

习题. 设有 n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n , 且 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_1$, 试证

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n$$

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n 。

1. 当 $n = 2$ 时, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_1$, $A_1 = A_2$ 显然成立。

2. 假设当 $n = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。

设 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq A_1$, 则由 $A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq A_1$ 知 $A_k \subseteq A_1$, 于是 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq A_1$, 由归纳假设, $A_1 = A_2 = \dots = A_k$ 。

由 $A_1 = A_k$, $A_{k+1} \subseteq A_1$ 知 $A_{k+1} \subseteq A_k$, 再由 $A_k \subseteq A_{k+1}$ 知, $A_k = A_{k+1}$ 。

于是 $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A_{k+1}$, 结论得证。□