

$$\iff N(a)x = N(a)y \quad (\text{教材定理 17.22})$$

从而 H 中不同的元素数恰为 $G/N(a)$ 中不同的陪集数。这就证明了 $|H| = [G : N(a)]$ 。 \square

(2)

证明： 由于 $N(a)$ 和 C 都是群，且 C 是 $N(a)$ 的子群。由 **Lagrange** 定理知， $|N(a)| = [N(a) : C]|C|$ ，从而：

$$\begin{aligned} |H| &= [G : N(a)] && (\text{第 (1) 小题结论}) \\ &= \frac{|G|}{|N(a)|} && (\text{Lagrange 定理}) \\ &= \frac{|G|}{[N(a) : C]|C|} && (|N(a)| = [N(a) : C]|C|) \\ &= \frac{n}{[N(a) : C]m} && (|G| = n, |C| = m) \\ & \mid \frac{n}{m} && ([N(a) : C] \text{ 是整数}) \end{aligned}$$

\square