(2) 对任意 $x \in \mathbb{Q}^*$，令 $A = \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，则有 $A \in M_n(\mathbb{Q}), x = \varphi(A) \in \varphi(G_1)$。从而有 $\varphi(G_1) = \mathbb{Q}^*$。

由 $\varphi$ 定义知，$\ker\varphi = SL_n(\mathbb{Q}) = \{A \mid A \in M_n(\mathbb{Q}) \wedge |A| = 1\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的特殊线性群。

**17.48**

**证明:** 设 $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ 为 $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ 到 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 的任意同态映射。反设存在 $x \in \mathbb{Q}$，使得 $\varphi(x) = n \neq 0$。则令 $m = \varphi(\frac{x}{2n}) \in \mathbb{Z}$。从而有

$$
\begin{aligned}
n &= \varphi(x) \\
&= \varphi(\underbrace{\frac{x}{2n} + \frac{x}{2n} + \cdots + \frac{x}{2n}}_{2n\text{ 个}}) && \text{(有理数性质)} \\
&= \underbrace{\varphi(\frac{x}{2n}) + \varphi(\frac{x}{2n}) + \cdots + \varphi(\frac{x}{2n})}_{2n\text{ 个}} && (\varphi\text{ 是同态}) \\
&= \underbrace{m + m + \cdots + m}_{2n\text{ 个}} && (\varphi(\frac{x}{2n}) = m) \\
&= 2nm && \text{(有理数性质)}
\end{aligned}
$$

由上式和有理数上的乘法消去律可知，$2m = 1$，即 $m = \frac{1}{2}$。这与 $m = \varphi(\frac{x}{2n}) \in \mathbb{Z}$ 矛盾。 □

**17.49**

**证明:** 由教材定理 3.4 知，$\varphi_2 \circ \varphi_1 : G_1 \to G_3$ 是双射。对任意 $x, y \in G_1$，

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 \circ \varphi_1(xy) &= \varphi_2(\varphi_1(xy)) && \text{(教材定理 3.3)} \\
&= \varphi_2(\varphi_1(x)\varphi_1(y)) && (\varphi_1\text{ 是同态}) \\
&= \varphi_2(\varphi_1(x))\varphi_2(\varphi_1(y)) && (\varphi_2\text{ 是同态}) \\
&= \varphi_2 \circ \varphi_1(x)\varphi_2 \circ \varphi_1(y) && \text{(教材定理 3.3)}
\end{aligned}
$$

从而 $\varphi_2 \circ \varphi_1 : G_1 \to G_3$ 是从 $G_1$ 到 $G_3$ 的同构。 □

**17.50**

**证明:** 由教材定理 3.9 知，$\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ 是双射。对任意 $x, y \in G_2$，

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1}(xy) &= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(\varphi^{-1}(y))) && (\varphi \circ \varphi^{-1} = I_{G_2}) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y))) && (\varphi\text{ 是同态}) \\
&= \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y) && (\varphi^{-1} \circ \varphi = I_{G_1})
\end{aligned}
$$

从而 $\varphi : G_2 \to G_1$ 是从 $G_2$ 到 $G_1$ 的同构。 □

**17.51**

(1)

**证明:** 由于 $H$ 为群，所以有 $e_1 \in \varphi^{-1}(e_2) \subseteq \varphi^{-1}(H)$，从而 $\varphi^{-1}(H)$ 非空。

对任意 $a, b \in \varphi^{-1}(H)$，由定义知，$\varphi(a), \varphi(b) \in H$，从而有 $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in H$，所以有 $ab^{-1} \in \varphi^{-1}(H)$。

由子群判定定理二知，$\varphi^{-1}(H) \leqslant G_1$。 □