

**习题.** 设 $M$ 为一个非空集合,  $\phi : M \rightarrow M$ ,  $N \subseteq M$ 。令 $\mathcal{A} = \{P | P \subseteq M \text{ 且 } N \subseteq P, \phi(P) \subseteq P\}$ ,  $G = \cap_{P \in \mathcal{A}} P$ 。试证: (1) $G \in \mathcal{A}$ ; (2) $N \cup \phi(G) = G$ 。

证明. (1) 易验证 $G \subseteq M$ 且 $N \subseteq G$ ,  $\phi(G) \subseteq G$ , 从而 $G \in \mathcal{A}$ 。

(2) 由 $N \subseteq G$ ,  $\phi(G) \subseteq G$ 知 $N \cup \phi(G) \subseteq G$ 。

以下证明 $G \subseteq N \cup \phi(G)$ 。首先验证

$$G = N \cup \phi(N) \cup \dots \cup \phi^n(N) \cup \dots \quad (1)$$

由此易得 $G \subseteq N \cup \phi(G)$ 。

(1)式就是要证 $\cap_{P \in \mathcal{A}} P = N \cup \phi(N) \cup \dots \cup \phi^n(N) \cup \dots$ 。首先验证 $N \cup \phi(N) \cup \dots \cup \phi^n(N) \cup \dots \in \mathcal{A}$ , 从而 $\cap_{P \in \mathcal{A}} P \subseteq N \cup \phi(N) \cup \dots \cup \phi^n(N) \cup \dots$ 。其次验证对任意的 $P \in \mathcal{A}$ ,  $N \cup \phi(N) \cup \dots \cup \phi^n(N) \cup \dots \subseteq P$ , 从而 $N \cup \phi(N) \cup \dots \cup \phi^n(N) \cup \dots \subseteq \cap_{P \in \mathcal{A}} P$ 。□