离散数学讲义

陈建文

April 1, 2020

课程学习目标：

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

学习方法：

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

授课教师QQ：2129002650

第 四 章　无穷集合

定义4.1. 如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义4.2. 如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f:\mathbb{N} \to X$，则称集合X为可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

定理4.1. 集合A为可数集的充分必要条件为A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$$

因此，A可写成$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$。

定理4.2. 设A为可数集合，B为有穷集合，则$A \cup B$为可数集。

定理4.3. 设A与B为两个可数集，则$A \cup B$为可数集。

定理4.4. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$为可数集。即可数多个可数集之并为可数集。

定理4.5. 设A与B为两个可数集，则$A \times B$为可数集。

定理4.6. 全体有理数之集$\mathbb{Q}$为可数集。

定理4.7. 区间$[0,1]$中的所有实数构成的集合为不可数集。

定义4.3. 凡与集合$[0,1]$存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

定理4.8. 无穷集合必包含有可数子集。

定理4.9. 设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

证明. 因为M为一个无穷集合，所以M中必有一个可数子集D。令$P = M \setminus D$，则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup (A \setminus P))$$

由$P \sim P$，$D \sim D \cup (A \setminus P)$，得到$M \sim M \cup A$。 □

定理4.10. 设M为无穷集合，A为M的至多可数子集，$M \setminus A$为无穷集合，则$M \sim M \setminus A$。

定理4.11. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个两两不相交的连续统，则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$为连续统。

定理4.12. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1], k = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

推论4.1. 全体实数之集是一个连续统。

推论4.2. 全体无理数之集是一个连续统。

定义4.4. 集合A的基数为一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

定义4.5. 所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的基数。

定义4.6. 集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，当且仅当$A \sim B$。

定义4.7. 设α，β为任意两个基数，A,B为分别以α，β为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称基数α小于基数β，记为$\alpha < \beta$。

显然，$\alpha \leq \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$。
$\alpha < \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$且不存在A到B的双射。

定理4.13 (康托)**.** 对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明. 令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq M$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，$x_0 \in X$与$x_0 \notin X$都引出矛盾，从而不存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$。因此，f不为满射，从而

$$|M| < |2^M|$$

□

定理4.14 (康托-伯恩斯坦)**.** 设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则A与B的基数相等。

证明. 设$f : A \to B$和$g : B \to A$都为单射。令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,故$\psi(D) \in \mathbb{D}$，因此，$\psi(D) \subseteq D$，所以

$$D = \psi(D) = A \setminus (B \setminus f(D))$$

令$h : A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果} x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果} x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中g^{-1}为视g为B到$g(B)$的一一对应时g的逆，易见h为一一对应。所以A与B的基数相等。 $\square$

。

刻画集合的ZFC公理系统（Zermelo-Fraenkel-Choice axioms of set theory）：

公理4.1 (外延公理)**.**

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$$

公理4.2 (空集公理)**.**

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理4.3 (对公理)**.**

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理4.4 (并集公理)**.**

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

公理4.5 (幂集公理)**.**

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理4.6 (子集公理)**.**

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理4.7 (无穷公理)**.**

$$\exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A)$$
$$\text{其中} a^+ = a \cup \{a\}$$

公理4.8 (代换公理)**.**

$$\begin{aligned} \forall A ((\forall x \in A) \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y2) \to y_1 = y_2) \\ \to \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) \varphi(x, y))) \end{aligned}$$

公理4.9 (正则公理)**.**

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

公理4.10 (选择公理)**.**

$$(\forall relationR)(\exists functionF)(F \subseteq R \wedge domF = domR)$$

刻画自然数的Peano公理系统:

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. $n \in \mathbb{N} \to n++ \in \mathbb{N}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} n++ \neq 0$;
4. $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} n \neq m \to n++ \neq m++$;
5. $(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} p(n) \to p(n++)) \to \forall n p(n)$。

刻画实数的公理系统:
设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \to x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$
11. $x \leq x$
12. $x \leq y \wedge y \leq x \to x = y$
13. $x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z$
14. $x \leq y \vee y \leq x$
15. $x > y \to x + z > y + z$
16. $x > y \wedge z > 0 \to x * z > y * z$
17. $\forall A \subseteq \mathbb{R}(A \neq \phi \wedge \exists x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \leq x)) \to \exists z \in R((\forall y \in A(y \leq z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \leq x) \to z \leq x))))$

第 五 章