第三章关系

陈建文

1. 关系的概念

定义1.1

设A与B为两个集合。一个从$A \times B$到$\{T, F\}$的映射R，称为从A到B的一个二元关系。$\forall (a, b) \in A \times B$，如果$(a, b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$；如果(a,b)在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a \not R b$。如果$A = B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

1. 关系的概念

定义1.1

设A与B为两个集合。一个从$A \times B$到$\{T, F\}$的映射R，称为从A到B的一个二元关系。$\forall (a, b) \in A \times B$，如果$(a, b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$；如果(a,b)在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a \not R b$。如果$A = B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

例1.1

设集合$X = \{1, 2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为一个从$2^X \times 2^X$到$\{T, F\}$的映射，

$\subseteq (\{\phi\}, \{\phi\}) = T, \subseteq (\{\phi\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{\phi\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{\phi\}, \{1, 2\}) = T,$

$\subseteq (\{1\}, \{\phi\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1, 2\}) = T,$

$\subseteq (\{2\}, \{\phi\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{2\}, \{1, 2\}) = T,$

$\subseteq (\{1, 2\}, \{\phi\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\}) = T$

1. 关系的概念

定义1.2

设A与B为两个集合。$A \times B$的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。如果$(a,b) \in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a,b) \notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not{R}b$。如果$A = B$，则称R为A上的二元关系。

1. 关系的概念

定义1.2

设A与B为两个集合。$A \times B$的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。如果$(a,b) \in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a,b) \notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not R b$。如果$A = B$，则称R为A上的二元关系。

例1.2

设集合$X = \{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为$2^X \times 2^X$的一个子集，

$$\begin{aligned}\subseteq = \{&(\{\phi\},\{\phi\}),(\{\phi\},\{1\}),(\{\phi\},\{2\}),(\{\phi\},\{1,2\}),\\&(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),\\&(\{1,2\},\{1,2\})\}\end{aligned}$$

例1.3

自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系"$\leq$"是$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

1. 关系的概念

例1.3
自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系"$\leq$"是$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

例1.4
设n为任一给定的自然数。对任意的两个整数m，k，如果$m-k$能被n整除，则称m与k为模n同余，并记为$m \equiv k \pmod{n}$。显然，$m \equiv k \pmod{n}$当且仅当m被n除所得到的余数与k被n除所得到的余数相等。模n同余是$\mathbb{Z}$上的一个二元关系。

1. 关系的概念

定义1.3

设$R \subseteq A \times B$，集合

$$\{x \in A | \exists y \in B 使得 (x, y) \in R\}$$

称为R的定义域，记为$dom(R)$；集合

$$\{y \in B | \exists x \in A 使得 (x, y) \in R\}$$

称为R的值域，记为$ran(R)$。

1. 关系的概念

定义1.4

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，一个$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$间的一个$n$元关系，每个$A_i$称为$R$的一个域。

2. 关系的性质

定义2.1

集合X上的二元关系R称为自反的，如果对X的任意元素x都有xRx。

2. 关系的性质

定义2.1

集合X上的二元关系R称为自反的，如果对X的任意元素x都有xRx。

判断下列二元关系是否是自反的。设集合$X=\{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

2. 关系的性质

定义2.2
集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x, x) \notin R$。

2. 关系的性质

定义2.2

集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x, x) \notin R$。

判断下列二元关系是否是反自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

2. 关系的性质

定义2.3
集合X上的二元关系R称为对称的，如果对X的任意元素x，y，只要xRy就有yRx。

2. 关系的性质

定义2.3

集合X上的二元关系R称为对称的，如果对X的任意元素x，y，只要xRy就有yRx。

判断下列二元关系是否是对称的。设集合$X=\{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

2. 关系的性质

定义2.4

集合X上的二元关系R称为反对称的，如果对X的任意元素x，y，xRy且yRx，则$x = y$。

2. 关系的性质

定义2.4

集合X上的二元关系R称为反对称的，如果对X的任意元素x，y，xRy且yRx，则$x = y$。

判断下列二元关系是否是反对称的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

2. 关系的性质

定义2.5
集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。

2. 关系的性质

定义2.5

集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。

判断下列二元关系是否是传递的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

3. 关系的运算

定义3.1

设R为从集合A到集合B的二元关系，R的逆R^{-1}定义为从集合B到集合A的二元关系

$$R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

3. 关系的运算

定义3.1
设R为从集合A到集合B的二元关系，R的逆R^{-1}定义为从集合B到集合A的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

定理3.1
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

定理3.2

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B 使得 xRy 且 ySz\}$$

定理3.2

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

定理3.3

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R\circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R\circ S=\{(x,z)\in A\times C|\exists y\in B\text{使得}xRy\text{且}ySz\}$$

定理3.2

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$$

定理3.3

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R\circ R\subseteq R$。

4. 关系矩阵和关系图

定义4.1
设$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个包含$m$个元素的集合，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$为一个包含$n$个元素的集合。令$R$是从$X$到$Y$的一个二元关系。由$R$定义一个$m \times n$矩阵$B = (b_{ij})$如下：$\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} x_i R y_j \\ 0, & \text{如果} x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵B称为关系R的矩阵。

4. 关系矩阵和关系图

例4.1

设$X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{a,b,c,d,e\}$，从X到Y的关系$S=\{(1,a),(2,b),(2,d),(2,e),(3,a),(3,b),(3,d),(3,e),(4,c),(4,d)\}$，则$S$的关系矩阵为?

4. 关系矩阵和关系图

例4.1

设$X=\{1,2,3,4\}$， $Y=\{a,b,c,d,e\}$， 从X到Y的关系$S=\{(1,a),(2,b),(2,d),(2,e),(3,a),(3,b),(3,d),(3,e),(4,c),(4,d)\}$，则$S$的关系矩阵为?

例4.2

设$X=\{1,2,3,4\}$， $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$，则$R$的关系矩阵为?

4. 关系矩阵和关系图

定理4.1

设B为集合X上二元关系R的矩阵，则

(1) R为自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为*1*；

(2) R为反自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为*0*；

(3) R为对称的，当且仅当B是对称矩阵；

(4) R为反对称的，当且仅当$i \neq j$时b_{ij}与b_{ji}不同时为*1;*

(5) R为传递的，当且仅当如果$b_{ij} = 1$且$b_{jk} = 1$，则$b_{ik} = 1$。

4. 关系矩阵和关系图

定理4.2

设R为集合X上的二元关系，则

(1) R是自反的，当且仅当R的图的每个顶点均有一个环;

(2) R是反自反的，当且仅当R的图中没有环;

(3) R是对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线;

(4) R是反对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两条方向相反的矢线;

(5) R是传递的，当且仅当如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

4. 关系矩阵和关系图

定理4.3

设B为集合X上二元关系R的矩阵，则R^{-1}的矩阵为B^T。

4. 关系矩阵和关系图

定义4.2

设B，C是两个布尔矩阵，B与C的逻辑乘为B与C的对应元素进行逻辑乘，所得到的布尔矩阵记为$B \wedge C$，即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

B与C的逻辑加为B与C的对应元素进行逻辑加，所得到的布尔矩阵记为$B \vee C$，即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

定理4.4

设R，S为从集合X到集合Y的二元关系，其矩阵分别为B_R和B_S。$R \cup S$ 与$R \cap S$的矩阵分别为$B_{R \cup S}$，$B_{R \cap S}$，则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.3

设A为$m \times p$布尔矩阵，B为$p \times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A \circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.3
设A为$m \times p$布尔矩阵，B为$p \times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A \circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

定理4.5
设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

5. 关系的闭包

定义5.1

设R为集合X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$$

5. 关系的闭包

定义5.1

设R为集合X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' 且 R' 是传递的} R'$$

定理5.1

设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a, x_1) \in R$且$(x_1, b) \in R$，结论成立。

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a,b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1},b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a,x_1) \in R$且$(x_1,b) \in R$，结论成立。

假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k+1$时定理的结论也成立。

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a, x_1) \in R$且$(x_1, b) \in R$，结论成立。

假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k + 1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a, x) \in R^k$且$(x, b) \in R$。

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a, x_1) \in R$且$(x_1, b) \in R$，结论成立。

假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k + 1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a, x) \in R^k$且$(x, b) \in R$。由归纳假设，$(a, x) \in R^k$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{k-1}, x) \in R$。

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:
当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a, x_1) \in R$且$(x_1, b) \in R$，结论成立。
假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k + 1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a, x) \in R^k$且$(x, b) \in R$。由归纳假设，$(a, x) \in R^k$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{k-1}, x) \in R$。记$x_k = x$，则$(a, b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，$x_k \in X$，使得$(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in R, (x_k, b) \in R$。 □

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a, b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a,b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$, $(b_1,b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \le i < j \le k$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a,b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$, $(b_1,b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \leq i < j \leq k$。于是，我们有$(a,b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1}, b) \in R$,故$(a,b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k-(j-i) < k$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a,b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$, $(b_1,b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \le i < j \le k$。于是，我们有$(a,b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1}, b) \in R$,故$(a,b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k-(j-i) < k$。若$p_1 = k-(j-i) > n$, 则重复上述过程又有$p_2 < p_1$使得$(a,b) \in R^{p_2}$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X|=n$，则

$$R^+=\bigcup_{i=1}^{n}R^i=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数$k>n$，有$R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$。为此，设$(a,b)\in R^k$，则存在$b_1,b_2,\cdots,b_{k-1}\in X$使得$(a,b_1)\in R$, $(b_1,b_2)\in R,\cdots,(b_{k-2},b_{k-1})\in R,(b_{k-1},b)\in R$。记$b_0=a,b_k=b$。$b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n<k$，所以$b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b$中必有两个相等的元素。设$b_i=b_j$，$1\le i<j\le k$。于是，我们有$(a,b_1)\in R,\cdots,(b_{i-1},b_i)\in R,(b_j,b_{j+1})\in R,\cdots,(b_{k-1},b)\in R$,故$(a,b)\in R^{k-(j-i)}$，$p_1=k-(j-i)<k$。若$p_1=k-(j-i)>n$, 则重复上述过程又有$p_2<p_1$使得$(a,b)\in R^{p_2}$。如此进行下去，必有$m\le n$使得$(a,b)\in R^m$。所以，$R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a, b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \le i < j \le k$。于是，我们有$(a, b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1}, b) \in R$,故$(a, b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k - (j - i) < k$。若$p_1 = k - (j - i) > n$, 则重复上述过程又有$p_2 < p_1$使得$(a, b) \in R^{p_2}$。如此进行下去，必有$m \le n$使得$(a, b) \in R^m$。所以，$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。因此，$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。 □

5. 关系的闭包

定理5.5

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，B为R的关系矩阵，B_{R^+}为R^+的关系矩阵，简记为B^+，则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(n)}$$

5. 关系的闭包

TRANSITIVE-CLOSURE(B)

// B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R

$M = B$

$A = M$

for $i = 2$ **to** n

  $M = M \circ B$

  $A = A \vee M$

return A // A is the zero-one matrix for R^+

5. 关系的闭包

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            for j = 1 to n
                a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
    return A // A is the zero-one matrix for R⁺
```

5. 关系的闭包

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            if a_ik == 1
                for j = 1 to n
                    a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
    return A // A is the zero-one matrix for R+
```

6. 等价关系与集合的划分

定义6.1
集合X上的二元关系R称为等价关系，如果R同时满足以下三个性质：

(1) R是自反的，即对X中的任意元素x，xRx;

(2) R是对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy，则yRx;

(3) R是传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

例6.2
设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned} R =& \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\ &(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\}, \end{aligned}$$

则R为X上的等价关系。

6. 等价关系与集合的划分

定义6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，$x \in X$，X的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为x关于$\cong$的等价类，记为$[x]$，即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

6. 等价关系与集合的划分

定义6.3

设X为集合，X的一些非空子集形成的集族$\mathscr{A}$称为X的一个划分，如果$\mathscr{A}$具有性质

1. $\forall A, B \in \mathscr{A}$，如果$A \neq B$，则$A \cap B = \phi$;
2. $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} = X$

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

定理6.2

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系且$\mathscr{A}$就是$\cong$的等价类之集。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.3

设X为一个集合，

$$\mathbb{R}=\{\cong\subseteq X\times X|\cong\text{为集合}X\text{上的一个等价关系}\},$$

$$\mathbb{A}=\{\mathscr{A}\subseteq 2^X|\mathscr{A}\text{为集合}X\text{的一个划分}\},$$

$$f=\{(\cong,\{[x]_{\cong}|x\in X\})|\cong\in\mathbb{R},[x]_{\cong}=\{y\in X|x\cong y\}\}$$

$$g=\{(\mathscr{A},\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\times A)|\mathscr{A}\in\mathbb{A}\}$$

则f为从$\mathbb{R}$到$\mathbb{A}$的双射，且$f^{-1}=g$。

6. 等价关系与集合的划分

证明.

1. 证明f为映射。这就是要证明对于集合X上的任意一个等价关系$\cong$， $\{[x]_{\cong} | x \in X\}$为集合$X$的一个划分。
2. 证明g为映射。这就是要证明对于集合X的任意一个划分$\mathscr{A}$，$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$为集合$X$上的一个等价关系。
3. 证明$g \circ f = I_{\mathbb{R}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个等价关系$\cong$，$\bigcup_{x\in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$。
4. 证明$f \circ g = I_{\mathbb{A}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个划分$\mathscr{A}$，等价关系$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$所对应的等价类的集合就是$\mathscr{A}$。

$\square$

7. 偏序关系与偏序集

定义7.1
集合X上的二元关系R称为偏序关系，如果R同时满足以下三个性质：

(1) R是自反的，即对X中的任意元素x，xRx；
(2) R是反对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy且yRx，则$x = y$；
(3) R是传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.1
集合X上的二元关系R称为**偏序关系**，如果R同时满足以下三个性质：

(1) R是自反的，即对X中的任意元素x，xRx；

(2) R是反对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy且yRx，则$x=y$；

(3) R是传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

定义7.2
设$\leq$为集合X上的一个偏序关系，则称二元组$(X,\leq)$为**偏序集**。

7. 偏序关系与偏序集

例7.1

实数集$\mathbb{R}$上通常的“小于等于”关系$\leq$是偏序关系，所以$(\mathbb{R}, \leq)$为偏序集。

例7.2

设S为一个集合，S的子集间的包含关系$\subseteq$是2^S上的偏序关系，所以$(2^{\mathbb{S}}, \subseteq)$为偏序集。

7. 偏序关系与偏序集

例7.3

设集合$X=\{a,b,c,d\}$上的关系R定义如下:

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

则R为X上的偏序关系。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.3

设$\leq$为集合X上的偏序关系，如果$\forall x, y \in X$，$x \leq y$与$y \leq x$至少有一个成立，则称$\leq$为X上的全序关系。相应的，二元组$(X, \leq)$称为全序集。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.4
设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$使得$\forall x \in A$有$x \leq s$，则称s为A的最大元素；如果存在一个元素$t \in A$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称t为A的最小元素。

定义7.5
设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$,在A中没有元素x使得$s < x$，则称s为A的极大元素；如果存在一个元素$t \in A$，在A中没有元素x使得$x < t$，则称t为A的极小元素。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.6

设$(X,\leq)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果存在一个元素$s\in X$使得$\forall x\in A$有$x\leq s$，则称s为A的一个上界；如果存在一个元素$t\in X$使得$\forall x\in A$有$t\leq x$，则称t为A的一个下界。

定义7.7

设$(X,\leq)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果A有上界且A的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为A的上确界，记为$\sup A$；如果A有下界且A的一切下界之集有最大元素，则这个最大下界称为A的下确界，记为$\inf A$。

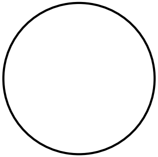
7. 偏序关系与偏序集

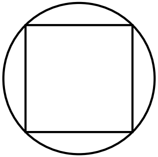
设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

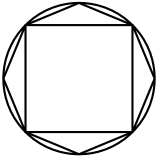
1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \to x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

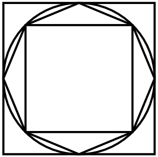
7. 偏序关系与偏序集

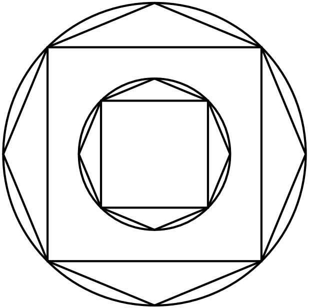
1. $x \le x$
2. $x \le y \wedge y \le x \to x = y$
3. $x \le y \wedge y \le z \to x \le z$
4. $x \le y \vee y \le x$
5. $x > y \to x + z > y + z$
6. $x > y \wedge z > 0 \to x * z > y * z$
7. $\forall A \subseteq \mathbb{R}(A \neq \phi \wedge \exists x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \le x)) \to \exists z \in R((\forall y \in A(y \le z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \le x) \to z \le x))))$

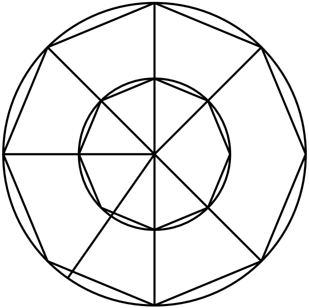












习题

习题1

是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系?

习题2

实数集上的“小于”关系$<$是否是反自反的? 集合X的幂集2^X上的“真包含”关系$\subset$是否是反自反的? 为什么?

习题3

下列说法是否正确? 若正确，请给出证明; 若不正确，请说明理由。

*1)*设R为集合X上的反自反的和传递的二元关系，则R为反对称的二元关系。

*2)*设R为集合X上的对称的和传递的二元关系，则R为自反的二元关系。

习题

习题4

设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$I_m(f)=I_m(g)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

习题5

设X,Y,S同习题4。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

习题

习题6

设X,Y,S同习题4。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{g^{-1}(\{y\})|y\in Y\}$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

习题7

是否存在一个偏序关系$\leq$，使$(X,\leq)$中有唯一极大元素，但没有最大元素？如果有，请给出一个具体例子；如果没有，请证明之。

习题8

令$X=\{a,b,c,d\}$，画出偏序集$(2^X,\subseteq)$的$Hasse$图。

习题

习题9

令$S=\{1,2,\cdots,12\}$，画出偏序集$(S,|)$的*Hasse*图，其中|为整除关系。它有几个极大（小）元素？列出这些极大（小）元素。

习题10

偏序集$(X,\leq)$称为有序完备的，当且仅当X的每个有上届的非空子集有上确界。证明：偏序集$(X,\leq)$为有序完备的当且仅当对X的每个有下界的非空子集有下确界。