$$\iff \forall x(\neg x \in [0,1] \vee ((f(x)-g(x))=0)) \qquad \text{(等号定义)}$$

$$\iff \forall x(x \in [0,1] \to ((f(x)-g(x))=0)) \qquad \text{(蕴涵等值式)}$$

$$\iff f=g \qquad \text{(函数相等定义)}$$

下面证：S 是传递的。

$$\forall f,g,h$$

$$\langle f,g\rangle \in \mathscr{A} \wedge \langle g,h\rangle \in \mathscr{A}$$

$$\begin{aligned}\iff & \forall x(x \in [0,1] \to (f(x)-g(x)) \geq 0) \wedge \\ & \quad \forall x(x \in [0,1] \to (g(x)-h(x)) \geq 0)\end{aligned} \qquad \text{(S 定义)}$$

$$\begin{aligned}\iff & \forall x((x \in [0,1] \to (f(x)-g(x)) \geq 0) \wedge \\ & \quad (x \in [0,1] \to (g(x)-h(x)) \geq 0))\end{aligned} \qquad \text{(量词分配等值式)}$$

$$\begin{aligned}\iff & \forall x((\neg x \in [0,1] \vee (f(x)-g(x)) \geq 0) \wedge \\ & \quad (\neg x \in [0,1] \vee (g(x)-h(x)) \geq 0))\end{aligned} \qquad \text{(蕴涵等值式)}$$

$$\iff \forall x(\neg x \in [0,1] \vee ((f(x)-g(x)) \geq 0 \wedge (g(x)-h(x)) \geq 0)) \qquad \text{(命题逻辑分配律)}$$

$$\begin{aligned}\iff & \forall x(\neg x \in [0,1] \vee ((f(x)-h(x)) \\ & \quad =(f(x)-g(x))+(g(x)-h(x)) \geq 0))\end{aligned} \qquad \text{(加法性质)}$$

$$\iff \forall x(x \in [0,1] \to ((f(x)-h(x)) \geq 0)) \qquad \text{(蕴涵等值式)}$$

$$\iff \langle f,g\rangle \in \mathscr{A} \qquad \text{(S 定义)}$$

综上所述，有 S 是偏序关系。

下面举反例说明 S 不是全序关系。

令 $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x$ 和 $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=1-x$，则：$0,1\in[0,1]\wedge f(0)-g(0)<0\wedge g(1)-f(1)<0$。于是有：$\langle f,g\rangle \notin S \wedge \langle g,f\rangle \notin S$。故 S 不是全序关系。 □

3.15

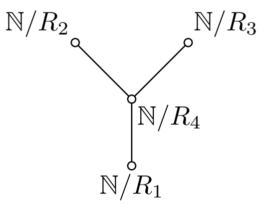
(1) $\mathbb{N}/R_1=\{\{x\}\mid x\in\mathbb{N}\}$；

$\mathbb{N}/R_2=\{\{2k+j\mid k\in\mathbb{N}\}\mid j\in\{0,1\}\}$；

$\mathbb{N}/R_3=\{\{3k+j\mid k\in\mathbb{N}\}\mid j\in\{0,1,2\}\}$；

$\mathbb{N}/R_4=\{\{6k+j\mid k\in\mathbb{N}\}\mid j\in\{0,1,2,3,4,5\}\}$。

(2)



(3) $f_1(H)=H$；

$f_2(H)=\{0\}$；

$f_3(H)=\{0,1,2\}$；

$f_4(H)=\{0,2,4\}$。

3.16 $g\circ f(x)=x^2+2$，既不是满射的也不是单射的。

$f\circ g(x)=x^2+4x+14$，既不是满射的也不是单射的。

f 不是双射，因而没有反函数。g,h 是双射，有反函数。