一阶逻辑

- 个体词(个体)：所研究对象中可以独立存在的具 体或抽象的客体
  - 个体常项：具体的事物，用a, b, c表示
  - 个体变项：抽象的事物，用x, y, z表示
  - 个体域(论域)：个体变项的取值范围
    - 有限个体域，如$\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$
    - 无限个体域，如N, Z, R, ...
    - 全总个体域：宇宙间一切事物组成
- 谓词：表示个体词性质或相互之间关系的词,用F,G,H表示
  - 谓词常项：$F(a)$：a是人
  - 谓词变项：$F(x)$：x具有性质F
  - 一元谓词：表示事物的性质
  - 多元谓词(n元谓词, n32)：表示事物之间的关系
    如 $L(x,y)$：x与y有关系L，$L(x,y)$：x3y，...
  - 0元谓词：不含个体变项的谓词，即命题常项或命题变项。
- 量词：表示数量的词
  - 全称量词V"：表示任意的, 所有的, 一切的等　　如 “Vx 表示对个体域中所有的x
  - 存在量词E：表示存在, 有的, 至少有一个等　　如 Ex 表示在个体域中存在x
- 符号化
  - 墨西哥位于南美洲
    - 在命题逻辑中, 设 p：墨西哥位于南美洲, 符号化为 p
    - 在一阶逻辑中, 设a：墨西哥，$F(x)$：x位于 南美洲, 符号化为$F(a)$
  - (2)$\sqrt{2}$是无理数仅当 $\sqrt{3}$是有理数
    在命题逻辑中，设 p：$\sqrt{2}$ 是无理数，q：$\sqrt{3}$是有理数.
    符号化为 $p \to q$
    在一阶逻辑中, 设$F(x)$：x是无理数, $G(x)$：x是有理数
    符号化为 $F(\sqrt{2}) \to G(\sqrt{3})$
  - **例 在一阶逻辑中将下面命题符号化**
    (1) 人都爱美；(2) 有人用左手写字
    分别取(*a*) *D*为人类集合, (*b*) *D*为全总个体域 .
    解：(*a*) (1) 设$G(x)$：x爱美，符号化为 $\forall x\, G(x)$
    (2) 设$G(x)$：x用左手写字，符号化为 $\exists x\, G(x)$
    F(x)是特性谓词，是g (x)的前件
    (*b*) 设$F(x)$：x为人，$G(x)$：同(*a*)中
    全总：蕴含
    存在：合取
    (1) $\forall x\,(F(x)\to G(x))$
    (2) $\exists x\,(F(x)\wedge G(x))$
    宇宙间有一些事物是人，且用左手写字
    这是两个基本公式, 注意它们的使用
    - $F(x)$是特性谓词, 在全总个体域内，将一个事 物中从中区别出来, 即对每一个客体变元的变化范围 加以限制

一阶逻辑公式及其解释

- 合式公式(简称公式)
- 个体变项的自由出现和约束出现
- 解释与赋值
- 公式分类
  永真式，矛盾式，可满足式

- 字母表
  - (1) 个体常项：$a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, \dots, i \geq 1$
  - (2) 个体变项：$x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, i \geq 1$
  - (3) 函数符号：$f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, \dots, i \geq 1$
  - (4) 谓词符号：$F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, \dots, i \geq 1$
  - (5) 量词符号：$\forall, \exists$
  - (6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
  - (7) 括号与逗号：(,), ,
- 项
  - 定义 项的定义如下：
  - (1) 个体常项和个体变项是项.
  - (2) 若j$(x_1, x_2, \dots, x_n)$是任意的n元函数，$t_1,t_2,\dots,t_n$是任意的n个项，则j$(t_1, t_2, \dots, t_n)$是项.
  - (3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.
  - 个体常项、变项是项，由它们构成的n元函数和复 合函数还是项
- 原子公式
  - 定义 设$R(x_1, x_2, \dots, x_n)$是任意的n元谓词，$t_1,t_2,\dots, t_n$ 是任意的n个项，则称$R(t_1, t_2, \dots, t_n)$是原子公式.
  - 原子公式是由项组成的n元谓词.
- 合式公式
  - **定义 合式公式（简称公式）定义如下：**
    (1) 原子公式是合式公式.
    (2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式
    (3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\to B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式
    (4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式
    (5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式.
- 谓词合式公式
- 个体变项的自由出现与约束出现
  - 定义 在公式"VxA和ExA中，称x为指导变元，A为相 应量词的辖域. 在"Vx和Ex的辖域中，x的所有出现都 称为约束出现，A中不是约束出现的其他变项均称 为是自由出现.
  - 闭式：不含自由出现的个体变项的公式.
    - 如：$\forall x(P(x,y)\to\exists yR(x,y))$是闭式.
      $\forall x\forall y(P(x, y)\wedge Q(y, z))\wedge(\exists x)P(x, y)$不是闭式.
- 公式的分类
  - 永真式(逻辑有效式)：在任何解释和赋值下为真命题
  - 矛盾式(永假式)：在任何解释和赋值下为假命题
  - 可满足式：存在成真的解释和赋值