**Polytech Lyon, département MAM** Année universitaire 2023-2024

Outils pour le calcul scientifique

---

**Travaux pratiques n° 2**

INITIATION À MATLAB

---

*Une note tenant compte du déroulement de votre TP (implication, autonomie, ...) pourra être attribuée dans le cadre du contrôle continu. Une absence injustifiée ou un oubli des vos identifiants donne lieu à la note 0.*

# 1 LES SCRIPTS ET LES FONCTIONS

**Exercice 1:** *Création et utilisation d'une fonction.*

Dans un fichier **nb_complex.m**, écrire la fonction suivante :

```
function [mod,arg,coj,re,im]=nb_complex(z)
mod=abs(z);
arg=angle(z);
coj=conj(z);
re=real(z);
im=imag(z);
```

**RÉPONSE :**

Tester cette fonction pour $z = 1 + \mathrm{i}$ dans l'espace de travail en tapant **nb_complex(1+i)**.
Essayer aussi **[mod,arg,coj,re,im]=nb_complex(1+i)** et comparer.
Attention, il faut être dans le même répertoire que celui de la fonction.

**Exercice 2:** *Création et utilisation d'un script.*

Dans un script nommé **script0.m**, écrire les instructions suivantes :

```
z=1+i
nb_complex(z)
[mod,arg,coj,re,im]=nb_complex(z)
z1=mod*exp(i*arg)
z-z1
```

**RÉPONSE :**

Tester ce script avec la flèche, puis avec F5, puis en tapant script0 dans l'espace de travail.
Attention, il faut être dans le même répertoire que celui du script.

## 2 LES BOUCLES

**Exercice 3:** *Boucle FOR.*

Dans un script nommé **script1.m**, écrire et tester les instructions suivantes :

```
x=1;
for k=1:4
    x=x*k
end
```

| **RÉPONSE :** |
|---|
| |

**Exercice 4:** *Boucle FOR.*

Dans un script nommé **script2.m**, écrire et tester les instructions suivantes :

```
v=[-1 3 0]
x=0;
for k=v
    x=x+k
end
```

| **RÉPONSE :** |
|---|
| |

**Exercice 5:** *Boucle WHILE.*

Dans un script nommé **script3.m**, écrire et tester les instructions suivantes :

```
x=1;
while x<14
    x=x+5
end
```

| **RÉPONSE :** |
|---|
| |

**Exercice 6:** *Boucles imbriquées.*

Dans un script nommé **script4.m**, écrire et tester les instructions suivantes :

```
x=0;
A=rand(3,3);
for i=1:3
    for j=1:3
        x=x+A(i,j)
    end
end
```

| **RÉPONSE :** |
|---|
| |

# 3 LES TESTS

**Exercice 7:** *Test IF.*

Dans un script nommé **script5.m**, écrire et tester les instructions suivantes :

```
x=16;
if x>0
    y=-x
end
```

**RÉPONSE :**

**Exercice 8:** *Test IF ELSE.*

Dans un script nommé **script6.m**, écrire et tester les instructions suivantes :

```
a=4;
b=3;
if a<b
    min=a
else
    min=b
end
```

**RÉPONSE :**

**Exercice 9:** *Test IF ELSEIF.*

Dans un script nommé **script7.m**, écrire et tester les instructions suivantes :

```
a=4;
b=4;
if a<b
    min=a
elseif a>b
    min=b
else
    disp('a et b sont égaux')
end
```

**RÉPONSE :**

**Exercice 10:** *Test CASE.*

Dans un script nommé **script8.m**, écrire et tester les instructions suivantes :

```
n=round(3*rand(1))
switch n
case 0
    fprintf('cas numéro 0')
case 1
    fprintf('cas numéro 1')
case {2,3}
    fprintf('cas numéro 2 ou 3')
otherwise
    fprintf('autre cas')
end
```

**RÉPONSE :**

## 4 EXERCICES D'APPLICATION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE

Considérons le vecteur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 11:** *Norme vectorielle 1.*

Ecrire une fonction **norme_1** calculant $\|u\|_1$ pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ à l'aide d'une boucle **for**, et tester cette fonction avec $v$.

**RÉPONSE :**

**Exercice 12:** *Norme vectorielle* 2.

Ecrire un script **norme_2.m** calculant $\|u\|_2$ pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ de quatre manières différentes :

1. en utilisant la fonction **sum**,
2. en utilisant le produit scalaire (2 méthodes),
3. en utilisant une boucle **for**,
4. en utilisant une boucle **while**.

Tester ce script avec $v$.

| **RÉPONSE :** |
|---|
| |

**Exercice 13:** *Norme vectorielle* $\infty$.

Ecrire une fonction **norme_inf** calculant $\|u\|_\infty$ pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ de deux manières différentes (et donc avec deux arguments de sortie) :

1. en utilisant la fonction **max**,
2. en utilisant une boucle et un test.

Tester cette fonction avec $v$.

| **RÉPONSE :** |
|---|
| |

**Exercice 14:** *Matrice des différences finies.*

Ecrire une fonction **DF** avec une seule ligne d'instructions, renvoyant la matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du laplacien discret obtenue par différences finies en 1D en fonction de $n$.

**RÉPONSE :**

Tester cette fonction pour $n = 4$ ; on appellera $M$ la matrice obtenue.

**Exercice 15:** *Normes matricielles.*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle la définition des normes matricielles vues en cours :

1. $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)}$,
2. $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,
3. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$,
4. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Calculer $\|M\|_F$, $\|M\|_1$, $\|M\|_2$ et $\|M\|_\infty$ avec une seule ligne d'instructions.

**RÉPONSE :**

**Exercice 16:** *$cond_2(A)$ pour une matrice symétrique.*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, on rappelle la définition du conditionnement associé à la norme 2 :

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max\limits_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|}{\min\limits_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|}.$$

Ecrire une fonction **cond2_sym** calculant $\mathrm{cond}_2(A)$ avec une seule ligne d'instructions.
Calculer $\mathrm{cond}_2(M)$ pour tester cette fonction.

| **RÉPONSE :** |
|---|
| |

**Exercice 17:** *Problème mal conditionné.*

Soient la matrice $A$ et le vecteur $b$ définis par :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathrm{cond}_2(A)$ et $det(A)$.

   | **RÉPONSE :** |
   |---|
   | |

2. Résoudre les systèmes $Ax = b$, $Ay = b + \delta b$ (avec $y = x + \delta x$) et $(A + \Delta A)z = b$ (avec $z = x + \Delta x$) à partir de la matrice $A + \Delta A$ et du vecteur $b + \delta b$ définis par :

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.81 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b + \delta b = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}.$$

**RÉPONSE :**

3. Calculer $\dfrac{\|b+\delta b\|_2}{\|b\|_2}$, $\dfrac{\|x+\delta x\|_2}{\|x\|_2}$ et $\dfrac{\|x+\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$.
   Conclure.

**RÉPONSE :**

4. On rappelle que :
$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \;\leq\; \mathrm{cond}_2(A)\,\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}\,.$$
   et
$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x+\Delta x\|_2} \;\leq\; \mathrm{cond}_2(A)\,\frac{\|\!|\Delta A|\!\|_2}{\|\!|A|\!\|_2}\,.$$
   Donner une minoration de $\mathrm{cond}_2(A)$ pour les deux systèmes perturbés. Conclure.

**RÉPONSE :**

**Exercice 18:** *Décomposition LU*

1. Ecrire une fonction **factorisation_LU** qui permet d'obtenir la factorisation $LU$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par la méthode de Crout rappelée ci-dessous :

   `Initialisation: L=0 et U=0`
   `pour j=1,n faire`

   $$u_{1j} = a_{1j} \qquad (1)$$

   `fin de pour`

   $$l_{11} = 1 \qquad (2)$$

   `pour j=2,n faire`

   $$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}} \qquad (3)$$

   `fin de pour`
   `pour i=2,n-1 faire`
   `pour j=i,n faire`

   $$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj} \qquad (4)$$

   `fin de pour`

   $$l_{ii} = 1 \qquad (5)$$

   `pour j=i+1,n faire`

   $$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left( a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}\, u_{ki} \right) \qquad (6)$$

   `fin de pour`
   `fin de pour`

   $$u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}\, u_{kn} \qquad (7)$$

   $$l_{nn} = 1 \qquad (8)$$

2. Tester cette fonction avec la matrice $A$ de l'exercice 17.

**RÉPONSE :**

**Exercice 19:** *Décomposition de Cholesky*

1. Ecrire une fonction **fact_cholesky** qui permet d'obtenir la factorisation $BB^T$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive par identification :

```
Initialisation: B=0
```

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad (1)$$

```
pour j=2,n faire
```

$$b_{j1} = \frac{a_{j1}}{b_{11}} \qquad (2)$$

```
fin de pour
pour i=2,n-1 faire
```

$$b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2} \qquad (3)$$

```
        pour j=i+1,n faire
```

$$b_{ji} = \frac{1}{b_{ii}} \left( a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} b_{jk} \right) \qquad (4)$$

```
        fin de pour
fin de pour
```

$$b_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} b_{nk}^2} \qquad (5)$$

2. Tester cette fonction avec la matrice $A$ de l'exercice 17.

**RÉPONSE :**