

习题. 设 $f: X \rightarrow Y$ 。试证: f 为满射当且仅当对任意的 $E \in 2^Y$, $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

证明. 设 f 为满射, 对任意的 $E \in 2^Y$ 往证 $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

对任意的 y , $y \in f(f^{-1}(E))$, 则存在 x , $x \in f^{-1}(E)$ 并且 $y = f(x)$, 于是存在 x , $f(x) \in E$ 并且 $y = f(x)$, 从而 $y \in E$ 。

对任意的 y , $y \in E$, 由 f 为满射知存在 $x \in X$, $y = f(x)$, 从而 $f(x) \in E$, 即 $x \in f^{-1}(E)$, 由 $y = f(x)$ 知 $y \in f(f^{-1}(E))$ 。

设对任意的 $E \in 2^Y$, $f(f^{-1}(E)) = E$, 往证 f 为满射。

对任意的 $y \in Y$, 则 $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$, 于是 $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, 即存在 $x \in X$, $f(x) = y$, 从而 f 为满射。 \square