习题. 设$f: X \to Y$。

*(1)*如果存在唯一的一个映射$g: Y \to X$，使得$gf = I_X$，那么f是否可逆呢?

*(2)*如果存在唯一的一个映射$g: Y \to X$，使得$fg = I_Y$，那么f是否可逆呢?

解. (1)f不一定可逆，举例如下：

设集合$X = \{1\}$，$Y = \{1, 2\}$，$f: X \to Y$，$f(1) = 1$。则存在唯一的一个映射$g: Y \to X$，$g(1) = 1, g(2) = 1$,使得$gf = I_X$，但f不可逆。

(2)f一定可逆，证明如下：

由$fg = I_Y$知f为满射。以下证明f为单射。用反证法，假设f不为单射，则存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$但$f(x_1) = f(x_2)$。

设$y_0 = f(x_1) = f(x_2)$，则$g(y_0) \neq x_1$或者$g(y_0) \neq x_2$。

令$h: Y \to X$，

$$h(y) = \begin{cases} g(y) & \text{如果} y \neq y_0, \\ x_1 & \text{如果} y = y_0 \text{且} g(y_0) \neq x_1 \\ x_2 & \text{如果} y = y_0 \text{且} g(y_0) \neq x_2 \end{cases}$$

则$fh = I_Y$，且$h \neq g$，与存在唯一的一个映射$g: Y \to X$，使得$fg = I_Y$，矛盾。 □