

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{000, 111\}; \\
B_2 &= \{000, 001, 110, 111\}; \\
B_3 &= \{000, 010, 101, 111\}; \\
B_4 &= \{000, 011, 100, 111\}; \\
B_5 &= \{0, 1\}^3.
\end{aligned}$$

19.40

证明: 令 $X = \{0, x, \bar{x}, 1\}$ 。对任意 $a, b \in X$, 分三种情况讨论:

情况一: 若 $a = 0$ (或 $b = 0$), 则有 $a \wedge b = 0 \in X$ 和 $a \vee b = b \in X$ (或 $a \vee b = a \in X$)。

情况二: 若 $a = 1$ (或 $b = 1$), 则有 $a \wedge b = b \in X$ (或 $a \wedge b = a \in X$) 和 $a \vee b = 1 \in X$ 。

情况三: 若上述两者都不成立, 则必有 $a, b \in \{x, \bar{x}\}$, 此时, 若 $a = b$, 则 $a \wedge b = a \vee b = a = b \in X$ 。若 $a \neq b$, 则必有 $a = \bar{b}$, 从而有 $a \wedge b = 0 \in X$ 和 $a \vee b = 1 \in X$ 。

这就是说, 对任意 $a, b \in X$, 都有 $a \wedge b \in X$ 和 $a \vee b \in X$ 。

又因为 0 和 1 互补, x 和 \bar{x} 互补, 所以 X 对补运算封闭。

由于 $0, 1 \in X$, 所以 X 对零元运算 0 和 1 也封闭。

这就是说, X 对 B 的所有运算都封闭, 从而 X 是 B 的子布尔代数。 □