# 离散数学讲义

陈建文

July 1, 2020

课程学习目标：

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

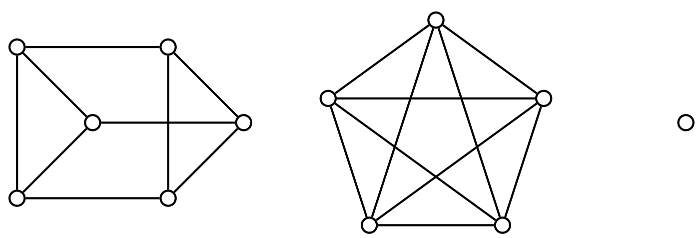
学习方法：

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

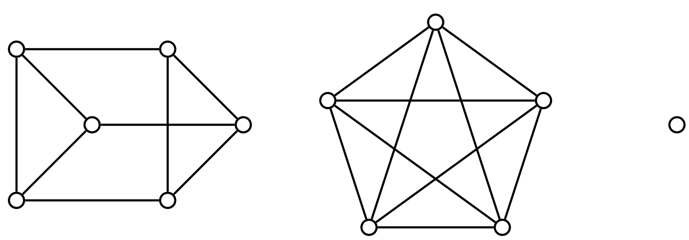
授课教师QQ：2129002650

# 第 八 章　连通度和匹配

**定义8.1.** 图$G$的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从$G$中去掉的最少顶点数目，记为$\kappa(G)$。



**定义8.2.** 图$G$的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从$G$中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。



**定理8.1.** 对任一图$G$，有$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明. 先证$\lambda(G) \le \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则$G$不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \le \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,从$G$中去掉与$v$关联的$\delta(G)$条边之后，得到的图中$v$为孤立顶点，所以$\lambda(G) \le \delta(G)$。因此，对任意的图$G$，$\lambda(G) \le \delta(G)$。
接下来证明$\kappa(G) \le \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \ge 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与$u$和$v$都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，$x$是这样产生的图的一条桥，从而移去$u$或$v$就产生了一个不连通图或平凡图。所以，在任何情况下，$\kappa(G) \le \lambda(G)$。 □

**定理8.2.** 对任何整数$a, b, c$, $0 < a \leq b \leq c$, 存在一个图$G$使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

**定理8.3.** 设$G = (V, E)$有$p$个顶点且$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。

证明. $\lambda(G) \leq \delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G) \geq \delta(G)$。
因为$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图， 则$\lambda(G) = \delta(G) = 0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G) > 0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V \setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A| + |V \setminus A| = p$知必有$|A| \leq [\frac{p}{2}]$或者$|V \setminus A| \leq [\frac{p}{2}]$。不妨设$|A| \leq [\frac{p}{2}]$。由于$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V \setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u \leq |A| - 1 \leq [\frac{p}{2}] - 1 < \delta(G)$，矛盾。设$v$为$A$中的任一顶点，$v$与$V \setminus A$中的$x$个顶点邻接，与$A$中的$y$个顶点邻接，则$\deg v = x + y$。$v$与$V \setminus A$中的$x$个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_1$，则$F_1 \subseteq F$；$v$与$A$中的$y$个顶点邻接，而这$y$个顶点中的每个顶点都至少与$V \setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_2$，则$F_2 \subseteq F$ 并且$F_1 \cap F_2 = \phi$，从而

$$\lambda(G) \geq |F_1| + |F_2| = x + y = \deg v \geq \delta(G)$$

□

**定义8.3.** 设$G$为一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称$G$为$n$**-顶点连通**的，简称$n$-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称$G$为$n$**-边连通**的。

**定理8.4.** 设$G = (V, E)$为有$p$个顶点的图，$p \geq 3$，则$G$为2-连通的，当且仅当$G$的任意两个不同的顶点在$G$的同一个圈上。

**定义8.4.** 设$u$与$v$为图$G$中的两个不同的顶点。两条联结$u$与$v$的路，如果除了$u$与$v$外没有公共顶点，则称这两条路为联结$u$与$v$的**不相交路**；如果联结$u$与$v$的两条路上没有公共边，则称这两条路为联结$u$与$v$的**边不相交路**。

**定理8.5.** 图$G$为$n-$连通的当且仅当每一对不同顶点间至少有$n$条不相交路。

**定理8.6.** 图$G$为$n-$边连通的当且仅当$G$的任一对不同的顶点间至少有$n$条边不相交路。

**定义8.5.** 设$G = (V, E)$为一个图，$G$的任意两条不邻接的边$x$与$y$称为**互相独立**的。$G$的边集$E$的子集$Y$称为$G$的一个**匹配**，如果$Y$中任意两条边都是互相独立的。

**定义8.6.** 设$Y$为图$G = (V, E)$的一个匹配，如果$2|Y| = |V|$，则称$Y$为$G$的一个**完美匹配**。

**定义8.7.** 设$Y$为图$G = (V, E)$的一个匹配，如果对于$G$的任一匹配$Y'$，恒有$|Y'| \leq |Y|$, 则称$Y$为$G$的一个**最大匹配**。

**定义8.8.** 设$G = (V, E)$为一个偶图且$V = V_1 \cup V_2$, $\forall x \in E$，$x$为联结$V_1$的一个顶点与$V_2$的一个顶点的边。如果存在$G$的一个匹配$Y$使得$|Y| = min\{|V_1|, |V_2|\}$，则称$Y$是偶图$G$的一个**完全匹配**。

**定义8.9.** 设$X$为一个有穷集合，$A_1, A_2, \ldots, A_n$为$X$的子集的一个序列，由$X$的互不相同的元素构成的序列$s_1, s_2, \ldots, s_n$称为系统

$$T: A_1, A_2, \ldots, A_n$$

的**相异代表系**，如果$s_i \in A_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$。

**定理8.7.** 设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，存在$G$的一个完全匹配$Y$且$|Y| = |V_1|$的充分必要条件是对$V_1$的任意子集$A$，$|N(A)| \geq |A|$，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A\{x, y\} \in E\}$$

证明. 设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，如果存在$G$的一个完全匹配$Y$且$|Y| = |V_1|$，则显然对$V_1$的任意子集$A$，$|N(A)| \geq |A|$。
设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对$V_1$的任意子集$A$，$|N(A)| \geq |A|$，以下用数学归纳法证明存在$G$的一个完全匹配$Y$使得$|Y| = |V_1|$，施归纳于$|V_1|$。
(1)当$|V_1| = 1$时，设$V_1$中唯一的一个元素为$u$，由$|N(V_1)| \geq |V_1|$知$N(V_1)$中至少含有一个元素$v$，则$\{\{u, v\}\}$构成了$G$的一个满足条件的完全匹配。
(2)假设当$|V_1| < k$时结论成立，往证当$|V_1| = k$时结论也成立。设$|V_1| = k$，分以下两种情况讨论：
(i) 对$V_1$的任意真子集$A$，$|N(A)| > |A| + 1$。取$V_1$中的任意一个元素$u$，由于$|N(\{u\})| \geq 1$， 可取$N(\{u\})$中的一个元素$v$使得$uv \in E$。 考虑偶图$G - \{u, v\}$，对任意的$V_1 \setminus \{u\}$的子集$B$， $|N(B)| \geq |B|$。由归纳假设，偶图$G - \{u, v\}$ 有一个完全匹配$Y'$且$|Y'| = |V_1 \setminus \{u\}|$。$Y' \cup \{\{u, v\}\}$即为$G$的一个完全匹配，且$|Y' \cup \{\{u, v\}\}| = |V_1|$。
(ii) 存在$V_1$的真子集$A$，$|N(A)| = |A|$。
考虑图$G$中由$A \cup N(A)$导出的子图$G_1$以及由$(V_1 \setminus A) \cup (N(V_1 \setminus A) \setminus N(A))$导出的子图$G_2$。 $G_1$为偶图，且在$G_1$中对$A$的任意子集$B$，$|N(B)| \geq |B|$。$G_2$为偶图，且在$G_2$中对集合$V_1 \setminus A$的任意子集$C$， $|N(C)| \geq |C|$， 这是因为如果$|N(C)| < |C|$, 则在$G$中$|N(C \cup A)| < |C \cup A|$， 与前提条件矛盾。由归纳假设，$G_1$有完全匹配$M_1$，$|M_1| = |A|$，$G_2$有完全匹配$M_2$，$|M_2| = |V_1 \setminus A|$。于是$M_1 \cup M_2$构成了$G$的完全匹配，且$|M_1 \cup M_2| = |V_1|$。 □

**定理8.8.** 设$X$为一个有限集，系统$T: A_1, A_2, \cdots, A_n$为$X$的一些子集组成的，则$T$有相异代表系的充分必要条件是$\forall I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$有

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$$

# 第 九 章