

习题. 设 R, S, T 为任意三个集合, 证明: $(R \Delta S) \cap (R \Delta T) \subseteq R \Delta (S \cap T)$ 。

证明 (利用自然语言叙述) . 对任意的 $x \in (R \Delta S) \cap (R \Delta T)$, 分两种情况讨论:

1) 如果 $x \in R$, 由 $x \in R \Delta S = (S \setminus R) \cup (R \setminus S)$ 知 $x \notin S$, 从而 $x \notin S \cap T$, 此时 $x \in R \Delta (S \cap T)$;

2) 如果 $x \notin R$, 由 $x \in R \Delta S = (S \setminus R) \cup (R \setminus S)$ 知 $x \in S$, 由 $x \in R \Delta T = (R \setminus T) \cup (T \setminus R)$ 知 $x \in T$, 从而 $x \in S \cap T$, $x \in R \Delta (S \cap T)$ 。

综合以上两种情况, 对任意的 $x \in (R \Delta S) \cap (R \Delta T)$, $x \in R \Delta (S \cap T)$, 结论得证。

□

证明 (利用集合运算规则)。

$$\begin{aligned}
 & (R \Delta S) \cap (R \Delta T) \\
 &= (R \setminus S \cup S \setminus R) \cap (R \setminus T \cup T \setminus R) \\
 &= (R \setminus S \cap R \setminus T) \cup (R \setminus S \cap T \setminus R) \cup (S \setminus R \cap R \setminus T) \cup (S \setminus R \cap T \setminus R) \\
 &= R \setminus (S \cup T) \cup \phi \cup \phi \cup (S \cap T) \setminus R \\
 &= R \setminus (S \cup T) \cup (S \cap T) \setminus R \\
 &\subseteq R \setminus (S \cap T) \cup (S \cap T) \setminus R \\
 &= R \Delta (S \cap T)
 \end{aligned}$$

□

证明 (利用符号逻辑) .

$$\begin{aligned}
 & \forall x, x \in (R \Delta S) \cap (R \Delta T) \\
 & \Leftrightarrow x \in R \Delta S \wedge x \in R \Delta T \\
 & \Leftrightarrow x \in (R \setminus S) \cup (S \setminus R) \wedge x \in (R \setminus T) \cup (T \setminus R) \\
 & \Leftrightarrow ((x \in R \wedge x \notin S) \vee (x \in S \wedge x \notin R)) \wedge ((x \in R \wedge x \notin T) \vee (x \in T \wedge x \notin R)) \\
 & \Leftrightarrow (x \in R \wedge x \notin S \wedge x \notin T) \vee (x \in S \wedge x \in T \wedge x \notin R) \\
 & \Rightarrow (x \in R \wedge (x \notin S \vee x \notin T)) \vee (x \in S \wedge x \in T \wedge x \notin R) \\
 & \Leftrightarrow (x \in R \wedge x \notin S \cap T) \vee ((x \in S \cap T) \wedge x \notin R) \\
 & \Leftrightarrow (x \in R \setminus (S \cap T)) \vee (x \in (S \cap T) \setminus R) \\
 & \Leftrightarrow x \in R \Delta (S \cap T)
 \end{aligned}$$

□

习题. 以下结论是否成立, 若成立, 给出证明; 若不成立, 请说明理由。

设 R, S, T 为任意三个集合, 则 $R \Delta (S \cap T) \subseteq (R \Delta S) \cap (R \Delta T)$ 。

解. 该结论不成立。这是因为当 $R = \{1\}, S = \{1\}, T = \phi$ 时, $R \Delta (S \cap T) = \{1\}$, $(R \Delta S) \cap (R \Delta T) = \phi$, $R \Delta (S \cap T) \subseteq (R \Delta S) \cap (R \Delta T)$ 不成立。 □