二、R^2维欧氏空间上的完备性定理

$R^2 = R\times R = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in R, \ i=1,2\}$

$= \{(x, y) \mid x, y \in R\}$

2维向量全体构成的集合为R^2

(1) 定义1. 设$\{P_n\}\subset R^2$为平面点列, $P_0\in R^2$为一固定点。若$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in N$, 当$n>N$时, 有$P_n\in U(P_0,\varepsilon)$. 则称点列$\{P_n\}$收敛于点$P_0$, 记作$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$

注: $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0 \iff \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$

(2)(柯西准则)定理: 平面点列$\{P_n\}$收敛 $\iff$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N$, 当$n>N$时, 对一切自然数p, 都有 $\rho(P_n, P_{n+p})<\varepsilon$.

(3) 闭区域套定理: 设$\{D_n\}$是R^2中的闭域列, 满足 (1) $D_n\supset D_{n+1}$ $n=1,2\cdots$

(2) $d_n=d(D_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$

则$\exists$唯一的点 $P_0\in D_n$ $n=1,2\cdots$

E为有界无穷点集 则E在R^2中至少有一个聚点.

(4)(致密性)定理: 有界点列$\{P_n\}$必存在收敛子列。

$E\subset\bigcup_\alpha\Delta_\alpha \Rightarrow E\subset\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i$

三、~~n维空间~~ n维欧氏空间

Cauchy收敛准则, 闭域套定理、聚点定理, 有限覆盖定理.

(1) 定义: 所有n个有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体称为n维向量空间, 简称n维空间. 记作R^n. 其中每个有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为R^n中的一个点, n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$是这个点的坐标.

设$\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\vec{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in R^n$

规定 $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$

$\lambda\vec{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$

注: 定义 $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ 为x, y的内积, R^n构成一个n维欧氏空间.

(2) R^n中x与y距离记$\rho(\vec{x},\vec{y})$

$\rho(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$

R^n中元素x与零元0之间的距离$\rho(\vec{x},0)$ 记作$\|\vec{x}\|$. 即 $\|\vec{x}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$

$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \rho(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$

(3) 设$\{P_m\}\subset R^n$中点列, $P_0\in R^n$. 若$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N$, 当$n>N$时, 有$P_n\in U(P_0,\varepsilon)$ 则称$\{P_m\}$收敛于P_0. 记$\lim\limits_{m\to\infty}P_m=P_0$

注: $\lim\limits_{m\to\infty}P_m=P_0 \iff \lim\limits_{m\to\infty}x_i^m=x_i^0$ $i=1,\cdots$

证: $|x_i^m-x_i^0| \le \left[\sum_{k=1}^{n}(x_k^m-x_k^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \|P_m-P_0\|$

$\le \sum_{k=1}^{m}|x_k^m-x_k^0|$ $i=1,\cdots,$

补二: 设$\vec{x}=(x_1,x_2)\in R^2$ $P(x_1,x_2)$点.

$\vec{y}=(y_1,y_2)\in R^2$

$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2)$

$\lambda\vec{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2)$

则R^2构成n=2维向量空间

内积$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{i=1}^{2}x_iy_i$, 则$R^2$构成2维欧氏空间

$\|x\|\triangleq\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

$\|\vec{x}-\vec{y}\|=\sqrt{\langle\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}\rangle}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=\rho(P_1,P_2)$