# 第八章 连通度和匹配

陈建文

# 1. 顶点连通度和边连通度

o

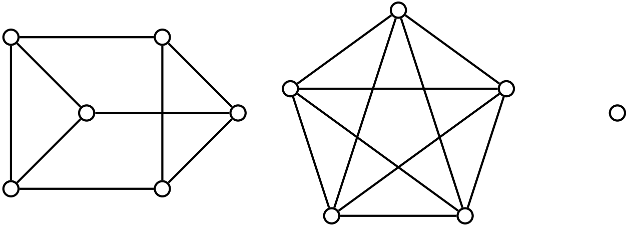
定义 1.1

图$G$的顶点连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从$G$中去掉的最少顶点数目，记为$\kappa(G)$。

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定义 1.1**

图$G$的顶点连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从$G$中去掉的最少顶点数目，记为$\kappa(G)$。



# 1. 顶点连通度和边连通度

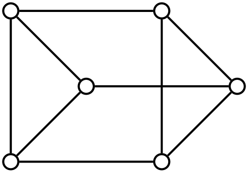
定义 1.2

图$G$的边连通度是指为了产生一个不连通图或者平凡图所需要从$G$中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。

# 1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

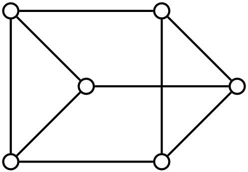
图$G$的边连通度是指为了产生一个不连通图或者平凡图所需要从$G$中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。

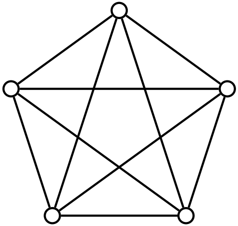


# 1. 顶点连通度和边连通度

**定义 1.2**

图$G$的边连通度是指为了产生一个不连通图或者平凡图所需要从$G$中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。

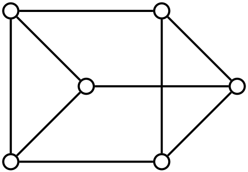


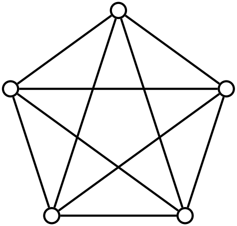


# 1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

图$G$的边连通度是指为了产生一个不连通图或者平凡图所需要从$G$中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。





# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.1**

对任一图$G$，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.1**
对任一图$G$，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

**证明.**

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.1**

对任一图$G$，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

**证明.**

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.1**

对任一图$G$，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

**证明.**

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.1**
对任一图$G$，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

**证明.**

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$

- $\delta(G) > 0$

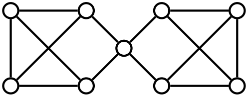
# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.1**
对任一图$G$，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

**证明.**

(1) 先证$\lambda(G) \le \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



# 1. 顶点连通度和边连通度

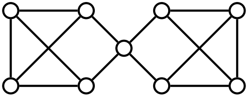
**定理 1.1**

对任一图$G$，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

**证明.**

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



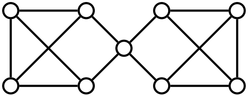
(2) 再证$\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.1**
对任一图$G$，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

**证明.**

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.
- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



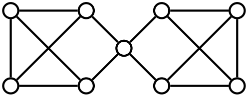
(2) 再证$\kappa(G) \leq \lambda(G)$.
- $G$为完全图

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.1**
对任一图$G$，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

**证明.**

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.
- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



(2) 再证$\kappa(G) \leq \lambda(G)$.
- $G$为完全图
- $G$不连通

# 1. 顶点连通度和边连通度

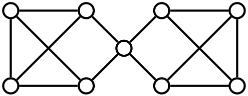
**定理 1.1**

对任一图$G$，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

**证明.**

(1) 先证$\lambda(G) \le \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



(2) 再证$\kappa(G) \le \lambda(G)$.

- $G$为完全图
- $G$不连通
- $G$为连通的非完全图

# 1. 顶点连通度和边连通度

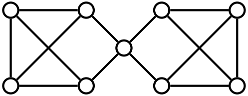
**定理 1.1**

对任一图$G$，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

**证明.**

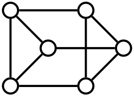
(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



(2) 再证$\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

- $G$为完全图
- $G$不连通
- $G$为连通的非完全图



□

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.2**
对任何整数$a, b, c$， $0 < a \le b \le c$， 存在一个图$G$使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

# 1. 顶点连通度和边连通度

### 定理 1.3

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

# 1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.3**

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

**证明.**

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.3**

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\ge[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

**证明.**

$\lambda(G)\le\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\ge\delta(G)$。

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.3**

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

**证明.**

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。

## 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.3**

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

**证明.**

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.3**

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

**证明.**

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

## 证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.3**

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

**证明.**

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。

# 1. 顶点连通度和边连通度

### 定理 1.3

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

### 证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

## 证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，
则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

## 证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，
则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设$v$为$A$中的任一顶点， $v$与$V\setminus A$中的$x$个顶点邻接，与$A$中的$y$个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

## 证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，
则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设$v$为$A$中的任一顶点， $v$与$V\setminus A$中的$x$个顶点邻接，与$A$中的$y$个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。 $v$与$V\setminus A$中的$x$个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_1$，则$F_1\subseteq F$；

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

## 证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，
则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设$v$为$A$中的任一顶点， $v$与$V\setminus A$中的$x$个顶点邻接，与$A$中的$y$个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。 $v$与$V\setminus A$中的$x$个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_1$，则$F_1\subseteq F$； $v$与$A$中的$y$个顶点邻接，而这$y$个顶点中的每个顶点都至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_2$，
则$F_2\subseteq F$ 并且$F_1\cap F_2=\phi$，

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设$G=(V,E)$有$p$个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

## 证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，
则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设$v$为$A$中的任一顶点， $v$与$V\setminus A$中的$x$个顶点邻接，与$A$中的$y$个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。 $v$与$V\setminus A$中的$x$个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_1$，则$F_1\subseteq F$； $v$与$A$中的$y$个顶点邻接，而这$y$个顶点中的每个顶点都至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_2$，
则$F_2\subseteq F$ 并且$F_1\cap F_2=\phi$，从而

$$\lambda(G)\geq|F_1|+|F_2|\geq x+y=\deg v\geq\delta(G)$$

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定义 1.3**

设$G$为一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称$G$为$n$-顶点连通的，简称$n$-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称$G$为$n$-边连通的。

# 1. 顶点连通度和边连通度

**定理 1.4**

设$G=(V,E)$为有$p$个顶点的图，$p\geq 3$，则$G$为2-连通的，当且仅当$G$的任意两个不同的顶点在$G$的同一个圈上。

## 2. 门格尔定理

**定义 2.1**

设$u$与$v$为图$G$中的两个不同的顶点。两条联结$u$与$v$的路，如果除了$u$与$v$外没有公共顶点，则称这两条路为联结$u$与$v$的不相交路；如果联结$u$与$v$的两条路上没有公共边，则称这两条路为联结$u$与$v$的边不相交路。

**定理 2.1**

图$G$为$n-$连通的当且仅当每一对不同顶点间至少有$n$条不相交路。

**定理 2.2**

图$G$为$n-$边连通的当且仅当$G$的任一对不同的顶点间至少有$n$条边不相交路。

# 3. 匹配、霍尔定理

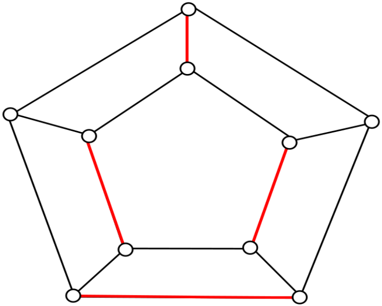
**定义 3.1**

设$G=(V,E)$为一个图，$G$的任意两条不邻接的边$x$与$y$称为互相独立的。$G$的边集$E$的子集$Y$称为$G$的一个匹配，如果$Y$中任意两条边都是互相独立的。

# 3. 匹配、霍尔定理

定义 3.1

设$G=(V,E)$为一个图，$G$的任意两条不邻接的边$x$与$y$称为互相独立的。$G$的边集$E$的子集$Y$称为$G$的一个匹配，如果$Y$中任意两条边都是互相独立的。



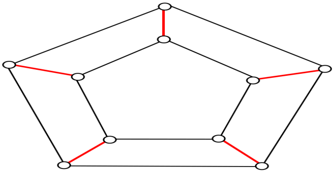
# 3. 匹配、霍尔定理

**定义 3.2**

设$Y$为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果$2|Y|=|V|$，则称$Y$为$G$的一个完美匹配。

# 3. 匹配、霍尔定理

定义 3.2
设$Y$为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果$2|Y|=|V|$，则称$Y$为$G$的一个完美匹配。



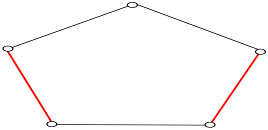
# 3. 匹配、霍尔定理

**定义 3.3**

设$Y$为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果对于$G$的任一匹配$Y'$，恒有$|Y'|\leq|Y|$, 则称$Y$为$G$的一个**最大匹配**。

# 3. 匹配、霍尔定理

定义 3.3
设$Y$为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果对于$G$的任一匹配$Y'$，恒有$|Y'|\leq|Y|$, 则称$Y$为$G$的一个最大匹配。



定义 3.4
设$G=(V,E)$为一个偶图且$V=V_1\cup V_2, \forall x\in E$，$x$为联结$V_1$的一个顶点与$V_2$的一个顶点的边。如果存在$G$的一个匹配$Y$使得$|Y|=min\{|V_1|,|V_2|\}$，则称$Y$是偶图$G$的一个完全匹配。

# 3. 匹配、霍尔定理

**定义 3.5**

设$X$为一个有穷集合，$A_1, A_2, \ldots, A_n$为$X$的子集的一个序列，由$X$的互不相同的元素构成的序列$s_1, s_2, \ldots, s_n$称为系统

$$T : A_1, A_2, \ldots, A_n$$

的相异代表系，如果$s_i \in A_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$。

# 匹配

**定理 3.1**
设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，存在$G$的一个完全匹配$Y$且$|Y|=|V_1|$的充分必要条件是对$V_1$的任意子集$A$，$|N(A)|\geq|A|$，其中

$$N(A)=\{y\in V_2|\exists x\in A\{x,y\}\in E\}$$

# 匹配

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，如果存在$G$的一个完全匹配$Y$且$|Y| = |V_1|$，则显然对$V_1$的任意子集$A$， $|N(A)| \geq |A|$。

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对$V_1$的任意子集$A$， $|N(A)| \geq |A|$，以下用数学归纳法证明存在$G$的一个完全匹配$Y$使得$|Y| = |V_1|$，施归纳于$|V_1|$。

(1)当$|V_1| = 1$时，设$V_1$中唯一的一个元素为$u$，由$|N(V_1)| \geq |V_1|$知 $N(V_1)$中至少含有一个元素$v$，则$\{\{u, v\}\}$构成了$G$的一个满足条件的完全匹配。

(2)假设当$|V_1| < k$时结论成立，往证当$|V_1| = k$时结论也成立。设$|V_1| = k$，分以下两种情况讨论:

（i）对$V_1$的任意真子集$A$，$|N(A)| > |A| + 1$。取$V_1$中的任意一个元素$u$，由于$|N(\{u\})| \geq 1$， 可取 $N(\{u\})$中的一个元素$v$使得$uv \in E$。 考虑偶图$G - \{u, v\}$，对任意的 $V_1 \setminus \{u\}$的子集$B$， $|N(B)| \geq |B|$。由归纳假设，偶图$G - \{u, v\}$ 有一个完全匹配$Y'$且$|Y'| = |V_1 \setminus \{u\}|$。$Y' \cup \{\{u, v\}\}$即为$G$的 一个完全匹配，且$|Y' \cup \{\{u, v\}\}| = |V_1|$。 □

# 匹配

**证明(续上页).**

（ii）存在$V_1$的真子集$A$，$|N(A)| = |A|$。
考虑图$G$中由$A \cup N(A)$导出的子图$G_1$以及由$(V_1 \setminus A) \cup (N(V_1 \setminus A) \setminus N(A))$导出的子图$G_2$。 $G_1$为偶图，且在$G_1$中对$A$的任意子集$B$，$|N(B)| \geq |B|$。 $G_2$为偶图，且在$G_2$中对集合$V_1 \setminus A$的任意子集$C$， $|N(C)| \geq |C|$， 这是因为如果 $|N(C)| < |C|$，则$|N(C \cup A)| < |C \cup A|$， 与前提条件矛盾。由归纳假设， $G_1$有完全匹配$M_1$，$|M_1| = |A|$，$G_2$有完全匹配$M_2$，$|M_2| = |V_1 \setminus A|$。于是 $M_1 \cup M_2$构成了$G$的完全匹配，且$|M_1 \cup M_2| = |V_1|$。

$\square$

# 匹配

**定理 3.2**

设$X$为一个有限集，系统$T:A_1,A_2,\cdots,A_n$为$X$的一些子集组成的，则$T$有相异代表系的充分必要条件是$\forall I\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$有

$$|\bigcup_{i\in I}A_i|\geq|I|$$

# 参考文献

D. Gale and L. S. Shapley.
College Admissions and the Stability of Marriage.
The American Mathematical Monthly, 1962.