Polytech Lyon, département MAM Année universitaire 2023-2024

Outils pour le calcul scientifique

Travaux pratiques n° 3

INITIATION À MATLAB

Une note tenant compte du déroulement de votre TP (implication, autonomie, ...) pourra être attribuée dans le cadre du contrôle continu. Une absence injustifiée ou un oubli des vos identifiants donne lieu à la note 0.

1 LES GRAPHIQUES 2D

Exercice 1: *Premier tracé avec plot.*

```
x=-1:0.01:1;
y=x.^2;
plot(x,y)
```

RÉPONSE :

Exercice 2: *La même chose avec fplot dans la figure n° 2.*

```
figure(2)
fplot('x^2',[-1,1])
```

RÉPONSE :

Exercice 3: *Modification du type de ligne.*

```
plot(x,y,'-')
plot(x,y,':')
plot(x,y,'--')
plot(x,y,'-.')
```

RÉPONSE :

Exercice 4: *Modification de la couleur.*

```
plot(x,y,':r')
plot(x,y,':y')
plot(x,y,':b')
plot(x,y,':g')
plot(x,y,':k')
```

RÉPONSE :

Exercice 5: *Modification du symbole.*

```
plot(x,y,'r+')
plot(x,y,'ro')
plot(x,y,'r*')
plot(x,y,'r.')
plot(x,y,'rs')
plot(x,y,'rd')
plot(x,y,'r>')
plot(x,y,'r<')
```

RÉPONSE :

Exercice 6: *Modification de l'épaisseur du trait.*

```
plot(x,y,'-','LineWidth',5)
```

RÉPONSE :

Exercice 7: *Modification des axes.*

```
clf
x=-1:0.01:1;
y=x.^2;
plot(x,y)
axis([0 0.5 0 0.3])
```

RÉPONSE :

Exercice 8: *Ajout d'un titre, d'une légende, du nom des axes.*

```
clf
x=[0:0.05:1];
y=sin(2*pi*x);
z=cos(2*pi*x);
plot(x,y,':r',x,z,'+k')
title('Exemples de courbes')
xlabel('x'); ylabel('y')
legend('sin','cos')
```

RÉPONSE :

Exercice 9: *Modifications directement sur la figure.*

Faire la même chose directement sur la figure, on pourra aussi augmenter la largeur du trait ou jouer avec le zoom...

Exercice 10: *Utilisation de subplot.*

```
x=-1:0.01:1;
y=x.^2;
z=cos(x);
w=sin(x);
subplot(2,2,1)
plot(x,y)
subplot(2,2,2)
plot(x,z)
subplot(2,2,3)
plot(x,w)
subplot(2,2,4)
plot(x,w.*y)
```

RÉPONSE :

Exercice 11: *Utilisation de hold.*

```
clf;
x=-1:0.01:1;
y=x.^2;
z=cos(x);
plot(x,y)
grid on
hold on
plot(x,z,'--g')
hold off
```

RÉPONSE :

Exercice 12: *Représentation logarithmique.*

```
x=0:0.1:10;
y=exp(x);
loglog(x,y)
semilogx(x,y)
semilogy(x,y)
```

RÉPONSE :

Exercice 13: *Représentation polaire.*

```
theta=0:0.01:2*pi;
r=1+cos(theta);
polar(theta,r);
```

RÉPONSE :

Exercice 14: *Représentation 2D paramétrique.*

```
theta=0:0.01:2*pi;
x=cos(theta).*(1+cos(theta));
y=sin(theta).*(1+cos(theta));
plot(x,y)
axis equal
```

RÉPONSE :

Exercice 15: *Représentation 3D paramétrique.*

```
theta=0:0.01:20*pi;
x=cos(theta).*(1+cos(theta));
y=sin(theta).*(1+cos(theta));
z=theta;
plot3(x,y,z)
grid;
```

RÉPONSE :

Exercice 16: *Représentation statistique.*

```
y=rand(30,1);
hist(y)
y=rand(20,5);
bar3(y)
```

RÉPONSE :

Exercice 17: *Nuages de points 2D.*

```
x=rand(100,1);
y=rand(100,1);
scatter(x,y,100,round(10*y))
```

RÉPONSE :

Exercice 18: *Nuages de points 3D.*

```
figure(2)
theta=0:pi/50:20*pi;
x=cos(theta).*theta;
y=sin(theta).*theta;z=theta;
scatter3(x,y,z,20,round(z),'filled')
```

RÉPONSE :

Exercice 19: *Sauvegarder une figure dans un fichier.*

On peut utiliser la commande $saveas(number\_fig,'file.format')$:

```
saveas(2,'fig1.pdf')
saveas(2,'fig1.jpg')
saveas(2,'fig1.eps')
```

RÉPONSE :

Vérifier qu'on peut aussi sauvegarder la figure dans un fichier à partir du menu.

2 LES POLYNOMES

Exercice 20: *Définition d'un polynôme à partir de ses coefficients.*

Le polynôme $f(x) = 8x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ est représenté par :

```
f=[8 0 2 -3 4 -2]
```

RÉPONSE :

Exercice 21: *Définition d'un polynôme à partir de ses racines.*

```
p1=poly([1 -i i])
```

RÉPONSE :

Exercice 22: *Racines d'un polynôme.*

```
P=[2 1 4 5];
r=roots(P)
```

RÉPONSE :

Exercice 23: *Evaluation d'un polynôme en un point.*

```
P=[2 1 4 5];
polyval(P,1)
x1=[1:0.25:2];
y1=polyval(P,x1)
```

RÉPONSE :

Exercice 24: *Approximation polynomiale.*

```
x=[1:5];
y=[3.5 4 5 4 4];
a1=polyfit(x,y,4)
a2=polyfit(x,y,3)
a3=polyfit(x,y,5)
```

RÉPONSE :

Exercice 25: *Tracé d'un polynôme.*

```
x=[0:0.1:3];
y=-x.^2+0.2*rand(1,length(x));
p=polyfit(x,y,2)
plot(x,y,'o',x,polyval(p,x),'r')
```

RÉPONSE :

3 APPLICATIONS A L'ANALYSE NUMERIQUE

Exercice 26: *Interpolation de Lagrange*

Dans Matlab, tout polynôme de degré $n \geq 0$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ est représenté par un vecteur $p = [a_n, \ldots, a_2, a_1, a_0]$ contenant les $n+1$ coefficients de p. La commande `polyval(p,x)` permet d'évaluer n'importe quel polynôme `p` en un point `x` donné. La commande `polyfit(x,y,n)` calcule pour sa part les coefficients du polynôme de degré `n` interpolant les valeurs contenues dans le tableau `y` aux nœuds donnés dans le tableau `x`. La fonction `lagrange` suivante utilise cette dernière commande pour construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré `n` interpolant une fonction `f` définie avec une commande `inline`, en $n + 1$ nœuds équidistribués dans l'intervalle $[a, b]$

```
function p=lagrange(f,a,b,n)
  xp=linspace(a,b,n+1);
  p=polyfit(xp,feval(f,xp),n);
end
```

On considère la fonction $x \mapsto \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, 3\pi]$.

1. Utiliser la fonction `lagrange` pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n^{\sin}$ pour une distribution uniforme de points dans l'intervalle $[0, 3\pi]$, et pour $n \in [\![1, 5]\!]$. Comparer graphiquement les polynômes obtenus avec la fonction donnée en les traçant sur la même figure. Qu'observez-vous ?

RÉPONSE :

2. L'erreur d'interpolation $E_n(sin)$ est définie par

$$E_n(sin) = \max_{x\in[0,3\pi]} |\sin(x) - P_n^{\sin}(x)|.$$

Tracer sur un graphe quelques valeurs de $E_n(sin)$ en fonction de n et commenter le résultat.

RÉPONSE :

3. *Application au partage de clé secrète de Shamir.*

   Comment garder confidentiel un code secret pour qu'il ne tombe pas aux mains de l'ennemi ?

   (a) Le détuire répond à l'exigence de confidentialité mais aboutit à la perte du secret.

   (b) Le confier à un agent secret assure sa sauvegarde sauf si l'agent meure. De plus, l'exigence de confidentialité pourrait être mise à mal si l'agent est corrompu.

   (c) Découper ce secret en autant de secrets que d'agents (par exemple, 278956 peut être découpé en 6 chiffres pour 6 agents secrets numérotés : 2 pour l'agent $n^o\,1$, 7 pour l'agent $n^o\,2$, ...) répond à l'exigence de confidentialité puisqu'il faudrait que les 6 agents soient corrompus (le risque est faible). En revanche, le secret est perdu si l'un d'entre eux meure.

   (d) Le confier à n agents secrets de sorte que l'on puisse reconstituer le code avec m agents pris au hasard (où $m < n$). Ce choix répond à l'exigence de confidentialité puisqu'il est peu probable que m agents soient corrompus (si m est assez grand) et, en cas de décès de l'un d'entre eux, on peut encore reconstituer le code.

   Nous allons donc nous intéresser à cette dernière configuration à l'aide de l'interpolation polynomiale. Supposons que le code secret est S et considérons un polynôme de degré $m-1$

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = S + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}.$$

   Il suffit alors de confier une partie du secret à chacun des n agents, ce qui correspond à un couple de valeurs

   $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (x_i, p(x_i)).$$

   Ainsi, avec $m < n$ agents secrets, nous pouvons retrouver tous les coefficients $S, a_1, ..., a_{m-1}$ du polynôme grâce à l'interpolation de Lagrange.

   Application : pour $n = 10$ et $m = 6$, retrouver le code secret S à l'aide du partage de secret suivant

   $$(1, 278971), (2, 279190), (3, 280453), (4, 284848), (5, 296311), (6, 321226),$$

   $$(7, 369025), (8, 452788), (9, 589843), (10, 802366).$$

   Retrouver tous les coefficients du polynôme de 3 manières différentes. Attention : le secret est un entier !

   Tracer ce polynôme et interpréter graphiquement la valeur de S.

RÉPONSE :

Exercice 27: *Phénomène de Runge*

On considère, sur l'intervalle $[-5, 5]$, la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Utiliser la fonction `lagrange` pour construire le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n^f de degré n, avec $n = 2, 4, 8$ et 12, de f en des nœuds équirépartis sur $[-5, 5]$ et comparer graphiquement les polynômes obtenus avec la fonction donnée en les traçant sur la même figure. Qu'observe-t-on ?

RÉPONSE :

2. L'erreur d'interpolation $E_n(f)$ est définie par

$$E_n(f) = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - P_n^f(x)|$$

Tracer sur un graphe quelques valeurs $E_n(f)$ en fonction de n et commenter le résultat.

RÉPONSE :

Le phénomène que vous observez est appelé *phénomène de Runge.*

3. Interpoler une fonction en des nœuds équidistribués sur un intervalle $[a, b]$ n'est pas forcément le meilleur choix, comme le montre l'absence de convergence des interpolations de Lagrange constatée à la question précédente. Pour une interpolation de degré n, on peut montrer que l'erreur sera minimale si les nœuds d'interpolation $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont, à une transformation affine près, les racines du polynôme de Tchebychev $T_{n+1}(x)$, c'est-à-dire si

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\,\pi\right), \; k \in [\![0, n]\!]$$

   (a) Ecrire une fonction `lagrangeTcheb` sur le modèle de la fonction `lagrange` pour que l'interpolation se fasse aux points de Tchebychev définis ci-dessus.

   (b) Reprendre les questions 1 et 2 en utilisant la fonction `lagrangeTcheb`.

RÉPONSE :

Exercice 28: *Phénomène de Gibbs*

On rappelle qu'un signal S périodique de période 1 possède, sous de bonnes hypothèses, une décomposition en série de Fourier comme suit

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi nx}$$

où les coefficients c_n sont donnés par

$$c_n = \int_0^1 S(x)e^{-2i\pi nx}dx$$

On peut également l'écrire sous forme trigonométrique suivante

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)$$

où les coefficients a_n et b_n sont

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n},\ n \geq 0 \\ b_n = i(c_n + c_{-n}),\ n > 0 \end{cases}$$

I – On considère un signal créneau 1-périodique, défini sur $[0,1[$ comme suit

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1/2[\\ -1 & \text{si } x \in]1/2,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1/2 \end{cases}$$

On étudie le signal sur $[0,3]$ avec un échantillonnage sur $N = 3000$ points, c'est à dire que l'on va considérer les valeurs de S sur 3 périodes et en N points équidistants.

1. Définir un vecteur t contenant les valeurs de temps de l'échantillonnage.
2. Utiliser la fonction `square(w)`, où $w = 2\pi t$ pour définir le signal S. Tracer le signal pour vérifier que la fonction `square` a bien défini le signal voulu.

RÉPONSE :

II – On sait que le développement en série de Fourier trigonométrique d'un signal créneau de période 1 et d'amplitude 1 est le suivant

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n/2+1} \frac{4}{(2j+1)\pi} \sin(2\pi(2j+1)x),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} a_n = 0,\ n \geq 0, \\ b_n = \dfrac{4}{(2n-1)\pi},\ n > 0. \end{cases}$$

Une fonction permettant de calculer ce développement en série de Fourier jusqu'à l'ordre n est la suivante

```
function [Sn] = Fourier(t,n)
    Sn = zeros(size(t));
    for i=0:n/2+1
        Sn = Sn + 4/((2*i+1)*pi)*sin(2*pi*(2*i+1).*t);
    end
end
```

où `t` est le vecteur des points d'échantillonnage, et `n` le nombre de termes dans le développement en série de Fourier.

1. Représenter sur un même graphique le signal S et son développement en série de Fourier obtenu avec la fonction `Fourier` aux ordres $n = 2, 5, 20, 50, 100$ et 5000. Qu'observe-t-on ?

RÉPONSE :

Le phénomène que vous observez est appelé *phénomène de Gibbs*. Il résulte de la troncature brutale des hautes fréquences. Il apparaît autour des points de discontinuités et illustre le fait que la série de Fourier de la fonction f ne converge pas uniformément vers f.