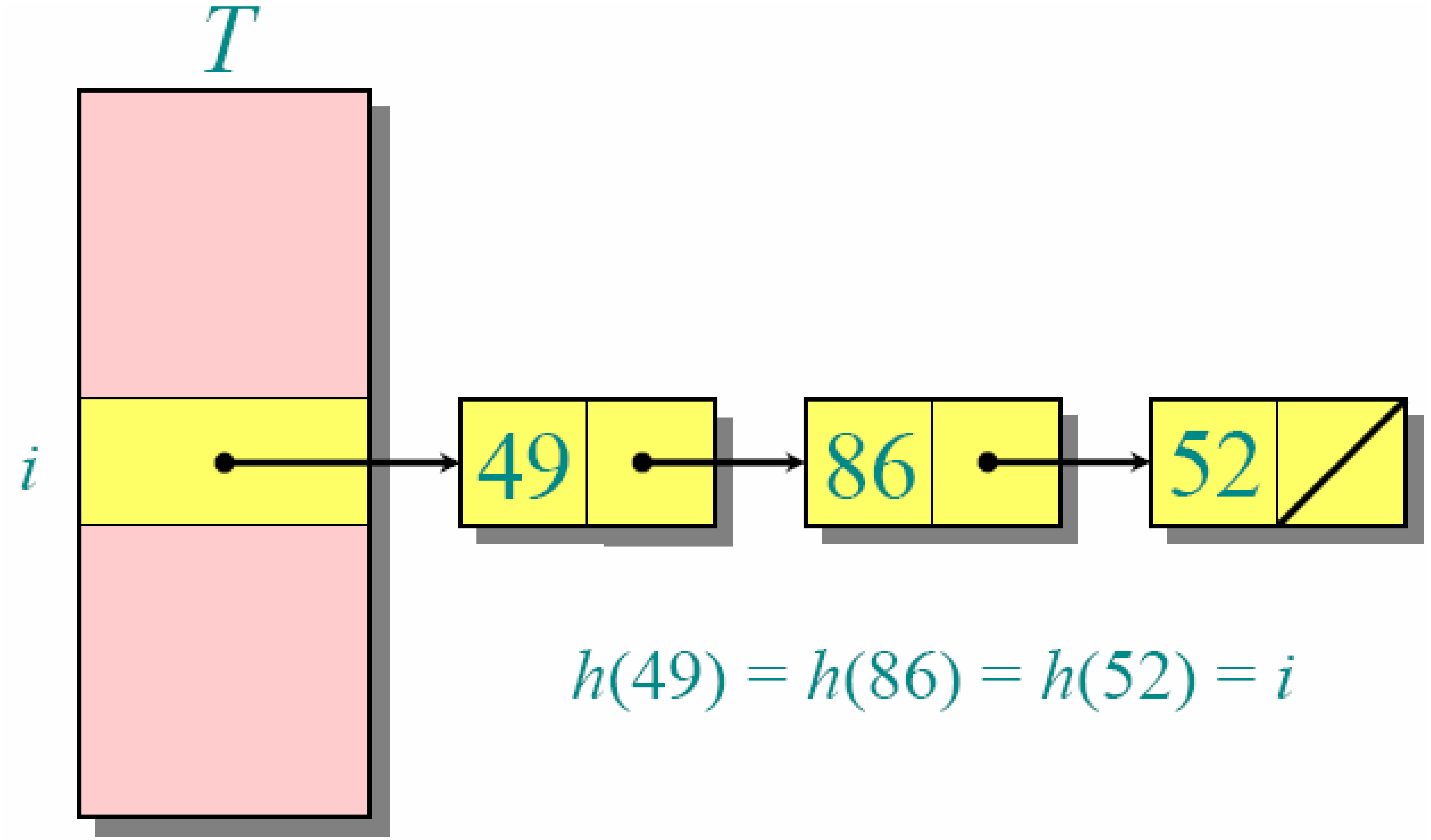
- 其中rsh表示右移位, A是满足$2^{w-1}<A<2^w$的奇数. 注意: A不应该太接近于2^w. 由于乘法并对2^w取余是很快的(自然就会丢弃高位), 而算术右移也很快，因此函数计算开销小

冲突解决

- 不同的key映射到同一个数, 称为冲突(collision), 冲突的两个元素显然不可能放在哈希表的同一个位置
- 通常有两种冲突解决方案(resolving collisions)
  - 链方法**(chaining):** 把key相同的串成链表
  - 开放地址法**(open addressing):** 自己的位置被占了, 就去占别人的

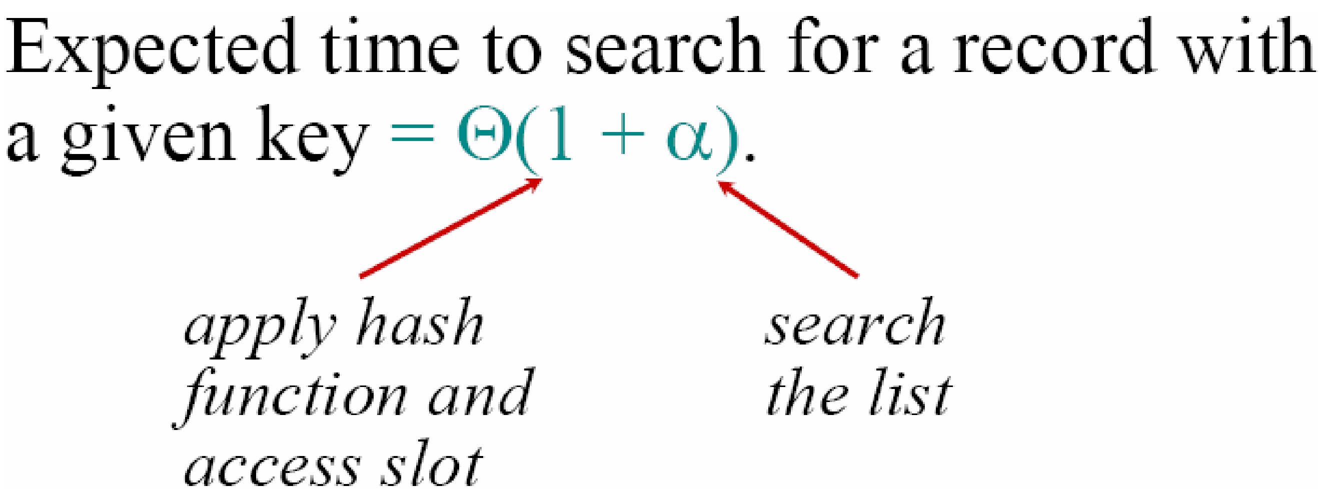
链地址法

- Key相同的元素形成一个链表



链地址法的查找效率

- 链地址法的时间效率取决于hash函数的分布. 我们假设每个k将等可能的被映射到任意一个slot, 不管其他key被映射到什么地方
- 设n为key的数目, m为不同的slot数, 装载因子 α = n/m, 即每个slot平均的key数, 则



- n=O(m)时期望搜索时间是O(1)的

开放地址法

- 开发地址法只使用表内的空间. 如果冲突产生, 计算出第二个可能的位置, 如果那里也有其他元素, 再看第三个可能的位置…即按一个探测序列查找
- 位置应该是key和探测的次数(probe number)的函数, 第i次探测位置为slot = h(k,i)
- 每个slot都应能被探测到, 因此每个k的探测序列

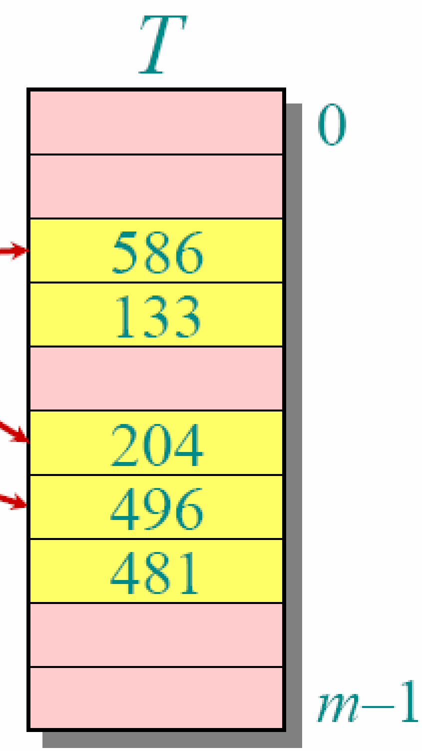
<h(k,0), h(k,1), h(k,2), …,h(k,m-1)>

- 都应是{0,1,…,m-1}的排列
- 注意: 开放地址法不容易删除元素

开放地址法示例

Search for key $k = 496$:

0. Probe $h(496,0)$
1. Probe $h(496,1)$
2. Probe $h(496,2)$



Search uses the same probe sequence, terminating successfully if it finds the key and unsuccessfully if it encounters an empty slot.

探测方法

- 线性探测:

$$h(k,i) = (h'(k) + i) \bmod m.$$

- 虽然很简单, 但是容易形成元素堆积
- 二次哈希: 组合两个哈希函数

$$h(k,i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod m.$$

- 一般效果会好很多，但应保证$h_2(k)$和m互素, 比如取m为2的幂而让$h_2(k)$只产生奇数

开放地址法的查找效率

- 假设每个key等概率的把m!个排列中的任何一个作为它的探测序列, 则有
- 定理**:** 装载因子α **<1**时**,** 不成功查找的期望探测次数为**1/ (1-** α）
- 证明: 第**i**次探测到非空**slot**的概率为

$$(n-i)/(m-i) < n/m = \alpha$$

- 下面各种情况按概率加权计算期望

开放地址法的查找效率

- 各种情况按概率加权, 得期望的探测次数为

$$1+\frac{n}{m}\left(1+\frac{n-1}{m-1}\left(1+\frac{n-2}{m-2}\left(\cdots\left(1+\frac{1}{m-n+1}\right)\cdots\right)\right)\right)$$

$$\le 1+\alpha(1+\alpha(1+\alpha(\cdots(1+\alpha)\cdots)))$$

$$\le 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}. \square$$

The textbook has a more rigorous proof.

查找效率比较

- 把开放地址法说通俗一点，就是
  - 装载因子为常数时, 期望查找次数为常数
  - 一半装满时, 期望查找次数为1/(1-0.5)=2
  - 装满90%时, 期望查找次数为1/(1-0.9)=10
- 装得比较满(尤其是n>m)时, 使用链地址法
  - 在哈希表里保存每个key的第一个元素first[0..m-1],
  - 在一个数组data[1..n]里装着所有元素和下一个元素next[1..n]

链地址法参考代码

- 在实际应用中，推荐使用链地址法
  - first[i]表示哈希函数值为i的第一个数据下标
  - key[i]和next[i]表示第i个数据的key和下一个

```
int find(int k){
    int h = hash(k);
    int p = first[h];
    while (p){ if(key[p] == k) return p; p = next [p]; }
    return 0;
}
void insert(int x){
    int h = hash(key[x]); next[x] = first[h]; first[h] = x;
}
```