Bribaud
Ludovic

Vendrédi, 26 janvier 2024

Travaux pratiques
Introduction à la statistique.

1) Ecrivons l'intervalle de confiance asymptotique pour μ basé sur le théorème de limite centrale. On notera I_1 cet intervalle.

Nous avons : $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

On cherche q_1 et q_2 tels que:

$\mathbb{P}\left(q_1 \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq q_2\right) = 1-\alpha$.

avec $q_1 = -q_{1-\alpha/2}$ et $q_2 = q_{1-\alpha/2}$ les quantiles de la loi normale.

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2}\,\sigma \leq \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq q_{1-\alpha/2}\,\sigma\right) = 1-\alpha$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2}\cdot\sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n - \mu \leq q_{1-\alpha/2}\,\sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + q_{1-\alpha/2}\,\sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$.

La variance est inconnue alors on remplace σ par son estimateur. $\hat{\sigma}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

On considère la variable aléatoire suivante:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}} = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}}} = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n}{\sigma^2}/(n-1)}}$$

Avec $\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

avec $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$.

Nous avons obtenu:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}} = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{Z_n}{\sqrt{\frac{Q_{n-1}}{n-1}}}$$

Avec $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Q_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$.

Ainsi $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}} \sim t(n-1)$

Scanned with CamScanner

Et donc notre intervalle de confiance est :

$$I_1 = \left[\bar{X}_n - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} q^{t(n-1)}_{1-\alpha/2} ; \bar{X}_n + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} q^{t(n-1)}_{1-\alpha/2} \right]$$

q quantile de la loi de student.

$$I_1 = \left[\bar{X}_n - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} T_{n-1,\alpha} ; \bar{X}_n + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} T_{n-1,\alpha} \right]$$

2) Ecrivons l'intervalle de confiance asymptotique pour μ basé sur le théorème de limite centrale, avec variance connue égale à μ^2. On notera I_2 cet intervalle.

D'après nos précédents calculs on a :

$$I_2 = \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} ; \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \right]$$

Avec $q_{1-\alpha/2}$ la quantile de la loi normale.

3) Explicitons φ et déduisons I_3.

On sait que :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \mu^2)$$

En prenant φ fonction continue, on a :

$$\sqrt{n}(\varphi(\bar{X}_n) - \varphi(\mu)) \xrightarrow{L} \varphi'(\mu)\sigma(\mu) Z \quad , \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

donc d'après notre raisonnement au dessus, on a :

$$\varphi'(\mu)\sigma(\mu) = \frac{1}{\mu} \qquad \text{or } \sigma(\mu) = \sqrt{\mathrm{var}(\mu)} = \sqrt{\mu^2} = \mu.$$

$$\Rightarrow \varphi'(\mu) = \frac{1}{\mu^2}$$

Ainsi, $\varphi(\mu) = -\frac{1}{\mu}$, $\underline{\underline{\varphi(\mu) = -\frac{1}{\mu}}}$

Déduisons I_3.

~~Prenons~~ Puisque $\varphi(\mu) = -\frac{1}{\mu}$ alors :

$$\sqrt{n}(\varphi(\bar{X}_n) - \varphi(\mu)) \xrightarrow{L} \frac{1}{\mu} Z \iff \sqrt{n}\left(-\frac{\mu}{\bar{X}_n} + 1\right) \xrightarrow{L} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

donc on a :

$$\mathbb{P}\left(-\underbrace{q_{1-\alpha/2}}^{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \sqrt{n}\left(\frac{-\mu}{\bar{X}_n} + 1\right) \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

$$\iff \mathbb{P}\left(-1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq -\frac{\mu}{\bar{X}_n} < \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} - 1\right) = 1-\alpha.$$

$$\iff \mathbb{P}\left(\bar{X}_n\left(1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu \leq \bar{X}_n\left(1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1-\alpha.$$

Ainsi, $I_3 = \left[\bar{X}_n \left(1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) ; \bar{X}_n \left(1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) \right]$

5-) Vérifions que $Z_n = n\bar{X}/\mu_n \sim \gamma(n, 1)$.

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow n\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, les $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda > 0$

D'après le TD2, $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma(n, \lambda)$

Ainsi, $n\bar{X}_n/\mu \sim \gamma(n, \lambda\mu)$ d'après l'indication (1)

or $\mu = \frac{1}{\lambda}$ donc $Z_n \sim \gamma(n, \lambda \cdot \frac{1}{\lambda}) = \gamma(n, 1)$.

On a bien $Z_n \sim \gamma(n, 1)$.

Déduisons I_5.

$Z_n \sim \gamma(n, 1)$ donc, $\mathbb{P}(q_n^{\alpha/2} \leq Z_n \leq q_n^{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$.

où q_n^{α} est la quantile de $\gamma(n, 1)$ d'ordre α.

donc,

$\mathbb{P}(q_n^{\alpha/2} \leq n\bar{X}_n/\mu \leq q^{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{1}{q_n^{1-\alpha/2}} \leq \frac{\mu}{n\bar{X}_n} \leq \frac{1}{q_n^{\alpha/2}} \right) = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{n\bar{X}_n}{q_n^{1-\alpha/2}} \leq \mu \leq \frac{n\bar{X}_n}{q_n^{\alpha/2}} \right) = 1 - \alpha$.

Par le TCL, on a: $q_n^{1-\alpha/2} = -q_{1-\alpha/2}^{\sim\mathcal{N}(0,1)}$ et $q_n^{\alpha/2} = q_{1-\alpha/2}^{\sim\mathcal{N}(0,1)}$

$q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi gaussienne centrée réduite:

$\mathbb{P}\left(-q_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n}{\mu} - 1 \right) \leq q_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$.

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}_n}{\mu} \leq 1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$.

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(1 / 1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\mu}{\bar{X}_n} \leq 1 / 1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n}{1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \leq \mu \leq \frac{\bar{X}_n}{1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \right) = 1 - \alpha$.

Ainsi, $I_5 = \left[\dfrac{\bar{X}_n}{1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} ; \dfrac{\bar{X}_n}{1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \right]$

4.) Calculons la fonction de répartition de $Y_n = \max \frac{X_i}{\mu}$.

$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(\max \frac{X_i}{\mu} \leq x)$

$= \mathbb{P}(\frac{X_1}{\mu} \leq x, \dots, \frac{X_n}{\mu} \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq \mu x) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \leq \mu x)$

$= (F_X(\mu x))^n$

or $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors:

$F_{Y_n}(x) = (1 - e^{-\lambda \mu x})^n = (1 - e^{-x})^n$

Déduisons I_4

On cherche q_1 et q_2 tels que:

$\mathbb{P}(Y_n \leq q_2) = \frac{\alpha}{2}$ et $\mathbb{P}(Y_n \leq q_1) = \frac{\alpha}{2}$

Ainsi, $(1 - e^{-q_2})^n = \frac{\alpha}{2}$ et $(1 - e^{-q_1})^n = 1 - \frac{\alpha}{2}$

d'où, $1 - e^{-q_1} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}$ et $1 - e^{-q_2} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}$

$\Leftrightarrow e^{-q_1} = 1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \Rightarrow y = -\ln\left(1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}\right)$

et donc $y = -\ln\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}\right)$

$I_4 = \left] -\dfrac{\max(X_i)}{\ln\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}\right)} ; -\dfrac{\max(X_i)}{\ln\left(1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}\right)} \right]$

Scanned with CamScanner