7.5 有向图的连通性

设有向图$D=<V,E>$

- u可达$v(u\to v)$: u到v有一条有向路径.
- 规定u到自身总是可达的.
- 互相可达$(u\leftrightarrow v)$: $u\to v$且$v\to u$
- 可达具有自反性和传递性，但不一定具有对称性。
- u到v的距离（或短程线）：u到v长度最短的路径长度 (u可达v)，记作$d<u,v>$。
- 规定：若u不可达v, $d<u,v>=\infty$.
- 距离的性质：

$d<u,v>\geq 0$,　　$d<u,u>=0$，$d<u,v>+d<v,w>\geq d<u,w>$

注意：$d<u,v>\neq d<v,u>$

强连通、单侧连通、弱连通

图的直径： $D = \max_{u,v \in V} d < u,v >$

定义 如果有向图D的基图是连通的,则称图D为**弱连通的(连通的)**.

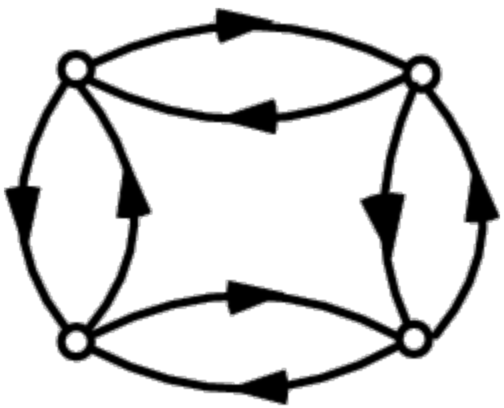
$\forall u,v \in V(D)$,若$u \to v$, $u \to v$至少成立一个, D是**单向连通的**.

如果图G中的任何一对结点之间都是互相可达的, 则称图G是**强连通的**.

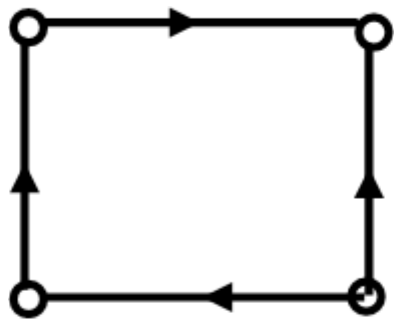
结论: 强连通图一定是单向连通的,单向连通图一定是弱连通的.

有向图连通性举例

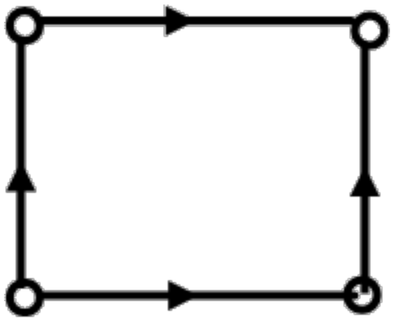
例 判断下列图的连通性。



(a)



(b)



(c)

强连通 单向连通 弱连通

强连通判别法

定理7.21 有向图D是强连通的, 当且仅当D中存在至少包含每个结点一次的回路.

证明 充分性

设G中有一个回路,它至少包含每个结点一次,则G中任两个结点都是相互可达的,故G是强连通图.

必要性

设G含有n个结点且是强连通的, 则任意两个结点都是相互可达, 故v_i可达v_{i+1}， i=1,2, …,n-1， 设P_i是v_i到v_{i+1}的路, P_n是v_n到v_1的路,则P_1, P_2, … P_{n-1}, P_n所围成的回路经过G中每个结点至少一次.

单向连通判定(定理7.22)

定理7.22 图G单向连通当且仅当G中存在经过每个顶点至少一次的路。

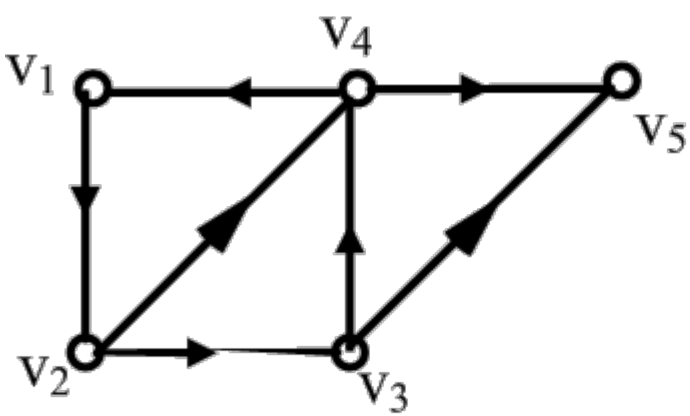
命题 设D是单向连通的有向图,则对于任意的$V'\subseteq V(D)$,存在$v'\in V'$,使得任意$v\in V$,均有$v'\rightarrow v$. (自学证明)

证明 充分性显然.

必要性. 根据命题可知,V(D)中存在v_1, v_1可达其余各结点,$V_1=V(D)-\{v_1\}$中存在v_2可达V_1中各结点,$V_2=V-\{v_1,v_2\}$中存在v_3可达V_2中各结点,…,$V_{n-2}=V(D)-\{v_1, v_2,\ldots, v_{n-2}\}$中存在$v_{n-1}$可达$V_{n-2}$中各结点,于是$v_1\rightarrow v_2\rightarrow\ldots\rightarrow v_n$,因而存在通路$v_1\ldots v_2\ldots v_{n-1}\ldots v_n$经过D中每个结点至少一次.

强分图，弱分图，单向分图

- **定义** 在简单有向图中，具有强连通性质的极大子图，称为**强分图**；具有单向连通性质的极大子图，称为**单向分图**；具有弱连通性质的极大子图，称为**弱分图**。



(a)

强分图：$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$\{v_5\}$

单侧分图：$\{v_1,v_2,v_3,v_4, v_5\}$

弱分图：$\{v_1,v_2,v_3,v_4, v_5\}$

注：求D的强、弱连通分支比较容易，求单向分支比较困难。

定理

- **定理** 在有向图$G=<V,E>$中,它的每一个顶点位于且仅位于一个强分图中.

证明 先证每一个结点都位于一个强分图中.

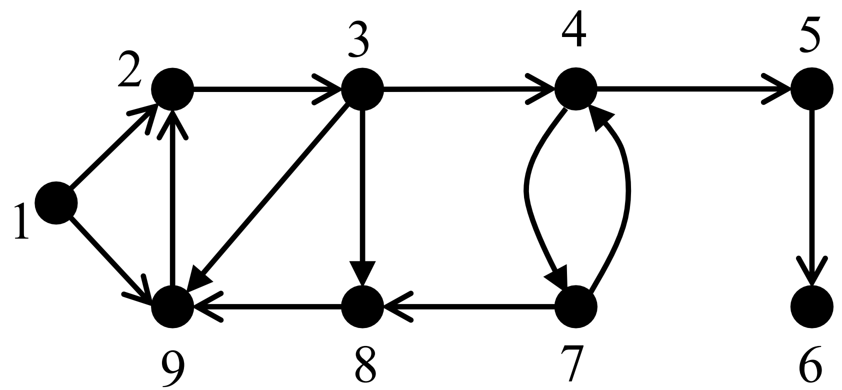
$\forall v\in V$, 令S是G中所有与v相互可达的结点的集合, 显然$v\in S$, 且S是G的一个强分图. 故G的每一结点必位于一个强分图中.

再证每一个结点仅位于一个强分图中.

假设v位于两个不同的强分图S_1与S_2中, 因为S_1中每个顶点与v互相可达, v与S_2中的每个顶点也互相可达,故S_1中任何顶点与S_2中任何一个顶点通过v都互相可达, 这与S_1为强分图矛盾, 得证.

分图的举例

例 求下图D的强连通分支、单向连通分支。



D

图的连通定向问题

- 给定一个无向图G，给每条边一个方向，使得到的有向图D是强连通的（单向连通的或弱连通的）。
- 举例：城市交通网设计问题：

一座城市为某种需要，要把所有街道改为单行道，使得人们在任意两个位置都可以互相到达。如何设计单行道方向？

- 图论建模：街道交叉口模型为图的顶点，两点连线当且仅当该两顶点是某条街道的端点。
- 问题等价于在模型图中给出其强连通定向。

图的强连通定向的两个问题

给定一个无环无向图G，要对其强连通定向，需要解决两个问题：

- 强连通定向的存在性

  定理（罗宾斯，1939）非平凡连通图G具有强连通定向当且仅当G是2边连通的。

- 如何定向

  强连通定向算法

罗宾斯（1915-2001），美国拓扑学家，数理统计学家

强连通定向算法

设G=<V,E>是2边连通无向简单图。

(1) 在G中任取一顶点w,令$l(w)=1$,$L=\{w\}$,$U=V-\{w\}$,

$A=\varnothing$;

(2) 在L中求点v,使得$l(v)$最大且满足在U中存在其邻点u。然后作有向边$<v,u>$.令$l(u)=l(v)+1$,$L=L\cup\{u\}$,

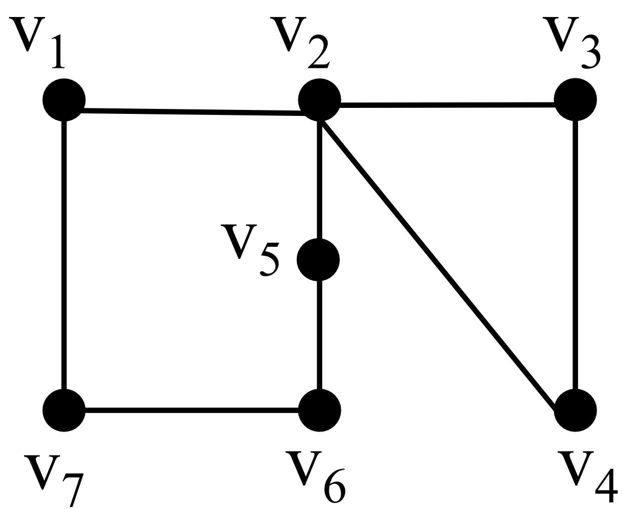
$U=U-\{u\}$,$A=A\cup\{<v,u>\}$;

(3) 若L≠V,转(2);否则转(4);

(4) 对剩下的未赋予方向的边，按由标号值大的顶点指向标号值小的顶点赋予方向。

强连通定向算法的举例

求下图G的强连通定向



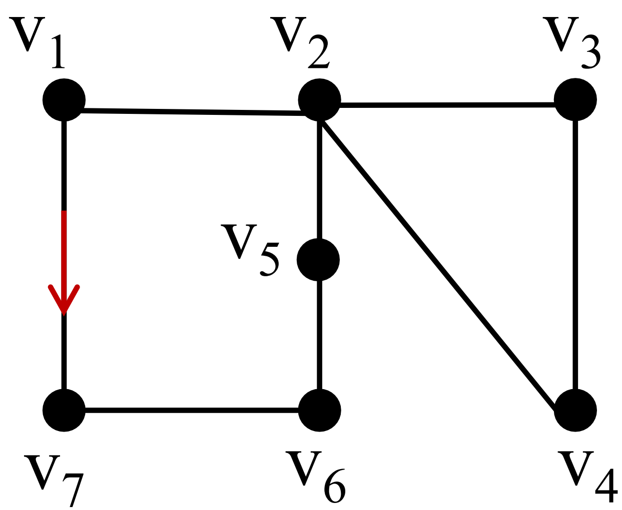
G

解 (1) 取顶点v_1,令$l(v_1)=1$,$L=\{v_1\}$,

$U=\{v_2,v_3,v_4, v_5, v_6, v_7\}$,$A=\varnothing$;

强连通定向算法的举例

求下图G的强连通定向



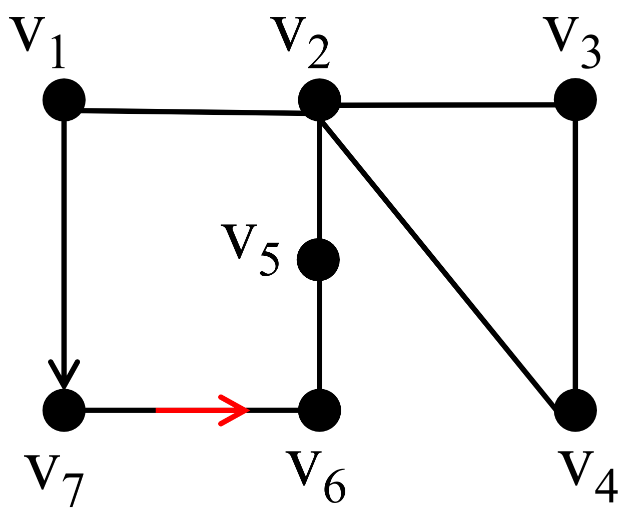
G

解 (2) 在U中取顶点v_7,令$l(v_7)=2$,$L=\{v_1, v_7\}$,

$U=\{v_2,v_3,v_4, v_5, v_6\}$, $A=\{< v_1, v_7>\}$;

强连通定向算法的举例

求下图G的强连通定向



G

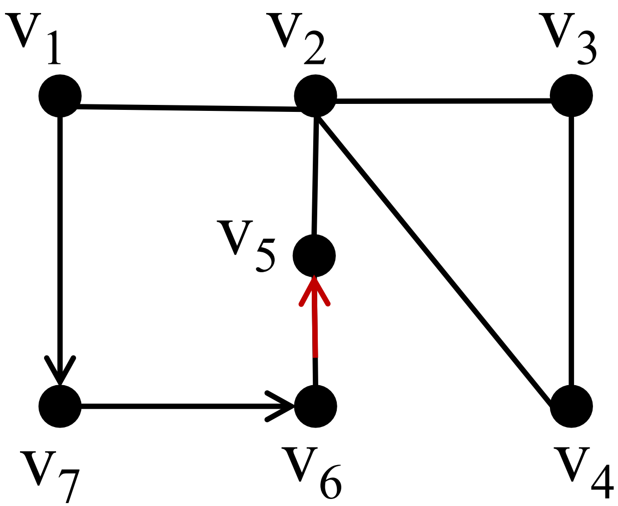
解 (3) $L \neq V$, 转(2). 在L中取顶点v_7,在U中取顶点v_6,

令$l(v_6)=3$, $L=\{v_1,v_7,v_6\}$,$U=\{v_2,v_3,v_4, v_5\}$,

$A=\{<v_1,v_7>, <v_7,v_6>\}$;

强连通定向算法的举例

求下图G的强连通定向



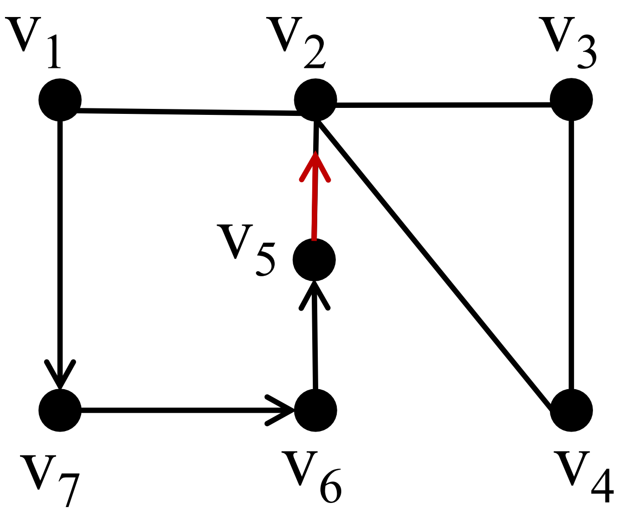
G

解 (3) $L \neq V$, 转(2). 在L中取顶点v_6,在U中取顶点v_5, 令$l(v_5)=4$, $L=\{v_1,v_7,v_6,v_5\}$,$U=\{v_2,v_3,v_4\}$,

$A=\{<v_1,v_7>, <v_7,v_6>, <v_6,v_5>\}$;

强连通定向算法的举例

求下图G的强连通定向



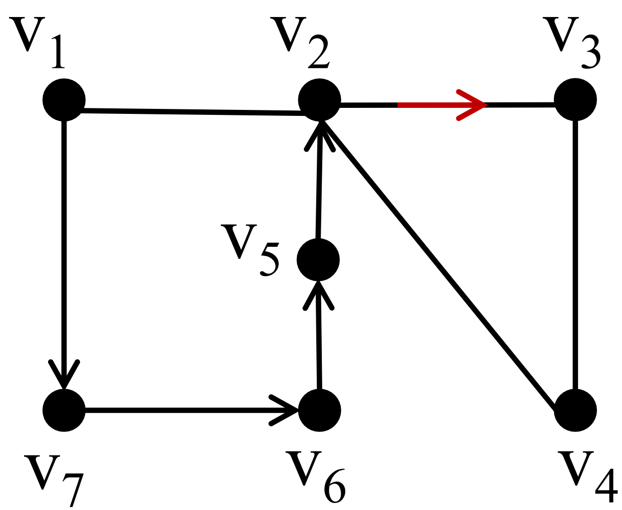
G

解 (3) L ≠V, 转(2). 在L中取顶点v_5,在U中取顶点v_2,
令$l(v_2)=5$, $L=\{v_1,v_7,v_6,v_5,v_2\}$,$U=\{v_3,v_4\}$,

$A=\{<v_1,v_7>, <v_7,v_6>, <v_6,v_5>, <v_5,v_2>\}$;

强连通定向算法的举例

求下图G的强连通定向



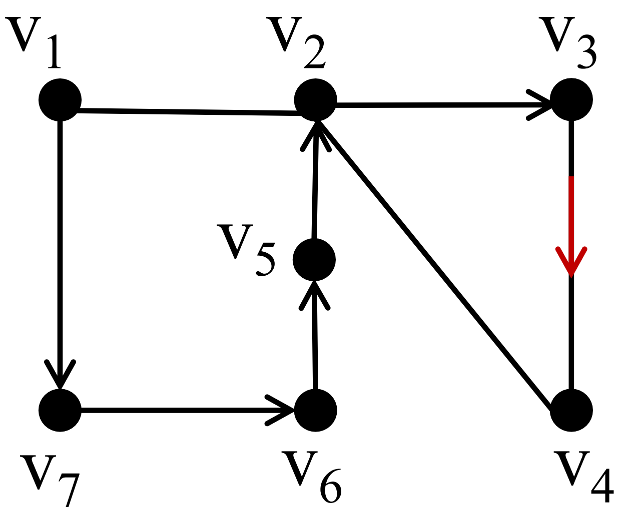
G

解 (3) $L \neq V$, 转(2). 在L中取顶点v_2,在U中取顶点v_3, 令$l(v_3)=7$, $L=\{v_1,v_7,v_6,v_5,v_2,v_1,v_3\}$,$U=\{v_4\}$,

$A=\{<v_1,v_7>, <v_7,v_6>, <v_6,v_5>, <v_5,v_2>, <v_2,v_3>\}$;

强连通定向算法的举例

求下图G的强连通定向



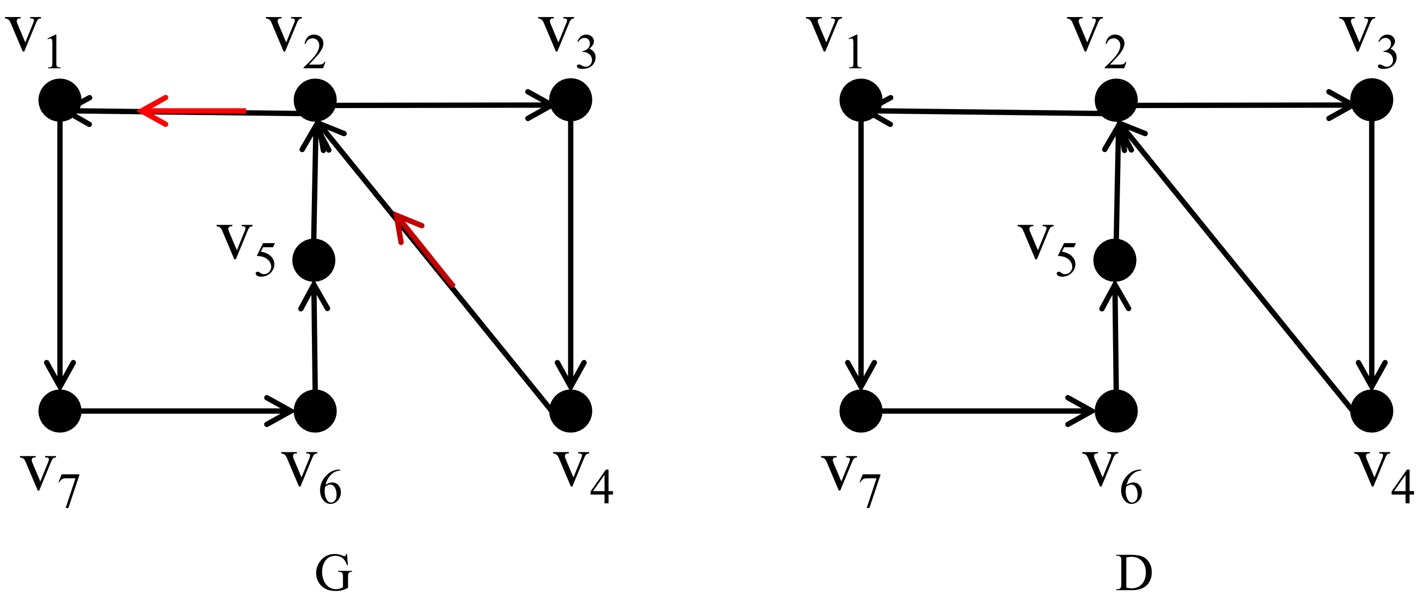
G

解 (3) $L \neq V$, 转(2). 在L中取顶点v_3,在U中取顶点v_4,令$l(v_4)=8$, $L=\{v_1,v_7,v_6,v_5,v_2,v_1,v_3,v_4\}$,$U=\varnothing$,

$A=\{<v_1,v_7>,<v_7,v_6>,<v_6,v_5>,<v_5,v_2>,<v_2,v_3>,<v_3,v_4>\}$;

强连通定向算法的举例

求下图G的强连通定向



解 (3) L =V, 转(4).

(4) 对剩余的边按照标号值大的顶点指向标号值小的顶点赋予方向

学习要点与基本要求

- 深刻理解路与回路的定义及其分类.
- 理解无向图的连通性、连通分支等概念.
- 理解有向图连通性的概念及其分类.
- 掌握判断有向连通图类型的方法.
- 了解二部图的概念及其判定.

实例分析

例题1 设G是无向图，证明e是G的割边当且仅当e不包含在G的闭迹中。

证明 **充分性。**

设$e=(u,v)$不包含在G的闭迹中，那么u与v之间不存在除了e外的其它的路，所以在G-e中u与v不连通，因此G-e是非连通图，故e是G的割边.

必要性。

设$e=(u,v)$是G的割边，假设e在G的闭迹C中，那么C-e中存在从u到v的路，所以G-e中u与v是连通的，这与e是割边矛盾。

实例分析

例题2 若无向图G中恰有两个奇数度的结点，则这两个结点间必有一条路。

证明 设无向图G中两个奇数度结点为u和v.

从u开始构造一条路径，即从u出发经关联于u的边e_1到达结点u_1， 若$d(u_1)$为偶数，则必可由u_1经关联于结点u_1的边e_2到达结点u_2，依次进行下去，每边只取1次，直到另一个奇数度结点.

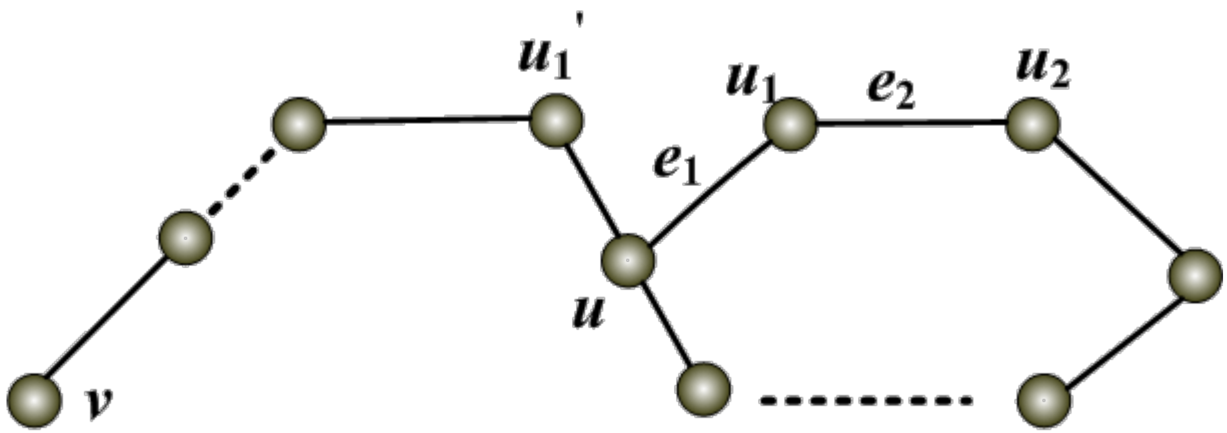
(1)若结束点是v，则u到v的一条路就构造好了.

(2)若结束点是u，那么此路是圈。

实例分析

圈上每个结点都关联偶数条边，但$d(u)$为奇数，所以至少有1条关联于u的边不在该闭迹上。

从u出发沿该边按照上述方法继续构造路，直到奇数度结点v结束，这就是一条从u到v的路.



返回