TD M4202C

Déterminants et systèmes d'équations linéaires

Formules de Cramer

On s'intéresse ici à la résolution d'un système linéaire à n inconnues dans $\mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (1 \leq i \leq n)$$

qui peut s'écrire matriciellement sous la forme $AX = b$ où $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{R}$ inversible de vecteurs colonnes A_i, où $b = (b_i)$ est un vecteur colonne à n lignes et où $X = (x_i)$ est aussi un vecteur colonne à n lignes.

$AX = b$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i A_i = b$. On en déduit que pour tout i, $1 \leq i \leq n$,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

où $\Delta = det\, A$ et $\Delta_i = det\,(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n)$.

Application

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Matrice et déterminants extraits

Soit A une matrice de type (m, n) et soit $I = \{i_1, i_2, ..., i_p\} \subset [\![1, m]\!]$ et $J = \{j_1, j_2, ..., j_q\} \subset [\![1, n]\!]$.
On appelle *matrice extraite* de la matrice A relative à I et J la matrice $A_{IJ} = \left(a_{i_\lambda j_\mu}\right)$ de type (p, q) avec $\lambda \in [\![1, p]\!]$ et $\mu \in [\![1, q]\!]$.
Déterminant extrait
Un *déterminant extrait* d'ordre ω est le déterminant d'une matrice carrée d'ordre ω extraite de A.
Lien avec le rang d'une matrice
Rappel : le *rang* d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les n vecteurs colonnes ou les m vecteurs lignes.
Le rang r d'une matrice de type (m, n) vérifie $r \leq \min(m, n)$.
Propriété : Le rang d'une matrice est l'ordre maximum d'un déterminant extrait non nul de la matrice.
Soit Δ un déterminant d'ordre ω extrait d'une matrice A. Un *bordant* de Δ est un déterminant extrait d'ordre $\omega + 1$ et dont Δ est un déterminant extrait de A.
En pratique, on peut utiliser le résultat suivant pour éviter de calculer les $\begin{pmatrix} m \\ r+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ r+1 \end{pmatrix}$ déterminants extraits d'ordre $r + 1$:
Pour qu'une matrice A soit de rang r, il faut et il suffit

1. qu'il existe un déterminant Δ_r extrait de A d'ordre r tel que $\Delta_r \neq 0$
2. que tous les bordants de Δ_r soient nuls. Il y en a $(p-r)(n-r)$.

Exemples

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A_1| = 2 \neq 0$: le rang de A_1 est 3.

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A_2| = 0$: le rang de A_2 est inférieur ou égal à 3.

Or le déterminant de la matrice extraite $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est égal à 1.

On en déduit que le rang de A_2 est 3.

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 18 & 32 \\ 1 & 1 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

En notant $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, les 2×2 bordants sont $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 18 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 32 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 13 \end{vmatrix}$.

Ils sont nuls. On en déduit que le rang de A_3 est 2.

Remarque : il y a $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 16$ déterminants extraits d'ordre 3.

Application

Préciser le rang des matrices suivantes.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$
2. a est un paramètre réel. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Indication :

   (a) Préciser la valeur de $|A_3|$ après avoir constaté deux lignes identiques.

   (b) Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, puis les bordants.

   (c) Conclure.

Système d'équations linéaires

On note $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(1 \leq i \leq m)$ un système de m équations linéaires à n inconnues qui peut s'écrire matriciellement sous la forme $AX = b$ où A est une matrice de type (m, n) sur $\mathbb{R}$.
Le *rang du système* est le rang r de la matrice A.
Si $b = 0$ le système est dit *homogène*.
Un système est dit *compatible* s'il admet au moins une solution, *incompatible* sinon.
Un système est dit de *Cramer* si sa matrice est carrée et inversible.

1. **Système homogène**
   L'ensemble des solutions du système homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$ où r est le rang du système.
   Un déterminant Δ_r extrait de A d'ordre r et non nul est appelé un *déterminant principal* du système.
   Les équations dont les indices sont ceux des lignes de Δ_r sont appelées les *équations principales*.
   Les inconnues dont les indices sont ceux des colonnes de Δ_r sont les inconnues principales.

   Moyennant une modification de l'ordre des équations ou des inconnues par une nouvelle numérotation, on peut supposer $\Delta_r = (a_{ij})_{1\leq i\leq r,\, 1\leq j\leq r}$ non nul.
   Les solutions de $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ $(1 \leq i \leq m)$ sont les solutions de $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ $(1 \leq i \leq r)$.
   La résolution d'un système homogène équivaut à celle d'un sous-système quelconque d'équations principales.
   Un tel système se résout en donnant des valeurs arbitraires aux inconnues non principales, en passant les inconnues non principales dans le second membre et en résolvant le système de Cramer obtenu.
   Exemple :
   $$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x + 8y - z = 0 \end{cases}$$
   On peut écrire $AX = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 5 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0$: le rang r du système vérifie $r \leq 2$.
   $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ est un déterminant principal du système : $r = 2$.
   $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$ est un système d'équations principales et les inconnues x et y sont les inconnues principales associées.
   Le système est équivalent à $\begin{cases} x + 3y = -2z \\ 3x + 2y = 5z \end{cases} \quad (z \in \mathbb{R})$

On peut utiliser les formules de Cramer : $\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{\begin{vmatrix} -2z & 3 \\ 5z & 2 \end{vmatrix}}{-7} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2z \\ 3 & 5z \end{vmatrix}}{-7} \end{array}\right. \quad (z \in \mathbb{R})$

Et on obtient $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{19z}{7} \\ y = -\frac{11z}{7} \end{array}\right. \quad (z \in \mathbb{R})$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1 (droite vectorielle) : $\mathcal{S} = Vect\,(V)$ avec $V = \begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{11}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Application}}$

Résoudre les systèmes suivants et interpréter (nature de l'ensemble des solutions).

(a) $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \end{array}\right.$

a est un paramètre réel.

(c) $\left\{\begin{array}{l} ax + y + z + t = 0 \\ x + ay + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{array}\right.$

a est un paramètre réel.

Indication : $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a^2 + 4a - 2 = -2(a-1)^2.$

2. **Système quelconque**

Soit $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (1 \leq i \leq m)$ un système de rang r et soit $\Delta_r = (a_{ij})_{1 \leq i \leq r,\, 1 \leq j \leq r}$ un déterminant principal :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Le système est compatible si et seulement si le vecteur second membre b est une combinaison linéaire des vecteurs colonnes A_1, A_2,...,A_n. Les coefficients d'une telle combinaison fournit une solution du système.

Cela signifie :

(a) La matrice étendue $\left(A \vdots b\right)$ a le même rang que A.

(b) Le vecteur b est une combinaison linéaire des vecteurs A_1, A_2,..., A_r.

(c) Pour que le système soit compatible il faut et il suffit que les $m-r$ déterminants suivants appelés *déterminants caractéristiques* soient nuls $(r + 1 \leq k \leq m)$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \ldots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix}$$

Théorème de Rouché-Fontené
Si un système linéaire est compatible, sa résolution équivaut à celle d'un système quelconque d'équations principales.
Un tel système se résout en donnant des valeurs arbitraires aux inconnues non principales, en passant les inconnues non principales dans le second membre et en résolvant le système de Cramer obtenu.

Exemple :
$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x-y-2z=2 \\ x-3y-z=1 \end{cases}$$

On peut écrire $AX=b$ avec $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0$: le rang r du système vérifie $r\leq 2$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0$ est un déterminant principal du système : $r=2$.

$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x-y-2z=2 \end{cases}$ est un système d'équations principales et les inconnues x et y sont les inconnues principales associées.

Il y a un unique déterminant caractéristique à calculer : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-20\neq 0$.

Le système n'a donc pas de solution.

Si on prend le système $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y-2z=2 \\ x-3y-z=1 \end{cases}$ on obtient le déterminant caractéristique

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$ et le système est équivalent à $\begin{cases} x+2y=1+z \\ 2x-y=2+2z \end{cases}$ $(z\in\mathbb{R})$

On peut utiliser les formules de Cramer : $\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1+z & 2 \\ 2+2z & -1 \end{vmatrix}}{-5} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 2 & 2+2z \end{vmatrix}}{-5} \end{cases}$ $(z\in\mathbb{R})$

Et on obtient $\begin{cases} x=1+z \\ y=0 \end{cases}$ $(z\in\mathbb{R})$

L'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension 1 (droite affine) : $\mathcal{S}=\mathcal{D}\left(A,D\right)$ avec $D=Vect\left(V\right)$, $V=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(1,0,0)$.

Insersection de variétés affines dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

1. Insersection de deux droites affines dans $\mathbb{R}^2$
   On pose $(a,b) \neq (0,0)$ et $(a',b') \neq (0,0)$.
   $\begin{cases} (\mathcal{D}) & ax+by=c \\ (\mathcal{D}') & a'x+b'y=c' \end{cases}$
   (a) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ alors le rang $r=2$.
   Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un unique point d'intersection.
   (b) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ alors $r=1$.
   Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont la même direction $D=D'$: $\mathcal{D}//\mathcal{D}'$.
   Supposons $a \neq 0$.
      i. Si $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont aucun point en commun. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles.
      ii. Si $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ alors $\mathcal{D}=\mathcal{D}'$.
2. Insersection de trois plans affines dans $\mathbb{R}^3$
   On pose $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $(a',b',c') \neq (0,0,0)$ et $(a'',b'',c'') \neq (0,0,0)$.

   $\begin{cases} (\mathcal{P}) & ax+by+cz=d \\ (\mathcal{P}') & a'x+b'y+c'z=d' \\ (\mathcal{P}'') & a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$

   (a) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$ alors le rang $r=3$.
   Les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ ont un unique point d'intersection.
   (b) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$ et au moins un déterminant extrait d'ordre 2 est non nul alors $r=2$.
   Supposons $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.
   L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est alors une droite $\mathcal{D}$.
      i. Si $\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} = 0$ alors le système est compatible et l'intersection des trois plans est la droite $\mathcal{D}$ définie par $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$
      ii. Si $\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} \neq 0$ alors le système n'est pas compatible et l'intersection des trois plans est vide ($\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}''$ sont strictement parallèles).
   (c) Si tous les déterminants extraits d'ordre 2 sont nuls alors $r=1$.
   Les trois plans ont la même direction P : ils sont parallèles.
   Supposons $a \neq 0$.

i. Si $\begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & d \\ a'' & d'' \end{vmatrix} = 0$ alors le système est compatible, équivalent à l'équation $ax + by + cz = d$ et les trois plans sont confondus.

ii. Sinon les trois plans sont soit distincts deux à deux, soit deux plans exactement sont confondus.

Application

Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement.

1. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3 + 9y = 6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ -3x + y = 3 \\ x + 5y = -1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 5y + 2z = -4 \\ -3x - 3y + z = 7 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 2z = 2 \\ -3x - 3y + z = 1 \end{cases}$
8. $\begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ 6x - 3y + 9z = 3 \\ 4x - 2y + 6z = -2 \end{cases}$
9. $\begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ 6x - 3y + 9z = -3 \\ 4x - 2y + 6z = -2 \end{cases}$

Programmation linéaire : méthode du simplexe

Exercice 1

Maximiser $2x_1 + x_2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement.

Exercice 2

Maximiser $40x_1 + 60x_2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement.

Exercice 3

Maximiser $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 4x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1,\, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Maximiser $7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 7x_4$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 24 \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 5

Maximiser $3x_1 + 5x_2 + 8x_3$ sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ x_1 + 2x_2 \leq 150 \\ x_1,\, x_2,\, x_3\, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Méthode des deux phases

Exercice 6

Max $2x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} x_1 \leq 1\,000 \\ x_2 \leq 500 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 4\,200 \\ x_1 + x_2 \geq 1\,000 \\ x_1 + 2x_2 \geq 1\,200 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement.

Minimum

Exercice 7

Min $2x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} x_1 \leq 1\,000 \\ x_2 \leq 500 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 4\,200 \\ x_1 + x_2 \geq 1\,000 \\ x_1 + 2x_2 \geq 1\,200 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement.

Exercice 8

Min $3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement.

Exercice 9

Min $2x_1 + 10x_2 + 8x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 10

1. Max $2x_1 - x_2$, puis Min $2x_1 - x_2$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Interpréter graphiquement.
3. Reprendre les contraintes avec Max $2x_1 + x_2$, puis Min $2x_1 + x_2$.

Problème non borné

Exercice 11

Maximiser $2x_1 + x_2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement.

Solutions multiples

Exercice 12

1. Maximiser $6x_1 + 3x_2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Reprendre en faisant d'abord rentrer la variable x_2 dans la base.
3. Continuer en faisant rentrer e_3 dans la base. Expliquer.
4. Interpréter graphiquement.

Problème sans solution

Exercice 13

Minimiser $2x_1 - 3x_2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 - x_2 \geq 6 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement.

Dégénérescence

Exercice 14

Maximiser $2x_1 + x_2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement.

Exercice 15

Maximiser $x_1 + 3x_2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Tester les deux sorties possibles de variable.
2. Interpréter graphiquement.

Cyclage

Exercice 16

Maximiser $3/4x_1 - 20x_2 + 1/2x_3 - 6x_4$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 1/4x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ 1/2x_1 - 12x_2 - 1/2x_3 + 3x_4 \leq 0 \\ x_3 \leq 1 \\ x_1,\, x_2,\, x_3\, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Beale (1955)

Indications Maple

Dans Maple, on pourra utiliser :

1. restart :
   with(linalg) :
   A :=matrix(4,6,[[2,1,0,0,0,0], [1,-1,1,0,0,1], [1,0,0,1,0,2], [0,1,0,0,1,2]]) ;
   addrow(%,2,1,-2) :
   addrow(%,2,3,-1) :
   mulrow(%,2,1/1) ;
2. Á la fin pour vérifier : A1 :=submatrix(A,1..4,1..5) ;
   X :=matrix(5,1,[2,2,1,0,0]) ;
   evalm(A1&*X) ;