第十一章　平面图

定理 11.1 图 G 可嵌入球面当且仅当 G 可嵌入平面.

推论 设 $\tilde{G}$ 与 $\tilde{G}'$ 分别是平面图 G 的球面嵌入和平面嵌入，则 $\tilde{G} \cong \tilde{G}'$.

定理 11.2 平面图 G 中所有面的次数之和等于边数 m 的 2 倍:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(R_i) = 2m.$$

定理 11.3 设 R 是平面图 G 的某个平面嵌入 $\tilde{G}$ 的一个内部面，则存在 G 的平面嵌入 $\tilde{G}_1$ 以 R 为外部面.

定理 11.4 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶简单的连通平面图，G 为极大平面图当且仅当 G的每个面的次数均为 3.

定理 11.5 $n(n \geq 4)$ 阶极大平面图 G 中，$\delta(G) \geq 3$.

定理 11.6 对于任意的连通的平面图 G，有

$$n - m + r = 2$$

其中，n, m, r 分别为 G 的阶数、边数和面数.

定理 11.7 对于任何具有 $p(p \geq 2)$ 个连通分支的平面图 G，有

$$n - m + r = p + 1$$

成立，其中 n, m, r 分别为 G 的顶点数，边数和面数.

定理 11.8 设 G 是连通的平面图，且 G 的各面的次数至少为 $l(l \geq 3)$，则 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系:

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2).$$

定理 11.9 设 G 是有 $p(p \geq 2)$ 个连通分支的平面图，各面的次数至少为 $l(l \geq 3)$，则边数 m 与顶点数 n 有如下关系:

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-p-1).$$

定理 11.10 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶 m 条边的简单平面图，则

$$m \leq 3n - 6.$$

定理 11.11 设 G 为 n 阶($n \geq 3$) m 条边的极大平面图，则

$$m = 3n - 6.$$

定理 11.12 设 G 是简单的平面图，则 G 中至少存在一个顶点，其度数小于等于 5.

定理 11.13 图 G 是平面图当且仅当 G 不含与 K_5 同胚的子图，也不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图.