

习题. 证明: 一个连通的 (p, q) 图中 $q \geq p - 1$ 。

证明. 设 G 为一个连通图, 有 p 个顶点, q 条边。如果 G 中有圈, 去掉该圈上的一条边, 得到的图仍然为连通的。如果所得到的图中还有圈, 再去掉该圈上的一条边, 得到的图还是连通的。如此进行下去, 最后可以得到一个连通无圈的图。假设该连通无圈的图中有 q' 条边, 如果能够证明 $q' = p - 1$, 则结论得证。

因此, 只需证明一个连通无圈的 (p, q) 图中 $q = p - 1$ 即可。设 T 为一个连通无圈的 (p, q) 图, 以下用数学归纳法证明 $q = p - 1$ 。

(证法一)

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 p 。

(1) 当 $p = 1$ 时, $q = 0$, 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 T 有 $k + 1$ 个顶点。 T 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 P 为 T 中的一条最长路, v 为 P 的一个端点, 则 v 除了 P 上与其关联的边之外, 由 T 中无圈知 v 不能再有其他的与 P 上的顶点相关联的边, 同时由 P 为一条最长路知 v 不能再有与 P 外的顶点相关联的边, 因此 v 的度必为1。去掉 T 中一个度为1的顶点及其与之关联的边, 得到的图 T' 连通且无圈。 T' 有 k 个顶点, $q - 1$ 条边, 由归纳假设, $q - 1 = k - 1$, 从而 $q = (k + 1) - 1$, 即当 $p = k + 1$ 时结论也成立。

(证法二) 用数学归纳法证明, 施归纳于边数 q 。

(1) 当 $q = 0$ 时, $p = 1$, 结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立, 往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 T 有 k 条边。去掉 T 中的任意一条边, 得到两个支 T_1 和 T_2 , 它们均连通无圈。设 T_1 有 k_1 个顶点, q_1 条边, T_2 有 k_2 个顶点, q_2 条边, 由归纳假设,

$$k_1 = p_1 - 1$$

$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加, 两边再同时加1, 得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当 $q = k$ 时结论也成立。

□