

习题. 设 G 为图。证明：若 $\delta(G) \geq 2$ ，则 G 包含长度至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈。

证明. 设 $P = v_0v_1 \dots v_n$ 为 G 中的一条最长路，则 v_0 只能与 P 中的顶点相邻接，否则假设 v_0 与不在 P 中的顶点 u 邻接，则 $uv_0v_1 \dots v_n$ 构成了 G 中一条更长的路，与 P 为 G 中的最长路矛盾。取最大的 s 使得 v_0 与 v_s 相邻接，则 $C = v_0v_1 \dots v_sv_0$ 为长度至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈，这是因为 v_0 至少与 $\delta(G)$ 个顶点相邻接，而所有这些与 v_0 邻接的顶点均在圈 C 中。 \square