# 第四章　方程求根的迭代法

高　云

# 简介（Introduction）

我们知道在实际应用中有许多非线性方程的例子，例如

- （1）在光的衍射理论（the theory of diffraction of light)中,我们需要求x-tanx=0的根
- （2）在行星轨道（ planetary orbits）的计算中,对任意的a和b，我们需要求x-asinx=b的根
- （3） 在数学中，需要求n次多项式$x^n + a_1 x^{n-1}+...+a_{n-1} x + a_n =0$的根

# 方程求根需要考虑的问题

## 求 $f(x)=0$ 的根

- 实根与复根
- 根的重数

  $f(x)=(x-x^*)^m\cdot g(x)$ 且 $g(x^*)\neq 0$, 则 $x^*$ 为 $f(x)$ 的 $m$ 重根

- 有根区间：$[a, b]$ 上存在 $f(x)=0$ 的一个实根

研究内容: 在有根的前提下求出方程的近似根。

## 迭代法的基本思想

迭代函数

基本思路

$f(x)=0 \xrightarrow{\text{同解}} x=\varphi(x) \xrightarrow[\text{公式}]{\text{迭代}} x_{k+1}=\varphi(x_k)$

？转换是否唯一

$\xrightarrow[x_0]{\text{给定初值}}$ 序列 $x_0, x_1 \cdots x_{n-1}, x_n \cdots$

$\xrightarrow[\text{存在}]{\lim\limits_{n->\infty} x_n = x^*} \varphi(x^*)=x^*$

$\xrightarrow{\text{等价于}} f(x^*)=$

$x^*$为$\varphi(x)$的不动点

$\xrightarrow[\text{意义}]{\text{几何}} \begin{cases} y=x \\ y=\varphi(x) \end{cases}$

## 转换例子(1)

例：已知方程 $x^3-6x^2+9x-2=0$ 在 [3,4] 内有一根，考虑迭代

(1) $x=\varphi_1(x)=x^3-6x^2+10x-2$；

(2) $x=\varphi_2(x)=\sqrt{(x^3+9x-2)/6}$；

(3) $x=\varphi_3(x)=x-\dfrac{x^3-6x^2+9x-2}{3x^2-12x+9}$；

(4) $x=\varphi_4(x)=\sqrt[3]{6x^2+9x-2}$；

？ 哪种转换方法好　　　　For example: $2x^3-x-1=0$

## 转换例子(2)

(1) 如果将原方程化为等价方程 $x = 2x^3 - 1$

则迭代格式为：$x_{k+1} = 2x_k^3 - 1$

取初值 $x_0 = 0$

$$x_1 = 2x_0^3 - 1 = -1$$

$$x_2 = 2x_1^3 - 1 = -3$$

$$x_3 = 2x_2^3 - 1 = -55$$

由此可见，这种迭代格式是发散的

## (2) 如果将原方程化为等价方程 $x=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

仍取初值 $x_0=0$

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{x_0+1}{2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx 0.7937$$

$$x_2=\sqrt[3]{\frac{x_1+1}{2}}=\sqrt[3]{\frac{1.7937}{2}}\approx 0.9644$$

依此类推, 得

$x_3 = 0.9940$

$x_4 = 0.9990$

$x_5 = 0.9998$

$x_6 = 1.0000$

$x_7 = 1.0000$

同样的方程

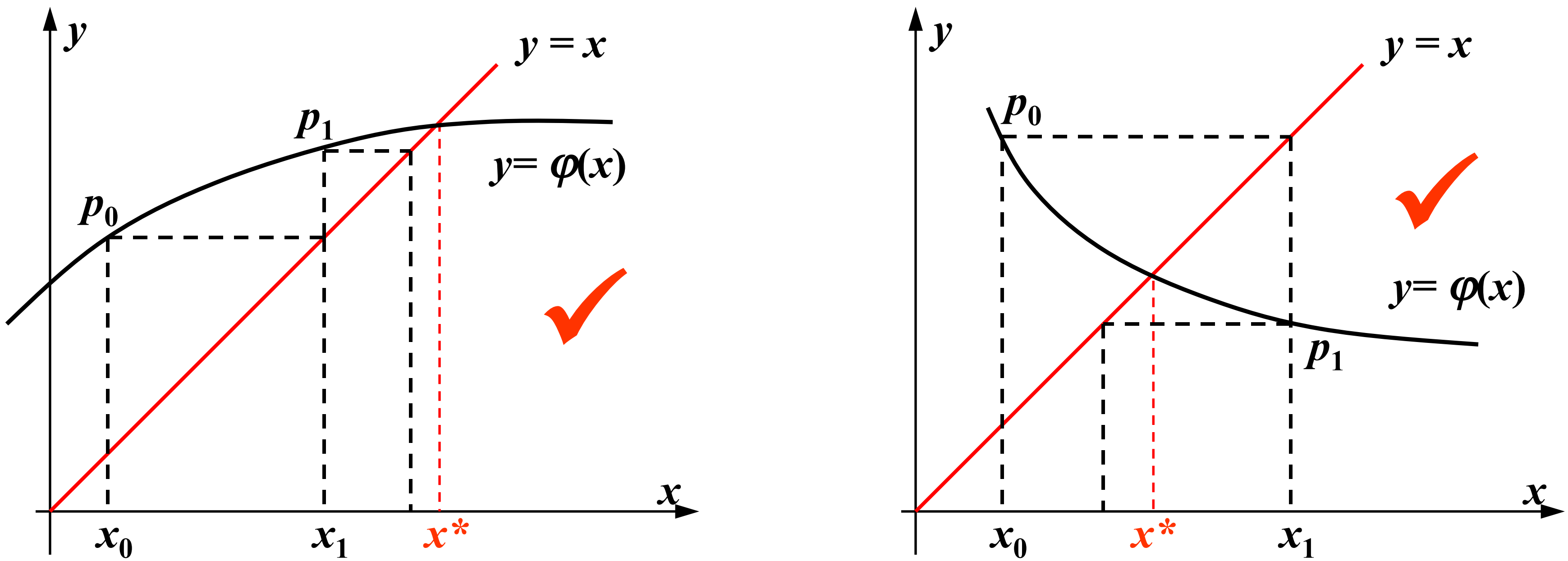
$\Rightarrow$ 不同的迭代格式

有不同的结果

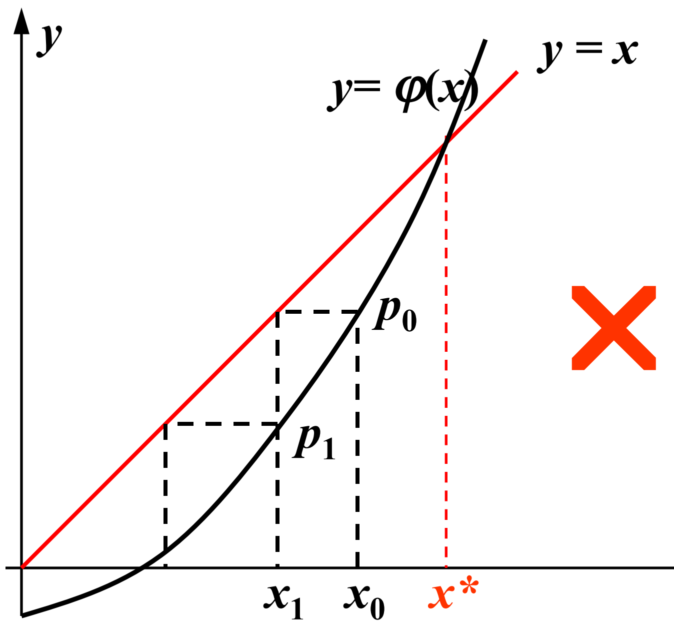
什么形式的迭代法能够收敛呢?

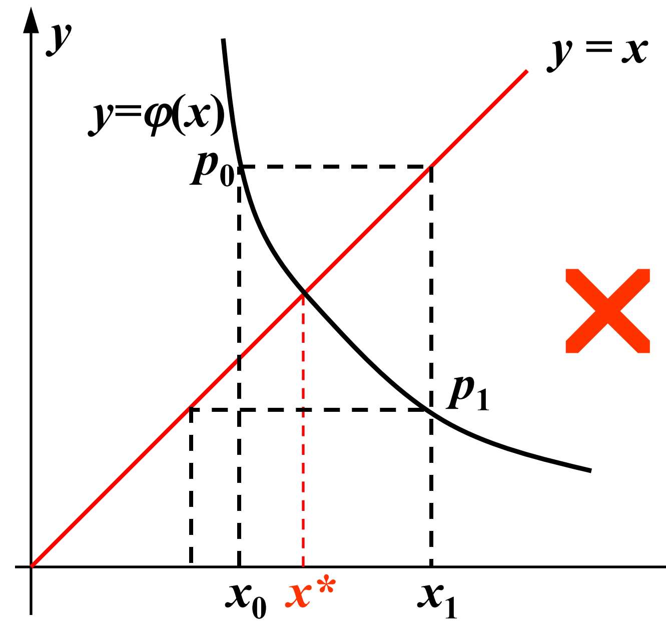
已经收敛, 故原方程的解为 $x = 1.0000$

# 几何含义



# 几何含义



# 压缩映像定理

**定理** 设 $\varphi(x)\in C[a, b]$ 且可导，若

(1) $a \le \varphi(x) \le b$ 对一切 $x\in[a, b]$ 都成立

(2) $\exists\ 0 \le L < 1$，使得 $|\varphi'(x)| \le L$ 对 $\forall\ x\in[a, b]$ 成立

则有

(a) 对任意 $x_0\in[a, b]$，由 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 均收敛到 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 中的唯一不动点 $x^*$。

(b) 有如下的误差估计

$$|x_k - x^*| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

可用 $|x_{k+1}-x_k|$ 来控制收敛精度

$$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$L$ 越小收敛越快

# 压缩映像定理证明

**(a) 由压缩映像定理可知，不动点 $x^*$ 存在且唯一。**

$$|x_k - x^*| = \left|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)\right| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x_{k-1} - x^*| \le L|x_{k-1} - x^*|$$

$$\Rightarrow |x_k - x^*| \le L|x_{k-1} - x^*| \le L^2|x_{k-2} - x^*| \le \cdots \le L^k|x_0 - x^*|$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} |x_k - x^*| = 0}$$

# 压缩映像定理证明

**(b)** $|x_{k+1}-x^*|\le L\,|x_k-x^*|$

$$|x_{k+1}-x_k|=|(x_{k+1}-x^*)-(x_k-x^*)|\ge|x_k-x^*|-|x_{k+1}-x^*|$$

$$\ge(1-L)|x_k-x^*|$$

$$|x_k-x^*|\le\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$$

又 $|x_{k+1}-x_k|=|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})|=|\varphi'(\xi)|\cdot|x_k-x_{k-1}|\le L\,|x_k-x_{k-1}|$

$$|x_k-x^*|\le\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|\le\cdots\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

# 全局收敛与局部收敛

- 定理的条件保证了不动点迭代的**全局收敛性**。

  即迭代的收敛性与初始点的选取无关。

定理中的条件 $|\varphi'(x)| \le L < 1$ 可以适当放宽

(2′) $\varphi'(x)$ 在 $x^*$ 的某个邻域内连续，且 $|\varphi'(x^*)| < 1$

由 $\varphi'(x)$ 的连续性及 $|\varphi'(x^*)| < 1$ 即可推出：

存在 $x^*$ 的某个 $\delta$ 邻域 $N(x^*) = [x^* - \delta,\ x^* + \delta]$，使得对 $\forall\, x \in N(x^*)$ 都有 $|\varphi'(x)| \le L < 1$，则由 $\forall x_0 \in N(x^*)$ 开始的迭代都收敛。

- 这种在 $x^*$ 的邻域内具有的收敛性称为**局部收敛性**。

# 例题(1)

用一般迭代法求方程$x-\ln x=2$在区间（2，$\infty$）内的根，要求$|x_k-x_{k-1}|/|x_k|<=10^{-8}$

解：令$f(x)=x-\ln x-2$

$f(2)<0, f(4)>0$, 故方程在（2, 4）内至少有一个根

又 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0, x\in(2,\infty)$

因此方程 $f(x)=0$在（2，$\infty$）内仅有一个根$x^*$，且$x^*\in(2,\infty)$

# 例题(2)

将方程化为等价方程： $x = 2 + \ln x$

$$g(x) = 2 + \ln x, \quad |g'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| < 0.5 < 1, x \in (2,4)$$

因此，$\forall\ x_0 \in (2, \infty)$，$x_{k+1} = 2 + \ln x_k$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $X^*$

取初值 $x_0 = 3.0$，计算结果如下：

# 例题(3)

| $k$ | $x_i$ |
|---|---|
| 0 | 3.000000000 |
| 1 | 3.098612289 |
| 2 | 3.130954362 |
| 3 | 3.141337866 |
| 4 | 3.144648781 |
| 5 | 3.145702209 |
| 6 | 3.146037143 |
| 7 | 3.146143611 |
| 8 | 3.146177452 |
| 9 | 3.146188209 |
| 10 | 3.146191628 |
| 11 | 3.146192714 |
| 12 | 3.146193060 |
| 13 | 3.146193169 |
| 14 | 3.146193204 |

## 迭代过程的收敛速度

**定义**

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r}=C>0 \qquad (C\text{为常数})$$

则称该迭代为 $r$ 阶收敛。

(1) 当 $r=1$ 时称为线性收敛，此时 $C<1$；

(2) 当 $r=2$ 时称为二次收敛，或平方收敛；

(3) 当 $r>1$ 时称为超线性收敛。

- 二分法线性收敛
- 不动点迭代中，若 $\varphi'(x^*)\neq 0$，则

$$e_{k+1}=x_{k+1}-x^*=\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi)e_k$$

取极限得 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r}=|\varphi'(x^*)|\neq 0 \Longrightarrow$ 线性收敛

# P阶收敛

**定理** 设迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 $x^*$ 的某邻域内连续，则该迭代法具有 $p$ 阶收敛的充要条件是

$$\varphi(x^*)=x^*,$$

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,$$

$$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$

并且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^r}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$$

证明：充分性. 根据泰勒展开有

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\ldots+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

$$\Rightarrow\ x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p\ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^r}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$$

# 必要性的证明

**必要性.** 设迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是 $p$ 阶收敛。

迭代两边取极限， 由 $\varphi(x)$ 的连续性可知 $x^*=\varphi(x^*)$ 。

设 $p_0$ 是满足

$$\varphi'(x^*)=\varphi'(x^*)=\cdots=\varphi^{(p_0-1)}(x^*)=0,\quad \varphi^{(p_0)}(x^*)\neq 0$$

的最小正整数。

由充分性的证明过程可知迭代 $p_0$ 阶收敛。

又 $\dfrac{e_{k+1}}{e_k^p}=\dfrac{e_{k+1}}{e_k^{p_0}}\cdot\dfrac{1}{e_k^{p-p_0}}$ $\Rightarrow$ 若 $p_0<p$， 与迭代 $p$ 阶收敛矛盾

$\Rightarrow$ $p_0=p$

# 迭代过程的加速

- 设有不动点迭代：$x_{k+1}=\varphi(x_k)$

$$\Rightarrow\ x_{k+1}-x^*=\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi)(x_k-x^*)$$

$$\Rightarrow\ x^*=\frac{x_{k+1}-\varphi'(\xi)x_k}{1-\varphi'(\xi)}$$

设：$\boxed{\varphi'(\xi)\approx\varphi'(x_k)}$ $\Rightarrow\ x^*=\dfrac{x_{k+1}-\varphi'(x_k)x_k}{1-\varphi'(x_k)}$

$$\Rightarrow\ \boxed{x_{k+1}=\frac{\varphi(x_k)-\varphi'(x_k)x_k}{1-\varphi'(x_k)}}$$

缺点：每次迭代需计算 $\varphi'(x_k)$

# 埃特金算法

$$x_{k+1} - x^* = \varphi'(\xi_k)(x_k - x^*)$$

$$x_{k+2} - x^* = \varphi'(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x^*)$$

**设：** $\boxed{\varphi'(\xi_k) \approx \varphi'(\xi_{k+1})}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x_{k+1} - x^*}{x_{k+2} - x^*} \approx \dfrac{x_k - x^*}{x_k - x^*}$

$\Rightarrow$ $x^* = x_k - \dfrac{\left(x_{k+1} - x_k\right)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} y_k = \varphi(x_k),\ z_k = \varphi(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{\left(y_k - x_k\right)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \end{cases}$

**Aitken 加速**

当 $x$ 收敛到 $x^*$ 时，修正项分子趋于零。

# 一点注记

$$f(x)=0 \longrightarrow x=x+f(x) \longrightarrow \varphi(x)=x+f(x)$$

$$\longrightarrow \quad x_{k+1}=\frac{1}{1-L}\left[\varphi(x_k)-Lx_k\right]$$

$$=\frac{1}{1-L}\left[x_k+f(x_k)-Lx_k\right]$$

$$=x_k-\frac{1}{L-1}f(x_k)$$

$$\longrightarrow \quad x_{k+1}=x_k-\frac{1}{M}f(x_k) \qquad M=L-1$$

# Newton迭代

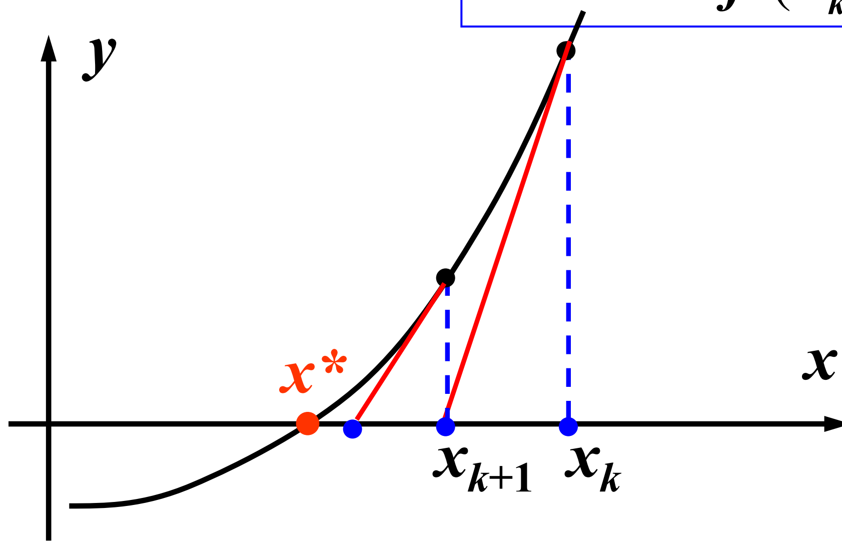
- **基本思想：** 将非线性方程线性化

设 $x_k$ 是 $f(x)=0$ 的近似根，将 $f(x)$ 在 $x_k$ 一阶 Taylor 展开：

$$f(x) = \underline{f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)} + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_k)^2,$$ $\xi$ 在 $x_k$ 和 $x$ 之间。

$$\Rightarrow \quad 0 = f(x^*) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$




条件：$f'(x) \neq 0$

# Newton迭代

- Newton 法可以看作下面的不动点迭代：

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad \text{其中} \quad \boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$\Rightarrow \varphi'(x^*) = 0 \Rightarrow$ Newton 法至少 二阶 局部收敛

定理 设 $f(x)$ 在其零点 $x^*$ 的某个邻域内二阶连续可导且 $f'(x) \neq 0$，则存在 $x^*$ 的某个 $\delta$ 邻域 $N(x^*) = [x^*-\delta, x^*+\delta]$，使得对 $\forall\, x_0 \in N(x^*)$，Newton 法产生的序列以不低于二阶的收敛速度收敛到 $x^*$。

# Newton迭代

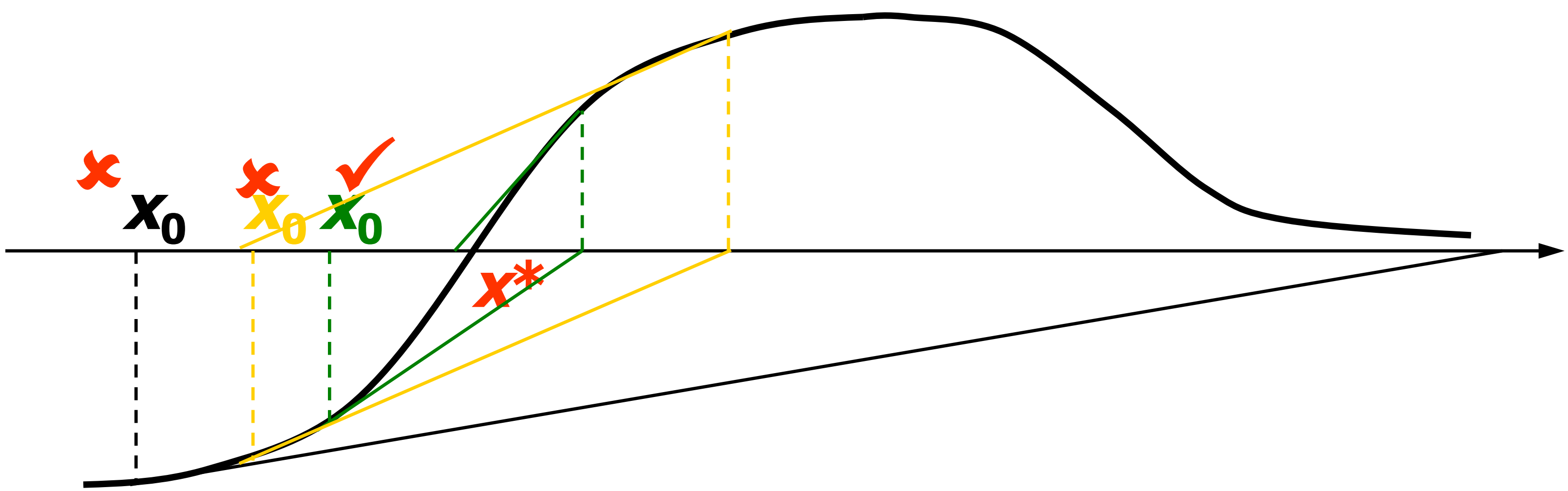
- Newton 法也可以看作一类特殊的加速迭代

$$\boxed{x_{k+1}=\frac{\varphi(x_k)-\varphi'(x_k)x_k}{1-\varphi'(x_k)}}$$

取 $\varphi(x)=x+f(x)$

$$x_{k+1}=\frac{\left[x_k+f(x_k)\right]-\left[1+f'(x_k)\right]x_k}{1-\left[1+f'(x_k)\right]}=\frac{f(x_k)-x_kf'(x_k)}{-f'(x_k)}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

# 牛顿法的收敛性




结论：**Newton**法的收敛性依赖于$x_0$ 的选取。

# 收敛性定理

设 $f(x)\in C^2[a, b]$，若

(1) $f(a)\,f(b) < 0$;

有根

(2) 在整个 $[a, b]$ 上 $f'(x) \neq 0$;

(3) $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号

根唯一

(4) 选取初始值 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f''(x_0)\,f(x_0) > 0$;

则由Newton法产生的序列 $\{ x_k \}$ 单调地收敛到

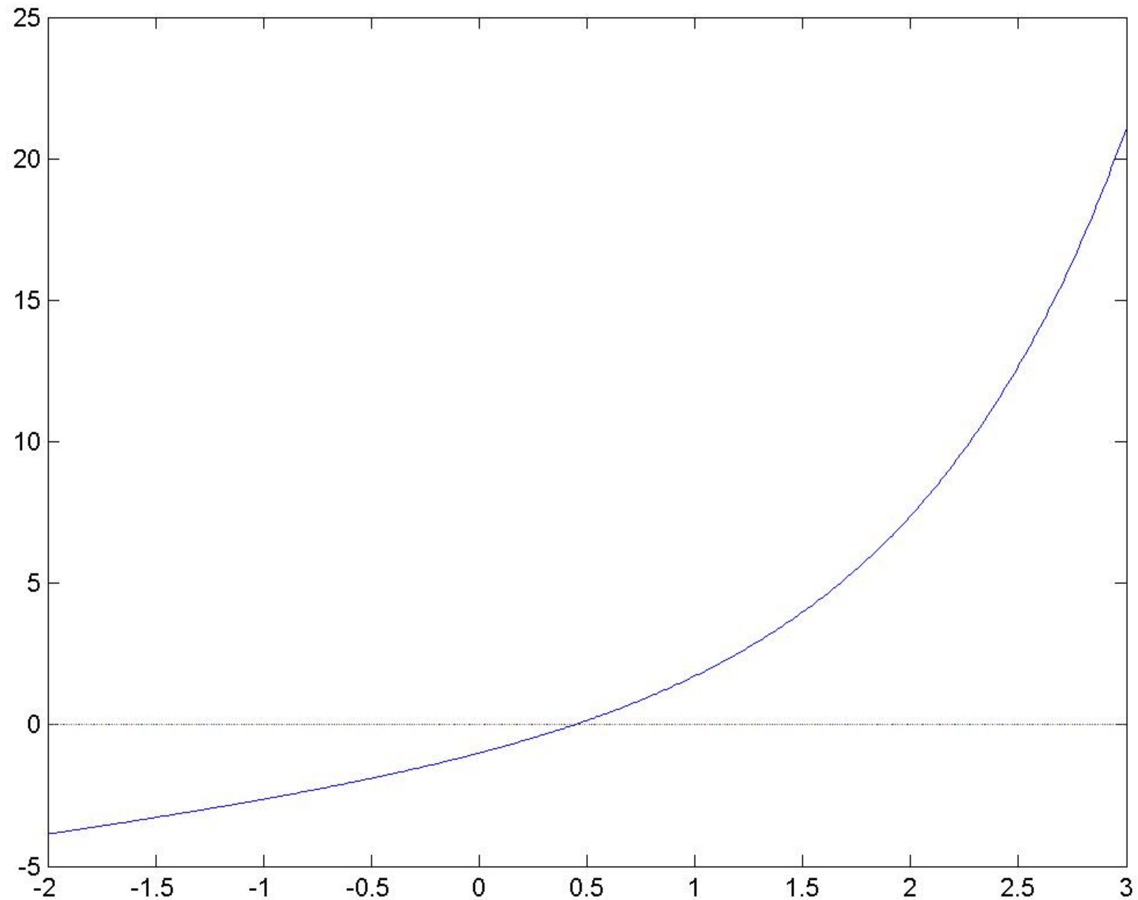
$f(x)=0$ 在 … $b]$ 的唯一根 … 且收敛速度至少是二阶的

保证Newton迭代函数将[a,b]映射于自身

保证产生的序列 $\{x_k\}$ 单调有界

# 例题1

用Newton法求方程 $x+e^x-2=0$ 的根, 要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-5}$




7, the

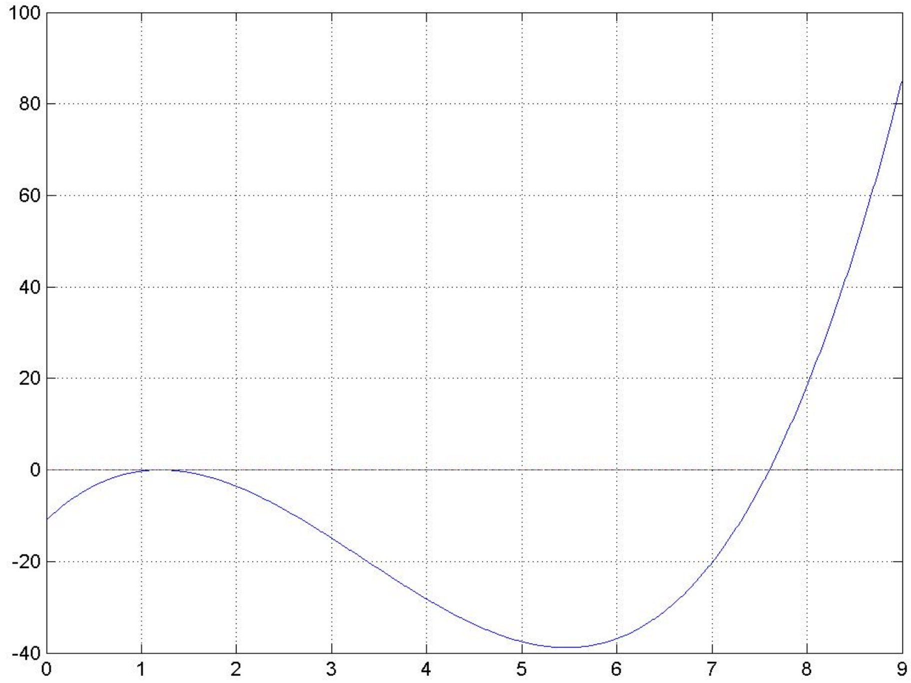
, the

# 例题2

求函数 $f(x)=x^3-10x^2+19.68x-10.944$ 的正实根

精度要求：$\varepsilon=10^{-6}$

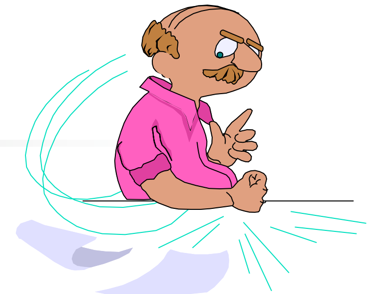
用Matlab画图，查看根的分布情形




从图形中我们可以看出：

- 在$x=7$和$x=8$之间有一单根；
- 在$x=1$和$x=2$之间有一重根。

取初值$x_0 = 8.0$, 用牛顿迭代公式计算如下:



取初值$x_0 = 1.0$, 用牛顿迭代公式计算如下:

- **初值$x_0$＝8.0** 时,计算的是单根, The iterative number is 28,The numerical solution is 7.600001481
- **初值$x_0$＝1.0** ,计算的是重根, The iterative number is 1356,The numerical solution is 1.198631981

# 小结

(1) 当$f(x)$充分光滑且 $x^*$ 是$f(x)=0$的单根时，牛顿法在$x^*$的附近至少是平方收敛的。

(2) 当$f(x)$充分光滑且 $x^*$ 是$f(x)=0$的重根时，牛顿法在$x^*$的附近是线性收敛的。

(3) Newton法在区间$[a,b]$上的收敛性依赖于初值 $x_0$ 的选取。

# 例题3

例：设计一个二阶收敛算法计算 $\sqrt{a}$ $(a>0)$。

解：转化为求 $x^2-a=0$ 的正根

Newton 迭代: $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^2-a}{2x_k}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)$$

$$\Rightarrow\quad x_{k+1}-\sqrt{a}=\frac{x_k^2+a}{2x_k}-\sqrt{a}=\frac{x_k^2+a-2x_k\sqrt{a}}{2x_k}=\frac{\left(x_k-\sqrt{a}\right)^2}{2x_k}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{\left(x_k-\sqrt{a}\right)^2}=\frac{1}{2x_k}\longrightarrow\frac{1}{2\sqrt{a}}\quad\Rightarrow$$ 二阶收敛

# 重根情形

- 设 $x^*$ 是 $f(x)$ 的 $m(m\geq 2)$ 重根，**Newton法是否收敛？**

$$f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0,\ \ f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

**Taylor 展式** ⟹

$$f(x) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi_1)(x - x^*)^m$$

$$f'(x) = \frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_2)(x - x^*)^{m-1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(m-2)!} f^{(m)}(\xi_3)(x - x^*)^{m-2}$$

**Newton 迭代：** $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

⟹ $$\varphi'(x^*) = \lim_{x\to x^*} \varphi'(x) = \lim_{x\to x^*} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \frac{1}{m}$$

⟹ 线性收敛。 且重数 $m$ 越高，收敛越慢。

# 提高收敛阶

## 提高收敛速度

法一：取 $\varphi(x) = x - m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ ⟹ $\varphi'(x^*) = 0$ ⟹ 二阶收敛

$\boxed{\text{但 } m \text{ 通常无法预先知道！}}$

法二：将求 $f(x)$ 的重根转化为求 另一个函数 的单根。

令 $\mu(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$，则 $x^*$ 是 $\mu(x)$ 的单重根。

构造针对 $\mu(x)$ 的具有二阶收敛的 Newton 迭代:

$$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}}$$

# 降低初始点的要求

**Newton 法的收敛依赖于初始点的选取。**

例：求 $\sin(x)-x/6=0$ 的正根。

- **Newton 下山法：** $$x_{k+1}=x_k-\delta_k\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

  $\delta_k$ 为数列 $\left\{\frac{1}{2^l}\right\}_{l=0}^{\infty}$ 中满足 $|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$ 的最大数。

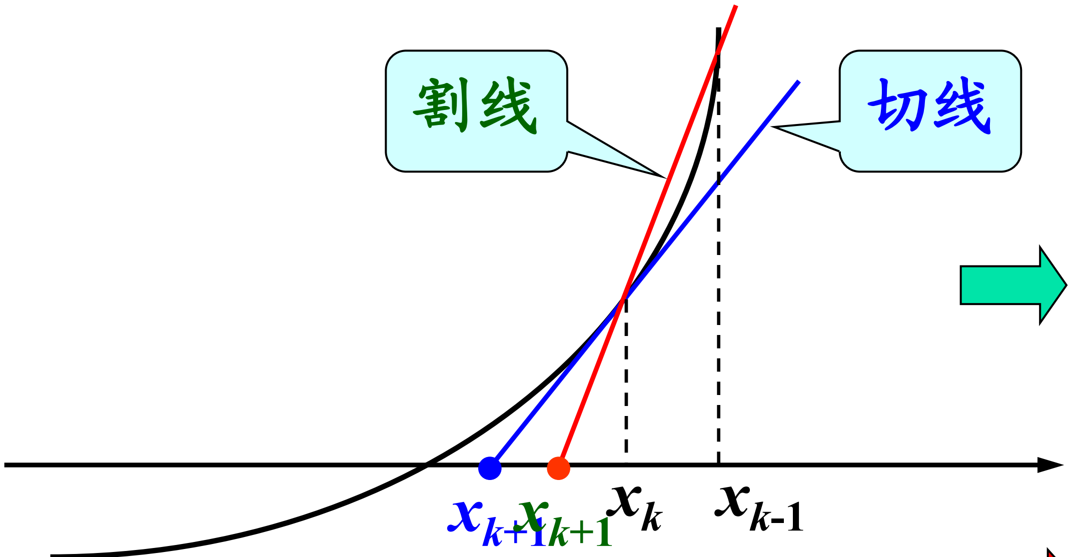
- **(Newton下山法)**

  给定初始点 $x_0$，精度要求 $\varepsilon$

  1. 如果 $|f(x_k)|<\varepsilon$，停机，输出 $x_k$
  2. 计算 $d_k=-f(x_k)/f'(x_k)$，$\delta=1$
  3. 如果 $|f(x_k+\delta d_k)|<|f(x_k)|$，令 $x_{k+1}=x_k+\delta d_k$，返回第1步；否则 $\delta$ 折半，重新计算第3步

# 割线法

- Newton法的缺点：每步迭代都要计算导数值




切线斜率 ≈ 割线斜率

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

✓ 只需计算函数值，避免计算导数；

✓ 需要两个初始点；

✓ 收敛比Newton法稍慢，但对初始点要求同样高。

# 割线法公式

- 两点割线法

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

- 单点割线法

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_0)}{f(x_k) - f(x_0)}}$$

# 误差估计

**引理** 设 $f(x)$ 在其零点 $x^*$ 的某个邻域 $N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$ 内存在连续的二阶导数，且 $f'(x)\neq 0$，又设 $x_{k-1}, x_k \in N(x^*)\setminus\{x^*\}$，且互不相等，则由两点割线法的误差 $e_k=x_k-x^*$ 满足

$$e_{k+1}=\frac{f''(\eta_k)}{2f'(\xi_k)}e_{k-1}e_k$$

其中 $\xi_k,\eta_k \in \left[\min\{x_{k-1},x_k,x^*\},\max\{x_{k-1},x_k,x^*\}\right]$

# 局部收敛性定理

**定理** 设 $x^*$ 是 $f(x)$ 的单重零点，$f''(x)$ 在 $x^*$ 的某个邻域内连续，则存在 $x^*$ 的一个邻域 $N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$，使得当 $x_0, x_1 \in N(x^*)$ 时，由两点割线法产生的序列收敛到 $x^*$，且收敛阶为 $\left(\sqrt{5}+1\right)/2 \approx 1.618$

# 本章结束

谢谢！