离散数学讲义

陈建文

February 25, 2020

课程学习目标：

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

学习方法：

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

授课教师QQ：2129002650

第 一 章 集合及其运算

定义1.1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合A和一个元素a，用$a \in A$表示a是A的一个元素，用$a \notin A$表示a不是A的一个元素。

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$,这里$\wedge$表示"并且"，$E$还可以等价的表示为$E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为ϕ。

定义1.2. 设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

定义1.3. 设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记为$A = B$。

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathcal{R}|x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

定理1.1. 空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

证明. 设A为任意一个集合，显然对任意的x属于空集，则$x \in A$，因此空集为A的子集。

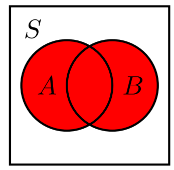
以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集ϕ和ϕ'，则$\phi \subseteq \phi'$并且$\phi' \subseteq \phi$，从而$\phi = \phi'$，矛盾。

□

定义1.4. 集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

例. $2^{\phi} = \{\phi\}$
$2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$
$2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
$2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

定义1.5. 设A, B为任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B的并集，记为$A \cup B$。

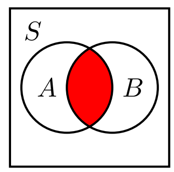


$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

（这里$\vee$表示“或者”）

例. $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

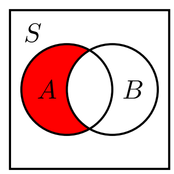
定义1.6. 设A, B为任意的两个集合，由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的交集，记为$A \cap B$。



$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

例. $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$

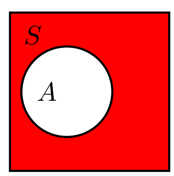
定义1.7. 设A, B为任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的差集，记为$A \setminus B$。



$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

例. $\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$

定义1.8. 在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A为S的子集，则差集$S \setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。



$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

例. $S = \{0,1\}, A = \{0\}$, 则$A^c = \{1\}$

定理1.2. 设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则
1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. $A \cup S = S$, $A \cap S = A$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. $A \cup A^c = S$, $A \cap A^c = \emptyset$.

8. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
8'. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

以下只证明结论 6 的第一条，其他结论的证明留给读者自己完成。
首先在草稿纸上做如下的分析。

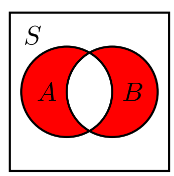
$$
\begin{aligned}
&\forall x, x \in A \cap (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。
对任意的x，如果$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，从而$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，因此，$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，即，$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，于是，$x \in A \cap (B \cup C)$。

□

定义1.9. 设A, B为任意的两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$的并集称为A与B的对称差，记为$A \triangle B$。



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

例. $\{1,2\} \triangle \{2,3\} = \{1,3\}$

定理1.3. 设S为全集，$A \in 2^S$，$B \in 2^S$，则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理1.4. 设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则
1. $A \triangle B = B \triangle A$.
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. $\emptyset \triangle A = A$.
4. $A \triangle A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

证明. 以下证明结论 2，其他结论留给读者思考。

因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \tag{1.1}$$

所以

$$\begin{aligned} x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \end{aligned} \tag{1.2}$$

于是

$$\begin{aligned} & x \in (A \triangle B) \triangle C \\ & \Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ & \Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ & \vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ & \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} & x \in A \triangle (B \triangle C) \\ & \Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ & \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到，(1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。 □

定义1.10. 以集合为元素的集合称为集族。如果I为任意一个集合，对I中每个元素α都有一个唯一的集合与之对应，这个集合记为A_α，那么所有这些A_α形成的集族可以用$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$表示，其中$I$称为标号集。

定义1.11. 集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的并集$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I \text{使得} x \in A_\alpha\}$$

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的交集$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

例. 设$I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$，$\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$，则

$$\bigcup_{x\in I} A_x = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}, \bigcap_{x\in I} A_x = \phi$$

定理1.5. 设A为任意集合，$\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$
2. $A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$
3. $(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$
4. $(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

定义1.12. 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一个对象为a ，第二个对象为b ，则该有序对记为(a,b)。$(a,b)=(c,d)$当且仅当$a=c$并且$b=d$。

定义1.13. 设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$为$A$与$B$的笛卡尔乘积，记为$A\times B$。即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$$

例. 如果$X=\{1,2\}$，$Y=\{3,4,5\}$，那么$X\times Y=?$，$Y\times X=?$

$$X\times Y=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$$
$$Y\times X=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$$

定义1.14. n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n元组。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，$\ldots$，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$。

$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$当且仅当$a_1=b_1$,$a_2=b_2$，$\ldots$，$a_n=b_n$。

定义1.15. 设A_1, A_2，$\ldots$，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)|a_i\in A_i,i=1,2,\ldots,n\}$$

为$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的笛卡尔乘积，记为$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$, 简记为$\prod_{i=1}^n A_i$。即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\prod_{i=1}^n A_i=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)|a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

当$A_1=A_2=\cdots=A_n=A$时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$简记为$A^n$，例如$A^2=A\times A$，$A^3=A\times A\times A$。我们以前熟知的二维空间$R^2$即为$R\times R$，三维空间$R^3$即为$R\times R\times R$。

例. 如果$X=\{a_1,b_1\}$，$Y=\{a_2,b_2\}$，$Z=\{a_3,b_3\}$ 那么$X\times Y\times Z=?$

$$\begin{aligned}X\times Y\times Z=&\{(a_1,a_2,a_3),(a_1,a_2,b_3),(a_1,b_2,a_3),(a_1,b_2,b_3),\\&(b_1,a_2,a_3),(b_1,a_2,b_3),(b_1,b_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\}\end{aligned}$$

定义1.16. 设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f:X\to Y$。

定义1.17. 设$f : X \to Y$，如果$\forall x_1, x_2 \in X$，只要$x_1 \neq x_2$，就有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的单射。

定义1.18. 设$f : X \to Y$，如果$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$使得$f(x) = y$，则称f为从X到Y的满射。

定义1.19. 设$f : X \to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的双射，或者称f为从X到Y的一一对应。

定义1.20. 设A为一个集合，如果$A = \Phi$，其基数定义为0;如果$A \neq \Phi$且存在一个自然数n使得A与集合$\{1, 2, \ldots, n\}$之间存在一个一一对应，则定义A的基数为n。A的基数记为$|A|$。如果$|A|$为*0*或某个自然数n，则称A为有穷集;如果A不是有穷集，则称A为无穷集。

定理1.6. 设A, B为两个不相交的有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B|$。

定理1.7. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个两两不相交的有穷集，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

定理1.8. 设A, B为有穷集，则$|A \times B| = |A| \cdot |B|$。

定理1.9. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

定理1.10. 设S为有穷集，$A \subseteq S$，则$|A^c| = |S| - |A|$。

定理1.11. 设A, B为有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

定理1.12. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&- \ldots \\
&+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 1$时，结论显然成立。

假设定理的结论对$n \geq 1$个有穷集合成立，往证对$n + 1$个有穷集合定理的结论也成立。实际上，

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| \\
=&|(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})|
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

由归纳假设

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
=&\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
-&\ldots \\
+&(-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
=&\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| \\
&+ \sum_{1\le i<j<k\le n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1})| \\
&- \ldots \\
&+ (-1)^{n+1}|(A_1 \cap A_{n+1}) \cap (A_2 \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \\
=&\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |(A_i \cap A_j \cap A_{n+1})| \\
&+ \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| \\
&- \ldots \\
&+ (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

将(1.6)和(1.7)代入(1.5)得

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| \\
=&\sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
-&\dots \\
+&(-1)^{n+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}|
\end{aligned}
$$

□

例. *在1000名大学毕业生的调查中，每个人至少掌握了一门外语，其中804人掌握了英语，205人掌握了日语，190人掌握了俄语，125人既掌握了英语又掌握了日语，57人既掌握了日语又掌握了俄语，85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求在这1000名大学生中，英语、日语、俄语全掌握的有多少人？*

解. 设A, B, C分别为掌握了英语、日语、俄语的大学生的集合，则

$$
\begin{aligned}
&|A \cup B \cup C| \\
=&|A| + |B| + |C| \\
-&|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$

即

$$1000 = 804 + 205 + 190 - 125 - 85 - 57 + |A \cap B \cap C|$$

解得英语、日语、俄语全掌握的人数$|A \cap B \cap C| = 68$。 □

练习1.1. 设集合$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$，则$A \cup B =$ ______，$A \cap B =$ ______，$A \setminus B =$ ______，$A \triangle B =$ ______，$A \times B =$ ______。

练习1.2. 下列命题中哪个是假的?
A. 对每个集合A，$\phi \in 2^A$。
B. 对每个集合A，$\phi \subseteq 2^A$。
C. 对每个集合A，$A \in 2^A$。
D. 对每个集合A，$A \subseteq 2^A$。

练习1.3. 设集合$S = \{\phi, \{\phi\}\}$，则$2^S =$ ______。

练习1.4. 设A，B，C为集合，证明：$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$。

练习1.5. 下列等式是否成立：$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$*?*

练习1.6. 下列命题中哪个是真的?
A. 对任意集合A，B，$2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$。
B. 对任意集合A，B，$2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$。
C. 对任意集合A，B，$2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$。
D. 对任意集合A，B，$2^{A \triangle B} = 2^A \triangle 2^B$。

练习1.7. 设A，B，C为集合，并且$A\cup B=A\cup C$，则下列哪个断言成立？
  A. $B=C$
  B. $A\cap B=A\cap C$
  C. $A\cap B^c=A\cap C^c$
  D. $A^c\cap B=A^c\cap C$

练习1.8. 设A，B，C，D为任意四个集合，证明
  $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

练习1.9. 设A，B，C为集合，化简
  $(A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)$

练习1.10. 证明
  1) $A\triangle B=(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)$
  2) $(A\triangle B)^c=(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c)$
  3) $(A\triangle B)^c=(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c)$

练习1.11. 设A,B,C都是集合，若$A\cup B=A\cup C$且$A\cap B=A\cap C$，试证$B=C$。

1. 下列命题中哪个是假的？
  A. 对每个集合A，$\phi\in 2^A$。
  B. 对每个集合A，$\phi\subseteq 2^A$。
  C. 对每个集合A，$A\in 2^A$。
  D. 对每个集合A，$A\subseteq 2^A$。

2. 设X和A为任意两个集合，则$A\in 2^X$等价于$A\subseteq X$。

第 二 章