

离散数学讲义

陈建文

April 6, 2020

课程学习目标:

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

学习方法:

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

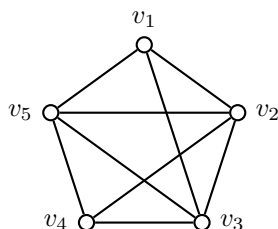
授课教师QQ: 2129002650

第 六 章 图的基本概念

设 V 为一个集合， V 的一切二元子集之集合记为 $\mathcal{P}_2(V)$ ，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V \text{ 且 } |A| = 2\}.$$

定义6.1. 设 V 为一个非空有限集合， $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ ，二元组 $G = (V, E)$ 称为一个无向图。 V 中的元素称为无向图 G 的顶点， V 为顶点集； E 中的元素称为无向图 G 的边， E 为边集。无向图简称图。如果 $|V| = p$ ， $|E| = q$ ，则称 G 为一个 (p, q) 图，即 G 是一个具有 p 个顶点 q 条边的图。



定义6.2. 在图 $G = (V, E)$ 中，如果 $\{u, v\} \in E$ ，则称顶点 u 与 v 邻接；若 x 与 y 是图 G 的两条边，并且仅有一个公共端点，即 $|x \cap y| = 1$ ，则称边 x 与 y 邻接；如果 $x = \{u, v\}$ 是图 G 的一条边，则称 u 与 x 互相关联，同样的，称 v 与 x 互相关联。

定义6.3. 如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为多重图，这些边称为多重边；如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为带环图，这些边称为环；允许有环或多重边存在的图，称之为伪图。

定义6.4. 设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 $E = \Phi$ ，则称 G 为零图； $(1, 0)$ 图称为平凡图。

定义6.5. 设 v 为图 $G = (V, E)$ 的任意一个顶点， G 中与 v 关联的边的数目称为顶点 v 的度，记为 $\deg v$ 。

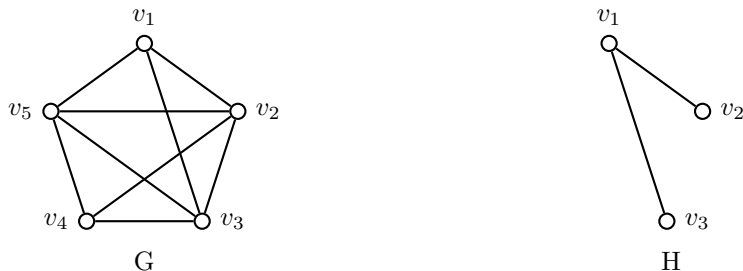
定理6.1. 设 $G = (V, E)$ 为一个具有 p 个顶点 q 条边的图，则 G 中各顶点度的和等于边的条数 q 的两倍，即

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$

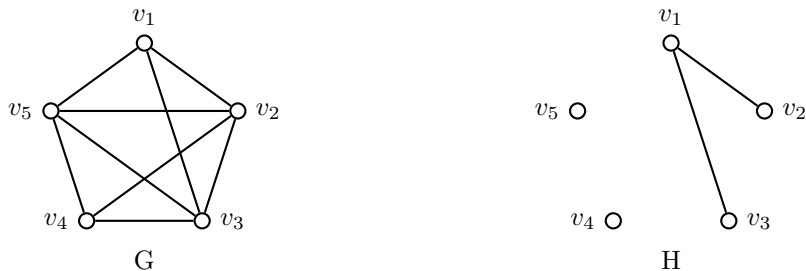
定理6.2. 在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

定义6.6. 图 G 称为 r 度正则图, 如果 G 的每个顶点的度都等于 r 。3度正则图也叫三次图。一个具有 p 个顶点的 $p-1$ 度正则图称为包含 p 个顶点的完全图, 记为 K_p 。

定义6.7. 设 $G = (V, E)$ 为一个图, 图 $H = (V_1, E_1)$ 称为 G 的一个子图, 当且仅当 V_1 为 V 的非空子集且 E_1 为 E 的子集。如果 $H \neq G$, 则称 H 为 G 的真子图。



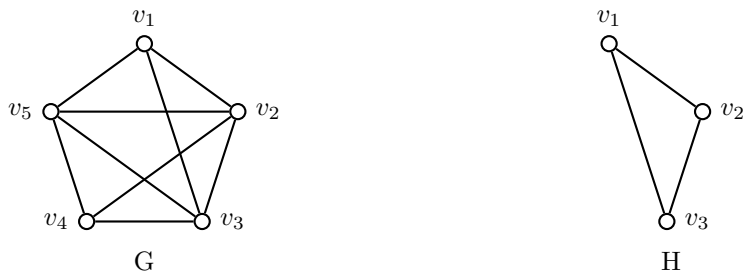
定义6.8. 设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 $F \subseteq E$, 则称 G 的子图 $H = (V, F)$ 为 G 的一个生成子图。



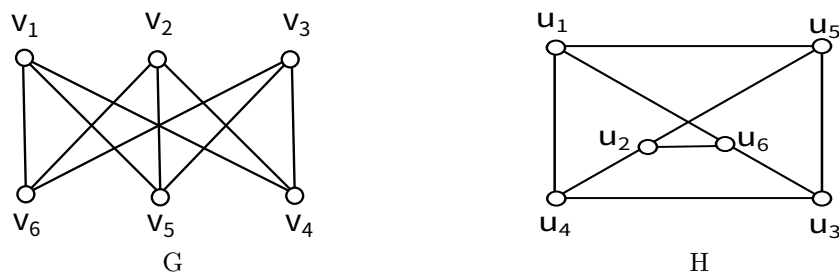
定义6.9. 设图 G 的子图 H 具有某种性质, 若 G 中不存在与 H 不同的具有此性质且包含 H 的子图, 则称 H 是具有此性质的极大子图。

定义6.10. 设 S 为图 $G = (V, E)$ 的顶点集 V 的非空子集, 则 G 的以 S 为顶点集的极大子图称为由 S 导出的子图, 记为 $\langle S \rangle$ 。形式的,

$$\langle S \rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$



定义6.11. 设 $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ 为两个图, 如果存在一个一一对应 $\phi : V \rightarrow U$, 使得 $\{u, v\} \in E$ 当且仅当 $\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$, 则称 G 与 H 同构。



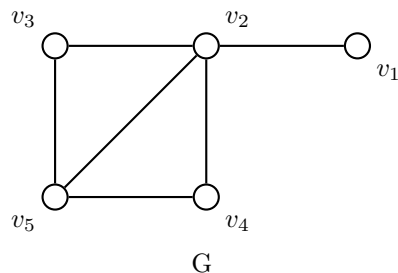
定义6.12. 设 $G = (V, E)$ 为一个图。 G 的一条通道是 G 的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。 n 称为通道的长。这样的通道常称为 $v_0 - v_n$ 通道，并简记为 $v_0v_1v_2 \dots v_n$ 。当 $v_0 = v_n$ 时，则称此通道为闭通道。

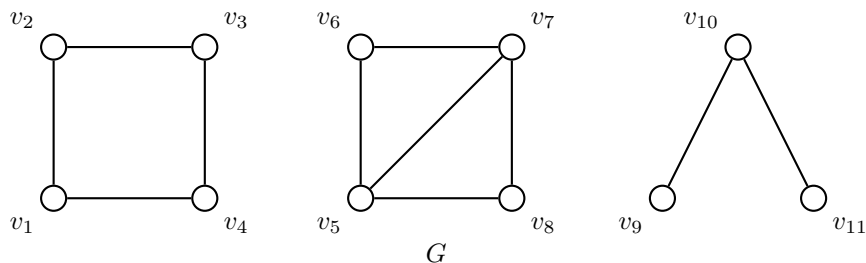
定义6.13. 如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。

定义6.14. 如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为路。如果闭通道上除终点外各顶点互不相同，则称此闭通道为圈，或回路。



定义6.15. 设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 G 中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称 G 为一个连通图。

定义6.16. 图 G 的极大连通子图称为 G 的一个支。

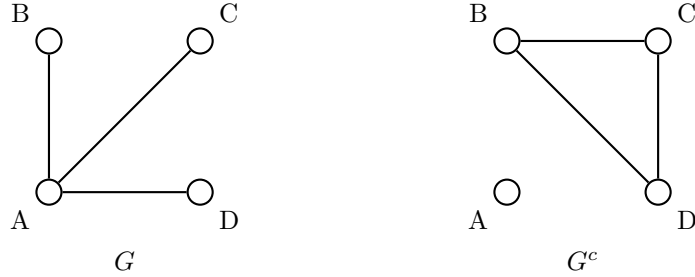


定理6.3. 设 $G = (V, E)$ 是一个图。在 V 上定义二元关系 \cong 如下:

$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 间有一条路,}$$

则 \cong 为 V 上的等价关系, G 的支就是关于 \cong 的每个等价类的导出子图。

定义6.17. 设 $G = (V, E)$ 是一个图, 图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。如果 G 与 G^c 同构, 则称 G 是自补图。



定理6.4. 对任一有6个顶点的图 G , G 中或 G^c 中有一个三角形。

证明. 设图 G 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, 考虑顶点 v_1 。

- 存在三个顶点, 其中的每个顶点都与顶点 v_1 相邻接。不失一般性, 不妨设这个三个顶点为 v_2, v_3, v_4 。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 存在两个顶点相邻接, 此时 G 中存在三角形。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 任意两个顶点都不邻接, 此时 G^c 中存在三角形。
- 存在三个顶点, 其中的每个顶点都与顶点 v_1 不邻接。不失一般性, 不妨设这个三个顶点为 v_2, v_3, v_4 。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 存在两个顶点不邻接, 此时 G^c 中存在三角形。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 任意两个顶点互相邻接, 此时 G 中存在三角形。

□

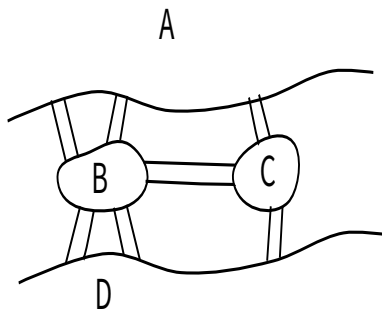
定义6.18. 对任意的正整数 $m, n, m \geq 2, n \geq 2$, 求一个最小的正整数 $r(m, n)$, 使得任何有 $r(m, n)$ 个顶点的图 G 中一定含有一个 K_m 或者图 G^c 中一定含有一个 K_n , 这里的数 $r(m, n)$ 称为拉姆齐数。

定义6.19. 设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 G 的顶点集 V 有一个二划分 $\{V_1, V_2\}$, 使得 G 的任一条边的两个端点一个在 V_1 中, 另一个在 V_2 中, 则称 G 为偶图。如果 $\forall u \in V_1, v \in V_2$ 均有 $uv \in E$, 则称 G 为完全偶图, 记为 $K_{m, n}$, 其中 $|V_1| = m, |V_2| = n$ 。

定义6.20. 设 $G = (V, E)$ 是一个图, u 和 v 是 G 的顶点。联结 u 和 v 的最短路的长称为 u 与 v 之间的距离, 并记为 $d(u, v)$ 。如果 u 与 v 间在 G 中没有路, 则定义 $d(u, v) = \infty$ 。

定理6.5. 图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

定理6.6. 所有具有 p 个顶点而没有三角形的图中最多有 $\lfloor p^2/4 \rfloor$ 条边。



定义6.21. 包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹。存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

定理6.7. 图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明. 首先, 假设图 G 为欧拉图, 往证 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。顶点 v_0 在 T 中的第一次出现与一条边相关联, 最后一次出现与一条边相关联, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。除 v_0 之外的其他顶点在 T 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度也为偶数。

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有边。若不然, 则图 G 中有一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。在图 G 中去掉 Z 中的所有边, 得到图 G' 。取图 G' 中一条包含 x 的最长的迹 Z' , 由图 G' 中所有顶点的度均为偶数易知 Z' 为闭迹 (与前面证明 Z 为闭迹的过程相类似)。于是 Z 和 Z' 可以联结成一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。□

定义6.22. 包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。

定理6.8. 图 G 有一条欧拉迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明. 设图 G 有一条欧拉迹 $Z: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1} v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 v_0 的度为奇数; 同理, v_n 的度为奇数。除了 v_0 和 v_n 之外其余的每个顶点在 Z 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。这证明了图 G 恰有两个奇度顶点。

设图 G 是连通的, 且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。在顶点 u 和 v 之间加一条边, 得到图 G' 。则图 G' 是连通的且每个顶点的度为偶数, 因此有一条欧拉闭迹。在该

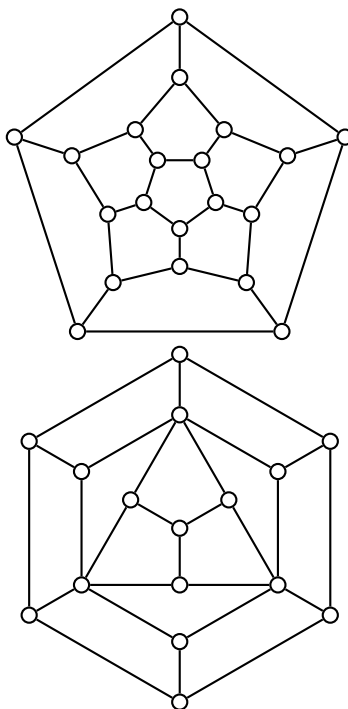
欧拉闭迹上去掉新加的顶点 u 与顶点 v 之间的边, 便得到了图 G 的一条欧拉开迹。 \square

定理6.9. 设 G 为连通图, G 恰有 $2n$ 个奇度顶点, $n \geq 1$, 则 G 的全部边可以排成 n 条开迹, 且不能排成少于 n 条开迹。

证明. 设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$, 得到图 G' 。则 G' 是连通的, 且每个顶点的度为偶数, 因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$, 则得到图 G 的 n 条开迹。

假设图 G 的所有边能排成 m 条开迹, $m < n$ 。则只有这 m 条开迹的端点可能为奇度顶点, 因此图 G 至多有 $2m$ 个奇度顶点, 这与图 G 有 $2n$ 个奇度顶点矛盾。 \square

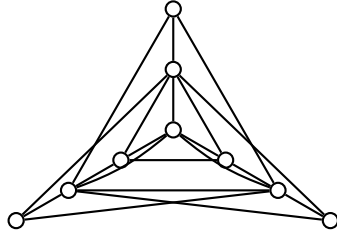
定义6.23. 图 G 的一条包含所有顶点的路称为 G 的一条哈密顿路; 图 G 的一个包含所有顶点的圈称为 G 的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。



定理6.10. 设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图, 则对 V 的每个非空子集 S , 均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

其中 $G - S$ 是从 G 中去掉 S 中那些顶点后所得到的图, $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。



定理6.11. 设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v , 均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。

定理6.12. 设 G 为一个有 p 个顶点的图, 如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v , 均有

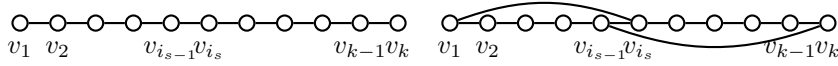
$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

定理6.13. 设 G 为一个有 p 个顶点的图, 如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v , 均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明. 设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$, 只需证明 $k = p$ 。

用反证法, 假设 $k < p$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- 如果 v_1 与 v_k 邻接, 则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 G 中的一个圈;
- 如果 v_1 与 v_k 不邻接, 由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 v_1, v_k 只能与 v_2, v_3, \dots, v_{k-1} 中的顶点邻接。

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_r < k$, 则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接, $2 \leq s \leq r$ 。否则, v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_k \leq r + ((k-1) - r) = k-1 < p-1$$

矛盾。于是, $v_1 v_2 \cdots v_{i_s-1} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 是 G 中的一个圈。总之, v_1, v_2, \dots, v_k 在 G 的同一个圈 C 上。

由于 G 是连通的, $k < p$, 所有 G 必有某个顶点 v , v 不在 C 上, 但与 C 上某个顶点 v_i 邻接。于是得到 G 的一条更长的路, 这就出现了矛盾。□

定理6.14. 设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

Proof. 用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{h=1}^p (A^k)_{ih} A_{hj}$$

由归纳假设, $(A^k)_{ih}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_h 长度为 k 的通道的条数。

由从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k+1$ 的通道的条数为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k+1$ 且倒数第二个顶点依次为 v_1, v_2, \dots, v_p 的通道的条数之和知 $(A^{k+1})_{ij}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k+1$ 的通道的条数。□

练习6.1. 设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

练习6.2. 在一个有 n 个人的宴会上, 每个人至少有 m 个朋友 ($2 \leq m \leq n$)。试证: 有不少于 $m+1$ 个人, 使得它们按某种方法坐在一张圆桌旁, 每人的左右均是他的朋友。

练习6.3. 设 G 是图。证明: 若 $\delta(G) \geq 2$, 则 G 包含长至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈。

练习6.4. 若 G 是一个 (p, q) 图, $q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$, 试证 G 为连通图。

练习6.1. 设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

证明. 当 $q > p + 4$ 时, 可以在 G 中任意去掉一些边, 使得剩余的边数恰好比顶点数多4。如果此时得到的新图中有两个边不重的圈, 则原来的图 G 中也一定有两个边不重的圈。因此, 以下只需证当 $q = p + 4$ 时, 图 G 中有两个边不重的圈。

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 p 。

(1) 当 $p \leq 4$ 时, 图 G 最多有 $p(p-1)/2$ 条边, 易验证此时 $q = p + 4$ 不可能成立。

当 $p = 5$ 时, $q = 9$ 。设此时图 G 的顶点集为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, 除了 v_1 和 v_5 之间没有边关联之外, 其余的任意两个顶点之间均有边关联, 则此时 $v_1 v_2 v_3 v_4$ 和 $v_3 v_4 v_5 v_2$ 就是图 G 中两个边不重的圈。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设图 G 有 $k + 1$ 个顶点。分以下四种情况进行验证:

(i) 当 $\delta(G) = 0$ 时, 去掉图 G 中任意一个度为0的顶点和任意一条边, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈, 它们也是图 G 中两个边不重的圈。

(ii) 当 $\delta(G) = 1$ 时, 去掉图 G 中任意一个度为1的顶点及其与之关联的边, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈, 它们也是图 G 中两个边不重的圈。

(iii) 当 $\delta(G) = 2$ 时, 设 u 为图 G 中度为2的顶点, 与之邻接的两个顶点为 v 和 w 。分两种情况讨论。在第一种情况下, v 和 w 之间没有边关联, 去掉顶点 u 及其与之关联的两条边 uv 和 uw , 添加一条边 vw , 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈。如果新添加的边 vw 不

在这两个圈上，则这两个圈就是图 G 中两个边不重的圈；如果新添加的边 vw 在其中的一个圈上，将其替换为图 G 中的两条边 vu 和 uw ，则所得到的圈与另一个圈一起构成图 G 中两个边不重的圈。在第二种情况下， v 和 w 之间有边关联，此时 $uvwu$ 构成图 G 中的一个圈，去掉该圈上的三条边，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边。此时 $q' = p' + 1$ ，因此图 G' 中必定有一个圈，与原来图 G 中的圈 $uvwu$ 构成图 G 中两个边不重的圈。

(iv) 当 $\delta(G) \geq 3$ 时， $2q \geq 3p$ ，即 $2(p+4) \geq 3p$ ，可以得到 $p \leq 8$ 。此时若图 G 中有长度小于等于4的圈，将其上的4条边去掉，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边。则 $q' \geq p'$ ，图 G' 中必定有一个圈，与原来图 G 中去掉的边所构成的圈一起构成图 G 中两个边不重的圈。若图 G 中所有圈的长度至少为5，设 C 为其中长度最短的一个圈。由 $\delta(G) \geq 3$ 知圈 C 上的每个顶点至少与圈外的一个顶点相邻接，而其中任意两个不同的顶点不能同时与圈外同一个顶点相邻接，否则将产生一个长度更小的圈。由圈 C 上至少有5个顶点知图 G 中至少有10个顶点，与 $p \leq 8$ 矛盾。这说明图 G 中所有圈的长度至少为5的情况不可能出现。

□

[1] [2] [3] [4]

Bibliography

- [1] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
- [2] D. Gale and L.S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1), 1962.
- [3] JR. Joseph B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1):48–50, 1956.
- [4] R. C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, 33(6):668–676, 1957.

第七章