

# 第六章图的基本概念

陈建文

## 6.1 图论的产生与发展史概述



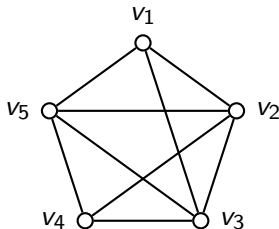
## 6.2 基本定义

设 $V$ 为一个集合， $V$ 的一切二元子集之集合记为 $\mathcal{P}_2(V)$ ，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V \text{ 且 } |A| = 2\}。$$

### 定义2.1

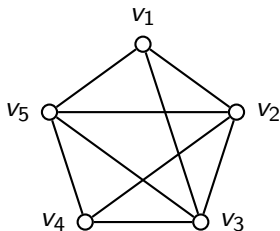
设 $V$ 为一个非空有限集合， $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ ，二元组 $G = (V, E)$ 称为一个**无向图**。 $V$ 中的元素称为无向图 $G$ 的**顶点**， $V$ 为**顶点集**； $E$ 中的元素称为无向图 $G$ 的**边**， $E$ 为**边集**。无向图简称**图**。如果 $|V| = p$ ， $|E| = q$ ，则称 $G$ 为一个 $(p, q)$ 图，即 $G$ 是一个具有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。



## 6.2 基本定义

### 定义2.2

在图  $G = (V, E)$  中, 如果  $\{u, v\} \in E$ , 则称顶点  $u$  与  $v$  邻接; 若  $x$  与  $y$  为图  $G$  的两条边, 并且仅有一个公共端点, 即  $|x \cap y| = 1$ , 则称边  $x$  与  $y$  邻接; 如果  $x = \{u, v\}$  为图  $G$  的一条边, 则称  $u$  与  $x$  互相关联, 同样的, 称  $v$  与  $x$  互相关联。



## 6.2 基本定义

### 定义2.3

如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为**多重图**，这些边称为**多重边**；如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为**带环图**，这些边称为**环**；允许有环或多重边存在的图，称之为**伪图**。

## 6.2 基本定义

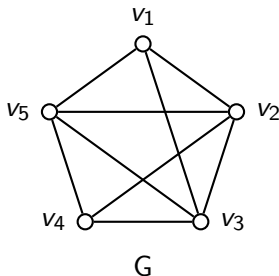
### 定义2.4

设  $G = (V, E)$  为一个图, 如果  $E = \Phi$ , 则称  $G$  为 **零图**;  $(1, 0)$  图称为 **平凡图**。

## 6.2 基本定义

### 定义2.5

设 $v$ 为图 $G = (V, E)$ 的任意一个顶点， $G$ 中与 $v$ 关联的边的数目称为顶点 $v$ 的度，记为 $\deg v$ 。



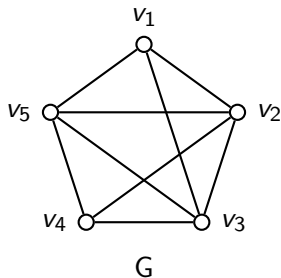




## 6.2 基本定义

### 定理2.2

在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

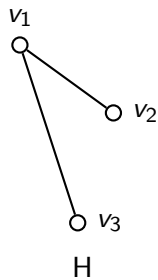
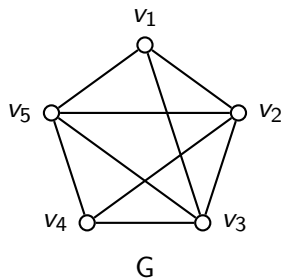


## 6.2 基本定义

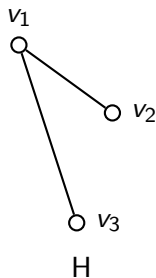
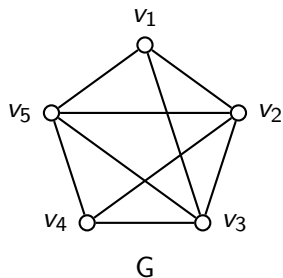
### 定义2.6

图 $G$ 称为 $r$ 度正则图，如果 $G$ 的每个顶点的度都等于 $r$ 。3度正则图也叫三次图。一个具有 $p$ 个顶点的 $p-1$ 度正则图称为包含 $p$ 个顶点的完全图，记为 $K_p$ 。

## 6.2 基本定义



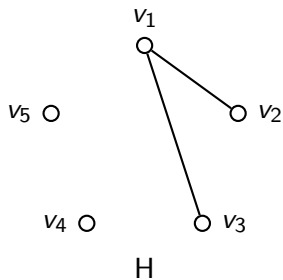
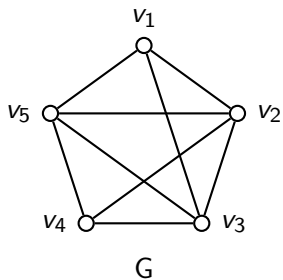
## 6.2 基本定义



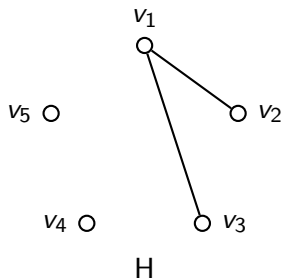
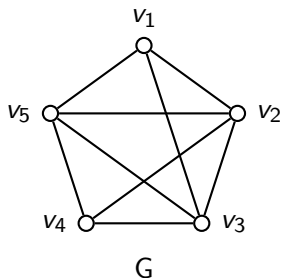
### 定义2.7

设  $G = (V, E)$  为一个图，图  $H = (V_1, E_1)$  称为  $G$  的一个子图，当且仅当  $V_1$  为  $V$  的非空子集且  $E_1$  为  $E$  的子集。如果  $H \neq G$ ，则称  $H$  为  $G$  的**真子图**。

## 6.2 基本定义



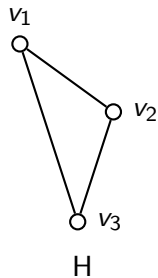
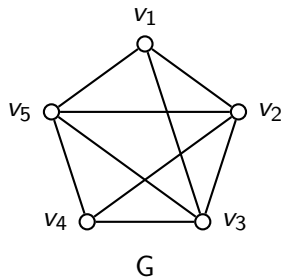
## 6.2 基本定义



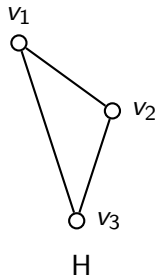
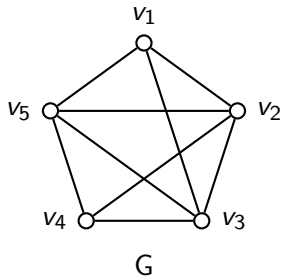
### 定义2.8

设  $G = (V, E)$  为一个图，如果  $F \subseteq E$ ，则称  $G$  的子图  $H = (V, F)$  为  $G$  的一个生成子图。

## 6.2 基本定义



## 6.2 基本定义

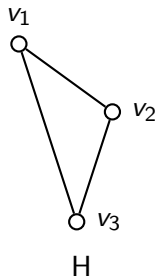
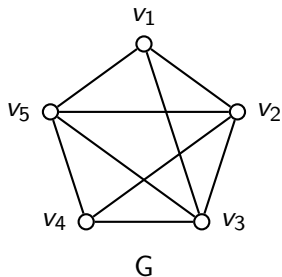


### 定义2.9

设图 $G$ 的子图 $H$ 具有某种性质，若 $G$ 中不存在与 $H$ 不同的具有此性质且包含 $H$ 的子图，则称 $H$ 是具有此性质的**极大子图**。



## 6.2 基本定义



### 定义2.9

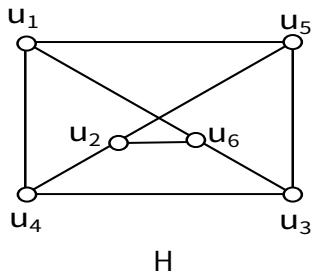
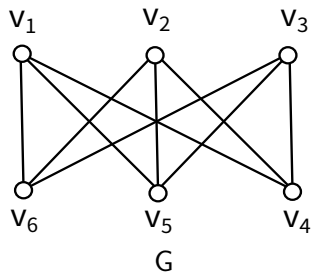
设图 $G$ 的子图 $H$ 具有某种性质, 若 $G$ 中不存在与 $H$ 不同的具有此性质且包含 $H$ 的子图, 则称 $H$ 是具有此性质的**极大子图**。

### 定义2.10

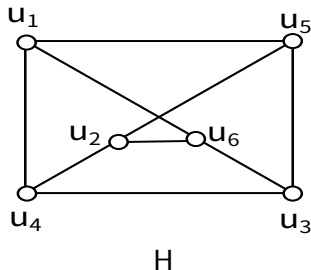
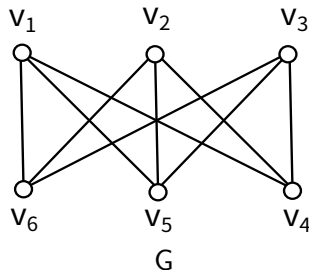
设 $S$ 为图 $G = (V, E)$ 的顶点集 $V$ 的非空子集, 则 $G$ 的以 $S$ 为顶点集的极大子图称为由 $S$ 导出的子图, 记为 $\langle S \rangle$ 。形式的,

$$\langle S \rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$

## 6.2 基本定义



## 6.2 基本定义



### 定义2.11

设  $G = (V, E)$ ,  $H = (U, F)$  为两个图，如果存在一个一一对应  $\phi: V \rightarrow U$ ，使得  $\{u, v\} \in E$  当且仅当  $\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$ ，则称  $G$  与  $H$  同构。

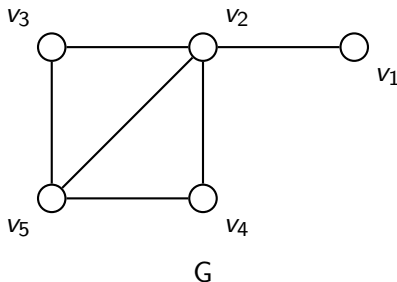
### 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.1

设  $G = (V, E)$  为一个图。 $G$  的一条通道是  $G$  的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

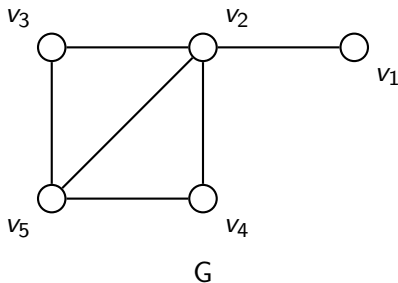
其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。  $n$ 称为通道的长。这样的通道常称为 $v_0 - v_n$ 通道，并简记为 $v_0v_1v_2 \dots v_n$ 。当 $v_0 = v_n$ 时，则称此通道为**闭通道**。



## 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.2

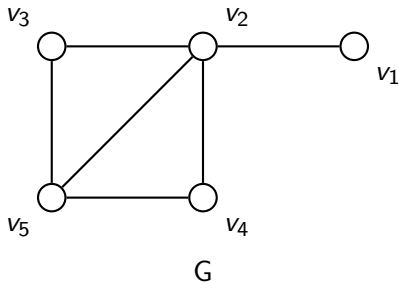
如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。



## 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.3

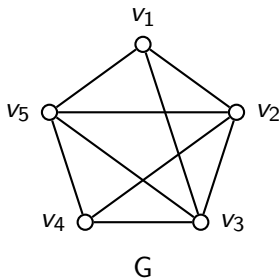
如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为**路**。如果闭通道上除终点外各顶点互不相同，则称此闭通道为**圈**，或**回路**。



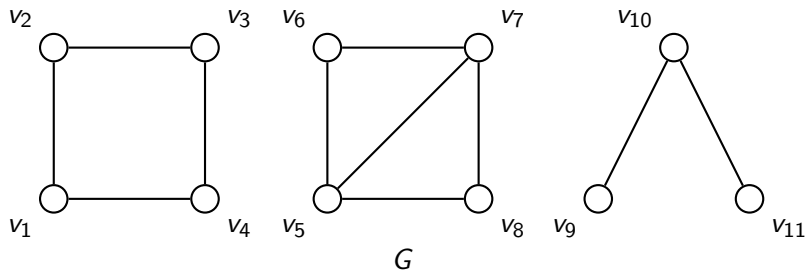
## 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.4

设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 $G$ 中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称 $G$ 为一个**连通图**。

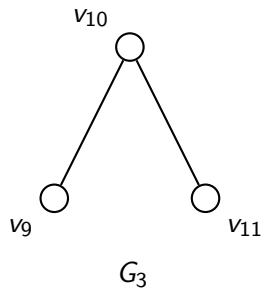
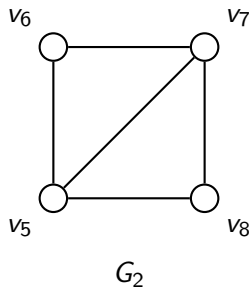
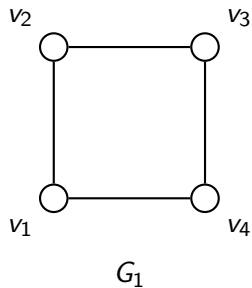


## 6.3 路、圈、连通图





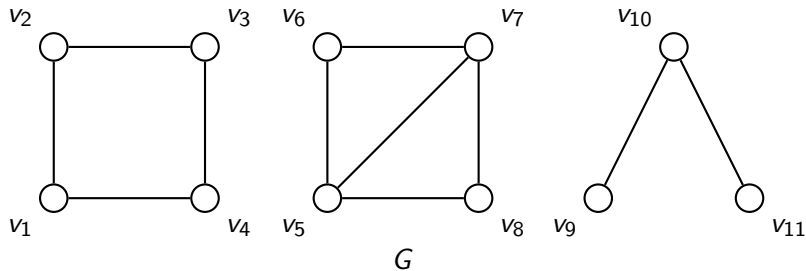
## 6.3 路、圈、连通图



## 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.5

图 $G$ 的极大连通子图称为 $G$ 的一个支。



## 6.3 路、圈、连通图

### 定理3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图。在 $V$ 上定义二元关系 $\cong$ 如下:

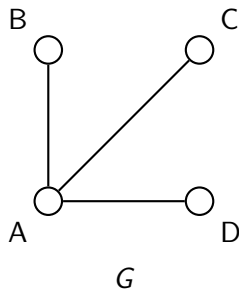
$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 间有一条路,}$$

则 $\cong$ 为 $V$ 上的等价关系,  $G$ 的支就是关于 $\cong$ 的每个等价类的导出子图。

## 6.4 补图、偶图

### 定义4.1

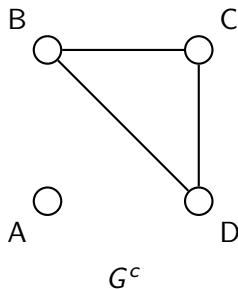
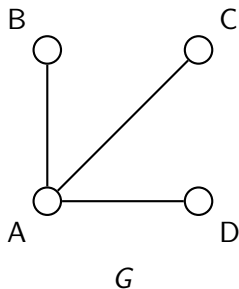
设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。  
如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定义4.1

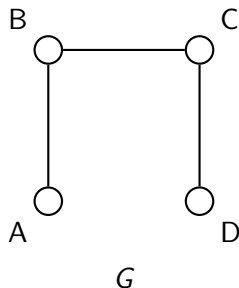
设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定义4.2

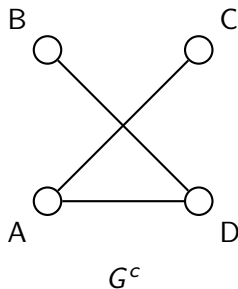
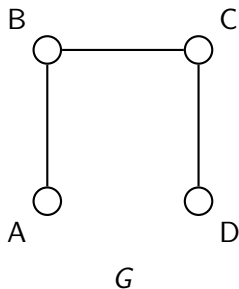
设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定义4.2

设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。  
如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定理4.1

对任一有6个顶点的图 $G$ ， $G$ 中或 $G^c$ 中有一个三角形。

证明.

设图 $G$ 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , 考虑顶点 $v_1$ 。

- ▶ 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点 $v_1$ 相邻接。不失一般性，不妨设这个三个顶点为 $v_2, v_3, v_4$ 。
  - 在顶点 $v_2, v_3, v_4$ 中，存在两个顶点相邻接，此时 $G$ 中存在三角形。
  - 在顶点 $v_2, v_3, v_4$ 中，任意两个顶点都不邻接，此时 $G^c$ 中存在三角形。
- ▶ 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点 $v_1$ 不邻接。不失一般性，不妨设这个三个顶点为 $v_2, v_3, v_4$ 。
  - 在顶点 $v_2, v_3, v_4$ 中，存在两个顶点不邻接，此时 $G^c$ 中存在三角形。
  - 在顶点 $v_2, v_3, v_4$ 中，任意两个顶点互相邻接，此时 $G$ 中存在三角形。



## 6.4 补图、偶图

### 定义4.3

对任意的正整数 $m, n, m \geq 2, n \geq 2$ , 求一个最小的正整数 $r(m, n)$ , 使得任何有 $r(m, n)$ 个顶点的图 $G$ 中一定含有一个 $K_m$ 或者图 $G^c$ 中一定含有一个 $K_n$ , 这里的数 $r(m, n)$ 称为拉姆齐数。

## 6.4 补图、偶图

### 定义4.4

设  $G = (V, E)$  为一个图, 如果  $G$  的顶点集  $V$  有一个二划分  $\{V_1, V_2\}$ , 使得  $G$  的任一条边的两个端点一个在  $V_1$  中, 另一个在  $V_2$  中, 则称  $G$  为偶图。如果  $\forall u \in V_1, v \in V_2$  均有  $uv \in E$ , 则称  $G$  为完全偶图, 记为  $K_{m,n}$ , 其中  $|V_1| = m, |V_2| = n$ 。

## 6.4 补图、偶图

### 定义4.5

设  $G = (V, E)$  是一个图,  $u$  和  $v$  是  $G$  的顶点。联结  $u$  和  $v$  的最短路的长称为  $u$  与  $v$  之间的**距离**, 并记为  $d(u, v)$ 。如果  $u$  与  $v$  间在  $G$  中没有路, 则定义  $d(u, v) = \infty$ 。

## 6.4 补图、偶图

### 定理4.2

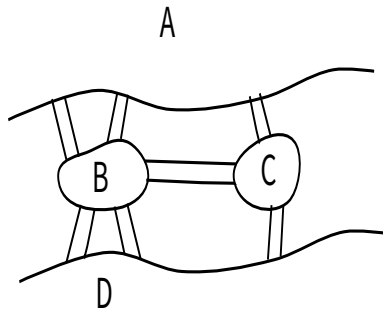
图 $G$ 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

## 6.4 补图、偶图

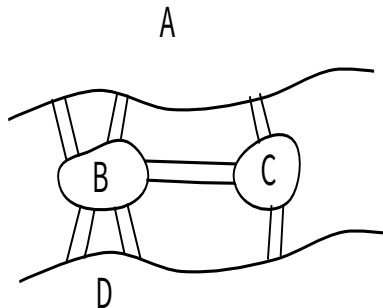
### 定理4.3

所有具有 $p$ 个顶点而没有三角形的图中最多有 $\lfloor p^2/4 \rfloor$ 条边。

## 6.5 欧拉图



## 6.5 欧拉图



### 定义5.1

包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。

## 6.5 欧拉图

### 定理5.1

图 $G$ 为欧拉图当且仅当 $G$ 为连通的且每个顶点的度为偶数。

### 证明.

首先, 假设图 $G$ 为欧拉图, 往证 $G$ 是连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 $G$ 为欧拉图知 $G$ 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ , 其中 $v_n = v_0$ 。显然 $G$ 是连通的。顶点 $v_0$ 在 $T$ 中的第一次出现与一条边相关联, 最后一次出现与一条边相关联, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。除 $v_0$ 之外的其他顶点在 $T$ 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度也为偶数。





## 6.5 欧拉图

### 定理 5.1

图 $G$ 为欧拉图当且仅当 $G$ 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 $G$ 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 $G$ 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 $G$ 的一条最长的迹, 记为 $Z$ , 则 $Z$ 为闭迹。否则,  $v_n \neq v_0$ ,  $v_n$ 在迹 $Z$ 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 $v_n$ 的度为偶数知,  $v_n$ 在 $G$ 中还有一条与之关联的边没有在 $Z$ 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 $G$ 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 $G$ 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 $Z$ 包含了图 $G$ 的所有的边。若不然, 则图 $G$ 中有一条边 $x$ 不在 $Z$ 中出现, 并且 $x$ 有一个端点在 $Z$ 中出现。在图 $G$ 中去掉 $Z$ 中的所有边, 得到图 $G'$ 。取图 $G'$ 中一条包含 $x$ 的最长的迹 $Z'$ , 由图 $G'$ 中所有顶点的度均为偶数易知 $Z'$ 为闭迹(与前面证明 $Z$ 为闭迹的过程相类似)。于是 $Z$ 和 $Z'$ 可以联结成一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 $G$ 的一条最长的迹矛盾。

## 6.5 欧拉图

### 定义5.2

包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。

## 6.5 欧拉图

### 定理5.2

图 $G$ 有一条欧拉开迹当且仅当 $G$ 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 $G$ 有一条欧拉开迹 $Z: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ , 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 $G$ 是连通的。顶点 $v_0$ 在 $Z$ 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 $v_0$ 的度为奇数; 同理,  $v_n$ 的度为奇数。除了 $v_0$ 和 $v_n$ 之外其余的每个顶点在 $Z$ 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。这证明了图 $G$ 恰有两个奇度顶点。设图 $G$ 是连通的, 且恰有两个奇度顶点 $u$ 和 $v$ 。在顶点 $u$ 和 $v$ 之间加一条边, 得到图 $G'$ 。则图 $G'$ 是连通的且每个顶点的度为偶数, 因此有一条欧拉闭迹。在该欧拉闭迹上去掉新加的顶点 $u$ 与顶点 $v$ 之间的边, 便得到了图 $G$ 的一条欧拉开迹。 □

## 6.5 欧拉图

### 定理5.3

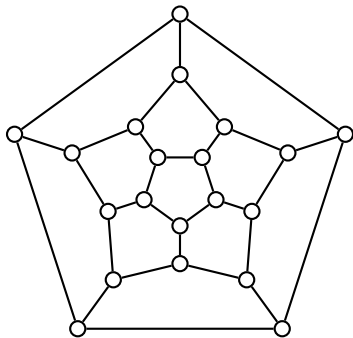
设 $G$ 为连通图， $G$ 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 $G$ 的全部边可以排成 $n$ 条开迹，且不能排成少于 $n$ 条开迹。

证明.

设连通图 $G$ 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 $G$ 中加入 $n$ 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 $G'$ 。则 $G'$ 是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹 $Z$ 。在 $Z$ 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，则得到图 $G$ 的 $n$ 条开迹。

假设图 $G$ 的所有边能排成 $m$ 条开迹， $m < n$ 。则只有这 $m$ 条开迹的端点可能为奇度顶点，因此图 $G$ 至多有 $2m$ 个奇度顶点，这与图 $G$ 有 $2n$ 个奇度顶点矛盾。 □

## 6.6 哈密顿图

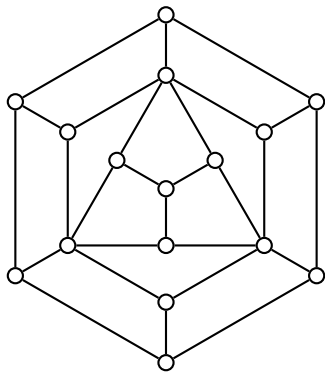


## 6.6 哈密顿图

### 定义6.1

图 $G$ 的一条包含所有顶点的路称为 $G$ 的一条哈密顿路;图 $G$ 的一个包含所有顶点的圈称为 $G$ 的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

## 6.6 哈密顿图



## 6.6 哈密顿图

### 定理6.1

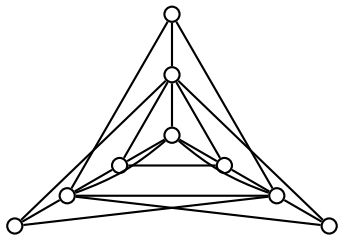
设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图，则对 $V$ 的每个非空子集 $S$ ，均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

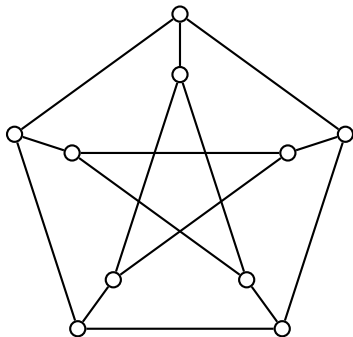
其中 $G - S$ 是从 $G$ 中去掉 $S$ 中那些顶点后所得到的图， $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。



## 6.6 哈密顿图



## 6.6 哈密顿图



## 6.6 哈密顿图

### 定理6.2

设 $G$ 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 $G$ 的任一对不邻接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 $G$ 是一个哈密顿图。

## 6.6 哈密顿图

### 定理6.3

设 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 为连通的。

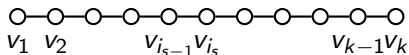
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.4

设 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ,

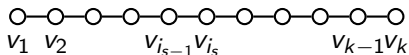
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.4

设 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

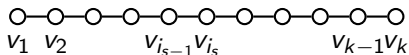
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.4

设 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。

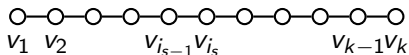
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.4

设 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。



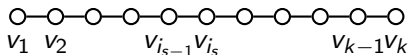
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.4

设 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



### 证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 $G$ 中的一个圈；

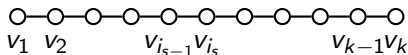
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.4

设 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不邻接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



### 证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 $G$ 中的一个圈；
- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 不邻接，由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 $v_1, v_k$ 只能与 $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ 中的顶点邻接。

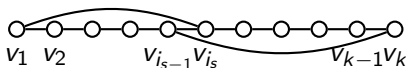
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.4

设 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不邻接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



证明 (续上页) .

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 $v_1$ 邻接,  $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r < k$ , 则 $v_k$ 必与某个 $v_{i_s-1}$ 邻接,  $2 \leq s \leq r$ 。否则,  $v_k$ 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_k \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 < p - 1$$

矛盾。于是,  $v_1 v_2 \cdots v_{i_s-1} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 是 $G$ 中的一个圈。总之,  $v_1, v_2, \dots, v_k$ 在 $G$ 的同一个圈 $C$ 上。

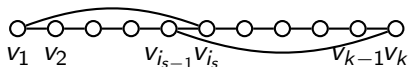
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.4

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不邻接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。

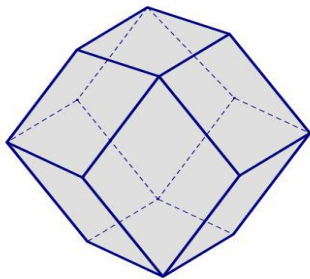


证明（续上页）.

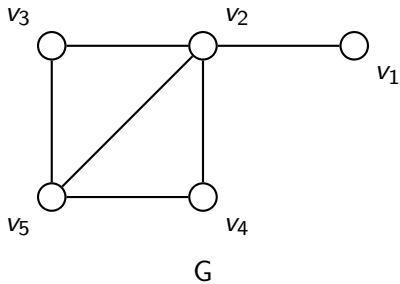
由于 $G$ 是连通的， $k < p$ ，所有 $G$ 必有某个顶点 $v$ ， $v$ 不在 $C$ 上，但与 $C$ 上某个顶点 $v_i$ 邻接。于是得到 $G$ 的一条更长的路，这就出现了矛盾。



## 6.6 哈密顿图



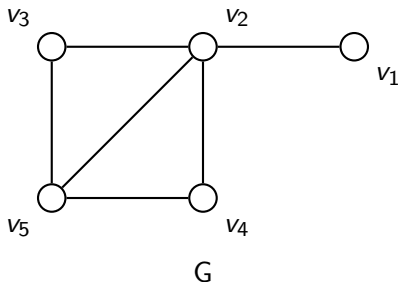
## 6.7 图的邻接矩阵



## 6.7 图的邻接矩阵

### 定理7.1

设  $G = (V, E)$  为一个  $(p, q)$  图,  $p \times p$  矩阵  $A$  为  $G$  的邻接矩阵, 则  $G$  中  $v_i$  与  $v_j$  间长为  $l$  的通道条数等于  $A^l$  的第  $i$  行第  $j$  列元素的值。



## 习题

设 $G$ 是一个 $(p, q)$ 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$ , 则 $G$ 中有两个边不重的圈。

### 证明.

当 $q > p + 4$ 时, 可以在 $G$ 中任意去掉一些边, 使得剩余的边数恰好比顶点数多4。如果此时得到的新图中有两个边不重的圈, 则原来的图 $G$ 中也一定有两个边不重的圈。因此, 以下只需证

当 $q = p + 4$ 时, 图 $G$ 中有两个边不重的圈。

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p \leq 4$ 时, 图 $G$ 最多有 $p(p-1)/2$ 条边, 易验证此

时 $q = p + 4$ 不可能成立。当 $p = 5$ 时,  $q = 9$ 。设此时图 $G$ 的顶点集为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ , 除了 $v_1$ 和 $v_5$ 之间没有边关联之外, 其余的任意两个顶点之间均有边关联, 则此时 $v_1 v_2 v_3 v_1$ 和 $v_3 v_4 v_5 v_3$ 就是图 $G$ 中两个边不重的圈。





## 习题

设 $G$ 是一个 $(p, q)$ 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$ , 则 $G$ 中有两个边不重的圈。

证明(续上页).

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设图 $G$ 有 $k + 1$ 个顶点。分以下四种情况进行验证:

(i) 当 $\delta(G) = 0$ 时, 去掉图 $G$ 中任意一个度为0的顶点和任意一条边, 得到的图 $G'$ 中有 $p'$ 个顶点,  $q'$ 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 $G'$ 中有两个边不重的圈, 它们也是图 $G$ 中两个边不重的圈。

(ii) 当 $\delta(G) = 1$ 时, 去掉图 $G$ 中任意一个度为1的顶点及其与之关联的边, 得到的图 $G'$ 中有 $p'$ 个顶点,  $q'$ 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 $G'$ 中有两个边不重的圈, 它们也是图 $G$ 中两个边不重的圈。



## 习题

设 $G$ 是一个 $(p, q)$ 图，证明：若 $q \geq p + 4$ ，则 $G$ 中有两个边不重的圈。

证明(续上页).

(iii) 当 $\delta(G) = 2$ 时，设 $u$ 为图 $G$ 中度为2的顶点，与之邻接的两个顶点为 $v$ 和 $w$ 。分两种情况讨论。在第一种情况下， $v$ 和 $w$ 之间没有边关联，去掉顶点 $u$ 及其与之关联的两条边 $uv$ 和 $uw$ ，添加一条边 $vw$ ，得到的图 $G'$ 中有 $p'$ 个顶点， $q'$ 条边，则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设，图 $G'$ 中有两个边不重的圈。如果新添加的边 $vw$ 不在这两个圈上，则这两个圈就是图 $G$ 中两个边不重的圈；如果新添加的边 $vw$ 在其中的一个圈上，将其替换为图 $G$ 中的两条边 $vu$ 和 $uw$ ，则所得到的圈与另一个圈一起构成图 $G$ 中两个边不重的圈。在第二种情况下， $v$ 和 $w$ 之间有边关联，此时 $uvwu$ 构成图 $G$ 中的一个圈，去掉该圈上的三条边，得到的图 $G'$ 中有 $p'$ 个顶点， $q'$ 条边。此时 $q' = p' + 1$ ，因此图 $G'$ 中必定有一个圈，与原来图 $G$ 中的圈 $uvwu$ 构成图 $G$ 中两个边不重的圈。□

## 习题

设 $G$ 是一个 $(p, q)$ 图，证明：若 $q \geq p + 4$ ，则 $G$ 中有两个边不重的圈。

证明(续上页).

(iii) 当 $\delta(G) \geq 3$ 时,  $2q \geq 3p$ , 即 $2(p + 4) \geq 3p$ , 可以得到 $p \leq 8$ 。此时若图 $G$ 中有长度小于等于4的圈，将其上的4条边去掉，得到的图 $G'$ 中有 $p'$ 个顶点， $q'$ 条边。则 $q' \geq p'$ ，图 $G'$ 中必定有一个圈，与原来图 $G$ 中去掉的边所构成的圈一起构成图 $G$ 中两个边不重的圈。若图 $G$ 中所有圈的长度至少为5，设 $C$ 为其中长度最短的一个圈。由 $\delta(G) \geq 3$ 知圈 $C$ 上的每个顶点至少与圈外的一个顶点相邻接，而其中任意两个不同的顶点不能同时与圈外同一个顶点相邻接，否则将产生一个长度更小的圈。由圈 $C$ 上至少有5个顶点知图 $G$ 中至少有10个顶点，与 $p \leq 8$ 矛盾。这说明图 $G$ 中所有圈的长度至少为5的情况不可能出现。  $\square$

# 习题

## 习题1

在一个有 $n$ 个人的宴会上，每个人至少有 $m$ 个朋友  
( $2 \leq m \leq n$ )。试证：有不少于 $m+1$ 个人，使得它们按某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左右均是他的朋友。

## 习题2

设 $G$ 是图。证明：若 $\delta(G) \geq 2$ ，则 $G$ 包含长至少是 $\delta(G) + 1$ 的圈。

## 习题3

若 $G$ 是一个 $(p, q)$ 图， $q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ ，试证 $G$ 是连通图。