$h \in H$，使得 $xy = 1 + h$。由于 $x \in D, y \in R$，且 D 是理想，所以 $xy \in D$，又因为 $H \subset D$，所以 $h \in D$，从而 $1 = xy - h \in D$。对任意 $r \in R$，有 $1 \in D$，$r = r \cdot 1 \in D$。从而有 $D = R$。

这就证明了 R 是极大理想。

充分性。设 R 是极大理想。由于 R 是交换含幺环，所以 R/H 也是交换含幺的。要证 R/H 是域，只需证明 $R/H - \{\bar{0}\}$ 中所有元素均可逆。

对任意 $\bar{a} \in R/H$，若 $\bar{a} \neq \bar{0}$，则 $a \notin H$。令 $A = \{h + ax \mid h \in H \land x \in R\}$。注意到，对任意 $h \in H$，有 $h = h + a \cdot 0 \in A$，从而有 $H \subseteq A$。又由于 $a = 0 + a \cdot 1 \in A$ 且 $a \notin R$，所以 $H \subset A$。A 自然是非空的。对任意 $h_1 + ax_1, h_2 + ax_2 \in A$，有 $(h_1 + ax_1) - (h_2 + ax_2) = (h_1 - h_2) + a(x_1 - x_2) \in A$。对任意 $h + ax \in H, r \in R$，有 $r(h + ax) = (h + ax)r = (hr) + a(xr) \in A$。所以 A 是 R 的理想，且 A 真包含 H。由于 H 是极大理想，所以 $1 \in A = R$。因此，存在 $h \in H, b \in R$，使得 $1 = h + ab$，从而有 $1 - ab = h \in H$。从而由教材定理 17.25(4) 知，$\overline{ab} = \bar{1}$。$\bar{b}$ 是 $\bar{a}$ 的逆元。由 $\bar{a}$ 的任意性知，$R/H - \{\bar{0}\}$ 中所有元素均可逆。这就证明了 R/H 是域。 □

18.27

证明： 由于 $0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_m \in S$，所以 S 非空。

对任意 $r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \cdots + r_m \cdot x_m, r_1' \cdot x_1 + r_2' \cdot x_2 + \cdots + r_m' \cdot x_m \in S$，有 $(r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \cdots + r_m \cdot x_m) - (r_1' \cdot x_1 + r_2' \cdot x_2 + \cdots + r_m' \cdot x_m) = (r_1 - r_1') \cdot x_1 + (r_2 - r_2') \cdot x_2 + \cdots + (r_m - r_m') \cdot x_m \in S$。

对任意 $a \in R$，$r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \cdots + r_m \cdot x_m \in S$，有 $(r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \cdots + r_m \cdot x_m)a = a(r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \cdots + r_m \cdot x_m) = (ar_1) \cdot x_1 + (ar_2) \cdot x_2 + \cdots + (ar_m) \cdot x_m \in S$。

这就证明了 S 是 R 的理想。 □

18.28 设 $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ 为同态，则由于 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}$ 的加法单位元都是 0，所以应有 $\varphi(0) = 0$。同时有 $\varphi(1) + \varphi(1) = \varphi(1 + 1) = \varphi(0) = 0$。而在 $\mathbb{Z}$ 中，$x + x = 0$ 的解只有 $x = 0$，从而应有 $\varphi(1) = \varphi(0) = 0$。

因此，从 $\mathbb{Z}_2$ 到 $\mathbb{Z}$ 的同态只有零同态 $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}_2, \varphi(x) = 0$。

18.29

证明： A 对矩阵加法显然构成 Abel 群。对任意 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$，$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix} \in A$。从而 A 是环。

因为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B$，所以 B 非空。对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$，有 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in B$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_1x_2 \end{pmatrix} \in B$。从而 B 是 A 的子环。 □

作 $\varphi : A \to B, \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in A, \varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，易于验证，$\varphi$ 是同态。$\ker \varphi = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{Z}\}$。

18.30

证明： 由多项式加法和乘法原则可知，对任意 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in F[x]$，有 $\varphi(f(x) + g(x)) = a_0 + b_0 = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))$，$\varphi(f(x) \cdot g(x)) = a_0b_0 = \varphi(f(x)) \cdot \varphi(g(x))$。从而 φ 是同态。对任意 $a \in F$，令 $f(x) = a \in F[x]$，则 $\varphi(f(x)) = a$。从而 φ 是满同态。 □

$\ker \varphi = \{a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in F, i = 1, 2, \cdots, n\}$。

$F[x]/\ker \varphi = \langle \{\bar{a} \mid a \in F\}, +, \cdot \rangle$，其中 $\bar{a} = \{a + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in F, i = 1, 2, \cdots, n\}$，对任意 $a, b \in F$，$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$，$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$。

18.31