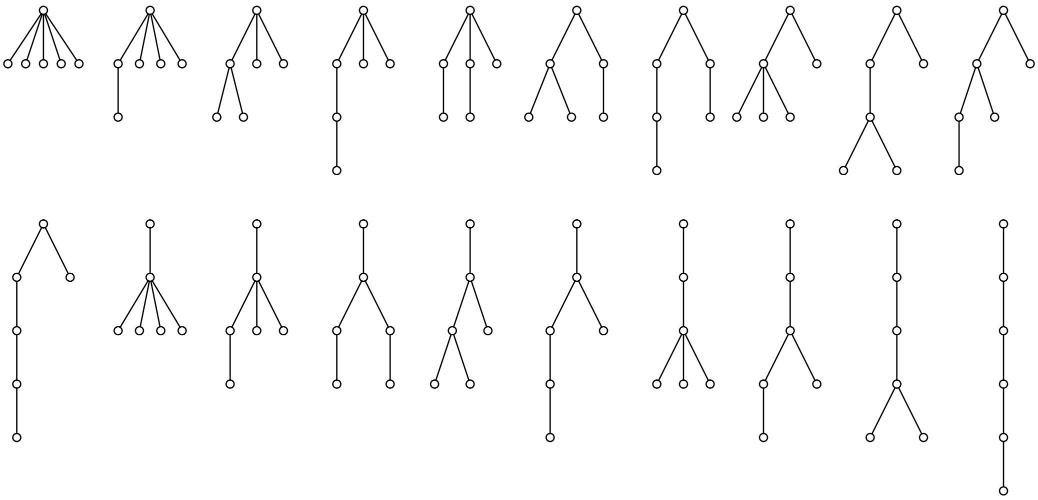

9.19 首先证明如下结论：

引理 9.5 设 T 为 k 叉正则树 $(k \geq 1)$，且 T 中有 t 片树叶和 i 个分支点，则

$$t = (k-1)i + 1.$$

证明： 由题设可知，T 中各顶点出度之和为 ki，各顶点入度之和为 $t+i-1$。从而由图论基本定理有

$$ki = \sum_{v_i \in V(T)} d^+(v_i) = \sum_{v_i \in V(T)} d^-(v_i) = t + i - 1$$

整理得 $t = (k-1)i + 1$。 □

再证原题。

证明： 对 T 的高度 k 作归纳。

当 $k = 0$ 时，$L = I = 0$。命题成立。

设对所有 $k < t(t \geq 1)$，命题都成立。当 $k = t$ 时，对任意高度为 k 的 2 叉正则树 T，设 v_0 是 T 的树根且 T 中共有 l 片树叶，T_1 和 T_2 分别是 v_0 的两个子顶点导出的子树。i_1, l_1, I_1, L_1 和 i_2, l_2, I_2, L_2 分别是 T_1 和 T_2 中的分支点数、树叶数、各分支点的层数之和以及各树叶的层数之和。由归纳假设，有 $L_1 = I_1 + 2i_1$ 和 $L_2 = I_2 + 2i_2$。

注意到，除 v_0 外，T 中的每一个分支点都在 $V(T_1) \cup V(T_2)$ 中，且 $V(T_1) \cap V(T_2) = \varnothing$。所以应有 $i = i_1 + i_2 + 1$。由于 T 的高度 $t \geq 1$，所以 v_0 不可能是树叶。因此，T 的树叶全都在 $V(T_1) \cup V(T_2)$ 中。所以有 $l = l_1 + l_2$。另一方面，$V(T_1) \cup V(T_2)$ 中每一个顶点相对 T_1 (或 T_2)的层数这一顶点相对于 T 的层数少 1，且 v_0 在 T 中的层数为 0。因此有 $I = I_1 + i_1 + I_2 + i_2$ 和 $L = L_1 + l_1 + L_2 + l_2$。

从而有：

$$\begin{aligned}
L &= L_1 + l_1 + L_2 + l_2 \\
&= (I_1 + 2i_1) + l_1 + (I_2 + 2i_2) + l_2 && \text{(归纳假设)} \\
&= I + i_1 + i_2 + l_1 + l_2 && (I = I_1 + I_2 + i_1 + i_2) \\
&= I + i_1 + i_2 + l && (l = l_1 + l_2) \\
&= I + i_1 + i_2 + i + 1 && \text{(引理 9.5)} \\
&= I + 2i && (i = i_1 + i_2 + 1)
\end{aligned}$$

这就证明了当 $k = t$ 时，命题也成立。 □