离散数学讲义

陈建文

April 4, 2020

课程学习目标：

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

学习方法：

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

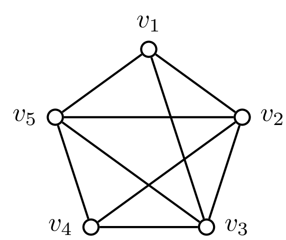
授课教师QQ：2129002650

第 六 章　图的基本概念

设V为一个集合，V的一切二元子集之集合记为$\mathcal{P}_2(V)$，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A|A \subseteq V 且 |A| = 2\}。$$

定义6.1. **设V为一个非空有限集合，**$E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$，二元组$G = (V, E)$称为一个无向图。$V$中的元素称为无向图$G$的顶点，$V$为顶点集；$E$中的元素称为无向图$G$的边，$E$为边集。无向图简称图。如果$|V| = p$，$|E| = q$，则称$G$为一个$(p, q)$图，即$G$是一个具有$p$个顶点$q$条边的图。



定义6.2. 在图$G = (V, E)$中，如果$\{u, v\} \in E$,则称顶点u与v邻接;若x与y是图G的两条边，并且仅有一个公共端点，即$|x \cap y| = 1$,则称边x与y邻接;如果$x = \{u, v\}$是图G的一条边，则称u与x互相关联，同样的，称v与x互相关联。

定义6.3. 如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为多重图，这些边称为多重边; 如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为带环图，这些边称为环;允许有环或多重边存在的图，称之为伪图。

定义6.4. 设$G = (V, E)$为一个图，如果$E = \Phi$,则称G为零图; $(1, 0)$图称为平凡图。

定义6.5. 设v为图$G = (V, E)$的任意一个顶点，G中与v关联的边的数目称为顶点v的度，记为$\deg x$。

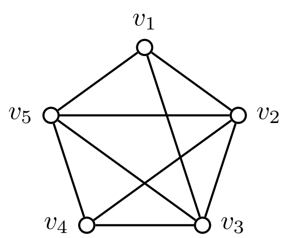
定理6.1. 设$G = (V, E)$为一个具有p个顶点q条边的图，则G中各顶点度的和等于边的条数q的两倍，即

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$

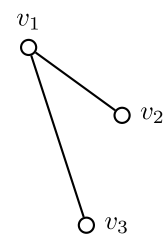
定理6.2. 在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

定义6.6. 图G称为r度正则图，如果G的每个顶点的度都等于r。3度正则图也叫三次图。一个具有p个顶点的$p-1$度正则图称为包含p个顶点的完全图，记为K_p。

定义6.7. 设$G=(V,E)$为一个图，图$H=(V_1,E_1)$称为G的一个子图，当且仅当V_1为V的非空子集且E_1为E的子集。如果$H\neq G$，则称H为G的真子图。

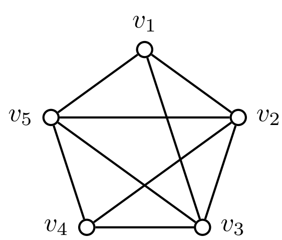


G

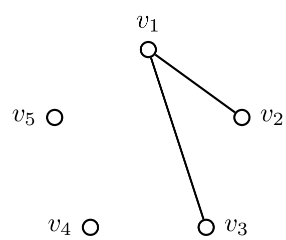


H

定义6.8. 设$G=(V,E)$为一个图，如果$F\subseteq E$，则称G的子图$H=(V,F)$为G的一个生成子图。



G

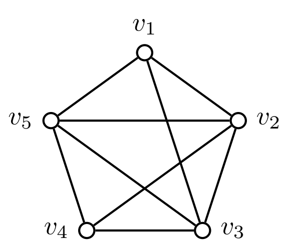


H

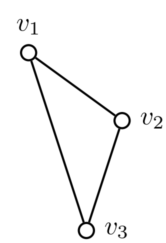
定义6.9. 设图G的子图H具有某种性质，若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的子图，则称H是具有此性质的极大子图。

定义6.10. 设S为图$G=(V,E)$的顶点集V的非空子集，则G的以S为顶点集的极大子图称为由S导出的子图，记为$\langle S\rangle$。形式的，

$$\langle S\rangle=(S,\mathcal{P}_2(S)\cap E)$$

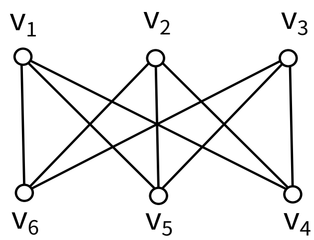


G

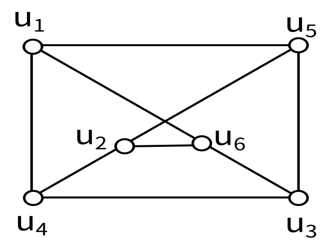


H

定义6.11. 设$G=(V,E)$，$H=(U,F)$为两个图，如果存在一个一一对应$\phi: V\to U$，使得$\{u,v\}\in E$当且仅当$\{\phi(u),\phi(v)\}\in F$,则称G与H同构。



G



H

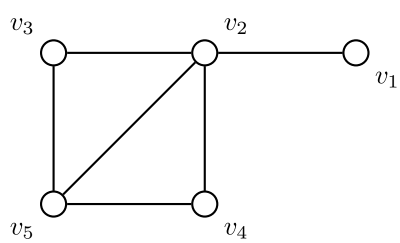
定义6.12. 设$G = (V, E)$为一个图。G的一条通道是G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中$x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。$n$称为通道的长。这样的通道常称为$v_0 - v_n$通道，并简记为$v_0v_1v_2 \ldots v_n$。当$v_0 = v_n$时，则称此通道为闭通道。

定义6.13. 如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。

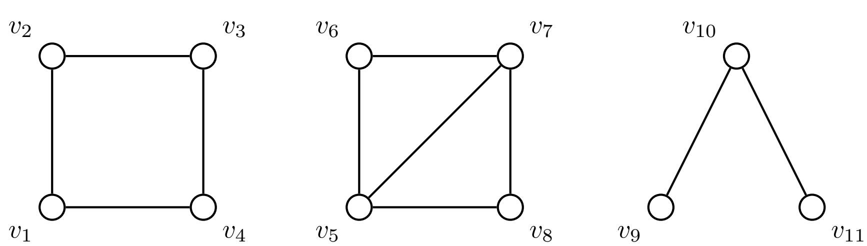
定义6.14. 如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为路。如果闭通道上除终点外各顶点互不相同，则称此闭通道为圈，或回路。



G

定义6.15. 设$G = (V, E)$为一个图，如果G中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称G为一个连通图。

定义6.16. 图G的极大连通子图称为G的一个支。



G

定理6.3. 设$G=(V,E)$是一个图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

$$\forall u,v\in V, u\cong v\text{当且仅当}u\text{与}v\text{间有一条路},$$

则$\cong$为V上的等价关系，G的支就是关于$\cong$的每个等价类的导出子图。

定义6.17. 设$G=(V,E)$是一个图，图$G^c=(V,\mathcal{P}_2(V)\setminus E)$称为$G$的补图。如果$G$与$G^c$同构，则称$G$是自补图。

G G^c

定理6.4. 对任一有6个顶点的图G，G中或G^c中有一个三角形。

证明. 设图G的顶点集为$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$,考虑顶点$v_1$。

- 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点v_1相邻接。不失一般性，不妨设这个三个顶点为v_2,v_3,v_4。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，存在两个顶点相邻接，此时G中存在三角形。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，任意两个顶点都不邻接，此时G^c中存在三角形。
- 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点v_1不邻接。不失一般性，不妨设这个三个顶点为v_2,v_3,v_4。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，存在两个顶点不邻接，此时G^c中存在三角形。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，任意两个顶点互相邻接，此时G中存在三角形。

□

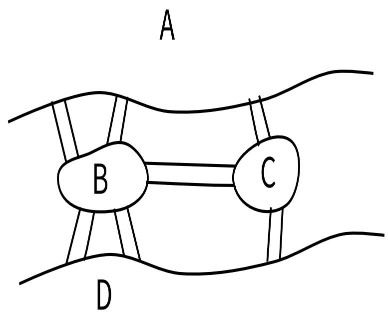
定义6.18. 对任意的正整数m，n，$m\geq 2$，$n\geq 2$，求一个最小的正整数$r(m,n)$，使得任何有$r(m,n)$个顶点的图G中一定含有一个K_m或者图G^c中一定含有一个K_n，这里的数$r(m,n)$称为拉姆齐数。

定义6.19. 设$G=(V,E)$为一个图,如果G的顶点集V有一个二划分$\{V_1,V_2\}$，使得G的任一条边的两个端点一个在V_1中，另一个在V_2中，则称G为偶图。如果$\forall u\in V_1, v\in V_2$均有$uv\in E$，则称$G$为完全偶图，记为$K_{m,n}$，其中$|V_1|=m, |V_2|=n$。

定义6.20. 设$G=(V,E)$是一个图，u和v是G的顶点。联结u和v的最短路的长称为u与v之间的距离，并记为$d(u,v)$。如果u与v间在G中没有路，则定义$d(u,v)=\infty$。

定理6.5. 图G为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

定理6.6. 所有具有p个顶点而没有三角形的图中最多有$\lfloor p^2/4 \rfloor$条边。



定义6.21. 包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹。存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

定理6.7. 图G为欧拉图当且仅当G为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明. 首先，假设图G为欧拉图，往证G为连通的且每个顶点的度为偶数。
由图G为欧拉图知G中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹$T: v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$，其中$v_n = v_0$。显然$G$是连通的。顶点$v_0$在$T$中的第一次出现与一条边相关联，最后一次出现与一条边相关联，其余的每次出现均与两条边相关联，因此其度为偶数。除v_0之外的其他顶点在T中的每次出现均与两条边相关联，因此其度也为偶数。
其次，假设G为连通的且每个顶点的度为偶数，往证G为欧拉图。
设$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$为图$G$的一条最长的迹，记为$Z$，则$Z$为闭迹。否则，$v_n \neq v_0$，$v_n$在迹$Z$中的最后一次出现与一条边相关联，其他的每次出现均与两条边相关联，由v_n的度为偶数知，v_n在G中还有一条与之关联的边没有在Z中出现，记为$x_{n+1} = v_n v_{n+1}$。则$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$构成了图$G$的一条更长的迹，这与$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$为图$G$的一条最长的迹矛盾。接下来证明$Z$包含了图$G$的所有的边。若不然，则图$G$中有一条边$x$不在$Z$中出现，并且$x$有一个端点在$Z$中出现。在图$G$中去掉$Z$中的所有边，得到图$G'$。取图$G'$中一条包含$x$的最长的迹$Z'$，由图$G'$中所有顶点的度均为偶数易知$Z'$为闭迹（与前面证明$Z$为闭迹的过程相类似）。于是$Z$和$Z'$可以联结成一条更长的迹，这与$v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$为图$G$的一条最长的迹矛盾。 □

定义6.22. 包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。

定理6.8. 图G有一条欧拉开迹当且仅当G为连通的且恰有两个奇度顶点。

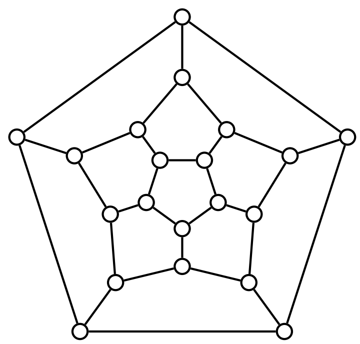
证明. 设图G有一条欧拉开迹$Z: v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$，其中$x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。显然，图$G$是连通的。顶点$v_0$在$Z$中除了其首次出现与一条边相关联外，其余的每次出现均与两条边相关联，因此顶点v_0的度为奇数；同理，v_n的度为奇数。除了v_0和v_n 之外其余的每个顶点在Z中的每次出现均与两条边相关联，因此其度为偶数。这证明了图G恰有两个奇度顶点。
设图G是连通的，且恰有两个奇度顶点u和v。在顶点u和v之间加一条边，得到图G'。则图G'是连通的且每个顶点的度为偶数，因此有一条欧拉闭迹。在该

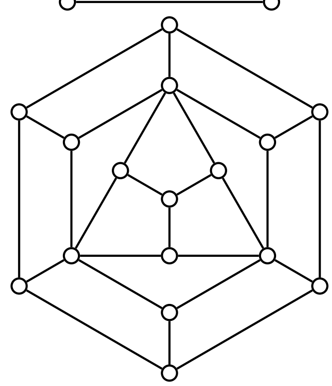
欧拉闭迹上去掉新加的顶点u与顶点v之间的边，便得到了图G的一条欧拉开迹。 □

定理6.9. 设G为连通图，G恰有$2n$个奇度顶点，$n \geq 1$，则G的全部边可以排成n条开迹，且不能排成少于n条开迹。

证明. 设连通图G有$2n$个奇度顶点$u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$。在$G$中加入$n$条边$u_1v_1$，$u_2v_2$，$\ldots$，$u_nv_n$，得到图$G'$。则$G'$是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹Z。在Z中去掉新加入的边$u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n$，则得到图$G$的$n$条开迹。
假设图G的所有边能排成m条开迹，$m < n$。则只有这m条开迹的端点可能为奇度顶点，因此图G至多有$2m$个奇度顶点，这与图G有$2n$个奇度顶点矛盾。 □

定义6.23. 图G的一条包含所有顶点的路称为G的一条哈密顿路;图G的一个包含所有顶点的圈称为G的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

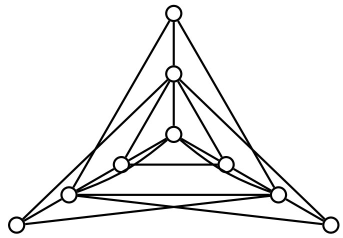




定理6.10. 设$G = (V, E)$为哈密顿图，则对V的每个非空子集S，均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

其中$G - S$是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图，$\omega(G - S)$是图$G - S$的支数。



定理6.11. 设G为有$p(p \geq 3)$个顶点的图。如果对G的任一对不邻接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则G是一个哈密顿图。

定理6.12. 设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

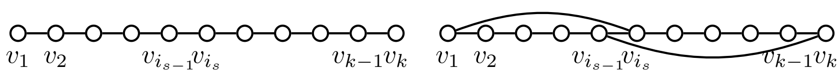
$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G为连通的。

定理6.13. 设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G有哈密顿路。



证明. 设G中的最长路为$v_1v_2\cdots v_k$，只需证明$k=p$。
用反证法，假设$k<p$。以下证明$v_1v_2\cdots v_k$必在同一个圈上。

- 如果v_1与v_k邻接，则$v_1v_2\cdots v_kv_1$构成G中的一个圈；
- 如果v_1与v_k不邻接，由$v_1v_2\cdots v_k$为最长路知v_1, v_k只能与$v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$中的顶点邻接。

设$v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$与$v_1$邻接，$2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_r < k$，则$v_k$必与某个$v_{i_s-1}$邻接，$2 \leq s \leq r$。否则，$v_k$至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1 + \deg v_k \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 < p - 1$$

矛盾。于是，$v_1v_2\cdots v_{i_s-1}v_kv_{k-1}\cdots v_{i_s}v_1$是$G$中的一个圈。总之，$v_1, v_2, \cdots, v_k$在$G$的同一个圈$C$上。
由于G是连通的，$k<p$，所有G必有某个顶点v，v不在C上，但与C上某个顶点v_i邻接。于是得到G的一条更长的路，这就出现了矛盾。 □

定理6.14. 设$G=(V,E)$为一个(p,q)图，$p\times p$矩阵A为G的邻接矩阵，则G中v_i与v_j间长为l的通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值。

Proof. 用数学归纳法证明，施归纳于l。
当$l=1$时，结论显然成立。
假设当$l=k$时结论成立，往证当$l=k+1$时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知：

$$(A^{k+1})_{ij}=(A^kA)_{ij}=\sum_{h=1}^{p}(A^k)_{ih}A_{hj}$$

由归纳假设，$(A^k)_{ih}$为从顶点v_i到顶点v_h长度为k的通道的条数。
由从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$且倒数第二个顶点依次为v_1，v_2，...，v_p的通道的条数之和知$(A^{k+1})_{ij}$为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数。 □

练习6.1. 设G是一个(p,q)图，证明：若$q\geq p+4$，则G中有两个边不重的圈。

练习6.2. 在一个有n个人的宴会上，每个人至少有m个朋友（$2\leq m\leq n$）。试证：有不少于$m+1$个人，使得它们按某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左右均是他的朋友。

练习6.3. 设G是图。证明：若$\delta(G)\geq 2$，则G包含长至少为$\delta(G)+1$的圈。

练习6.4. 若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G为连通图。

练习6.1. 设G是一个(p,q)图，证明：若$q\geq p+4$，则G中有两个边不重的圈。

证明. 当$q>p+4$时，可以在G中任意去掉一些边，使得剩余的边数恰好比顶点数多4 。如果此时得到的新图中有两个边不重的圈，则原来的图G中也一定有两个边不重的圈。因此，以下只需证当$q=p+4$时，图G中有两个边不重的圈。
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
(1)当$p\leq 4$时，图G最多有$p(p-1)/2$条边，易验证此时$q=p+4$不可能成立。
当$p=5$时，$q=9$。设此时图G的顶点集为$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，除了v_1和v_5之间没有边关联之外，其余的任意两个顶点之间均有边关联，则此时$v_1v_2v_3v_1$和$v_3v_4v_5v_3$就是图G中两个边不重的圈。
(2)假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设图G有$k+1$个顶点。分以下四种情况进行验证：
(i)当$\delta(G)=0$时，去掉图G中任意一个度为0的顶点和任意一条边，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q'=p'+4$。由归纳假设，图G'中有两个边不重的圈，它们也是图G中两个边不重的圈。
(ii)当$\delta(G)=1$时，去掉图G中任意一个度为 1 的顶点及其与之关联的边，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q'=p'+4$。由归纳假设，图G'中有两个边不重的圈，它们也是图G中两个边不重的圈。
(iii)当$\delta(G)=2$时，设u为图G中度为2的顶点，与之邻接的两个顶点为v和w。分两种情况讨论。在第一种情况下，v和w之间没有边关联，去掉顶点u及其与之关联的两条边uv和uw，添加一条边vw，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q'=p'+4$。由归纳假设，图G'中有两个边不重的圈。如果新添加的边vw不

在这两个圈上，则这两个圈就是图G中两个边不重的圈；如果新添加的边vw在其中的一个圈上，将其替换为图G中的两条边vu和uw，则所得到的圈与另一个圈一起构成图G中两个边不重的圈。在第二种情况下，v和w之间有边关联，此时$uvwu$构成图G中的一个圈，去掉该圈上的三条边，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边。此时$q' = p' + 1$，因此图G'中必定有一个圈，与原来图G中的圈$uvwu$构成图G中两个边不重的圈。

(iv)当$\delta(G) \geq 3$时,$2q \geq 3p$，即$2(p+4) \geq 3p$， 可以得到$p \leq 8$。此时若图G中有长度小于等于4的圈，将其上的4条边去掉，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边。则$q' \geq p'$，图G'中必定有一个圈，与原来图G中去掉的边所构成的圈一起构成图G中两个边不重的圈。若图G中所有圈的长度至少为5，设C为其中长度最短的一个圈。由$\delta(G) \geq 3$知圈C上的每个顶点至少与圈外的一个顶点相邻接，而其中任意两个不同的顶点不能同时与圈外同一个顶点相邻接，否则将产生一个长度更小的圈。由圈C上至少有5个顶点知图G中至少有10个顶点，与$p \leq 8$矛盾。这说明图G中所有圈的长度至少为5的情况不可能出现。

□

第 七 章