Polytech Lyon, département MAM Année universitaire 2023-2024

Outils pour le calcul scientifique

Travaux tutorés

INITIATION À MATLAB

Exercice 1: *Stabilité du schéma d'Euler*

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = -150\, y(t) + 30 \\ y(0) = \dfrac{1}{5} \end{cases} \tag{1}$$

dont l'unique solution est $y(t) = 1/5$.

Si l'on perturbe la condition initiale en prenant $y(0) = 1/5 + \varepsilon$, la solution exacte devient $y(t) = 1/5 + \varepsilon e^{-150\,t}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Pour ε petit, cette nouvelle solution est très proche de celle trouvée avec la condition initiale non perturbée. On rappelle qu'une méthode numérique est dite *stable* si l'on retrouve cette propriété au niveau de la solution numérique, c'est à dire que la solution numérique trouvée pour la condition initiale $y(0) = 1/5 + \varepsilon$ doit être proche de celle trouvée pour la condition initiale $y(0) = 1/5$.

I– Nous allons tester la stabilité du schéma d'Euler explicite. On rappelle qu'il est défini comme suit pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

A pas de temps fixé $h > 0$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = nh \in [0, T]$. Le schéma d'Euler est alors défini par

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad \text{pour tout } n. \tag{3}$$

Une implémentation de cette méthode est la fonction `EEx` suivante

```
function y=EEx(y0,h,T,f)
  N=floor(T/h);
  y=[y0];yy=y0;
  for i=1:N
    yy=yy+h*feval(f,yy); y=[y yy];
  end
endfunction
```

1. Définir la fonction `f` correspondant au problème (1) à l'aide de la commande `inline`.

RÉPONSE : $f =$

2. On étudie l'équation (1) sur l'intervalle $[0,1]$ avec la condition initiale $y(0) = 1/5$ pour $h = 0.02, 0.01, 0.001$. Pour chaque pas de temps, on commencera par créer un vecteur `t` contenant la liste des points de $(t_n = nh)_{0 \leq n \leq N}$ contenus dans $[0,1]$. Puis on calculera les itérés du schéma d'Euler explicite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$.
   Tracer les graphes correspondant aux résultats obtenus sur une même figure. La solution est-elle correctement approchée ?

RÉPONSE :

   $\hookrightarrow$ Enregistrer la figure au format eps sous le nom `euler.eps`.

3. On considère à présent la condition initiale $y(0) = 1/5 + \varepsilon$, avec $\varepsilon = 10^{-10}$. Refaire les mêmes calculs qu'à la question précédente. Qu'observe-t-on cette fois-ci ? (On fera attention à l'échelle selon l'axe des ordonnées !)

RÉPONSE :

   $\hookrightarrow$ Enregistrer la figure au format eps sous le nom `euler-perturbe.eps`.

4. Pour comprendre ce qu'il se passe, on va étudier la solution numérique du schéma d'Euler explicite dans le cas $y_0 = 1/5 + \varepsilon$.
   (a) En remplaçant f par son expression dans (3), écrire y_{n+1} en fonction de y_n.

RÉPONSE : $y_{n+1} =$

   (b) En étudiant la suite (géométrique) de terme général $x_n = y_n - 1/5$, donner l'expression de y_n en fonction de h et n.

RÉPONSE : $y_n =$

(c) On fixe $h = 0.02$ et on note $N = 1/h$. La solution numérique caclulée pour une donnée initiale égale à $1/5$ est la suite constante égale à $1/5$. Que vaut $|y_N - 1/5|$? Par quel facteur l'erreur initiale a-t-elle été amplifiée ?

RÉPONSE :

(d) Donner une condition sur h qui assure que l'erreur $\max\limits_{0 \leq n \leq N} |y_n - 1/5|$ reste inférieur à ε.

RÉPONSE :

(e) Faire des tests numériques permettant d'illustrer la condition que vous venez d'énoncer.

RÉPONSE : (pas de temps testés et résultats observés)

II– Nous allons à présent étudier la stabilité du schéma d'Euler implicite défini comme suit, avec les mêmes notations que dans la partie I- :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{4}$$

La méthode d'Euler implicite pour une fonction f non linéaire générale nécessite l'utilisation d'une méthode de Newton pour trouver y_{n+1} comme solution d'une équation non linéaire. Mais dans tous les exemples de ce TP, la fonction f est linéaire, ou affine, et ne dépend que de y : $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\ f(y) = Ay+b$, où $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$. Dans ce cas,

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h(Ay_{n+1} + b)$$

se réécrit

$$(I_d - hA)y_{n+1} = y_n + hb$$

et y_{n+1} s'obtient en résolvant un système linéaire. Voici une fonction permettant de calculer les itérés du schéma d'Euler implicite dans le cas particulier des fonctions f affines, qui prend en argument A et b :

```
function y=EIm(y0,h,T,A,b)
  d=size(b,1); N=floor(T/h);
  y=[y0];yy=y0;
  for i=1:N
    yy=inv(eye(d,d)-h*A)*(yy+h*b); y=[y yy];
  end
endfunction
```

1. Dans l'exemple considéré, $d = 1$. Que valent A et b ?

   RÉPONSE :
   $A =$ b=

2. Appliquer le schéma d'Euler implicite à l'équation (1) sur l'intervalle [0, 1] avec la condition initiale $y(0) = 1/5 + \varepsilon$ pour $h = 0.02, 0.01, 0.001$, avec $\varepsilon = 10^{-10}$. Tracer les graphes des résultats obtenus sur la même figure. Qu'observe-t-on ? (On fera attention à l'échelle selon l'axe des ordonnées !)

   RÉPONSE :

   ↪ Enregistrer la figure au format eps sous le nom `euler-implicite.eps`.

3. Regardons ce qu'il se passe d'un point de vue théorique

   (a) En remplaçant f par son expression dans (4), écrire y_{n+1} en fonction de y_n.

   RÉPONSE :
   $y_{n+1} =$

   (b) En étudiant la suite de terme général $x_n = y_n - 1/5$, donner l'expression de y_n en fonction de h et n.

   RÉPONSE :
   $y_n =$

   (c) Une condition sur h apparaît-elle cette fois-ci pour assurer que l'erreur reste de l'ordre de ε ?

   RÉPONSE :

Exercice 2: *Équation de Lotka-Volterra.*

Le modèle de Lotka-Volterra (1925) donne un modèle simple de conflit entre des populations de proies et de prédateurs. Supposons par exemple que les nombres de lapins et de renards dans une certaine région au temps t sont $l(t)$ et $r(t)$. Alors, si on a des populations initiales $l(0)$ et $r(0)$ au temps initial $t_0 = 0$, leurs nombres peuvent évoluer selon le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} l'(t) & = & l(t)(\alpha - \beta r(t)), \\ r'(t) & = & r(t)(\delta l(t) - \gamma). \end{array} \right.$$

Ce système reproduit un certain nombre de comportements prévisibles :

- la première équation $l'(t) = \alpha l(t) - \beta l(t)r(t))$ représente la variation du nombre de lapins $l'(t)$ qui est égale à la croissance du nombre de lapins $\alpha l(t)$ (supposés trouver de la nourriture en quantité illimitée), moins le nombre de lapins mangés par des renards $\beta l(t)r(t))$,
- la deuxième équation $r'(t) = r(t)(\delta l(t) - \gamma)$ représente la variation du nombre de renards $r'(t)$ qui est égale à la croissance du nombre de renards $\delta l(t)r(t)$ du fait de la consommation de lapins, moins la mortalité des renards $\gamma r(t)$.

Si on se donne une population initiale de 1500 lapins et de 100 renards avec $\alpha = 0.05$, $\beta = \delta = 0.0005$ et $\gamma = 0.2$, tracer l'évolution de $l(t)$ et $r(t)$ entre $t = 0$ à $t = 600$.

Exercice 3: *Invasion de zombies.*

Les EDOs sont souvent utilisées en épidémiologie et en dynamique des populations pour décrire la dissémination d'une maladie. Imaginons ici une invasion de zombies (cela fonctionne aussi avec la propagation d'un virus). A chaque temps t, on enregistre

- $h(t)$: la population d'humains,
- $z(t)$: la population de zombies,
- $n(t)$: la population de zombies neutralisés qui peuvent se réveiller après un certain temps.

Lors d'une morsure par un zombie, un humain est converti irrémédiablement en zombie. On suppose aussi que les zombies ne peuvent pas être tués, mais qu'un humain courageux peut temporairement en neutraliser quelques-uns. Le modèle le plus simple est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h'(t) & = & -\beta h(t)z(t), \\ z'(t) & = & \beta h(t)z(t) + \gamma n(t) - \alpha h(t)z(t), \\ n'(t) & = & \alpha h(t)z(t) - \gamma n(t), \end{array} \right.$$

où α, β et γ sont trois constantes positives représentant

- α : une rencontre humain-zombie qui neutralise des zombies,
- β : une rencontre humain-zombie qui convertit un humain en zombie,
- γ : les zombies neutralisés qui se réveillent.

Tracer la solution pour $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 0.02$, $h(0) = 500$, $z(0) = 10$ et $n(0) = 0$.