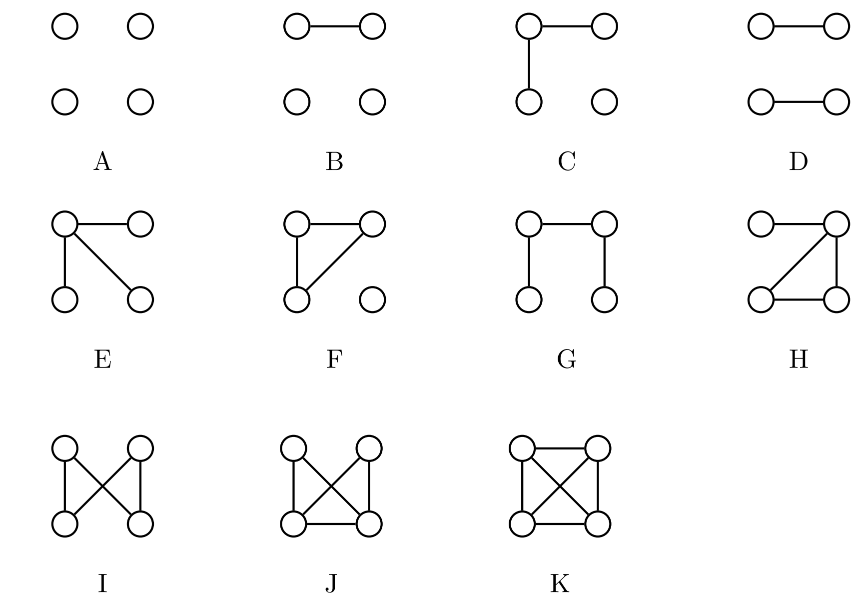
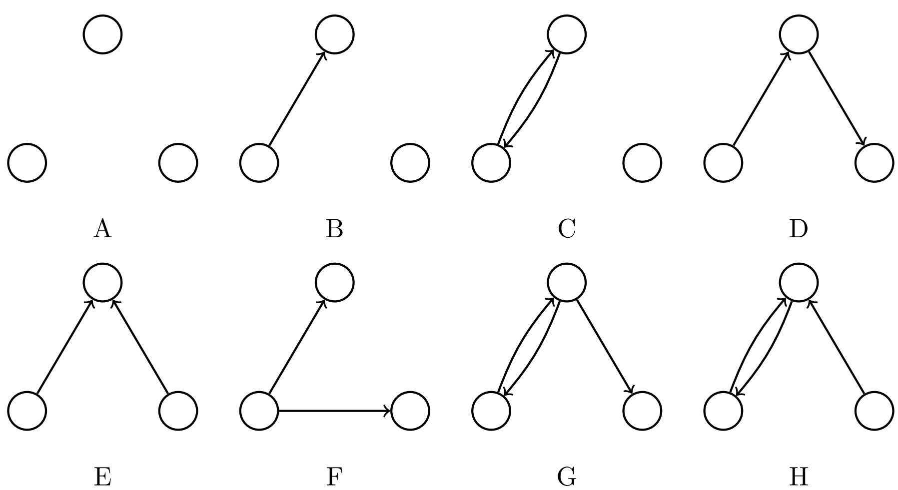
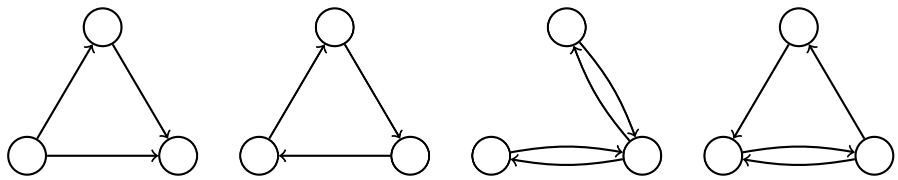
第六章作业题

习题. 画出具有4个顶点的互相不同构的所有无向图（同构的只算一个）。

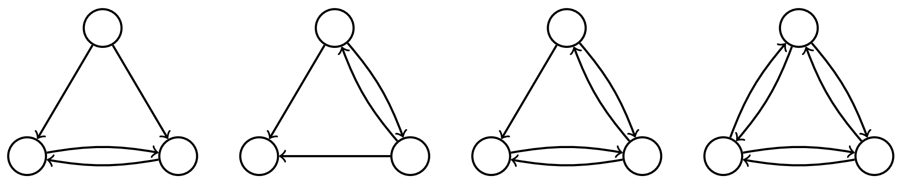


习题. 画出具有3个顶点的所有有向图（同构的只算一个）。



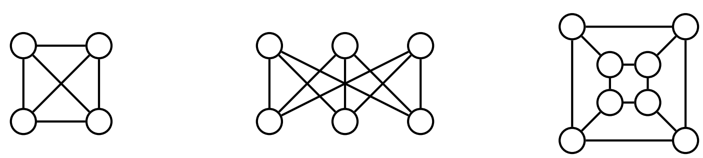


I　　J　　K　　L



M　　N　　O　　P

习题. 画出具有*4*个，*6*个，*8*个顶点的三次图。

解. 

□

习题. 某次宴会上，许多人互相握手。证明：握过奇数次手的人数为偶数（注意，0是偶数）。

证明. 每个人用一个顶点表示。如果两个人之间握过手，则在他们之间连一条边。在所得到的图中，度为奇数的顶点的数目为偶数，这说明握过奇数次手的人数为偶数。 □

习题. 设u与v为图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答. 设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{(u, v)\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。
如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，则G中有圈；如果$T_1 = uv_1v_2 \ldots v_nv$不是路，设$v_j = v_i (i < j)$为第一个重复的顶点，则$v_iv_{i+1} \ldots v_j$构成$G$中的一个圈；同理，如果$T_2$不是路，$G$中有圈。

□

习题. 证明：一个连通的(p, q)图中$q \geq p - 1$。

证明. 设G为一个连通图，有p个顶点，q条边。如果G中有圈，去掉该圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果所得到的图中还有圈，再去掉该圈上的一条边，得到的图还是连通的。如此进行下去，最后可以得到一个连通无圈的图。假设该连通无圈的图中有q'条边，如果能够证明$q' = p - 1$，则结论得证。

因此，只需证明一个连通无圈的(p,q)图中$q=p-1$即可。设T为一个连通无圈的(p,q)图，以下用数学归纳法证明$q=p-1$。
（证法一）
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p=1$时，$q=0$,结论显然成立。
（2）假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。去掉T中一个度为１的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈。T'有k个顶点，$q-1$条边，由归纳假设，$q-1=k-1$，　从而$q=(k+1)-1$，　即当$p=k+1$时结论也成立。
（证法二）
用数学归纳法证明，施归纳于边数q。
（1）当$q=0$时，$p=1$,结论显然成立。
（2）假设当$q<k$时结论成立，往证当$q=k$时结论也成立。设T有k条边。去掉 T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈。设T_1有p_1个顶点， k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加１，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当$q=k$时结论也成立。 □

习题. 若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明. 用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设其中一个连通分

量的顶点数为 p_1，边数为q_1，所有其他连通分量的顶点数为p_2，边数为q_2。则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(p-1)(p-2)\\
=&\frac{1}{2}(p_1+p_2-1)(p_1+p_2-2)\\
=&\frac{1}{2}(p_1+p_2-1)((p_1-1)+(p_2-1))\\
=&\frac{1}{2}(p_1(p_1-1)+p_1(p_2-1)+p_2(p_1-1)+p_2(p_2-1)-(p_1-1)-(p_2-1))\\
=&\frac{1}{2}(p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)+2(p_1-1)(p_2-1))\\
=&\frac{p_1(p_1-1)}{2}+\frac{p_2(p_2-1)}{2}+(p_1-1)(p_2-1))\\
\geq&\frac{p_1(p_1-1)}{2}+\frac{p_2(p_2-1)}{2}\\
\geq& q
\end{aligned}
$$

矛盾。 □

习题. 设G为图。证明：若$\delta(G)\geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明. 设$P=v_0v_1\ldots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，则$uv_0v_1\ldots v_n$构成了G中一条更长的路，与P为G中的最长路矛盾。取最大的s使得v_0与v_s相邻接，则$C=v_0v_1\ldots v_sv_0$为长度至少为$\delta(G)+1$的圈，这是因为v_0至少与$\delta(G)$个顶点相邻接，而所有这些与v_0邻接的顶点均在圈C中。 □

习题. 证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明. 设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，于是uv为G^c的一条边，从而在G^c中u和v之间存在一条路；如果u和v在G的同一个连通分量中，取G的另外一个连通分量中的一个顶点w，则uw和wv都不是G中的边，从而为G^c中的边，于是uwv构成了G^c中u和v之间的一条路。 □

习题. 证明：每一个自补图有$4n$或$4n+1$个顶点。

证明. 设G为自补图，有p个顶点，则G和G^c共有$p(p-1)/2$条边。由G为自补图知，G和G^c有相同的边数，从而$p(p-1)/2$能被2整除。只有当$p=4n$或$p=4n+1$时，$p(p-1)/2$能被2整除，结论得证。 □

习题. 给出一个10个顶点的非哈密顿图的例子，使得每一对不邻接的顶点u和v，均有$\deg u+\deg v\geq 9$。

解. K_9外再连接一个顶点。 □

习题. 试求K_p中不同的哈密顿圈的个数。

解. $\frac{(p-1)!}{2}$ □

习题. 完全偶图$K_{m,n}$为哈密顿图的充分必要条件是什么?

解. $m = n$。 □

习题. 证明具有奇数个顶点的偶图不是哈密顿图。

证明. 设G为偶图，其顶点即可以划分为两个集合V_1和V_2，使得任意一条边一个顶点在V_1中，一个顶点在V_2中。如果G有奇数个顶点，则$|V_1| \neq |V_2|$。不妨设$|V_1| < |V_2|$，则$\omega(G - V_1) > |V_1|$，从而G不是哈密顿图。 □