离散数学讲义

陈建文

March 11, 2020

课程学习目标：

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

学习方法：

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

授课教师QQ：2129002650

第 三 章　关系

定义3.1. 设A与B是两个集合。一个从$A\times B$到$\{T,F\}$的映射R，称为从A到B的一个二元关系。$\forall(a,b)\in A\times B$，如果$(a,b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$; 如果$(a,b)$在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a\not Rb$。如果$A=B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

例. 设集合$X=\{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为一个从$2^X\times 2^X$到$\{T,F\}$的映射，
$\subseteq(\{\phi\},\{\phi\})=T,\subseteq(\{\phi\},\{1\})=T,\subseteq(\{\phi\},\{2\})=T,\subseteq(\{\phi\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1\},\{\phi\})=F,\subseteq(\{1\},\{1\})=T,\subseteq(\{1\},\{2\})=F,\subseteq(\{1\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{2\},\{\phi\})=F,\subseteq(\{2\},\{1\})=F,\subseteq(\{2\},\{2\})=T,\subseteq(\{2\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1,2\},\{\phi\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{1\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{2\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{1,2\})=T$

定义3.2. 设A与B为两个集合。$A\times B$的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。如果$(a,b)\in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a,b)\notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not Rb$。如果$A=B$，则称R为A上的二元关系。

例. 设集合$X=\{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为$2^X\times 2^X$的一个子集，

$$\begin{aligned}\subseteq=\{&(\{\phi\},\{\phi\}),(\{\phi\},\{1\}),(\{\phi\},\{2\}),(\{\phi\},\{1,2\}),\\&(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{2\}),(\{1\},\{1,2\}),\\&(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1,2\})\}\end{aligned}$$

例. 自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系”$\leq$”是$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

例. 设n为任一给定的自然数。对任意的两个整数m，k，如果$m-k$能被n整除，则称m与k为模n同余，并记为$m\equiv k\pmod n$。显然，$m\equiv k\pmod n$当且仅当m被n除所得到的余数与k被n除所得到的余数相等。模n同余是$\mathbb{Z}$上的一个二元关系。

定义3.3. 设$R\subseteq A\times B$，集合

$$\{x\in A|\exists y\in B使得(x,y)\in R\}$$

称为R的定义域，记为$dom(R)$；集合

$$\{y\in B|\exists x\in A使得(x,y)\in R\}$$

称为R的值域，记为$ran(R)$。

定义3.4. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，一个$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$间的一个$n$元关系，每个$A_i$称为$R$的一个域。

定义3.5. 集合X上的二元关系R称为自反的，如果对X的任意元素x都有xRx。

例. 判断下列二元关系是否是自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

定义3.6. 集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x, x) \notin R$。

例. 判断下列二元关系是否是反自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

定义3.7. 集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x, x) \notin R$。

例. 判断下列二元关系是否是反自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

定义3.8. 集合X上的二元关系R称为反对称的，如果对X的任意元素x，y，xRy且yRx，则$x = y$。

例. 判断下列二元关系是否是反对称的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

定义3.9. 集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。

例. 判断下列二元关系是否是传递的。设集合$X=\{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

定义3.10. 设R为从集合A到集合B的二元关系，R的逆R^{-1}定义为从集合B 到集合A的二元关系

$$R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

定理3.1. 设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R=R^{-1}$。

定义3.11. 设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R\circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R\circ S=\{(x,z)\in A\times C|\exists y\in B\text{使得}xRy\text{且}ySz\}$$

定理3.2. 设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$$

定理3.3. 设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R\circ R\subseteq R$。

第 四 章