“穿越沙漠”游戏的策略求解问题

摘要

针对“穿越沙漠”游戏的策略求解问题，本文从玩家角度出发，针对玩家数目、天气情况和地图均不同的游戏情景设定，分别给出了对应的行进优化模型;通过贪心算法、计算机仿真模拟等方法对模型进行求解，针对不同情景提出了较优的游戏策略。

针对问题一：求解每天天气已知时最优的游戏策略。首先利用数学语言在玩家存活、物资、天气、物资消耗以及资金角度，对“穿越沙漠”游戏规则进行详细刻画（见公式1~16）。对于第一关具体求解，以玩家最终抵达终点所剩的资金最多为目标，建立优化模型（见公式22），通过证明（见证明1~4）验证了贪心算法的正确性，并结合Floyd算法来求解（见程序1）第一关既定条件下的最优行进策略：1-8天从起点到村庄，9-10天从村庄到矿山，11-17天采矿，18-20天从矿山到村庄，21-23天从村庄到终点，得出玩家抵达终点时最大资金剩余量为10430元。基于第二关地图的最短路径，构造最优策略的初始方案，根据天气调整采矿天数和行走路径，利用计算器计算得到第二关的最优策略：1→2→3→4→5→13→22→30→39→46→55→62→55→56→64，得出玩家抵达终点时最大资金剩余量为12195元。

针对问题二：求解只知道当天天气的最佳游戏策略。通过统计第一问中天气数据，利用全概率公式计算出游戏时段每天晴朗、高温、沙暴的出现的概率（见表2）。对于第三关，分别给出补给决策（公式23）、采矿决策（公式24）、去往终点决策（公式25）的判断，根据玩家最终所剩资金将地图简化为四条最短路线的地图（见图7），给出根据初始物资量判断行进路线的策略，对于进入待定区域4号地的玩家，根据最终所剩资金给出第二次路径判断策略。将两步决策策略和游戏规则写入程序，通过计算机仿真模拟的方式对第三关进行求解（见程序6），结果（见图9）显示稳定性最好且所剩资金最多的策略为1-4-6-13或1-5-6-13，收益区间为[9190元,9670元]。类似第三关，首先找到第四关地图中的等效路径，在天气未知且沙暴天气较少情况下，设沙暴天气最多四天，玩家可以根据第一关确定的贪心策略制定一条较优路线，玩家基本策略是：在当前较优路线上，按照最劣天气（高温）进行物资购买与途中补给安排，此策略下无论一般化随机天气多么恶劣，玩家都能够访问制定的较优路线并抵达终点，使用蒙特卡罗模拟法对随机天气进行模拟，结果（如图14）显示随机化天气中，此策略的物资购买方案能够保证玩家都能够抵达终点。

针对问题三：求解n名玩家同时进行游戏的一般策略。利用博弈论的知识，将n名玩家在沙漠中的移动选择简化为Stackelberg博弈过程。对同时参与游戏的n名玩家的策略进行博弈分析，假设各名玩家都是理性的，他们都以最后剩余资金数最大化为目标指导自己的行为。据此分析每天天气都已知的第五关，得到各玩家路线策略图（见图16），其中，最佳策略行进下，两名玩家所剩资金综合为19045元；分析仅知当天天气的第六关，得到各玩家路线策略图（见图17）。

关键词：策略求解 最优化 Floyd算法 随机化贪心算法 仿真模拟

一、问题重述

“穿越沙漠”游戏类似于实际生活中现有的体验式课程“沙漠掘金”，玩家利用已知的游戏地图，根据游戏的规则进行移动或停留，目标是在规定时间内到达终点的基础上尽可能保留多的资金[1]。

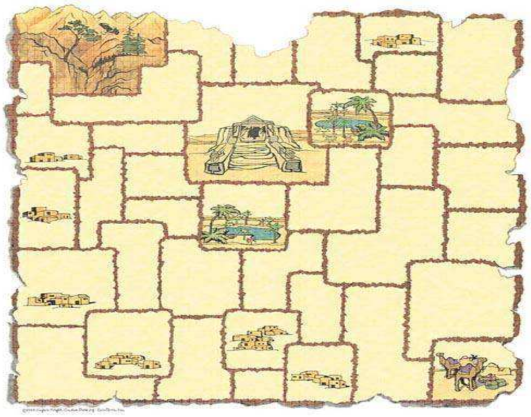


图 1 “沙漠掘金”游戏地图

玩家最初得到一定的资金，用于购买水、食物等物资，从起点出发，深入沙漠。若在行走途中经过村庄或矿山，玩家可以对自己的物资或资金进行补充，同时面临着晴天、高温、沙暴等不同天气的考验。玩家可能胜利抵达终点，也可能因物资耗尽而魂归沙漠，这一切取决于玩家的行进策略。

基于以上背景，需要建立数学模型解决以下问题：

1）每天的天气情况玩家已知，要求为玩家规划一般情况下的游戏策略，并具体讨论“第一关”和“第二关”的最优策略。

2）玩家仅掌握当天的天气情况，要求为玩家规划一般情况下的游戏策略，并具体讨论“第三关”和“第四关”的最佳策略。

3）在多名玩家同时参与游戏的情况下，给出一般情况下的游戏策略，并具体讨论“第五关”和“第六关”的场景玩家应采取的策略。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一中仅有一名已知全部的天气情况玩家，要求为该玩家制定前两关的最优策略。

（1）首先分析前两关的游戏参数、天气状况及游戏地图；

（2）在熟悉游戏地图过程中，通过读取区域邻边得到代表各区域可达的邻接矩阵；

（3）通过数学语言刻画游戏规则；

（4）为求解第一关策略，以到达终点时所剩资金最多为目标，通过玩家必须在 30 天内抵达终点等游戏规则约束建立单目标优化模型；

（5）考虑到利用搜索算法求解的计算量过于庞大，通过发掘第一关中隐藏规律，结合 Floyd 算法和局部贪心算法进行求解；

（6）为求解第二关策略，通过修改第一关模型，建立起第二关的单目标优化模型；

（7）证明第二关中一对村庄和矿山的物资浪费，将第二关转化为类似第一关的问题，再次通过局部贪心算法和 Floyd 算法进行求解。

问题一的思路流程图如图 2 所示：

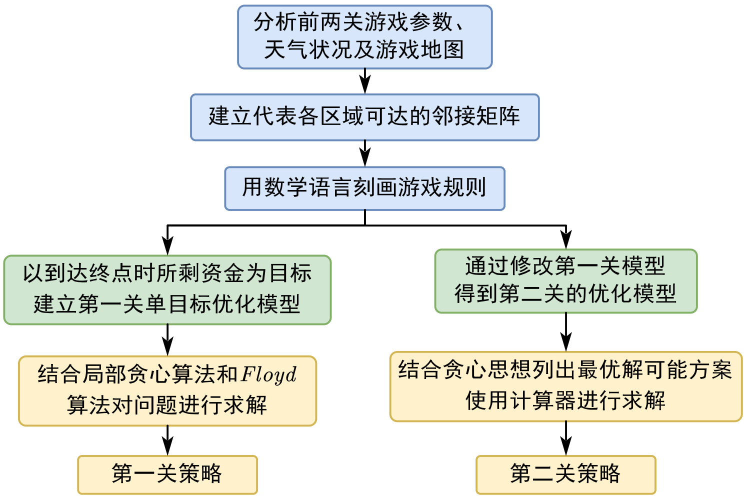


图 2 问题一思路流程图

2.2 问题二的分析

在问题一条件下，问题二玩家仅掌握当天的天气状况，要求给出针对“第三关”和“第四关”该玩家最佳的游戏策略。第一问中都是固定 30 天的天气，所以玩家可以依据随机贪心的策略找到矿山开发尽量多并且路途资源花费最少的组合组最优值，但是在第三问和第四问中，天气是一般化的随机天气，并且天气是一个影响最优值的重要因素，所以贪心策略不再适用。

对于第三关，观察发现第三问地图中无村庄且题目说明无沙暴天气，所以玩家只有一次性到达终点和去往矿山两个方向，去往矿山又因天气的不同，采矿的收益不同，除了晴天能收益 35 元外，其余皆是投入大于产出。且经过矿山到达终点的最短路径要比直接去终点大 2，在晴天的情况下就会有 110 的路径移动产生的差值，且经过对第一问中天气的分析，高温的天数略高于晴天，所以高温天气的概率可能会略大于晴天，即去矿上在数学期望上分析不是收益最大化的。

对于第四关，第四关有 30 天且会有沙暴天气、有村庄进行途中补给，因此组合的情况极多，会出现组合爆炸的问题，且因为有了村庄补给、采矿会带来开来客观的收入，所以采矿可能会带来更大的收益，而受制于天气的不确定性，玩家如果物资购买不当，有很大的在地图中死亡的风险，并且可以假设玩家会在出发前规划好具体的行进路线，那么，收益也是依赖于天气的，并且玩家有死于沙漠的风险，从玩家的角度出发，玩家比起冒险追求更大利益，更倾向于能够抵达终点，因此，从保证玩家不会死亡的角度出发考虑玩家的决策。

2.3 问题三的分析

问题三中要求给出游戏时段内天气状况全部已知的情况下，n 名玩家在各玩家的影响下应采取的策略。如果各玩家同时从一个区域移动到另一个区域，消耗的资源是平时单人移动时的$2n$ 倍，而如果各玩家在同一矿山挖矿，每名玩家的收益都会变为平时的 $1/n$。所以考虑利用博弈论的知识，对参与游戏的玩家之间的策略进行博弈分析，从而得到玩家一般的选择策略。

三、模型假设

假设 1：除采矿、沙暴天气外，玩家不会在任何地方停留，一直处于移动状态

假设 2：玩家在起点尽可能多购买物资，且尽可能多地购入食物。

假设 3：第三问当多人穿越沙漠时同一时刻作出的决策独立。

四、符号说明

符号	说明	单位
M_i	第 i 天的资金数	/
W_i	第 i 天的水	箱
F_i	第 i 天的食物	箱
x_{ij}	0-1 变量，第 i 天在 j 处记为 1	/
w_{ij}	第 i 天在 i 处消耗的食物	箱
f_{ij}	第 i 天在 j 处消耗的食物	箱
Q_i	第 i 天的背包总重	kg
t_i	第 i 天的天气，i=1,2,3 分别指晴朗，高温，沙暴	/
jw_i	第 i 天水的基础消耗量	箱
jf_i	第 i 天食物的基础消耗量	箱

注：未列出符号及重复符号以出现处为准

五、模型建立与求解

5.1 问题一的模型建立与求解

5.1.1 游戏规则的数学刻画

1. 邻接矩阵的建立

题目附件中给出了第一关到第六关游戏的相关参数设定、天气情况及游戏地图，要求给出针对每一关的游戏策略，即回答第几天到什么位置的问题。由于游戏规则复杂，并且地图中具有众多地域位置，所以可供选择的方案也不计其数，题目注 1 中规定只有存在公共边界的两个区域才是可达的，所以首先要将两两可达的区域通过邻接矩阵的方式表示出来。以第一关地图为例，给出第一关部分邻接矩阵 A：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{27\times 27}$$

2. 游戏规则

（1）玩家存活条件：必须在规定时间内抵达终点。在第 $i(i=1,2,...,30)$ 天，利用 0-1 变量 x_{ij} 表示第 i 天到达 j$(j=1,...,27)$ 地，则有：

$$x_{i,end}=1 \qquad i=1,2,...,30 \tag{1}$$

（2）物资条件：水和食物是穿越沙漠所需的两种资源，对于资源游戏中主要规定了两个部分，一方面玩家只能携带有限的物资，另一方面玩家必须保证时刻都有足够自己

撑到终点的物资。首先玩家携带资源能力有限，最多总共携带 1200kg 的物资，以Q_i代表第 i 天玩家携带的物资质量，物资携带条件可表示为：

$$Q_i=Q_{i-1}-z_w w_{ij}-z_f f_{ij}+z_w g_{wi}+z_f g_{fi}，\ 0\leqslant Q_i\leqslant 1200 \tag{2}$$

第 i 天剩下水的箱数W_i可以由前一天剩下水的箱数W_{i-1}、第 i 天在 j 地消耗的水的箱数w_{ij}以及第 i 天购买的水的箱数gw_i表示，则第 i 天剩下的水为：

$$W_i=W_{i-1}-w_{ij}+gw_i \tag{3}$$

同理，第 i 天剩下的食物为：

$$F_i=F_{i-1}-f_{ij}+gf_i \tag{4}$$

式中，f_{ij}为第 i 天在 j 地消耗的食物箱数，gf_i为第 i 天购买的食物箱数，

则物资量充足的规则可表示为：

$$W_i,F_i\geqslant 0 \qquad x_{i,end}=1 \tag{5}$$

（3）天气条件：游戏中假设只有“晴朗”、“沙暴”及“高温”三种天气，而且游戏地图上所有区域都处于同一种天气。在游戏中，天气是影响玩家物资消耗从而影响玩家决策的重要因素，用 1 代表晴朗，2 代表高温，3 代表沙暴，第 i 天天气t_i可表示为：

$$T=\{t_i\}$$

沙暴天气下，玩家只能原地停留不能移动，如第 i 天碰上沙暴天气该条件可表示为：

$$x_{i,j}=x_{i-1,j}=1 \qquad t_i=3 \tag{6}$$

（4）物资消耗条件：玩家停留一天所消耗的是物资基础消耗量jw_i，jf_i，而玩家行走一次需要基础物资消耗量的两倍，用k_j代表矿山区域的编号, 玩家采矿一天需要基础物资消耗量的三倍，因此物资的消耗可以分为两部分计算，基础物资消耗量jw_i，jf_i及消耗倍数B_i：

$$jw_i=\begin{cases}5 & t_i=1\\ 8 & t_i=2\\ 10 & t_i=3\end{cases},jf_i=\begin{cases}7 & t_i=1\\ 6 & t_i=2\\ 10 & t_i=3\end{cases} \tag{7}$$

$$B_i=\begin{cases}1 & x_{ij}=x_{i-1,j}=1,j\neq k_j\\ 2 & x_{ij}-x_{i-1,j}=1\\ 3 & x_{i,k_j}=x_{i-1,k_j}=1,y_{i-1,k_j}=1\end{cases} \tag{8}$$

则第 i 天在 j 地水的消耗量w_{ij}，以及第 i 天在 j 地食物消耗量f_{ij}可以表示为:

$$w_{ij}=jw_i\times B_i \tag{9}$$

$$f_{ij}=jf_i\times B_i \tag{10}$$

玩家在起点的初始资金为 10000 元，在起点以基准价格P_f、P_w购进物资：

$$P_f F_o+P_w W_0\leqslant 10000 \tag{11}$$

玩家在矿山可以通过采矿获得基础收益m_{ij}，游戏规定玩家到达矿山的第一天不能采矿，从停留的第一天开始才能赚取收益：

$$m_{ij}=\begin{cases}1000 & x_{i,k_j}=x_{i-1,k_j}=1\\0 & otherwise\end{cases} \tag{12}$$

玩家在路途中可能会因为天气突变等原因消耗大量的物资，从而导致不能顺利返回终点或无法使效益最大化，那么玩家可以通过地图中的村庄c_j进行及时补给，但村庄的物资价格是基准价格的两倍，在村庄购买物资的花费g_i可表示为：

$$\begin{gathered}g_{wi},g_{fi}>0 \qquad x_{i,c_j}=x_{i-1,c_j}=1\\ g_i=2P_w g_{wi}+2P_f g_{fi}\end{gathered} \tag{13}$$

式中，g_{wi}为在村庄购买水的箱数，g_{fi}为在村庄购买食物的箱数。

因为起点和村庄物资价格的差异，为节省成本，玩家在起点总是购买尽量多的物资且不超过玩家的背包容量上限：

$$z_w W_0+z_f F_0\leqslant 1200 \tag{14}$$

（5）资金条件：穿越沙漠游戏中获胜的条件是安全返回的前提下，保留的资金最多，首先需要严格计算好每一天的成本和采矿收入：

$$M_i=M_{i-1}+m_{ij}-g_i \tag{15}$$

在每天资金已知的情况下，为了使游戏策略最优，必须让玩家最终返回终点时所剩资金最大，若玩家最终返回终点时还有剩余物资，这部分物资以基准价格的一半进行回收，据此，可以将最终返回终点的资金表达出来：

$$M=M_i+\frac{P_f F_i+P_w W_i}{2} \qquad x_{i,end}=1 \tag{16}$$

5.1.2 第一关游戏策略

1. 模型建立

游戏中玩家在拥有足够物资抵达终点的条件下，保留最多资金才算是取得胜利，因此，在游戏规则以及第一关具体限制的约束下，以玩家最终到达终点的资金最多为目标，建立优化模型来给出第一关最优游戏策略。

（1）目标函数

以玩家最终抵达终点所剩的资金 M 最多为目标，来求解第一关既定条件下的最优行进策略，则有：

$$\text{目标函数：}\max\ M \tag{17}$$

（2）约束条件

针对一个游戏策略求解问题，首要的约束条件是游戏规则，除游戏规则外，还需具体分析第一关的游戏设定，已知第一关全部游戏时段的天气，而且地图较为复杂，终点为 27 号区域，村庄为 15 号区域，矿山为 12 号区域，那么针对第一关的约束可以表达为：

①玩家存活约束

玩家必须在截止日期内抵达终点（27 号区域），并且保证到达终点时水和食物的物资量均大于等于 0，只有满足这两个约束后，玩家才能存活。

$$\begin{cases} x_{i,27}=1 & i=1,2,...,30 \\ W_i,F_i \geqslant 0 & x_{i,27}=1 \end{cases} \tag{18}$$

②天气条件约束

由于第一关的全部天气已知，可以将第一关的天气写成行向量的表达形式。

$$T=\{2,2,1,...,2\} \quad i=1,...,30 \tag{19}$$

式中，1——天气晴朗；2——高温天气；3——沙暴天气。

③物资条件约束

第一关矿山在 12 号区域，能够在矿山采矿赚取基础收益的前提是玩家到达矿山，但由于天气影响，玩家在矿山不一定挖矿，可以用 0-1 变量y_{i,k_j}表示第 i 天玩家在矿山是否采矿，那么玩家第 i 天在 j 区域水和食物的消耗量可以表示为：

$$w_{ij}=\begin{cases} jw_i & x_{ij}=x_{i-1,j}=1, j\neq 12 \\ 2jw_i & x_{ij}-x_{i-1,j}=1 \\ 3jw_i & x_{i,12}=x_{i-1,12}=1, y_{i,12}=1 \end{cases} \tag{20}$$

④资金条件约束

第一关的终点在 27，玩家返回终点所剩的资金可以表示为：

$$M=M_i+\frac{P_f F_i+P_w W_i}{2} \quad x_{i,27}=1 \tag{21}$$

综上，则有第一关的优化模型：

目标函数：max M

$$s.t.\begin{cases} W_i,F_i \geqslant 0 \quad x_{i,27}=1, i=1,2,...,30 \\ T=\{2,2,1,...,2\}=\{t_i\} \quad i=1,...,30 \\ w_{ij}=\begin{cases} jw_i & x_{ij}=x_{i-1,j}=1, j\neq 12 \\ 2jw_i & x_{ij}-x_{i-1,j}=1 \\ 3jw_i & x_{i,12}=x_{i-1,12}=1, y_{i,12}=1 \end{cases} \\ M=M_i+\dfrac{P_f F_i+P_w W_i}{2} \quad x_{i,27}=1 \\ Q_i=Q_{i-1}-z_w w_{ij}-z_f f_{ij}+z_w g_{wi}+z_f g_{fi} \\ M_i=M_{i-1}+m_{ij}-g_i \\ F_i=F_{i-1}-f_{ij}+gf_i \\ W_i=W_{i-1}-w_{ij}+gw_i \\ z_w W_0+z_f F_0 \leqslant 1200 \\ P_f F_o+P_w W_0 \leqslant 10000 \\ 0 \leqslant Q_i \leqslant 1200 \end{cases} \tag{22}$$

2. 模型求解

贪心算法的理论证明

像这类约束条件复杂的最优解搜索问题，一般采用剪枝优化的搜索算法对可能的最

优解空间进行遍历得出最优解，由于天气影响，搜索过程的剪枝优化没有很好的效果，会发生组合爆炸，时间复杂度极高。经对问题剖析后，发现随机化贪心算法能更好地解决此问题，且复杂度远小于搜索，故不采用此算法。随机化贪心算法即不取贪心策略的最优值而是从最优值附近的一定区间内找到一个目标函数最优值[2]。下面给出具体的贪心算法及理论证明：

（1）起点和终点相同的最短路径经过村庄为最优。

证明 1：游戏地图中的特殊点只有四个：起点、终点、村庄和矿山，通过求解两点之间最短路径，发现起点与终点之间只存在一条最短路径，而其他任意两点之间至少存在两条长度相等的最短路径。其中村庄与矿山之间的最短路径除中间经过的区域不同外，无其他本质差别，因此不予考虑。而起点与矿山、终点与矿山之间最短路线因存在经过供给村庄与否的本质性差异，所以将该两对点之间的所有最短路径画出（如图 3）

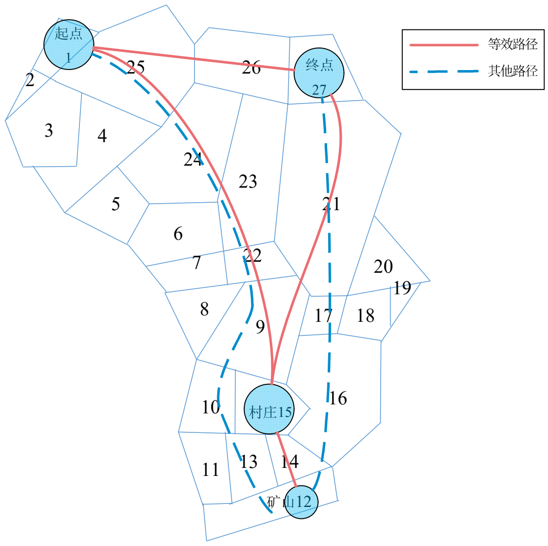


图 3 第一关路径优化等效图

起点到矿山的最短路径中，红色的等效路径经过村庄，可以提供玩家物资供给，而且等效路径与其他最短路径的相同路程，说明经过村庄的最短路径价值更大，所以第一关中经过村庄的两条最短路为最优。

（2）除采矿、沙暴天气外，玩家不会在任何地方停留，一直处于移动状态。

证明 2：给出游戏时段的天气序列d_1，…，d_{i-1}，d_i，d_{i+1}，d_{i+2}，…，d_{end}，其中d_i表示第 i 天的天气，假设d_i为高温天气，d_{i+1}为晴朗天气，d_{i+2}~d_{end}天气相同，假设d_i天停留，d_{i+1}天移动，则其花费为：

$$p_{21}\times price_{21}+p_{22}\times price_{22}+2\times\left(p_{11}\times price_{11}+p_{12}\times price_{12}\right)$$

d_i天移动的花费为：

$$2\times\left(p_{21}\times price_{21}+p_{22}\times price_{22}\right)$$

因为后续天气全部相同，代入数值计算可得，停留的花费为 18 箱水，20 箱食物，移动的花费为 16 箱水，12 箱食物。显然，移动相同的距离，在无后效性的情况下，移动更优。

（3）若玩家不采矿，则直接走从起点至终点的最短路径；若玩家采矿，则玩家只会走两点间的最短路径。

证明 3：若玩家不采矿，说明玩家的资金在穿越沙漠过程中，只有亏损而没有增加，以$m\,(m>0)$代表玩家在穿越沙漠过程中的花费，M_0表示玩家的初始资金则有：

$$M_0-m<M_0$$

所以，玩家如果决定不采矿，直接走起点至终点的最短路径是最优选择。若玩家采矿，那么玩家在采矿路上的花费最低是其最终目标，结合贪心策略（1）、（2），玩家不会停留且走规定的最短路径是路途花费最小且具有村庄补给机会的最优选择。

（4）玩家在起点尽可能多购买物资，且在满足当前方案约束下，尽可能多地购入食物。

表 1 物资属性表

	水	食物
重量	3	2
价格	5	10

证明 4：游戏规定玩家在起点处购入物资，只需花费物资的基准价格，而玩家在补给村庄购买物资时，需花费物资两倍的基准价格。玩家总是根据到达终点时物资刚好耗尽来决定购进物资的数量，因此玩家在起点处购进的物资越多，其在村庄就能少些购进两倍价格的物资，且食物重量比水更低，由于水的基准价格为 5 元，食物的基准价格为 10 元，因此在起点多购进食物，就能少些在村庄以两倍价格购进食物，根据食物和水的差价实现更高的最终所剩资金数。因此玩家在起点会尽可能多地购买物资，在满足当前方案约束的情况下，起点的剩余容量全部购入食物。

基于随机化贪心算法的仿真模拟程序流程图

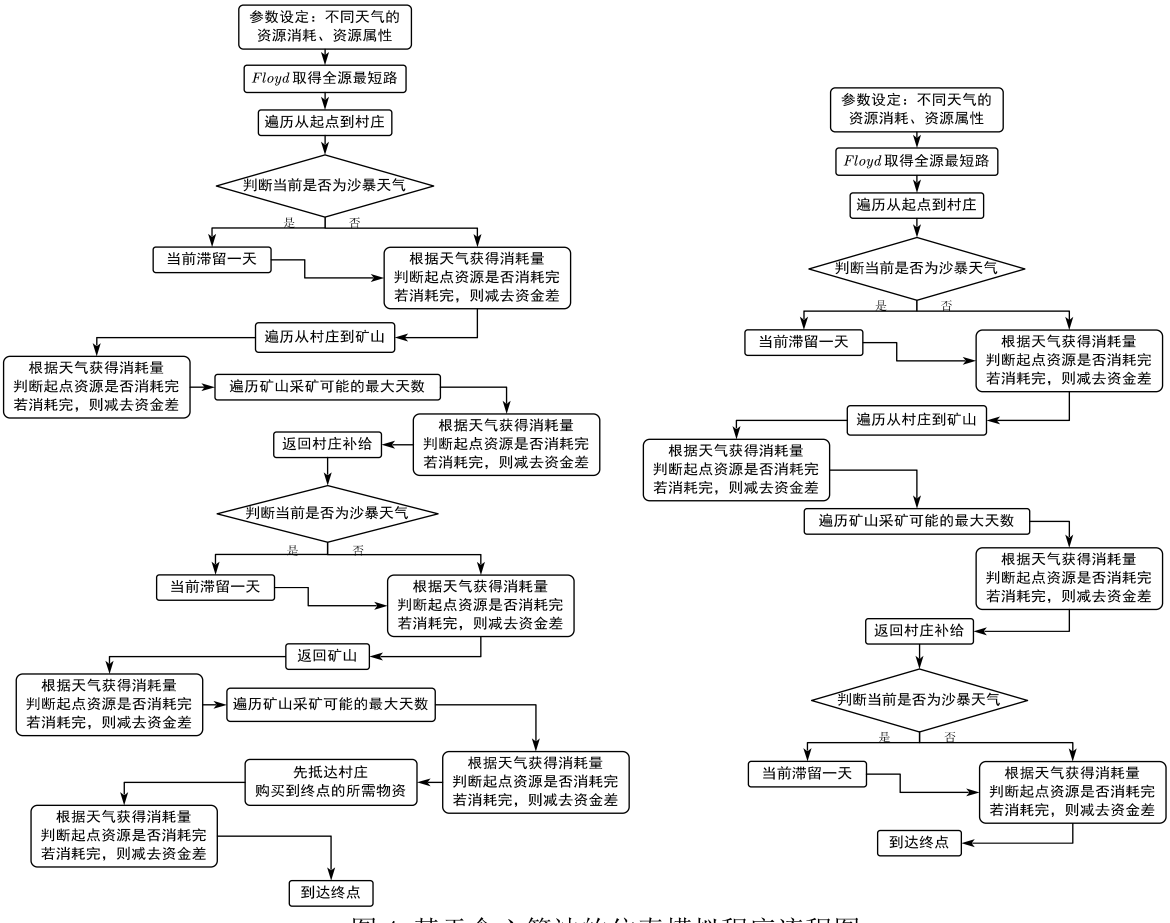


图 4 基于贪心算法的仿真模拟程序流程图

通过仿真模拟计算（见程序 1、程序 2）以及简单计算，利用得到的结果导入 Matlab（见程序 3）绘制出第一关三个可能的最优解结果图（如图 5）：

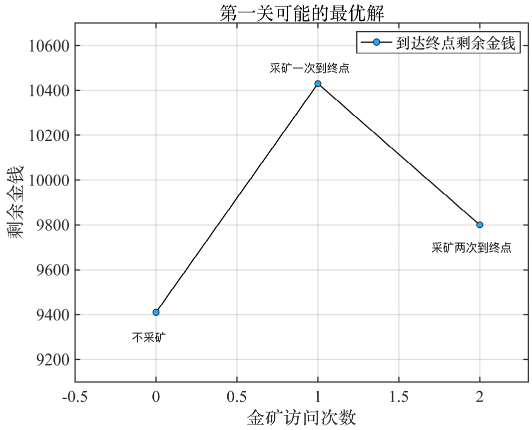


图 5 第一关可能的最优解对比图

从上图最优解对比中可以发现，全程只采矿一次为最优解，提取出各时段经过的各区域：1-8 天从起点到村庄，9-10 天从村庄到矿山，11-17 天采矿，18-20 天从矿山到村庄，21-23 天从村庄到终点。

5.1.3 第二关游戏策略

根据上述贪心策略，给出第二关的初始方案，分析天气情况，以尽可能让玩家多采矿为目标，比较这些方案最终所剩资金数的大小得到玩家的最优选择。

给出初始方案：以玩家有充足的水挖矿加上恰好能够到达村庄的水箱数为基准，让玩家在起点处买这些水的箱数与最大限额的食物箱数，然后到村庄（39 号）补给之后回到矿山（30 号），继续按照在下一补给前能够的支撑的物资数量挖矿，挖完后再次回到村庄（39 号）补给，之后往下移动，在保留可以回到终点的物资前提下在矿山（55 号）挖铲。

判断理性玩家策略的步骤如下：

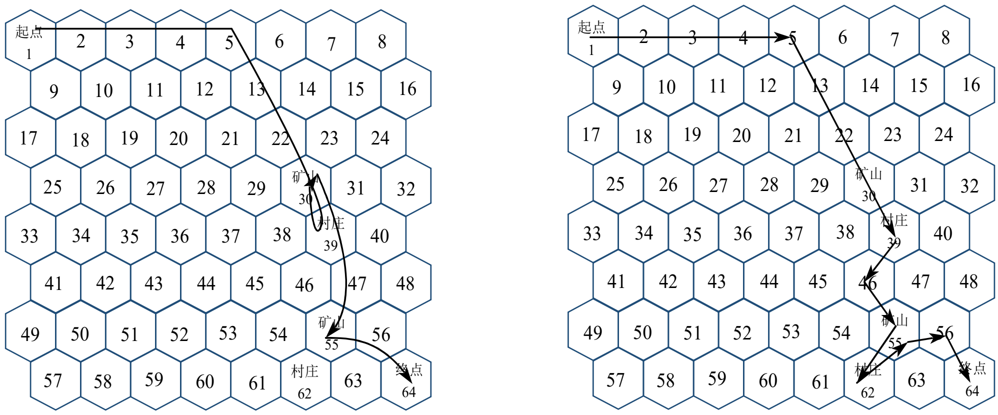
Step 1：根据地图特征，建立节点间的邻接矩阵，由最短路算法可知，矿山比村庄距离起点近，若玩家先去距离较远的村庄补给物资，第一，背包容量没用满造成浪费；第二，矿山与村庄之间的循环增大。

Step 2：确定先去矿山后，因第一关中给出说明玩家应尽可能多买食物以减少后面的双倍价格补给数量。由此，计算玩家从起点到矿山的路上的物资消耗量和挖矿时的物资消耗量之和，并预留出从矿山到村庄该天所需的物资量，确认最初购买水的箱数，在满足负重上限的基础上购买更多的食物。

Step 3：根据 Step 2，玩家到达村庄时补给的数量仍与负重上限有关，目标是使挖矿天数最长，当物资数只保留从矿山到村庄所需的物资数时，停止挖矿，立即去补充资源。

Step 4：重复 Step 2 和 Step 3，直至玩家在某处时所剩天数恰好等于从该处到终点的天数。

根据题中所给的天气信息，通过修改不同阶段玩家的决策来改善上述第二关的初始方案。



方案(a)　　　　　　　　　　方案(b)

图 6 两种方案路径对比图

修改原则是通过调整原来的挖矿时间，使所有方案的沙暴天气都在挖矿，即挖矿总时长得到最大。通过计算器计算发现：

方案(a)：30 天到达终点，采矿 14 天，共收益 14000 元，得出的收益计算公式为：

$$24000-247\times5-229\times10-(149+142)\times10-(141+140)\times20=11945$$

方案(b)：30 天到达终点，采矿 14 天，共收益 12195 元，得出的收益计算公式为：

$$24000-223\times5-265\times10-186\times10-(174-56)\times20-1260-128\times20=12195$$

最终我们得到：玩家到了 62 号村庄后为了有更多的挖矿天数玩家一定会选择回终点时再去一次矿山，所以得到第二关的最优策略：

1→2→3→4→5→13→22→30→39→46→55→62→55→56→64。

最终的所剩资金最多为 12195 元。

5.2 问题二的模型建立与求解

5.2.1 一般情况下，仅知当天天气的玩家游戏策略

1. 模型建立

一般在游戏中，玩家不能知道全部的天气情况，玩家掌握的信息有剩余天数、剩余物资量、当天天气情况，玩家根据掌握的信息进行下一步决策。为对玩家给出最佳游戏策略，首先要对游戏中每一天天气进行预估，根据相关量判断，决策下一游戏行为。

（1）天气概率

由于第三关的游戏时段全部的天气状况未知，每天随机出现一种天气状况，但考虑到沙漠中两种天气情况出现的概率不一样，而且根据生活常识，第二天天气与前一天的天气有着较密切的联系。为了保证游戏的原本设定，我们通过统计分析第一关天气情况，发现共有高温天气 11 天，晴朗天气 7 天，高温后再次出现高温天气共有 6 次，高温后出现晴朗天气共有 5 次，晴朗后出现高温天气共有 5 次，晴朗后再次出现晴朗天气共有 2 次。对两种天气出现的概率以及一种天气出现的基础上各种天气出现的概率进行统计，由此求出天气概率。以事件 A_i 代表第 i 天天气高温，事件 B_i 表示第 i 天天气晴朗[3]。

表 2 第三关天气概率表

高温后高温	$p(A_i\|A_{i-1})=\frac{6}{11}$	高温后晴朗	$p(B_i\|A_{i-1})=\frac{5}{11}$
晴朗后高温	$p(A_i\|B_{i-1})=\frac{5}{7}$	晴朗后晴朗	$p(B_i\|B_{i-1})=\frac{2}{7}$

由于第一天天气是随机出现的，假设晴天和高温都有 50%的出现概率，根据全概率公式，得到第 i 天高温和晴朗的概率递推公式，由此可以得出游戏时段 10 天内每天出现高温或晴朗的概率。

第 i 天高温概率：$p(A_{i+1})=p(A_i)\times p(A_{i+1}|A_i)+p(B_i)\times p(A_{i+1}|B_i)$

第 i 天晴朗概率：$p(B_{i+1})=p(A_i)\times p(B_{i+1}|A_i)+p(B_i)\times p(B_{i+1}|B_i)$

（2）决策判断

玩家根据当前掌握的信息进行下一步的决策，主要决策的行为是：去往村庄补给、高温原地停留、采矿、去往终点，通过每天玩家的所剩物资数、所剩天数等，决策下一步的行为。

①补给决策

玩家当前所剩物资不支持在高温天气下走到村庄，即需要补给。

$$2k\times L_i<Q_i \tag{23}$$

式中，Q_i——玩家在 i 处所剩的物资数（水、食物）；

L_i——表示在 i 处到达村庄所需天数；

k——高温天气时物资消耗系数。

②采矿决策

玩家若想要采矿，则必须保证时间充足，且至少保证可以完成一次高温采矿，并且高温条件下满足从 i 处去矿山和从矿山到终点的所用的物资。

$$\begin{cases} D_i+Z_i+1<T_i \\ 3k+2k\left(L_k+L_z\right)\leqslant Q_i \end{cases} \tag{24}$$

式中，D_i,Z_i——分别表示在 i 处到达矿山所需天数和从矿山到达终点所需天数；

T_i——玩家在 i 处时剩余天数；

L_k——从 i 处到达矿山所用天数；

L_z——从矿山到达终点所用天数。

③终点决策

若玩家在 i 处剩余时间小于直接去往终点所需天数+1，则玩家直接通往终点。

$$T_i\leqslant L_{\mathrm{iz}}+1 \tag{25}$$

式中，$\mathrm{L_{iz}}$——玩家在 i 处直接去往终点的天数。

5.2.2 第三关游戏策略

1. 模型建立

第三关中游戏玩家仅知道当天的天气信息，要制定游戏策略使玩家在存活的前提下最终返回终点剩余的资金最大。

（1）分析简化第三关地图

玩家只有两种意愿，即采矿和不采矿。分别找到两种意愿下的最短路径，不采矿的最短路径有两种，时间长度均为 3，分别是路线三和路线四；采矿的最短路径也有两种，时间长度为 5，分别是路线一和路线二。原游戏地图可化简为只包含四条路径的地图（如图 7）。

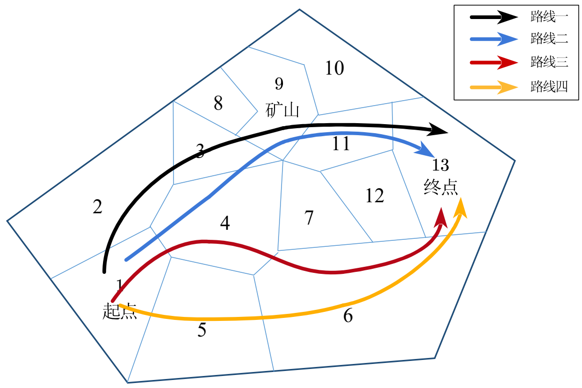


图 7 第三关最短路线图

从图中可以看出，路线一和路线四没有可选择的余地，可以将两条路线设置为有十足把握采矿的选择和不能采矿的选择。路线二、三共同经过 4 号区域，可以将 4 号区域看成待定区域，那么待观望的玩家可以选择先去往 4 号区域，根据第一天的天气影响在 4 号区域再做决策。

（2）高温天气下玩家不采矿

第三关中设定的采矿基础收益很低，为 200 元，而路途消耗和采矿消耗成本相对较大，假设某高温天气玩家采矿，对该玩家的净利润进行计算：

$$W = m_{ij} - P_f w_{ij} - P_f f_{ij} \tag{26}$$

式中，$m_{ij} = 200$ 元，采矿消耗的物资（从起点购买的水和食物）总价值为 405 元，所以玩家每次高温天气下采矿会损失 205 元，所以玩家不会在高温天气下采矿。

（3）第三关游戏决策模型

因为起点处的初始物资数量不确定，因此首先给出玩家在起点根据初始物资数量选择路线的策略。对路线的选择也就是对采矿和不采矿的确定，那么当物资量低于全是晴朗天气采一天矿的最低物资要求，即 $W_0 < 39$ 或 $F_0 < 52$ 时，玩家一定要选择不采矿；相反，若玩家初始物资充足，足够支撑玩家在全高温天气下采矿一天，即“$W_0 \geqslant 117$ 或 $F_0 \geqslant 117$”，此时玩家应直接选择去采矿。因此，起点处据初始物资量的决策策略有：

$$\begin{cases} \text{路线四} & W_0 < 39 \text{或} F_0 < 52 \\ \text{路线一} & W_0 \geqslant 117 \text{且} F_0 \geqslant 117 \\ \text{待定区域4} & \text{其他} \end{cases}$$

当玩家第一天进入待定区域，玩家仍面临两个抉择：采矿与不采矿，通过对玩家两种决策下最终所剩资金数对比，从而给出玩家选择。

玩家不采矿：$M_b = M_0 - m_{14} - m_{26} - m_{3,13}$

玩家采矿一天：$M_{c1} = M_0 - m_{14} - m_{23} - m_{39} - m_{49} - m_{5,11} - m_{6,13} + 200$

玩家采矿五天：

$M_{c5} = M_0 - m_{14} - m_{23} - m_{39} - m_{49} - m_{59} - m_{69} - m_{79} - m_{89} - m_{9,11} - m_{10,13} + 1000$

记$m' = m_{14} + \ldots + m_{10,13} + 1000$，$J = m' - m_{14} - m_{26} - m_{3,13}$

则最终的决策模型为：

$$\begin{cases} J \geq 0, \text{不采矿} \\ J < 0, \text{采矿} \end{cases} \tag{27}$$

2. 模型求解

上述决策模型的求解迭代次数太高，对于第三关策略求解，我们使用蒙特卡洛模拟法对每天天气、采矿天数等需要决策的变量进行模拟，通过 10 万次模拟的结果比对，可以得到理想的结果。

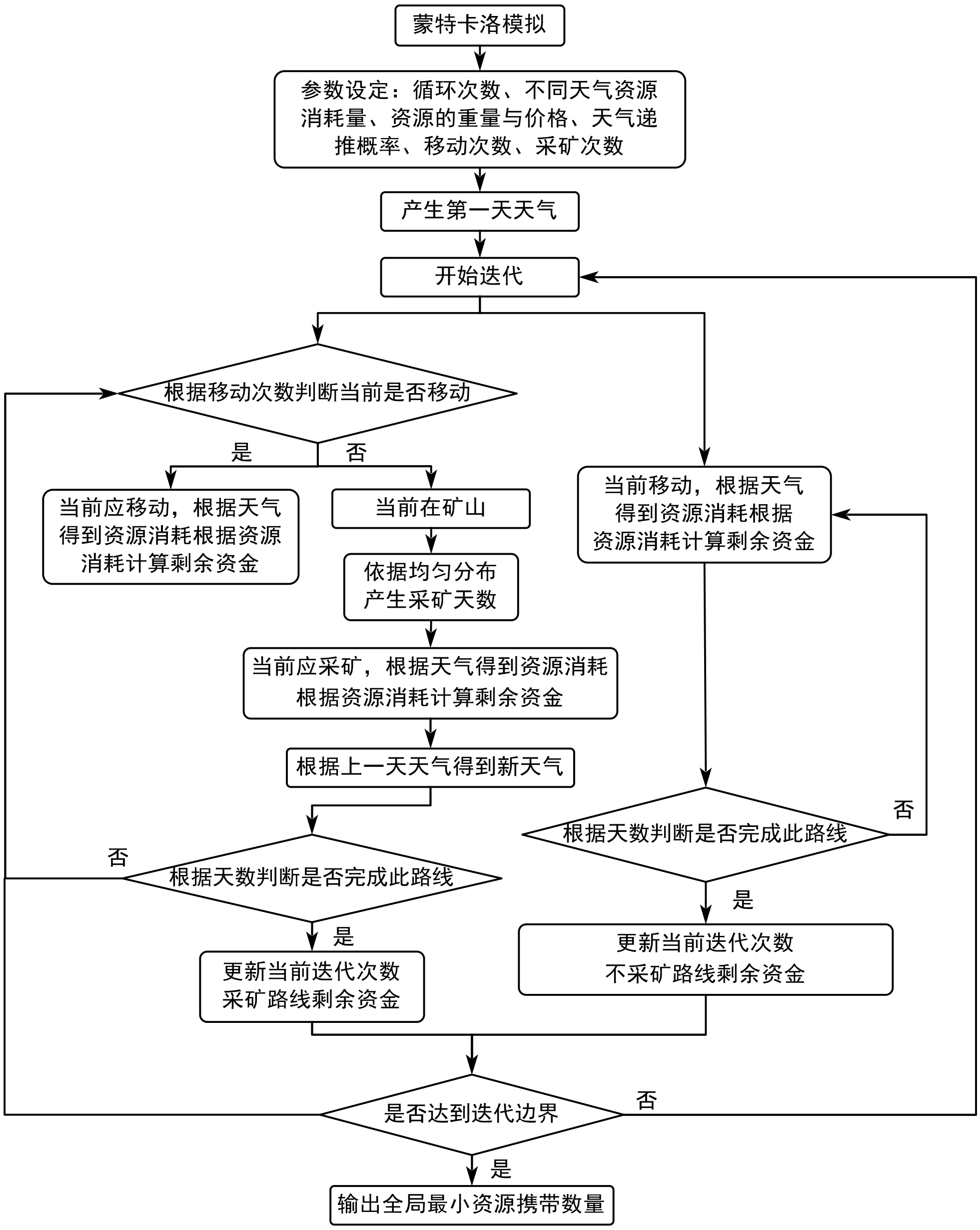


图 8 第三关蒙特卡洛模拟程序流程图

通过计算机模拟（见程序 6），得到以下图：

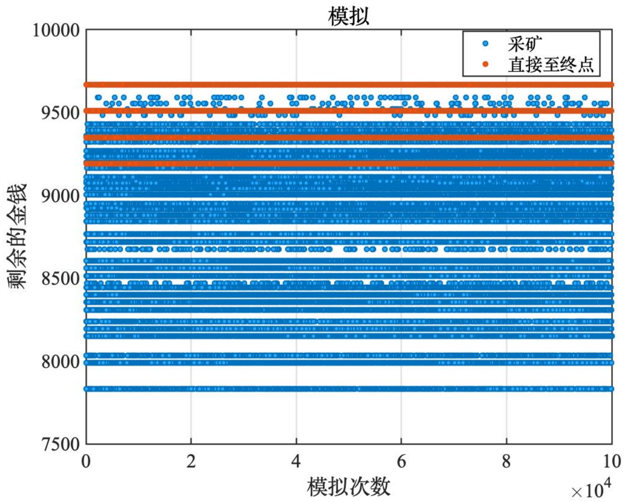


图 9 第三关计算机模拟结果图

图中可以看出直接到终点的路径具有全局终点剩余资金的最大值 9670 元，而且直接到终点的路径平均剩余资金要比采矿路线大的多，因此，第三关的最优策略为不采矿的路线 3 或路线 4（1→4→6→13 或 1→5→6→13）。

5.2.3 第四关游戏策略

1. 模型建立

要求第四关玩家一般情况的基本策略，观察到第四关游戏地图具有一定的规律性，首先我们对第四关游戏地图提取等效路径进行简化。

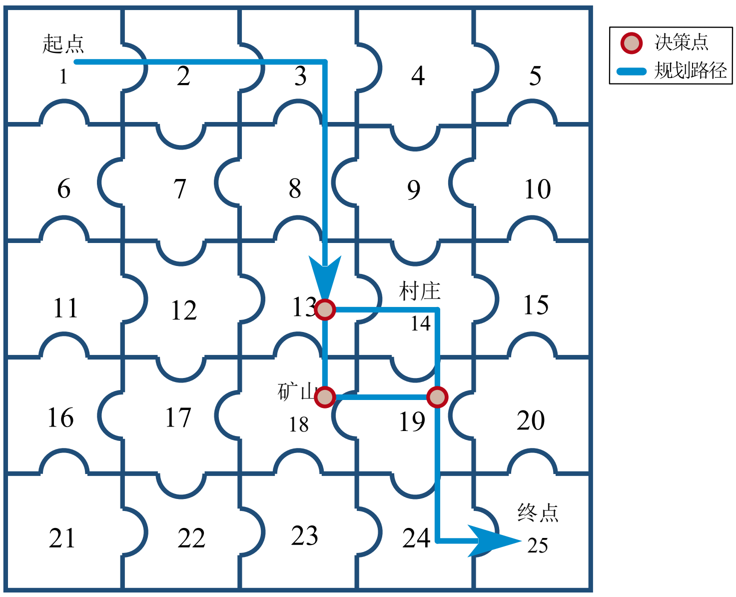


图 10　第四关路线简化图

第四关游戏时段为 30 天，玩家仅知道当天的天气情况以及 30 天内沙暴天气的出现较少，没有预先知道之后的天气情况。根据第二问中对第一二关的天气数据统计，我们大致确定沙暴天气最多不会出现 4 天，30 天中较少出现，我们认为沙暴天气至少出现一次，利用 matlab 的 randi 函数可以以均匀分布选取 1~ 4 的随机数来表示沙暴天气天数，而其余天气的出现根据第二问中给出的一般情况下的随机天气情况给出[4]。

玩家仅知道当天的天气，是无法像第一关那样在物品的购买上进行最小花费与最大利益的计算，不同的天气对应不同的花费，挖矿的利润也不相同。在此种情形下从玩家

的角度看，玩家购买物资及采矿的目标：在极端天气下，按照自己计算得到的路线依然能够存活。

前三关中题目求得物资消耗最大量也是建立在能够顺利走到终点的基础上，据此，我们确定在一般情况下，玩家按照贪心法选取可能位于最优路线中的任意一条，然后以在任何天气情况下都能够按照当前路线完成游戏并抵达终点的策略。

根据下标的数值分析可得，高温天气下尽可能停留是可能有助于利益最大化的，但是在一般的天气情况下，如果在高温天气下停留，后面的天气对于玩家是未知的，所以在高温天气下停留有死亡风险，具体的例子如下图所示：

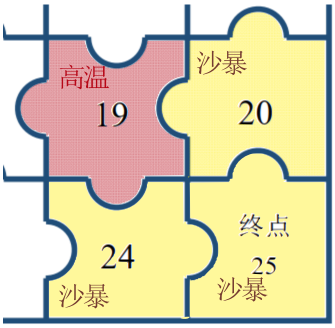


图 11 停留死亡概率大的示意图

上述天气在一般情况下是有产生的可能性的，所以玩家有极大概率因此死亡。因此玩家除了沙暴天气外，不会再地图其他任何区域做任何的停留。

从玩家的角度来说，玩家会在出发前根据第一问中确立的贪心策略，制定好自己的路线，然后计算出在极端情况下需要购买的最大资源数，以及需要往返的数量，我们选取了一个贪心策略下可能为最优候选解的一个遍历路线，沙暴最多为 4 天，玩家在任意的资源购买时至少会多买在路上滞留 4 天的资源消耗量，为了保险起见，玩家应买滞留 5 天的资源量，以避免可能发生的因为天气产生的误差问题。其次，在路上行走和采矿的极端情况可以视作全高温天气下进行，因为高温和沙暴之间的水和食物的基础消耗量差皆为 1，在期望的情况下，多买一天的沙暴预留资源可以作为补充。

因此玩家在一般随机化的天气情况下，会采取贪心的最优候选路径来达到一个较优利润值，然后按照最差的极端情况计算物资消耗来进行采矿。

最后，为了验证此策略下，玩家应对任何随机的天气情况下都不会因为资源耗尽而死亡，我们采用蒙特卡洛模拟的方式模拟不同天气情况下，玩家的水资源和食物资源拥有量的最小值与实现选取的最差极端最小值作比较，可以很好的验证策略在保证玩家生存上的合理性。

2. 模型求解

首先，确定一种贪心最优的情况，即在出发点买尽可能多的物资，去矿山采用尽可能多的天数去采矿，然后回到村庄补充物资，到达终点。对此我们利用 c++计算在高温天气情况下物资拥有的最小值(见程序 7)。 程序算法如下：

Step 1：初始化各项参数

将高温天气的资源消耗利用结构体存储，定义路径最短路，初始化两种最小资源为当前值域的无穷大，简单计算初始点能购买的最多水和食物资源

Step 2：起点到村庄时间、资源消耗量计算

在极端最差高温天气下，通过以天为单位求得消耗并在当前资源拥有上减去消耗。

尝试更新两种资源的全局最小值，然后将当前的资源更新为需要的最小值。
Step 3：村庄到矿山时间、资源消耗量计算

同样在高温天气下，通过以天为单位求得消耗并在当前资源拥有上减去消耗。尝试更新两种资源的全局最小值

Step 4：计算能够在矿山挖去的最大天数，计算挖矿时间

在矿山挖约束限制下的最长时间，当前的资源减去当前消耗。尝试更新两种资源的全局最小值

Step 5：计算矿山到达终点的资源消耗

当前拥有资源数减去消耗数，更新两种资源的全局最小值

Step 6：得到资源拥有最小值

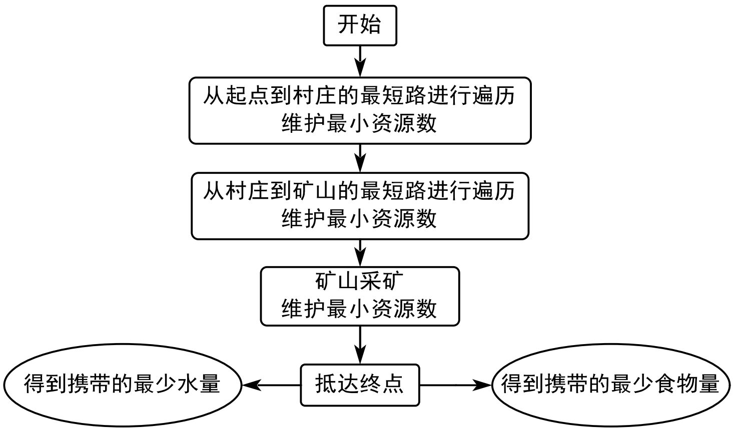


图 12 最少水量、食物量程序流程图

算法流程图如下：

通过上述求解方式得到了在极端天气下的最小值，下面计算在一般随机天气情况下的最小资源拥有量，采用蒙特卡洛模拟法，依据第三问求得的天气概率计算递推式，利用 matlab 内的 randi 和 randperm 得到具体的沙暴发生天，其余都使用 rand 均匀分布概率随机数进行计算，算法步骤与上相似，只是在沙暴天气下需要挖矿的资源消耗不同以及在移动过程时需要停下等候[5]。算法流程图如下：

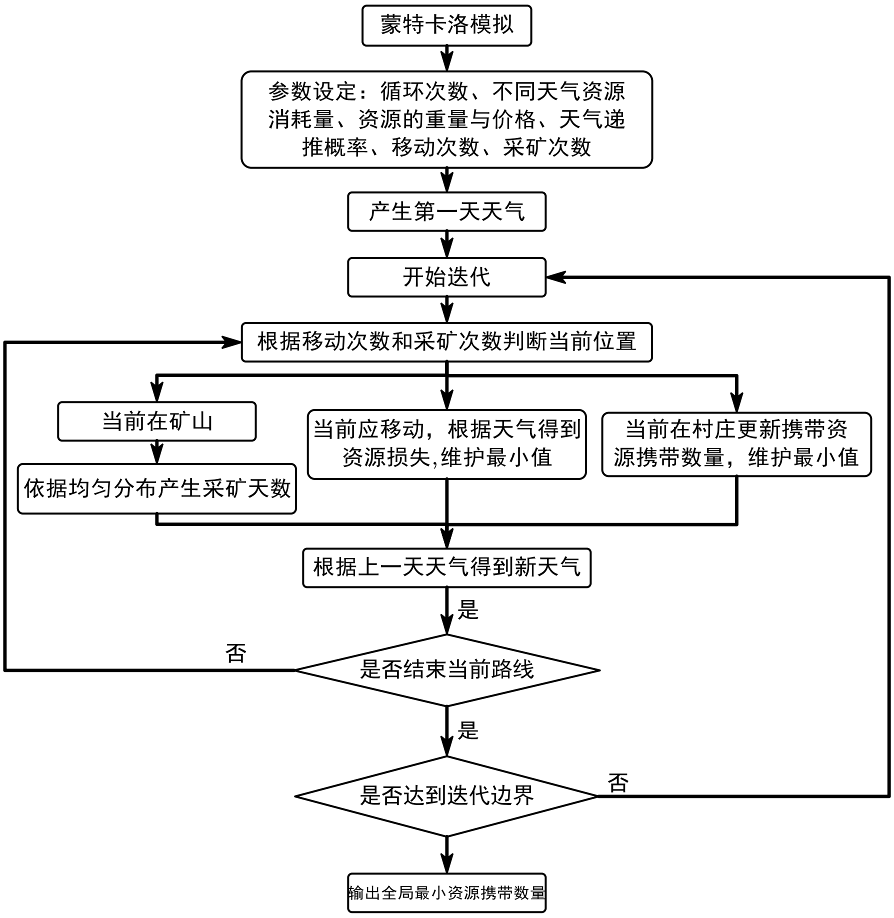


图 13 第四关蒙特卡洛模拟程序流程图

利用 Matlab 软件，通过以上模拟计算（见程序 8），得到最小资源携带数：

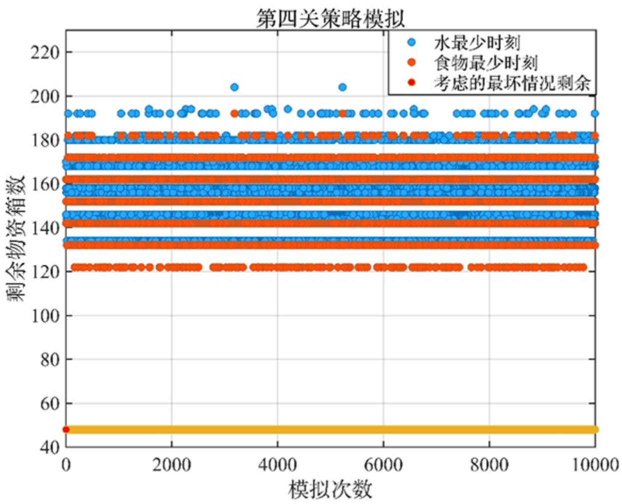


图 14 第四关策略模拟图

通过此图，可以看出在大量的随机一般化天气中，物资拥有量都远大于极端情况下，且极端情况下的最小值，验证了模型可以保证玩家存活的情况下尽可能的求的最优值。可以看出，按照最劣天气（高温）进行物资购买与途中补给安排是最佳的。

5.3 问题三的模型建立与求解

5.3.1 多方策略博弈

以参与游戏的 n 名玩家作为研究对象，假设这 n 位博弈方都是理性的，他们都以保

留自身资金数最大化为目的来指导自己的行为。则所有游戏玩家的集合 $Player=\{1,2,\ldots,n\}$，这 n 名玩家在沙漠中的移动选择可以简化为 Stackelberg 博弈过程。首先假设玩家 1 先决定他的路线，然后玩家 2 知道玩家 1 的行走路线后再做出他的路线决策。因此，在确定自己的路线时，玩家 1 必须考虑玩家 2 将如何作出反应[4]。

该模型实际上是一个价格领导模型，各玩家之间存在着行动次序的区别。策略的决定依据以下次序：领导性玩家决定他的一个行走策略，然后跟随者玩家可以观察到这个策略，然后根据领导性玩家的策略来决定他自己的行走路径。值得一提的是，领导性玩家在决定自己的路径时，充分了解跟随玩家会如何行动，也就是说领导玩家可以知道跟随玩家的反应函数。且在该模型中，领导性玩家的决策不需要自己的反应函数[6]。

因此，领导性玩家会自然地预期到自己行走的策略对其他跟随玩家的影响。考虑到这种影响，领导性玩家所决定的策略即是一个以跟随玩家的反应函数为约束的利润最大化策略[4]。

5.3.2 第五关的双方策略博弈

第五关的地图与参数设定与第三关相同，而对于第三问，也就是当只有一名玩家时，最后保留的资金数只取决于天气状况与玩家是否采矿。当有多名玩家时，不同玩家的行走路径可能重合、可能到达同一地点，如果出现这种情况，每个玩家的物资消耗量都会翻倍，故应避免玩家同时进行活动。第五关中设定的参与游戏人数 n=2，现要考虑如何让两名玩家同时进行游戏，尽可能地减少两名玩家采取的相同动作。因两名玩家的方案一旦确定在执行时就不能修改，故第五关是一个双方的静态博弈过程。游戏时段 10 天内的天气情况已知，如下表：

表 3 “第五关”天气分布表

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
天气										

由上表知，这十天内，起初晴朗一天，接着有一天高温，然后连续晴朗四天，最后连续高温四天，晴朗与高温出现的频数相同。根据文中对第三关的分析，晴天出现的频数越多，玩家消耗的物资量就越少，最终保留的资金数就越多，且高温天气采矿是没有利润的。分析第三关的地图（如下图 1），发现实质上玩家只有两种路线选择，即若玩家有采矿的意愿，他就会选择采矿路径最短的路线二，若不采矿，则选不采矿路径最短的路线三。

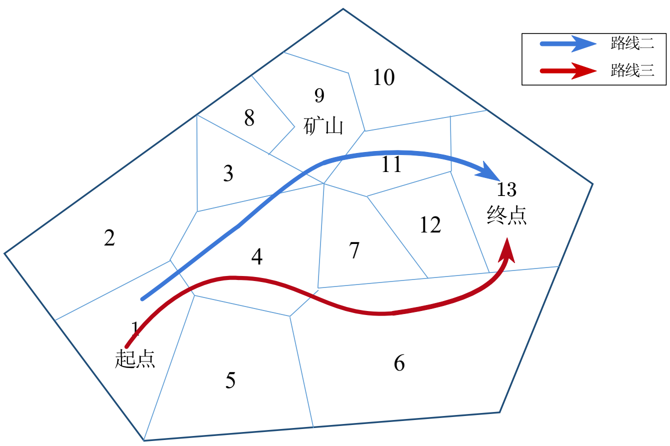


图 15 第 5 关路径简化图

在本关中，首先我们要确定两名玩家是否要选择采矿，然后根据采矿与否制定从起点到终点的策略。对于两个人来说：

由于第三关中已经说明高温下采矿是亏损的，而两个人同时出发去采矿走最短路径的话，物资消耗量是单人的两倍，且若其中一个人等待他们必定会碰上后几天的连续高温天气，是一个较差方案不予考虑。则现在只需比较玩家 1 采矿与玩家 2 不采矿的方案和两个玩家都不采矿的方案各自的最终资金数来确定两个玩家同时进行游戏的策略。

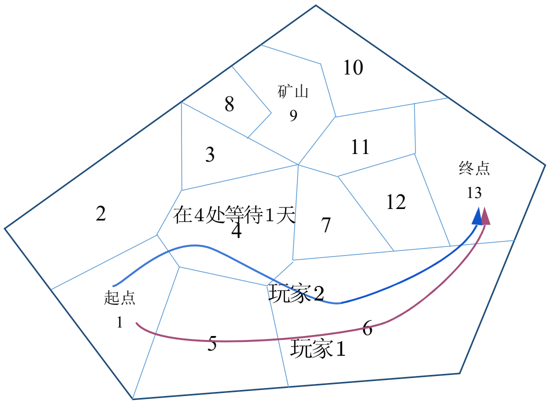


图 16 第五关玩家策略图

根据上述分析用计算器计算知，当游戏有两个玩家参与时，玩家 1 按照第三关的最优路径（即不采矿路径）行进，玩家 2 第一天需要和第一个玩家岔开路径，即第一天进入 4 号区域，在第二天等待 1 天后返回 6 号区域，在第四天进入终点 13，可以使得两名玩家保留的资金数最大，最大的所剩资金总和为：19045 元，其中，玩家 1 所剩资金为 9510 元，玩家 2 所剩资金为 9535 元。

5.3.3 第六关的三方策略博弈

分析第六关行进规则

（1）两名、三名玩家不要同时从一个区域移动到另一个区域；

（2）玩家不要同时在村庄购买；

（3）矿山不允许三各人同时采矿，但由于两个人还有利润，所以可以允许两个人同时采矿；

（4）沙暴天两名玩家都不允许采矿

讨论三名玩家的行进策略

现在有 3 名玩家同时从起点出发，根据上述 Stackelberg 模型，不妨考虑在玩家 1 的行进决策下，另外两名玩家的策略行为。

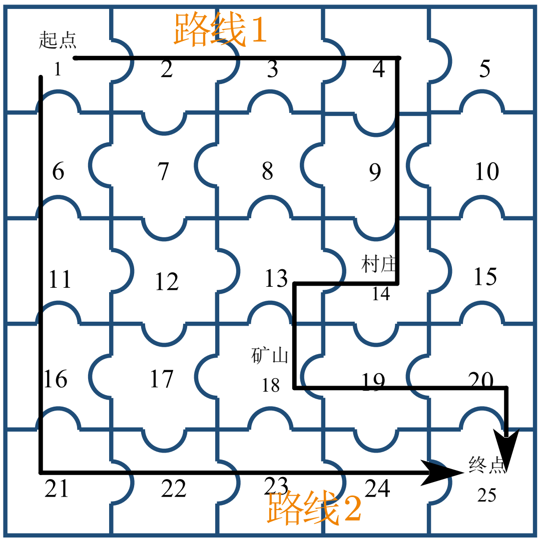


图 17 问题六的策略图

根据三个玩家之间的博弈，得出结论：当游戏开始第一天时只允许两个人行进，另一名玩家应在起点等待，若某玩家有采矿的意愿，则选择图中的路线 1，若某玩家不采矿，选择图中的路线 2，按照上述规则，直到所有玩家都到达终点。

六、模型的评价与推广

8.1 模型评价

优点：

1.通过理论证明，分析出贪心算法使用的正确性。

2.随机化贪心的时间复杂度低、收敛速度快，比传统的搜索及启发式的算法效率高。

3.玩家以生存为主的策略是能保证玩家一定能够生存。

缺点及改进：

随机化贪心的使用范围较小，只适用于提前知道天气、地图，能够对有路径的选择有范围且贪心策略的指标在影响因素中占比较大，可以考虑使用启发式算法等求解优化模型。

8.2 模型推广

本文研究了日常生活中复杂的管理决策问题，通过构建算法、简化问题以利用计算机求解两种方式得到了复杂问题的最优解，本问的优化思想可以用到生活中大部分优化问题的求解中，决策模型可以用到车间调度、公交车安排等问题求解中。

参考文献

[1]百度百科，沙漠掘金， https://baike.baidu.com/item/%E6%B2%99%E6%BC%A0%E6%8E%98%E9%87%91/4979359?fr=Aladdin，2012.06.12

[2]刘汝佳，黄亮.算法艺术与信息学竞赛.北京.清华大学出版社，2008.

[3]韩中庚.数学建模方法及其应用.北京.高等教育出版社，2005.6

[4]姜启源，谢金星，叶俊.数学模型(第四版).北京:高等教育出版社，2011.

[5]司守奎，孙兆亮.数学建模算法与应用(第二版).北京.国防工业出版社.2017.01
[6]王瑞琪,王婷婷,李阳.外卖食品安全监管的混合策略模型[J].太原师范学院学报(自然科学版),2020,19(03):35-39+48.

附 录

附录一、附件清单

附件编号	文件名称	附件说明
程序 1	main1_1.cpp	仿真贪心求解访问两次矿山
程序 2	main1_2.cpp	仿真贪心求解访问一次矿山
程序 3	plot.m	结果可视化
程序 4	getpickdays.m	得到采矿天数
程序 5	newdaywea.m	递推天气
程序 6	main2.m	第二问第三关模拟
程序 7	main4.cpp	求高温下最小资源拥有
程序 8	main4.m	蒙特卡洛模拟一般概率天气
程序 9	main5.cpp	第五关两人分走(一人采矿)最优值

附录二、程序（9 项）

程序 1	文件名称	main1_1.cpp	程序说明	仿真贪心求解访问两次矿山

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define rep(i,a,n) for(int i=a;i<n;i++)
#define per(i,a,n) for(int i=n-1;i>=a;i--)
#define fi first
#define se second
#define pb push_back
#define close ios::sync_with_stdio(0);cin.tie(0);cout.tie(0);
using namespace std;
typedef pair<int,int> pii;
const int N=35;
const int INF=0x3f3f3f3f;

struct weather
{
    int water_cost;
    int food_cost;
};
struct cost
{
    int weight;
    int price;
};
struct record
{
    int money;
    int water;
    int food;
    int rest;
```