习题 (295-6)**.** 证明：如果图G的任意两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明. 用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。

设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;同理，由$V_3 \cup V_4 \cup V_6$导出的子图G_2中存在一个奇数长的圈C_2。C_1和C_2没有公共顶点，矛盾。 $\square$