

习题 (294-2). 设 G 为一个没有三角形的可平面图。应用数学归纳法证明 G 为4-可着色的。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 p 。

(1) 当 $p = 1$ 时, 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 G 为包含 $k + 1$ 个顶点, 没有三角形的可平面图, 知 G 中存在一个顶点 v , $\deg v \leq 3$ 。显然, $G - v$ 为包含 k 个顶点, 没有三角形的可平面图, 由归纳假设, $G - v$ 为4可着色的。假设已经用至多4种颜色对 $G - v$ 进行了顶点着色, 使得任意相邻的顶点着不同的颜色, 那么此时在 G 中与 v 邻接的顶点用了至多3种颜色, 用另外一种不同的颜色对顶点 v 进行着色, 从而用至多4种颜色就可以对 G 的顶点进行着色使得相邻的顶点着不同的颜色, 即 G 为4可着色的。

□