

第二章映射

陈建文

1. 映射

定义1.1

设 X 和 Y 为两个非空集合。一个从 X 到 Y 的映射 f 为一个法则，根据 f ，对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f : X \rightarrow Y$ 。

1. 映射

定义1.1

设 X 和 Y 为两个非空集合。一个从 X 到 Y 的映射 f 为一个法则，根据 f ，对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f : X \rightarrow Y$ 。

定义1.2

设 X 和 Y 为两个非空集合。一个从 X 到 Y 的映射为一个满足以下两个条件的 $X \times Y$ 的子集 f ：

1. 对 X 的每一个元素 x ，存在一个 $y \in Y$ ，使得 $(x, y) \in f$ ；
2. 若 $(x, y) \in f$ ， $(x, y') \in f$ ，则 $y = y'$ 。

$(x, y) \in f$ 记为 $y = f(x)$ 。

1. 映射

定义1.1

设 X 和 Y 为两个非空集合。一个从 X 到 Y 的映射 f 为一个法则，根据 f ，对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f : X \rightarrow Y$ 。

定义1.2

设 X 和 Y 为两个非空集合。一个从 X 到 Y 的映射为一个满足以下两个条件的 $X \times Y$ 的子集 f ：

1. 对 X 的每一个元素 x ，存在一个 $y \in Y$ ，使得 $(x, y) \in f$ ；
2. 若 $(x, y) \in f$ ， $(x, y') \in f$ ，则 $y = y'$ 。

$(x, y) \in f$ 记为 $y = f(x)$ 。

定义1.3

设 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射， $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $y = f(x)$ ，则称 y 为 x 在 f 下的象，称 x 为 y 的原象。 X 称为 f 的定义域；集合 $\{f(x) | x \in X\}$ 称为 f 的值域，记为 $Im(f)$ 。

1. 映射

定义1.4

设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 当把 f 的定义域限制在 A 上时, 就得到了一个 $\phi: A \rightarrow Y$, $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。 ϕ 称为 f 在 A 上的**限制**, 并且常用 $f|A$ 来表示 ϕ 。反过来, 我们也称 f 为 ϕ 在 X 上的**扩张**。

1. 映射

定义1.4

设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 当把 f 的定义域限制在 A 上时, 就得到了一个 $\phi: A \rightarrow Y$, $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。 ϕ 称为 f 在 A 上的**限制**, 并且常用 $f|A$ 来表示 ϕ 。反过来, 我们也称 f 为 ϕ 在 X 上的**扩张**。

定义1.5

设 $f: A \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 则称 f 为 X 上的一个**部分映射**。

1. 映射

定义1.4

设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 当把 f 的定义域限制在 A 上时, 就得到了一个 $\phi: A \rightarrow Y$, $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。 ϕ 称为 f 在 A 上的**限制**, 并且常用 $f|A$ 来表示 ϕ 。反过来, 我们也称 f 为 ϕ 在 X 上的**扩张**。

定义1.5

设 $f: A \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 则称 f 为 X 上的一个**部分映射**。

定义1.6

两个映射 f 与 g 称为是**相等**的当且仅当 f 和 g 都为从 X 到 Y 的映射, 并且 $\forall x \in X$ 总有 $f(x) = g(x)$ 。

1. 映射

定义1.4

设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 当把 f 的定义域限制在 A 上时, 就得到了一个 $\phi: A \rightarrow Y$, $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。 ϕ 称为 f 在 A 上的**限制**, 并且常用 $f|A$ 来表示 ϕ 。反过来, 我们也称 f 为 ϕ 在 X 上的**扩张**。

定义1.5

设 $f: A \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 则称 f 为 X 上的一个**部分映射**。

定义1.6

两个映射 f 与 g 称为是**相等**的当且仅当 f 和 g 都为从 X 到 Y 的映射, 并且 $\forall x \in X$ 总有 $f(x) = g(x)$ 。

定义1.7

设 $f: X \rightarrow X$, 如果 $\forall x \in X, f(x) = x$, 则称 f 为 X 上的恒等映射。 X 上的恒等映射常记为 I_X 。

1.映射

定义1.8

设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $\forall x_1, x_2 \in X$ ，只要 $x_1 \neq x_2$ ，就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称 f 为从 X 到 Y 的**单射**。

定义1.9

设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $\forall y \in Y$ ， $\exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$ ，则称 f 为从 X 到 Y 的**满射**。

定义1.10

设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为从 X 到 Y 的**双射**，或者称 f 为从 X 到 Y 的**一一对应**。

2. 鸽笼原理

定理2.1 (鸽笼原理)

如果把 $n + 1$ 个物体放到 n 个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

2. 鸽笼原理

定理2.1 (鸽笼原理)

如果把 $n + 1$ 个物体放到 n 个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

例：

已知 m 个整数 a_1, a_2, \dots, a_m ，试证：存在两个整数 k, l ， $0 \leq k < l \leq m$ ，使得 $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$ 能被 m 整除。

2. 鸽笼原理

定理2.2 (鸽笼原理的强形式)

设 q_1, q_2, \dots, q_n 为 n 个正整数。如果把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放到 n 个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有 q_1 个物体，或者第二个盒子中至少含有 q_2 个物体， \dots ，或者第 n 个盒子中至少含有 q_n 个物体。

2. 鸽笼原理

定理2.2 (鸽笼原理的强形式)

设 q_1, q_2, \dots, q_n 为 n 个正整数。如果把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放到 n 个盒子中, 则或者第一个盒子中至少含有 q_1 个物体, 或者第二个盒子中至少含有 q_2 个物体, \dots , 或者第 n 个盒子中至少含有 q_n 个物体。

推论2.1

如果把 $n(r-1) + 1$ 个物体放入 n 个盒子里, 则至少有一个盒子里放了不少于 r 个物体。

2. 鸽笼原理

定理2.2 (鸽笼原理的强形式)

设 q_1, q_2, \dots, q_n 为 n 个正整数。如果把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放到 n 个盒子中, 则或者第一个盒子中至少含有 q_1 个物体, 或者第二个盒子中至少含有 q_2 个物体, \dots , 或者第 n 个盒子中至少含有 q_n 个物体。

推论2.1

如果把 $n(r-1) + 1$ 个物体放入 n 个盒子里, 则至少有一个盒子里放了不少于 r 个物体。

推论2.2

如果把 n 个正整数 m_1, m_2, \dots, m_n 的平均值

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} > r - 1,$$

则 m_1, m_2, \dots, m_n 中至少有一个正整数不小于 r 。

3. 映射的一般性质

定义3.1

设 $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, A 在 f 下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

3. 映射的一般性质

定义3.1

设 $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, A 在 f 下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

例:

设 $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = x^2$, $f(\{-1, 0\}) = ?$

3. 映射的一般性质

定义3.2

设 $f : X \rightarrow Y$, $B \subseteq Y$, B 在 f 下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

3. 映射的一般性质

定义3.2

设 $f : X \rightarrow Y$, $B \subseteq Y$, B 在 f 下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

例:

设 $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = x^2$, 则 $f^{-1}(\{-1, 0\}) = ?$

3. 映射的一般性质

定理3.1

设 $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq Y$, $B \subseteq Y$, 则

- (1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- (2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- (3) $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$
- (4) $f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$

定理3.2

设 $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, 则

- (1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- (3) $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$

4. 映射的合成

定义4.1

设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 为映射, 映射 f 与 g 的合成 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

4. 映射的合成

定义4.1

设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 为映射, 映射 f 与 g 的合成 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

定理4.1

设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$ 为映射, 则

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

5. 逆映射

定义5.1

设 $f : X \rightarrow Y$ 为双射, f 的逆映射 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 定义为: 对任意的 $y \in Y$, 存在唯一的 x 使得 $f(x) = y$, 则 $f^{-1}(y) = x$ 。

5. 逆映射

定义5.1

设 $f: X \rightarrow Y$ 为双射, f 的逆映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 定义为: 对任意的 $y \in Y$, 存在唯一的 x 使得 $f(x) = y$, 则 $f^{-1}(y) = x$ 。

定义5.1'

设 $f: X \rightarrow Y$ 为一个双射, 则 $g: Y \rightarrow X, g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ 称为 f 的逆映射, 记为 $g = f^{-1}$ 。

定义5.1''

设 $f: X \rightarrow Y$ 为一个映射。如果存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$ 使得

$$f \circ g = I_Y \text{ 且 } g \circ f = I_X,$$

则称映射 f 为可逆的, 而 g 称为 f 的逆映射。

定理5.1

定义5.1'与定义5.1''是等价的。

5. 逆映射

定理5.2

设 $f : X \rightarrow Y$ 为可逆映射，则 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

5. 逆映射

定理5.2

设 $f : X \rightarrow Y$ 为可逆映射，则 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

定理5.3

设 $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ 都为可逆映射，则 $g \circ f$ 也为可逆映射并且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

5. 逆映射

定义5.2

设 $f : X \rightarrow Y$ 为一个映射，如果存在一个映射 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $g \circ f = I_X$ ，则称 f 为左可逆的， g 称为 f 的左逆映射；如果存在一个映射 $h : Y \rightarrow X$ 使得 $f \circ h = I_Y$ ，则称 f 为右可逆的， h 称为 f 的右逆映射。

5. 逆映射

定义5.2

设 $f : X \rightarrow Y$ 为一个映射，如果存在一个映射 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $g \circ f = I_X$ ，则称 f 为左可逆的， g 称为 f 的左逆映射；如果存在一个映射 $h : Y \rightarrow X$ 使得 $f \circ h = I_Y$ ，则称 f 为右可逆的， h 称为 f 的右逆映射。

定理5.4

设 $f : X \rightarrow Y$ 为一个映射，则

1. f 左可逆当且仅当 f 为单射；
2. f 右可逆当且仅当 f 为满射。

6. 置换

定义6.1

有穷集合 S 到自身的一一对应称为 S 上的一个置换。如果 $|S| = n$, 则 S 上的置换就说成是 n 次置换。

设 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma : S \rightarrow S$ 为 S 上的一个置换, $\sigma(1) = k_1, \sigma(2) = k_2, \dots, \sigma(n) = k_n$, 我们用如下的一个表来表示置换 σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

例:

设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 1$, 则 σ 可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

这里, 列的次序无关紧要, 例如, σ 还可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 置换

定义6.2

设 α 与 β 为集合 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的两个置换，则 α 与 β 为两个从 S 到 S 的双射，讨论置换时，我们用 $\alpha\beta$ 表示 α 与 β 的合成 $\beta \circ \alpha$ 。注意这里 α 与 β 的次序，从运算的角度看有一定的便利性，但也有的教材中采用相反的顺序。按照我们的写法，讨论置换时，如果 $i \in S$ ，则用 $(i)\alpha$ 表示 i 在 α 下的像，简记为 $i\alpha$ 。

例：

设 $S = \{1, 2, 3\}$ ， α 和 β 为 S 上的两个置换，

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

，则

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

，

6. 置换

若 α 与 β 为两个 n 次置换，当把 β 的表示式中的上一行按 α 的下一行的顺序写出时，则 $\alpha\beta$ 的下一行就是 β 的新表示式中的下一行。

例：

设 $S = \{1, 2, 3\}$ ， α 和 β 为 S 上的两个置换，

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

，则

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

，

6. 置换

定义6.3

设 σ 为 S 上的一个 n 次置换, 若 $i_1\sigma = i_2, i_2\sigma = i_3, \dots, i_{k-1}\sigma = i_k, i_k\sigma = i_1$, 而 $\forall i \in S \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, i\sigma = i$, 则称 σ 为一个 k 循环置换, 记为 $(i_1 i_2 \cdots i_k)$ 。2-循环置换称为对换。

例:

设 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$\text{则}(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad (2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. 置换

定理6.1

每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序以及略去的1-循环置换，这个分解是唯一的。

6. 置换

定理6.2

当 $n \geq 2$ 时，每个 n 次置换都能被分解成若干个对换的乘积。

6. 置换

定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

6. 置换

定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

定义6.4

能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为**偶置换**；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为**奇置换**。

6. 置换

定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

定义6.4

能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为**偶置换**；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为**奇置换**。

定理6.4

当 $n \geq 2$ 时， n 次奇置换的个数与 n 次偶置换的个数相等，都等于 $\frac{n!}{2}$ 。

7. 代数运算

定义7.1

一个集合及其在该集合上定义的若干个代数运算合称为一个代数系。

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理8.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理8.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.1

设 X, Y, Z 为任意三个非空集合。一个从 $X \times Y$ 到 Z 的映射 ϕ 称为 X 与 Y 到 Z 的一个二元(代数)运算。当 $X = Y = Z$ 时, 则称 ϕ 为 X 上的二元(代数)运算。

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.2

从集合 X 到 Y 的任一映射称为从 X 到 Y 的**一元(代数)运算**。如果 $X = Y$, 则从 X 到 X 的映射称为 X 上的**一元(代数)运算**。

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.3

设 A_1, A_2, \dots, A_n, D 为非空集合。一个

从 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 D 的映射 ϕ 称为 A_1, A_2, \dots, A_n 到 D 的一个 n 元（代数）运算。如果 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = D = A$, 则称 ϕ 为 A 上的 n 元代数运算。

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.4

设“ \circ ”为集合 X 上的一个二元代数运算。如果 $\forall a, b \in X$, 恒有 $a \circ b = b \circ a$, 则称二元代数运算“ \circ ”满足**交换律**。

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.5

设“ \circ ”为集合 X 上的一个二元代数运算。如果 $\forall a, b, c \in X$, 恒有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, 则称二元代数运算“ \circ ”满足**结合律**。

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.6

设“+”与“ \circ ”为集合 X 上的两个二元代数运算。

如果 $\forall a, b, c \in X$, 恒有

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c,$$

则称二元代数运算“ \circ ”对“+”满足**左分配律**。

如果 $\forall a, b, c \in X$, 恒有

$$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a,$$

则称二元代数运算“ \circ ”对“+”满足**右分配律**。

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.7

设 (X, \circ) 为一个代数系。如果存在一个元素 $e \in X$ 使得对任意的 $x \in X$ 恒有 $e \circ x = x \circ e = x$, 则称 e 为“ \circ ”的**单位元素**。

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.8

设 (X, \circ) 为一个代数系, “ \circ ”有单位元素 e , $a \in X$, 如果 $\exists b \in X$ 使得

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则称 b 为 a 的逆元素。

7. 代数运算

定义8.9

设 $(S, +)$ 与 (T, \oplus) 为两个代数系。如果存在一个一一对应 $\phi: S \rightarrow T$, 使得 $\forall x, y \in S$, 有

$$\phi(x + y) = \phi(x) \oplus \phi(y),$$

则称代数系 $(S, +)$ 与 (T, \oplus) 同构, 并记为 $S \cong T$, ϕ 称为这两个代数系之间的一个同构。

7. 代数运算

定义8.10

设 $(S, +, \circ)$ 与 $(T, \oplus, *)$ 为两个代数系。如果存在一个一一对应 $\phi: S \rightarrow T$, 使得 $\forall x, y \in S$, 有

$$\begin{aligned}\phi(x + y) &= \phi(x) \oplus \phi(y), \\ \phi(x \circ y) &= \phi(x) * \phi(y),\end{aligned}$$

则称代数系 $(S, +, \circ)$ 与 $(T, \oplus, *)$ **同构**, 并记为 $S \cong T$, ϕ 称为这两个代数系之间的一个同构。

7. 代数运算

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg p$
T	F
F	T

7. 代数运算

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg p$
T	F
F	T

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	\bar{x}
1	0
0	1

代数系 $(\{T, F\}, \wedge, \vee, \neg)$ 与 $(\{1, 0\}, \wedge, \vee, \neg)$ 是同构的。

8. 集合的特征函数

定义9.1

设 X 为一个集合, $E \subseteq X$ 。 E 的**特征函数** $\chi_E : X \rightarrow \{0, 1\}$ 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in E, \\ 0 & \text{如果 } x \notin E. \end{cases}$$

8. 集合的特征函数

定义9.2

令 $Ch(X) = \{\chi | \chi : X \rightarrow \{0, 1\}\}$ 。 $\forall \chi, \chi' \in Ch(X)$ 及 $x \in X$,

$$\begin{aligned}(\chi \vee \chi')(x) &= \chi(x) \vee \chi'(x) \\(\chi \wedge \chi')(x) &= \chi(x) \wedge \chi'(x) \\ \bar{\chi}(x) &= \overline{\chi(x)}\end{aligned}\tag{1}$$

定理9.1

设 X 为一个集合, 则代数系 $(2^X, \cup, \cap, ^c)$ 与 $(Ch(X), \vee, \wedge, \bar{})$ 同构。

习题

习题1

设 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$, $Z = \{2, 3\}$ 。 $f : X \rightarrow Y$, $f(a) = f(b) = 0, f(c) = 1$; $g : Y \rightarrow Z, g(0) = 2, g(1) = 3$ 。试求 $g \circ f$ 。

习题2

设 $f : X \rightarrow Y$, $C \subseteq Y$, $D \subseteq Y$, 证明
 $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

习题3

设 $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, 证明
 $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$

习题4

设 $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 则 $(f(A))^c \subseteq f(A^c)$ 成立吗? $f(A^c) \subseteq (f(A))^c$ 成立吗?

习题

习题5

设 $f : X \rightarrow Y$, 证明: f 为满射当且仅当 $\forall E \in 2^Y, f(f^{-1}(E)) = E$ 。

习题6

设 $f : X \rightarrow Y$, 证明: f 为单射当且仅当 $\forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F)) = F$ 。

习题7

设 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, A \subseteq Z$, 证明: $(gf)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ 。

习题8

设 $N = \{1, 2, \dots\}$, 试构造两个映射 $f : N \rightarrow N$ 与 $g : N \rightarrow N$, 使得 $fg = I_N$, 但 $gf \neq I_N$ 。

习题

习题9

设 $f: X \rightarrow Y$,

(1) 如果存在唯一的一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使得 $gf = I_X$, 那么 f 是否可逆呢?

(2) 如果存在唯一的一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使得 $fg = I_Y$, 那么 f 是否可逆呢?

习题10

是否存在一个从集合 X 到 X 的一一对应, 使得 $f = f^{-1}$, 但 $f \neq I_X$?

习题选讲

习题11

$n^2 + 1$ 个士兵站成一排，则可以使其中的至少 $n + 1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

4	8	9	3	6	1	7	2	5	0
3	2	1	3	2	3	1	2	1	1