Taller métodos numéricos y ecuaciones diferenciales

Santiago Chaparro
Briam Agudelo

Octubre 2018

1 Primer punto

1.1 Problema:

Considere un cuerpo con temperatura interna T el cual se encuentra en un ambiente con temperatura constante T_e.
Suponga que su masa m concentrada en un solo punto.
Entonces la transferencia de calor entre el cuerpo y el entorno externo puede ser descrita con la ley de Stefan-Boltzmann.

1.2 Formalización:

Dicho lo anterior tenemos que la ley de Stefan-Boltzmann es la siguiente:

$$v(t) = e\gamma S(T^4 - T_e^2) \tag{1}$$

Al final reemplazando por los datos de entrada correspondientes(que se encuentran en el enunciado del problema), despejando $\frac{dT}{dt}$ en terminos de T(t) y t, tenemos los siguiente :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{5.6 \times 10^{-8}(0.5)(6)((T^4) - (200^4))}{100} \tag{2}$$

Ahora se pretenderá resolver la ecuación anterior, numéricamente y mediante el método de Euler, que recursivamente puede ser definida de la siguiente forma:

$$x_{i+1} = x_i + h \tag{3}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{4}$$

Donde h es el paso de x que determina el conjunto de parejas (x, y) que se obtendrá.

1.3 Entradas:

De esta forma se tienen las siguientes entradas para el método de Euler.
1. Expresión o función f, que representa la derivada de la función en términos de la misma función y si variable independiente, es decir, $f(T,t) = \frac{dT}{dt}$.
2. Número entero o decimal xi, que representa el valor de t inicial(en este caso).
3. Número entero o decimal xf, que representa el valor de t final.
4. Número entero o decimal h, que representa el paso de la variable independiente de función solución(t en nuestro caso), o también, junto con el xi(t inicial) y xf(t final) determinan la cantidad de iteraciones en el método o cantidad de parejas (x,y) o (t,T) resultantes.

1.4 Salidas:

1. Vector de números enteros o decimales x, que representan los $x_0, x_1, x_2, .., x_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método.
2. Vector de números enteros o decimales y, que representan los $y_0, y_1, y_2, .., y_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método y que corresponden posicionalmente a la relación funcional T(t), que en últimas representa puntos de la solución aproximada de la ecuación diferencial.

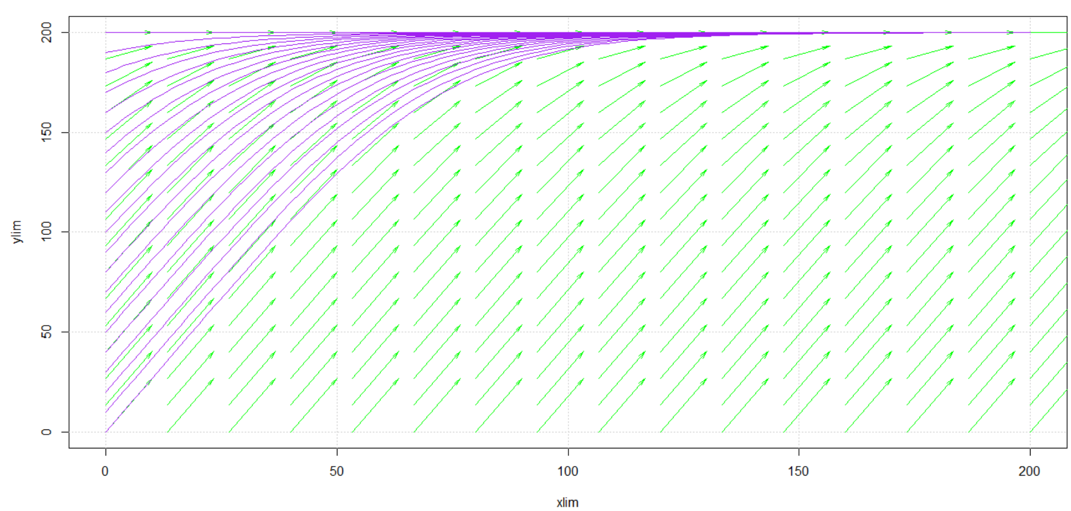

Figure 1: Gráfica de las 20 curvas que aproximan a la solución del problema.

2 Segundo punto

2.1 Problema:

Obtenga cinco puntos de la solución de la ecuación, utilizando el método de Taylor(los tres primeros términos) con $h = 0.1$.

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + x + y \tag{5}$$

2.2 Formalización:

Dicho lo anterior y al igual que en el punto anterior tenemos que encontrar un conjunto de parejas (x,y) que aproximan a la función solución de la ecuación diferencial, esto mediante el método de Taylor, de esta forma tenemos que:

$$y(x_{n+1}) = \frac{y(x_n)}{0!} + \frac{hy'(x_n)}{1!} + \frac{h^2y''(x_n)}{2!} \tag{6}$$

La cantidad de términos utilizados puede ser variable pero para nuestro caso dicha cantidad es tres(como se muestra en la ecuación anterior).

2.3 Entradas:

De esta forma se tienen las siguientes entradas para el método de Taylor.
1. Expresión o función f, que representa la derivada de la función en términos de la misma función y si variable independiente, es decir, $f(y, x) = \frac{dy}{dx}$.
2. Número entero o decimal xi, que representa el valor de x inicial(en este caso).
3. Número entero o decimal xf, que representa el valor de x final.
4. Número entero o decimal h, que representa el paso de la variable independiente de función solución(x en nuestro caso), junto con el xi y xf determinan la cantidad de iteraciones en el método o cantidad de parejas (x,y) resultantes.

2.4 Salidas:

1. Vector de números enteros o decimales x, que representan los $x_0, x_1, x_2, .., x_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método.
2. Vector de números enteros o decimales y, que representan los $y_0, y_1, y_2, .., y_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método y que corresponden posicionalmente a la relación funcional y(x), que en últimas representa puntos de la solución aproximada de la ecuación diferencial.

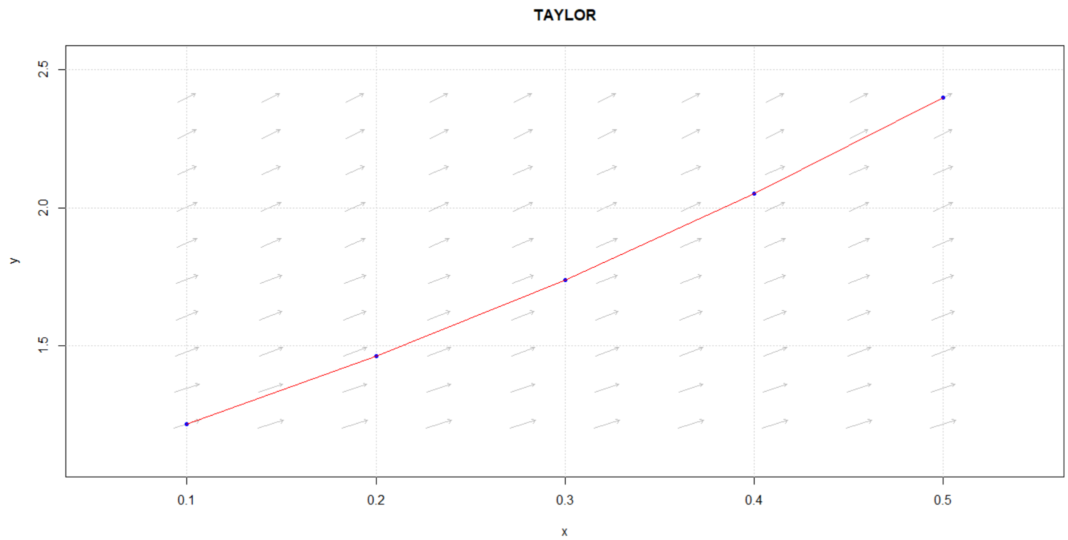

Figure 2: Gráfica de solución aproximada (con los 5 puntos solicitados).

3 Tercer punto

3.1 Problema:

Obtenga veinte puntos de la solución de la ecuación, utilizando el método de Euler(los tres primeros términos) con $h = 0.1$.

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + x + y \tag{7}$$

3.2 Formalización:

Se pretenderá resolver la ecuación anterior, numéricamente y mediante el método de Euler, que recursivamente puede ser definida de la siguiente forma:

$$x_{i+1} = x_i + h \tag{8}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{9}$$

Donde h es el paso de x que determina el conjunto de parejas (x, y) que se obtendrá.

3.3 Entradas:

De esta forma se tienen las siguientes entradas para el método de Euler.
1. Expresión o función f, que representa la derivada de la función en términos de la misma función y si variable independiente.

2. Número entero o decimal xi, que representa el valor de x inicial(en este caso).
3. Número entero o decimal xf, que representa el valor de x final.
4. Número entero o decimal h, que representa el paso de la variable independiente de función solución(x en nuestro caso), o también, junto con el xi y xf determinan la cantidad de iteraciones en el método o cantidad de parejas (x,y) resultantes.

3.4 Salidas:

1. Vector de números enteros o decimales x, que representan los $x_0, x_1, x_2, .., x_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método.
2. Vector de números enteros o decimales y, que representan los $y_0, y_1, y_2, .., y_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método y que corresponden posicionalmente a la relación funcional y(x), que en últimas representa puntos de la solución aproximada de la ecuación diferencial.

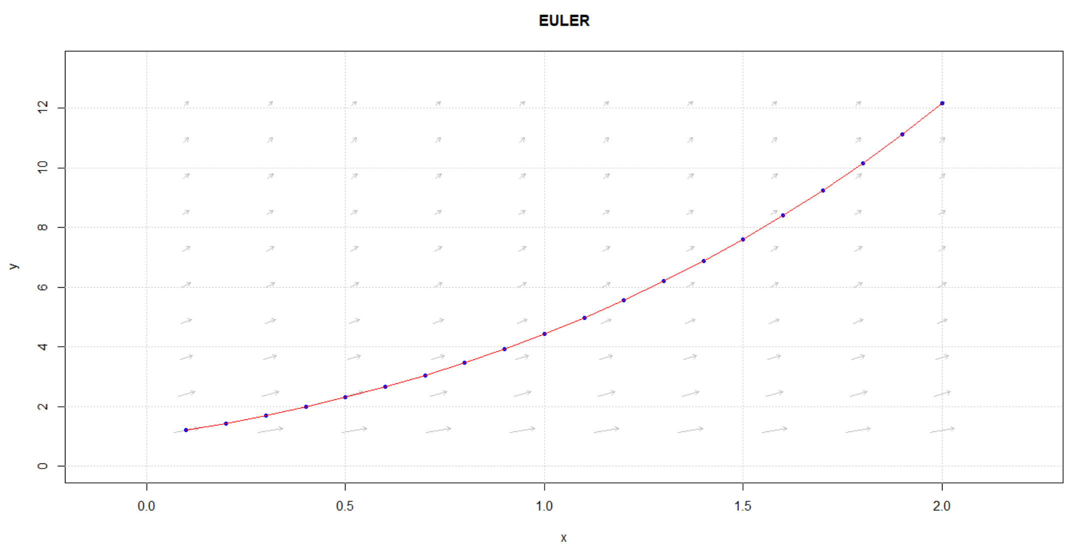

Figure 3: Gráfica de solución aproximada (con los 20 puntos solicitados).

4 Cuarto punto

4.1 Problema:

Implemente en R el siguiente algoritmo y aplíquelo para resolver la ecuación anterior.

4.2 Formalización:

Para este punto se pide implementar en R el siguiente pseudocódigo que corresponde al método de Runge Kutta de orden 2.

1) Defina f(x,y) y la condición incial (x_0, y_0)
2) Defina h y la cantidad de puntos a calcular m
3) Para i =1, 2, ..., m
4) $\quad K_1 = hf(x_i, y_i)$
5) $\quad K_2 = hf(x_i + h, y_i + K_1))$
6) $\quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$
7) $\quad x_{i+1} = x_i + h$
8) fin

Figure 4: Pseudocódigo del algoritmo a implementar

4.3 Entradas:

1. Expresión o función f, que representa la derivada de la función en términos de la misma función y su variable independiente.
2. Número entero o decimal xi, que representa el valor de x inicial(en este caso).
3. Número entero o decimal yi, que representa el valor de y inicial(en este caso).
4. Número entero o decimal h, que representa el paso de la variable independiente de función solución(x en nuestro caso). **5.** Número entero$n$, que representa la cantidad de iteraciones del método, al final determinan la cantidad de parejas (x,y) que aproximan a la función solución de la ecuación .

4.4 Salidas:

1. Vector de números enteros o decimales x, que representan los $x_0, x_1, x_2, .., x_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método.
2. Vector de números enteros o decimales y, que representan los $y_0, y_1, y_2, .., y_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método y que corresponden posicionalmente a la relación funcional y(x), que en últimas representa puntos de la solución aproximada de la ecuación diferencial.

5 Quinto punto

5.1 Problema:

Utilizar la siguiente variación en el método de Euler, para resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, la cual calcula el promedio de las pendientes en cada paso.

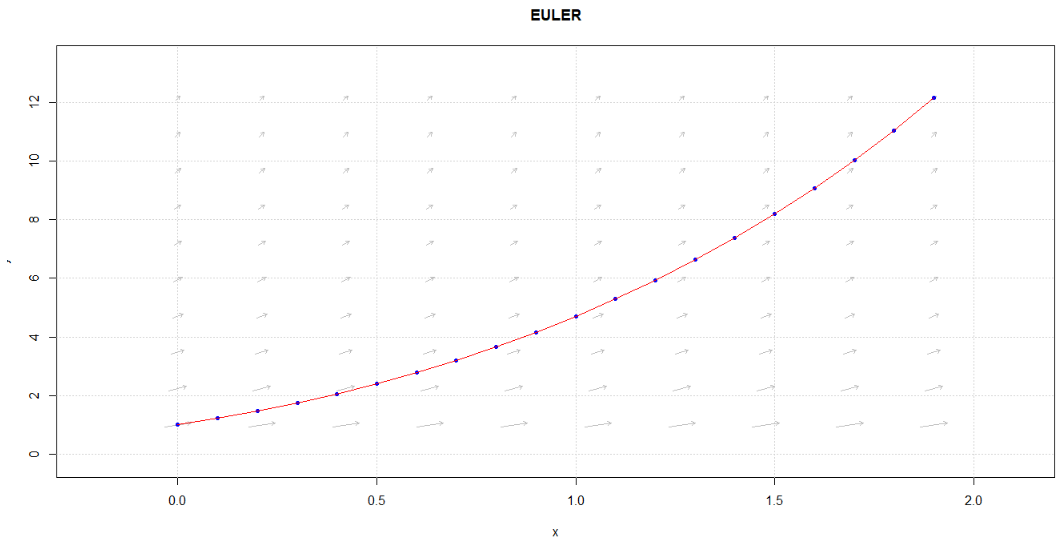

Figure 5: Gráfica de solución aproximada (con los 20 puntos solicitados).

Implemente un código en R, para este método y obtenga 10 puntos de la solución con h=0.1.
grafíquela y compárela con el método de Euler:

5.2 Formalización:

Dicho lo anterior tenemos que la ecuación del método iterativo es la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})) \tag{10}$$

5.3 Entradas:

1. Expresión o función f, que representa la derivada de la función en términos de la misma función y su variable independiente.
2. Número entero o decimal xi, que representa el valor de x inicial(en este caso).
3. Número entero o decimal yi, que representa el valor de y inicial(en este caso).
4. Número entero o decimal h, que representa el paso de la variable independiente de función solución(x en nuestro caso). **5.** Número entero$n$, que representa la cantidad de iteraciones del método, al final determinan la cantidad de parejas (x,y) que aproximan a la función solución de la ecuación planteada.

5.4 Salidas:

1. Vector de números enteros o decimales x, que representan los $x_0, x_1, x_2, .., x_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método.

2. Vector de números enteros o decimales y, que representan los $y_0, y_1, y_2, .., y_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método y que corresponden posicionalmente a la relación funcional y(x), que en últimas representa puntos de la solución aproximada de la ecuación diferencial.

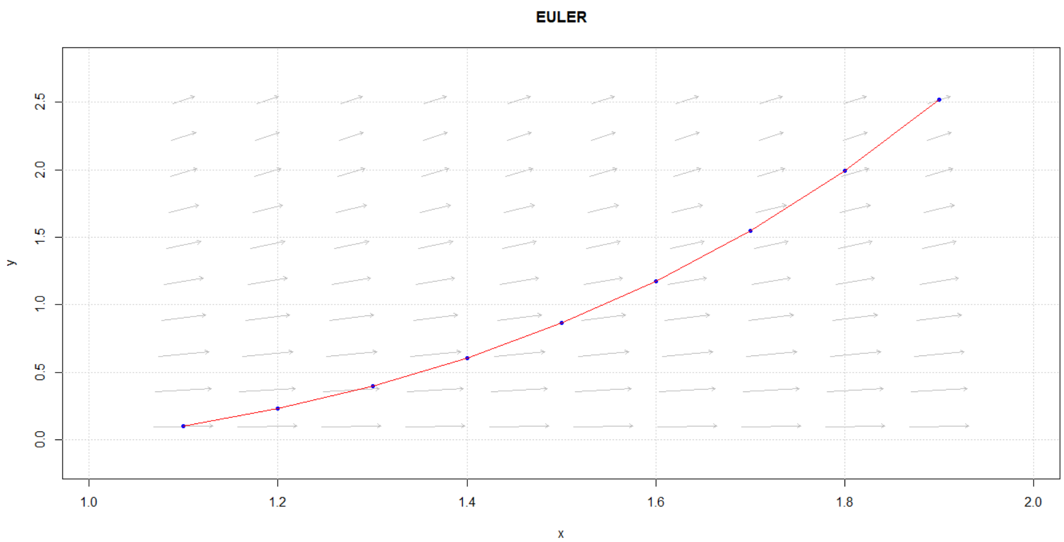

Figure 6: Gráfica de solución aproximada (con los 10 puntos solicitados) mediante el método de Euler.

6 Sexto punto

6.1 Problema:

Pruebe el siguiente código en R del método de Runge Kutta de tercer y cuarto orden y obtenga 10 puntos de la solución con h=0.1, grafíquela y compárela con el método de Euler:

6.2 Formalización:

El método de Runge Kutta de tercer orden se define como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{11}$$

Dónde $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1)$ y $k_3 = hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2)$.

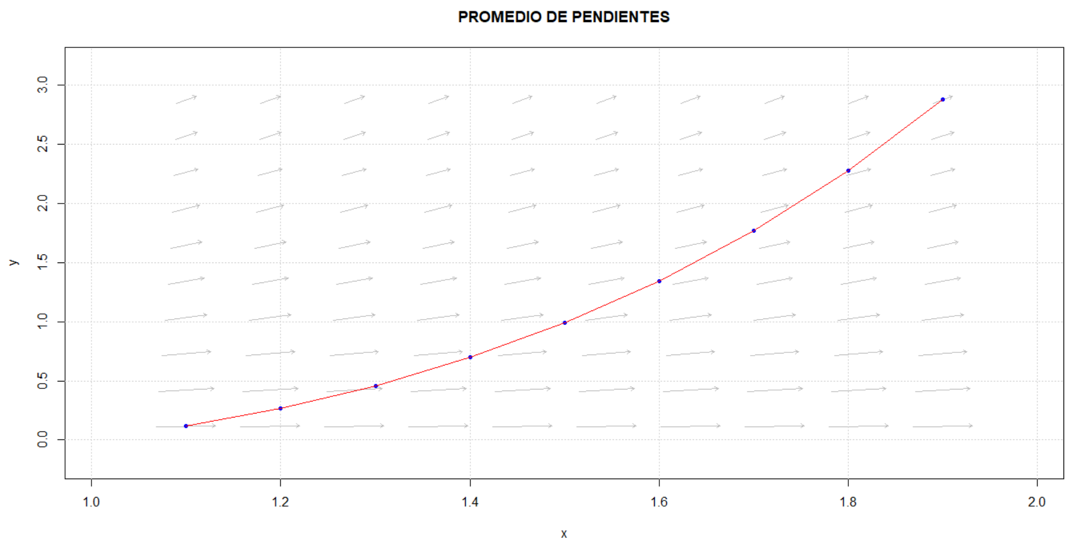

Figure 7: Gráfica de solución aproximada (con los 10 puntos solicitados) mediante promedio de pendientes.

Y el método de cuarto orden se representa de la siguiente forma.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{12}$$

Donde el término faltante $k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$

6.3 Entradas:

1. Expresión o función f, que representa la derivada de la función en términos de la misma función y su variable independiente.
2. Número entero o decimal xi, que representa el valor de x inicial(en este caso).
3. Número entero o decimal yi, que representa el valor de y inicial(en este caso).
4. Número entero o decimal h, que representa el paso de la variable independiente de función solución(x en nuestro caso). **5.** Número entero$n$, que representa la cantidad de iteraciones del método, al final determinan la cantidad de parejas (x,y) que aproximan a la función solución de la ecuación planteada.

6.4 Salidas:

1. Vector de números enteros o decimales x, que representan los $x_0, x_1, x_2, .., x_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método.
2. Vector de números enteros o decimales y, que representan los $y_0, y_1, y_2, .., y_n$ valores obtenidos en las n iteraciones del método y que corresponden posi-

cionalmente a la relación funcional y(x), que en últimas representa puntos de la solución aproximada de la ecuación diferencial.

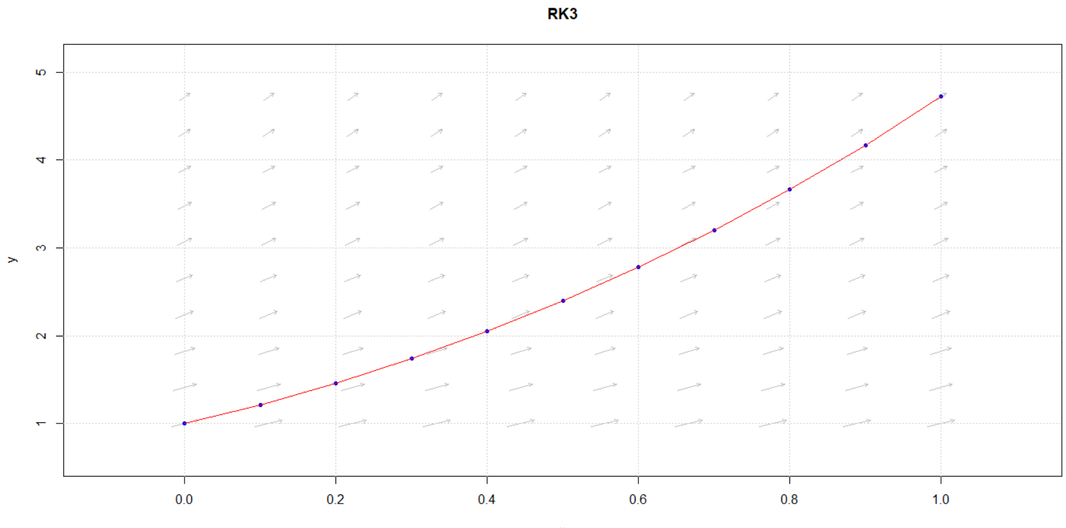

Figure 8: Gráfica de solución aproximada mediante el método de Runge Kutta de tercer orden.

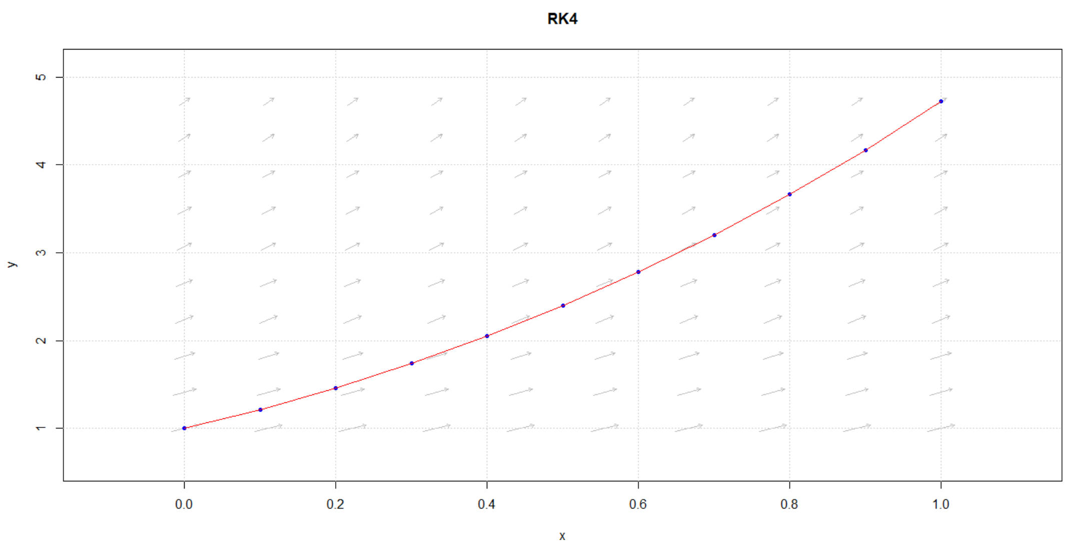

Figure 9: Gráfica de solución aproximada mediante el método de Runge Kutta de cuarto orden.