习题. 设G为一个(p,q)图，证明：$\chi(G) \geq p^2/(p^2-2q)$

证明. 设图G的色数$\chi(G)=n$，则G可以用n种颜色进行顶点着色使得相邻的顶点着不同的颜色。设着不同颜色的顶点的个数分别为$p_1,p_2,\ldots,p_n$，则

$$p_1+p_2+\ldots+p_n = p_1\cdot 1+p_2\cdot 1+\ldots+p_n\cdot 1 \leq \sqrt{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}\cdot\sqrt{n}$$

于是

$$\sqrt{n} \geq \frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}}$$

从而

$$n \geq \frac{p^2}{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2} \tag{1}$$

再由

$$(p_1+p_2+\ldots+p_n)^2 = p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n} p_ip_j$$

知

$$p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2 = p^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n} p_ip_j \leq p^2-2q$$

结合(1)式知

$$n \geq p^2/(p^2-2q)$$

结论得证。 □