Bribaud
Ludovic

Lundi, 22 Janvier 2024

Travaux tutorés

Exercice 1

4.a) En remplaçant f par son expression dans (3), Ecrivons y_{n+1} en fonction de y_n

(3): $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

$\Leftrightarrow \quad y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + h(y'_n = -150\, y_n + 30)$

$= y_n - 150 h y_n + 30h = (1 - 150h)\, y_n + 30h$

$\Leftrightarrow \quad y_{n+1} = (1 - 150h)\, y_n + 30h.$

b) En étudiant $x_n = y_n - 1/5$ donnons l'expression de y_n en fonction de h et n.

$x_{n+1} = y_{n+1} - 1/5 = (1 - 150h)y_n + 30h - 1/5$

$= (1 - 150h)(x_n + 1/5) + 30h - 1/5 = x_n - 150h x_n + \frac{1}{5} \cancel{- 30h} + \cancel{30h} \cancel{-1/5}$

$= x_n(1 - 150h) + \frac{0}{5}$

or x_n géométrique donc:

$x_n = (1 - 150h)^n x_0 \qquad$ et $x_0 = \varepsilon$.

donc $\quad y_n - \frac{1}{5} = (1 - 150h)^n \varepsilon$

$y_n = (1 - 150h)^n \varepsilon + 1/5$

c) Que vaut $|y_N - 1/5|$?

$|y_N - 1/5| = |(1 - 150h)^N \varepsilon + 1/5 - 1/5| = |(1 - 150h)^{1/h} \varepsilon|$

$= |(1 - 150 \times 0{,}02)^{1/0{,}02} \varepsilon| = 1{,}126 . 10^{15} \varepsilon$

$|y_N - 1/5| = 1{,}126 . 10^{15} \varepsilon$

L'erreur a été amplifié par $h = 0{,}02$.

d) Donnons une condition sur h qui assure que:

$\max |y_n - 1/5| < \varepsilon$. On a:

$\cancel{\max_{0 \le n \le N} |y_n - 1/5| = |(1-150h)^N| = |(1-150h)^{1/h}| \varepsilon < \varepsilon}$

$\cancel{(1-150h)^{1/h} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{h} \ln(1-150h) < 0}$

$\Leftrightarrow$ ~~[illegible]~~

$|y_n - 1/5| = |(1-150h)^n \varepsilon| \leq \varepsilon$

$-1 \leq (1-150h)^n \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -150h \leq 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{h \leq \frac{1}{75}}}$

Partie II

1°) $A = -150 \qquad b = 30$

2.a) Donnons l'expression de y_{n+1}.

$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h(A y_{n+1} + b)$

$= y_n - 150h\, y_{n+1} + 30h$

$\Leftrightarrow (1+150h) y_{n+1} = y_n + 30h$

$y_{n+1} = (y_n + 30h)/(1+150h)$

b) Donnons l'expression de y_n.

$x_{n+1} = y_{n+1} - 1/5 = (y_n + 30h)/(1+150h) - 1/5$

$((x_{n+1}) + 1/5)(1+150h) = y_n + 30h$

$\Leftrightarrow x_{n+1} + 150h\, x_{n+1} + \frac{1}{5} + \cancel{30h} = y_n + \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{30h}$

$x_{n+1}(1+150h) = y_n - 1/5 = x_n$

$x_{n+1} = \frac{1}{(1+150h)} x_n = (1+150h)^{-n} \varepsilon$

$\Leftrightarrow y_n = (1+150h)^{-n} \varepsilon + \frac{1}{5}$

c) On a :

$\max |y_n - 1/5| \leq \varepsilon = |(1+150h)^{-1/h} \varepsilon| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+150h)^{1/h}} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{h} \ln(1+150h) \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 + 150h \leq 1 \Leftrightarrow h \leq 0$.

puisque $h > 0$ alors dans ce cas il n'y a pas de condition sur h pour assurer que l'erreur reste de l'ordre de ε.