$\iff \exists b(b \in H \land \varphi(a) = \varphi(b))$ ($\varphi(H)$ 定义)

$\iff \exists b(b \in H \land a \ker \varphi = b \ker \varphi)$ (教材定理 17.36(2))

$\iff \exists b(b \in H \land a \in b \ker \varphi)$ (教材定理 17.22)

$\implies \exists b(b \in H \land a \in bH)$ ($\ker \varphi \subseteq H$)

$\iff \exists b(b \in H \land a \in H)$ ($b \in H$)

$\implies a \in H$ (∃消去、命题逻辑化简律)

综合得，$a \in H \Leftrightarrow \varphi(a) \in \varphi(H)$。 □

再证原题。

证明: 教材例 17.45 保证了 $G_2/\varphi(N)$ 的合法性。作 G_2 上的自然映射 $f: G_2 \to G_2/\varphi(N)$，$\forall a \in G_2$，$f(a) = \varphi(N)a$。

令 $g = f \circ \varphi : G_1 \to G_2/\varphi(N)$。则 g 是同态，且为满射(因为 φ 和 f 都是满射)。

考虑 $\ker g$，$\forall a \in G_1$，

$a \in \ker g$

$\iff g(a) = \varphi(N)$ ($\ker g$ 定义)

$\iff f(\varphi(a)) = \varphi(N)$ ($g = f \circ \varphi$)

$\iff \varphi(a) \in \varphi(N)$ (f 定义)

$\iff a \in N$ (引理 17.5)

从而证明了 $\ker g = N$。由群同态基本定理知，$G_1/N \cong G_2/\varphi(N)$。 □

17.56

证明: 首先，证明 $HK \trianglelefteq G$。对任意 $x \in HK, g \in G$，由定义知，存在 $h \in H, k \in K$，使得 $x = hk$。从而 $gxg^{-1} = ghkg^{-1} = gh(g^{-1}g)kg^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1})$，由于 $H, K \trianglelefteq G$，所以 $ghg^{-1} \in H, gkg^{-1} \in K$，从而 $gxg^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1}) \in HK$。这就证明了 $HK \trianglelefteq G$，由教材例 17.46(1) 知，$H \trianglelefteq HK$。再由教材例 17.47 结论即证原题。 □

17.57 先证明如下引理。

引理 17.6 *设 G 为群，C 是 G 的中心。若存在 $H \leqslant C$，则:*

(1) $H \trianglelefteq G$;

(2) 若 G/H 为循环群，则 G 是 Abel 群。

证明: (1) 对任意 $g \in G, h \in H$，由于 $h \in H \subseteq C$，所以有 $ghg^{-1} = hgg^{-1} = h \in H$，由教材定理 17.32 知，$H \trianglelefteq G$。

(2) 由于 G/H 是循环群，所以存在 $a \in G$，使得 $G/H = \langle Ha \rangle$。对任意 $x, y \in G$，必有 $m, n \in \mathbb{Z}$，使 $x \in Ha^m, y \in Ha^n$。即，存在 $h_1, h_2 \in H$，使 $x = h_1a^m, y = h_2a^n$。从而有:

$xy = h_1a^mh_2a^n$ ($x = h_1a^m, y = h_2a^n$)

$= h_2h_1a^ma^n$ ($h_2 \in C$)

$= h_2h_1a^na^m$ ($a^ma^n = a^{m+n} = a^na^m$)

$= h_2a^nh_1a^m$ ($h_1 \in C$)

$= yx$

这就证明了 G 是 Abel 群。 □

再证原题。