

习题. 连通图 G 的直径 $d(G)$ 是数 $\max_{u,v \in V} d(u,v)$, 证明: 如果 G 有大于3的直径, 则 G^c 的直径小于3。

证明. 设 G 有大于3的直径, 以下证明 G^c 的直径小于3, 这就是要证明对 G^c 的任意两个顶点 u 和 v , u 和 v 在 G^c 中的距离小于等于2。设 u 和 v 为 G 的任意两个顶点, 如果 u 和 v 在 G^c 中邻接, 则显然 u 和 v 在 G^c 中的距离小于等于2; 如果 u 和 v 在 G^c 中不邻接, 以下证明在 G^c 中存在 w , 使得 w 和 u 在 G^c 中邻接并且 w 和 v 在 G^c 中邻接, 从而证明了在 G^c 中 u 和 v 之间的距离小于等于2。用反证法, 假设在 G^c 中, 对任意的顶点 w , w 和 u 在 G^c 中不邻接, 或者 w 和 v 在 G^c 中不邻接。于是, 在 G 中, u 和 v 邻接, 并且对任意的顶点 w , w 和 u 邻接, 或者 w 和 v 邻接。此时易验证, 对于 G 中的任意两个顶点 w_1 和 w_2 , w_1 和 w_2 在 G 中的距离小于等于3, 与 G 有大于3的直径矛盾。□