集合的基数

什么是集合的基数

- 通俗地讲，集合的基数是集合的大小
- 对于有限集合，集合的基数是集合中元素的个数
- 对于无穷集合呢？如：N,Z,Q,R等

自然数的定义

- 后继
- 自然数的定义
- 数学归纳法

后继

定义 设a为集合,称$a\cup\{a\}$为a的后继,记作a^+,即

$$a^+=a\cup\{a\}.$$

例 考虑空集的一系列后继。

$$\begin{aligned}\varnothing^+ &= \varnothing\cup\{\varnothing\}\\ &=\{\varnothing\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varnothing^{++} &= \{\varnothing\}^+\\ &= \{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}\\ &= \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\\ &= \{\varnothing, \varnothing^+\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varnothing^{+++} &= \{\varnothing,\{\varnothing\}\}^+\\ &= \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\cup\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\\ &= \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\\ &= \{\varnothing, \varnothing^+, \varnothing^{++}\}\end{aligned}$$

注意: 每个集合都是其后继的元素。

每个集合都是其后继的子集。

自然数的定义

利用后继的性质，可以考虑以**构造性**的方法用集合来给出自然数的定义，即

$0=\varnothing$

$1=0^+=\varnothing^+=\{\varnothing\}=\{0\}$

$2=1^+=\{\varnothing\}^+=\{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{0,1\}$

$3=2^+=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^+=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}=\{0,1,2\}$

…

$n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$ …

说明： 如果定义1=∅，则自然数集从1开始；
这种构造性定义没有概括出自然数的共同特征。

归纳集

定义 设A为集合，如果满足下面的两个条件：

（1）$\varnothing \in A$

（2）$\forall a(a \in A \to a^{+} \in A)$

称A是归纳集。

例如：下面的集合

$\{\varnothing, \varnothing^{+}, \varnothing^{++}, \varnothing^{+++}, \ldots\}$

$\{\varnothing, \varnothing^{+}, \varnothing^{++}, \varnothing^{+++}, \ldots, a, a^{+}, a^{++}, a^{+++}, \ldots\}$

都是归纳集。

自然数n和自然数集 N 的定义

定义 自然数

(1) 一个**自然数n**是属于每一个归纳集的集合。

(2) **自然数集N**是所有归纳集的交集。

说明：根据上述定义得到的自然数集 N 恰好由$\varnothing$, $\varnothing^{+}$, $\varnothing^{++}$, $\varnothing^{+++}$,…等集合构成.而这些集合正是构造性方法所定义的全体自然数。

Peano公理（自然数的定义）

G. Peano 公理

自然数集合 $N=\{0, 1, 2, \ldots\}$ 满足

(1) $0\in N$(其中$0=\varnothing$)

(2) 如果$n\in N$，那么$n^{+}\in N$（$n^{+}=n\cup\{n\}$）

(3) 如果一个子集$S\subseteq N$ 具有性质

a) $0\in S$

b) 如果$n\in S$，那么$n^{+}\in S$

则$S=N$。

说明:

性质3称为极小性质, 它指明了自然数系统的最小性.

自然数运算

自然数都是集合，集合的运算对自然数都适用。

$2 \cup 5 = \{0,1\} \cup \{0,1,2,3,4\} = \{0,1,2,3,4\} = 5$

$3 \cap 4 = \{0,1,2\} \cap \{0,1,2,3\} = \{0,1,2\} = 3$

$4-2 = \{0,1,2,3\}-\{0,1\}=\{2,3\}$

$2 \times 3 = \{0,1\} \times \{0,1,2\} = \{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,0>,$

$<1,1>,<1,2>\}$

自然数运算举例（续）

$P(1)=P(\{0\})=\{\varnothing,\{0\}\}=\{0,1\}$

$2^3=\{0,1\}^{\{0,1,2\}}=\{f \mid f\colon \{0,1,2\}\to\{0,1\}\}=\{f_0,f_1,\ldots,f_7\}$

其中$f_0=\{<0,0>,<1,0>,<2,0>\}$

$f_1=\{<0,0>,<1,0>,<2,1>\}$

$f_2=\{<0,0>,<1,1>,<2,0>\}$

$f_3=\{<0,0>,<1,1>,<2,1>\}$

$f_4=\{<0,1>,<1,0>,<2,0>\}$

$f_5=\{<0,1>,<1,0>,<2,1>\}$

$f_6=\{<0,1>,<1,1>,<2,0>\}$

$f_7=\{<0,1>,<1,1>,<2,1>\}$

基数

- 等势, 优势, 劣势, 绝对优势, 绝对劣势
- Cantor定理, Schröder-Bernstein定理
- 基数(势), $\aleph_0$, $\aleph$
- 有穷集, 无穷集, 可数集(可列集)
- 基数运算

两个基本过程

- **匹配(matching): 多少,大小(基数)----双射**

  $\{a\} \to \{0\}=1$

  $\{a,b\} \to \{0,1\}=2$

  $\{a,b,c\} \to \{0,1,2\}=3\ldots$

- **计数(counting): 首尾,先后(序数)----良序**

  $0\to1\to2\to3\to\ldots$

  $a\to b$

  $c\to b\to a$

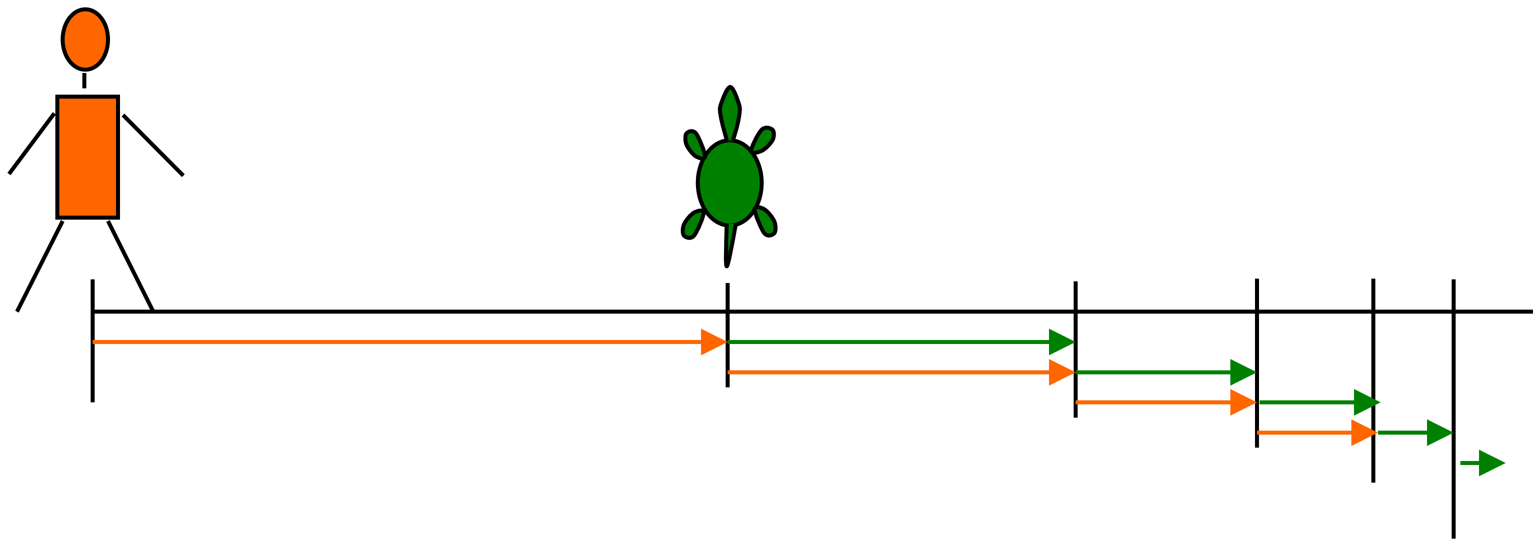
  ……

无穷之迷

- 许多关于无穷的悖论
- 无穷是否“存在”? 人是否“理解”无穷?
- 无穷大, 无穷小, 无限可分性
- 极限
- 有穷与无穷的区别?

芝诺悖论(Zeno’s paradox)

- 芝诺悖论: 阿基里斯(Achilles)追不上乌龟
  - 阿基里斯比乌龟快一倍
  - 乌龟在阿基里斯前面起跑



最快的阿基里斯(Achilles)追不上最慢的乌龟！

对应

实际生活中，自然数用以计数。任意一个自然数都可以视为集合的名。

以3为例。

{0,1,2}，{Mary，John，Tom}

{北京，上海，广州} …

共同特点：这些集合的元素都可以与集合{0,1,2}存在一一对应，且其任意两个集合的元素之间也存在一一对应。

注意：对应是集合之间进行比较的一个非常重要的概念，A与B一一对应，即存在双射函数 $f: A \to B$。

等势(same cardinality)

- 等势: $A \approx B \Leftrightarrow \exists$ 双射$f{:}A \to B$
- 优势,劣势: $A \leq\!\bullet B \Leftrightarrow \exists$ 单射$f{:}A \to B$

  $\Leftrightarrow$ B比A优势$\Leftrightarrow$ A比B劣势
- 绝对优势,绝对劣势:

$A <\!\bullet B \Leftrightarrow A \leq\!\bullet B \wedge A \not\approx B$

$\Leftrightarrow$ B比A绝对优势

$\Leftrightarrow$ A比B绝对劣势

等势关系是等价关系

- **自反**: $A \approx A$

  $I_A: A \to A$ 双射

- **对称**: $A \approx B \Rightarrow B \approx A$

  $f: A \to B$ 双射 $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ 双射

- **传递**: $A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow A \approx C$

  $f: A \to B,\ g: B \to C$ 双射 $\Rightarrow g \circ f: A \to C$ 双射

证明等势⇔构造双射

- **直接构造双射:**

  $N\times N\approx N$, $R\approx(0,1)$, $[0,1]\approx(0,1)$, $(0,1)\approx 2^N$

  $P(A)\approx 2^A$, $A\to(B\to C)\approx(A\times B)\to C$

- **间接构造双射:**

  传递性: $A\approx B \wedge B\approx C \Rightarrow A\approx C$

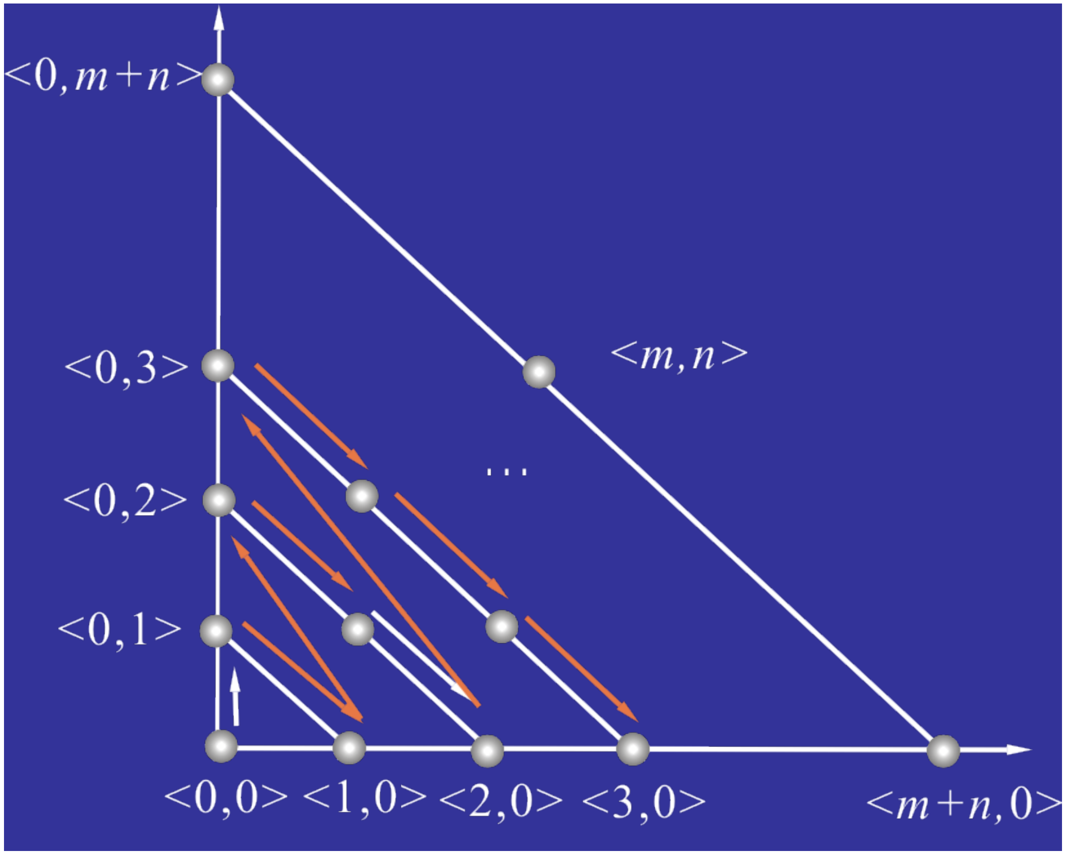
  S-B定理: $A\leq\bullet B \wedge B\leq\bullet A \Rightarrow A\approx B$（伯恩斯坦定理）

$Z \approx N$

$$f(n) = \begin{cases} 2n & n \geq 0 \\ 1-2n & n < 0 \end{cases}$$

则f是Z到N的双射函数。从而证明了$Z \approx N$。

$N \times N \approx N$

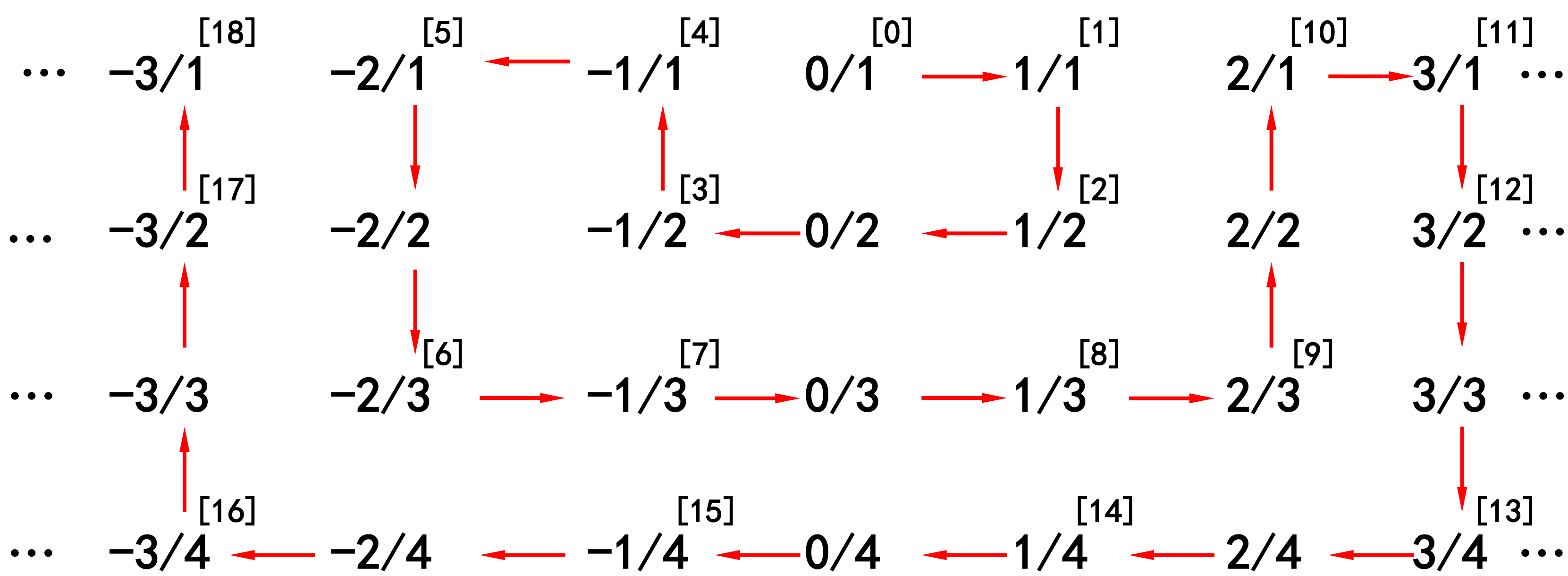


双射函数 $f(<x,y>) = \dfrac{(m+n+1)(m+n)}{2} + (m+1)$

N≈Q

把所有形式为p/q (p,q为整数且$q>0$) 的数排成一张表。

以0/1作为第一个数，按照箭头规定的顺序可以“数遍”表中所有的数。计数过程中必须跳过第二次以及以后各次所遇到的同一个有理数。



$(0,1) \approx \mathbf{R}$

实数区间 $(0,1)=\{x|\ x\in R，0<x<1\}$

令双射函数：$f(x) = tg\dfrac{2x-1}{2}\pi$

则 f 是$(0,1)$到R的双射函数。即$(0,1) \approx R$.

$[0,1] \approx (0,1)$

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots\frac{1}{2^n} & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \downarrow & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \cdots\frac{1}{2^{n+2}} & \cdots
\end{array}$$

双射函数 $f: [0,1]\rightarrow(0,1)$，$f(x)=\begin{cases} 1/2 & x=0 \\ 1/2^2 & x=1 \\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n \\ x & \text{其他x} \end{cases}$

$[0,1]\approx[a,b]$

对任何$a, b\in R$，$a<b$， 证明$[0,1]\approx[a,b]$。

双射函数f：$[0,1]\to[a,b]$，$f(x)=(b-a)x+a$。

TH 5.2 $P(A)\approx 2^A$

证明: 令f: $P(A)\to 2^A$, $\forall B\in P(A)$, $f(B)=\chi_B$, 其中χ_B是B的特征函数, $\chi_B:A\to\{0,1\}$

(1) 证f是单射. 设$B_1\neq B_2$, 则$\exists x\in A$, $\chi_{B_1}(x)\neq\chi_{B_2}(x)$, 故 $\chi_{B_1}\neq\chi_{B_2}$.即$f(B_1)\neq f(B_2)$.

(2) 证f是满射. 任给$g:A\to\{0,1\}$, 令

$$B=\{\,x\in A\mid g(x)=1\,\}\subseteq A$$, 则$\chi_B=$g,即$f(B)=$g

回忆:

$$2^A=A\to 2=A\to\{0,1\}=\{\,f\mid f:A\to\{0,1\}\,\}$$ (全函数)

证明不等势: 归纳法, 对角化

- $n, m \in N \wedge n \neq m \Rightarrow n \not\approx m$
- $N \not\approx P(N)$
- $A \not\approx P(A)$

Cantor定理

Cantor定理:

(1) N$\not\approx$ R（N<•R）

(2) 设A为任意集合,则$A\not\approx P(A)$.（A<•$P(A)$）

证明: (2) (反证) 假设存在双射f:$A \to P(A)$, 令

$$B = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \}$$

则$B \in P(A)$.

因f是双射, 令$f(b)=B$, 则

$b \in B \Leftrightarrow b \notin f(b) \Leftrightarrow b \notin B$,

矛盾

对角化(diagonalization)

- **Cantor定理(1874):** 在全体自然数的幂集与全体自然数之间不存在一一对应.

证明: (反证)假设存在这样的一一对应. 于是可以列举全体自然数的幂集:

$$S_0, S_1, S_2, \ldots$$

$\forall n \in N, n \in S_n$?

	0	1	2	3	4	5 …
S_0	否	是	是	否	是	是 …
S_1	否	是	否	否	是	否 …
S_2	否	否	否	否	否	否 …
S_3	是	否	是	否	是	否 …
S_4	是	是	是	是	是	是 …
S_5	否	是	否	否	否	是 …
…						

对角化(diagonalization)

证明(续): 构造“对角化集” S_d :

$$S_d = \{ n \in \mathrm{N} \mid n \notin S_n \},$$

显然 $S_d \notin \{ S_0, S_1, S_2, \ldots \}$,

这是因为 $n \in S_d \Leftrightarrow n \notin S_n \ (\forall n \in N)$.

但是 $S_d \in \{ S_0, S_1, S_2, \ldots \}$,

这是因为 $S_0, S_1, S_2, \ldots$ 是对全体自然数的幂集的列举, 矛盾!

有穷集, 无穷集

- **有穷集(finite set):** 不能与自身**真子集**建立双射的集合。
- **无穷集(infinite set)**：可以与**自身真子集**建立双射的集合。无穷集也称**无限集**。
- Bernhard Bolzano(1781~1848),
  - Czech人, 1851, “paradoxes of the infinite”
  - 首次使用“set”一词
  - 给出无穷集的上述定义

基数(cardinality)

基数: $|A|$, 或card A, 满足5条约定(公理)

1. $\text{card}\,A = \text{card}\,B \Leftrightarrow A \approx B$
2. A为有穷集,则$\text{card}\,A = n$, 其中$A \approx n$(n是唯一的)
3. $\text{card}\,N = \aleph_0$
4. $\text{card}\,R = \aleph$
5. $0,1,2,\ldots,\aleph_0,\aleph$,都是基数, $\{0,1,2,\ldots,\}$是有穷基数

$K_0=\{\varnothing\}, K_1=\{x|\text{card}\,x=1\}, K\kappa=\{x|\text{card}\,x=\kappa\}$

基数的比较

设κ,λ为基数, A, B为集合, card $A = \kappa$,card $B = \lambda$, 规定:

- $\kappa \leq \lambda \Leftrightarrow A \leq\bullet B$
- $\kappa < \lambda \Leftrightarrow A <\bullet B$
- $\kappa = \lambda \Leftrightarrow A \approx B$
- 例: $0 \leq \kappa$. 设card $A = \kappa$, 单射$\varnothing$: $\varnothing \to A$.

  A非空时, $0 < \kappa$.
- $n \leq \aleph_0$.
- card A < card $P(A)$.

S-B定理

- **Schröder-Bernstein定理:**

  (1) 设A和B是两个集合

  $A \le\cdot B \wedge B \le\cdot A \Rightarrow A \approx B$

  (2) 设κ,λ为两个基数,

  $\kappa \le \lambda,\ \ \lambda \le \kappa \Rightarrow \kappa = \lambda$。

- 该定理为证明集合基数相等提供了有力的工具.
- 构造两个单射函数 $f: A \to B$, $g: B \to A$, 证明$K[A]=K[B]$.
- 比直接构造A到B的双射函数简单。

可数集(enumerable set)

- 可数集(可列集): card A $\leq \aleph_0$.

  有穷可数集: card A=n, ($\forall n \in$N)

  无穷可数集A: cardA= $\aleph_0$.

定理15: A是无穷可数集$\Leftrightarrow A=\{a_1,a_2,\ldots\}$

TH.16:可数集的子集是可数集

TH.17:可数个可数集的并是可数集

TH.18: A是无穷集$\Rightarrow P(A)$不是可数集.

基数运算

- 设κ,λ为基数, K,L为集合, card K = κ,card L = λ, 规定

  (1) $\kappa+\lambda = \mathrm{card}(K\cup L)$, 其中$K\cap L=\varnothing$

  (2) $\kappa\times\lambda = \mathrm{card}(K \times L)$

  (3) $\kappa^\lambda = \mathrm{card}(L\to K)$

- $\kappa\times\lambda$也记作$\kappa\bullet\lambda$, 或$\kappa\lambda$

基数运算

定理19: 设K_1,K_2 ,L_1,L_2 为集合, $K_1 \approx K_2$, $L_1 \approx L_2$, 则

(1) 若$K_1 \cap L_1 = K_2 \cap L_2 = \varnothing$, 则$K_1 \cup L_1 \approx K_2 \cup L_2$

(2) $K_1 \times L_1 \approx K_2 \times L_2$

(3) $K_1 \rightarrow L_1 \approx K_2 \rightarrow L_2$. #

证明: 构造双射函数。

设双射函数f: $K_1 \rightarrow K_2$,g: $L_1 \rightarrow L_2$.

如何构造三个双射函数？并给出证明。

基数运算

定理20: (1) $2^{\mathrm{card}A} = \mathrm{card}\ P(A)$

(2) $\kappa < 2^{\kappa}$.

推论: (1) $\mathrm{card}\ P(N) = 2^{\aleph_0}$

(2) $\mathrm{card}\ P(R) = 2^{\aleph}$

(3) $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

基数运算

定理21:设κ,λ,μ为基数

(1) $\kappa+\lambda = \lambda+\kappa$

(2) $(\kappa+\lambda)+\mu = \lambda+(\kappa+\mu)$

(3) $\kappa\cdot(\lambda+\mu) = (\kappa\cdot\lambda)+(\kappa\cdot\mu)$

(4) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu}$

(5) $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu}\cdot\lambda^{\mu}$

(6) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

基数运算

定理22:设$\kappa \le \lambda$, μ为基数

(1) $\kappa+\mu \le \lambda+\mu$

(2) $\kappa \cdot \mu \le \lambda \cdot \mu$

(3) $\kappa^{\mu} \le \lambda^{\mu}$

(4) $\mu^{\kappa} \le \mu^{\lambda}$, 其中$\kappa,\mu$不同时为0.

基数运算

定理23: 设κ为无穷基数,则$\kappa \bullet \kappa = \kappa$.

定理24: 设κ为无穷基数, λ为基数,则

$$\kappa+\lambda = \kappa \bullet \lambda = \max\{\kappa,\lambda\}, \text{(其中}\lambda\neq 0\text{)}$$

推论: $\kappa+\kappa = \kappa \bullet \kappa = \kappa$.

定理25: 设κ为无穷基数,则$\kappa^\kappa = 2^\kappa$.

关于基数的说明

- 将基数按从小到大的顺序排列得到：

  $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$

  其中，$0, 1, 2 \ldots, n, \ldots$ 是全体自然数，是有限基数。
  $\aleph_0, \aleph, \ldots$ 是无限基数，
- $K[A] < K[P(A)]$，这说明不存在最大的基数。 $\aleph$后面还有更大的基数，如 $K[P(R)]$等。
- $\aleph_0$是最小的无限基数。
- 连续统假设：假设$\aleph$是大于$\aleph_0$的最小基数。

上述问题目前尚未解决，但是该假设与集合论公理体系互相独立。

- $card N = card\ Z = card\ Q = card\ N \times N = card\ Z \times Z = \aleph_0$
- $K\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \aleph_0, \quad K\left[A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots\right] = \aleph_0, \quad where\ K\left[A_i\right] = \aleph_0,$
- $card R = card\ [a,b] = card(c,d) = card\ [e,f) = card\ (g,h] = card\ \{0,1\}^N = card\ P(N) = card\ N^N = card\ R \times R = \aleph$
- $card A < card\ P(A)$, $card\ P(A) = card\ \{0,1\}^A$
- 设A为有限集，则$card\ A < \aleph_0 < \aleph$

  设A为无限集，则$\aleph_0 \le card\ A$
- $card\ A = \aleph_0$, $M \subseteq A$, $card\ M = n$, 则$card\ A - M = \aleph_0$,

  $card\ B \ge \aleph_0$, $card\ C \le \aleph_0$, $C \subseteq B$, 则 $card\ B - C = card\ B \cup C = card\ B$

总结

- 等势, 优势, 劣势, 绝对优势, 绝对劣势
- Cantor定理, Schröder-Bernstein定理
- 基数(势)：0,1, 2 …,n, …, $\aleph_0$ ， $\aleph$
- 有穷集, 无穷集, 可数集(可列集)
- 基数运算
- 作业

  习题五：2、11、12

作业提示

- 作业提示:

3. 先使用S-B定理证明$[0,1] \approx [a,b]$

   再证$[0,1] \approx (0,1)$和（$0,1) \approx R$

11. 构造双射函数：$f:A \to N$, $g:B \to N$

    根据基数运算求解(3)

12. 构造双设函数$h:2^A \to 2^B$.

    再由$P(A) \approx 2^A$ 和$P(A) \approx 2^B$证得.