由 B_N 定义知，B_N 任意两个相邻顶点所对应的 0-1 串中，1 的数量只差一个，从而 1 的数量的奇偶性是不同的。令 V_1 为所有对应的 0-1 串中有奇数个 1 的顶点，V_2 为所有对应的 0-1 串中有偶数个 1 的顶点，则 $B_N = \langle V_1, V_2, E\rangle$ 是二部图。

3. 命题对无向图成立。

证明: 考虑无向图 G的任何一棵生成树 T。以其中一个顶点为根，行遍这棵树(前序、中序、后序皆可)，每访问到一个顶点 v，则检查与这个顶点关联的边中，是否有未曾通过的弦，若有，则从此弦上通过，然后立即回到 v，反复这一过程直至所有与 v 关联的弦都被走过至少一次。按此方法行遍整棵树后，行进的轨迹正好是一个通过图 G 中每个边恰好两次的回路。 □

命题对有向图(即使是强连通的)不成立。反例如下：

考虑一个 $n+2(n \geq 3)$ 阶有向图 D，其中 $V(D) = \{v_i \mid i = 0,1,2,\cdots,n,n+1\}$，$E(D) = \{\langle v_0, v_i\rangle, \langle v_i, v_{n+1}\rangle \mid i = 1,2,\cdots,n\} \cup \{\langle v_{n+1}, v_0\rangle\}$。显然，$D$ 是强连通的。由于 v_{n+1} 的入度为 n，要想通过 D 中所有的边，就必须经过 v_{n+1} 至少 n 次，每次到达 v_{n+1} 后，都必须通过边 $\langle v_{n+1}, v_0\rangle$ 离开。因此，任何一个通过 D 中所有边的回路都将通过边 $\langle v_{n+1}, v_0\rangle$ 至少 n 次。

四、

1.

证明: 反设 $\operatorname{Aut} G$ 中只有一个元素(从而只能是恒等映射 I_G)。由 $\operatorname{Inn} G \leqslant \operatorname{Aut} G = \{I_G\}$ 可知，$\operatorname{Inn} G = \{I_G\}$。再由 $\operatorname{Inn} G$ 定义知，对所有 $g, h \in G$，有 $ghg^{-1} = \varphi_g(h) = I_G(h) = h$。等式两边右乘 g，就有 $gh = hg$。由 g, h 的任意性知，G 是 Abel 群。矛盾。 □

2.

(1) 由于二元运算即为从 $A \times A$ 到 A 的全函数，故有 $3^{3\cdot 3} = 3^9$ 个。

(2) 可交换的二元运算可以看作是 $A\&A$ 到 A 的全函数，其中 $A\&A = \{\{x,y\} \mid x, y \in A\}$ 为 A 与自身的无序积。由于这样的无序对有 $C_3^2 + 3 = 6$ 个(C_3^2 为从 3 个数中取两个不同的元素的方法数，加 3 是因为可以取相同的元素进行运算)，所以 A 上可交换的二元运算有 $|A|^{|A\&A|} = 3^6$ 个。

(3) 幂等的运算相当于从 $A \times A - \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$ 到 A 的全函数。故有 $3^{9-3} = 3^6$ 个。

(4) 令 E 为 A 上的所有二元运算，$\mathscr{A}$ 为 A 上可交换的二元运算，$\mathscr{A}$ 为 B 上幂等的二元运算。则 $|{\sim}\mathscr{A} \cap {\sim}\mathscr{B}| = |{\sim}(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})| = |E| - |\mathscr{A} \cup \mathscr{B}|$ 即为 A 上既不可交换，也不是幂等的二元运算数。由容斥原理，$|\mathscr{A} \cup \mathscr{B}| = |\mathscr{A}| + |\mathscr{B}| - |\mathscr{A} \cap \mathscr{B}|$。而 $|\mathscr{A} \cap \mathscr{B}|$ 相当于 $A\&A$ 到 A 的全函数的个数，等于 3^3。从而 A 上既不可交换，也不是幂等的二元运算共有 $3^9 - 2\cdot 3^6 + 3^3 = 3^3(3^3-1)$ 个。