

习题. 设 $f: X \rightarrow Y$ 。试证: f 为单射当且仅当对任意的 $F \in 2^Y$, $f^{-1}(f(F)) = F$ 。

证明. 设 f 为单射, 对任意的 $F \in 2^Y$, 往证 $f^{-1}(f(F)) = F$ 。

对任意的 x , $x \in f^{-1}(f(F))$, 则 $f(x) \in f(F)$, 于是存在 $x' \in F$, $f(x) = f(x')$, 由 f 为单射知 $x = x'$, 从而 $x \in F$ 。

对任意的 x , $x \in F$, 则 $f(x) \in f(F)$, 从而 $x \in f^{-1}(f(F))$ 。

设对任意的 $F \in 2^Y$, $f^{-1}(f(F)) = F$, 以下证明 f 为单射。

对任意的 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, 如果 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(\{x_1\}) = f(\{x_2\})$, 于是 $f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(f(\{x_2\}))$, 从而 $\{x_1\} = \{x_2\}$, 于是 $x_1 = x_2$ 。

□