

**习题.** 毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证明. 设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘 $g_1$ 未能与小伙子 $b_2$ 跳过舞，否则与 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是， $b_1$ 与 $g_1$ 跳过舞，但未与 $g_2$ 跳过舞； $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞，但未与 $g_1$ 跳过舞，结论得证。  $\square$