习题. 证明：一个连通的(p,q)图中$q \geq p-1$。

证明. 设G为一个连通图，有p个顶点，q条边。如果G中有圈，去掉该圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果所得到的图中还有圈，再去掉该圈上的一条边，得到的图还是连通的。如此进行下去，最后可以得到一个连通无圈的图。假设该连通无圈的图中有q'条边，如果能够证明$q' = p-1$，则结论得证。

因此，只需证明一个连通无圈的(p,q)图中$q = p-1$即可。设T为一个连通无圈的(p,q)图，以下用数学归纳法证明$q = p-1$。

（证法一）

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，$q=0$,结论显然成立。

（2）假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为1。去掉T中一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈。T'有k个顶点，$q-1$条边，由归纳假设，$q-1=k-1$，　从而$q=(k+1)-1$，　即当$p=k+1$时结论也成立。

（证法二）

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q=0$时，$p=1$,结论显然成立。

（2）假设当$q<k$时结论成立，往证当$q=k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加1，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当$q=k$时结论也成立。 □