

# 习题讲解

陈建文

## 习题

设 $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ 为任意四个集合, 证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

## 习题

设 $A, B, C, D$ 为任意四个集合，证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

## 定义1

设 $A, B$ 为任意的两个集合，由既属于集合 $A$ 又属于集合 $B$ 的所有元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的交集，记为 $A \cap B$ 。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

## 习题

设 $A, B, C, D$ 为任意四个集合，证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

## 定义1

设 $A, B$ 为任意的两个集合，由既属于集合 $A$ 又属于集合 $B$ 的所有元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的交集，记为 $A \cap B$ 。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

例：

- ▶ 设 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ ，则 $A \cap B = \{2\}$
- ▶ 设 $C = \{2, 3\}, D = \{3\}$ ，则 $C \cap D = \{3\}$

## 习题

设 $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ 为任意四个集合, 证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

## 习题

设 $A, B, C, D$ 为任意四个集合，证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

## 定义2

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一个对象为 $a$ ，第二个对象为 $b$ ，则该有序对记为 $(a, b)$ 。

$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

## 习题

设 $A, B, C, D$ 为任意四个集合，证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

## 定义2

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一个对象为 $a$ ，第二个对象为 $b$ ，则该有序对记为 $(a, b)$ 。

$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

## 定义3

设 $A$ 与 $B$ 为任意两个集合，则称集合 $\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ 为 $A$ 与 $B$ 的**笛卡尔乘积**，记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

例：

如果 $A = \{1, 2\}$ ， $C = \{2, 3\}$ ，则 $A \times C = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

如果 $B = \{2, 3\}$ ， $D = \{3\}$ ，则 $B \times D = \{(2, 3), (3, 3)\}$

## 习题

设 $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ 为任意四个集合, 证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$



## 习题

设 $A, B, C, D$ 为任意四个集合, 证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

如果 $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $C = \{2, 3\}$ ,  $D = \{3\}$ , 则

$$\begin{aligned} & (A \times C) \cap (B \times D) \\ &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\} \cap \{(2, 3), (3, 3)\} \\ &= \{(2, 3)\} \\ & (A \cap B) \times (C \cap D) \\ &= \{2\} \times \{3\} \\ &= \{(2, 3)\} \end{aligned}$$

## 习题

设 $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ 为任意四个集合, 证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

## 习题

设 $A, B, C, D$ 为任意四个集合, 证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D) \\ & \Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times D \\ & \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in D \\ & \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D \\ & \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D \\ & \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \end{aligned}$$

## 习题

设 $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ 为任意四个集合, 证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

## 习题

设 $A, B, C, D$ 为任意四个集合, 证明

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

证明.

先证 $(A \times C) \cap (B \times D) \subseteq (A \cap B) \times (C \cap D)$ 。

对任意的 $x$ 和 $y$ , 如果 $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$ , 则 $(x, y) \in A \times C$ , 并且 $(x, y) \in B \times D$ , 从而 $x \in A, y \in C, x \in B, y \in D$ , 即 $x \in A, x \in B, y \in C, y \in D$ , 于是 $x \in A \cap B$ 并且 $y \in C \cap D$ , 因此 $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ 。

再证 $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

对任意的 $x$ 和 $y$ ,  $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ , 则 $x \in A \cap B$ 并且 $y \in C \cap D$ , 从而 $x \in A, x \in B, y \in C, y \in D$ , 即 $x \in A, y \in C, x \in B, y \in D$ , 于是 $(x, y) \in A \times C$ , 并且 $(x, y) \in B \times D$ , 因此 $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

