

习题. 设 (X, \leq) 为偏序集, 证明集合 X 的每个有上界的非空子集有上确界当且仅当集合 X 的每个有下界的非空子集有下确界。

证明. 假设集合 X 的每个有上界的非空子集有上确界, 往证集合 X 的每个有下界的非空子集有下确界。设 B 为集合 X 的任意一个有下界的非空子集, 记 L 为 B 的所有下界构成的集合。由 B 有下界知 L 非空, 又由非空集合 B 中的任意一个元素均为 L 的一个上界知 L 有上界, 从而集合 L 有上确界, 记为 α 。

以下证明 α 为 B 的下确界。由 B 中的每个元素均为 L 的上界知, 对任意的 $\beta \in B$, $\alpha \leq \beta$, 从而 $\alpha \in L$ 。又由 α 为 L 的上确界知 α 为 L 的最大元, 从而 α 为 B 的下确界。这证明了 B 有下确界 α 。

类似的, 可以证明如果集合 X 的每个有下界的非空子集有下确界, 那么 X 的每个有上界的非空子集有上确界。 \square