集合论与图论基本概念

陈建文

定义1

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合A和一个元素a，用$a \in A$表示a是A的一个元素，用$a \notin A$表示a不是A的一个元素。

例：

- $1 \in \{1, 2, 3\}$
- $0 \notin \{1, 2, 3\}$

定义2

设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

例:

- $\{1,2,4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,2,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$

定义3

设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记为$A = B$。

例：

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

定义4

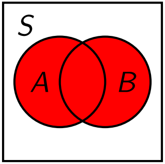
集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

例：

- $2^{\phi} = \{\phi\}$
- $2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$
- $2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

定义5

设A,B为任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B的并集，记为$A\cup B$。



$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$$

（这里$\vee$表示“或者”）

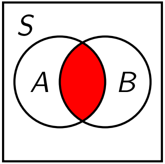
例:

- $\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$

定义6

设A, B为任意的两个集合，由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的交集，记为$A \cap B$。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

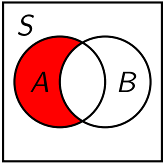


例:

- $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

定义7

设A, B为任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的差集，记为$A \setminus B$。



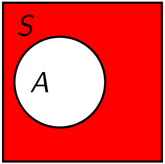
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

例：

- $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

定义8

在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A为S的子集，则差集$S \setminus A$称为集合A对集合S的**补集**，记为A^c。



$$A^c = \{x | x \in S \land x \notin A\}$$

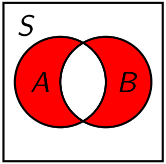
例：

- $S = \{0, 1\}, A = \{0\}$, 则$A^c = \{1\}$。

定义9

设A, B为任意的两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$的并集称为A与B的**对称差**，记为$A \triangle B$。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



例：

- $\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}$

定义10

以集合为元素的集合称为集族。如果I为任意一个集合，对I中每个元素α都有一个唯一的集合与之对应，这个集合记为A_α，那么所有这些A_α形成的集族可以用$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$表示，其中$I$称为标号集。

例：

- 设标号集$I=\{1,2,3\}$，那么$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}=\{A_1,A_2,A_3\}$
- 设标号集$I=Z^+$，那么$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}=\{A_1,A_2,A_3,\cdots\}$

定义11

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的并集$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x|\exists\alpha\in I x\in A_\alpha\}$$

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的交集$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x|\forall\alpha\in I x\in A_\alpha\}$$

例:

- 设标号集$I=\{1,2,3\}$，那么$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = A_1\cup A_2\cup A_3$
- 设标号集$I = Z^+$，那么$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x|\exists\alpha\in Z^+$使得$x\in A_\alpha\}$，并可记为$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

定义12

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一个对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a, b)。$(a, b) = (c, d)$当且仅当$a = c$并且$b = d$。

定义13

设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$为$A$与$B$的**笛卡尔乘积**，记为$A \times B$。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

例：

如果$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，那么$X \times Y =?$，$Y \times X =?$

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$
$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

定义14

n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**n元组**。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，...，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，...，$a_n = b_n$。

定义15

设A_1, A_2，...，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

为$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的**笛卡尔乘积**，记为$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, 简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$。即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

当$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$时，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$简记为$A^n$，例如$A^2 = A \times A$，$A^3 = A \times A \times A$。我们以前熟知的二维空间$R^2$即为$R \times R$，三维空间$R^3$即为$R \times R \times R$。

例:

如果$X=\{a_1,b_1\}$, $Y=\{a_2,b_2\}$, $Z=\{a_3,b_3\}$ 那么$X\times Y\times Z=?$

$$\begin{aligned}X\times Y\times Z=&\{(a_1,a_2,a_3),(a_1,a_2,b_3),(a_1,b_2,a_3),(a_1,b_2,b_3),\\&(b_1,a_2,a_3),(b_1,a_2,b_3),(b_1,b_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\}\end{aligned}$$

定义16

设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的**映射**f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f: X \to Y$。

例:

设集合$X = \{-1, 0, 1\}$，集合$Y = \{0, 1, 2\}$，$\forall x \in X, f(x) = x^2$，即$f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$，则$f$为从集合$X$到集合$Y$的映射。

定义17

设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的**映射**为一个满足以下两个条件的$X \times Y$的子集f：

1. 对X的每一个元素x，存在一个$y \in Y$，使得$(x, y) \in f$；
2. 若$(x, y) \in f$，$(x, y') \in f$，则$y = y'$。

$(x, y) \in f$记为$y = f(x)$。

例：

设集合$X = \{-1, 0, 1\}$，集合$Y = \{0, 1, 2\}$，$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$，则$f$为从集合$X$到集合$Y$的映射。

定义18

设f为从集合X到集合Y的映射，$f : X \to Y$，　如果$y = f(x)$，则称y为x在f下的**象**，称x为y的**原象**。X称为f的**定义域**；集合$\{f(x)|x \in X\}$称为f的**值域**，记为$Im(f)$。

定义19
设$f: X \to Y$，如果$\forall x_1, x_2 \in X$，只要$x_1 \neq x_2$，就有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的**单射**。

定义20
设$f: X \to Y$，如果$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$使得$f(x) = y$，则称f为从X到Y的**满射**。

定义21
设$f: X \to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的**双射**，或者称f为从X到Y的一一对应。

定义22

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，A在f下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

例：

设$f: \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$，$f(x) = x^2$，则$f(\{-1, 0\}) = \{0, 1\}$

定义23

设$f: X \to Y$，$B \subseteq Y$，B在f下的**原象**定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

例：

设$f: \{-1,0,1\} \to \{-1,0,1\}$，$f(x) = x^2$，则$f^{-1}(\{-1,0\}) = \{0\}$

定义24

设$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$为映射，映射f与g的合成$g \circ f : X \to Z$定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

定义25

设$f: X \to Y$为双射，f的**逆映射**$f^{-1}: Y \to X$定义为：对任意的$y \in Y$，存在唯一的x使得$f(x) = y$,则$f^{-1}(y) = x$。

定义26

设$f: X \to Y$为一个双射, 则$g: Y \to X, g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$称为$f$的**逆映射**，记为$g = f^{-1}$。

例：

设集合$X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{4, 5, 6\}$，$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$为从$X$到$Y$的双射，则$f^{-1} = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$。

定义27

设$f : X \to Y$为一个映射。如果存在一个映射$g : Y \to X$使得

$$f \circ g = I_Y 且 g \circ f = I_X,$$

则称映射f为**可逆**的，而g称为f的**逆映射**。

例：

设集合$X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{4, 5, 6\}$，$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$为从$X$到$Y$的双射，$g = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$,由于$f \circ g = I_Y$且$g \circ f = I_X$，$f^{-1} = g$。

定义28

设A与B为两个集合。一个从$A \times B$到$\{T, F\}$的映射R，称为从A到B的一个二元关系。$\forall (a, b) \in A \times B$，如果$(a, b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$; 如果(a,b)在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a \not{R} b$。如果$A = B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

例：

设集合$X = \{1, 2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为一个从$2^X \times 2^X$到$\{T, F\}$的映射，

$\subseteq (\{\phi\}, \{\phi\}) = T, \subseteq (\{\phi\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{\phi\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{\phi\}, \{1, 2\}) = T,$

$\subseteq (\{1\}, \{\phi\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1, 2\}) = T,$

$\subseteq (\{2\}, \{\phi\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{2\}, \{1, 2\}) = T,$

$\subseteq (\{1, 2\}, \{\phi\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\}) = T$

定义29

设A与B为两个集合。$A \times B$的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。如果$(a, b) \in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a, b) \notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not R b$。如果$A = B$，则称R为A上的二元关系。

例：

设集合$X = \{1, 2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为$2^X \times 2^X$的一个子集，

$$\begin{aligned}\subseteq = \{&(\{\phi\}, \{\phi\}), (\{\phi\}, \{1\}), (\{\phi\}, \{2\}), (\{\phi\}, \{1, 2\}),\\ &(\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}),\\ &(\{1, 2\}, \{1, 2\})\}\end{aligned}$$

定义30

集合X上的二元关系R称为**等价关系**，如果R同时满足以下三个性质：

1. R为自反的，即对X中的任意元素x，xRx;
2. R为对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy，则yRx;
3. R为传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

例：

- 整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系为$\mathbb{Z}$上的等价关系。
- 设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的关系R定义如下：

$$
\begin{aligned}
R = &\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

则R为X上的等价关系。

定义31

设X为集合，X的一些非空子集形成的集族$\mathscr{A}$称为X的一个**划分**，如果$\mathscr{A}$具有性质

1. $\forall A, B \in \mathscr{A}$，如果$A \neq B$，则$A \cap B = \phi$;
2. $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} = X$

例：

- 集合

$$\begin{aligned}\{&\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\},\\ &\{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\},\\ &\{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\},\\ &\{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}\}\end{aligned}$$

  构成了整数集$\mathbb{Z}$的一个划分。
- 集合$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$构成了集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$的一个划分。

定义32

集合X上的二元关系R称为**偏序关系**，如果R同时满足以下三个性质：

1. R为自反的，即对X中的任意元素x，xRx；
2. R为反对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy且yRx，则$x = y$；
3. R为传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

定义33

设$\leq$为集合X上的一个偏序关系，则称二元组$(X, \leq)$为一个**偏序集**。

例：

- 实数集$\mathbb{R}$上通常的"小于等于"关系$\leq$为一个偏序关系，所以$(\mathbb{R}, \leq)$为一个偏序集。
- 设S为一个集合，S的子集间的包含关系$\subseteq$为2^S上的一个偏序关系，所以$(2^{\mathbb{S}}, \subseteq)$为一个偏序集。

定义34

设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$使得$\forall x \in A$有$x \leq s$，则称s为A的**最大元素**；如果存在一个元素$t \in A$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称t为A的**最小元素**。

我们用$x < y$表示$x \leq y$且$x \neq y$。

定义35

设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$,在A中没有元素x使得$s < x$，则称s为A的**极大元素**；如果存在一个元素$t \in A$，在A中没有元素x使得$x < t$，则称t为A的**极小元素**。

定义36

设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in X$使得$\forall x \in A$有$x \leq s$，则称s为A的一个**上界**；如果存在一个元素$t \in X$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称t为A的一个**下界**。

定义37

设$(X,\leq)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果A有上界且A的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为A的**上确界**，记为$\sup A$；如果A有下界且A的一切下界之集有最大元素，则这个最大下界称为A的**下确界**，记为$\inf A$。

定义38

如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y**对等**，记为$X \sim Y$。

定义39

设A为一个集合，如果$A = \Phi$，其**基数**定义为0;如果$A \neq \Phi$且存在一个自然数n使得A与集合$\{1, 2, \ldots, n\}$之间存在一个一一对应，则定义A的**基数**为n。A的基数记为$|A|$。如果$|A|$为0或某个自然数n，则称A为有穷集;如果A不是有穷集，则称A为无穷集。

定义40

如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f : \mathbb{N} \to X$，则称集合X为**可数无穷集合**，简称**可数集**或**可列集**。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为**不可数无穷集合**，简称**不可数集**。

定义41

凡与集合$[0, 1]$存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

定义42
集合A的**基数**为一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

定义43
所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的**基数**。

定义44
集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，当且仅当$A \sim B$。

定义45

设α，β为任意两个基数，A,B为分别以α，β为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称基数α小于基数β，记为$\alpha < \beta$。

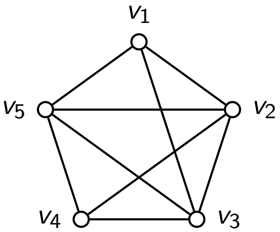
显然，$\alpha \leq \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$。
$\alpha < \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$且不存在A到B的双射。

设V为一个集合，V的一切二元子集之集合记为$\mathcal{P}_2(V)$，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V \text{且} |A| = 2\}。$$

定义46

设V为一个非空有限集合，$E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$，二元组$G = (V, E)$称为一个无向图。$V$中的元素称为无向图$G$的顶点，$V$为顶点集；$E$中的元素称为无向图$G$的边，$E$为边集。无向图简称图。如果$|V| = p$，$|E| = q$，则称$G$为一个$(p, q)$图，即$G$是一个具有$p$个顶点$q$条边的图。



定义47

设$G=(V,E)$为一个图，图$H=(V_1,E_1)$称为G的一个**子图**，当且仅当V_1为V的非空子集且E_1为E的子集。如果$H\neq G$，则称H为G的**真子图**。

定义48

设图G的子图H具有某种性质，若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的子图，则称H是具有此性质的**极大子图**。

定义49

设S为图$G=(V,E)$的顶点集V的非空子集，则G的以S为顶点集的极大子图称为由S导出的子图，记为$\langle S\rangle$。形式的，

$$\langle S\rangle=(S,\mathcal{P}_2(S)\cap E)$$

定义50

设$G=(V,E)$为一个图。G的一条**通道**为G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0,x_1,v_1,x_2,v_2,x_3,\ldots,v_{n-1},x_n,v_n$$

其中$x_i=\{v_{i-1},v_i\},i=1,2,\ldots,n$。$n$称为该通道的长。这样的通道常称为$v_0-v_n$通道，并简记为$v_0v_1v_2\ldots v_n$。如果通道的长大于等于1且$v_0=v_n$，则称此通道为**闭通道**。

定义51

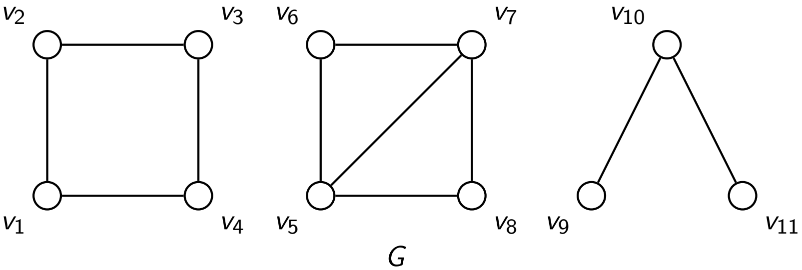
如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的**迹**。如果一条闭通道上的各边互不相同，则称此闭通道为**闭迹**。

定义52

如果一条迹上的各顶点互不相同，则称此迹为路。如果闭迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭迹为**圈**，或**回路**。

定义53

图G的极大连通子图称为G的一个支。



定理

设$G=(V,E)$是一个图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

$$\forall u,v\in V, u\cong v\text{当且仅当}u\text{与}v\text{间有一条路,}$$

则$\cong$为V上的等价关系，G的支就是关于$\cong$的每个等价类的导出子图。

定义54

设$G=(V,E)$为一个图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$。$p\times p$矩阵$A=(a_{ij})$称为G的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, 如果\{v_i,v_j\}\in E\\ 0, 如果\{v_i,v_j\}\notin E\end{cases}$$

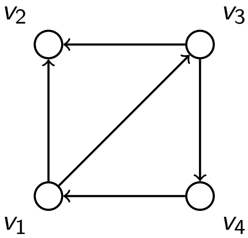
定义55

设$G=(V,E)$为一个有p个顶点q条边的图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_q\}$，$p\times q$矩阵$M=(m_{ij})$称为G的关联矩阵，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, 如果v_i与边e_j相关联\\ 0, 如果v_i不与边e_j相关联\end{cases}$$

定义56

设V为一个有穷非空集合，$A \subseteq V \times V \setminus \{(v,v) | v \in V\}$，二元组$D=(V,A)$称为一个**有向图**。$V$称为有向图$D$的**顶点集**，$V$中的元素称为$D$的**顶点**。$A$称为$D$的**弧集**或**有向边集**，$A$中的元素称为$D$的**弧**或**有向边**。如果$x=(u,v) \in A$，则$u$称为弧$x$的**起点**，$v$称为弧$x$的**终点**。



定义57

设$D=(V,A)$为一个有向图，有向图$H=(V_1,A_1)$称为D的一个**子图**，当且仅当V_1为V的非空子集且A_1为A的子集。如果$H\neq D$，则称H为D的**真子图**。

定义58

设$D=(V,A)$为一个有向图。D的一条**有向通道**为D的顶点和弧的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中$x_i=(v_{i-1},v_i)$，$i=1,2,\cdots,n$。n称为该有向通道的长。这样的有向通道常称为v_0-v_n有向通道，并简记为$v_0v_1v_2\ldots v_n$。如果有向通道的长大于等于1且$v_0=v_n$,则称此有向通道为**闭有向通道**。

定义59

如果有向图中一条有向通道的各弧互不相同，则称此有向通道为有向图的**有向迹**。如果一条闭有向通道上的各弧互不相同，则称此闭有向通道为**闭有向迹**。

定义60

如果一条有向迹上的各顶点互不相同，则称此有向迹为**有向路**。如果闭有向迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭有向迹为**有向圈**，或**有向回路**。

定义61

设$D=(V,A)$为一个有向图，u和v为D的顶点。如果在D中有一条从u到v的有向路，则称从u能达到v，或者v是从u**可达**的。

定义62

有向图D称为是**强连通**的，如果对D的任意两个不同的顶点u和v，u和v是互达的（即从u可以达到v并且从v可以达到u）。

定义63
有向图D的极大强连通子图称为D的一个**强支**。

定理
设$D=(V,A)$为一个有向图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

$$\forall u,v\in V, u\cong v\text{当且仅当}u\text{与}v\text{互达}$$

则$\cong$为V上的等价关系，D的强支就是关于$\cong$的每个等价类的导出子图。

定义64
有向图$D=(V,A)$称为**单向连通**的，如果对D的任意两个不同的顶点u和v，或从u可达到v，或从v可达到u。

定义65
设$D=(V,A)$为一个有向图，如果抹去D中所有弧的方向之后所得到的无向图是连通的，则称D为**弱连通**的，简称**连通**的。

定义66

设$D=(V,A)$为一个有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，$p\times p$矩阵$B=(b_{ij})$称为D的邻接矩阵，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果}(v_i,v_j)\in A\\ 0, \text{如果}(v_i,v_j)\notin A\end{cases}$$

定义67

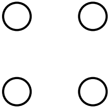
设$D=(V,A)$为一个有p个顶点q条弧的有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_q\}$，$p\times q$矩阵$H=(h_{ij})$称为D的关联矩阵，其中

$$h_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果}v_i\text{为弧}x_j\text{的起点}\\ -1, \text{如果}v_i\text{为弧}x_j\text{的终点}\\ 0, \text{如果}v_i\text{既不是弧}x_j\text{的起点也不是弧}x_j\text{的终点}\end{cases}$$

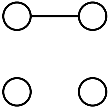
定义68

连通且无圈的无向图称为无向树，简称**树**。一个没有圈的无向图称为无向森林，简称**森林**。

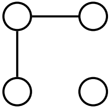
具有4个顶点的互相不同构的所有无向图（同构的只算一个）：



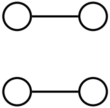
A



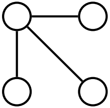
B



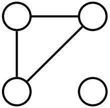
C



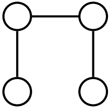
D



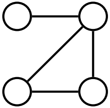
E



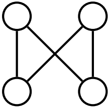
F



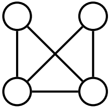
G



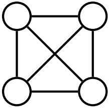
H



I



J



K