**习题.** 设$R$，$S$，$T$为任意三个集合，证明：$(R \triangle S) \cap (R \triangle T) \subseteq R \triangle (S \cap T)$。

证明（利用自然语言叙述）. 对任意的$x \in (R \triangle S) \cap (R \triangle T)$，分两种情况讨论：

1）如果$x \in R$，由$x \in R \triangle S = (S \setminus R) \cup (R \setminus S)$知$x \notin S$，从而$x \notin S \cap T$，此时$x \in R \triangle (S \cap T)$；

2）如果$x \notin R$，由$x \in R \triangle S = (S \setminus R) \cup (R \setminus S)$知$x \in S$,由$x \in R \triangle T = (R \setminus T) \triangle (T \setminus R)$知$x \in T$，从而$x \in S \cap T$，$x \in R \triangle (S \cap T)$。

综合以上两种情况,对任意的$x \in (R \triangle S) \cap (R \triangle T)$，$x \in R \triangle (S \cap T)$，结论得证。

□

证明*(*利用集合运算规则*)*.

$$
\begin{aligned}
&(R \triangle S) \cap (R \triangle T) \\
=&(R \setminus S \cup S \setminus R) \cap (R \setminus T \cup T \setminus R) \\
=&(R \setminus S \cap R \setminus T) \cup (R \setminus S \cap T \setminus R) \cup (S \setminus R \cap R \setminus T) \cup (S \setminus R \cap T \setminus R) \\
=&R \setminus (S \cup T) \cup \phi \cup \phi \cup (S \cap T) \setminus R \\
=&R \setminus (S \cup T) \cup (S \cap T) \setminus R \\
\subseteq&R \setminus (S \cap T) \cup (S \cap T) \setminus R \\
=&R \triangle (S \cap T)
\end{aligned}
$$

□

证明（利用符号逻辑）.

$$
\begin{aligned}
&\forall x, x \in (R \triangle S) \cap (R \triangle T) \\
&\Leftrightarrow x \in (R \triangle S) \wedge x \in R \triangle T \\
&\Leftrightarrow x \in (R \setminus S) \cup (S \setminus R) \wedge x \in (R \setminus T) \cup (T \setminus R) \\
&\Leftrightarrow ((x \in R \wedge x \notin S) \vee (x \in S \wedge x \notin R)) \wedge ((x \in R \wedge x \notin T) \vee (x \in T \wedge x \notin R)) \\
&\Leftrightarrow (x \in R \wedge x \notin S \wedge x \notin T) \vee (x \in S \wedge x \in T \wedge x \notin R) \\
&\Rightarrow (x \in R \wedge (x \notin S \vee x \notin T)) \vee (x \in S \wedge x \in T \wedge x \notin R) \\
&\Leftrightarrow (x \in R \wedge x \notin S \cap T) \vee ((x \in S \cap T) \wedge x \notin R) \\
&\Leftrightarrow (x \in R \setminus (S \cap T)) \vee (x \in (S \cap T) \setminus R) \\
&\Leftrightarrow x \in R \triangle (S \cap T)
\end{aligned}
$$

□