

**习题.** 设 $G$ 为图。证明：若 $\delta(G) \geq 2$ ，则 $G$ 包含长度至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈。

证明. 设 $P = v_0v_1 \dots v_n$ 为 $G$ 中的一条最长路，则 $v_0$ 只能与 $P$ 中的顶点相邻接，否则假设 $v_0$ 与不在 $P$ 中的顶点 $u$ 邻接，则 $uv_0v_1 \dots v_n$ 构成了 $G$ 中一条更长的路，与 $P$ 为 $G$ 中的最长路矛盾。取最大的 $s$ 使得 $v_0$ 与 $v_s$ 相邻接，则 $C = v_0v_1 \dots v_sv_0$ 为长度至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈，这是因为 $v_0$ 至少与 $\delta(G)$ 个顶点相邻接，而所有这些与 $v_0$ 邻接的顶点均在圈 $C$ 中。  $\square$