

习题. 设 A, B, C 都是集合, 若 $A \cup B = A \cup C$ 且 $A \cap B = A \cap C$, 试证 $B = C$ 。

证法一. 先证 $B \subseteq C$ 。

对任意的 $x \in B$, 分两种情况讨论:

1) 若 $x \in A$: 此时 $x \in A \cap B$, 由 $A \cap B = A \cap C$ 知 $x \in A \cap C$, 从而 $x \in C$ 。

2) 若 $x \notin A$: 此时由 $x \in B$ 知 $x \in A \cup B$, 再由 $A \cup B = A \cup C$ 知 $x \in A \cup C$, 再由 $x \notin A$ 知 $x \in C$ 。

综合以上两种情况知对任意的 x , 当 $x \in B$ 时 $x \in C$, 即 $B \subseteq C$ 。

由 B 和 C 的对称性知 $C \subseteq B$, 因此 $B = C$ 。 \square

证法二. $B = B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = C \cap (A \cup B) = C \cap (A \cup C) = C$ \square

证法三. 由已知条件知 $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup C) \setminus (A \cap C)$, 从而 $A \Delta B = A \Delta C$, 于是 $A \Delta (A \Delta B) = A \Delta (A \Delta C)$, 由对称差运算的结合律知 $(A \Delta A) \Delta B = (A \Delta A) \Delta C$, 即 $\phi \Delta B = \phi \Delta C$, 从而 $B = C$ 。 \square