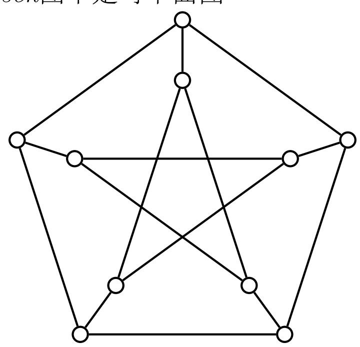
习题 (282-6)**.** 图G的最短圈的长度称为G的围长；如果G中没有圈，则定义G的围长为无穷大。 证明：

*(i)*围长为r的平面连通图G中有

$$q \leq \frac{r(p-2)}{r-2}, r \geq 3$$

*(ii)*利用*(i)*证明$Petersen$图不是可平面图。



$Petersen$图

(i)

证明. 设G有f个面，由G的围长为r知每个面至少含有r条边，因此

$$2q \geq rf$$

即

$$\frac{2q}{r} \geq f$$

因此，根据欧拉公式

$$p - q + f = 2$$

得

$$p - q + \frac{2q}{r} \geq 2$$

从而

$$p - 2 \geq (1 - \frac{2}{r})q$$

即

$$q \leq \frac{p-2}{1-\frac{2}{r}} = \frac{r(p-2)}{r-2}$$

□

(ii)

证明. 用反证法，假设Petersen图为可平面图，其顶点数$p=5$, 边数$q=10$，围长$r=5$，此时

$$q \leq \frac{r(p-2)}{r-2}$$

即

$$15 \leq \frac{5(10-2)}{5-2} = \frac{40}{3}$$

矛盾。因此Petersen图不是可平面图。 $\square$