

习题. 如果 G 为顶点数 $p \geq 11$ 的可平面图, 试证 G^c 不是可平面图。

证明. 用反证法, 假设 G^c 也是可平面图。设 G 有 q 条边, 由 G 为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

设 G^c 有 q_1 条边, 由 G^c 为有 p 个顶点的可平面图知

$$q_1 \leq 3p - 6$$

于是

$$q + q_1 \leq 6p - 12$$

即

$$\frac{p(p-1)}{2} \leq 6p - 12$$

$$p^2 - p \leq 12p - 24$$

$$p^2 - 13p + 24 \leq 0$$

当 $p \geq 11$ 时,

$$\begin{aligned} & p^2 - 13p + 24 \\ &= \left(p - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} + 24 \\ &\geq \left(11 - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} + 24 \\ &= \frac{81}{4} - \frac{169}{4} + 24 \\ &= 2 \geq 0 \end{aligned}$$

矛盾。

□