

习题. 设 G 为一个有 k 个支的平面图。如果 G 的顶点数、边数、面数分别为 p , q 和 f , 试证:

$$p - q + f = k + 1$$

证明. 设 G 的的 k 个支分别为 G_1, G_2, \dots, G_k , 其中 G_i 有 p_i 个顶点, q_i 条边, f_i 个面 ($1 \leq i \leq k$)。

由欧拉公式知,

$$p_1 - q_1 + f_1 = 2$$

$$p_2 - q_2 + f_2 = 2$$

$$\dots$$

$$p_k - q_k + f_k = 2$$

以上各式相加得:

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_k) - (q_1 + q_2 + \dots + q_k) + (f_1 + f_2 + \dots + f_k) = 2k$$

由 G 只有一个外部面知

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = f + (k - 1)$$

从而

$$p - q + f + (k - 1) = 2k$$

即

$$p - q + f = k + 1$$

□