

# 离散数学讲义

陈建文

March 18, 2020

课程学习目标:

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

学习方法:

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

授课教师QQ: 2129002650

# 第三章 关系

**定义3.1.** 设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 $R$ ，称为从 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $T$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $F$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

**例.** 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 $2^X$ 上的二元关系 $\subseteq$ 可以定义为一个从 $2^X \times 2^X$ 到 $\{T, F\}$ 的映射，

$$\begin{aligned} & \subseteq (\{\phi\}, \{\phi\}) = T, \subseteq (\{\phi\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{\phi\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{\phi\}, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{1\}, \{\phi\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{2\}, \{\phi\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{2\}, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{1, 2\}, \{\phi\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\}) = T \end{aligned}$$

**定义3.2.** 设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。 $A \times B$ 的任一子集 $R$ 称为从 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。如果 $(a, b) \in R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b) \notin R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，并记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

**例.** 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 $2^X$ 上的二元关系 $\subseteq$ 可以定义为 $2^X \times 2^X$ 的一个子集，

$$\begin{aligned} \subseteq = & \{(\{\phi\}, \{\phi\}), (\{\phi\}, \{1\}), (\{\phi\}, \{2\}), (\{\phi\}, \{1, 2\}), \\ & (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), \\ & (\{1, 2\}, \{1, 2\})\} \end{aligned}$$

**例.** 自然数集 $\mathbb{N}$ 上的小于等于关系“ $\leq$ ”为 $\mathbb{N}$ 上的一个二元关系。

**例.** 设 $n$ 为任一给定的自然数。对任意的两个整数 $m, k$ ，如果 $m - k$ 能被 $n$ 整除，则称 $m$ 与 $k$ 为模 $n$ 同余，并记为 $m \equiv k \pmod{n}$ 。显然， $m \equiv k \pmod{n}$ 当且仅当 $m$ 被 $n$ 除所得到的余数与 $k$ 被 $n$ 除所得到的余数相等。模 $n$ 同余为 $\mathbb{Z}$ 上的一个二元关系。

**定义3.3.** 设 $R \subseteq A \times B$ ，集合

$$\{x \in A \mid \exists y \in B \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的定义域，记为 $\text{dom}(R)$ ；集合

$$\{y \in B \mid \exists x \in A \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的值域，记为 $\text{ran}(R)$ 。

**定义3.4.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个集合, 一个 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的子集 $R$ 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 间的一个 $n$ 元关系, 每个 $A_i$ 称为 $R$ 的一个域。

**定义3.5.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为自反的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $xRx$ 。

**例.** 判断下列二元关系是否为自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (不是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (不是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义3.6.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为反自反的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $(x, x) \notin R$ 。

**例.** 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)

**定义3.7.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为对称的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ , 只要 $xRy$ 就有 $yRx$ 。

判断下列二元关系是否为对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (不是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (不是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义3.8.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为反对称的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ ,  $xRy$ 且 $yRx$ , 则 $x = y$ 。

**例.** 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (是)

2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义3.9.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ , 只要 $xRy$ 且 $yRz$ , 就有 $xRz$ 。

**例.** 判断下列二元关系是否为传递的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义3.10.** 设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ 的二元关系,  $R$ 的逆 $R^{-1}$ 定义为从集合 $B$ 到集合 $A$ 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

**定理3.1.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

**定义3.11.** 设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ,  $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

**定理3.2.** 设 $R_1, R_2, R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

**定理3.3.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系, 则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

**定义3.12.** 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为一个包含 $m$ 个元素的集合,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为一个包含 $n$ 个元素的集合。令 $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的一个二元关系。由 $R$ 定义一个 $m \times n$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 如下:  $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵 $B$ 称为关系 $R$ 的矩阵。

**例.** 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{a, b, c, d, e\}$ , 从  $X$  到  $Y$  的关系

$$S = \{(1, a), (2, b), (2, d), (2, e), (3, a), (3, b), (3, d), (3, e), (4, c), (4, d)\}$$

, 则  $S$  的关系矩阵为?

**例.** 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$ , 则  $R$  的关系矩阵为?

**定理3.4.** 设  $B$  为集合  $X$  上二元关系  $R$  的矩阵, 则

1.  $R$  为自反的, 当且仅当  $B$  的对角线上的全部元素都为 1;
2.  $R$  为反自反的, 当且仅当  $B$  的对角线上的全部元素都为 0;
3.  $R$  为对称的, 当且仅当  $B$  为对称矩阵;
4.  $R$  为反对称的, 当且仅当  $i \neq j$  时  $b_{ij}$  与  $b_{ji}$  不同时为 1;
5.  $R$  为传递的, 当且仅当如果  $b_{ij} = 1$  且  $b_{jk} = 1$ , 则  $b_{ik} = 1$ 。

关系除了用矩阵表示外, 还可以用图来表示。设  $X$  和  $Y$  为有穷集合,  $R$  为从  $X$  到  $Y$  的二元关系。当用图表示  $R$  时, 先把  $X$  与  $Y$  的元素在纸上用点表示, 并在其旁边标上这个元素的名字。然后把  $R$  的任一序对  $(x, y)$  用从代表  $x$  的点画一条指向代表  $y$  的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”, 称为关系  $R$  的图。注意, 如果  $(x, x) \in R$ , 则在代表  $x$  的点画一条又指向此点的矢线, 称为环。

**定理3.5.** 设  $R$  为集合  $X$  上的二元关系, 则

1.  $R$  为自反的, 当且仅当  $R$  的图的每个顶点均有一个环;
2.  $R$  为反自反的, 当且仅当  $R$  的图中没有环;
3.  $R$  为对称的, 当且仅当  $R$  的图中任意两个不同顶点间有矢线, 则必有两条方向相反的矢线;
4.  $R$  为反对称的, 当且仅当  $R$  的图中任意两个不同顶点间有矢线, 则不能有两方向相反的矢线;
5.  $R$  为传递的, 当且仅当如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点, 则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

**定理3.6.** 设  $B$  为集合  $X$  上二元关系  $R$  的矩阵, 则  $R^{-1}$  的矩阵为  $B^T$ 。

**定义3.13.** 设  $B, C$  是两个布尔矩阵,  $B$  与  $C$  的逻辑乘为  $B$  与  $C$  的对应元素进行逻辑乘, 所得到的布尔矩阵记为  $B \wedge C$ , 即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

$B$  与  $C$  的逻辑加为  $B$  与  $C$  的对应元素进行逻辑加, 所得到的布尔矩阵记为  $B \vee C$ , 即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

**定理3.7.** 设 $R, S$ 为从集合 $X$ 到集合 $Y$ 的二元关系, 其矩阵分别为 $B_R$ 和 $B_S$ 。  $R \cup S$  与  $R \cap S$ 的矩阵分别为 $B_{R \cup S}, B_{R \cap S}$ , 则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

**定义3.14.** 设 $A$ 为 $m \times p$ 布尔矩阵,  $B$ 为 $p \times n$ 布尔矩阵,  $A$ 与 $B$ 的布尔乘积 $A \circ B$ 定义为矩阵 $C$ , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\ i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

**定理3.8.** 设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m, |Y| = p, |Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

**定义3.15.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系。  $X$ 上的一切包含 $R$ 的传递关系的交称为 $R$ 的传递闭包, 用 $R^+$ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

**定理3.9.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系, 则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

**定理3.10.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X, b \in X, n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设,  $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x) \in R$ 。记 $x_k = x$ , 则 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X, x_k \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x_k) \in R, (x_k, b) \in R$ 。  $\square$

**定理3.11.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系, 则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

**定理3.12.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明. 只须证明对任一自然数  $k > n$ , 有  $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ . 为此, 设  $(a, b) \in R^k$ , 则存在  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$  使得  $(a, b_1) \in R, (b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ . 记  $b_0 = a, b_k = b$ .  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$  是  $X$  中的  $k$  个元素, 而  $X$  中仅有  $n$  个元素,  $n < k$ , 所以  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$  中必有两个相等的元素. 设  $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ . 于是, 我们有  $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故  $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ . 若  $p_1 = k - (j - i) > n$ , 则重复上述过程又有  $p_2 < p_1$  使得  $(a, b) \in R^{p_2}$ . 如此进行下去, 必有  $m \leq n$  使得  $(a, b) \in R^m$ . 所以,  $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ . 因此,  $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ .  $\square$

**定理3.13.** 设  $R$  为集合  $X$  上的一个二元关系,  $|X| = n$ ,  $B$  为  $R$  的关系矩阵,  $B_{R^+}$  为  $R^+$  的关系矩阵, 简记为  $B^+$ , 则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(n)}$$

以下为计算集合  $X$  上关系  $R$  的传递闭包的算法。

TRANSITIVE-CLOSURE( $B$ )

```
// B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $M = B$ 
2   $A = M$ 
3  for  $i = 2$  to  $n$ 
4       $M = M \circ B$ 
5       $A = A \vee M$ 
6  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 
```

WARSHALL( $B$ )

```
// B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $A = B$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3      for  $i = 1$  to  $n$ 
4          for  $j = 1$  to  $n$ 
5               $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$ 
6  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 
```

WARSHALL( $B$ )

```
// B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $A = B$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3      for  $i = 1$  to  $n$ 
4          if  $a_{ik} == 1$ 
5              for  $j = 1$  to  $n$ 
6                   $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$ 
7  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 
```

**定义3.16.** 集合  $X$  上的二元关系  $R$  称为等价关系, 如果  $R$  同时满足以下三个性质:



1.  $R$ 为自反的, 即对 $X$ 中的任意元素 $x$ ,  $xRx$ ;
2.  $R$ 为对称的, 即对 $X$ 中的任意元素 $x, y$ , 如果 $xRy$ , 则 $yRx$ ;
3.  $R$ 为传递的, 即对 $X$ 中的任意元素 $x, y, z$ , 如果 $xRy$ 且 $yRz$ , 则 $xRz$ 。

**例.** 整数集 $\mathbb{Z}$ 上的模 $n$ 同余关系为 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系。

**例.** 设集合 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ 上的关系 $R$ 定义如下:

$$R = \{(a, a), (a, c), (a, e), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (c, e), (d, b), (d, d), (e, a), (e, c), (e, e), (f, f)\},$$

则 $R$ 为 $X$ 上的等价关系。

**定义3.17.** 设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系,  $x \in X$ ,  $X$ 的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为 $x$ 关于 $\cong$ 的等价类, 记为 $[x]$ , 即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

**定义3.18.** 设 $X$ 为集合,  $X$ 的一些非空子集形成的集族 $\mathcal{A}$ 称为 $X$ 的一个划分, 如果 $\mathcal{A}$ 具有性质

1.  $\forall A, B \in \mathcal{A}$ , 如果 $A \neq B$ , 则 $A \cap B = \phi$ ;
2.  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$

**定理3.14.** 设 $X$ 为一个集合,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \{\cong \subseteq X \times X | \cong \text{为集合 } X \text{ 上的一个等价关系}\}, \\ \mathbb{A} &= \{\mathcal{A} \subseteq 2^X | \mathcal{A} \text{为集合 } X \text{ 的一个划分}\}, \\ f &= \{(\cong, \{[x]_{\cong} | x \in X\}) | \cong \in \mathbb{R}, [x]_{\cong} = \{y \in X | x \cong y\}\}, \\ g &= \{(\mathcal{A}, \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A) | \mathcal{A} \in \mathbb{A}\} \end{aligned}$$

则 $f$ 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{A}$ 的双射, 且 $f^{-1} = g$ 。

**证明.** 1. 证明 $f$ 为映射。这就是要证明对于集合 $X$ 上的任意一个等价关系 $\cong$ ,  $\{[x]_{\cong} | x \in X\}$ 为集合 $X$ 的一个划分。

2. 证明 $g$ 为映射。这就是要证明对于集合 $X$ 的任意一个划分 $\mathcal{A}$ ,  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系。

3. 证明 $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ 。这就是要证明对于集合 $X$ 上的任意一个等价关系 $\cong$ ,  $\bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$ 。

4. 证明  $f \circ g = I_A$ 。这就是要证明对于集合  $X$  上的任意一个划分  $\mathcal{A}$ ，等价关系  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  所对应的等价类的集合就是  $\mathcal{A}$ 。

□

**定义3.19.** 集合  $X$  上的二元关系  $R$  称为偏序关系，如果  $R$  同时满足以下三个性质：

1.  $R$  为自反的，即对  $X$  中的任意元素  $x$ ， $xRx$ ；
2.  $R$  为反对称的，即对  $X$  中的任意元素  $x, y$ ，如果  $xRy$  且  $yRx$ ，则  $x = y$ ；
3.  $R$  为传递的，即对  $X$  中的任意元素  $x, y, z$ ，如果  $xRy$  且  $yRz$ ，则  $xRz$ 。

**定义3.20.** 设  $\leq$  为集合  $X$  上的一个偏序关系，则称二元组  $(X, \leq)$  为一个偏序集。

**例.** 实数集  $\mathbb{R}$  上通常的“小于等于”关系  $\leq$  为一个偏序关系，所以  $(\mathbb{R}, \leq)$  为一个偏序集。

**例.** 设  $S$  为一个集合， $S$  的子集间的包含关系  $\subseteq$  为  $2^S$  上的一个偏序关系，所以  $(2^S, \subseteq)$  为一个偏序集。

**例.** 设集合  $X = \{a, b, c, d\}$  上的关系  $R$  定义如下：

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则  $R$  为  $X$  上的偏序关系。

**定义3.21.** 设  $\leq$  为集合  $X$  上的偏序关系，如果  $\forall x, y \in X$ ， $x \leq y$  与  $y \leq x$  至少有一个成立，则称  $\leq$  为  $X$  上的全序关系。相应的，二元组  $(X, \leq)$  称为全序集。

**定义3.22.** 设  $(X, \leq)$  为一个偏序集， $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素  $s \in A$  使得  $\forall x \in A$  有  $x \leq s$ ，则称  $s$  为  $A$  的最大元素；如果存在一个元素  $t \in A$  使得  $\forall x \in A$  有  $t \leq x$ ，则称  $t$  为  $A$  的最小元素。

**定义3.23.** 设  $(X, \leq)$  为一个偏序集， $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素  $s \in A$ ，在  $A$  中没有元素  $x$  使得  $s < x$ ，则称  $s$  为  $A$  的极大元素；如果存在一个元素  $t \in A$ ，在  $A$  中没有元素  $x$  使得  $x < t$ ，则称  $t$  为  $A$  的极小元素。

**定义3.24.** 设  $(X, \leq)$  为一个偏序集， $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素  $s \in X$  使得  $\forall x \in A$  有  $x \leq s$ ，则称  $s$  为  $A$  的一个上界；如果存在一个元素  $t \in X$  使得  $\forall x \in A$  有  $t \leq x$ ，则称  $t$  为  $A$  的一个下界。

**定义3.25.** 设  $(X, \leq)$  为一个偏序集， $A \subseteq X$ 。如果  $A$  有上界且  $A$  的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为  $A$  的上确界，记为  $\sup A$ ；如果  $A$  有下界且  $A$  的一切下界之集有最大元素，则这个最大下界称为  $A$  的下确界，记为  $\inf A$ 。

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ，则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$

$$3. 0 + x = x + 0 = x$$

$$4. (-x) + x = x + (-x) = 0$$

$$5. x * y = y * x$$

$$6. (x * y) * z = x * (y * z)$$

$$7. 1 * x = x * 1 = x$$

$$8. \forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \rightarrow x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$$

$$9. x * (y + z) = x * y + x * z$$

$$10. (y + z) * x = y * x + z * x$$

$$11. x \leq x$$

$$12. x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$$

$$13. x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$$

$$14. x \leq y \vee y \leq x$$

$$15. x > y \rightarrow x + z > y + z$$

$$16. x > y \wedge z > 0 \rightarrow x * z > y * z$$

$$17. \forall A \subseteq \mathbb{R} (A \neq \emptyset \wedge \exists x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x)) \rightarrow \exists z \in R ((\forall y \in A (y \leq z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x) \rightarrow z \leq x))))$$

**练习3.1.** 是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系？

**练习3.2.** 实数集上的“小于”关系 $<$ 是否为反自反的？集合 $X$ 的幂集 $2^X$ 上的“真包含”关系 $\subset$ 是否为反自反的？为什么？

**练习3.3.** 下列说法是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请说明理由。

1) 设 $R$ 为集合 $X$ 上的反自反的和传递的二元关系，则 $R$ 为反对称的二元关系。

2) 设 $R$ 为集合 $X$ 上的对称的和传递的二元关系，则 $R$ 为自反的二元关系。

**练习3.4.** 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$ 当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明 $\cong$ 为 $S$ 上的等价关系，并求出等价类之集。

**练习3.5.** 设 $X, Y, S$ 同习题3.4。  $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$ 当且仅当

$$f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$$

证明 $\cong$ 为 $S$ 上的等价关系，并求出等价类之集。

**练习3.6.** 设 $X, Y, S$ 同习题3.4。 $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下:  $\forall f, g \in S, f \cong g$ 当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$$

证明 $\cong$ 为 $S$ 上的等价关系, 并求出等价类之集。

**练习3.7.** 是否存在一个偏序关系 $\leq$ , 使 $(X, \leq)$ 中有唯一极大元素, 但没有最大元素? 如果有, 请给出一个具体例子; 如果没有, 请证明之。

**练习3.8.** 令 $X = \{a, b, c, d\}$ , 画出偏序集 $(2^X, \subseteq)$ 的Hasse图。

**练习3.9.** 令 $S = \{1, 2, \dots, 12\}$ , 画出偏序集 $(S, |)$ 的Hasse图, 其中 $|$ 为整除关系。它有几个极大(小)元素? 列出这些极大(小)元素。

**练习3.10.** 偏序集 $(X, \leq)$ 称为有序完备的, 当且仅当 $X$ 的每个有上界的非空子集有上确界。证明: 偏序集 $(X, \leq)$ 为有序完备的当且仅当对 $X$ 的每个有下界的非空子集有下确界。

## 第 四 章