习题. 证明：唯一没有三角形的$(p,[\frac{p^2}{4}])$图为$K(\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,\lceil\frac{p}{2}\rceil)$。

证法一. 用数学归纳法证明以下结论：唯一没有三角形的包含p个顶点且边数$q\geq[\frac{p^2}{4}]$的图一定为$K(\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,\lceil\frac{p}{2}\rceil)$。施归纳于顶点数$p$，只证$p$为奇数的情况，$p$为偶数的情况是类似的。

1) 当$p=1$时，唯一没有三角形的包含一个顶点且边数$q\geq 0$的图一定为$K(0,1)$，结论显然成立。（注：我们把$(1,0)$图也称为偶图，并记为$K(0,1)$或$K(1,0)$）。

2)假设当$p=2k-1(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=2k+1$时结论也成立。设G为一个没有三角形，顶点数$p=2k+1$，边数$q\geq[\frac{p^2}{4}]$的图。显然，G中至少有两个邻接的顶点u和v。图$G'=G-\{u\}-\{v\}$中没有三角形，有$2k-1$个顶点。因为G中没有三角形，如果u与G'的x个顶点邻接，则v至多能与G'中剩余的$2k-1-x$个顶点邻接，于是G'中的边数

$$
\begin{aligned}
q' &\geq q-x-(2k-1-x)-1\\
&\geq [\frac{(2k+1)^2}{4}]-2k\\
&= k^2-k\\
&= [\frac{(2k-1)^2}{4}]
\end{aligned}
$$

由归纳假设，G'为$K(\lfloor\frac{2k-1}{2}\rfloor,\lceil\frac{2k-1}{2}\rceil)$，即$K(k-1,k)$。以下证明$G$必为$K(k,k+1)$。假设偶图$G'$的顶点集有一个二划分为$\{V_1,V_2\}$，使得$G'$的任意一条边的两个端点一个在$V_1$中，一个在$V_2$中，$|V_1|=k-1$，$|V_2|=k$。由$G$中没有三角形知$V_1$和$V_2$中的每个顶点在$G$中至多与顶点$u$和顶点$v$中的一个邻接。另外，$V_1$和$V_2$中的每个顶点在$G$中必与顶点$u$和顶点$v$中的一个邻接，否则，$G$中的边数$q<(k-1)k+(2k-1)+1=k^2+k=[\frac{(2k+1)^2}{4}]$，矛盾。不妨设在$G$中$V_2$中的某个顶点与$v$相邻接，由$G$中没有三角形知$v$不能与$V_1$中的顶点相邻接，从而$u$与$V_1$中每个顶点相邻接，$v$与$V_2$中的每个顶点相邻接。这证明了$G$为$K(k,k+1)$。

□

证法二. 我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含p个顶点且边数$q\geq[\frac{p^2}{4}]$的图一定为$K(\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,\lceil\frac{p}{2}\rceil)$。设$G$为一个没有三角形，包含$p$个顶点且边数$q\geq[\frac{p^2}{4}]$的图。设$V$为$G$的顶点集合，$v_0$为$G$中度最大的顶点，$V_1$为所有与$v_0$邻接的顶点构成的集合，$V_2=V\setminus V_1$。以下证明$V_1$中任意两个不同的顶点互相不邻接，$V_2$中任意两个不同的顶点互相不邻接，$|V_1|$和$|V_2|$最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由V_1中的每个顶点都与v_0邻接，G中没有三角形知V_1中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图G'，G'的顶点集为$V_1\cup V_2$，V_1中任意两个不同的顶点互相不邻接，V_2中任意两个不同的顶点互相不邻接，V_1和V_2中的任意两个顶点互相邻接。由v_0为G中度最大的顶点知对任意的$v\in V$，v在G中的度$d(v)$小于等于v在G'中的度$d'(v)$。而一个图中所有顶点的度数之和为边数的两倍，从而G中的边数q小于等于G'中的边数q',即

$$q\leq|V_1||V_2| \tag{1}$$

易验证

$$|V_1||V_2| \leq [\frac{p^2}{4}] \tag{2}$$

由$q \geq [\frac{p^2}{4}]$知(1)式和(2)式中的等号成立。由(1)式中的等号成立知在G中V_1中的每个顶点必与V_2中的每个顶点邻接，再由G中没有三角形知，V_2中任意两个不同的顶点在G中不邻接。由$|V_1| + |V_2| = p$知(2)中的等式成立当且仅当$|V_1|$与$|V_2|$最多相差1。 □