

习题 (p328-1). 用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时, 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $D = (V, A)$ 为一个包含 $k + 1$ 个顶点的比赛图,  $v$ 为 $D$ 的任意一个顶点, 则 $D - v$ 为一个包含 $k$ 个顶点的比赛图。由归纳假设,  $D - v$ 有一条有向哈密顿路 $v_1 v_2 \dots v_k$ 。如果 $(v, v_1) \in A$ , 那么 $vv_1 v_2 \dots v_k$ 为有向图 $D$ 的一条有向哈密顿路; 如果 $(v_k, v) \in A$ , 那么 $v_1 v_2 \dots v_k v$ 为有向图 $D$ 的一条有向哈密顿路; 如果 $(v, v_1) \notin A$ 并且 $(v_k, v) \notin A$ , 由 $D$ 为比赛图知 $(v_1, v) \in A$ 并且 $(v, v_k) \in A$ , 在 $1, 2, \dots, k$ 中选取最大的下标 $i$ 使得 $(v_i, v) \in A$ , 则 $(v, v_{i+1}) \in A$ , 于是 $v_1, v_2, \dots, v_i, v, v_{i+1}, \dots, v_k$ 为 $D$ 的一条有向哈密顿路。□