第七章习题讲解

中国海洋大学

计算机系

习题七 1

1. **解**: 设G中顶点数为n,由握手定理:

$2m=32=\Sigma d(v)\leq 3*4+4*3+2(n-7)$，解得$n\geq 11$.

错误: $32=2m=\Sigma d(v)<3*4+4*3+3(n-7)$,

解得$n>29/3\approx 9.67$, $n\in Z$, $\therefore$ $n\geq 10$.

习题七 2

2. 方法一: 穷举法

证明: 由握手定理及其推论, G中5度顶点的个数只能是0,2,4,6,8, 相应的G中6度顶点的个数是9,7,5,3,1. 在这5种组合中,前3种至少有5个6度顶点, 后2种至少有6个5度顶点.

- **注意: 0个5度顶点是可能的**

习题讲解(7-2)

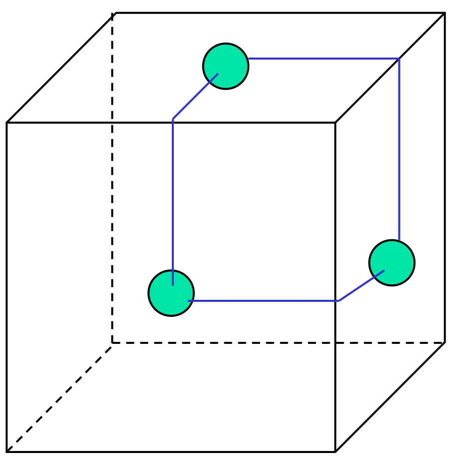
方法二: 反证法

证明: (反证)假设结论不成立, 即G中至多有4个6度顶点并且至多有5个5度顶点. 因为G是9阶图并且只有5度和6度顶点, 所以G中恰好有4个6度顶点和5个5度顶点. 但是, 这与握手定理及其推论相矛盾!

习题七 3

3.[分析]先把问题抽象为无向图,再用握手定理.

证明: (反证)假设存在这样的多面体,令G=<V,E>, 其中V={ v | v 是多面体的面},E={ (u,v) | 面u与面v之间有公共棱}. 显然每个面棱的条数等于对应顶点的度,G有奇数个顶点, 并且所有顶点的度都是奇数, 这与握手定理相矛盾.



习题七 4

4. **证明:** 令G=<V,E>, 其中V={v|v是选手},E={(u,v)|选手u与选手v下过棋}. 显然G是简单图,且$\delta(G)\geq 1$. 设V(G)={$v_1,v_2,\ldots,v_n$}, 则$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$, $d(v_i)\in\{1,2,\ldots,n-1\}$. 由抽屉原则,存在$i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $i\neq j$, $d(v_i)=d(v_j)$.

- **命题:** 简单图中至少有2个顶点度相等.

Ch7-5

引理：设G_1与G_2同为n阶无向简单图，则$G_1 \cong G_2$当且仅当 $\overline{G_1} \cong \overline{G_2}$

证明：由$G_1 \cong G_2$，证明 $\overline{G_1} \cong \overline{G_2}$

因为$G_1 \cong G_2$，所以存在双射函数f: $V_1 \to V_2$,

$\forall u,v \in V_1$,使得

$(u,v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u),f(v)) \in E_2$

$\Leftrightarrow (u,v) \notin E_1 \Leftrightarrow (f(u),f(v)) \notin E_2$

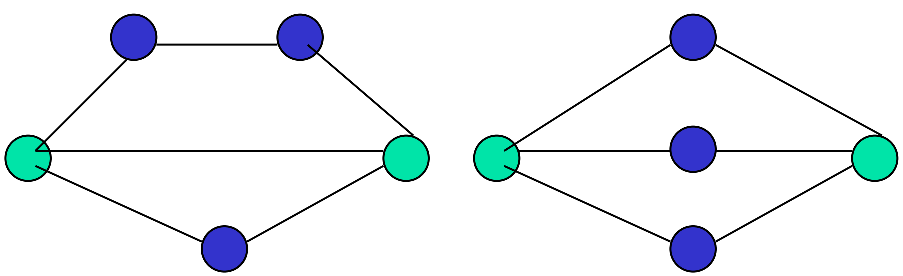
$\Leftrightarrow (u,v) \in E(\overline{G}_1) \Leftrightarrow (f(u),f(v)) \in E(\overline{G}_2)$

得证. 同理可证充分性.

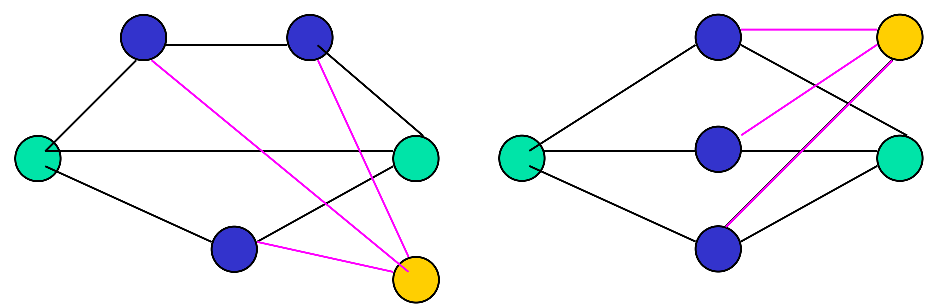
习题讲解(7-5)

5. 方法一: 考虑G

解: 由握手定理知$2m=3n$, 且由已知$2n-3=m$,容易得$n=6,m=9$. 所以G的度数列为(3,3,3,3,3,3), 删除1个顶点后G_1为(2,2,2,3,3). 考虑G_1的2个3度顶点是否相邻,可得出2种非同构情况.



G_1

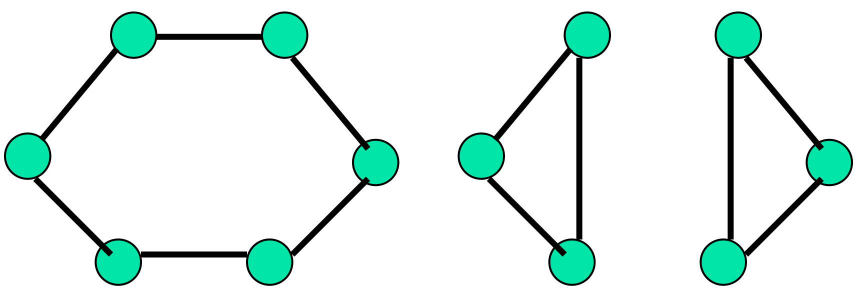


G

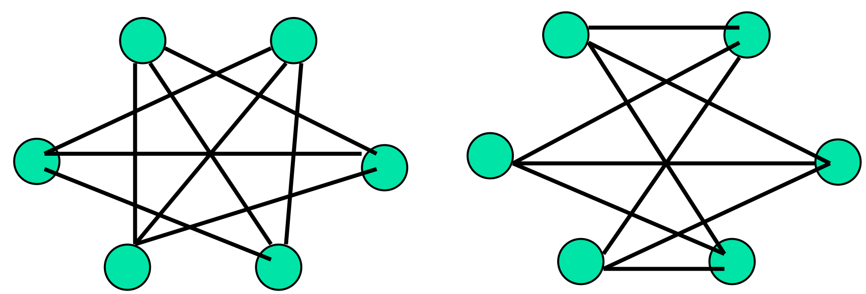
习题讲解(7-5)

5. 方法二: 考虑$\overline{\mathrm{G}}$

解 同上可以解得n=6,m=9. 所以G的度数列为(3,3,3,3,3,3), $\overline{\mathrm{G}}$的度数列是(2,2,2,2,2,2). 考虑G的圈的长度, 可得出2种非同构情况.



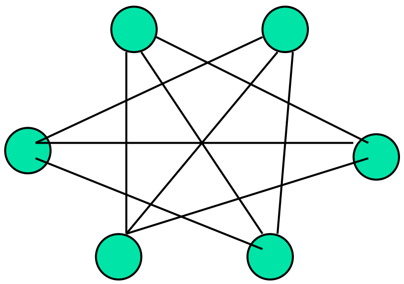
$\overline{\mathrm{G}}$

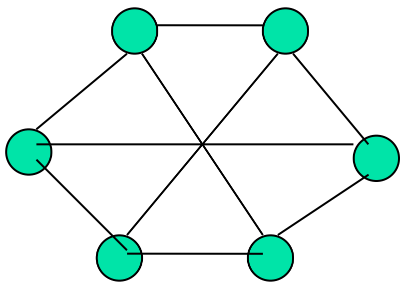


G

习题讲解(7-5)

综上所述，只有两个非同构的图，如下



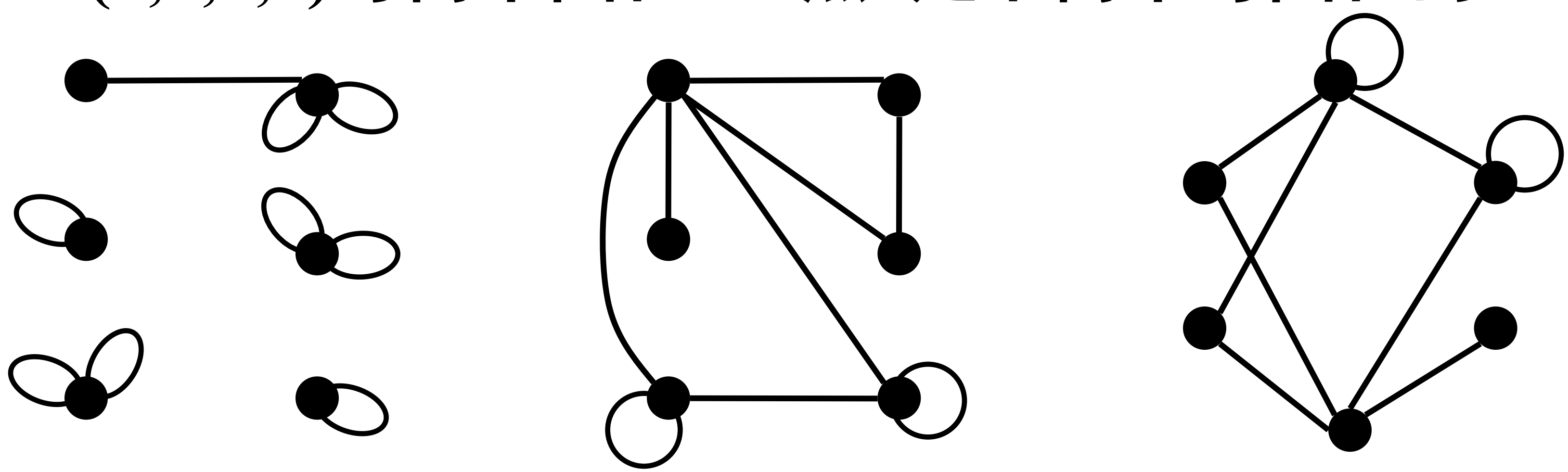


习题讲解(7-6)

6.下面给出的两个整数列, 哪个是可（简单）图化的? 对于可（简单）图化的请至少给出三个非同构的图。

解 (1) d=(1,2,2,4,4,5),因为奇数的个数为偶数,故可图化.

d=(5,4,4,2,2,1)可简单图化⇔(3,3,1,1,0)可简单图化⇔ (2,0,0,0)可简单图化. 显然d是不简单可图化的.



习题讲解(7-6)

(2) d=(1,1,2,2,3,3,5),由于d中奇数的个数是5,为奇数，所以d不可以图化，也不可简单图化

习题七 7(1)

7. 解:(1) (6,6,5,5,3,3,2)可简单图化

⇔(5,4,4,2,2,1)可简单图化

⇔ (3,3,1,1,0)可简单图化

⇔ (2,0,0,0)可简单图化

显然(2,0,0,0)不可简单图化,

所以(6,6,5,5,3,3,2)不可简单图化.

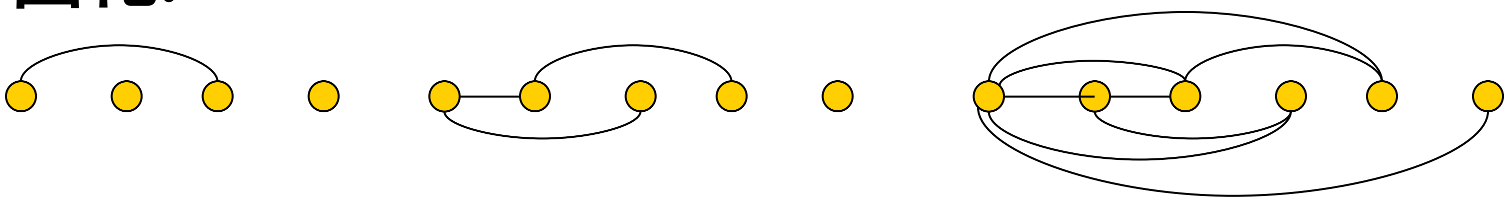
习题七 7(2)

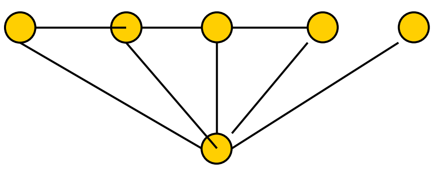
(2) (5,3,3,2,2,1) 可简单图化

⇔(2,2,1,1,0)可简单图化

⇔(1,0,1,0)可简单图化

因为(1,0,1,0)是可简单图化的,所以(5,3,3,2,2,1) 可简单图化.



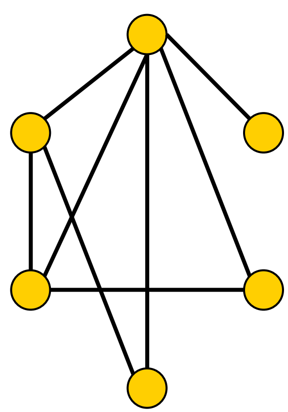


习题七 7(2)续

设度数列为(5,3,3,2,2,1)的简单图是G,

V(G)={a,b,c,d,e,f},不妨设顶点a的度是5,则

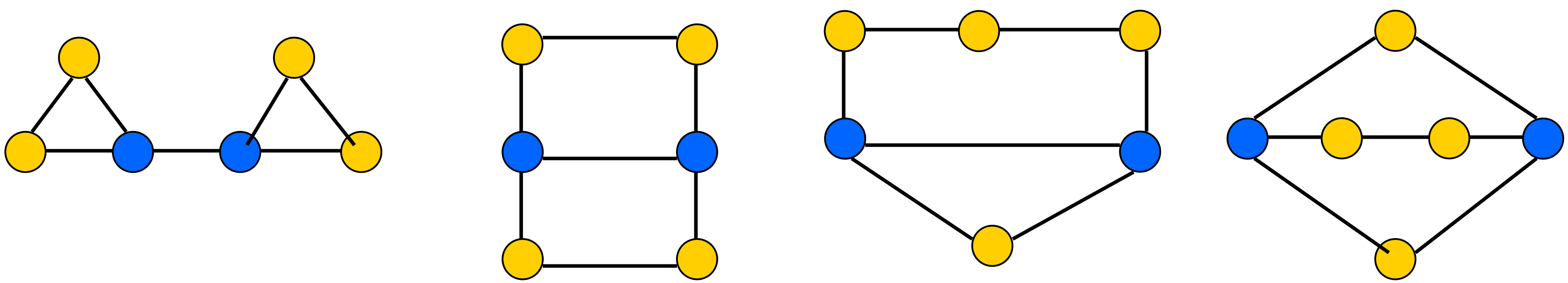
G_1=G-{a}, G_1的度数列为(2,2,1,1),显然度数列(2,2,1,1)的简单图是惟一的,因此度数列为(5,3,3,2,2,1)的简单图也是唯一的.



习题七 7(3)续

(3) (3,3,2,2,2,2) ⇔ (2,1,1,2,2)可简单图化⇔ (2,2,2,1,1)可简单图化 ⇔(1,1,1,1)可简单图化

有4种非同构的简单图



- **错误: (2,1,1,2,2), (0,0,2,2) 不可,一定按从大到小排序**

习题七 10、11

10. 证明：已知4阶3条边的无向简单图不同构的个数是3,根据鸽巢原理，5个这样的图中至少有2个是同构的。

11. 证明 设G的补图是G′,且|E(G)|= |E(G′)|, |E(G)|+|E(G’)|=$n(n$-1)/2,所以|E(G)|=$n(n$-1)/4

当n=4k时, $n(n$-1)/4=k(4k-1)为整数;

当n=4k+1时, $n(n$-1)/4=k(4k+1)为整数;

当n=4k+2时, $n(n$-1)/4=(2k+1)(4k+1)/2不为整数;

当n=4k+3时, $n(n$-1)/4=(2k+1)(4k+3)/2不为整数;

因此n=4k或n=4k+1

7-12,13

12. 参考上课ppt中的拉姆齐问题的证明

13. 证明 设结点u和v度是奇数，假设u和v在图G中不连通，那么u和v分属于两个不同的连通分支G_1和G_2，可以将G_1和G_2看作两个图，则G_1和G_2中只有1个奇数度结点，与握手定理矛盾

7-14

方法一：

证 因为G不是完全图，所以必存在$u,w\in V(G)$, $(u,w)\notin E(G)$，因为G是连通图，故u和w之间存在最短通路P,记$P=uw_1w_2\ldots w_kw$,$k\geq 1$

(1)若$k=1$,则uw_1w即为所求；

(2)若$k>1$，由于P是最短通路,所以$(u,w_1)\in E$, $(w_1,w_2)\in E$,且$(u,w_2)\notin E$,因此u,w_1,w_2为所求.

7-14

方法二：

证 反证法.否则, $\forall\, u,v,w \in V(G)$,只要$(u,v) \in V(G)$和$(v,w) \in V(G)$, 就有$(u,w) \in E(G)$.下面证明矛盾.

$\forall u,w \in V$,因为G是连通图,故u和w之间存在通路P,

记为$P=uw_1w_2\ldots w_kw, k\geq 1$

因为有(u,w_1)和$(w_1,w_2) \in E(G)$,根据假设有$(u,w_2) \in E$,又因为(u,w_2)和$(w_2,w_3) \in E(G)$,所以$(u,w_2) \in E$,依次进行下去可得到$(u,w) \in E$.

由u,w的任意性,可知G为K_n,与G不是完全图矛盾.

习题讲解(#7-17)

17.[分析]利用点连通度的概念和点连通度与最小度的关系进行讨论.

证 已知n-2≤ $\delta(G)$≤ n-1,所以n≥2. $\delta(G)$=n-2或$\delta(G)$=n-1

(1) n=2时, δ=0或δ=1.

δ=0时,G是2阶零图, κ=0,有$\kappa=\delta$;

δ=1时,G是K_2, $\kappa=\delta$ =1;

(2) n=3时, δ=1或δ=2.

δ=1时,G的度数列只能是(2,1,1), 有$\kappa=\delta$=1;

δ=2时, G的度数列只能是(2,2,2), G为K_3, 有$\kappa=\delta$=2;

习题7:17的讲解(续)

(3) $n \geq 4$时, G是简单图,易知n-2≤ $\delta(G) \leq n$-1,

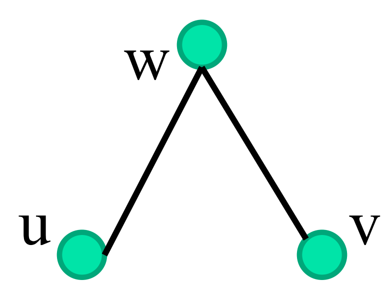
$\delta(G)=n$-1时,G是完全图, $\delta(G)=\kappa(G)$;

$\delta(G)=n$-2时, 已知$\kappa \leq \delta = n$-2,下面只需证$\kappa \geq n$-2.这又只需证明从G中任意删除(n-3)个结点后,所得的3阶子图仍然连通,为此,$\forall u,v,w \in V(G)$,若$(u,v) \notin E(G)$,则有$(u,w) \in E(G)$,且$(w,v) \in E(G)$

否则,若$(u,w) \notin E(G)$或$(v,w) \notin E(G)$,

则$d_G(u) \leq n-2-1=n-3$或$d_G(v) \leq n-2-1=n-3$,

与$\delta(G)=n$-2矛盾.



习题7-18 (1)

18.证: (1) 反证法.

假设G不连通,G至少有两个连通分支,不妨设G_1和G_2是其中的2个,$|V(G_1)|=n_1$,$|V(G_2)|=n_2$,则$\min(n_1, n_2) \le \lfloor n/2 \rfloor$,

设$n_1= \min(n_1,n_2)$,$\forall v \in V(G_1)$,有

$d_G(v)=d_{G_1}(v) \le \lfloor n/2 \rfloor -1<n/2$,

这与$\delta \ge n/2$相矛盾.

习题7-18 (1)

18.(1) 证:

假设G有k个连通分支G_i, $k\geq 2$, i=1,…,k. 则

$|V(G_i)|\geq\delta(G)+1$

$n=\sum|V(G_i)|\geq k(\delta(G)+1)=k\delta(G)+k\geq 2\delta(G)+2\geq n+2$，

矛盾。

注意：不可使用定理7.11，因为该定理的条件是“G是连通图”

习题7-18 (1)错误的

18.(1) 证:

当n=0,1时，显然G是连通图.

当n $\geq$2时，因为$\delta \geq n/2$,由定理7.13知, $\lambda=\delta \geq 1$,

因此G是连通图。

思考：以上证明错误之处在于什么？

习题7-18 (2)方法1

(2) 方法1:[分析]为证明G是k-连通的,只需证明$\forall V'\subset V(G)$,且$|V'|=k-1$,均有$G'=G-V'$仍然连通.

证

任取设$V'\subset V(G)$, $|V'|=k-1$,令$G'=G-V'$, 则

$n'=|V(G')|=n-(k-1)=n-k+1$,

$\delta(G')\geq\delta(G)-(k-1)\geq 1/2(n+k-1)-(k-1)=(n-k+1)/2=n'/2$.

由(1)知,G′是连通的, 因此$\kappa(G)\geq k$,所以G是k-连通图。

习题7-18(2)方法2

(2) 方法2:证明任意点割集V_1,$|V_1| \geq k$.

证明:

取任意点割集$V' \subseteq V(G)$, $t=|V_1|$,$G'=G-V_1$,

$n'=|V(G')|=n-t$,

$\delta(G') \geq \delta(G)-|V_1| \geq [(n+k-1)/2]-t$. ①

因为G′是非连通的，由(1)知, $\delta(G') < n'/2=(n-t)/2$. ②

由①和 ②得$1/2(n+k-1)-t<(n-t)/2$,可得$t>k-1$,即$t \geq k$.

所以$\kappa(G) \geq k$，因此G是k-连通图。

习题7-18(2)

方法3:

证明：

由$\delta(G) \geq (n+k-1)/2 \geq n/2$，所以G是连通图，由定理7.13知$\kappa \geq 2\delta(G)-n+2 \geq k+1 > k$

故G是k连通的。

（以上证明存在的问题是什么？）

习题7:20的讲解(I)

20. 设V(G)={$v_1,v_2,\ldots,v_n$},不妨设d(v_1)=Δ=n-2,v_1的领域N(v_1)={$v_2,\ldots,v_{n-1}$},即只有$v_n \notin$N(v_1),即v_1与v_n不相邻.因为d(G)=2，所以v_n不是孤立点，否则d(G)=∞.显然N(v_n)⊆V(v_1).

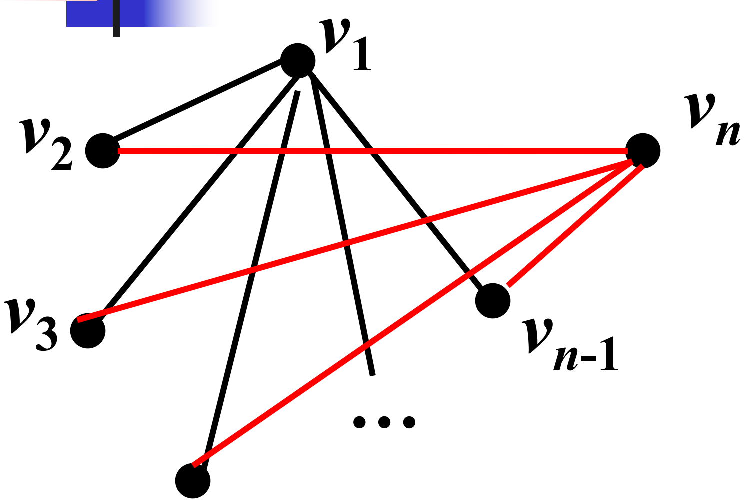
(1) 当N(v_n)=V(v_1),则G的边数$m \geq |\mathrm{d}(v_1)|+|\mathrm{d}(v_n)|=2n-4$.

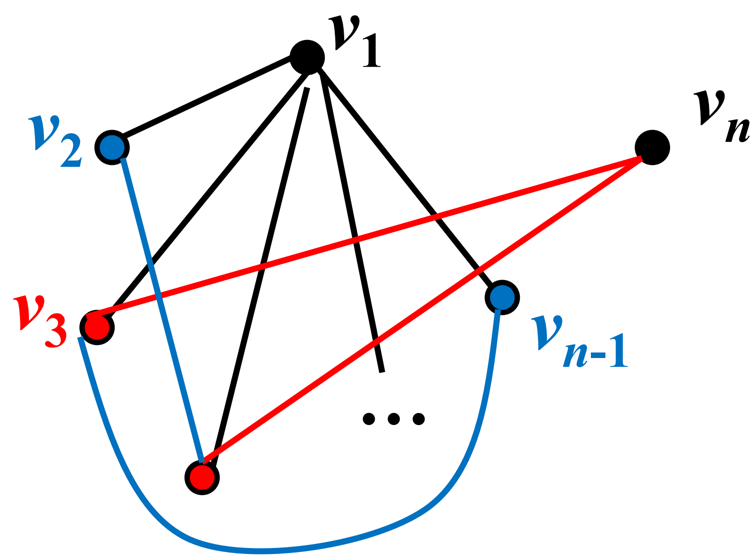
(2) 当N(v_n)⊂V(v_1)时,设N(v_n)={$v_{s_1}, v_{s_2},\ldots, v_{s_j}$},V′= N(v_1)-N(v_n)={$v_{i_1}, v_{i_2},\ldots, v_{i_{n-2-j}}$},$1\leq j\leq n-3$.

$\forall\ v_{i_r}\in$V′, $1\leq r\leq n-2-j$,为使d(v_n, v_{i_r})≤2,必然$\exists v_{s_t}\in$ N(v_n)使得(v_{i_r}, v_{s_t}) ∈E(G).所以

$m \geq |\mathrm{N}(v_1)|+|\mathrm{N}(v_n)|+|\mathrm{V}'|=n-2+j+(n-2-j)=2n-4$

习题7:20的讲解(Ⅱ)





(1) 当$N(v_n)=V(v_1)$,则G的边数$m \geq |d(v_1)|+|d(v_n)|=2n-4$.

(2) 当$N(v_n) \subset V(v_1)$时,$|N(v_n)|=j$, $|V'|=|N(v_n)-N(v_1)|=n-j-2$

$m \geq |N(v_1)|+|N(v_n)|+|V'|=n-2+j+(n-2-j)=2n-4$

习题7:20的讲解(Ⅲ)

方法2:

证 设$V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,不妨设$d(v_1)=\Delta=n-2$,$v_1$的领域$N(v_1)=\{v_2,\ldots,v_{n-1}\}$,即只有$v_n\notin N(v_1)$,即$v_1$与$v_n$不相邻.因为$d(G)=2$,所以$v_n$不是孤立点.

$\forall v_j\in N(v_1), 2\le j\le n-1$, $d(v_j,v_n)\le 2$,即v_j到v_n至多经过$N(v_1)$中的一个结点,因此$G'=G-v_1$是连通图.

因为对于连通图有$|E(G-v_1)|\ge|V(G-v_1)|-1\ge n-2$.

$|E(G)|=|E(G-v_1)|+d(v_1)\ge 2(n-2)=2n-4$

习题7:21的讲解

证 首先不妨假定G是连通的,否则,G必有一个连通分支G_i满足$m_i \geq n_i$，m_i,n_i分别是G_i的边数和结点数,因此只需证明G_i中有圈。如若G不是简单图,则G中必有圈.故只需讨论G是简单连通图的情形.

(1) 证明m=3时结论为真.

由于G是简单连通图,$3=m \geq n$,必有n=3,即G是K_3,结论为真.

(2) 假设m=k时结论为真,下面证明m=k+1时结论为真.

习题7:21的讲解（续）

若G中存结点v且d(v)=1,令G′=G-v,m′=m-1,n′=n-1,由假设知$m' \geq n'$,G'中有圈,即G中有圈.

若G中不存在1度结点,即δ(G) ≥2,由例7.6可知,G中必存在长度大于或等于3的圈.

习题7:21的讲解（续）

方法二：先证明“若无向简单图G不含圈, 则 $|E(G)| = n\text{-}p(G)$,其中p(G)是G的连通分支数.

对顶点n作归纳.设$|E(G)|=m$

当$n=1$时,$m=0$,$p=1$,满足$m=n-p$.

假设$n\leq k$时成立,下面证明$n=k+1$时也成立.

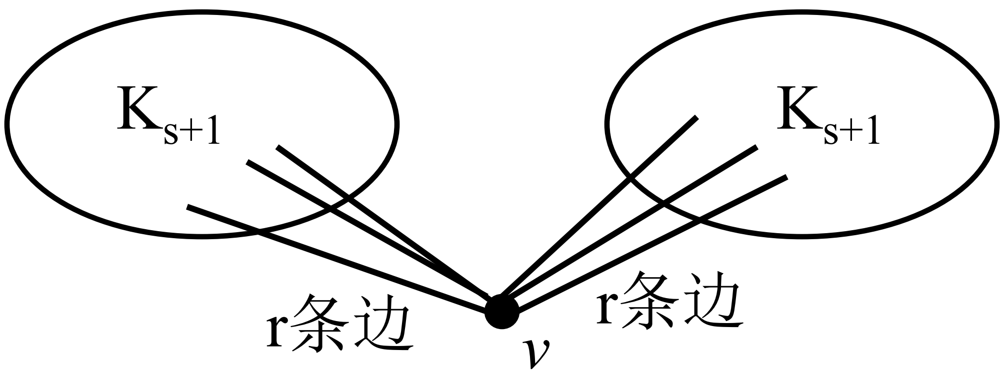
$\forall v\in V(G)$,设G_i是G的连通分支,$i=1,2, \ldots,p$. 不妨设 $v\in V(G_i)$,$G'=G-v$有s个连通分支G_i,$i=1,2, \ldots,s$.设$G_i\text{-}v$有r个连通分支,因为G_i中无圈,所以$d(v)=r$,$s=p-1+r$

令$n'=|V(G')|$,显然$n'=k$,由归纳假设,可知$m'=n'-s$.

并且$m=m'+d(v)=n'-s+r=n-1-(p-1+r)+r=n-p$,得证

习题7:23的讲解

- 23.[分析]只需做出一个图或图族满足要求即可.
- **证明:** 做两个无向完全图K_{s+1},在它们中间放置一个结点v,使v与两个K_{s+1}中各r个结点相邻,所得图记为G,如下所示.



$d(v)=2r$,因为$r\le s$,K_{s+1}中至少存在一个结点u,$d(u)=s$,有r个结点度为s+1.

v是割点,故$\kappa=1$.又$2r>s$,且 存在$d(u)=s$,因而$\delta=s$.

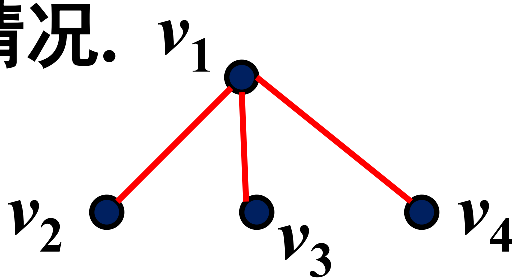
因$r\le s$,所以$\lambda=r$.

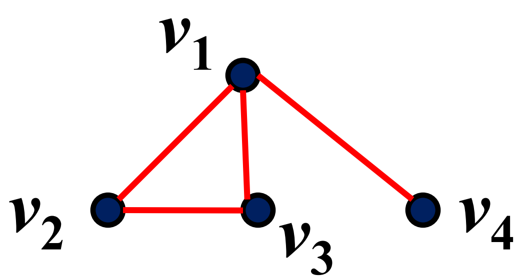
习题7:24的讲解

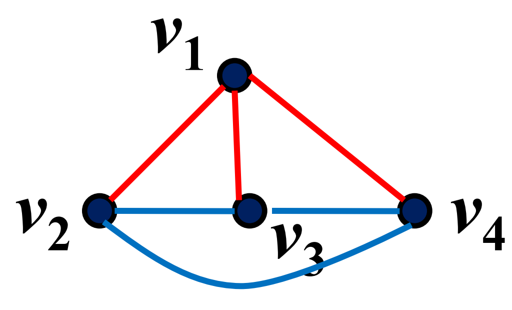
24. (1) $v_1 \in V(K_n)$,$N(v_1)=\{v_2, v_3,\ldots,v_{n-1}\}$,与$v_1$关联的$n$-1条边中至少有3条红色边或3条蓝色边.

1)当存在3条红色边时,不妨设红色边为(v_1, v_2),(v_1, v_3),(v_1, v_4).若(v_2, v_3),(v_2, v_4),(v_3, v_4)中有一条红色边,假设为(v_2, v_3),则(v_1, v_2),(v_1, v_3),(v_2, v_3)行成红色的K_3.若(v_2, v_3),(v_2, v_4),(v_3, v_4)全部是蓝色,则存在蓝色的K_3.

2)同样可讨论与v_1关联的n-1条边中存在3条蓝色边时的情况.







习题7:24的讲解

(2) 用6个结点表示6个人,得到K_6,对K_6的边涂上红色或蓝色,红色边表示该边关联的两个人认识,蓝色边表示该边关联的两个人不认识.根据(1)在K_6中总存在红色的K_3或蓝色的K_3.

1)当存在红色的K_3时,K_3中的3个人互相认识.

2)当存在蓝色的K_3时,K_3中的3人互相不认识.

得证.

习题7:24的讲解

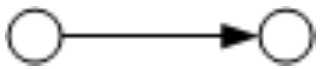
(3) 设∃ v_1,与v_1关联的红色边的条数大于等于6,设任取6条红色边{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_1, v_7)}.那么V′={v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7}的导出子图为K_6.由(1)知K_6中必有红色的K_3或蓝色的K_3:

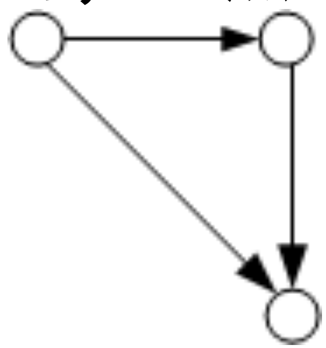
1)当K_6中存在红色的K_3时,不妨设红色的K_3为{v_2, v_3, v_4},则{v_1, v_2, v_3, v_4},构成红色的K_4,即K_n中存在红色K_4.

2)当K_6中存在蓝色的K_3时,显然该蓝色K_3也在K_n中.

习题7:25的证明图示

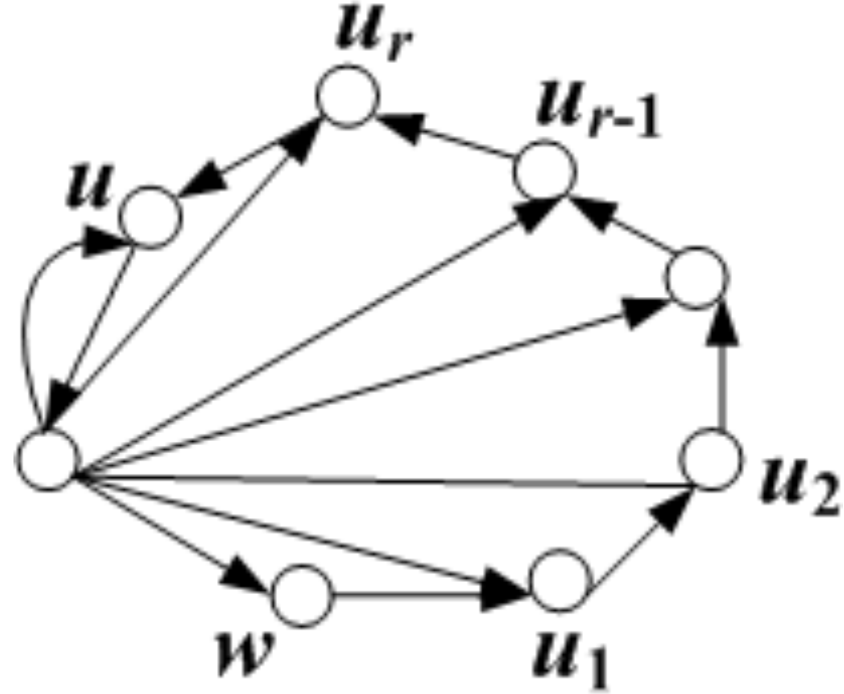
证　当n=2或3时，显然D不是强连通的。





$n \geq 4$时，反证法证明。

如左图所示。



习题7:25的证明（方法一）

证　当n=2或3时,显然D不是强连通的.

下面证明 $n \geq 4$时成立,使用反证法证明。

假设D是强连通的，则D中存在经过每个结点至少一次的回路。因此$\forall u \in V(D)$, $\forall v \in V(D)$,$u \to v$和$v \to u$，即存在由u到v的通路，记为$\Gamma = u u_1 u_2 \ldots u_{r-1} u_r v$.由$\langle u,u_1 \rangle \in E(D)$,$\langle u_1, u_2 \rangle \in E(D)$可得$\langle u,u_2 \rangle \in E(D)$, …,依次类推可得$\langle u,v \rangle \in E(D)$.

同理,存在由v到u的通路，记为$\Gamma = v v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k u$.由$\langle v, v_1 \rangle$,$\langle v_1, v_2 \rangle \in E(D)$可得$\langle v, v_2 \rangle \in E(D)$, …,依次类推可得$\langle v,u \rangle \in E(D)$.显然与G是竞赛图矛盾。

习题7:25的证明（方法二）

证 假设D是强连通的，$\forall u \in E(D)$, $\forall v \in E(D)$,则从u到v存在最短通路$\Gamma = uu_1u_2\ldots u_{r-1}u_rv$.

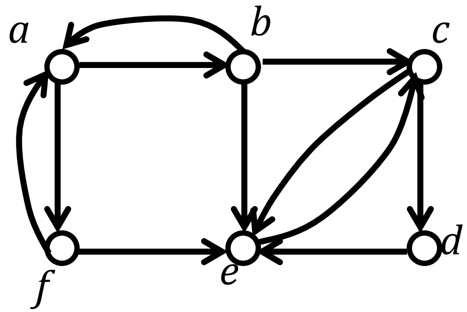
由$<u,u_1> \in E(G)$,$<u_1,u_2> \in E(G)$可得$<u,u_2> \in E(G)$, 则$\Gamma' = uu_2\ldots u_{r-1}u_rv$.是比$\Gamma$短的通路，与$\Gamma$是最短通路矛盾。

习题7:补充题

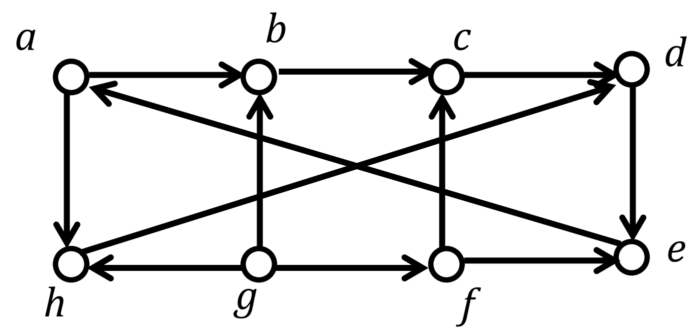
求下图所示每个图的强连通分支.

解 （1）$\{a,b,f\},\{c,d,e\}$

(2) $\{a,h,d,e,b,c\},\{g\},\{f\}$



(1)



(2)