习题. 设R，S为集合X上的等价关系。如果$R \circ S$为等价关系，则$(R \cup S)^{+} \subseteq R \circ S$。

证明. 对任意的$a \in X, c \in X$，由$(a, c) \in (R \cup S)^{+}$，往证$(a, c) \in R \circ S$。

对任意的$a \in X, c \in X$，如果$(a, c) \in (R \cup S)^{+}$，则存在自然数$n$，$n \geq 1$，$(a, c) \in (R \cup S)^{n}$。

以下用数学归纳法证明，对任意的自然数n，$n \geq 1$，$(R \cup S)^{n} \subseteq R \circ S$。

(1)当$n = 1$时，对任意的$a \in X, c \in X$，如果$(a, c) \in R \cup S$，则$(a, c) \in R$或者$(a, c) \in S$。如果$(a, c) \in R$，此时由S为等价关系知$(c, c) \in S$，从而$(a, c) \in R \circ S$；　如果$(a, c) \in S$，此时由R为等价关系知$(a, a) \in R$，从而$(a, c) \in R \circ S$。

(2)假设当$n = k (k \geq 1)$时结论成立，往证当$n = k + 1$时结论也成立。

由R,S,$R \circ S$都为X上的等价关系知，$S \circ R = S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1} = R \circ S$。

对任意的$a \in X, c \in X$，如果$(a, c) \in (R \cup S)^{k+1} = (R \cup S)^{k} \circ (R \cup S)$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in (R \cup S)^{k}$并且$(b, c) \in (R \cup S)$。由归纳假设，$(a, b) \in R \circ S$。如果$(b, c) \in R$，那么$(a, c) \in (R \circ S) \circ R = R \circ (S \circ R) = R \circ (R \circ S) = (R \circ R) \circ S = R^{2} \circ S \subseteq R \circ S$；如果$(b, c) \in S$，那么$(a, c) \in (R \circ S) \circ S = R \circ (S \circ S) = R \circ S^{2} \subseteq R \circ S$。

□