

习题 (p307-2). 设 D 为一个有 p 个顶点 q 条弧的强连通的有向图, 则 q 至少是多大?

答. 当 $p = 1$ 时, $q = 0$; 当 $p > 1$ 时, q 至少为 p 。

当 $p > 1$ 时, 设 u 和 v 为 D 的两个顶点, 由 D 为强连通的知从 u 到 v 有一条有向路 $uu_1u_2 \dots u_nv$, 从 v 到 u 有一条有向路 $vu_{n+2}u_{n+3} \dots u_{n+m}u$ 。考虑有向闭通道 $W = uu_1u_2 \dots u_nv u_{n+2}u_{n+3} \dots u_{n+m}u$, 记 $u_0 = u$, $v_{n+1} = v$ 。设 u_j 为 W 上第一个与前面的某个顶点 u_i 重复的顶点, 那么 $u_iu_{i+1} \dots u_j$ 构成了 D 中的一个圈。这证明了当 $p > 1$ 时, 任意一个强连通图中必定有圈。因此, 抹去 D 中所有弧的方向所得到的无向图为连通的, 且至少有1个圈, 去掉该圈上的一条边, 所得到的无向图仍然为连通的, 从而 $q - 1 \geq p - 1$, 即 $q \geq p$ 。

显然由 p 个顶点 v_1, v_2, \dots, v_p 依次相连所构成的圈 $v_1v_2 \dots v_pv_1$ 有 p 条弧。因此 q 至少为 p 。

□