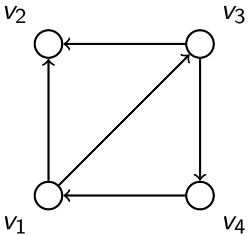
第十章有向图

陈建文

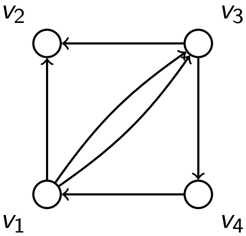
1. 有向图的概念

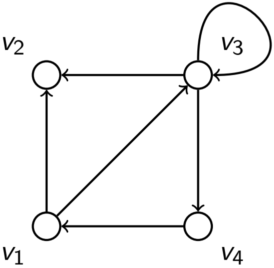
定义1.1

设V为一个有穷非空集合，$A \subseteq V \times V \setminus \{(v,v)|v \in V\}$，二元组$D=(V,A)$称为一个有向图。$V$称为有向图$D$的顶点集，$V$中的元素称为$D$的顶点。$A$称为$D$的弧集或有向边集，$A$中的元素称为$D$的弧或有向边。如果$x=(u,v) \in A$，则$u$称为弧$x$的起点，$v$称为弧$x$的终点。



1. 有向图的概念

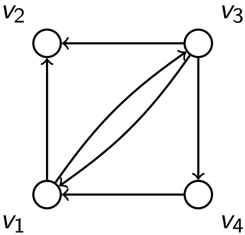


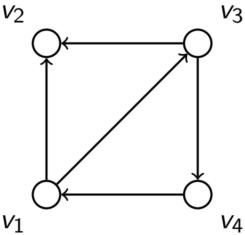


1. 有向图的概念

定义1.2

如果(u, v)和(v, u)都是有向图D的弧，则称(u, v)与(v, u)为D的对称弧。如果D中不含对称弧，则称D为定向图。



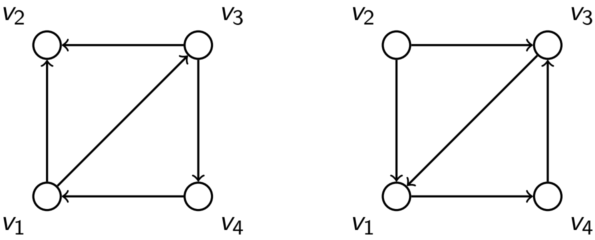


1. 有向图的概念

定义1.3

设$D=(V,A)$为一个有向图，D的反向图为有向图$D^T=(V,A^T)$，其中

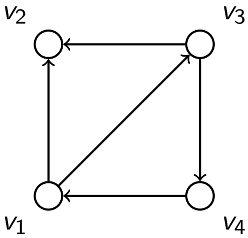
$$A^T=\{(u,v)|(v,u)\in A\}$$



1. 有向图的概念

定义1.4

设$D=(V,A)$为一个有向图，v为D的任一顶点，以v为终点的弧称为v的入弧；以v为始点的弧称为v的出弧。顶点v的入弧的条数称为v的入度，记为$id(v)$；顶点v的出弧的条数称为v的出度，记为$od(v)$。



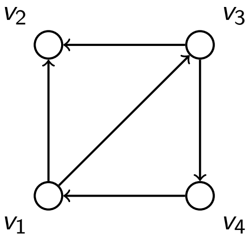
1. 有向图的概念

定理1.1
设$D=(V,A)$为一个有向图，$|A|=q$，则

$$\sum_{v\in V} id(v)=\sum_{v\in V} od(v)=q$$

从而

$$\sum_{v\in V}(id(v)+od(v))=2q$$

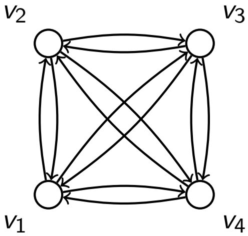


1. 有向图的概念

定义1.5

有向图$D=(V,A)$称为完全有向图，如果

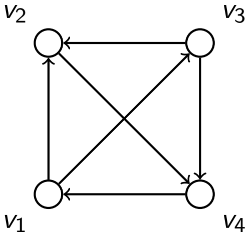
$$A = V \times V \setminus \{(v,v) | v \in V\}$$



1. 有向图的概念

定义1.6

一个比赛图为一个定向完全图，即任两个不同顶点间有且仅有一条弧。

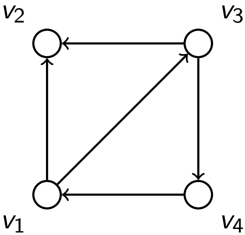


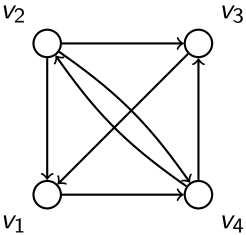
1. 有向图的概念

定义1.7

有向图$D=(V,A)$的补图定义为$D^c=(V,A^c)$，其中

$$A^c=(V\times V\setminus\{(v,v)|v\in V\})\setminus A$$

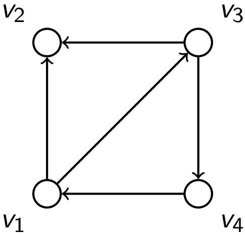


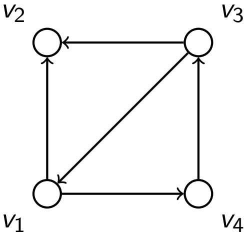


1. 有向图的概念

定义1.8

设$D_1 = (V_1, A_1)$，$D_2 = (V_2, A_2)$都为有向图，如果存在一个一一对应$\varphi : V_1 \to V_2$，使得$\forall u, v \in V_1, (u, v) \in A_1$当且仅当$(\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$，则称$D_1$与$D_2$同构。

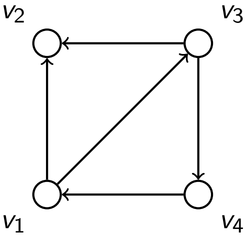


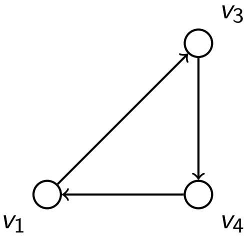


1. 有向图的概念

定义1.9

设$D = (V, A)$为一个有向图，有向图$H = (V_1, A_1)$称为D的一个子图，如果V_1为V的非空子集，A_1为A的子集。如果$H \neq D$，则称H为D的真子图。

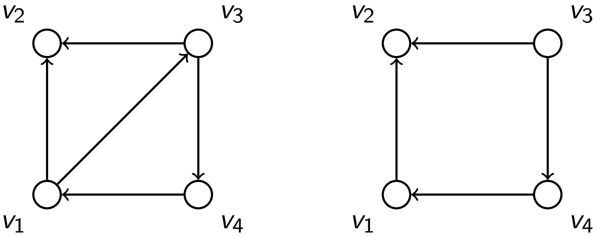




1. 有向图的概念

定义1.10

设$D=(V,A)$为一个有向图，如果$F\subseteq A$，则称D的子图$H=(V,F)$ 为D的一个生成子图。

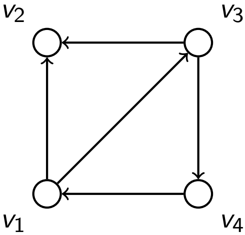


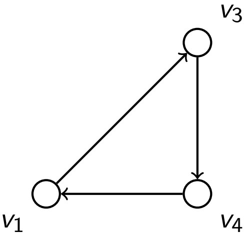
1. 有向图的概念

定义1.11

设$D=(V,A)$为一个有向图，如果$S\subseteq V$，则S的导出子图定义为$H=(S,F)$，其中

$$F=\{(u,v)\in A|u\in S,v\in S\}$$





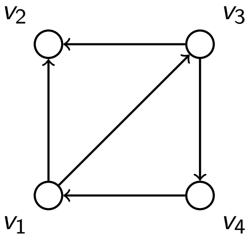
2. 有向路和有向圈

定义2.1

设$D=(V,A)$为一个有向图。D的一条有向通道为D的顶点和弧的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

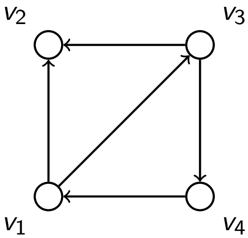
其中$x_i=(v_{i-1}, v_i)$，$i=1,2,\cdots,n$。n称为该有向通道的长。这样的有向通道常称为v_0-v_n有向通道，并简记为$v_0v_1v_2\ldots v_n$。如果有向通道的长大于等于1且$v_0=v_n$,则称此有向通道为闭有向通道。



2. 有向路和有向圈

定义2.2

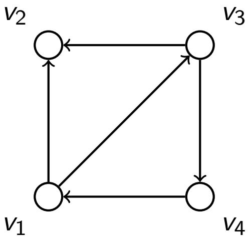
如果有向图中一条有向通道的各弧互不相同，则称此有向通道为有向图的有向迹。如果一条闭有向通道上的各弧互不相同，则称此闭有向通道为闭有向迹。



2. 有向路和有向圈

定义2.3

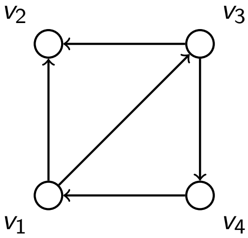
如果一条有向迹上的各顶点互不相同，则称此有向迹为有向路。如果闭有向迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭有向迹为有向圈，或有向回路。



2. 有向路和有向圈

定义2.4

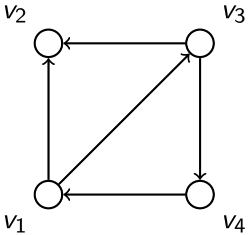
含有向图D的所有顶点的有向圈称为D的生成有向圈，或有向哈密顿圈。有生成有向圈的有向图称为有向哈密顿图。含有向图D的所有顶点的有向路称为D的生成有向路，或有向哈密顿路。



2. 有向路和有向圈

定义2.5

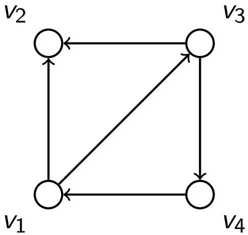
设$D=(V,A)$为一个有向图，u和v为D的顶点。如果在D中有一条从u到v的有向路，则称从u能达到v，或者v是从u可达的。



2. 有向路和有向圈

定义2.6

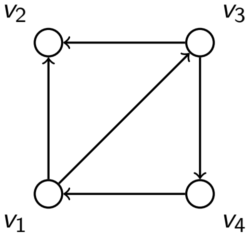
有向图D称为是强连通的，如果对D的任两个不同的顶点u和v，u和v是互达的。



2. 有向路和有向圈

定义2.7

有向图D的极大强连通子图称为D的一个强支。



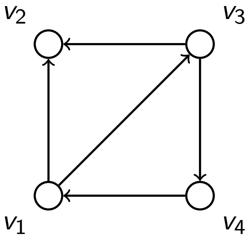
2. 有向路和有向圈

定理2.1

设$D=(V,A)$为一个有向图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

$$\forall u,v\in V, u\cong v\text{当且仅当}u\text{与}v\text{互达}$$

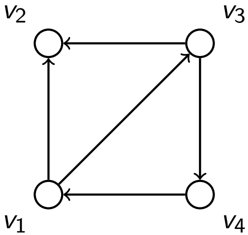
则$\cong$是V上的等价关系，D的强支就是关于$\cong$的每个等价类的导出子图。



2. 有向路和有向圈

定义2.8

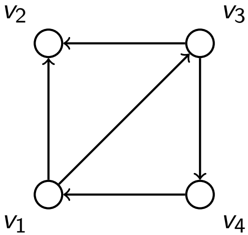
有向图$D=(V,A)$称为单向连通的，如果对D的任两个不同顶点u和v，或从u可达到v，或从v可达到u。



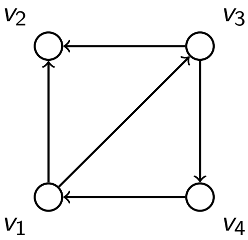
2. 有向路和有向圈

定义2.9

设$D=(V,A)$为一个有向图，如果抹去D中所有弧的方向之后所得到的无向图是连通的，则称D为**弱连通**的，简称**连通**的。



4. 有向图的邻接矩阵



4. 有向图的邻接矩阵

定理4.1
设B为有向图$D=(V,A)$的邻接矩阵，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，则从顶点v_i到顶点v_j的长为l的有向通道的条数等于B^l的第i行第j列元素$(B^l)_{ij}$的值。

4. 有向图的邻接矩阵

定理4.2

设$p \times p$矩阵B是有向图$D = (V, A)$的邻接矩阵，则D的可达矩阵

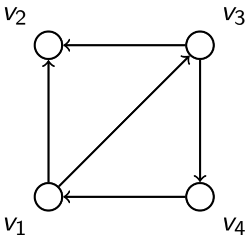
$$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(p-1)}$$

4. 有向图的邻接矩阵

定理4.3
设$p \times p$矩阵R为有向图$D=(V,A)$的可达矩阵，

$$C = R \wedge R^T,$$

C的第i行上为1的元素$c_{ij_1}, c_{ij_2}, \ldots, c_{ij_k}$，则$v_i$在由$V_i = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}\}$诱导出的$D$的子图-$D$的强支中。



5. 有向树与有序树

定义5.1

一个有向图，如果抹去其所有弧的方向以后所得到的无向图是一棵无向树，则称该有向图为一棵有向树。

5. 有向树与有序树

定义5.2

有向树D称为有根树，如果D中恰有一个顶点的入度为0，而其余每个顶点的入度均为1。有根树中入度为0的顶点称为有根树的根，出度为0的顶点称为叶子，非叶顶点称为分支点或内顶点。

5. 有向树与有序树

定义5.3

设$T=(V,A)$为一棵有根树。如果$(u,v)\in A$，则称v为u的儿子，u为v的父亲。如果从顶点u能达到顶点v，则称v为u的子孙，u为v的祖先。如果u是v的祖先且$u\neq v$，则称u为v的真祖先，v为u的真子孙。

5. 有向树与有序树

定义5.4

设$T = (V, A)$为一棵以v_0为根的有根树。从v_0到顶点v的有向路的长度称为T的顶点v的深度。从顶点v到T的叶子的最长的有向路的长度称为顶点v在T中的高度。根顶点v_0的高度称为树T的高度。

5. 有向树与有序树

定义5.5

设$T=(V,A)$为一棵有根树，v是T的一个顶点，由v及其子孙所导出的T的子图称为T的以v为根的子树。

5. 有向树与有序树

定义5.6

设$T = (V, A)$为一棵有根树。如果T的每个顶点的各个儿子排定了次序，则称T为一棵有序树。

5. 有向树与有序树

定义5.7

有序树T称为m元有序树，如果T的每个顶点的出度$\leq m$。一棵m元有序树T称为正则m元有序树，如果T的每个顶点的出度不是0就是m。二元有序树简称二元树。

习题

习题1

设无向图$G=(V,E)$，其中$V=\{1,2,3,4,5,6\},E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{4,5\}\}$，则无向图$G$有______个连通分量。

习题2

设有向图$D=(V,A)$，其中$V=\{1,2,3,4,5,6\},A=\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5)\}$，则有向图$D$有______个强连通分量。