第八章　欧拉图与哈密顿图

8.1

证明: 由于 G 是欧拉图，所以存在欧拉回路 $C = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}$。由定义，$G$ 中所有顶点都在 C 上，且对任意 $e \in E(G)$，存在唯一的 $1 \le k \le m$，使得 $e_{i_k} = e$。从 C 中删除 e_{i_k} 后，得到一条通过所有顶点的通路 $\Gamma = e_{i_{k+1}}\cdots e_{i_m}e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}$。显然，这条通路在 $G-e$ 中，从而 $G-e$ 是连通图。由 e 的任意性可知 $\lambda(G) \ge 2$，从而 G 是 2 边-连通的。 □

8.2　先证明一些有关“块”的性质。

引理 8.1 设 G 为无向连通图，$\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 为 G 中所有不同的块的集合，记 $V_i = V(B_i)$，$E_i = E(B_i)$，$i = 1, 2, \cdots, k$。设 $B_i, B_j \in \mathscr{B}$，$B_i \ne B_j$ 是 G 的两个不同的块，则

(1)　$B_i = G[V_i]$;

(2)　$V_i \not\subseteq V_j$;

(3)　$|V_i \cap V_j| \le 1$;

(4)　对 G 的任意阶数不小于 2 的子图 $H = \langle V', E'\rangle$，若 H 中不含割点，则 H 必被包含于唯一的一个块中。

(5)　$E_i \cap E_j = \{(v,v) \mid v \in V_i \cap V_j \wedge (v,v) \in E(G)\}$;

(6)　$G = \cup\mathscr{B}$。

证明:

(1)　当顶点集不变的情况下，向一个图中加入新边不会降低图的连通度，从而由块的极大性即可得证。

(2)　反设 $V_i \subseteq V_j$，则由结论 (1) 可知，$B_i = G[V_i] \subseteq G[V_j] = B_j$，又由于 $B_i \ne B_j$，所以有 $B_i \subset B_j$，即，B_j 是比 B_i 更大的 2-连通子图，这与 B_i 的极大性矛盾。

(3)　若不然，不妨设 $v_1, v_2 \in V_i \cap V_j$，$v_1 \ne v_2$。此时，对任意 $u \in V_i - \{v_1, v_2\}$ 和 $w \in V_j - \{v_1, v_2\}$，必存在从 u 到 w 且不经过 v_1 的通路 Γ_1 和从 u 到 w 且不经过 v_2 的通路 Γ_2。这是因为，由教材定理 7.20 (注意到，教材定理 7.20 的前提“$|V_i| \ge 3$”和“$|V_j| \ge 3$”必然成立。否则，不妨设 $|V_i| \le 2$，则由假设 $|V_i \cap V_j| \ge 2$ 就可推出 $V_i = V_i \cap V_j \subseteq V_j$，这与结论 (2) 矛盾)可知，在 B_i 中存在由 u 到 v_2 而不过 v_1 的通路，在 B_j 中存在由 v_2 到 w 而不经过 v_1 的通路，连接两段通路即得 Γ_1，同理可以得到 Γ_2。因此，$B_i \cup B_j$ 是 2-连通的(因为从 $B_i \cup B_j$ 删除任意顶点后，B_i 和 B_j 内部必然仍是连通的，而由于 v_1 和 v_2 不可能同时被删去，所以 B_i 和 B_j 之间仍有通路，从而 $B_i \cup B_j$ 仍是连通的)。但由结论 (2) 可知，V_i 和 V_j 都是 $V_i \cup V_j$ 的真子集(由习题 1.32 第 (2) 小题可知，$V_i \cup V_j = V_i$ 当且仅当 $V_j \subseteq V_i$，$V_i \cup V_j = V_j$ 当且仅当 $V_i \subseteq V_j$，而由结论 (2) 可知，以上两种情况都不可能出现)，从而 $B_i \cup B_j$ 是比 B_i 和 B_j 都大的 2-连通子图，这与 B_i, B_j 的极大性矛盾。

(4)　由于 H 中不含割点，所以由 H 的顶点集导出的子图 $G[V']$ 也不含割点。如果存在某个顶点 $v \in V(G) - V'$，使得 $G[V' \cup \{v\}]$ 仍无割点，则将 v 加入 V' 中，直止不再存在这样的 v。此时，$G[V']$ 就是 G 的一个块且 $H \subseteq G[V']$，记 $B_s = G[V']$。