LINMA1170 rapport Devoir 1

Dallemagne Brieuc - NOMA 77122100

23/02/2024

1 Questions théoriques

1.1 Question 1

Démonstration : Soit $X \in R^{n\times p}$ on dévellope $J(X) = \|AX - B\|_F^2$: $J(X) = \|AX - B\|_F^2 = \text{tr}((AX - B)^T(AX - B)) = \text{tr}(X^TA^TAX - X^TA^TB - B^TAX^T + B^TB) = \text{tr}(X^TA^TAX - 2X^TA^TB + B^TB)$.(par dévellopement de la norme de Frobénius) En dérivant $J(X)$ par rapport à X, nous obtenons

$$\nabla J(X) = 2A^TAX - 2A^TB.$$

Donc X est solution du problème des moindres carrés si et seulement si $\nabla J(X) = 0$, le seul moyen d'y parvenir étant que $A^TAX = A^TB$. CQFD

On montre ensuite que ce système admet toujours au moins une solution et qu'elle est unique si $\text{rang}(A) = n$.

Soit X une solution du problème des moindres carrés. On a alors $A^TAX = A^TB$. Si $\text{rang}(A) = n$, alors A est de rang maximal, donc A est de plein rang, ce qui implique qu'elle est inversible et qui nous donne donc $X = (A^TA)^{-1}A^TB$. A et B étant des matrice à valeurs fixées, X sera unique

1.2 Question 2

Démonstration : Nous avons $A^TAX = A^TB$. par la décomposition QR $A = QR$, où Q est une matrice orthogonale et R est une matrice triangulaire supérieure. Nous pouvons donc simplifier A^TA : $A^TA = R^TQ^TQR = R^TR$. car $Q^TQ = 1$ (propriété d'une matrice orthogonale) ce qui nous donne que $A^TAX = A^TB$ deviens $R^TRX = R^TQ^TB$ que on peut encore simplifier en $RX = Q^TB$. Nous arrivons alors un système triangulaire supérieur à résoudre, ce qui est un système facilement résolvable

1.3 Question 3

Démonstration : Nous avons m points du plan, que nous souhaitons approximer par une courbe paramétrée définie par des B-splines d'ordre 3. L'objectif est de trouver les points de contrôle et les paramètres qui minimisent l'erreur quadratique entre la courbe B-spline et les points donnés.

Générons les points t_i donnant m valeurs uniformément répartie en 0 et 1 . Ensuite définnissons n points de contrôle P_j^* et leurs paramètres T_j selon la méthode proposée dans le document.

grâces à ces points T_j nous pouvons trouver nos fonctions B-splines $B_i(t)$ de degré $p = 3$ que nous allons pacer dans une matrice A. Ce qui nous permet d'avoir un système de type $AX = B$ (ou A est la matrice de Bspline et B les points à approximer). Nous n'avons plus qu'a appliquer l'algorithme de Least square en passant par la décomposition QR (voir Question 2) pour trouver le X qui minimisera l'erreur quadratique entres nos points et les Bsplines

2 Évaluation de la complexité temporelle

Pour la fonction QR j'ai appliqué l'algorithme de Gram-Schmist ce qui m'as donné une complexité de $O(n^2 \cdot m)$ (voir figure 1,2,3), cette conclusion est basé sur la comparaison de mes résultats par rapport à des fonctions de références qui sont respectivement $m/10^6$,$n^2/10^4$ et $m.n^2/3.10^6$ et sur l'analyse du code de la fonction qui est composé de 3 boucles for imbriquées (2 allant jusque N et une allant jusque M)

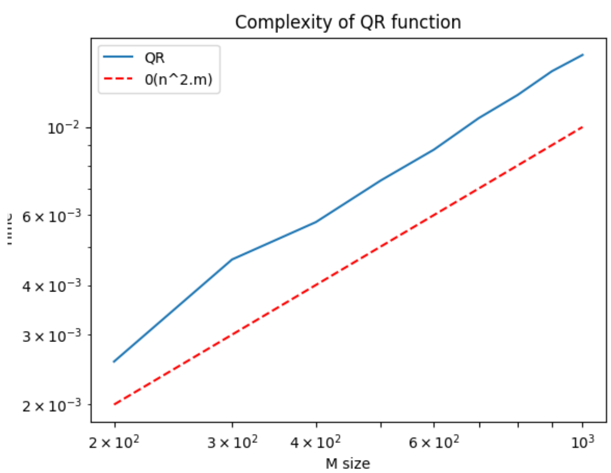

Figure 1: N fixé à 100 et M varie

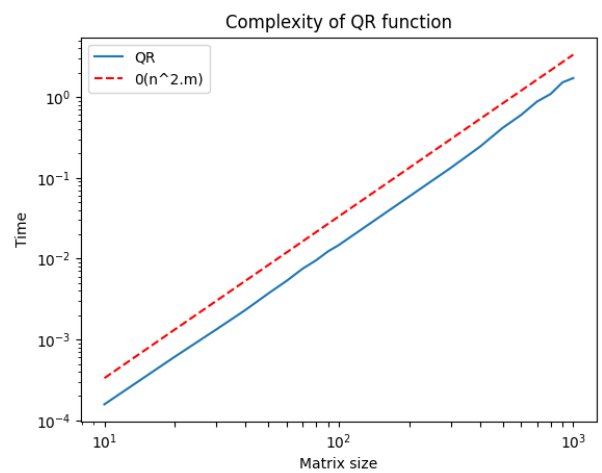

Figure 2: M fixé à 1000 et N varie

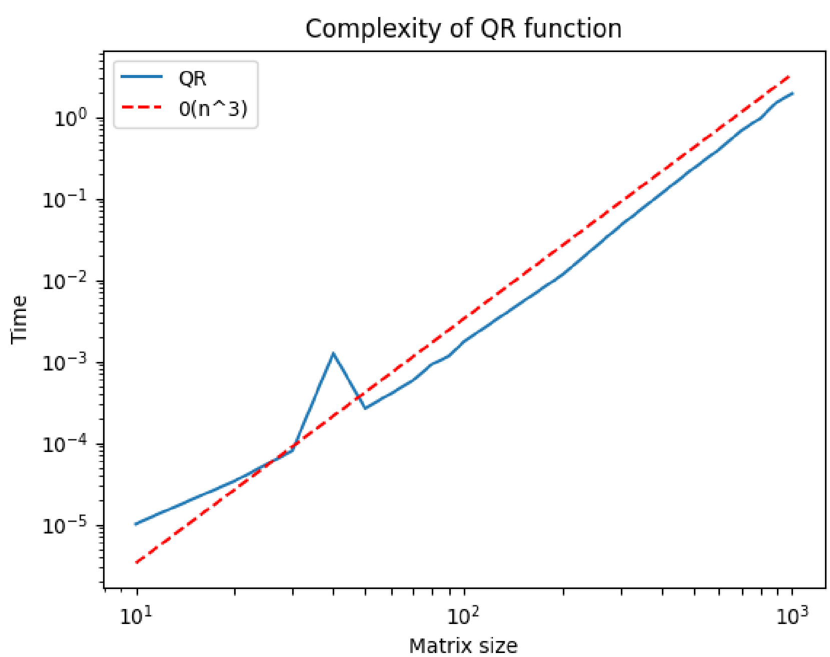

Figure 3: matrice carré

3 Illustration graphique de l'approximation

Pour mon exemples je n'ai pas été très originale donc voici Un exemple à la Figure 4, où 573 points ont été approximés par une courbe en utilisant 40 points de contrôle.

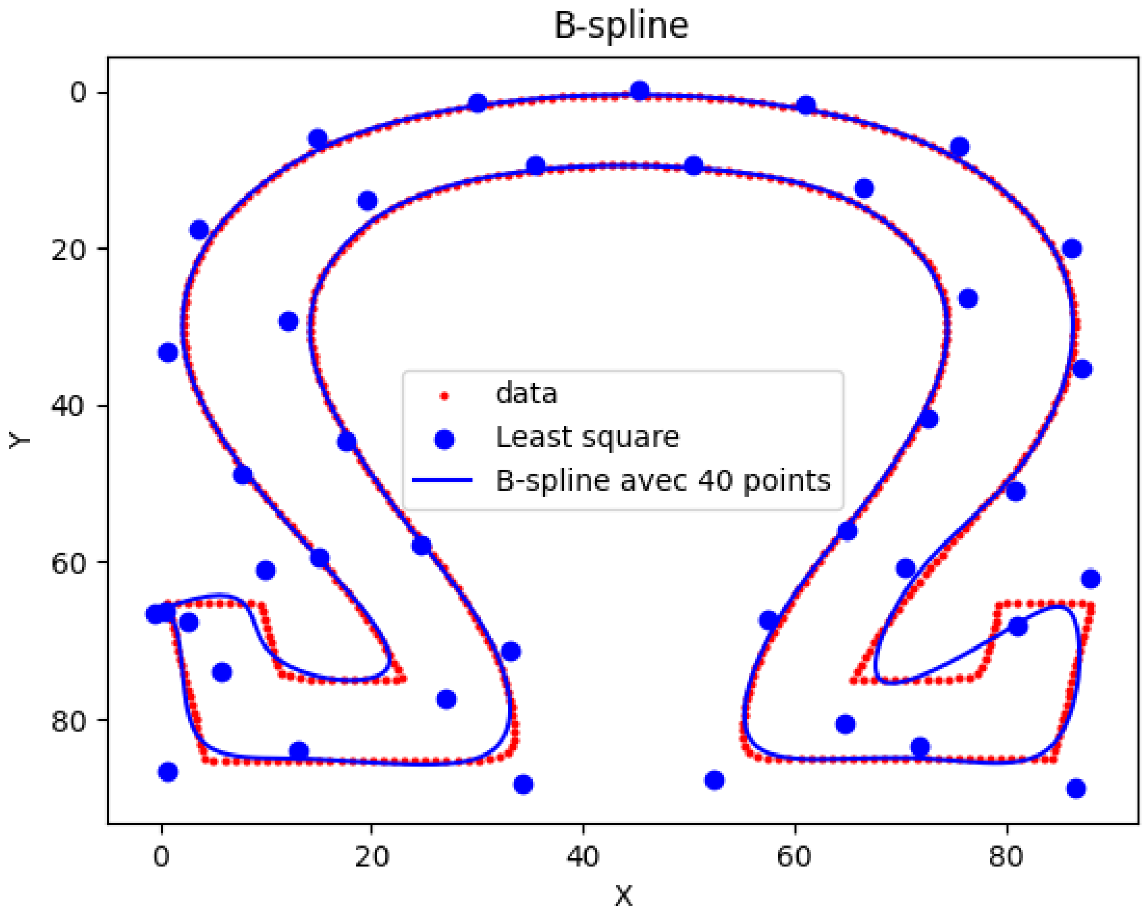

Figure 4: Bspline

Bibliographie

References

[1] OpenAI, *GPT-3.5 Model*, https://openai.com/gpt-3, 2022. (expression mathématiques en latex, aucun réponse n'as été demandé/recopié)

[2] Stack Overflow, *Stack Overflow*, https://stackoverflow.com, 2008. (débuggage)