离散数学讲义

陈建文

May 14, 2020

课程学习目标：

1. 训练自己的逻辑思维能力和抽象思维能力
2. 训练自己利用数学语言准确描述计算机科学问题和电子信息科学问题的能力

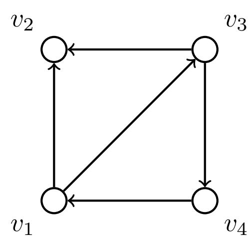
学习方法：

1. MOOC自学
2. 阅读该讲义
3. 做习题
4. 学习过程中有不懂的问题，在课程QQ群中与老师交流

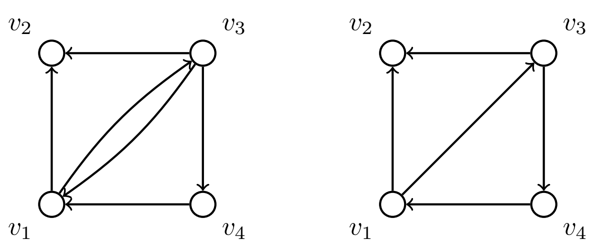
授课教师QQ：2129002650

第 十 章　有向图

定义10.1. 设V为一个有穷非空集合，$A \subseteq V \times V \setminus \{(v,v)|v \in V\}$，二元组$D=(V,A)$称为一个**有向图**。$V$称为有向图$D$的**顶点集**，$V$中的元素称为$D$的**顶点**。$A$称为$D$的**弧集**或**有向边集**，$A$中的元素称为$D$的**弧**或**有向边**。如果$x=(u,v)\in A$，则$u$称为弧$x$的**起点**，$v$称为弧$x$的**终点**。

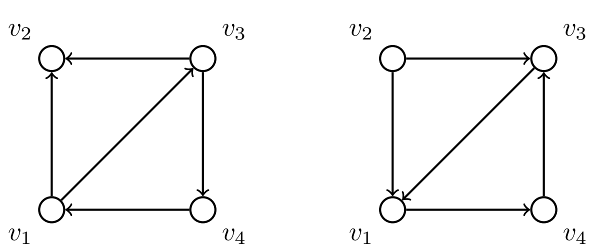


定义10.2. 如果(u,v)和(v,u)都是有向图D的弧，则称(u,v)与(v,u)为D的**对称弧**。如果D中不含对称弧，则称D为**定向图**。

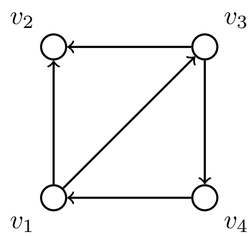


定义10.3. 设$D=(V,A)$为一个有向图，D的**反向图**为有向图$D^T=(V,A^T)$，其中

$$A^T=\{(u,v)|(v,u)\in A\}$$



定义10.4. 设$D=(V,A)$为一个有向图，v为D的任一顶点，以v为终点的弧称为v的**入弧**；以v为始点的弧称为v的**出弧**。顶点v的入弧的条数称为v的**入度**，记为$id(v)$；顶点v的出弧的条数称为v的**出度**，记为$od(v)$。

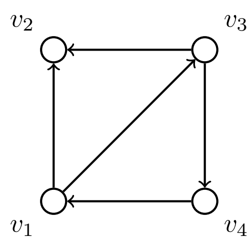


定理10.1. 设$D=(V,A)$为一个有向图，$|A|=q$，则

$$\sum_{v\in V} id(v)=\sum_{v\in V} od(v)=q$$

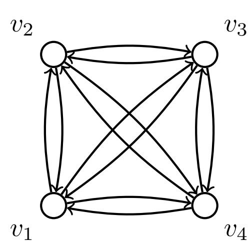
从而

$$\sum_{v\in V}(id(v)+od(v))=2q$$



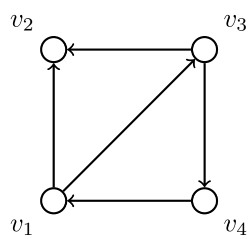
定义10.5. 有向图$D=(V,A)$称为**完全有向图**，如果

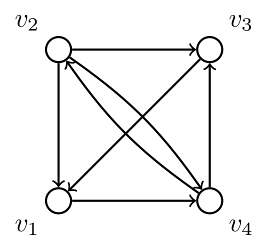
$$A=V\times V\setminus\{(v,v)|v\in V\}$$



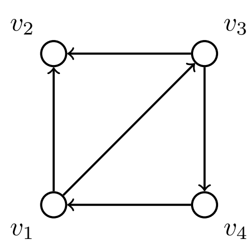
定义10.6. 有向图$D=(V,A)$的**补图**定义为$D^c=(V,A^c)$，其中

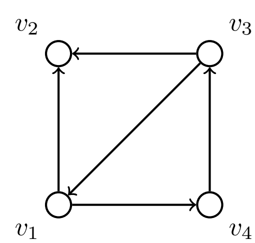
$$A^c=(V\times V\setminus\{(v,v)|v\in V\})\setminus A$$





定义10.7. 设$D_1 = (V_1, A_1)$，$D_2 = (V_2, A_2)$都为有向图，如果存在一个一一对应$\varphi : V_1 \to V_2$，使得$\forall u, v \in V_1, (u, v) \in A_1$当且仅当$(\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$，则称$D_1$与$D_2$**同构**。

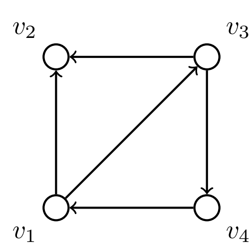




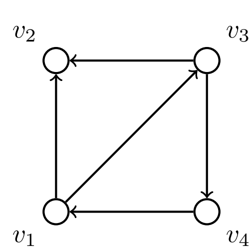
定义10.8. 设$D = (V, A)$为一个有向图。D的一条**有向通道**为D的顶点和弧的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

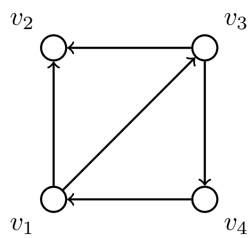
其中$x_i = (v_{i-1}, v_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$。n称为该有向通道的长。这样的有向通道常称为$v_0 - v_n$有向通道，并简记为$v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$。如果有向通道的长大于等于1且$v_0 = v_n$,则称此有向通道为**闭有向通道**。



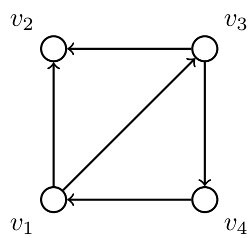
定义10.9. 如果有向图中一条有向通道的各弧互不相同，则称此有向通道为有向图的**有向迹**。如果一条闭有向通道上的各弧互不相同，则称此闭有向通道为**闭有向迹**。



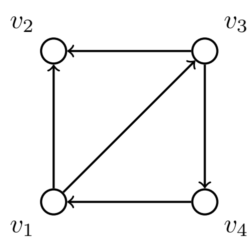
定义10.10. 如果一条有向迹上的各顶点互不相同，则称此有向迹为**有向路**。如果闭有向迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭有向迹为**有向圈**，或**有向回路**。



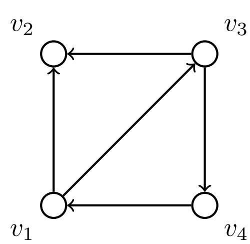
定义10.11. 含有向图D的所有顶点的有向圈称为D的**生成有向圈**，或**有向哈密顿圈**。有生成有向圈的有向图称为**有向哈密顿图**。含有向图D的所有顶点的有向路称为D的**生成有向路**，或**有向哈密顿路**。



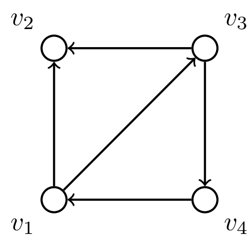
定义10.12. 设$D = (V, A)$为一个有向图，u和v为D的顶点。如果在D中有一条从u到v的有向路，则称从u能达到v，或者v是从u**可达**的。



定义10.13. 有向图D称为是**强连通**的，如果对D的任意两个不同的顶点u和v，u和v是互达的（即从u可以达到v并且从v可以达到u）。



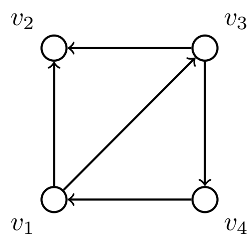
定义10.14. 有向图D的极大强连通子图称为D的一个**强支**。



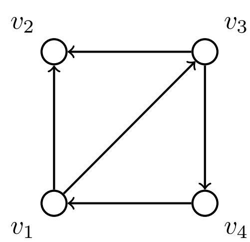
定理10.2. 设$D = (V, A)$为一个有向图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{当且仅当} u \text{与} v \text{互达}$$

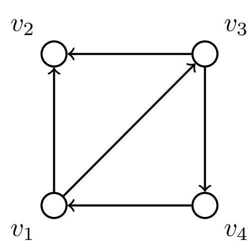
则$\cong$为V上的等价关系，D的强支就是关于$\cong$的每个等价类的导出子图。



定义10.15. 有向图$D = (V, A)$称为**单向连通**的，如果对D的任意两个不同的顶点u和v，或从u可达到v，或从v可达到u。



定义10.16. 设$D = (V, A)$为一个有向图，如果抹去D中所有弧的方向之后所得到的无向图是连通的，则称D为**弱连通**的，简称**连通**的。



定义10.17. 设$D = (V, A)$为一个有向图，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$，$p \times p$矩阵$B = (b_{ij})$称为$D$的邻接矩阵，其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{如果}(v_i, v_j) \in A \\ 0, \text{如果}(v_i, v_j) \notin A \end{cases}$$

定理10.3. 设B为有向图$D=(V,A)$的邻接矩阵，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，则从顶点v_i到顶点v_j的长为l的有向通道的条数等于B^l的第i行第j列元素$(B^l)_{ij}$的值。

定义10.18. 设$D=(V,A)$为一个有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，$p\times p$矩阵$R=(r_{ij})$称为D的可达矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1,\text{如果从}v_i\text{可以达到}v_j\\0,\text{如果从}v_i\text{不能达到}v_j\end{cases}$$

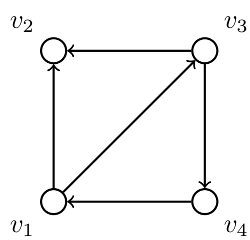
定理10.4. 设$p\times p$矩阵B是有向图$D=(V,A)$的邻接矩阵，则D的可达矩阵

$$R=I\vee B\vee B^{(2)}\vee\cdots\vee B^{(p-1)}$$

定理10.5. 设$p\times p$矩阵R为有向图$D=(V,A)$的可达矩阵，

$$C=R\wedge R^T,$$

C的第i行上为1的元素$c_{ij_1},c_{ij_2},\ldots,c_{ij_k}$，则$v_i$在由$V_i=\{v_{j_1},v_{j_2},\ldots,v_{j_k}\}$诱导出的$D$的子图-$D$的强支中。



定义10.19. 设$D=(V,A)$为一个有p个顶点q条弧的有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$，$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_q\}$，$p\times q$矩阵$H=(h_{ij})$称为D的关联矩阵，其中

$$h_{ij}=\begin{cases}1,\text{如果}v_i\text{为弧}x_j\text{的起点}\\-1,\text{如果}v_i\text{为弧}x_j\text{的终点}\\0,\text{如果}v_i\text{既不是弧}x_j\text{的起点也不是弧}x_j\text{的终点}\end{cases}$$

定义10.20. 一个有向图，如果抹去其所有弧的方向以后所得到的无向图是一棵无向树，则称该有向图为一棵**有向树**。

定义10.21. 有向树D称为**有根树**，如果D中恰有一个顶点的入度为*0*，而其余每个顶点的入度均为*1*。有根树中入度为*0*的顶点称为有根树的根，出度为*0*的顶点称为有根树的**叶子**，非叶顶点称为有根树的**分支点**或**内顶点**。

定义10.22. 设$T=(V,A)$为一棵有根树。如果$(u,v)\in A$，则称v为u的**儿子**，u为v的**父亲**。如果从顶点u能达到顶点v，则称v为u的**子孙**，u为v的**祖先**。如果u为v的祖先且$u\neq v$，则称u为v的**真祖先**，v为u的**真子孙**。

定义10.23. 设$T=(V,A)$为一棵以v_0为根的有根树。从v_0到顶点v的有向路的长度称为T的顶点v的**深度**。从顶点v到T的叶子的最长的有向路的长度称为顶点v在T中的**高度**。根顶点v_0的高度称为树T的**高度**。

定义10.24. 设$T = (V, A)$为一棵有根树，v为T的一个顶点，由v及其子孙所导出的T的子图称为T的以v为根的**子树**。

定义10.25. 设$T = (V, A)$为一棵有根树。如果T的每个顶点的各个儿子排定了次序，则称T为一棵**有序树**。

定义10.26. 有序树T称为m**元有序树**，如果T的每个顶点的出度$\leq m$。一棵m元有序树T称为**正则**m**元有序树**，如果T的每个顶点的出度不是0就是m。二元有序树简称**二元树**。

第 十一 章