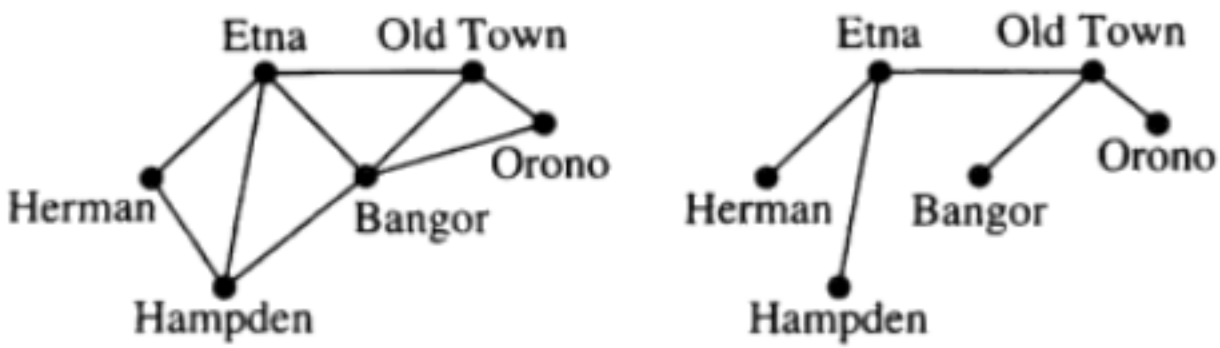
9.2 生成树

假设下图所示的简单图表示的是山东省高速道路系统.为了保持道路畅通,在下雪时,就要经常扫雪,高速管理部门希望只扫尽可能少的道路上的雪,确保总是存在连接任何两个城市的干净道路，如何做呢？



a)道路系统 b)需要扫雪的一些道路

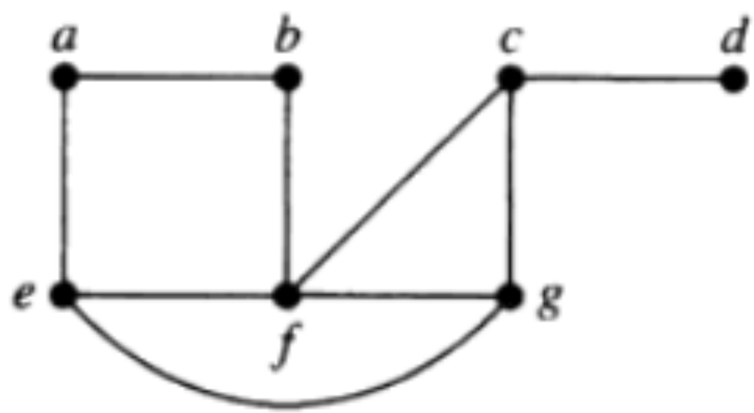
9.2 生成树

- **生成树T**:T是G的生成子图,且T为树
- **树枝**: $e \in E(G)$且$e \in E(T)$
- **弦**: $e \in E(G)$且$e \notin E(T)$
- **余树 T(或补)**: G[E(G)-E(T)]
- **注意:**T不一定是树.

找出下图所示简单图的生成树

G连通,但有圈.因此,先找出G中的一个圈, 删除其中任一条边得到G_1,再找出G_1中的一个圈,删除该圈上的任一条边得到G_2,以此类推,直到在图中找不到圈为止.

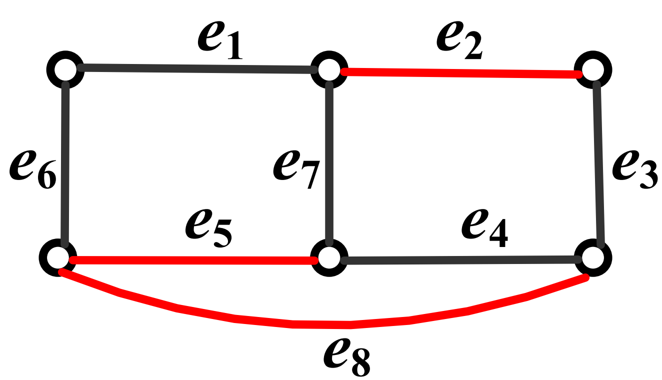
------破圈法.



显然G的生成树不唯一.

举例

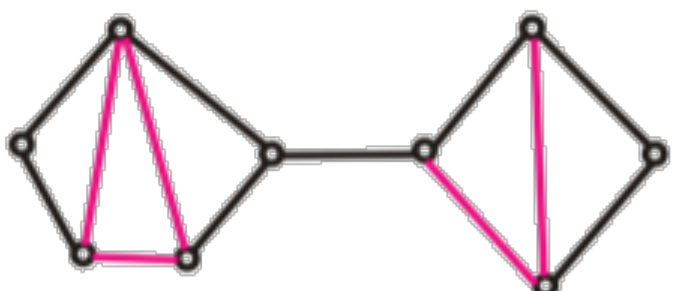
例 如下图，$T=\{e_1,e_6,e_7,e_4,e_3\}$，



$\overline{T}=\{e_2,e_5,e_8\}$

余树是非连通的,无回路

下图中, 黑线表示生成树, 红线构成树的补.余树是非连通的且有回路.



举例

例 设T是6阶无向简单图G的一棵生成树, 讨论下面的问题:

(1) 当G的边数m=9时, T的补是G的生成树吗?

(2) 当G的边数m=12时,T的补是G的生成树吗?

(3) 当G的边数m=10时,T的补可能有哪几种情况?

解 对于树T, $m=n-1$,而任何$m \geq n$或$m<n-1$的图都不是树,因此

$|E(T)|=5$,余树边的条数为m-5.

（1） T的补的边数为9-5=4<n,所以不可能是树。

（2） T的补的边数为12-5=7>n,也不可能是树。

（3）有两种情况：T的补是生成树；T的补不连通且含圈。

生成树的存在性定理

- **定理9.3** 无向图G具有生成树当且仅当G是连通的.

证明:($\Rightarrow$)显然.

($\Leftarrow$)(**破圈法**)若图中无圈, 则图本身就是生成树.

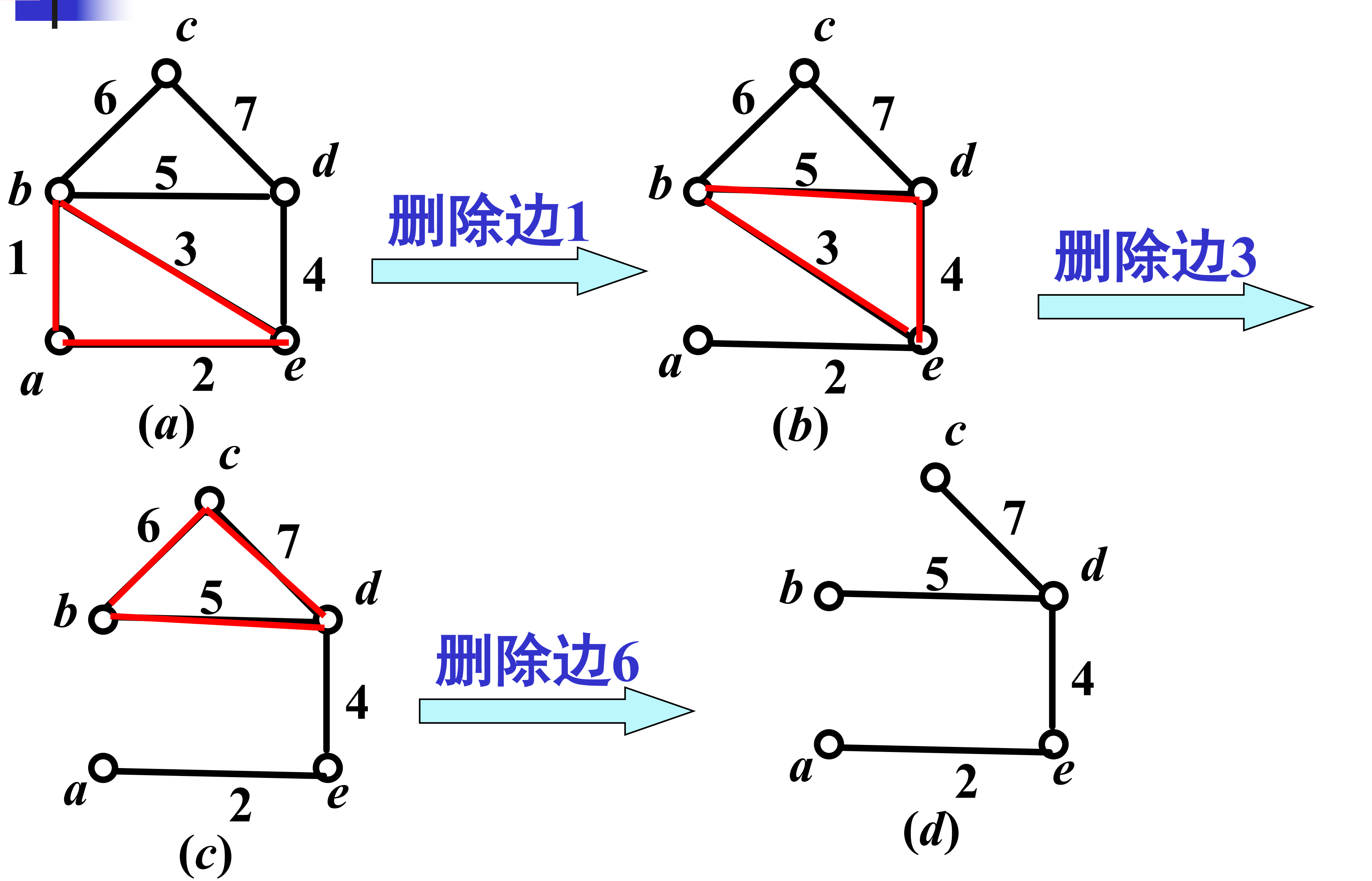
否则删去圈上的任一条边, 这不破坏连通性, 重复进行直到无圈为止,剩下的图是一棵生成树.

- **注意:** 连通图的生成树不唯一.

推论

- **推论1:** 设G为n阶m条边的无向连通图,则$m \geq n-1$.
- **推论2:** 设T为n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树,则T的余树中含$m-n+1$条边.
- **推论3:** 设T是连通图G中一棵生成树,$\overline{T}$为T的余树,C为G中任意一圈,则$E(\overline{T}) \cap E(C) \neq \varnothing$.

破圈法举例



c
6
7
b
5
d
1
3
4
a
2
e
(a)
删除边1
c
6
7
b
5
d
3
4
a
2
e
(b)
删除边3
c
6
7
b
5
d
4
a
2
e
(c)
删除边6
c
7
b
5
d
4
a
2
e
(d)

定理9.4

- **定理9.4:** 设T是无向连通图G中一棵生成树,e是T的任意一条弦,则$T\cup e$中存在仅含一条弦e而其余边均为树枝的圈,而且不同的弦对应的圈是不同的.

证明: 设e=(u,v),由定理9.1可知,在T中u,v之间存在唯一的路径P(u,v),则P(u,v) $\cup$e为G中只含弦e其余边均为树枝的圈.显然,当e_1,e_2为不同的弦时, $e_2 \notin C_{e_1}$ 且 $e_1 \notin C_{e_2}$.所以$C_{e_1} \neq C_{e_2}$.

例9.1

例9.1 设G'为无向连通图G的无圈子图,则G中存在生成树T含G'中所有边.

证明:若G为树,显然结论成立.

若G不是树,则G中必含圈,设C_1为G中的圈,则必存在$e_1 \in E(C_1) \wedge e_1 \notin E(G')$,令$G_1=G-\{e_1\}$.若$G_1$还存在圈$C_2$,则必存在$e_2 \in E(C_2) \wedge e_2 \notin E(G')$,再令$G_2=G-\{e_1,e_2\}$,继续这一过程,直到$G_k=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_k\}$无圈为止,易知$G_k$是$G$的生成子图,无圈并且连通,又含$G'$中所有边,则$G_k$为所求的生成树$T$.(破圈法)

基本回路

- **定义9.3** 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设$e_1', e_2', \ldots, e'_{m-n+1}$为$T$的弦. 设$C_r$为$T$添加弦$e_r'$产生的$G$中惟一的圈(由$e_r'$和树枝组成)，称$C_r$为对应弦$e_r'$的**基本回路**或**基本圈**, r=1, 2, …, $m-n+1$. 称$\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$为对应$T$的**基本回路系统**,称$m$-$n$+1为G的**圈秩**,记作ξ(G).
- **注意：** n阶m条边的无向连通图的不同生成树对应的基本回路系统不同,但基本回路系统中圈的个数为ξ.

基本割集

- **定义9.4** 设T是n阶连通图G的一棵生成树, $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$为$T$的树枝，$S_{e_i}$是$G$的只含树枝$e_i$, 其他边都是弦的割集，称$S_{e_i}$为生成树$T$由树枝$e_i$生成的**基本割集**, i=1, 2, …, n−1. 称$\{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$为对应$T$的**基本割集系统**.称$n$-1为G的割集秩,记为η(G).
- **求基本割集的算法:** 设e为生成树T的树枝，$T-e$由两棵子树T_1与T_2组成，令$S_e=\{e|e\in E(G)$且e的两个端点分别属于T_1与$T_2\}$，则S_e为e对应的基本割集.
- 不同生成树对应的割集系统不同,割集系统中的元素个数均为η(G).

定理9.5

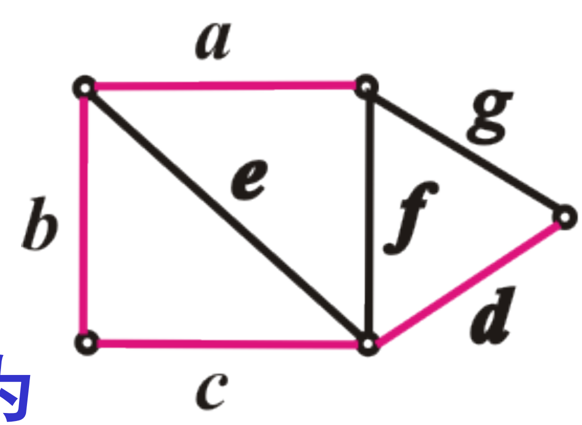
- **定理9.5** 设T是连通图G的一棵生成树,e为T的一条树枝,则G中存在只含树枝e,其余元素均为弦的割集S_e.设e_1,e_2是T的不同的树枝,则$S_{e_1}\neq S_{e_2}$.
- **证明** 由定理9.1知,e为T的桥,因而T-e有两个连通分支,设T_1和T_2.令

$S_e=\{e|e\in E(G)$且e的两个端点分别属于$V(T_1)$和$V(T_2)\}$.

显然$e\in S_e$,且除e外S_e中元素全是弦,并且S_e是G的割集.由构造可知,若e_1,e_2是不同的树枝, $e_1\in S_{e_1}$, $e_1\notin S_{e_2}$, $e_2\notin S_{e_1}$, $e_2\in S_{e_2}$,所以$S_{e_1}\neq S_{e_2}$.

举例

例 图中红边为一棵生成树，求对应它的基本回路系统与基本割集系统



解 弦e,f,g对应的基本回路分别为

$C_e=\{e,b,c\}$, $C_f=\{f,a,b,c\}$, $C_g=\{g,a,b,c,d\}$,

$C_{基}=\{C_e, C_f, C_g\}$.

树枝a,b,c,d对应的基本割集分别为

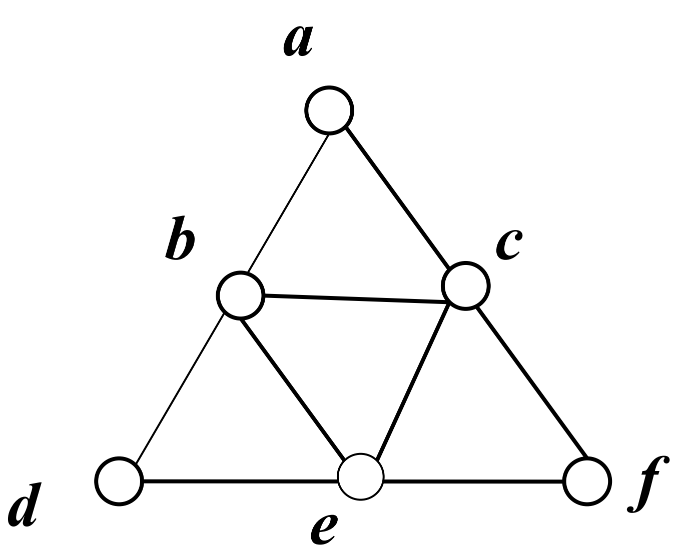
$S_a=\{a, f, g\}$, $S_b=\{b, e, f, g\}$, $S_c=\{c, e, f\ g\}$, $S_d=\{d, g\}$,

$S_{基}=\{S_a, S_b, S_c, S_d\}$.

练习

下图所示图的一棵生成树为

E(T)={(a,b),(a,c),(b,d),(b,e),(c,f)},求它的基本回路系统与基本割集系统



G的生成树的个数$\tau(G)$

- **定理9.6** G是n阶无向连通标定图($V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$)，则对于G的任意非环边均有

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\backslash e)$$

证明: $\forall e \in E(G)$, $\forall T$, T是G的生成树,则

(1)G中不含e的生成树与G-e中的生成树一一对应, $\tau(G-e)$为G中不含e的生成树的个数;

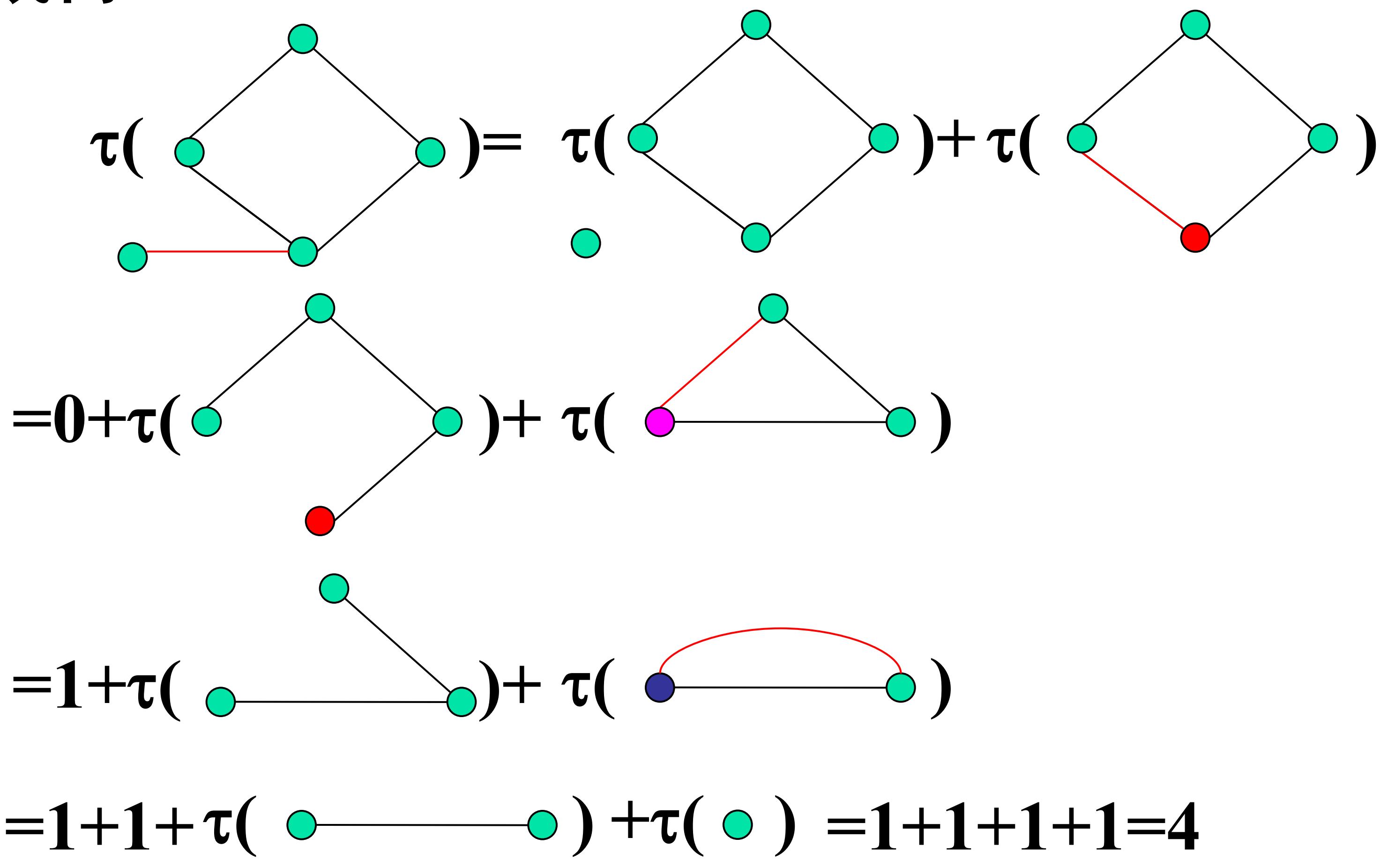
(2)G中含有e的生成树与G\e中的生成树一一对应, $\tau(G\backslash e)$为G中含e的生成树的个数;

得证.

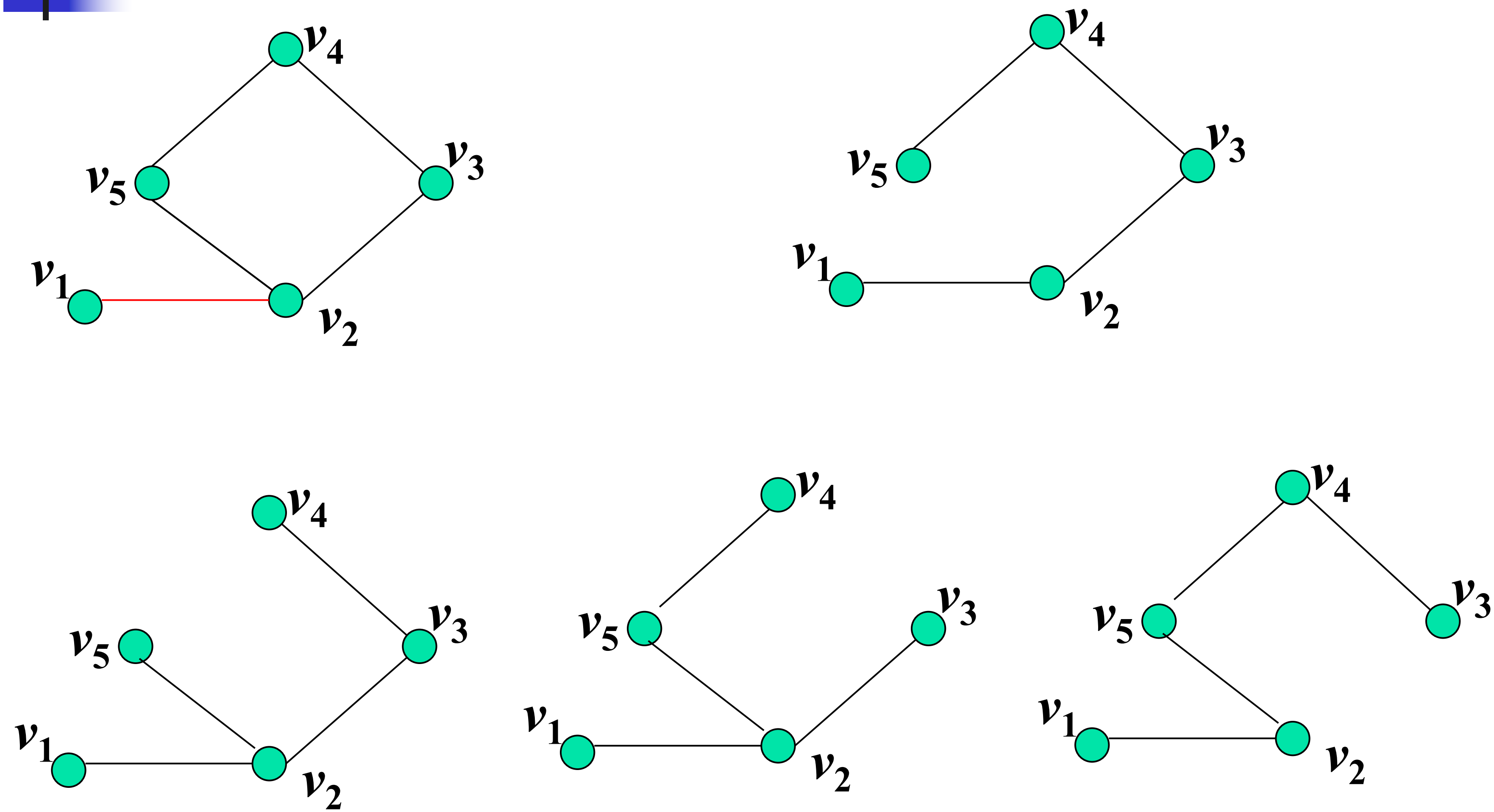
举例

例9.3 计算标定图中生成树的个数,并画出所有不同的生成树.

解



例9.3(续)



v_4
v_5
v_3
v_1
v_2
v_4
v_5
v_3
v_1
v_2
v_4
v_5
v_3
v_1
v_2
v_4
v_5
v_3
v_1
v_2
v_4
v_5
v_3
v_1
v_2

定理9.7($\tau(K_n)$)

- **定理9.7** $\tau(K_n)=n^{n-2}(n\geq 2)$,其中$K_n$为$n$阶标定完全图.

证明 令$V(K_n)=\{1,2,\ldots,n\}$,由$V(K_n)$中的元素构造长为n-2的序列,则共可以构造出n^{n-2}个各不相同的序列.

(1) 对于K_n中任意一棵生成树T,构造长度为n-2的序列.

(2) 任给由$\{1,2,\ldots,n\}$中元素组成的长为n-2的一个序列$\{l_1, l_2,\ldots, l_{n-2}\}$,构造$K_n$的一棵生成树.

构造长度为n-2的序列

(1) 由生成树T,构造长为n-2的序列.

方法: $k_1=\min\{r|r$是T的树叶$\}$,$(k_1,l_1)\in T$

$k_2=\min\{r|r$是T-k_1的树叶$\}$, $(k_2,l_2)\in T$

… …

$k_{n-2}=\min\{r|r$是$(T-\{k_1,k_2, \ldots,k_{n-3}\})$的树叶$\}$,

$(k_{n-2},l_{n-2})\in T$

($l_1,l_2, \ldots,l_{n-2}$)为T对应的序列

构造K_n的一棵生成树

(2) 任给由$\{1,2,\ldots,n\}$中元素组成的长为n-2的一个序列$\{l_1, l_2,\ldots, l_{n-2}\}$,构造$K_n$的一棵生成树.

方法: $k_1=\min\{r|r\in(V-\{l_1,l_2,\ldots,l_{n-2}\})\}$, 令$(k_1,l_1)\in T$

$k_2=\min\{r|r\in(V-\{k_1\}-\{l_2,\ldots,l_{n-2}\})\}$, 令$(k_2,l_2)\in T$

$\ldots,\ \ldots$

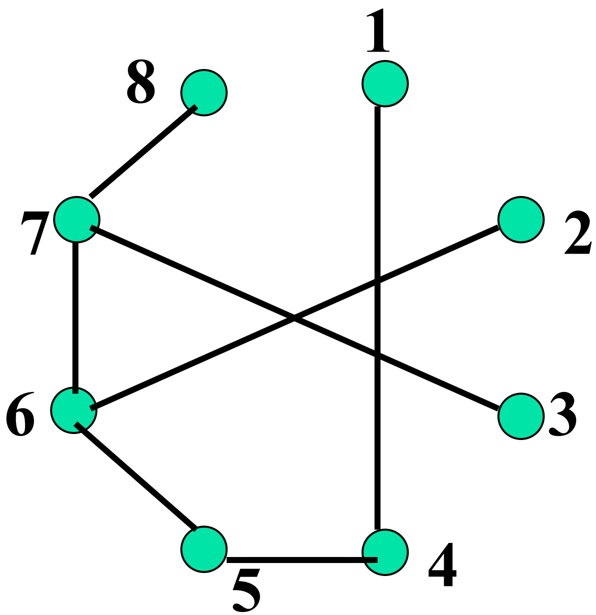
$k_{n-2}=\min\{r|r\in(V-\{k_1,\ldots,k_{n-3}\}-\{l_{n-2}\})\}$, 令$(k_{n-2},l_{n-2})\in T$

最后,令$V-\{k_1,\ldots,k_{n-3},k_{n-2}\}$中的两个元素相邻.

举例

例9.4 (1) 下图为K_8的一棵生成树,求它所对应的长为6的序列;

(2) 求序列(3,2,7,8,2,5)对应的生成树



(1)解 $k_1=1,(1,4),\ l_1=4$

$k_2=2,(2,6),\ l_2=6$

$k_3=3,(3,7),\ l_3=7$

$k_4=4,(4,5),\ l_4=5$

$k_5=5,(5,6),\ l_5=6$

$k_6=6,(6,7),\ l_6=7$

所求的序列为(4,6,7,5,6,7)

举例(续)

(2) 求序列(3,2,7,8,2,5)对应的生成树

解 $k_1=\min\{V-\{3,2,7,8,2,5\}\}=1,(1,3)\in T$

$k_2=\min\{V-\{1\}-\{2,7,8,2,5\}\}=3,(3,2)\in T$

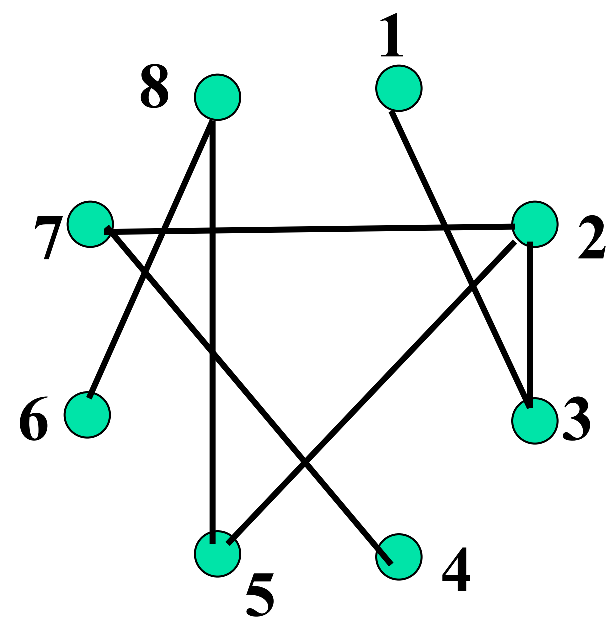
$k_3=\min\{V-\{1,3\}-\{7,8,2,5\}\}=4,(4,7)\in T$

$k_4=\min\{V-\{1,3,4\}-\{8,2,5\}\}=6,(6,8)\in T$

$k_5=\min\{V-\{1,3,4,6\}-\{2,5\}\}=7,(7,2)\in T$

$k_6=\min\{V-\{1,3,4,6,7\}-\{5\}\}=2,(2,5)\in T$

$\{V-\{1,3,4,6,7,2\}\}$中的5和8相邻，$(5,8)\in T$



总结

- 无向树的6个等价定义
- 不同的n阶无向树的棵树
- 生成树的定义及存在性
- 基本回路和基本割集
- G的生成树的个数$\tau(G)$及$\tau(K_n)$
- 作业:P154-155,习题九:9,10, 11

补充题: 下面的每个简单图各有多少个不同的生成树?

1) K_3, 2) K_4, 3) $K_{2,2}$, 4) C_5