

离散数学讲义

陈建文

March 4, 2020

课程学习目标:

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

学习方法:

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

授课教师QQ: 2129002650

第一章 集合及其运算

定义1.1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合 A 和一个元素 a ，用 $a \in A$ 表示 a 是 A 的一个元素，用 $a \notin A$ 表示 a 不是 A 的一个元素。

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合 $\{x|P(x)\}$

- $E = \{n|n \in \mathbb{Z} \wedge n \text{ is even}\}$, 这里 \wedge 表示“并且”， E 还可以等价的表示为 $E = \{n \in \mathbb{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为 ϕ 。

定义1.2. 设 A, B 为两个集合，如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ ；如果 $A \subseteq B$ 且存在 $x \in B$ 使得 $x \notin A$ ，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A \subset B$ 。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

定义1.3. 设 A, B 为两个集合，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 A 与 B 相等，并记为 $A = B$ 。

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathbb{R}|x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

定理1.1. 空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

证明. 设 A 为任意一个集合，显然对任意的 x 属于空集，则 $x \in A$ ，因此空集为 A 的子集。

以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集 ϕ 和 ϕ' ，则 $\phi \subseteq \phi'$ 并且 $\phi' \subseteq \phi$ ，从而 $\phi = \phi'$ ，矛盾。

□

定义1.4. 集合 S 的所有子集构成的集合称为 S 的幂集, 记为 2^S 或者 $\mathcal{P}(S)$ 。

例. $2^\phi = \{\phi\}$
 $2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$
 $2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
 $2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

定义1.5. 设 A, B 为任意的两个集合, 至少属于集合 A 与集合 B 之一的那些元素构成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$ 。

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

(这里 \vee 表示“或者”)

例. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

定义1.6. 设 A, B 为任意的两个集合, 由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$ 。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

例. $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

定义1.7. 设 A, B 为任意的两个集合, 由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A \setminus B$ 。

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

例. $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

定义1.8. 在许多实际问题中, 常以某个集合 S 为出发点, 而所涉及的集合都是 S 的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合 S , 称为该问题的全集。如果 A 为 S 的子集, 则差集 $S \setminus A$ 称为集合 A 对集合 S 的余集, 记为 A^c 。

$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

例. $S = \{0, 1\}, A = \{0\}$, 则 $A^c = \{1\}$ 。

定理1.2. 设 S 为全集, \emptyset 为空集, A, B, C 为 S 的子集, 则

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. $A \cup S = S, A \cap S = A$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. $A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset$.

8. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
 8'. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

以下只证明结论 6 的第一条, 其他结论的证明留给读者自己完成。
 首先在草稿纸上做如下的分析。

$$\begin{aligned}
 & \forall x, x \in A \cap (B \cup C) \\
 & \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\
 & \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
 & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
 & \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\
 & \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
 \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

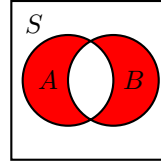
对任意的 x , 如果 $x \in A \cap (B \cup C)$, 则 $x \in A$ 并且 $x \in (B \cup C)$, 从而 $x \in A$, 并且 $x \in B$ 或者 $x \in C$, 因此, $x \in A$ 并且 $x \in B$, 或者 $x \in A$ 并且 $x \in C$, 即, $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$, 于是, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

再证 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 则 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$, 从而 $x \in A$ 并且 $x \in B$, 或者 $x \in A$ 并且 $x \in C$, 因此, $x \in A$, 并且 $x \in B$ 或者 $x \in C$, 即, $x \in A$ 并且 $x \in (B \cup C)$, 于是, $x \in A \cap (B \cup C)$ 。

□

定义1.9. 设 A, B 为任意的两个集合, $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的并集称为 A 与 B 的对称差, 记为 $A \triangle B$ 。



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

例. $\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}$

定理1.3. 设 S 为全集, $A \in 2^S$, $B \in 2^S$, 则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理1.4. 设 S 为全集, \emptyset 为空集, A, B, C 为 S 的子集, 则

1. $A \triangle B = B \triangle A$.
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. $\emptyset \triangle A = A$.
4. $A \triangle A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

以下证明结论 2 和结论 5, 其他结论留给读者思考。先证明结论 2。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \quad (1.1)$$

所以

$$\begin{aligned} x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \end{aligned} \quad (1.2)$$

于是

$$\begin{aligned} x &\in (A \triangle B) \triangle C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ &\quad \vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\quad \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} x &\in A \triangle (B \triangle C) \\ &\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\quad \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到, (1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

□

再证明结论 5。

证明.

$$\begin{aligned} &A \cap (B \triangle C) \\ &= A \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) \\ &= (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} &(A \cap B) \triangle (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \setminus (A \cap C) \cup (A \cap C) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cap B) \setminus A \cup (A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus A \cup (A \cap C) \setminus B \\ &= (A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus B \\ &= (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \end{aligned} \quad (1.6)$$

由式(1.5)和式(1.6)知 $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ 。

□

定义1.10. 以集合为元素的集合称为集族。如果 I 为任意一个集合, 对 I 中每个元素 α 都有一个唯一的集合与之对应, 这个集合记为 A_α , 那么所有这些 A_α 形成的集族可以用 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 表示, 其中 I 称为标号集。

定义1.11. 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的并集 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}$$

集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的交集 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

例. 设 $I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$, 则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}, \bigcap_{x \in I} A_x = \phi$$

定理1.5. 设 A 为任意集合, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族, 则

1. $A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$
2. $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
3. $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
4. $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

定义1.12. 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一个对象为 a , 第二个对象为 b , 则该有序对记为 (a, b) 。 $(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

定义1.13. 设 A 与 B 为任意两个集合, 则称集合 $\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ 为 A 与 B 的笛卡尔乘积, 记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

例. 如果 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$, 那么 $X \times Y = ?$, $Y \times X = ?$

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\} \\ Y \times X &= \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\} \end{aligned}$$

定义1.14. n 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 n 元组。如果第一个对象为 a_1 , 第二个对象为 a_2 , ..., 第 n 个对象为 a_n , 则该 n 元组记为 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

定义1.15. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为任意 n 个集合, 则称集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡尔乘积, 记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, 简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 。即

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

当 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ 时, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 简记为 A^n , 例如 $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$ 。我们以前熟知的二维空间 R^2 即为 $R \times R$, 三维空间 R^3 即为 $R \times R \times R$ 。

例. 如果 $X = \{a_1, b_1\}$, $Y = \{a_2, b_2\}$, $Z = \{a_3, b_3\}$ 那么 $X \times Y \times Z = ?$

$$X \times Y \times Z = \{(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, b_3), (a_1, b_2, a_3), (a_1, b_2, b_3), \\ (b_1, a_2, a_3), (b_1, a_2, b_3), (b_1, b_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\}$$

定义1.16. 设 X 和 Y 为两个非空集合。一个从 X 到 Y 的映射 f 为一个法则, 根据 f , 对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f: X \rightarrow Y$ 。

定义1.17. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为从 X 到 Y 的单射。

定义1.18. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall y \in Y, \exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的满射。

定义1.19. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 X 到 Y 的双射, 或者称 f 为从 X 到 Y 的一一对应。

定义1.20. 设 A 为一个集合, 如果 $A = \Phi$, 其基数定义为 0; 如果 $A \neq \Phi$ 且存在一个自然数 n 使得 A 与集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 之间存在一个一一对应, 则定义 A 的基数为 n 。 A 的基数记为 $|A|$ 。如果 $|A|$ 为 0 或某个自然数 n , 则称 A 为有穷集; 如果 A 不是有穷集, 则称 A 为无穷集。

定理1.6. 设 A, B 为两个不相交的有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B|$ 。

定理1.7. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个两两不相交的有穷集, 则

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

定理1.8. 设 A, B 为有穷集, 则 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ 。

定理1.9. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

定理1.10. 设 S 为有穷集, $A \subseteq S$, 则 $|A^c| = |S| - |A|$ 。

定理1.11. 设 A, B 为有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。

定理1.12. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & |\bigcup_{i=1}^n A_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。实际上,

$$\begin{aligned}
 & \left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| \\
 = & \left| \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cup A_{k+1} \right| \\
 = & \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| + |A_{k+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cap A_{k+1} \right| \\
 = & \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})|
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

由归纳假设

$$\begin{aligned}
 & \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| \\
 = & \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_t| \\
 & - \cdots \\
 & + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \\
 & |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})| \\
 = & \sum_{i=1}^k |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1})| \\
 & + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1}) \cap (A_t \cap A_{k+1})| \\
 & - \cdots \\
 & + (-1)^{k+1} |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap \cdots \cap (A_k \cap A_{k+1})| \\
 = & \sum_{i=1}^k |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |(A_i \cap A_j \cap A_{k+1})| \\
 & + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_t \cap A_{k+1}| \\
 & - \cdots \\
 & + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}|
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

将(1.8)和(1.9)代入(1.7)得

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k+1} |A_i \cap A_j \cap A_t| \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{k+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}| \end{aligned}$$

□

例. 在1000名大学毕业生的调查中, 每个人至少掌握了一门外语, 其中804人掌握了英语, 205人掌握了日语, 190人掌握了俄语, 125人既掌握了英语又掌握了日语, 57人既掌握了日语又掌握了俄语, 85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求在这1000名大学生中, 英语、日语、俄语全掌握的有多少人?

解. 设 A, B, C 分别为掌握了英语、日语、俄语的大学生的集合, 则

$$\begin{aligned} & |A \cup B \cup C| \\ &= |A| + |B| + |C| \\ & \quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

即

$$1000 = 804 + 205 + 190 - 125 - 85 - 57 + |A \cap B \cap C|$$

解得英语、日语、俄语全掌握的人数 $|A \cap B \cap C| = 68$ 。

□

练习1.1. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B =$ _____, $A \cap B =$ _____, $A \setminus B =$ _____, $A \triangle B =$ _____, $A \times B =$ _____。

练习1.2. 下列命题中哪个是假的?

- A. 对每个集合 A , $\phi \in 2^A$ 。
- B. 对每个集合 A , $\phi \subseteq 2^A$ 。
- C. 对每个集合 A , $A \in 2^A$ 。
- D. 对每个集合 A , $A \subseteq 2^A$ 。

练习1.3. 设集合 $S = \{\phi, \{\phi\}\}$, 则 $2^S =$ _____。

练习1.4. 设 A, B, C 为集合, 证明: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

练习1.5. 下列等式是否成立: $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$?

练习1.6. 下列命题中哪个是真的?

- A. 对任意集合 A, B , $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ 。
- B. 对任意集合 A, B , $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。
- C. 对任意集合 A, B , $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$ 。
- D. 对任意集合 A, B , $2^{A \triangle B} = 2^A \triangle 2^B$ 。

练习1.7. 设 A, B, C 为集合, 并且 $A \cup B = A \cup C$, 则下列哪个断言成立?

- A. $B = C$
- B. $A \cap B = A \cap C$
- C. $A \cap B^c = A \cap C^c$
- D. $A^c \cap B = A^c \cap C$

练习1.8. 设 A, B, C, D 为任意四个集合, 证明

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

练习1.9. 设 A, B, C 为集合, 化简

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

练习1.10. 证明

- 1) $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
- 2) $(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$
- 3) $(A \triangle B)^c = (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$

练习1.11. 设集合 S 有 n 个元素, 证明 2^S 有 2^n 个元素。

习题11. 设集合 S 有 n 个元素, 证明 2^S 有 2^n 个元素。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

1. 当 $n = 0$ 时, $S = \phi$, $2^\phi = \{\phi\}$ 有1个元素, 结论成立。
2. 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。设集合 S 中有 $k + 1$ 个元素 $s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}$, 记

$$S_1 = 2^{S \setminus \{s_{k+1}\}}$$

$$S_2 = \{X \cup \{s_{k+1}\} \mid X \subseteq S \setminus \{s_{k+1}\}\}$$

则 $2^S = S_1 \cup S_2$ 。

考虑映射 $f: S_1 \rightarrow S_2$, 对任意的 $X \in S_1$, $f(X) = X \cup \{s_{k+1}\}$ 。易验证 f 为从 S_1 到 S_2 的双射, 从而 $|S_1| = |S_2|$ 。

显然 $S_1 \cap S_2 = \phi$, 再由归纳假设, $|2^{S_1}| = 2^k$, 从而 $|2^S| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ 。

□

第 二 章