7.19[3]

(1)

证明: 任取 $v_1 \in V(G)$，再取 $v_2 \in N_G(v_1)$。则 $N_G(v_1) \cap N_G(v_2) = \varnothing$ (若不然，则它们交集中的顶点将与 v_1 和 v_2 构成一个长度为 3 的圈，这与 G 的围长是 4 矛盾)，而 $|N_G(v_1)| = |N_G(v_2)| = k$，故 G 中至少有 $|N_G(v_1) \cup N_G(v_2)| = |N_G(v_1)| + |N_G(v_2)| - |N_G(v_1) \cap N_G(v_2)| = 2k$ 个顶点。 □

(2)

证明: 先证明 G 是完全二部图 $K_{k,k}$。

按 (1) 中所述的方法选择 v_1, v_2 并构造 $N_G(v_1), N_G(v_2)$。

用 (1) 的结论，我们知道，$N_G(v_1) \cap N_G(v_2) = \varnothing$ 且 $|N_G(v_1)| = |N_G(v_2)| = k$，于是有 $|N_G(v_1) \cup N_G(v_2)| = |N_G(v_1)| + |N_G(v_2)| = 2k = |V(G)|$。也即，$N_G(v_1) \cup N_G(v_2)$ 包括了 G 中所有顶点。

现在证明，在同一顶点集中的两个顶点不相邻。

若不然，则有两个相邻的 u_1, u_2 属于同一个 $N_G(v_i)(i = 1, 2)$。由对称性，不妨设 $u_1, u_2 \in N_G(v_1)$，则由它们在 $N_G(v_1)$ 知它们都与 v_1 相邻，而它们之间也相邻，则 v_1, u_1, u_2, v_1 就是一个长度为 3 的圈，这与 G 的围长为 4 矛盾。

可见，同一个 $N_G(v_i)(i = 1, 2)$ 都不相邻。但由 G 是 k-正则图知，每个顶点都有 k 个邻接点，结合上述两个条件知，$N_G(v_1)$ 中的每一个顶点都是 $N_G(v_2)$ 中的每一个顶点相邻，反之亦然。

由上述论证可知，G 是完全二部图 $K_{k,k}$。再由引理 7.3 知，这样的 G 在同构意义下是唯一的。 □

7.20

证明: 令 v 是 G 中度最大的顶点。

由 $\Delta(G) = n - 2$ 知，G 中有一个顶点与 v 不相邻，将这个顶点记作 u。

由 $d(G) = 2$ 知，G 中的任何一个顶点，至多只需途经一个顶点就可以到达 u。而途经的这一个顶点不可能是 v (因为 u 与 v 之间没有边)。也就是说，$V(G) - \{u, v\}$ 中的任何一个顶点都可以不经过 v 而到达 u。

令 $G' = G - v$，则 G' 是连通的 (因为 $V(G') - \{u\}$ 中所有的顶点都有到达 u 的通路)，由教材定理 7.9 可知，$|E(G')| \geq |V(G')| - 1 = n - 2$，而 G' 比 G 少 $n - 2$ 条边。于是有 $m = |E(G)| = E(G') + n - 2 \geq 2n - 4$。 □

7.21 先证一个引理。

引理 7.5 *若一个 n 阶无向图 G 不含圈，则必有 $|E(G)| = n - p(G)$，其中 $p(G)$ 是 G 中的连通分支数。*

证明: 对 n 做归纳。

当 $n = 1$ 时，命题显然成立。

设 $n = i$ 时，命题成立，下面证明 $n = i + 1$ 时命题也成立。

设 $|V(G)| = i + 1$，且 G 不含圈。令 $x = |E(G)| + p(G)$，下面证明 $x = i + 1$。

任取一个顶点 $v \in V(G)$，令 $G' = G - I_G(v)$。由 G 中无圈和教材定理 7.18 知，G 中任何一条边都是桥，因此，删去的边数恰好等于增加的连通分支数。从而有

$$x = |E(G)| + p(G) = |E(G')| + p(G')$$

令 $G'' = G' - v$。注意到，v 在 G' 中是孤立顶点。从而有 $p(G'') = p(G') - 1$ 和 $|E(G'')| = |E(G')|$。注意到，$|V(G'')| = i$。由归纳假设知 $E(G'') = i - p(G'')$。代入前式即得 $x = |E(G')| +$

[3] 感谢南京大学02级计算机系赖江山同学给出第 19、20 题的证明。