1 Devoir2 - Décomposition LU et conditionnement

1.1 Question 1

Le conditionnement d'un problème est une mesure de la sensibilité de la solution du problème par rapport à de petits changements dans les données du problème. le nombre de conditionnement κ est défini comme suit:

$$\kappa = \sup_{\delta x} \frac{||\delta x||/||x||}{||\delta b||/||b||} \tag{1}$$

où δx est la variation de la solution, δb est la variation des données, x est la solution et b est les données.
Pour appliqué cela au problème des moindres carrés, on peut utiliser la formule suivante:

$$\kappa A = \kappa(A) + \frac{\kappa(A)^2 \tan(\theta)}{\nu} \quad \kappa B = \frac{\kappa(A)}{\nu \cos(\theta)} \tag{2}$$

avec

$$\nu = \frac{||A||||x||}{Ax} \quad et \quad \theta = \arccos(\frac{||Ax||}{b}) \tag{3}$$

ou κA est le conditionnement de A et κB est le conditionnement de B.
on peut observer sur les graphes ci-dessous que pour les problèmes des moindres carrés les conditionnements de A et B (symbolisé par les points bleus) sont assez faible car ils restent dans le cercle qui représente la borne calculée mathématiquement. (ici calculé sur une dimension 2 afin de pouvoir le représenter mais une augmentation du nombre de dimension ne changerait rien)

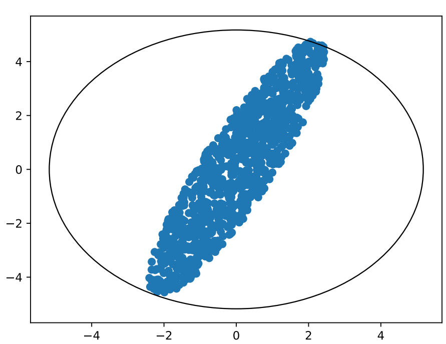

Figure 1: Conditionnement selon A

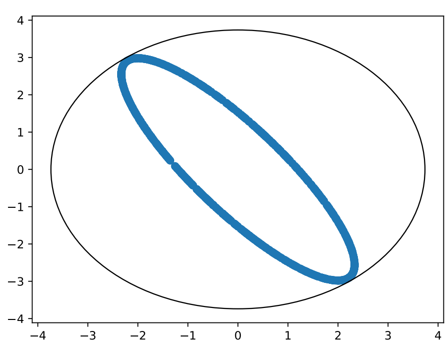

Figure 2: Conditionnement selon B

1.2 Question 2

La complexité de l'algorithme de décomposition LU est $O(\frac{2n^3}{3})$ avec n le nombre de lignes/colonnes de la matrice carré.
L'algorithme de décomposition LU n'est pas facilement parallélisable car les calculs de chaque ligne de la matrice L et U sont dépendants des calcules fait précédemment.

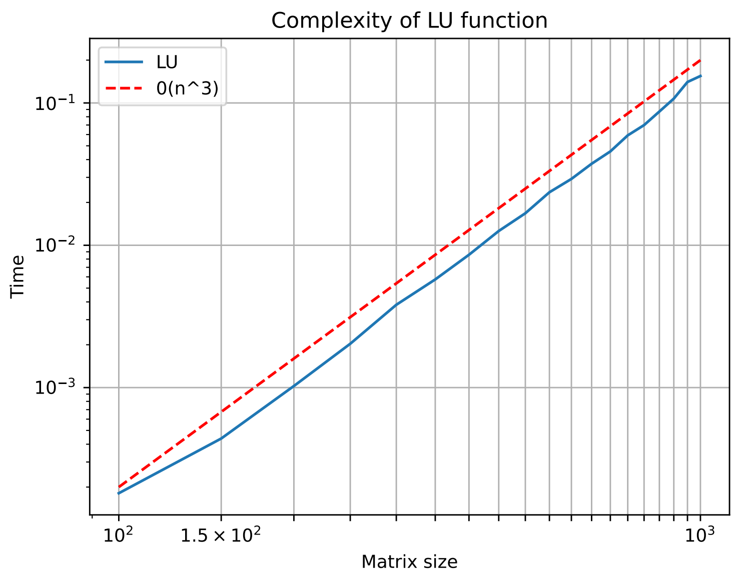

Figure 3: complexité de LU

1.3 Question 3

démontrons cela par récurrence:
prenons A_m la matrice carré de taille m qui n'as pas besoin de pivotage lors de sa décomposition LU.
(le fait de ne pas avoir besoin de pivotage signifie que tous les mineurs principaux de A sont positifs car si un mineur principal est négatif, il faudra pivoter pour éviter les divisions par 0)
et prouvons que A_{m+1},la matrice carré de taille $m+1$, n'en n'aura pas non plus besoin.

on sait que A_{m+1} est de la forme:

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} A_m & b \\ c^T & d \end{pmatrix} \tag{4}$$

avec A_m une matrice carré de taille m, b un vecteur colonne de taille m et c un vecteur ligne de taille m.
on sait que A_m n'as pas besoin de pivotage donc on peut écrire:

$$A_m = LU \tag{5}$$

avec L une matrice triangulaire inférieur et U une matrice triangulaire supérieur.
on peut écrire la décomposition LU de A_{m+1} de la manière suivante:

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ c^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & b \\ 0 & d - c^T U^{-1} b \end{pmatrix} \tag{6}$$

on peut voir que A_{m+1} est de la forme LU avec L une matrice triangulaire inférieur et U une matrice triangulaire supérieur.
on peut donc en conclure que si A_m n'as pas besoin de pivotage, A_{m+1} n'en n'aura pas non plus besoin.

1.4 Question 4

Pour résoudre le problème des moindres carrés

$$\tilde{A}X = \tilde{B} \tag{7}$$

avec

$$\tilde{A} = A^T A \quad et \quad \tilde{B} = A^T b \tag{8}$$

On peut utiliser la décomposition LU comme vu au dessus mais on peut aussi profiter du fait que $\tilde{A}$ soit symétrique et définie positive pour utiliser la décomposition de Cholesky.
Cette décomposition est plus rapide que la décomposition LU.
En effet, sa complexité est théoriquement de $O(\frac{n^3}{3})$.
Ce qui se vérifie empiriquement lorsque on les chronomètres, on peut observer que Cholevsky sera en moyenne 2 fois plus rapide que LU.

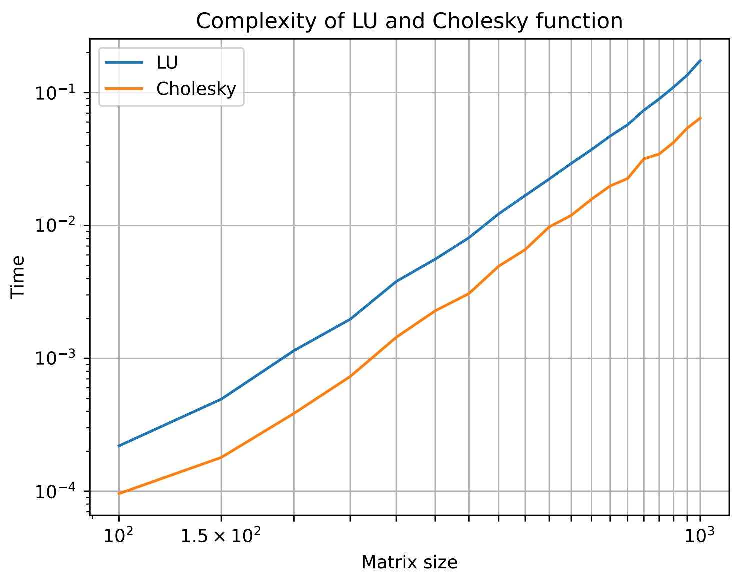

Figure 4: complexité de LU et Cholesky