习题讲解

陈建文

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n = k (k \geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n = k + 1$时$P(n)$也成立。 $\square$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。
(1)当$n=0$时$P(n)$成立。
(2)假设当$n=k(k\geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n=k+1$时$P(n)$也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n = k (k \geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n = k + 1$时$P(n)$也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

(2)$P(k) \to P(k + 1)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n=k(k\geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n=k+1$时$P(n)$也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

(2)$P(k)\rightarrow P(k+1)$

$P(0)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n=k(k\geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n=k+1$时$P(n)$也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

(2)$P(k)\rightarrow P(k+1)$

$P(0)$ $P(1)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n=k(k\geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n=k+1$时$P(n)$也成立。 □

(1)$P(0)$

(2)$P(k)\rightarrow P(k+1)$

$P(0)$ $P(1)$ $P(2)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。
(1)当$n=0$时$P(n)$成立。
(2)假设当$n=k(k \geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n=k+1$时$P(n)$也成立。 $\square$

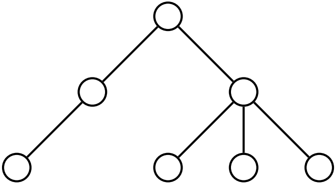
(1)$P(0)$
(2)$P(k) \rightarrow P(k+1)$
$P(0)\ P(1)\ P(2)\ \cdots$

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

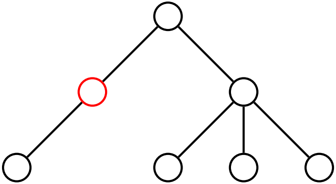
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



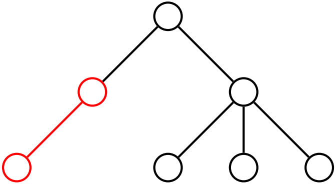
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



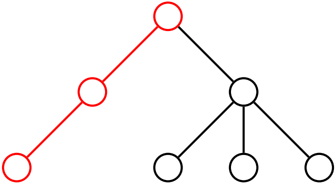
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



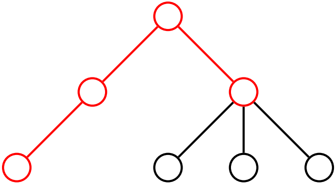
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



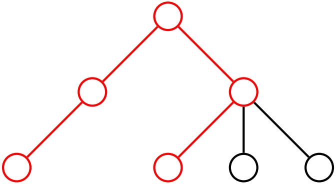
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



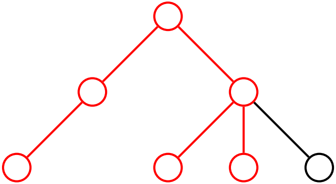
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



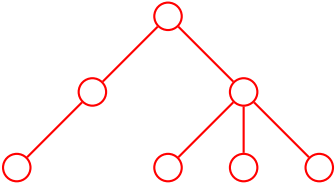
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k + 1$个顶点。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q=p-1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，$q=0$,结论显然成立。

（2）假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为1。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k + 1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为1。去掉T中一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，则T'是树。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k + 1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。去掉T中一个度为１的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，则T'是树。T'有k个顶点，$q - 1$条边，由归纳假设，$q - 1 = k - 1$，从而$q = (k + 1) - 1$，　即当$p = k + 1$时结论也成立。 □

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。
(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。
(2)假设当$n < k (k \geq 2)$时$P(n)$成立，往证当$n = k$时结论也成立。 $\square$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n<k(k\geq 2)$时$P(n)$成立，往证当$n=k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n<k(k\geq 2)$时$P(n)$成立，往证当$n=k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

(2)$(\forall n<k P(n))\rightarrow P(k)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n<k(k\geq 2)$时$P(n)$成立，往证当$n=k$时结论也成立。 □

(1)$P(0)$

(2)$(\forall n<kP(n))\to P(k)$

$P(0)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n<k(k\geq 2)$时$P(n)$成立，往证当$n=k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

(2)$(\forall n<kP(n))\rightarrow P(k)$

$P(0)$ $P(1)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。
(1)当$n=0$时$P(n)$成立。
(2)假设当$n<k(k\geq 2)$时$P(n)$成立，往证当$n=k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$
(2)$(\forall n<kP(n))\rightarrow P(k)$
$P(0)$ $P(1)$ $P(2)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n < k (k \geq 2)$时$P(n)$成立，往证当$n = k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

(2)$(\forall n < k P(n)) \rightarrow P(k)$

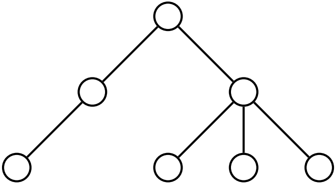
$P(0)\ P(1)\ P(2)\ \cdots$

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

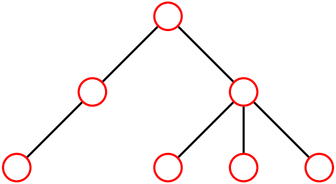
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



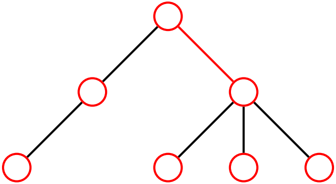
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



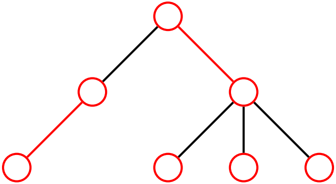
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



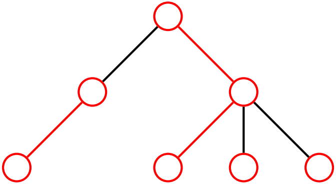
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



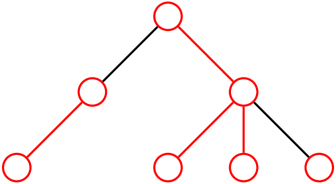
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



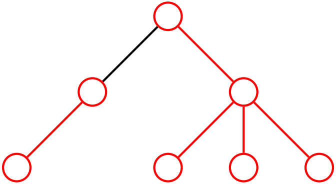
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



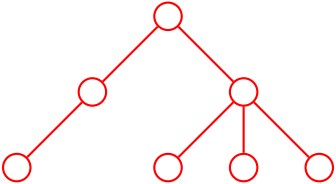
定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。
（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。
（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加１，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

定理

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。
（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。
（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加１，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当$q = k$时结论也成立。 □

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k (k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k (k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}$，$a_k - 1$。

习题

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}$，$a_k - 1$。在其度为$a_k - 1$的顶点上联结一条边和一个顶点，便得到了一棵具有$k+1$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k+1}$。 □

241131211

241131211
24113111

241131211
24113111
2411211

241131211
24113111
2411211
241111

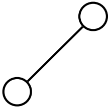
241131211
24113111
2411211
241111
23111

241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211

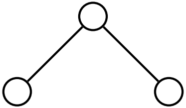
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211

241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11

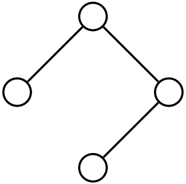
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



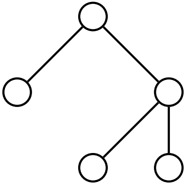
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



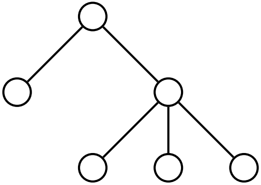
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



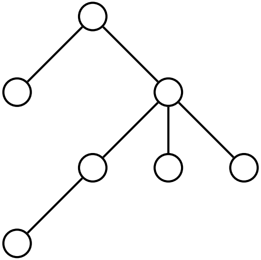
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



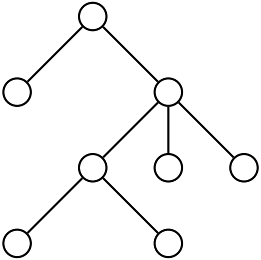
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11