

命题：可以判断真假的陈述句。通常，我们用 $T$ 表示真，用 $F$ 表示假。

例.

- 2是偶数。(真命题)
- 北京是中国的首都。(真命题)
- 多伦多是加拿大的首都。(假命题)
- 这句话是假的。(不能判断真假的陈述句，不是命题)

谓词：命题的谓语部分。

例.

$P(x) : x \text{ 是偶数}$  这里 $P$ 为一元谓词，表示“是偶数”。当 $x$ 为某个确定的数字时， $P(x)$ 则对应一个命题。例如 $P(2)$ 为真命题， $P(1)$ 为假命题。这里 $P$ 之所以被称为一元谓词，是因为 $P(x)$ 只包含一个变量 $x$ 。

$P(x, y) : x > y$  这里 $P$ 为二元谓词，表示 $>$ 。当 $x$ 和 $y$ 为确定的数字时， $P(x, y)$ 则对应一个命题。例如 $1 > 0$ 为真命题， $0 > 1$ 为假命题。这里， $P$ 之所以被称为二元谓词，是因为 $P(x, y)$ 包含两个变量 $x$ 和 $y$ 。

相应的，有三元谓词，四元谓词，……

我们还可以用如下方式由谓词得到命题：

$\forall x P(x)$  对任意的 $x$ ， $P(x)$ 。For All中的 $A$ 上下颠倒可以得到 $\forall$ 。

$\exists x P(x)$  存在 $x$ ， $P(x)$ 。There Exists中的 $E$ 左右颠倒可以得到 $\exists$ 。

命题可以由联结词 $\neg$ ， $\wedge$ ， $\vee$ ， $\rightarrow$ ， $\leftrightarrow$ 联结而构成复合命题。

设 $p$ 为命题，则 $\neg p$ 表示“ $p$ 不成立”。

$p$	$\neg p$
T	F
F	T

设 $p$ 和 $q$ 为两个命题，则 $p \wedge q$ 表示“ $p$ 成立，并且 $q$ 成立”。

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

设 $p$ 和 $q$ 为两个命题，则 $p \vee q$ 表示“ $p$ 成立，或者 $q$ 成立”。

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

设 $p$ 和 $q$ 为两个命题，则 $p \rightarrow q$ 表示“如果 $p$ 成立，那么 $q$ 成立”。

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

这里需要注意的是，当 $p$ 为假时，则 $p \rightarrow q$ 一定为真，这是所有数学家共同的约定。下面的例子可以帮助大家更好的理解其实我们已经用到了这个约定。

对任意的实数 $x$ ，当 $x > 1$ 时， $x^2 > 1$ 。该命题显然是真命题，可以符号化为 $\forall x x > 1 \rightarrow x^2 > 1$ 。那么，既然对于任意的 $x$ ， $x > 1 \rightarrow x^2 > 1$ 成立，则

- 1) 当 $x = 2$ 时， $2 > 1 \rightarrow 2^2 > 1$ 成立，这对应于以上真值表的第一行；
- 2) 当 $x = 0$ 时， $0 > 1 \rightarrow 0^2 > 1$ 成立，这对应于以上真值表的第四行；
- 3) 当 $x = -2$ 时， $-2 > 1 \rightarrow (-2)^2 > 1$ 成立，这对应于以上真值表的第三行。

设 $p$ 和 $q$ 为两个命题，则 $p \rightarrow q$ 表示“ $p$ 等价于 $q$ ”。

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

请大家思考，设 $p$ ， $q$ ， $r$ 为命题，则 $(p \vee q) \wedge r$ 所代表的命题的含义是什么？ $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ 所代表的命题的含义是什么？这两个命题是等价的吗？我们可以通过枚举 $p, q, r$ 依次取值为 $T$ 和 $F$ 时， $(p \vee q) \wedge r$ 和 $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ 同时取值为 $T$ 或 $F$ ，从而验证这两个命题是等价的，如下所示：

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F
T	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

用同样的方法我们可以验证：

$(p \wedge q) \vee r$ 与 $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ 是等价的。

p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

$\neg(p \wedge q)$ 与 $\neg p \vee \neg q$ 是等价的。

$p$	$q$	$r$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\neg(p \vee q)$ 与 $\neg p \wedge \neg q$ 是等价的。

$p$	$q$	$r$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T