

第四章无穷集合及其基数

陈建文

1. 可数集

定义1.1

如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射，则称 X 与 Y 对等，记为 $X \sim Y$ 。

1. 可数集

定义1.1

如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射, 则称 X 与 Y 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

定义1.2

如果从自然数集 \mathbb{N} 到集合 X 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 则称集合 X 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 X 不是可数集且 X 不是有穷集合, 则称 X 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

1. 可数集

定义1.1

如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射, 则称 X 与 Y 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

定义1.2

如果从自然数集 \mathbb{N} 到集合 X 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 则称集合 X 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 X 不是可数集且 X 不是有穷集合, 则称 X 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

定理1.1

集合 A 为可数集的充分必要条件是 A 的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

因此, A 可写成 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ 。

1. 可数集

定理1.2

设 A 为可数集合， B 为有穷集合，则 $A \cup B$ 为可数集。

1. 可数集

定理1.3

设 A 与 B 为两个可数集，则 $A \cup B$ 为可数集。

1. 可数集

定理1.4

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集合的一个无穷序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

1. 可数集

定理1.5

设 A 与 B 为两个可数集，则 $A \times B$ 为可数集。

1. 可数集

定理1.6

全体有理数之集 \mathbb{Q} 为可数集。

2 连续统集

定理2.1

区间 $[0, 1]$ 中的所有实数构成的集合为不可数集。

2 连续统集

定义2.1

凡与集合 $[0, 1]$ 存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

2 连续统集

定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

2 连续统集

定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

定理2.3

设 M 为一个无穷集合， A 为至多可数集合，则 $M \sim M \cup A$ 。

2 连续统集

定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

定理2.3

设 M 为一个无穷集合， A 为至多可数集合，则 $M \sim M \cup A$ 。

定理2.4

设 M 为无穷集合， A 为 M 的至多可数子集， $M \setminus A$ 为无穷集合，则 $M \sim M \setminus A$ 。

2 连续统集

定理2.5

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个两两不相交的连续统, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是连续统。

2 连续统集

定理2.6

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0, 1], k = 1, 2, \dots$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]$$

推论2.1

全体实数之集是一个连续统。

推论2.2

全体无理数之集是一个连续统。

2 连续统集

$K(P)$

```
1  if  $H(P, P) == 1$   
2      return  
3  else Loop forever
```

3 基数及其比较

定义3.1

集合 A 的基数是一个符号，凡与 A 对等的集合都赋以同一个记号。集合 A 的基数记为 $|A|$ 。

定义3.2

所有与集合 A 对等的集合构成的集族称为 A 的基数。

定义3.3

集合 A 的基数与集合 B 的基数称为是相等的，当且仅当 $A \sim B$ 。

3 基数及其比较

定义3.4

设 α , β 为任意两个基数, A, B 为分别以 α , β 为其基数的集合。如果 A 与 B 的一个真子集对等, 但 A 却不能与 B 对等, 则称基数 α 小于基数 β , 记为 $\alpha < \beta$ 。

3 基数及其比较

定义3.4

设 α, β 为任意两个基数, A, B 为分别以 α, β 为其基数的集合。如果 A 与 B 的一个真子集对等, 但 A 却不能与 B 对等, 则称基数 α 小于基数 β , 记为 $\alpha < \beta$ 。

显然,

$\alpha \leq \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 。

$\alpha < \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 且不存在 A 到 B 的双射。

3 基数及其比较

定理3.1 (康托)

对任一集合 M , $|M| < |2^M|$ 。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理4.1 (康托-伯恩斯坦)

设 A, B 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$, 则 A 与 B 的基数相等。

5 公理集合论

公理5.1 (外延公理)

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

公理5.2 (空集公理)

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理5.3 (对公理)

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理5.4 (并集公理)

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

5 公理集合论

公理5.5 (幂集公理)

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理5.6 (子集公理)

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理5.7 (无穷公理)

$$\exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A)$$

$$\text{其中 } a^+ = a \cup \{a\}$$

5 公理集合论

公理5.8 (代换公理)

$$\forall A((\forall x \in A)\forall y_1\forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B\forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y)))$$

公理5.9 (正则公理)

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

公理5.10 (选择公理)

$$(\forall \text{relation } R)(\exists \text{function } F)(F \subseteq R \wedge \text{dom } F = \text{dom } R)$$

5 公理集合论

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. $n \in \mathbb{N} \rightarrow n++ \in \mathbb{N}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} n++ \neq 0$;
4. $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} n \neq m \rightarrow n++ \neq m++$;
5. $(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} p(n) \rightarrow p(n++)) \rightarrow \forall n p(n)$ 。

5 公理集合论

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \rightarrow x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

5 公理集合论

1. $x \leq x$
2. $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$
3. $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$
4. $x \leq y \vee y \leq x$
5. $x > y \rightarrow x + z > y + z$
6. $x > y \wedge z > 0 \rightarrow x * z > y * z$
7. $\forall A \subseteq \mathbb{R} (A \neq \emptyset \wedge \exists x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x)) \rightarrow \exists z \in R ((\forall y \in A (y \leq z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x) \rightarrow z \leq x))))$