习题. 证明：单调函数的不连续点的集合至多为可数集。

首先，让我们回顾一下刻画实数系的公理系统。
设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \to x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$
11. $x \leq x$
12. $x \leq y \wedge y \leq x \to x = y$
13. $x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z$
14. $x \leq y \vee y \leq x$
15. $x > y \to x + z > y + z$
16. $x > y \wedge z > 0 \to x * z > y * z$
17. $\forall A \subseteq \mathbb{R}(A \neq \phi \wedge \exists x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \leq x)) \to \exists z \in R((\forall y \in A(y \leq z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \leq x) \to z \leq x))))$

其中最后一条公理为：实数集的任意一个非空子集如果有上界，则必有上确界。

接下来，我们来看结论中涉及的一些基本概念。

设$f : R \to R$为一个函数。如果对任意的$x_1 \in R$，$x_2 \in R$，$x_1 < x_2$，那么$f(x_1) \leq f(x_2)$，则称f为单调函数。

设$x_0 \in R$，$L \in R$，如果对任意的$\varepsilon \in R$，$\varepsilon > 0$，存在$\delta \in R$，$\delta > 0$，只要$|x - x_0| < \delta$，就有$|f(x) - L| < 0$，则称函数f在x_0处的极限为L，记为$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$。

如果$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数$f$在$x_0$处连续，$x_0$为函数$f$的连续点；如果函数$f$在$x_0$处不连续，则称$x_0$为函数$f$的不连续点。

证明. 对任意的$x_0 \in R$，由单调函数的定义知，集合$\{f(x)|x < x_0\}$有上界$f(x_0)$，从而有上确界，定义$L(x_0) = sup\{f(x)|x < x_0\}$；集合$\{f(x)|x > x_0\}$有下界$f(x_0)$，从而有下确界，定义$U(x_0) = inf\{f(x)|x > x_0\}$。如果$x_1 < x_2$，那么$U(x_1) \leq f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq L(x_2)$。另外，如果$x_0$为$f$的不连续点，可以证明$L(x_0) < U(x_0)$。因此，集合$S = \{(L(x), U(x))|x\text{为函数f的不连续点}\}$中的开区间两两不相交。在$S$中的每个开区间中取一个有理数，则所有这些有理数的集合与函数f的所有不连续点构成的集合是对等的，从而f的所有不连续点所构成的集合为至多可数的。

设x_0为f的不连续点，以下证明$L(x_0) < U(x_0)$。由$L(x_0) \leq f(x_0) \leq U(x_0)$知$L(x_0) \leq U(x_0)$，因此只需证$L(x_0) \neq U(x_0)$。用反证法，假设$L(x_0) = U(x_0)$，则$L(x_0) = U(x_0) = f(x_0)$。对任意的$\varepsilon > 0$，由$L(x_0)$的定义知存在$x' < x_0$使得$f(x') > L(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$；由$U(x_0)$的定义知存在$x'' > x_0$使得$f(x'') < U(x_0) + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon$。设$\delta = \min(|x' - x_0|, |x'' - x_0|)$，那么当$|x - x_0| < \delta$时，就有$|f(x) - f(x_0)| < \delta$，从而$\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$，函数$f$在$x_0$处连续，这与$x_0$为$f$的不连续点矛盾。 $\square$