1996 年计算机数学基础

三、

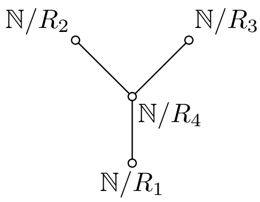
1. $\mathbb{N}/R_1 = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$；

$\mathbb{N}/R_2 = \{\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}\}$；

$\mathbb{N}/R_3 = \{\{3k+j \mid k \in \mathbb{N}\} \mid j = 0, 1, 2\}$；

$\mathbb{N}/R_4 = \{\{6k+j \mid k \in \mathbb{N}\} \mid j = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$。

2.



3. $f_1(H) = H$；

$f_2(H) = \{0\}$；

$f_3(H) = \{0, 1, 2\}$；

$f_4(H) = \{0, 2, 4\}$。

五、

1.

(1) $\ker \varphi_1 = G$。由于 $|G| \geq 2$，所以 φ_1 既不是单射也不是满射，当然也不是同构。

(2) $\ker \varphi_2 = \{0\}$。由于 $1 \in \mathbb{Z}$ 但 $1 \notin \varphi_2(\mathbb{Z})$，所以 φ_2 不是满射，从而不是同构。

(3) $\ker \varphi_3 = \{0\}$。由于指数函数是单射，且对任意 $x \in \mathbb{R}^+$，有 $\ln x \in \mathbb{R}$，且 $x = \varphi_3(\ln x)$，所以 φ_3 是满射，从而是同构映射。

2.

证明： 由于 $e \in A, e \in B$，所以 $e = ee \in AB$，AB 非空。

由于 A 是正规子群，所以对任意 $b \in B$，有 $Ab = bA$。从而 $BA = \{bA \mid b \in B\} = \{Ab \mid b \in B\} = AB$。

对任意 $x, y \in AB$，存在 $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$，使 $x = a_1b_1, y = a_2b_2$，从而 $xy^{-1} = a_1b_1(a_2b_2)^{-1} = a_1b_1b_2^{-1}a_2^{-1}$，而 $a_1b_1b_2^{-1} \in AB = BA$，所以存在 $a_3 \in A, b_3 \in B$，使得 $a_1b_1b_2^{-1} = b_3a_3$。于是有 $xy^{-1} = b_3a_3a_2^{-1} \in BA = AB$。

由子群判定定理二，AB 是 G 的子群。 $\square$

六、

1.