

习题. 设 $G$ 为一个三次正则图, 试证:  $\kappa(G) = \lambda(G)$

证明. (1) 如果 $\kappa(G) = 0$ , 则 $G$ 不连通, 此时 $\lambda(G) = 0$ , 故 $\kappa(G) = \lambda(G)$ 。

(2) 如果 $\kappa(G) = 1$ , 则 $G$ 中存在顶点 $u$ ,  $G-u$ 不连通。由 $\deg u = 3$ 知,  $G-u$ 至少存在一个分支只有一条边与 $u$ 相连, 显然去掉这条边之后,  $G$ 不连通, 所以 $\lambda(G) = 1$ , 故 $\kappa(G) = \lambda(G)$ 。

(3) 如果 $\kappa(G) = 2$ , 则存在两个顶点 $v_1$ 和 $v_2$ ,  $G - \{v_1, v_2\}$ 不连通。 $G - v_1$ 是连通的, 且 $G - v_1 - v_2$ 不连通, 类似于(2)中的讨论知 $G - v_1$ 中存在一条边 $e_2$ ,  $G - v_1 - e_2$ 不连通。另一方面由 $\lambda(G) \geq \kappa(G) = 2$ 知 $G - e_2$ 是连通的, 由于 $G - e_2 - v_1 = G - v_1 - e_2$ 不连通, 由与(2)类似的讨论知 $G - e_2$ 中存在一条边 $e_1$ ,  $G - e_2 - e_1$ 不连通, 所以 $\lambda(G) = 2$ , 故 $\kappa(G) = \lambda(G)$ 。

(4) 如果 $\kappa(G) \geq 3$ , 由 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) = 3$ 知,  $\kappa(G) = \lambda(G) = 3$ 。□