

**习题.** 设 $R, S$ 为集合 $X$ 上的等价关系。如果 $R \circ S$ 为等价关系, 则 $R \circ S = (R \cup S)^+$ 。

证法一. 根据传递闭包的定义进行证明。只需证 $R \circ S$ 为包含 $R \cup S$ 的所有传递关系的交。

首先证明 $R \circ S$ 为包含 $R \cup S$ 的传递关系。对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \cup S$ , 则 $(a, c) \in R$ 或者 $(a, c) \in S$ 。如果 $(a, c) \in R$ , 此时由 $S$ 为等价关系知 $(c, c) \in S$ , 从而 $(a, c) \in R \circ S$ ; 如果 $(a, c) \in S$ , 此时由 $R$ 为等价关系知 $(a, a) \in R$ , 从而 $(a, c) \in R \circ S$ 。这证明了 $R \cup S \subseteq R \circ S$ 。由 $R \circ S$ 为等价关系知 $R \circ S$ 为传递的。

其次, 设 $T$ 为任意一个包含 $R \cup S$ 的传递关系, 证明 $R \circ S \subseteq T$ 。对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ S$ , 则存在 $b \in X$ ,  $(a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in S$ 。从而 $(a, b) \in R \cup S \subseteq T$ ,  $(b, c) \in R \cup S \subseteq T$ , 再由 $T$ 为传递关系知 $(a, c) \in T$ 。□

证法二. 先证 $R \circ S \subseteq (R \cup S)^+$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ S$ , 则存在 $b \in X$ ,  $(a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in S$ , 从而 $(a, b) \in R \cup S$ 并且 $(b, c) \in R \cup S$ , 于是 $(a, c) \in (R \cup S)^2 \subseteq (R \cup S)^+$ 。

再证 $(R \cup S)^+ \subseteq R \circ S$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ , 由 $(a, c) \in (R \cup S)^+$ , 往证 $(a, c) \in R \circ S$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in (R \cup S)^+$ , 则存在自然数 $n, n \geq 1$ ,  $(a, c) \in (R \cup S)^n$ 。

以下用数学归纳法证明, 对任意的自然数 $n, n \geq 1$ ,  $(R \cup S)^n \subseteq R \circ S$ 。

(1) 当 $n = 1$ 时, 对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \cup S$ , 则 $(a, c) \in R$ 或者 $(a, c) \in S$ 。如果 $(a, c) \in R$ , 此时由 $S$ 为等价关系知 $(c, c) \in S$ , 从而 $(a, c) \in R \circ S$ ; 如果 $(a, c) \in S$ , 此时由 $R$ 为等价关系知 $(a, a) \in R$ , 从而 $(a, c) \in R \circ S$ 。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。

由 $R, S, R \circ S$ 都为 $X$ 上的等价关系知,  $S \circ R = S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1} = R \circ S$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in (R \cup S)^{k+1} = (R \cup S)^k \circ (R \cup S)$ , 则存在 $b \in X$ ,  $(a, b) \in (R \cup S)^k$ 并且 $(b, c) \in (R \cup S)$ 。由归纳假设,  $(a, b) \in R \circ S$ 。如果 $(b, c) \in R$ , 那么 $(a, c) \in (R \circ S) \circ R = R \circ (S \circ R) = R \circ (R \circ S) = (R \circ R) \circ S = R^2 \circ S \subseteq R \circ S$ ; 如果 $(b, c) \in S$ , 那么 $(a, c) \in (R \circ S) \circ S = R \circ (S \circ S) = R \circ S^2 \subseteq R \circ S$ 。

□