

习题. 证明: 唯一没有三角形的 $(p, \lceil \frac{p^2}{4} \rceil)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证法一. 用数学归纳法证明以下结论: 唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。施归纳于顶点数 p , 只证 p 为奇数的情况, p 为偶数的情况是类似的。

1) 当 $p = 1$ 时, 唯一没有三角形的包含一个顶点且边数 $q \geq 0$ 的图一定为 $K(0, 1)$, 结论显然成立。(注: 我们把 $(1, 0)$ 图也称为偶图, 并记为 $K(0, 1)$ 或 $K(1, 0)$)。

2) 假设当 $p = 2k - 1 (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = 2k + 1$ 时结论也成立。设 G 为一个没有三角形, 顶点数 $p = 2k + 1$, 边数 $q \geq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil$ 的图。显然, G 中至少有两个邻接的顶点 u 和 v 。图 $G' = G - \{u\} - \{v\}$ 中没有三角形, 有 $2k - 1$ 个顶点。因为 G 中没有三角形, 如果 u 与 G' 的 x 个顶点邻接, 则 v 至多能与 G' 中剩余的 $2k - 1 - x$ 个顶点邻接, 于是 G' 中的边数

$$\begin{aligned} q' &\geq q - x - (2k - 1 - x) - 1 \\ &\geq \lfloor \frac{(2k + 1)^2}{4} \rfloor - 2k \\ &= k^2 - k \\ &= \lfloor \frac{(2k - 1)^2}{4} \rfloor \end{aligned}$$

由归纳假设, G' 为 $K(\lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{2k-1}{2} \rceil)$, 即 $K(k-1, k)$ 。以下证明 G 必为 $K(k, k+1)$ 。假设偶图 G' 的顶点集有一个二划分为 $\{V_1, V_2\}$, 使得 G' 的任意一条边的两个端点一个在 V_1 中, 一个在 V_2 中, $|V_1| = k - 1$, $|V_2| = k$ 。由 G 中没有三角形知 V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中至多与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接。另外, V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中必与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接, 否则, G 中的边数 $q < (k - 1)k + (2k - 1) + 1 = k^2 + k = \lfloor \frac{(2k+1)^2}{4} \rfloor$, 矛盾。不妨设在 G 中 V_2 中的某个顶点与 v 相邻接, 由 G 中没有三角形知 v 不能与 V_1 中的顶点相邻接, 从而 u 与 V_1 中每个顶点相邻接, v 与 V_2 中的每个顶点相邻接。这证明了 G 为 $K(k, k + 1)$ 。

□

证法二. 我们证明如下结论: 唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形, 包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合, v 为 G 中度最大的顶点, V_1 为所有与 v 邻接的顶点构成的集合, $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中的顶点互相不邻接, V_2 中的顶点互相不邻接, $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1, 从而完成定理的证明。

首先, 由 V_1 中的每个顶点都与 v 邻接, G 中没有三角形知 V_1 中的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' , G' 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$, V_1 中的任意两个顶点互相不邻接, V_2 中的任意两个顶点互相不邻接, V_1 和 V_2 中的任意两个顶点互相邻接。由 v_1 为 G 中度最大的顶点知对任意的 $v \in V$, v 在 G 中的度 $d(v)$ 小于等于 v 在 G' 中的度 $d'(v)$ 。而一个图中所有顶点的度数之和为边数的两倍, 从而 G 中的边数 q 小于等于 G' 中的边数 q' , 即

$$q \leq |V_1||V_2| \quad (1)$$

易验证

$$|V_1||V_2| \leq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil \quad (2)$$

由 $q \geq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil$ 知(1)式和(2)式中的等号成立。由(1)式中的等号成立知在 G 中 V_1 中的每个顶点必与 V_2 中的每个顶点邻接，再由 G 中没有三角形知， V_2 中任意两个顶点在 G 中不邻接。由 $|V_1| + |V_2| = p$ 知(2)中的等式成立当且仅当 $|V_1|$ 与 $|V_2|$ 最多相差1。 \square