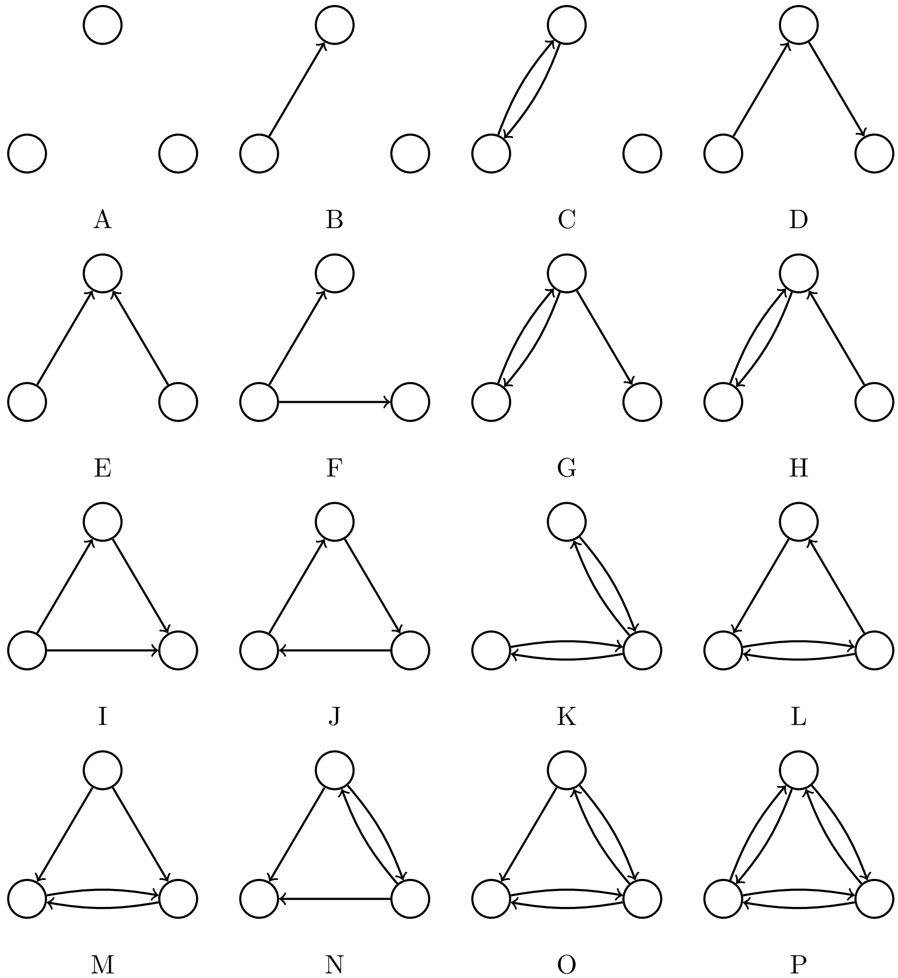
习题 1. 画出具有3个顶点的所有有向图（同构的只算一个）。



习题 2. 具有p个顶点的完全有向图中有多少条弧?

解. $p(p-1)$。 □

习题 3. 设D为一个有p个顶点q条弧的有向图。如果D为连通的，证明：$p-1 \leq q \leq p(p-1)$。

证明. 由D为连通的知略去D中所有弧的方向所得到的无向图G为连通的，从而$q \geq p-1$。 显然D中弧的条数小于等于具有p个顶点的完全有向图中弧的条数，从而$q \leq p(p-1)$。 □

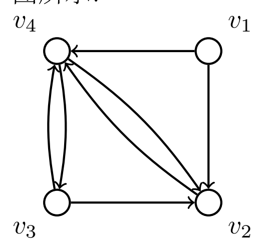
习题 4. 设D为一个有p个顶点q条弧的强连通的有向图，则q至少是多大?

答. 当$p=1$时，$q=0$;当$p>1$时，q至少为p。

当$p > 1$时，设u和v为D的两个顶点，由D为强连通的知从u到v有一条有向路$uu_1u_2\dots u_nv$，从v到u有一条有向路$vu_{n+2}u_{n+3}\dots u_{n+m}u$。考虑有向闭通道$W = uu_1u_2\dots u_nvu_{n+2}u_{n+3}\dots u_{n+m}u$，记$u_0 = u$，$v_{n+1} = v$。设$u_j$为$W$上第一个与前面的某个顶点$u_i$重复的顶点，那么$u_iu_{i+1}\dots u_j$构成了$D$中的一个圈。这证明了当$p > 1$时，任意一个强连通图中必定有圈。因此，抹去$D$中所有弧的方向所得到的无向图为连通的，且至少有1个圈，去掉该圈上的一条边，所得到的无向图仍然为连通的，从而$q - 1 \geq p - 1$，即$q \geq p$。
显然由p个顶点$v_1, v_2, \dots, v_p$依次相连所构成的圈$v_1v_2\dots v_pv_1$有p条弧。因此q至少为p。

□

习题 5. 有向图D的图解如下图所示：



D

(1) 写出D的邻接矩阵及可达矩阵；

(2) 写出D的关联矩阵。

解. D的邻接矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

D的可达矩阵:

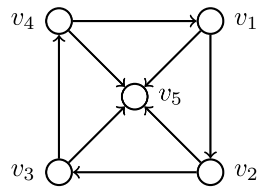
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D的关联矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

□

习题 6. 有向图D的图解如下图所示：



D

求从顶点v_2到其余每个顶点的长≤ 4的所有有向通道的条数。

解. 有向图D的邻接矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从v_2到每个顶点长度为1的通道的条数为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从v_2到每个顶点长度为2的通道的条数为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

从v_2到每个顶点长度为3的通道的条数为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从v_2到每个顶点长度为2的通道的条数为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从v_2到每个顶点长度小于等于4的通道的条数为

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以，v_2到v_1，v_3，v_4，v_5长度小于等于4的通道的条数分别为1，1，1，4。

□

习题 7. 设T为一棵正则m元有序树，它有n_0个叶子，T有多少条弧?

解. 当$m = 1$时，T可以有任意正整数条弧；当$m > 1$时，T有$\frac{m(n_0-1)}{m-1}$条弧。 □

习题 8. 设T为一棵有n_0个叶子的二元树，出度为2的顶点数为n_2，试证$n_0 = n_2 + 1$。

证明. 设出度为1的顶点数为n_1，则$2n_2 + n_1 = n_2 + n_1 + n_0 - 1$，从而$n_0 = n_2 + 1$。 □

习题 9. 用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设$D = (V, A)$为一个包含$k + 1$个顶点的比赛图，v为D的任意一个顶点，则$D - v$为一个包含k个顶点的比赛图。由归纳假设，$D - v$有一条有向哈密顿路$v_1 v_2 \ldots v_k$。如果$(v, v_1) \in A$，那么$v v_1 v_2 \ldots v_k$为有向图D的一条有向哈密顿路；如果$(v_k, v) \in A$，那么$v_1 v_2 \ldots v_k v$为有向图D的一条有向哈密顿路；如果$(v, v_1) \notin A$并且$(v_k, v) \notin A$，由D为比赛图知$(v_1, v) \in A$并且$(v, v_k) \in A$，在$1, 2, \ldots, k$中选取最大的下标i使得$(v_i, v) \in A$，则$(v, v_{i+1}) \in A$，于是$v_1, v_2, \ldots, v_i, v, v_{i+1}, \ldots, v_k$为$D$的一条有向哈密顿路。 □