第十九章　格与布尔代数

格的对偶原理 如果命题 P 的对一切格 L 为真，则 P 的对偶命题也对一切格为真.

定理 19.1 设 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 是格，则 $\forall a, b, c \in S$ 有

(1) $a \wedge b \preccurlyeq a, a \wedge b \preccurlyeq b$;

(2) $a \preccurlyeq a \vee b, b \preccurlyeq a \vee b$;

(3) $a \preccurlyeq b$ 且 $a \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq b \wedge c$;

(4) $a \succcurlyeq b$ 且 $a \succcurlyeq c \Rightarrow a \succcurlyeq b \vee c$.

定理 19.2 设 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 是格，$\forall a, b \in S$ 有

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

定理 19.3 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格 L 导出的代数系统，则

(1) $\forall a, b \in L$ 有

$$a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a;$$

(2) $\forall a, b, c \in L$ 有

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c);$$

(3) $\forall a \in L$ 有

$$a \wedge a = a, a \vee a = a;$$

(4) $\forall a, b \in L$ 有

$$a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a.$$

定理 19.4 设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统. 若 $*$ 和 $\circ$ 运算服从交换律、结合律和吸收律，则可以适当定义 S 上的偏序 $\preccurlyeq$，使得 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 构成一个格，且 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 导出的代数系统 $\langle S, \wedge, \vee \rangle$ 就是 $\langle S, *, \circ \rangle$.

定理 19.5 设 L 是格，则

(1) $\forall a, b, c \in L$ 有

$$a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge c \text{ 且 } a \vee c \preccurlyeq b \vee c;$$

(2) $\forall a, b, c, d \in L$ 有

$$a \preccurlyeq b \text{ 且 } c \preccurlyeq d \Rightarrow a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d \text{ 且 } a \vee c \preccurlyeq b \vee d.$$

定理 19.6 设 L 是格，则

(1) $\forall a, b, c \in L$ 有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \qquad a \wedge (b \vee c) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

(2) $\forall a, b, c \in L$ 有

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \vee (c \wedge b) \preccurlyeq (a \vee c) \wedge b.$$