TP3 Rappels simulation de variables aléatoires

Igor Honoré

January 26, 2024

Le but de ce TP est de rappeler des méthodes de simulation de lois et de calcul d'espérance.

1 Méthode d'inversion de la fonction de répartition

Dans tout le document la variable $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ désignera une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Proposition 1. *Soit X est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$ et de quantile $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$ (l'inversion généralisée de la fonction de répartition). Nous avons dès lors:*

$$F^{-1}(U) \overset{loi}{=} X,$$

de plus, si F est une fonction continue,

$$F(X) \overset{loi}{=} U.$$

Proof. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme la fonction F est croissante,

$$\mathbb{P}[F^{-1}(U) \leq x] = \mathbb{P}[U \leq F(x)] = \int_0^{F(x)} du = F(x).$$

$\square$

1.1 Loi exponentielle

1) Implémenter la loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$, $\lambda > 0$ (rappelons que la densité de probabilité est $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{x\geq 0}$).
2) Faites un histogramme représentant les réalisations (préciser le pseudo code qui nous renvoie l'histogramme).
3) Par deux méthodes différentes pour calculez et estimez l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-x}dx.$$

1.2 Loi de Cauchy

1) Implémenter la loi de Cauchy de densité de probabilité $x \mapsto \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}$.
2) Faites un histogramme représentant les réalisations.
3) Par deux méthodes différentes pour calculez et estimez l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Commentez le résultat, que dire d'une somme renormalisée de variables i.i.d. suivant une loi de Cauchy ?

La méthode d'inversion de la fonction de répartition est simple mais nécessite de pouvoir inverser (au sens de la composition) l'intégrale d'une fonction, ce qui, dans la plus part des cas, s'avère en théorie impossible. Pour la loi Gaussienne, il n'existe pas de formule fermée mais seulement des approximations numériques.

2 Méthode de Box-Muller

1) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de v.a. suivant une loi uniforme sur $[-1,1]$, rappelez vers quoi tendent

$$\frac{\sum_{k=1} X_k}{n}, \ \frac{\sum_{k=1} X_k}{\sqrt{n}}.$$

Faites un histogramme représentant les réalisations de $\frac{\sum_{k=1} X_k}{\sqrt{n}}$.

2) Faire un autre histogramme de $\frac{\sum_{k=1} X_k}{\sqrt{n}}$ si pour chaque $k \geq 1$, X_k suit une loi de Cauchy avec $\lambda = 1$. A quoi ressemble la courbe pour n assez grand ? Commentez.

3) A l'aide du théorème central limite et de la question 1), par une méthode de Monte Carlo estimer

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Cette méthode vous semble-t-elle efficace ? Pourquoi ?

Une des méthodes couramment utilisées est celle dite de Box-Muller, que nous allons développer en-dessous.

4) Soient X et Y deux variables Gaussiennes centrées réduites indépendantes et $\varepsilon \in [0,1]$. Calculer la transformée de Fourier, aussi appelé fonction caractéristique, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda\left((1-\varepsilon)X+\varepsilon Y\right)}].$$

A l'aide d'un changement du variable polaire $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, montrez que

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda\left((1-\varepsilon)X+\varepsilon Y\right)}] = \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{i\lambda\sqrt{s}\left((1-\varepsilon)\cos(2\pi\theta)+\varepsilon\sin(2\pi\theta)\right)} \frac{e^{-\frac{s}{2}}}{2} \frac{d\theta}{2\pi} ds,$$

avec $s = r^2$.

En déduire, que les lois de $\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V)$ et $\sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)$ avec U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, sont des lois normales.

5) Vérifiez cette propriété par ordinateur. Simuler une variable Gaussienne de moyenne 1 et de variance 2 par Box-Muller, illustrez les réalisations par un histogramme.