离散数学讲义

陈建文

March 24, 2020

课程学习目标：

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

学习方法：

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

授课教师QQ：2129002650

第 三 章　关系

定义3.1. 设A与B为两个集合。一个从$A\times B$到$\{T,F\}$的映射R，称为从A到B的一个二元关系。$\forall(a,b)\in A\times B$，如果$(a,b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$; 如果$(a,b)$在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a\not R b$。如果$A=B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

例3.1. 设集合$X=\{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为一个从$2^X\times 2^X$到$\{T,F\}$的映射，

$\subseteq(\{\phi\},\{\phi\})=T,\subseteq(\{\phi\},\{1\})=T,\subseteq(\{\phi\},\{2\})=T,\subseteq(\{\phi\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1\},\{\phi\})=F,\subseteq(\{1\},\{1\})=T,\subseteq(\{1\},\{2\})=F,\subseteq(\{1\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{2\},\{\phi\})=F,\subseteq(\{2\},\{1\})=F,\subseteq(\{2\},\{2\})=T,\subseteq(\{2\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1,2\},\{\phi\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{1\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{2\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{1,2\})=T$

定义3.2. 设A与B为两个集合。$A\times B$的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。如果$(a,b)\in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a,b)\notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not R b$。如果$A=B$，则称R为A上的二元关系。

例3.2. 设集合$X=\{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为$2^X\times 2^X$的一个子集，

$$\begin{aligned}\subseteq=\{&(\{\phi\},\{\phi\}),(\{\phi\},\{1\}),(\{\phi\},\{2\}),(\{\phi\},\{1,2\}),\\&(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),\\&(\{1,2\},\{1,2\})\}\end{aligned}$$

例3.3. 自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系"$\leq$"为$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

例3.4. 设n为任一给定的自然数。对任意的两个整数m，k，如果$m-k$能被n整除，则称m与k为模n同余，并记为$m\equiv k \pmod n$。显然，$m\equiv k \pmod n$当且仅当m被n除所得到的余数与k被n除所得到的余数相等。模n同余为$\mathbb{Z}$上的一个二元关系。

定义3.3. 设$R\subseteq A\times B$，集合

$$\{x\in A|\exists y\in B使得(x,y)\in R\}$$

称为R的定义域，记为$dom(R)$；集合

$$\{y \in B | \exists x \in A \text{使得} (x, y) \in R\}$$

称为R的值域，记为$ran(R)$。

定义3.4. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，一个$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$间的一个$n$元关系，每个$A_i$称为$R$的一个域。

定义3.5. 集合X上的二元关系R称为自反的，如果对X的任意元素x都有xRx。

例3.5. 判断下列二元关系是否为自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ *(不是)*
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ （是）
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ （不是）
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$ （不是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ （是）

定义3.6. 集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x, x) \notin R$。

例3.6. 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$*(是)*
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ （不是）
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$（不是）
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$（是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$（不是）

定义3.7. 集合X上的二元关系R称为对称的，如果对X的任意元素x，y，只要xRy就有yRx。

例3.7. 判断下列二元关系是否为对称的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$*(不是)*
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$（不是）
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$（是）
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$（不是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$（是）

定义3.8. 集合X上的二元关系R称为反对称的，如果对X的任意元素x，y，xRy且yRx，则$x=y$。

例3.8. 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合$X=\{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）
2. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（是）
3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$（是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

定义3.9. 集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。

例3.9. 判断下列二元关系是否为传递的。设集合$X=\{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）
2. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（不是）
3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$（是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

定义3.10. 设R为从集合A到集合B的二元关系，R的逆R^{-1}定义为从集合B到集合A的二元关系

$$R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

定理3.1. 设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R=R^{-1}$。

定义3.11. 设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R\circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R\circ S=\{(x,z)\in A\times C|\exists y\in B\text{使得}xRy\text{且}ySz\}$$

定理3.2. 设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$$

定理3.3. 设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R\circ R\subseteq R$。

定义3.12. 设$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$为一个包含m个元素的集合，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$为一个包含n个元素的集合。令R为从X到Y的一个二元关系。由R定义一个$m\times n$矩阵$B=(b_{ij})$如下：$\forall(x_i,y_j)\in X\times Y$，

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果}x_iRy_j\\ 0, & \text{如果}x_i\not{R}y_j\end{cases}$$

则矩阵B称为关系R的矩阵。

例3.10. 设集合$X = \{1,2,3,4\}$，$Y = \{a,b,c,d,e\}$，从X到Y的关系

$$S = \{(1,a),(2,b),(2,d),(2,e),(3,a),(3,b),(3,d),(3,e),(4,c),(4,d)\}$$

，则S的关系矩阵为？

例3.11. 设集合$X = \{1,2,3,4\}$，$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$，则$R$的关系矩阵为？

定理3.4. 设B为集合X上二元关系R的矩阵，则

1. R为自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为*1*；
2. R为反自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为*0*；
3. R为对称的，当且仅当B为对称矩阵；
4. R为反对称的，当且仅当$i \neq j$时b_{ij}与b_{ji}不同时为*1;*
5. R为传递的，当且仅当如果$b_{ij} = 1$且$b_{jk} = 1$，则$b_{ik} = 1$。

关系除了用矩阵表示外，还可以用图来表示。设X和Y为有穷集合，R为从X到Y的二元关系。当用图表示R时，先把X与Y的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把R的任一序对(x,y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系R的图。注意，如果$(x,x) \in R$，则在代表x的点画一条又指向此点的矢线，称为环。

定理3.5. 设R为集合X上的二元关系，则

1. R为自反的，当且仅当R的图的每个顶点均有一个环；
2. R为反自反的，当且仅当R的图中没有环；
3. R为对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；
4. R为反对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两条方向相反的矢线*;*
5. R为传递的，当且仅当在R的图中如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

定理3.6. 设B为集合X上二元关系R的矩阵，则R^{-1}的矩阵为B^T。

定义3.13. 设B，C是两个布尔矩阵，B与C的逻辑乘为B与C的对应元素进行逻辑乘，所得到的布尔矩阵记为$B \wedge C$，即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

B与C的逻辑加为B与C的对应元素进行逻辑加，所得到的布尔矩阵记为$B \vee C$，即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

定理3.7. 设R，S为从集合X到集合Y的二元关系，其矩阵分别为B_R和B_S。$R\cup S$ 与$R\cap S$的矩阵分别为$B_{R\cup S}$，$B_{R\cap S}$，则

$$B_{R\cup S} = B_R \vee B_S, B_{R\cap S} = B_R \wedge B_S$$

定义3.14. 设A为$m\times p$布尔矩阵，B为$p\times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A\circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1}\wedge b_{1j}) \vee (a_{i2}\wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip}\wedge b_{pj}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

定理3.8. 设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R\circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R\circ S}$，则$B_{R\circ S} = B_R \circ B_S$。

定义3.15. 设R为集合X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R\subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$$

定理3.9. 设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

定理3.10. 设R为集合X上的一个二元关系，$a\in X$，$b\in X$，$n\geq 2$，则$(a,b)\in R^n$当且仅当存在$x_1\in X$，$x_2\in X$，…，$x_{n-1}\in X$，使得$(a,x_1)\in R$，$(x_1,x_2)\in R$，…，$(x_{n-1},b)\in R$。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a,b)\in R^2$当且仅当存在$x_1\in X$使得$(a,x_1)\in R$且$(x_1,b)\in R$，结论成立。

假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k+1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a,b)\in R^{k+1}$当且仅当存在$x\in X$使得$(a,x)\in R^k$且$(x,b)\in R$。由归纳假设，$(a,x)\in R^k$当且仅当存在$x_1\in X$，$x_2\in X$，…，$x_{k-1}\in X$，使得$(a,x_1)\in R$，$(x_1,x_2)\in R$，…，$(x_{k-1},x)\in R$。记$x_k = x$，则$(a,b)\in R^{k+1}$当且仅当存在$x_1\in X$，$x_2\in X$，…，$x_{k-1}\in X$，$x_k\in X$，使得$(a,x_1)\in R, (x_1,x_2)\in R, \ldots, (x_{k-1},x_k)\in R, (x_k,b)\in R$。 □

定理3.11. 设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$$

定理3.12. 设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$$

。

证明. 只须证明对任一自然数$k>n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$。为此，设$(a,b)\in R^k$，则存在$b_1,b_2,\cdots,b_{k-1}\in X$使得$(a,b_1)\in R$, $(b_1,b_2)\in R,\cdots,(b_{k-2},b_{k-1})\in R,(b_{k-1},b)\in R$。记$b_0=a,b_k=b$。$b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n<k$，所以$b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b$中必有两个相等的元素。设$b_i=b_j$，$1\le i<j\le k$。于是，我们有$(a,b_1)\in R,\cdots,(b_{i-1},b_i)\in R,(b_j,b_{j+1})\in R,\cdots,(b_{k-1},b)\in R$,故$(a,b)\in R^{k-(j-i)}$，$p_1=k-(j-i)<k$。若$p_1=k-(j-i)>n$, 则重复上述过程又有$p_2<p_1$使得$(a,b)\in R^{p_2}$。如此进行下去，必有$m\le n$使得$(a,b)\in R^m$。所以，$R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^n R^i$。因此，$R^+=\bigcup_{i=1}^n R^i$。 □

定理3.13. 设R为集合X上的一个二元关系，$|X|=n$，B为R的关系矩阵，B_{R^+}为R^+的关系矩阵，简记为B^+，则

$$B^+=B\vee B^{(2)}\vee\cdots\vee B^{(n)}$$

以下为计算集合X上关系R的传递闭包的算法。

```
TRANSITIVE-CLOSURE(B)
  // B is the zero-one n × n matrix for relation R
  M = B
  A = M
  for i = 2 to n
      M = M ∘ B
      A = A ∨ M
  return A // A is the zero-one matrix for R+
```

```
WARSHALL(B)
  // B is the zero-one n × n matrix for relation R
  A = B
  for k = 1 to n
      for i = 1 to n
          for j = 1 to n
              a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
  return A // A is the zero-one matrix for R+
```

```
WARSHALL(B)
  // B is the zero-one n × n matrix for relation R
  A = B
  for k = 1 to n
      for i = 1 to n
          if a_ik == 1
              for j = 1 to n
                  a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
  return A // A is the zero-one matrix for R+
```

定义3.16. 集合X上的二元关系R称为等价关系，如果R同时满足以下三个性质:

1. R为自反的，即对X中的任意元素x，xRx*;*

2. R为对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy，则yRx*;*

3. R为传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

这是在我们这门课中迄今为止所学的所有概念中最重要的概念之一，是不是有点抽象？我们可以借助一个具体的例子，帮助我们理解这些抽象的概念。从小学到现在，我们是不是学了许多类似于"$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$"的等式？这里的等价关系就是从"="抽象出来的。（1）$x=x$；（2）如果$x=y$，那么$y=x$;（3）如果$x=y$并且$y=z$，那么$x=z$。是不是显然成立呀?我们可以借助熟知的"="来理解等价关系的定义。

例3.12. 整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系为$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明*.* 只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m\in\mathbb{Z}$，$m\equiv m \pmod n$。(注：我们用$m\equiv k \pmod n$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)

(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m\in\mathbb{Z}$，$k\in\mathbb{Z}$，如果$m\equiv k \pmod n$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k\equiv m \pmod n$。

(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m\in\mathbb{Z}$，$k\in\mathbb{Z}$，$l\in\mathbb{Z}$，如果$m\equiv k \pmod n$并且$k\equiv l \pmod n$，则$n|(m-k)$并且$n|(k-l)$，从而$n|((m-k)+(k-l))$，即$n|(m-l)$，因此$m\equiv l \pmod n$。 □

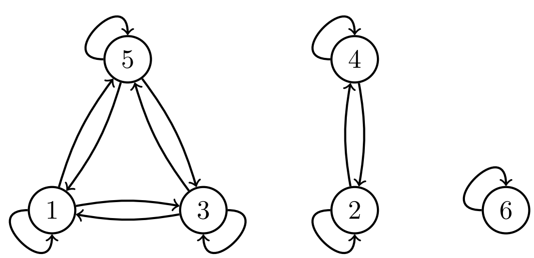
例3.13. 设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下:

$$\begin{aligned}R=\{&(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

则R为X上的等价关系。

证法一*.* 直接根据定义进行验证。 □

证法二*.* 画出R的关系图进行判断。



（1）在R的图中，每个顶点均有一个环，这说明R为自反的;

（2）在R的图中,如果任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线,这说明R为对称的;

（3）在R的图中，如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线，这说明R为传递的。

□

如果我们写个程序进行判断，首先要将该二元关系在计算机中表示出来。矩阵表示法为我们提供了一种解决方案。

证法三. 关系R的矩阵表示为

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1)B的对角线上的元素全为1说明R为自反的；
(2)B为对称矩阵说明R为对称的；
(3)

$$B\circ B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

由$B\circ B$中的每个元素小于等于B中的每个元素知R为传递的。 □

定义3.17. 设$\cong$为集合X上的一个等价关系，$x\in X$，X的子集

$$E_x=\{y\in X|x\cong y\}$$

称为x关于$\cong$的等价类，记为$[x]$，即

$$[x]=\{y\in X|x\cong y\}$$

例3.14. 在例*3.12*中我们已经知道模4同余关系为等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 模4同余关系所有等价类所构成的集合为$\{[0],[1],[2],[3]\}$,其中

$$\begin{aligned}[0]&=\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\}\\[1]&=\{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\}\\[2]&=\{\cdots,-6,-2,2,6,10,\cdots\}\\[3]&=\{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}\end{aligned}$$

□

例3.15. 设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned}R=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

在例*3.13*中，我们知道R为X上的等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 我们先尝试写出集合X上每个元素相对于关系R的等价类:

$$\begin{aligned}[1] &= \{1,3,5\}\\ [2] &= \{2,4\}\\ [3] &= \{1,3,5\}\\ [4] &= \{2,4\}\\ [5] &= \{1,3,5\}\\ [6] &= \{6\}\end{aligned}$$

你发现了什么?有重复!于是关系R的所有等价类所构成的集合为$\{[1],[2],[6]\}$,即$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$。 □

通过以上的例子,我们发现了以下的结论:

定理3.14. 设$\cong$为集合X上的一个等价关系,对任意的$x\in X$,$y\in X$,$x\cong y$当且仅当$[x]=[y]$。

Proof. 请尝试写出证明过程。 □

定义3.18. 设X为集合, X的一些非空子集形成的集族$\mathscr{A}$称为X的一个划分,如果$\mathscr{A}$具有性质

1. $\forall A,B\in\mathscr{A}$,如果$A\neq B$,则$A\cap B=\phi$;
2. $\bigcup_{A\in\mathscr{A}}=X$

例3.16. 集合

$$\begin{aligned}\{\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\},\\ \{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\},\\ \{\cdots,-6,-2,2,6,10,\cdots\},\\ \{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}\}\end{aligned}$$

构成了整数集$\mathbb{Z}$的一个划分。

例3.17. 集合$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$ 构成了集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$的一个划分。

定理3.15. 设$\cong$为集合X上的一个等价关系,则$\cong$的所有等价类的集合构成了集合X的一个划分。

Proof. 这就是要证明$\{[x]|x\in X\}$构成了集合X的一个划分。

对任意$x\in X$,由$\cong$的自反性知$x\cong x$,从而$x\in[x]$,这证明了$[x]$非空。

对任意的$x\in X$,$y\in X$,如果$[x]\neq[y]$,以下证明$[x]\cap[y]=\phi$。用反证法,假设$[x]\cap[y]\neq\phi$,则存在$z\in[x]\cap[y]$,于是$z\in[x]$并且$z\in[y]$。由$z\in[x]$知$x\cong z$,由$z\in[y]$知$y\cong z$。由$\cong$的对称性可得$z\cong y$,再由$\cong$的传递性可得$x\cong y$,从而$[x]=[y]$,矛盾。

由对任意的$x\in X$,$x\in[x]$易知$\bigcup_{x\in X}[x]=X$。

综上,我们证明了$\{[x]|x\in X\}$构成了集合X的一个划分。 □

定理3.16. 设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分，令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$为集合X上的一个等价关系。

这个定理的符号不太好理解吧？在以后学习的过程中，遇到类似这个定理中的抽象的符号应该怎么办？具体的例子可以帮助我们很好的理解这些抽象的符号。例如，设集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$，$\mathscr{A} = \{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$为集合$X$的一个划分，则

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A\\
=&(\{1,3,5\}\times\{1,3,5\})\cup(\{2,4\}\times\{2,4\})\cup(\{6\}\times\{6\})\\
=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(6,6)\}
\end{aligned}$$

为集合X上的一个等价关系。

Proof. 这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。从而，$x\in A$，$z\in A$，因此，$(x,z)\in A\times A$,于是$(x,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足传递性。

□

本门课一个很重要的结论为“集合X上的所有二元关系之集与集合X的所有划分之集之间存在着一一对应的关系”。为了证明这个结论，我们需要构造一个从集合X上的所有二元关系之集到集合X的所有划分之集之间的一个双射。还记得我们学过的可逆映射的概念吗？一个映射为双射，当且仅当为该映射为可逆映射。于是我们可以构造一个从集合X上的所有二元关系之集到集合X的所有划分之集之间的一个可逆映射。还记得可逆映射的定义吗？

设$f:X\to Y$为一个映射。如果存在一个映射$g:Y\to X$使得

$$f\circ g = I_Y \text{且} g\circ f = I_X,$$

则称映射f为可逆的，而g称为f的逆映射。借助于以上我们所学过的数学概念，我们有如下的定理:

定理3.17. 设X为一个集合，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R} = \{\cong \subseteq X \times X| \cong \text{为集合}X\text{上的一个等价关系}\},\\
&\mathbb{A} = \{\mathscr{A} \subseteq 2^X|\mathscr{A}\text{为集合}X\text{的一个划分}\},\\
&f = \{(\cong, \{[x]_\cong|x \in X\})| \cong\in \mathbb{R}, [x]_\cong = \{y \in X|x \cong y\}\}\\
&g = \{(\mathscr{A}, \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A)|\mathscr{A} \in \mathbb{A}\}
\end{aligned}$$

则f为从$\mathbb{R}$到$\mathbb{A}$的双射，且$f^{-1} = g$。

如果我们能够完全理解该定理，并能够从“0”开始给出该定理的证明过程，即该定理所依赖的其他结论都可以给出证明，那么，整个前三章的内容，我们就有了一个很好的把握了。集中精力搞懂本课程的一些重要定理的证明过程，顺藤摸瓜，这些定理所依赖的其他结论也能够给出证明，直到可以从头开始说起，这对于提升我们的逻辑思维能力是很有帮助的。

这是我们所遇到的第一个重要的定理。让我们先从理解这个定理开始吧。还记得我们应该怎样理解抽象的符号和术语吗？答案是尝试具体的例子。

让我们尝试一个简单的集合:$X = \{1, 2, 3\}$。那么$\mathbb{R}$表示集合X上所有的等价关系构成的集合，这个集合是怎样的？这个问题不好回答吧？

让我们先看$\mathbb{A}$吧。$\mathbb{A}$表示集合X的所有划分构成的集合。这个集合比较好写，你能写出答案吗？我的答案是这样的:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} = \{&\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\},\\
&\{\{1, 2\}, \{3\}\},\\
&\{\{1, 3\}, \{2\}\},\\
&\{\{2, 3\}, \{1\}\},\\
&\{\{1, 2, 3\}\}\}
\end{aligned}$$

对任意的$\mathscr{A} \in \mathbb{A}$，我们计算$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$,就可以得到$X$上的一个等价关系。该定理是在说，在$\mathbb{R}$和$\mathbb{A}$之间存在一个一一对应的关系，于是，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} = \{&\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\},\\
&\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\},\\
&\{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2)\},\\
&\{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (1, 1)\},\\
&\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}\}
\end{aligned}$$

证明.

1. 证明f为映射。这就是要证明对于集合X上的任意一个等价关系$\cong$，$\{[x]_\cong|x \in X\}$为集合X的一个划分。这就是定理3.15。

2. 证明g为映射。这就是要证明对于集合X的任意一个划分$\mathscr{A}$，$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$为集合$X$上的一个等价关系。这就是定理3.16。

3. 证明$g \circ f = I_{\mathbb{R}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个等价关系$\cong$，$\bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$。

   这里是要证明两个集合相等。

   对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$(x_1, x_2) \in \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$，那么存在$x \in X$，$(x_1, x_2) \in [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$，于是$x_1 \in [x]_{\cong}$并且$x_2 \in [x]_{\cong}$，从而$x \cong x_1$并且$x \cong x_2$，由$\cong$的对称性知$x_1 \cong x$，再由$\cong$的传递性知$x_1 \cong x_2$，即$(x_1, x_2) \in \cong$。

   对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$(x_1, x_2) \in \cong$，则$x_1 \cong x_2$，从而$x_2 \in [x_1]_{\cong}$，由$\cong$的自反性知$x_1 \cong x_1$，从而$x_1 \in [x_1]_{\cong}$。于是，$(x_1, x_2) \in [x_1]_{\cong} \times [x_1]_{\cong} \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$。

4. 证明$f \circ g = I_{\mathbb{A}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个划分$\mathscr{A}$，等价关系$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$所对应的等价类的集合就是$\mathscr{A}$。

   这里还是要证明两个集合相等。

   对任意的$x \in X$，设$[x]$为与等价关系$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$相对应的一个等价类，以下证明$[x] \in \mathscr{A}$。由$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A = X$知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$。如果我们能够证明$[x] = A$,则$[x] \in \mathscr{A}$得证。对任意的$y \in [x]$，则$(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$。于是，存在$B \in \mathscr{A}$使得$(x, y) \in B \times B$，如果$B \neq A$，那么$x \in A$且$x \in B$，这与$A \cap B = \phi$矛盾，从而$B = A$，因此$y \in A$。反之，对任意的$y \in A$，则$(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，从而$y \in [x]$。这证明了$[x] = A$，从而$[x] \in \mathscr{A}$。

   对任意的$A \in \mathscr{A}$，以下证明A为等价关系$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$的一个等价类。由$A$非空知，存在$x$,$x \in A$，以下证明$A = [x]$，这里$[x]$表示$x$与等价关系$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$相对应的一个等价类。对任意的$y \in A$，则$(x, y) \in A \times A \subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，从而$y \in [x]$。反之，如果$y \in [x]$,则由与前面相类似的，可以证明$y \in A$。这证明了$A = [x]$。

□

定义3.19. 集合X上的二元关系R称为偏序关系，如果R同时满足以下三个性质：

1. R为自反的，即对X中的任意元素x，xRx；

2. R为反对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy且yRx，则$x = y$；

3. R为传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

定义3.20. 设$\leq$为集合X上的一个偏序关系，则称二元组$(X, \leq)$为一个偏序集。

例3.18. 实数集$\mathbb{R}$上通常的“小于等于”关系$\leq$为一个偏序关系，所以$(\mathbb{R}, \leq)$为一个偏序集。

例3.19. 设S为一个集合，S的子集间的包含关系$\subseteq$为2^S上的一个偏序关系，所以$(2^{\mathbb{S}}, \subseteq)$为一个偏序集。

例3.20. 设集合$X = \{a, b, c, d\}$上的关系R定义如下：

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则R为X上的偏序关系。

定义3.21. 设$\leq$为集合X上的偏序关系，如果$\forall x, y \in X$，$x \leq y$与$y \leq x$至少有一个成立，则称$\leq$为X上的全序关系。相应的，二元组$(X, \leq)$称为全序集。

定义3.22. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$使得$\forall x \in A$有$x \leq s$，则称s为A的最大元素；如果存在一个元素$t \in A$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称t为A的最小元素。

定义3.23. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$,在A中没有元素x使得$s < x$，则称s为A的极大元素；如果存在一个元素$t \in A$，在A中没有元素x使得$x < t$，则称t为A的极小元素。

定义3.24. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in X$使得$\forall x \in A$有$x \leq s$，则称s为A的一个上界；如果存在一个元素$t \in X$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称t为A的一个下界。

定义3.25. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果A有上界且A的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为A的上确界，记为$\sup A$；如果A有下界且A的一切下界之集有最大元素，则这个最大下界称为A的下确界，记为$\inf A$。

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \to x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$
11. $x \leq x$
12. $x \leq y \wedge y \leq x \to x = y$
13. $x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z$
14. $x \leq y \vee y \leq x$
15. $x > y \to x + z > y + z$

16. $x > y \wedge z > 0 \rightarrow x * z > y * z$

17. $\forall A \subseteq \mathbb{R}(A \neq \phi \wedge \exists x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \leq x)) \rightarrow \exists z \in R((\forall y \in A(y \leq z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \leq x) \rightarrow z \leq x))))$

练习3.1. 是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系?

练习3.2. 实数集上的“小于”关系$<$是否为反自反的? 集合X的幂集2^X上的“真包含”关系$\subset$是否为反自反的? 为什么?

练习3.3. 下列说法是否正确? 若正确，请给出证明；若不正确，请说明理由。

*1)*设R为集合X上的反自反的和传递的二元关系，则R为反对称的二元关系。

*2)*设R为集合X上的对称的和传递的二元关系，则R为自反的二元关系。

练习3.4. 设集合$X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{1, 2\}$，$S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$。$S$上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f, g \in S$，$f \cong g$当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明$\cong$为S上的等价关系，并求出等价类之集。

练习3.5. 设X, Y, S同习题*3.4*。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f, g \in S$，$f \cong g$当且仅当

$$f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$$

证明$\cong$为S上的等价关系，并求出等价类之集。

练习3.6. 设X, Y, S同习题*3.4*。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f, g \in S$，$f \cong g$当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$$

证明$\cong$为S上的等价关系，并求出等价类之集。

练习3.7. 是否存在一个偏序关系$\leq$，使$(X, \leq)$中有唯一极大元素，但没有最大元素? 如果有，请给出一个具体例子；如果没有，请证明之。

练习3.8. 令$X = \{a, b, c, d\}$，画出偏序集$(2^X, \subseteq)$的$Hasse$图。

练习3.9. 令$S = \{1, 2, \cdots, 12\}$，画出偏序集$(S, |)$的$Hasse$图，其中$|$为整除关系。它有几个极大（小）元素? 列出这些极大（小）元素。

练习3.10. 偏序集$(X, \leq)$称为有序完备的，当且仅当X的每个有上界的非空子集有上确界。证明：偏序集$(X, \leq)$为有序完备的当且仅当对X的每个有下界的非空子集有下确界。

第 四 章