习题. 设集合S有n个元素，证明2^S有2^n个元素。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

1.当$n = 0$时，$S = \phi$，$2^{\phi} = \{\phi\}$有1个元素，结论成立。

2.假设当$n = k(k \geq 0)$时结论成立，往证当$n = k + 1$时结论也成立。设集合S中有$k + 1$个元 素s_1，s_2，$\ldots$，s_k，s_{k+1}，记

$$S_1 = 2^{S \setminus \{s_{k+1}\}}$$
$$S_2 = \{X \cup \{s_{k+1}\} | X \subseteq S \setminus \{s_{k+1}\}\}$$

则$2^S = S_1 \cup S_2$。

考虑映射$f : S_1 \to S_2$，对任意的$X \in S_1$，$f(X) = X \cup \{s_{k+1}\}$。易验证$f$为从$S_1$到$S_2$的双射，从而$|S_1| = |S_2|$。

显然$S_1 \cap S_2 = \phi$，再由归纳假设,$|S_1| = 2^k$，从而$|2^S| = |S_1| + |S_2| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$。

□