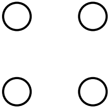
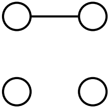
习题讲解

陈建文

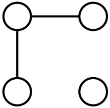
具有4个顶点的互相不同构的所有无向图:



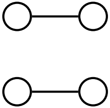
A



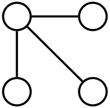
B



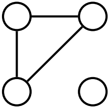
C



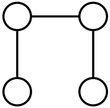
D



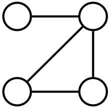
E



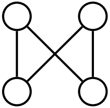
F



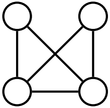
G



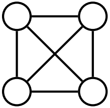
H



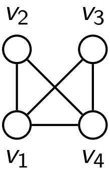
I



J



K



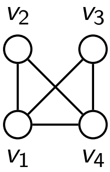
J

$$J = (V, E)$$
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$$

定义1

设$G=(V,E)$为一个图，$V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$。
$p\times p$矩阵$A=(a_{ij})$称为G的邻接矩阵，其中

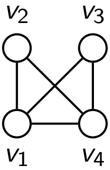
$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{如果}\{v_i,v_j\}\in E\\0,\text{如果}\{v_i,v_j\}\notin E\end{cases}$$



J

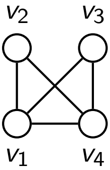
$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

顶点v_1和v_4之间有多少条不同的长度为3的通道?



J

顶点v_1和v_4之间有多少条不同的长度为3的通道?



J

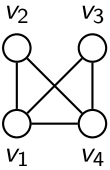
定义2

设$G=(V,E)$为一个图。G的一条通道是G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中$x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。$n$称为通道的长。这样的通道常称为$v_0 - v_n$通道，并简记为$v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$。

顶点v_1和v_4之间有多少条不同的长度为3的通道?



J

定义2

设$G=(V,E)$为一个图。G的一条通道是G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0,x_1,v_1,x_2,v_2,x_3,\ldots,v_{n-1},x_n,v_n$$

其中$x_i=v_{i-1}v_i, i=1,2,\ldots,n$。$n$称为通道的长。这样的通道常称为$v_0-v_n$通道，并简记为$v_0v_1v_2\ldots v_n$。

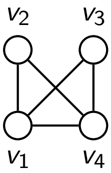
顶点v_1和v_4之间有5条不同的长度为3的通道:

$v_1v_2v_1v_4$，$v_1v_3v_1v_4$，$v_1v_4v_1v_4$，$v_1v_4v_2v_4$，$v_1v_4v_3v_4$。

顶点v_1和v_4之间有多少条不同的长度为3通道?

$$A^3_{14} = A^2_{11}A_{14} + A^2_{12}A_{24} + A^2_{13}A_{34} + A^2_{14}A_{44}$$

其中



J

$$A^2_{11} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{14}A_{41} = 3$$
$$A^2_{12} = A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{32} + A_{14}A_{42} = 1$$
$$A^2_{13} = A_{11}A_{13} + A_{12}A_{23} + A_{13}A_{33} + A_{14}A_{43} = 1$$
$$A^2_{14} = A_{11}A_{14} + A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34} + A_{14}A_{44} = 2$$
$$P^2_{11} = \{v_1v_2v_1, v_1v_3v_1, v_1v_4v_1\}$$
$$P^2_{12} = \{v_1v_4v_2\}$$
$$P^2_{13} = \{v_1v_4v_3\}$$
$$P^3_{14} = \{v_1v_2v_1v_4, v_1v_3v_1v_4, v_1v_4v_1v_4, v_1v_4v_2v_4, v_1v_4v_3v_4\}$$

定理1

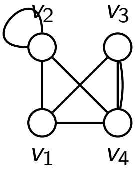
设$G=(V,E)$为一个(p,q)图，$p\times p$矩阵A为G的邻接矩阵，则G中v_i与v_j间长为l的通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于l。
当$l=1$时，结论显然成立。
假设当$l=k$时结论成立，往证当$l=k+1$时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知：

$$(A^{k+1})_{ij}=(A^kA)_{ij}=\sum_{h=1}^{p}(A^k)_{ih}A_{hj}$$

由归纳假设，$(A^k)_{ih}$为从顶点v_i到顶点v_h长度为k的通道的条数。由从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$且倒数第二个顶点依次为v_1，v_2，…，v_p的通道的条数之和知$(A^{k+1})_{ij}$为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数。 □



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

J

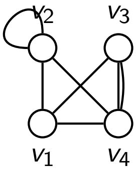
定义3

设$G=(V,E)$为一个图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$。$p \times p$矩阵$A=(a_{ij})$称为G的邻接矩阵，其中$a_{ij}=$联结顶点v_i和v_j的边的条数。

定义4

设G为一个伪图。G的一条通道为G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$$



J

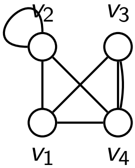
其中x_i为联结顶点v_{i-1}和顶点v_i的边，$i = 1, 2, \ldots, n$。n称为通道的长。这样的通道常称为$v_0 - v_n$通道。当$v_0 = v_n$时，则称此通道为闭通道。

定义5

如果伪图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为伪图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。

定义6

如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为路。如果闭通道上除终点外各顶点互不相同，则称此闭通道为圈，或回路。



定义7

设G为一个伪图，如果G中任意两个不同顶点间至少有一条路联结，则称G为一个连通图。

J

定理1

设$G=(V,E)$为一个(p,q)图，$p\times p$矩阵A为G的邻接矩阵，则G中v_i与v_j间长为l的通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于l。
当$l=1$时，结论显然成立。
假设当$l=k$时结论成立，往证当$l=k+1$时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知：

$$(A^{k+1})_{ij}=(A^kA)_{ij}=\sum_{h=1}^{p}(A^k)_{ih}A_{hj}$$

由归纳假设，$(A^k)_{ih}$为从顶点v_i到顶点v_h长度为k的通道的条数。由从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$且倒数第二个顶点依次为v_1，v_2，...，v_p的通道的条数之和知$(A^{k+1})_{ij}$为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数。 □

定理2

设G为一个有p个顶点的连通图，A为它的邻接矩阵，则G为连通的当且仅当$(A+I)^{p-1}>0$。

证明.

$\Rightarrow$ 设G为连通的，则对G的任意两个不同的顶点v_i与v_j间必有一条路。因此，存在l，$1\leq l\leq p-1$，$(A^l)_{ij}>0$。所以$\sum_{l=0}^{p-1}(A^l)_{ij}>0$。因此，

$$(A+I)^{p-1}=I+C_{p-1}^1A+C_{p-1}^2A^2+\cdots+A^{p-1}\geq\sum_{l=0}^{p-1}A^l>0$$

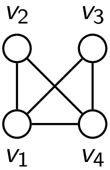
$\Leftarrow$ 设$(A+I)^{p-1}>0$。由于

$$(A+I)^{p-1}=I+C_{p-1}^1A+C_{p-1}^2A^2+\cdots+A^{p-1}>0$$

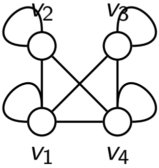
所以，对任意的i,j，$1\leq i,j\leq p$，如果$i\neq j$，则存在l，$1\leq l\leq p-1$，使得$(A^l)_{ij}>0$。因此，v_i与v_j之间有长为l的通道，从而必有路。所以G为连通的。 □

定理2

设G为一个有p个顶点的连通图，A为它的邻接矩阵，则G为连通的当且仅当$(A+I)^{p-1} > 0$。



G



G'

证明.

设G为一个包含p个顶点的图，在G的每个顶点上添加一个环，得到一个带环图G'，则G为连通的当且仅当G'为连通的。G'为连通的，当且仅当对G'的任意两个不同的顶点v_i与v_j之间有路。在G'中v_i与v_j之间有路当且仅当v_i与v_j之间有长为$p-1$的通道，因此G'为连通的当且仅当$(A+I)^{p-1} > 0$。从而G为连通的，当且仅当$(A+I)^{p-1} > 0$。 □