Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

BRIBAUD
Ludovic

TP3 Statistique

2) Méthode de Box-Muller

4) A l'aide d'un changement de variable polaire, montrons que
$\mathbb{E}(e^{i\lambda((1-\varepsilon)X+\varepsilon Y)}) = \int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{i\lambda\sqrt{s}((1-\varepsilon)\cos(2\pi\theta)+\varepsilon\sin(2\pi\theta))}\frac{e^{-s/2}}{2}\frac{d\theta}{2\pi}ds.$

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

La densité jointe de variables X et Y s'écrit :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-(x^2+y^2)/2\right)$$

Posons $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\Theta \\ R\sin\Theta \end{pmatrix}$ et on définit une fonction φ tq.
$\begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Formule de changement de variables :

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = |\mathrm{Jac}\,\varphi^{-1}(r,\theta)|\, f_{X,Y}(\varphi^{-1}(r,\theta))$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi^{-1}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$f_{X,Y}(\varphi^{-1}(r,\theta)) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)/2\right) = \frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}$$

$$|\mathrm{Jac}\,\varphi^{-1}(r,\theta)| = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1^{-1}(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_1^{-1}(r,\theta)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi_2^{-1}(r,\theta)}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_2^{-1}(r,\theta)}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

$|\mathrm{Jac}\,\varphi^{-1}(r,\theta)| = r.$

r est à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et θ à valeur dans $[0,2\pi]$ donc :

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}\, r\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(r)\,\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\theta)$$

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda((1-\varepsilon)X+\varepsilon Y)}) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda((1-\varepsilon)r\cos\theta+\varepsilon\sin\theta r)}\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}\, r\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(r)\,\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\theta)\,d\theta\, dr$$

Changement de variable, $s = r^2$; $\frac{ds}{dr} = 2r \Rightarrow dr = \frac{ds}{2r}$ et $r = \sqrt{s}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{i\lambda((1-\varepsilon)X+\varepsilon Y)}) = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda\sqrt{s}((1-\varepsilon)\cos(\theta)+\varepsilon\sin\theta)}\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-s/2}\cancel{r}.\, d\theta\,\frac{ds}{2\cancel{r}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{i\lambda((1-\varepsilon)X+\varepsilon Y)}) = \int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{i\lambda\sqrt{s}((1-\varepsilon)\cos(2\pi\theta)+\varepsilon\sin(2\pi\theta))}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{-s/2}}{2}\, d\theta\, ds.$$

Déduisons que les lois de $\sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$ et $\sqrt{-2\ln V}\sin(2\pi V)$ sont des

Scanned with CamScanner

Lois normales :

On pose : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v) \\ \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

Par identification : $\theta \overset{\text{loi}}{=} 2\pi v$ et $r \overset{\text{loi}}{=} \sqrt{-2\ln u} \Leftrightarrow r^2 \overset{\text{loi}}{=} -2\ln(u)$.
donc $\theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$ et on sait que $-\frac{\ln(u)}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda)$ donc dans notre cas pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $-2\ln(u) \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$ et donc $r^2 \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$

Ainsi,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{loi}}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v) \\ \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v) \end{pmatrix}$ donc nos deux variables suivent une loi normale.