

**习题 1.** 设 $G$ 为一个有 $k$ 个支的平面图。如果 $G$ 的顶点数、边数、面数分别为 $p$ ,  $q$ 和 $f$ , 试证:

$$p - q + f = k + 1$$

证明. 设 $G$ 的的 $k$ 个支分别为 $G_1, G_2, \dots, G_k$ , 其中 $G_i$ 有 $p_i$ 个顶点,  $q_i$ 条边,  $f_i$ 个面 ( $1 \leq i \leq k$ )。

由欧拉公式知,

$$p_1 - q_1 + f_1 = 2$$

$$p_2 - q_2 + f_2 = 2$$

...

$$p_k - q_k + f_k = 2$$

以上各式相加得:

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_k) - (q_1 + q_2 + \dots + q_k) + (f_1 + f_2 + \dots + f_k) = 2k$$

由 $G$ 只有一个外部面知

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = f + (k - 1)$$

从而

$$p - q + f + (k - 1) = 2k$$

即

$$p - q + f = k + 1$$

□

**习题 2.** 如果 $G$ 为顶点数 $p > 11$ 的可平面图, 试证 $G^c$ 不是可平面图。

证明. 用反证法, 假设 $G^c$ 也是可平面图。设 $G$ 有 $q$ 条边, 由 $G$ 为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

设 $G^c$ 有 $q_1$ 条边, 由 $G^c$ 为有 $p$ 个顶点的可平面图知

$$q_1 \leq 3p - 6$$

于是

$$q + q_1 \leq 6p - 12$$

即

$$\frac{p(p-1)}{2} \leq 6p - 12$$

$$p^2 - p \leq 12p - 24$$

$$p^2 - 13p + 24 \leq 0$$

当 $p \geq 11$ 时,

$$\begin{aligned} & p^2 - 13p + 24 \\ &= \left(p - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} + 24 \\ &\geq \left(11 - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} + 24 \\ &= \frac{81}{4} - \frac{169}{4} + 24 \\ &= 2 \geq 0 \end{aligned}$$

矛盾。

□

**习题 3.** 不存在7条棱的凸多面体。

证明. 用反证法, 假设存在7条棱的凸多面体, 其对应的平面图有 $p$ 个顶点, 则

$$7 \geq 3p - 6$$

于是

$$p \geq \frac{13}{3}$$

又由每个顶点的度大于等于3知

$$3p \leq 2 * 7$$

于是

$$p \leq \frac{14}{3}$$

由于不存在正整数 $p$ 使得 $\frac{13}{3} \leq p \leq \frac{14}{3}$  结论得证。

□

**习题 4.** 设 $G$ 为一个没有三角形的可平面图。证明 $G$ 中存在一个顶点 $v$ 使得 $\deg v \leq 3$ 。

证明. 当图 $G$ 的顶点数 $p = 1, 2$ 时, 结论显然成立。当 $p \geq 3$ 时, 用反证法证明结论也成立。假设 $\delta(G) \geq 4$ , 设 $G$ 有 $q$ 条边, 则

$$2q \geq 4p$$

于是

$$q \geq 2p$$

由 $G$ 为可平面图知

$$q \leq 2p - 4$$

矛盾。

□

**习题 5.** 设 $G$ 为一个没有三角形的可平面图。应用数学归纳法证明 $G$ 为4-可着色的。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时, 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 为包含 $k + 1$ 个顶点, 没有三角形的可平面图知,  $G$ 中存在一个顶点 $v$ ,  $\deg v \leq 3$ 。显然,  $G - v$ 为包含 $k$ 个顶点, 没有三角形的可平面图, 由归纳假设,  $G - v$ 为4可着色的。假设已经用至多4种颜色对 $G - v$ 进行了顶点着色, 使得任意相邻的顶点着不同的颜色, 那么此时在 $G$ 中与 $v$ 邻接的顶点用了至多3种颜色, 用另外一种不同的颜色对顶点 $v$ 进行着色, 从而用至多4种颜色就可以对 $G$ 的顶点进行着色使得相邻的顶点着不同的颜色, 即 $G$ 为4可着色的。□