由 Xnip 截图

# 离散数学作业

2019年5月18日 15:49

## 习题十一、4,5,6,7

4、设G是简单平面图，面数 $r<12$，$\delta(G)\geq 3$.

(1) 证明G中存在次数小于等于4的面

反证，若 $\forall deg(R_i)\geq 5$，由 $\delta(G)\geq 3$

$$2m \geq 5r$$
$$r = m-n+2$$
$$\therefore 2m \geq 5(m-n+2) = 5m-5n+10$$

由，$\delta(G)\geq 3$.

$\therefore 2m \geq 3n$，代入，

$$2m \geq 5m - \frac{10}{3}m + 10,$$
$$m \geq 30.$$

由17.17得，$\begin{cases} r = m-n+2 < 12, \\ 2m \geq 3n. \end{cases}$

$$m - \frac{2}{3}m + 2 < 12$$
$$3m - 2m + 6 < 26$$
$$m < 30，矛盾.$$

(2) $r=12$时，G为极大平面图，$\forall deg(R_i)=5$.

5、设G是n阶m条边的简单平面图，已知 $m<30$，是否存在，

proof: $\exists v\in V(G)$，$d(v)\leq 4$.

反证，若 $\forall d(v)>4$，取 $d(v)=5$，

$\begin{cases} 2m \geq 5n、(握手) \\ m \leq 3n-6 \quad (17.16). \end{cases}$

$$m \leq \frac{6}{5}m - 6$$
$$m \geq 30,$$

当 $m<30$ 才成立，
$\therefore \exists v \in V(G), d(v) \leqslant 4.$

6. 设 G是 n阶 m边连通平面图，当 $n=7, m=15$，G为极大平面图，

Proof： G是连通图 $p=1$.

欧拉：$n-m+r=2$，
$7-15+r=2$.
$r=10$，
由 11.2， $2m=\deg(R_i)\cdot r=30$
$\therefore \forall \deg(R_i)=3.$
$\therefore$ 11.4 可知 G为极大平面图.

7. 设 G是 n ($n\geqslant 11$) 阶无向简单图，证明 G或G补 必为非平面图.

取 G与G补中 m大的一个，必存在 $m \geqslant \frac{n(n-1)}{2}/2=\frac{n(n-1)}{4}$.

若 G或G补中，m大的图为平面图，则

由 11.10：$m \leqslant 3n-6$.
则 $\frac{n(n-1)}{4} \leqslant 3n-6$.
$n^2-n \leqslant 12n-24$.
$n^2-13n+24 \leqslant 0$.
$2.2 \leqslant n \leqslant 10.8$
与 $n\geqslant 11$ 矛盾，$\therefore$ G或$\overline{G}$中，m大的那个图必非平面图，