$$
\begin{aligned}
&= a+b-ab+c-ac-bc+abc && \text{(乘法分配律)}\\
&= a+b+c-bc-ab-ac+abc && \text{(加法交换律、结合律)}\\
&= a+(b+c-bc)-a(b+c-bc) && \text{(乘法分配律)}\\
&= a\circ(b\circ c) && \text{(}\circ\text{ 运算定义)}\\
a\circ(b*c) &= a\circ(b+c-1) && \text{(}*\text{ 运算定义)}\\
&= a+(b+c-1)-a(b+c-1) && \text{(}\circ\text{ 运算定义)}\\
&= a+b+c-1-ab-ac+a && \text{(乘法分配律)}\\
&= a+b-ab+a+c-ac-1 && \text{(加法交换律)}\\
&= (a+b-ab)*(a+c-ac) && \text{(}*\text{ 运算定义)}\\
&= (a\circ b)*(a\circ c) && \text{(}\circ\text{ 运算定义)}\\
(b*c)\circ a &= (b+c-1)\circ a && \text{(}*\text{ 运算定义)}\\
&= (b+c-1)+a-(b+c-1)a && \text{(}\circ\text{ 运算定义)}\\
&= b+c-1+a-ba-ca+a && \text{(乘法分配律)}\\
&= b+a-ba+c+a-ca-1 && \text{(加法交换律)}\\
&= (b+a-ba)*(c+a-ca) && \text{(}*\text{ 运算定义)}\\
&= (b\circ a)*(c\circ a) && \text{(}\circ\text{ 运算定义)}
\end{aligned}
$$

从而两个运算都是可结合的，且 $\circ$ 对 $*$ 是可分配的。

易于验证，1 是 $*$ 运算的单位元，0 是 $\circ$ 运算的单位元。

对任意 $a \in \mathbb{Z}$ 有 $2-a \in \mathbb{Z}$，且 $a*(2-a)=1$，从而 $\mathbb{Z}$ 中任意元素对 $*$ 运算都是可逆的。

$*$ 运算显然是交换的。

从而 $\langle \mathbb{Z}, *, \circ \rangle$ 是一个含幺环。 □

18.5 首先证明对任意 $a \in R$，有 $-a=a$。

证明: $\forall a \in R$，

$$
\begin{aligned}
-a &= (-a)^2 && \text{(题设)}\\
&= a^2 && \text{(教材定理 18.1(3))}\\
&= a && \text{(题设)}
\end{aligned}
$$

□

(1)

证明: 对任何 $a, b \in R$，

$$
\begin{aligned}
a+b &= (a+b)^2 && \text{(题设)}\\
&= a^2+ab+ba+b^2 && \text{(分配律)}\\
&= a+ab+ba+b && \text{(题设)}
\end{aligned}
$$

从而由消去律知，$ab+ba=0$。即，$ab=-ba$。又由于 $-ba=ba$，所以 $ab=-ba=ba$。 □

(2)

证明: 由于 $\forall a \in R$ 有 $-a=a$，所以 $a+a=a+(-a)=0$。 □

(3)