

定理. 设 $D = (V, A)$ 为一个有 p 个顶点 q 条弧的图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $p \times p$ 矩阵 B 为 D 的邻接矩阵, 则 D 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 B^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(B^{k+1})_{ij} = (B^k B)_{ij} = \sum_{h=1}^p (B^k)_{ih} B_{hj}$$

由归纳假设, $(B^k)_{ih}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_h 长度为 k 的通道的条数。

由从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 的通道的条数为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k+1$ 且倒数第二个顶点依次为 v_1, v_2, \dots, v_p 的通道的条数之和知 $(B^{k+1})_{ij}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 的通道的条数。 \square