(7) 若 $a+b=1$，则有 $a=1\wedge b=0$ 或 $a=0\wedge b=1$，从而 $(a+b)G_i=1\cdot G_i=\varnothing\oplus 1\cdot G_i=0\cdot G_i\oplus 1\cdot G_i=a\cdot G_i\oplus b\cdot G_i$。若 $a+b=0$，则有 $a=b$。从而有 $(a+b)G_i=0\cdot G_i=\varnothing=a\cdot G_i\oplus a\cdot G_i=a\cdot G_i\oplus b\cdot G_i$。从而数乘对 F 上的加法满足分配律。

(8) 若 $a=1$，则 $a(G_i\oplus G_j)=G_i\oplus G_j=a\cdot G_i\oplus a\cdot G_j$；若 $a=0$，则 $a(G_i\oplus G_j)=\varnothing=\varnothing\oplus\varnothing=a\cdot G_i\oplus a\cdot G_j$。从而数乘对环和运算满足分配律。

这就证明了 Ω 对环和运算和数乘运算构成 $\{0,1\}$ 上的线性空间。

M 中各元素的独立性是显然的。而对任何 $G_i=G[\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_t}\}]\in\Omega$，易见，$G_i=g_{i_1}\oplus g_{i_2}\oplus\cdots\oplus g_{i_t}$。从而 M 是 Ω 的生成元集。 □

9.16 任取一棵生成树 T，例如，取 $T=G[\{a,f,g,b\}]$，则

T 对应的基本回路有：$C_c=acbgf, C_d=adbgf, C_e=efg$。

$C_{基}=\{C_c,C_d,C_e\}$。

$C_c\oplus C_d=cd$；

$C_c\oplus C_e=acbe$；

$C_d\oplus C_e=adbe$；

$C_c\oplus C_d\oplus C_e=cd\cup C_e$；

$C_{环}=\{\varnothing,C_c,C_d,C_e,cd,acbe,adbe,cd\cup C_e\}$。

T 对应的基本割集为 $S_a=\{a,c,d\}, S_b=\{b,c,d\}, S_f=\{c,d,e,f\}, S_g=\{c,d,e,g\}$。

$S_a\oplus S_b=\{a,b\}$；

$S_a\oplus S_f=\{a,e,f\}$；

$S_a\oplus S_g=\{a,e,g\}$；

$S_b\oplus S_f=\{b,e,f\}$；

$S_b\oplus S_g=\{b,e,g\}$；

$S_f\oplus S_g=\{f,g\}$；

$S_a\oplus S_b\oplus S_f=\{a,b,c,d,e,f\}$；

$S_a\oplus S_b\oplus S_g=\{a,b,c,d,e,g\}$；

$S_a\oplus S_f\oplus S_g=\{a,c,d,f,g\}$；

$S_b\oplus S_f\oplus S_g=\{b,c,d,f,g\}$；

$S_a\oplus S_b\oplus S_f\oplus S_g=\{a,b,f,g\}$；

$S_{断}=\{\varnothing,S_a,S_b,S_f,S_g,S_a\oplus S_b,S_a\oplus S_f,S_a\oplus S_g,S_b\oplus S_f,S_b\oplus S_g,S_f\oplus S_g,S_a\oplus S_b\oplus S_f,S_a\oplus S_b\oplus S_g,S_a\oplus S_f\oplus S_g,S_b\oplus S_f\oplus S_g,S_a\oplus S_b\oplus S_f\oplus S_g\}$。

9.17

证明: 必要性是显然的。下面证充分性。

设 $V(T)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，其中 $d^-(v_1)=0$。只需证 $d^-(v_i)=1(i=2,3,\cdots,n)$ 即可。注意到，由题设，v_1 是唯一入度为 0 的顶点，而任何顶点的入度都不可能小于 0。因此，对所有 $i=2,3,\cdots,n$，必有 $d^-(v_i)\geq 1$。反设除 v_1 外，还有其它入度不为 1 的顶点(不妨设为 v_2)，则必有 $d^-(v_2)\geq 2$。从而 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}d^-(v_i)=d^-(v_1)+d^-(v_2)+\sum\limits_{i=3}^{n}d^-(v_i)\geq 0+2+(n-2)=n$。然而 T 是树，所以应有 $m=n-1<n$，矛盾。 □

9.18 共 20 棵。见下图：