这与 $(x,y)\in S$ (从而有 $y\notin G_1$)矛盾。

其次，有 $E'\subseteq S$。这是因为，若不然，则存在边 $(x,y)\in E'$ 满足条件：

(1) $x,y\in V(G_1)$，或者

(2) $x,y\notin V(G_1)$。

然而，情况 (1) 不可能成立，因为按引理 9.1，如果 $x,y\in V(G_1)$，则 $p(G-(E'-\{(x,y)\}))=p((G-E')\cup\{(x,y)\})=p(G-E')<p(G)$，这与 E' 是割集矛盾。

情况 (2) 也不可能成立。若不然，考虑 $G''=G'\cup\{(x,y)\}$，因为 $E'-\{(x,y)\}\subset E'$，按割集定义，应当有 $p(G'')=p(G'\cup\{(x,y)\})=p(G-(E-\{(x,y)\}))=p(G)$。但由于 x,y 都不在 G_1 中，由引理 9.1 可知，G_1 在 G'' 中仍是一个独立的连通分支。这时，再向 G'' 中加入 $e=(u,v)$。注意到，$E(G''\cup\{e\})=E(G)-(E'-\{(u,v),(x,y)\})\subseteq E(G)$，由引理 9.3 应有 $p(G''\cup\{e\})\geq p(G)$。然后，由引理 9.1，却有 $p(G''\cup\{(u,v)\})=p(G'')-1=p(G)-1<p(G)$。矛盾。

这就证明了 $E'\subseteq S$。从而 $E'=S$ 是一个断集。 □

再证原题。

证明: 考虑关于由 T_1 的树枝 e_1 产生的基本割集 S_{e_1}。设 $e_1=(u,v)$ 且 u 在 $G-S_{e_1}$ 中所在的连通分支为 V_1。由引理 9.4 可知， $S_{e_1}=(V_1,\overline{V}_1)$。我们注意到， $T_1[V_1]$ 和 $T_1[\overline{V}_1]$ 是 T_1-e_1 中仅有的两个连通分支(这是因为， $E(T_1-e_1)\subseteq E(G-S_{e_1})$，从而由引理 9.3 知， $T_1[V_1]$ 和 $T_1[\overline{V}_1]$ 之间是不连通的，而因为 $p(T_1)=1$，所以由引理 9.1 可知， $p(T_1-e_1)\leq 2$。也即，$T_1[\overline{V}_1]$ 恰是 T_1-e_1 的另一个连通分支)。由于 S_{e_1} 是割集，所以由教材定理 9.13， S_{e_1} 至少包含 T_2 中的一个树枝，设 $e_2\in S_{e_1}\cap E(T_2)$ 就是这样的一个树枝。注意到， $e_2\neq e_1$ (因为 $e_1\notin E(T_2)$)，从而有 $e_2\notin E(T_1)$ (因为由基本割集定义，S_{e_1} 中只有 e_1 是 T_1 的树枝)。注意到，由于 $e_2\in S_{e_1}=(V_1,\overline{V}_1)$，所以 e_2 的两端分别在 V_1 和 $\overline{V}_1$ 中(从而在 $T_1[V_1]$ 和 $T_1[\overline{V}_1]$ 中)。从而由引理 9.1 可知，$p((T_1-e_1)\cup\{e_2\})=p(T_1-e_1)-1=1$，从而是 $(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$ 是连通的。再由 T_1 是树可知 $|(T_1-e_1)\cup\{e_2\}|=|T_1|-1+1=|T_1|=n-1$，从而根据教材定理 9.1，$(T_1-e_1)\cup\{e_2\}$ 是树(自然也就是 G 的生成树)。同理可证 $(T_2-e_2)\cup\{e_1\}$ 是 G 的生成树。 □

9.14

证明: 考虑标定图 $G=K_n$ 和 $H=G-e$ (其中 $e\in E(G)$)。注意到，G 的一棵生成树 $T\subseteq G$ 是 H 的生成树当且仅当 $e\notin E(T)$。因此，$\tau(H)$ 即为 G 中不含 e 的生成树数量。

由教材定理 9.7 可知，G 共有 n^{n-2} 棵不同的生成树。每棵生成树中有 $n-1$ 条边，从而 G 中的边在各生成树中出现的次数之和为 $(n-1)n^{n-2}$。由对称性，G 中的每一条边在 K_n 的生成树中出现的总次数是相同的。因此，e 在所有生成树中出现的总次数应为 $\dfrac{(n-1)n^{n-2}}{n(n-1)/2}=2n^{n-3}$。而 e 在每棵生成树中至多只出现一次，从而 G 中共有 $2n^{n-3}$ 棵含 e 的生成树。这就是说，$\tau(H)=\tau(G)-2n^{n-3}=n^{n-2}-2n^{n-3}=(n-2)n^{n-3}$。 □

9.15

证明: 对任意 $G_i,G_j\in\Omega$， $a,b\in\{0,1\}$：

(1) 由定义显然有 $G_i\oplus G_j\in\Omega$。从而环和运算对 Ω 是封闭的。

(2) 由环和运算定义和教材例 1.7 可知，环和运算满足结合律和交换律。

(3) $\varnothing\in\Omega$，且 $\varnothing\oplus G_i=G_i\oplus\varnothing=G_i$，从而 Ω 中有单位元 $\varnothing$。

(4) 由环和运算定义和教材例 1.7 可知， $G_i\oplus G_i=\varnothing$。从而 Ω 中每个元素都有逆元。

(5) 若 $a=b=1$，则 $(ab)G_i=1\cdot G_i=1\cdot(1\cdot G_i)=a(b\cdot G_i)$，若 $a=0\vee b=0$，则 $(ab)G_i=0\cdot G_i=\varnothing=a(b\cdot G_i)$，从而数乘运算满足结合律。

(6) 由定义，有 $1\in\{0,1\}$ 且 $1\cdot G_i=G_i$，从而 1 是关于数乘运算的单位元。