必要性得证。 $\square$

结论 2：运算满足结合律当且仅当 $p, q \in \{0,1\} \wedge (p = q \vee r = 0)$。

证明：

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
& (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \\
\iff & p(pa + qb + r) + qc + r = pa + q(pb + qc + r) + r && (\circ\text{ 运算定义}) \\
\iff & p^2 a + pqb + pr + qc + r = pa + pqb + q^2 c + qr + r && (\text{乘法分配律}) \\
\iff & p^2 a + qc + pr = pa + q^2 c + qr && (\text{加法消去律})
\end{aligned}$$

由 a, c 取值的任意性知，上面的等式成立当且仅当 $p^2 = p \wedge q^2 = q \wedge pr = qr$。

又因为 $p^2 = p \wedge q^2 = q$ 成立当且仅当 $p, q \in \{0,1\}$，而 $pr = qr$ 成立当且仅当 $p = q$ 或 $r = 0$，从而得证原题。 $\square$

结论 3：运算满足幂等律当且仅当 $p + q = 1 \wedge r = 0$。

证明： 充分性显然。下面证必要性：

若运算满足幂等律，则有：

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
& a \circ x = x \\
\iff & (p + q)x + r = x && (\circ\text{ 运算定义})
\end{aligned}$$

解得：$p + q = 1$ 和 $r = 0$。 $\square$

结论 $4a$：运算有左单位元当且仅当 $q = 1 \wedge (p \neq 0 \vee r = 0)$。

证明： 充分性显然。下面证必要性：

若运算有左单位元 e_l，则：

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
& e_l \circ x = x \\
\iff & pe_l + qx + r = x && (\circ\text{ 运算定义})
\end{aligned}$$

解得：$q = 1, pe_l + r = 0$。

当 $p \neq 0 \vee r = 0$ 时方程 $pe_l + r = 0$ 有解(当 $p = r = 0$ 时，方程有无穷多个解)。 $\square$

结论 $4b$：运算有右单位元当且仅当 $p = 1 \wedge (q \neq 0 \vee r = 0)$。

证明： 与 $4a$ 类似。 $\square$

结论 $4c$：运算有单位元当且仅当 $p = q = 1$。

证明： 充分性：易于验证，当 $p = q = 1$ 时，$-r$ 是单位元。

必要性：综合结论 $4a$ 和 $4b$ 即得。 $\square$

结论 $5a$：运算有左零元当且仅当 $q = 0 \wedge ((p = 1 \wedge r = 0) \vee p \neq 1)$。

证明： 充分性：易于验证，当 $p = 1, q = r = 0$ 时，任何元素都是左零元。当 $q = 0, p =\neq 1$ 时，$r/(1-p)$ 是左零元。

必要性：

若运算有左零元 θ_l，则：

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\theta_l \circ x = \theta_l$$