Polytech Lyon, département MAM Année universitaire 2023-2024

Simulation aléatoire

Travaux pratiques n° 2

INITIATION À R

Une note tenant compte du déroulement de votre TP (implication, autonomie, ...) pourra être attribuée dans le cadre du contrôle continu. Une absence injustifiée ou un oubli de vos identifiants donne lieu à la note 0.

Le but de ce TP est de se familiariser avec les graphes, fonctions et structures de contrôle dans `R`.

Exercice 1: Divisons la fenêtre de l'écran en deux fenêtres lignes.

- Représentons, dans la première fenêtre, le graphe de la densité d'une v.a.r. $X \sim \mathcal{B}(50, 0.08)$ en prenant `ylim = c(0, 0.25)`.
- Représentons dans la deuxième fenêtre, au-dessous de la première, le graphe de la densité d'une v.a.r. $Y \sim \mathcal{P}(4)$ pour $x \in \{0, ..., 50\}$ avec la même option `ylim = c(0, 0.25)`.

Cet exercice illustre le fait que lorsque $n \geq 31$ et $np \leq 10$, on peut approcher la loi binomiale $B(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

```
par(mfrow = c(2,1))
plot(0:50, dbinom(0:50, 50, 0.08), type = "h", xlab = "x", ylab = "P(X = x)",
ylim=c(0, 0.25), main = "Densité associée à la loi B(50, 0.08)")
plot(0:50, dpois(0:50, 4), type = "h", xlab = "x", ylab = "P(X = x)",
ylim = c(0, 0.25), main = "Densité associée à la loi P(4)")
par(mfrow = c(1,1))
```

Exercice 2: Représentons le graphe de la densité d'une var $X \sim \mathcal{B}(50, 0.4)$, puis ajoutons par-dessus ce graphe celui de la densité d'une var $Y \sim \mathcal{N}(20, 12)$.

Cet exercice illustre le fait que, lorsque $n \geq 31$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p)))$.

```
plot(0:50, dbinom(0:50, 50, 0.4), type = "h", col="green", xlab = "x", ylab = "",
main = "Densités associées aux lois B(50,0.4) et N(20,12)")
curve(dnorm(x, 20, sqrt(12)), 0, 50, col = "red", ylab = "", add = TRUE)
```

Exercice 3: *Le chevalier de Méré*

Est-il avantageux, lorsqu'on joue au dé, de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 fois le dé ?
Est-il avantageux de parier sur l'apparition d'un double-six, quand on lance 24 fois deux dés ?

```
# Fonction auxiliaire
quatrejets = function(){
unsixouplus <- 0
jeu <- sample(1:6,4,replace=T)
nbsix = sum(jeu == 6)
if(nbsix >= 1) unsixouplus <- 1
return(unsixouplus)
}
# Fonction auxiliaire
vingtquatrejets = function(){
undoublesixouplus <- 0
de1 <- sample(1:6,24,replace=T)
de2 <- sample(1:6,24,replace=T)
nbdoublesix <- sum(de1[which(de1 == de2)] == 6)
if(nbdoublesix >= 1) undoublesixouplus <- 1
return(undoublesixouplus)
}
# Estimation de la probabilité d'un événement
meresix = function(nsim = 2000){
aumoinsunsix <- 0
aumoinsundoublesix <- 0
for(j in 1:nsim){
aumoinsunsix <- aumoinsunsix + quatrejets()
aumoinsundoublesix <- aumoinsundoublesix + vingtquatrejets()
}
#************* Affichage des résultats ******************
cat("Fréquence des six =",aumoinsunsix/nsim,"\n")
cat("Fréquence des doubles six =",aumoinsundoublesix/nsim,"\n")
}

meresix()
```

Exercice 4: Représenter le graphe de la densité d'une var $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ pour $x \in \{0,...,10\}$ avec $n = 100$ et $p = 0.01$, puis ajouter dans la même fenêtre le graphe en bleu de la densité d'une v.a.r. $Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$. Que constatez-vous ?

Exercice 5: Construire un vecteur `simu` composé de 1000 éléments dont les valeurs sont des réalisations d'une var $X \sim N(15,3)$. Faire l'histogramme des fréquences de `simu` (on utilisera l'argument `prob = TRUE`) et superposer la densité de X.

Exercice 6: On s'intéresse à la durée de vie d'un certain type de voiture. Soit X la v.a.r. égale à la durée de vie en années d'une de ces voitures. On suppose que $X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{10}\right)$.

1. Écrire une nouvelle fonction `R` équivalente à `dexp` (on pourra utiliser la structure de contrôle `ifelse` pour que celle-ci valle 0 quand $x < 0$).
2. Vérifier numériquement que $\int_0^{100} f(x)dx \simeq 1$ avec la commande `integrate`.
3. Séparer l'écran graphique en 2 : dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la densité f et, dans la fenêtre 2, celui de la fonction de répartition de X.
4. Calculer la probabilité que la durée de vie d'une voiture dépasse 10.2 ans.

Exercice 7: Soit $X \sim \Gamma(5,1)$.

1. Écrire une nouvelle fonction `R` équivalente à dgamma.
2. Vérifier numériquement que $\int_0^{100} f(x)dx \simeq 1$.
3. Évaluer la fonction de répartition de X pour $x \in \{2,...,10\}$.
4. Déterminer le réel x vérifiant $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.92$.

Exercice 8: Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. Écrire une nouvelle fonction `R` équivalente à la fonction `dnorm`.
2. Vérifier numériquement que $\int_{-100}^{100} f(x)dx \simeq 1$.
3. Séparer l'écran graphique en 2 : dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la densité f et, dans la fenêtre 2, celui de la fonction de répartition de X.
4. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 2.2)$, $\mathbb{P}(X \geq 1.7)$, $\mathbb{P}(0.2 \leq X < 1.4)$ et $\mathbb{P}(|X| \leq 1.96)$.
5. Déterminer le réel x vérifiant $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.98$.

Exercice 9: Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. La fonction de répartition de X pour $x \geq 0$ peut s'écrire comme

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{\prod_{m=0}^{n}(2m+1)}.$$

Utiliser cette expression pour écrire une nouvelle fonction `R` équivalente à la fonction `pnorm` (on tronquera la somme infinie à la valeur 50). Tester et valider cette fonction en $x = 1.2$.

Exercice 10: Lorsqu'on effectue n tirages indépendants d'une même expérience aléatoire, on appelle fréquence du résultat k le rapport entre le nombre de fois où k est tiré, et n. Construire dans `R` une fonction `Freq` qui a pour argument n. L'enjeu de celle-ci est de renvoyer la fréquence de 5 lors de n tirages indépendants d'un dé cubique équilibré. Comparer les fréquences pour $n \in \{10, 100, 1000\}$, avec la probabilité (théorique) d'obtenir un 5 lorsqu'on lance un dé.

Exercice 11: On considère la marche aléatoire suivante : un mobile est positionné à l'origine d'un axe. A chaque étape, il se déplace d'une distance de longueur 1 vers la droite ou la gauche avec la probabilité 0.5 pour chaque direction. Il effectue n étapes au total. Soit X_i la position du mobile à l'étape i (on pose $X_0 = 0$). Simuler une réalisation du vecteur de v.a.r. $(X_0, X_1, ..., X_n)$ (on pourra utiliser la fonction `cumsum` qui donne la somme cumulée d'un vecteur. Par exemple, la commande `cumsum(c(2, 2, 2, 3))` renvoie `[1] 2 4 6 9`).

Exercice 12: On lance 5 dés cubiques équilibrés, puis on relance ceux qui n'ont pas fait 6, et ainsi de suite jusqu'à ce que les 5 dés affichent 6. Simuler une réalisation de cette expérience aléatoire en affichant les chiffres obtenus après chaque lancers et le nombre de lancers total (on pourra utiliser une boucle `while` et la commande `sum(x != 6)` qui calcule le nombre de composantes d'un vecteur x différentes de 6).