

习题. 若 G 是一个 (p, q) 图, $q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$, 试证 G 是连通图。

证明. 用反证法。假设 G 不连通, 则至少有两个连通分量。设其中一个连通分量的顶点数为 p_1 , 边数为 q_1 , 所有其他连通分量的顶点数为 p_2 , 边数为 q_2 。则

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(p-1)(p-2) \\
 &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2 - 1)(p_1 + p_2 - 2) \\
 &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2 - 1)((p_1 - 1) + (p_2 - 1)) \\
 &= \frac{1}{2}(p_1(p_1 - 1) + p_1(p_2 - 1) + p_2(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) - (p_1 - 1) - (p_2 - 1)) \\
 &= \frac{1}{2}(p_1(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)) \\
 &= \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} + \frac{p_2(p_2 - 1)}{2} + (p_1 - 1)(p_2 - 1) \\
 &\geq \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} + \frac{p_2(p_2 - 1)}{2} \\
 &\geq q
 \end{aligned}$$

矛盾。

□