**习题.** 设$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$为$p$个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于$p$。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由$a_1$，$a_2$为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k (k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论成立。设$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k+1}$为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}$，$a_k - 1$。在其度为$a_k - 1$的顶点上联结一条边和一个顶点，便得到了一个一棵具有$k+1$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k+1}$。 $\square$