

LINMA1691 - Théorie et Algorithmique des Graphes

Robin Ballarini	Annelies Bauwens	Gilles Bertrand
Armand Bosquillon de Jenlis	Alexandre Bovet	
Romain Capron	Arnaud Cerckel	Charlotte Cirriez
Simon Claessens	Thibault Clavier	Gaëtan Collart
Matthieu Constant	Xavier Crochet	Benoît Daloze
Gatien De Callataÿ	François Dederichs	Sébastien De Fauw
François Delcourt	Arnaud de Lhoneux	Martin De Neuville
Guillaume Derval	Alexandre de Touzalin	Gauthier Feuillen
Florentin Goyens	Arnaud Jacques	Antoine Hilhorst
Benoît Legat	Thibault Liénart	Arthur Losseau
Alexis Pierret	Thérèse Plissart	François Raucent
Félicien Schiltz	Mélanie Sedda	Benoît Sluysmans
Nicolas Stevens	Harold Taeter	Kim Van Den Eeckhaut
Geoffroy Vanderreydt	Antoine Van Malleghe	Nicolas Vico
Romain Hollanders	Florimond Houssiau	
Vincent Schellekens	Jean-Charles Delvenne	

5 janvier 2022

Notes partielles et provisoires

Table des matières

1	Graphes connexes, eulériens et bipartis	3
1.1	Graphes	3
1.2	Isomorphisme de Graphes	4
1.3	Parcours eulérien	6
1.4	Représentation matricielle du graphe	8
1.5	Graphes bipartis	11
2	Les plus courts chemins	14
2.1	Les plus courts chemins	14
2.2	Algorithme de Dijkstra	16
2.3	Anneaux et Semi-anneaux	19
3	Arbres et connectivité	21
3.1	Arbres	21
3.2	Arbre sous-tendant de poids minimum	24
3.3	Connectivité	30
4	Graphes hamiltoniens	34
5	Mariages, couplages et couvertures	37
5.1	Couplage	37
5.2	Couverture	40
5.3	L'algorithme hongrois	43
6	Coloriages d'arêtes	45
7	Cliques, ensembles indépendants et l'impossible désordre	48
7.1	Ensembles indépendants	48
7.2	Cliques	49
7.3	La théorie de Ramsey	53
8	Coloriages de sommets	56
8.1	Coloriages de sommets et nombre chromatique	56
8.2	Bornes sur le nombre chromatique	56
8.3	Polynôme chromatique	59
9	Graphes planaires	61
9.1	Graphes planaires	62
9.2	Formule d'Euler	66
9.3	Les cinq solides platoniciens	68
9.4	Coloriage des graphes planaires	69

10 Flots et coupes	71
10.1 Flots et coupes	71
10.2 L'algorithme de Ford-Fulkerson	75
11 \mathcal{P}, \mathcal{NP} et \mathcal{NP}-complétude	77
11.1 \mathcal{P} , \mathcal{NP} et \mathcal{NP} -complétude	77

1 Graphes connexes, eulériens et bipartis

Dans cette section, les notions de base de la théorie des graphes sont définies, et ses résultats élémentaires sont exposés et démontrés. Dans un premier temps, on s'intéresse à la définition de la notion de graphe, et celle d'isomorphisme entre graphes. Ensuite, on étudie les graphes eulériens, et on démontre un résultat fondamental permettant de prouver facilement qu'un graphe est ou n'est pas eulérien. Puis les représentations d'un graphe sous forme matricielle sont définies, et leur intérêt est montré au travers du théorème dit des poignées de main. Enfin, on définit ce qu'est un graphe biparti, et fait le lien entre cette notion et la présence de cycles impairs dans un graphe.

1.1 Graphes

Définition 1.1. Un *graphe* est un triplet (V, E, φ) , où :

- V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets ou noeuds ;
- E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés arêtes ;
- φ est une fonction, dite fonction d'incidence, qui associe à chaque arête un sommet ou une *paire* de sommets.

Définition 1.2. Deux sommets incidents à la même arête sont dits *adjacents*.

Définition 1.3. Une arête incidente à un seul sommet est une *boucle*. Deux arêtes sont dites *multiplées* si elles sont toutes deux incidentes aux mêmes noeuds.

Définition 1.4. Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à celui-ci, les boucles comptant comme arêtes doublement incidentes.

Définition 1.5. Un *sous-graphe* du graphe (V, E, φ) est un graphe (V', E', φ') avec :

- $V' \subseteq V$;
- $E' \subseteq E$;
- φ' est la restriction de φ à E' .

Le sous-graphe *induit* par un ensemble de noeuds $V' \subseteq V$ est le sous-graphe dont l'ensemble des noeuds est V' et l'ensemble des arêtes est $E' = \{e \in E : \varphi(e) \subseteq V'\}$, autrement dit les arêtes dont les extrémités sont dans V' .

Définition 1.6. Un graphe est dit *simple* si :

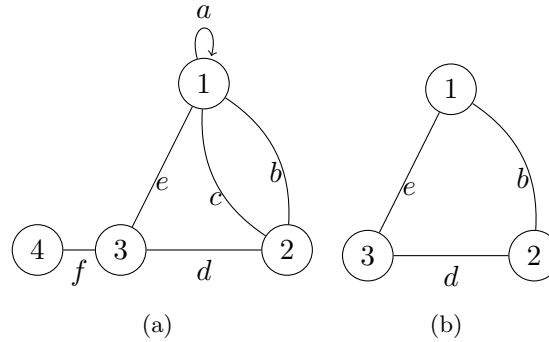
1. il n'a pas de boucle ;
2. il n'a pas d'arête multiple.

Exemple 1.7. Soit $V = \{1, 2, 3, 4\}$, et $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, on définit la fonction $\varphi : E \longrightarrow V \times V$ comme :

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \{1, 1\} \\ \varphi(b) &= \{1, 2\} \\ \varphi(c) &= \{1, 2\} \\ \varphi(d) &= \{2, 3\} \\ \varphi(e) &= \{1, 3\} \\ \varphi(f) &= \{3, 4\}\end{aligned}$$

Soit $G = (V, E, \varphi)$: c'est un *graphe*, et on peut le représenter comme suit (figure 1(a)). Par définition, l'arête a est une *boucle*, les arêtes b et c sont dites *multiples*, et les trois noeuds sont *adjacents* les uns aux autres. Leurs *degrés* respectifs sont $(5, 3, 3, 1)$.

Ce graphe n'est pas simple : il possède une boucle et des arêtes multiples. Par contre, si on définit $V' = \{1, 2, 3\}$ et $E' = \{b, d, e\}$, et soit φ' la restriction de φ à E' , on obtient le *sous-graphe* $G' = (V', E', \varphi')$ de G , représenté à la figure 1(b) ci-dessous. Ce sous-graphe est *simple*.



Notons que dans un graphe simple, puisqu'il n'y a qu'une seule arête possible entre deux noeuds u et v , la fonction d'incidence φ est injective : au plus une arête e existe telle que $\varphi(e) = \{u, v\}$. On se permet donc souvent l'abus de notation $e = \{u, v\}$, ou plus simplement encore $e = uv$, puisque cela ne génère pas d'ambiguïté.

1.2 Isomorphisme de Graphes

Définition 1.8. Deux graphes (V, E, φ) et (V', E', φ') sont dits *isomorphes* s'il existe des bijections $f : V \rightarrow V'$ et $g : E \rightarrow E'$ telles que :

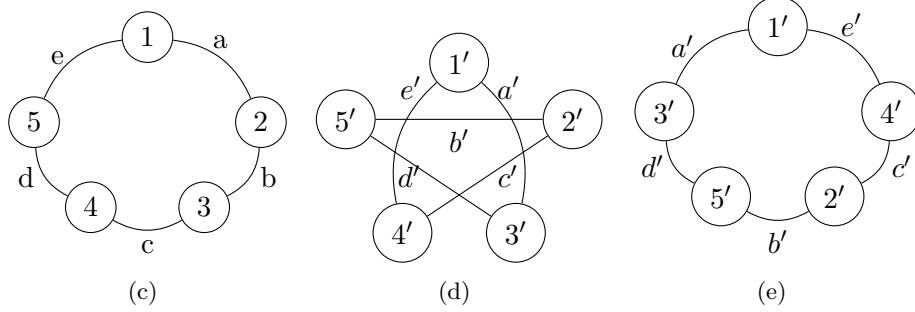
$$\varphi(e) = \{u, v\} \text{ ssi } \varphi'(g(e)) = \{f(u), f(v)\}$$

pour tous $e \in E, u \in V, v \in V$.

Cette notion permet de généraliser la notion d'*égalité* entre graphes, en ce sens que deux graphes isomorphes sont essentiellement les mêmes, et partagent leur propriétés 'en tant que graphes'. En d'autres termes, on pourrait dire qu'un graphe G_1 isomorphe à un autre graphe G_2 est le résultat d'une simple renumérotation de G_2 (et vice-versa).

L'isomorphisme entre les graphes est une *relation d'équivalence* entre graphes : cela se vérifie facilement à partir de la définition.

Exemple 1.9. Voici deux exemples d'isomorphisme du même graphe : No-

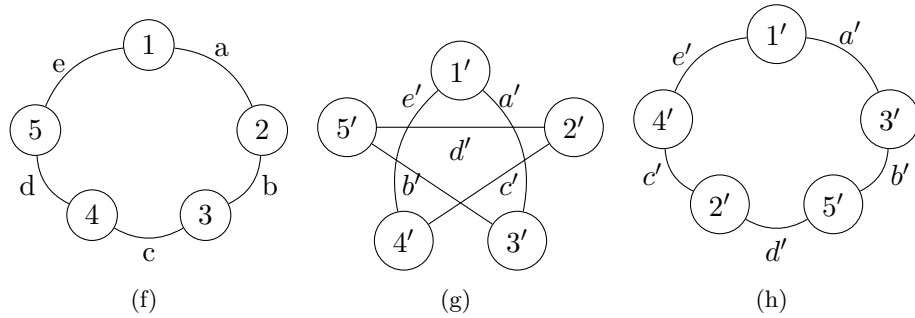


tons que, même si cela ne paraît pas forcément évident, les graphes (d) et (e) sont les mêmes (et pas seulement isomorphes) : ils ont la même fonction d'incidence entre le même ensemble d'arêtes et le même ensemble de noeuds mais ils sont simplement dessinés différemment sur le papier.

L'isomorphisme entre (c) et les deux autres est donné par :

$$\begin{aligned} f(1) &= 1' & g(a) &= e' \\ f(2) &= 4' & g(b) &= c' & \varphi(a) &= \{1, 2\} \\ f(3) &= 2' & g(c) &= b' & \varphi(a') &= \{1', 3'\} \\ f(4) &= 5' & g(d) &= d' & \varphi'(g(a)) &= \{f(1), f(2)\} \\ f(5) &= 3' & g(e) &= a' \end{aligned}$$

Notons aussi que plusieurs résultats sont possibles :



$$\begin{array}{ll}
f(1) = 1' & g(a) = a' \\
f(2) = 3' & g(b) = b' \\
f(3) = 5' & g(c) = d' \\
f(4) = 2' & g(d) = c' \\
f(5) = 4' & g(e) = e'
\end{array}$$

Les six graphes de cet exemple sont isomorphes entre eux.

Difficulté : déterminer si deux graphes sont isomorphes est un problème algorithmiquement difficile : on ne connaît pas de procédure beaucoup plus rapide que la force brute (essayer toutes les bijections possibles à la recherche d'un isomorphisme). En revanche, il est possible dans de nombreux cas particuliers de démontrer que deux graphes ne sont pas isomorphes par des arguments simples, en employant le fait que deux graphes isomorphes partagent les mêmes propriétés, notamment en terme de présence de cycles (cette notion est définie par la suite).

Par exemple, si un graphe possède un triangle (cycle de longueur 3), mais pas l'autre, alors on sait de façon certaine qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre ces graphes.

1.3 Parcours eulérien

Définition 1.10. Un *parcours* est une séquence de sommets et d'arêtes $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$ telle que toute arête e_i de ce parcours a pour extrémités les sommets v_i et v_{i+1} . Les sommets v_0 et v_n sont les *extrémités* du parcours. La *longueur* du parcours est n , le nombre d'arêtes parcourues. Un parcours peut contenir plusieurs fois un même sommet ou une même arête. Il est *fermé* si $v_0 = v_n$.

Définition 1.11. Un *chemin* est un parcours dont tous les sommets (sauf éventuellement les extrémités, voir définition suivantes) sont distincts et toutes les arêtes sont distinctes.

Définition 1.12. Un *cycle* est un chemin fermé.

Théorème 1.13. Un graphe est *connexe* ssi pour chaque paire de sommets, il existe un parcours qui les relie. Les *composantes connexes* d'un graphe sont ses sous-graphes connexes maximaux.

On démontre aisément la proposition suivante.

Théorème 1.14. Un graphe est connexe si et seulement si pour tout ensemble non vide de noeuds S , de complémentaire \bar{S} non vide, il y a au moins une arête entre S et \bar{S} .

Définition 1.15. Un *parcours* est *eulérien* s'il visite chaque arête du graphe une et une seule fois. Un *graphe* est *eulérien* s'il existe un parcours eulérien fermé dans ce graphe.

Théorème 1.16 (Théorème d'Euler). Un graphe connexe est eulérien ssi tous les sommets sont de degré pair.

Démonstration.



Chaque arête incidente à un noeud x est utilisée une et une seule fois par le parcours eulérien :

- soit pour entrer dans x ;
- soit pour en sortir.

À chaque arête entrante correspond une arête sortante (celle qui suit dans le parcours sauf pour la dernière arête du parcours qui correspond à la première).

Donc, en chaque noeud il y a une bijection entre les arêtes entrantes et les arêtes sortantes.

Donc chaque noeud a un degré pair.

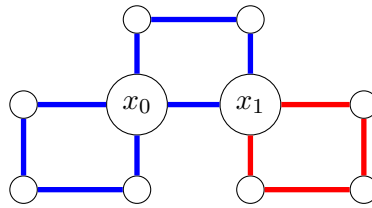


On va construire un parcours eulérien :

1. On part d'un noeud arbitraire x_0 .
2. On prend une arête incidente à x_0 , on arrive à un nouveau noeud.
3. Par parité, il y a au moins une arête non utilisée, on la prend, on arrive à un autre noeud, on ressort par une arête disponible (si elle existe), etc. Ce processus doit finir puisque le nombre d'arêtes est fini. Quand il n'y a plus d'arête disponible, on est forcément arrivé à x_0 car pour tout autre noeud y , en arrivant à y , on a utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à y , donc il en reste au moins une non encore visitée par le parcours.

On a donc un parcours fermé P_0 :

- Si toutes les arêtes incidentes aux noeuds traversés par ce parcours sont utilisées, alors ce parcours est eulérien ;
- Sinon, il y a un noeud x_1 avec une arête non visitée. On prétend que ce x_1 peut être choisi sur le parcours P_0 déjà construit. En effet, par connexité, il y a au moins une arête entre un noeud déjà visité par P_0 et un noeud non visité (en vertu du Théorème 1.14). On choisit ce noeud déjà visité comme x_1 .
- A partir de x_1 , on crée un parcours P_1 sur le graphe des arêtes non encore visitées par P_0 : c'est un graphe dont les degrés sont pairs, puisque chaque P_0 visite un nombre pair d'arêtes à chaque noeud.



On fusionne les deux parcours :

$$P_{0+1} = x_0 \xrightarrow{\text{blue}} x_1 \xrightarrow{\text{red}} x_1 \xrightarrow{\text{blue}} x_0$$

(les couleurs se réfèrent au dessin) et on répète l'argument jusqu'à inclure toutes les arêtes dans le parcours, et obtenir ainsi un parcours eulérien. \square

Théorème 1.17 (Existence d'un parcours eulérien). Un graphe connexe possède un parcours eulérien ssi le nombre de noeuds de degré impair est zéro ou deux.

Démonstration.



- Si ce parcours eulérien est fermé, tous les degrés sont pairs par le théorème précédent ;
- Si ce parcours eulérien est ouvert d'origine u et destination v , tous les degrés sont pairs, sauf $\deg(u)$ et $\deg(v)$ qui sont impairs, par une légère adaptation de l'argument du cas fermé.



- Si tous les degrés sont pairs alors il existe un parcours eulérien fermé par le théorème précédent ;
- Si les degrés de u et v sont impairs et si on ajoute une arête e entre u et v :
 - Tous les degrés sont pairs.
 - Il existe un parcours eulérien fermé.
 En retirant e , on obtient un parcours eulérien ouvert $u \rightarrow v$.

\square

1.4 Représentation matricielle du graphe

Définition 1.18. La *matrice d'incidence* est une matrice rectangulaire $n \times m$ dont l'élément ij est le nombre de fois que le sommet v_i est incident à l'arête e_j . Une boucle compte pour deux.

La matrice d'incidence est une représentation commode de la fonction d'incidence qui définit un graphe.

Définition 1.19. La *matrice d'adjacence* est une matrice carrée $n \times n$ dont l'élément ij est le nombre d'arêtes entre les sommets v_i et v_j . Une boucle compte pour un dans l'élément diagonal correspondant.

Un exemple d'application de la matrice d'incidence est le théorème des poignées de mains :

Théorème 1.20 (Théorème des poignées de mains). La somme des degrés des noeuds d'un graphe est deux fois le nombre d'arêtes.

$$\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2|E|$$

Démonstration. En utilisant la matrice d'incidence M (voir Définition 1.18), on peut calculer $\sum_{ij} M_{ij}$ de deux façon différentes : chaque ligne représente le degré du noeud correspondant, et chaque colonne (représentant une arête) somme à deux.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \sum_i \sum_j M_{ij} = \sum_{v_i \in V} \deg(v_i) \right.$$

$$\left. \sum_j \sum_i M_{ij} = \sum_j 2 = 2|E| \right.$$

$$\sum_i \sum_j M_{ij} = \sum_j \sum_i M_{ij}$$

$$\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2|E|.$$

□

Une application de la matrice d'adjacence est la suivante :

Théorème 1.21 (Matrice d'adjacence et nombre de parcours). Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe. Alors l'élément ij de A^k ($k \geq 0$) est le nombre de parcours de longueur k de v_i vers v_j .

Démonstration. Nous procédons par récurrence. Soit A une matrice d'adjacence.

Initialisation Pour $k = 0$, $A^0 = I$. La propriété est vérifiée par convention.

Il existe un chemin de longueur 0 d'un point vers lui même.

Pour $k = 1$, $A^1 = A$ représente bien le nombre de parcours de longueur 1.

Induction Supposons la propriété vérifiée pour A^k .

$$\begin{aligned}
& \# \text{parcours } i \rightarrow j \text{ longueur } k+1 \\
&= \sum_{l \in V} (\# \text{parcours } i \rightarrow l \text{ longueur } k) \cdot (\# \text{arêtes } l \rightarrow j) \\
&= \sum_{l \in V} A_{il}^k A_{lj} \\
&= A_{ij}^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

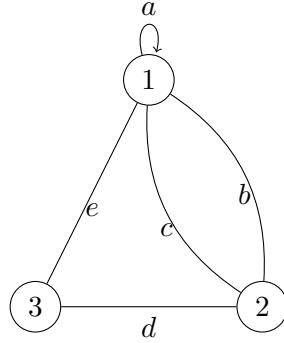


FIGURE 1 – Graphe de l'exemple 1.22.

Exemple 1.22. La matrice d'adjacence de la figure 1 est

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

et sa matrice d'incidence est

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

$(A^k)_{ij}$ est le nombre de parcours $i \rightarrow j$ de longueur k .

$$\begin{aligned}
A^0 = I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^1 = A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Définition 1.23. La *distance* $d(u, v)$ entre les noeuds u et v d'un graphe est le nombre d'arêtes minimal d'un parcours entre ces deux noeuds.

Lemme 1.24. Si $u \dots u' \dots v' \dots v$ est un parcours de longueur minimale de u vers v , alors le sous-parcours $u' \dots v'$ est un parcours de longueur minimale de u' vers v' .

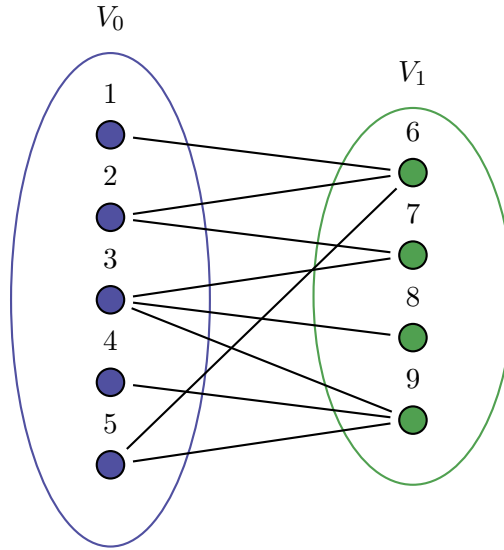
En particulier, un parcours de longueur minimale est toujours un chemin.

Démonstration. Si ce parcours entre u' et v' n'était pas le plus court, on utiliserait le parcours strictement plus court pour la construction du parcours entre u et v . \square

1.5 Graphes bipartis

Définition 1.25. Un graphe est *biparti* s'il existe une partition des noeuds en deux ensembles V_0 et V_1 tels que les noeuds de V_0 ne sont adjacents qu'à des noeuds de V_1 et vice versa. La *bipartition* est (V_0, V_1) .

Exemple 1.26.



Théorème 1.27 (Cycles et parcours dans les graphes bipartis). Un graphe est biparti ssi tous ses parcours fermés sont de longueur paire ssi tous ses cycles sont de longueur paire.

Démonstration.

biparti \implies parcours fermés de longueur paire

On suppose qu'il existe une bipartition (V_0, V_1) . Soit un parcours fermé $v_0 e_0 v_1 e_1 v_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_0$. Vu que le parcours visite alternativement V_0 et V_1 et revient à son point de départ, il doit suivre un nombre pair d'arêtes. Par exemple si $v_0 \in V_0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Parcours : } & v_0 & v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1} & v_0 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ & V_0 & V_1 & V_0 & \dots & V_1 & V_0 \end{array}$$

p parcours fermés de longueur paire \implies cycles de longueur paire : trivial

cycles fermés de longueur paire \implies biparti

Partons d'un noeud v_0 arbitraire, et définissons les ensembles de noeuds

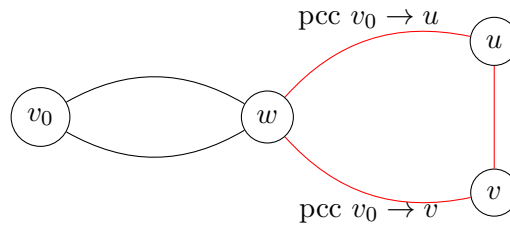
$$\begin{aligned} V_0 &= \{v \mid d(v, v_0) \text{ paire}\} \\ V_1 &= \{v \mid d(v, v_0) \text{ impaire}\} \end{aligned}$$

C'est une partition des noeuds. Montrons que c'est bien une bipartition pour le graphe.

On le montre par l'absurde. Si ce n'est pas une bipartition, on aurait par exemple une arête entre u et v avec $u, v \in V_0$.

Les plus courts chemins $v_0 \rightarrow u$ et $v_0 \rightarrow v$ sont de longueur paire car $u, v \in V_0$.

Ces deux chemins ont au moins un point d'intersection (v_0 lui-même) et peut-être plusieurs. Soit w un tel point d'intersection. Alors les deux sous-chemins de v_0 vers w sont tous deux des plus courts chemins (en tant que sous-chemins des plus courts chemins $v_0 \rightarrow u$ et $v_0 \rightarrow v$) de v_0 vers w , donc de même longueur, qui est la distance $d(v_0, w)$. Dorénavant on choisit w comme l'intersection des deux chemins $v_0 \rightarrow u$ et $v_0 \rightarrow v$ qui est la plus éloignée de v_0 (voir dessin, où pcc signifie 'plus court chemin').



Le parcours fermé $wuvw$ (en rouge sur le dessin) est un bien un cycle, par construction (en effet les deux chemins $w \rightarrow u$ et $w \rightarrow v$ sont sans intersection, par choix de w). On prétend qu'il est de longueur impaire. En effet, les deux sous-chemins de v_0 vers w étant de même longueur, on a :

$$\underset{\text{impaire}}{lg(wuvw)} = \underset{\text{paire}}{lg(v_0uvv_0)} - 2\underset{\text{paire}}{lg(v_0w)}$$

Contradiction puisqu'on a supposé tous les cycles de longueur paire. Si l'arête uv est dans V_1 , raisonnement similaire. \square

2 Les plus courts chemins

2.1 Les plus courts chemins

Définition 2.1. Une *fonction de poids* sur un graphe (V, E, φ) est une fonction $E \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe un poids réel à chaque arête du graphe. Un *graphe pondéré* est un graphe muni d'une fonction de poids. Le *poids* ou la *longueur* d'un parcours est la somme des poids des arêtes qui le compose.

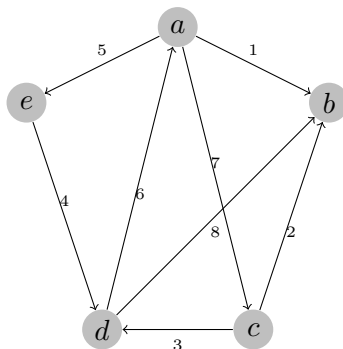
Un exemple de graphe pondéré est le réseau routier belge, où les sommets sont les villes et les arêtes les routes reliant ces villes, et auxquelles ont associé comme poids la longueur (en kilomètres) de la route. Dans cet exemple, comme dans beaucoup de cas pratiques, le poids des arêtes est toujours positif.

Définition 2.2. La *distance* entre les noeuds u et v d'un graphe pondéré, notée $d(u, v)$, est la longueur du plus court chemin de u vers v , c'est-à-dire le chemin reliant u à v de poids minimal. Attention, dans un graphe dirigé en général $d(u, v) \neq d(v, u)$.

Définition 2.3. Un *graphe dirigé* (parfois appelé *digraphe*) est un triplet (V, E, φ) , où :

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets ou noeuds ;
- E est un ensemble dont les éléments sont appelés arêtes ;
- φ est une fonction, dite fonction d'incidence, qui associe à chaque arête un *couple*¹ de sommets.

Exemple 2.4. Pour le graphe dirigé suivant :



1. Dans la définition 1.1 on a parlé de paire et ici de couple car une paire est un ensemble de 2 éléments alors qu'un couple est un n -uplet avec $n = 2$. Dans un ensemble, il n'y a pas de relation d'ordre alors que dans un n -uplet, chaque élément a un indice bien défini. Une arête est donc à sens unique dans un graphe dirigé.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 V &= \{a, b, c, d, e\} \\
 E &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\
 \varphi(1) &= (a, b) \\
 \varphi(2) &= (c, b) \\
 \varphi(3) &= (c, d) \\
 \varphi(4) &= (e, d) \\
 \varphi(5) &= (a, e) \\
 \varphi(6) &= (d, a) \\
 \varphi(7) &= (a, c) \\
 \varphi(8) &= (d, b)
 \end{aligned}$$

Notons que certains résultats de la théorie des graphes non-dirigés possèdent une extension naturelle au cas dirigé. Ainsi on nomme *fortement connexe* un graphe dirigé avec un parcours (au sens dirigé) de tout noeud à tout autre. Ainsi le théorème d'Euler pour les graphes dirigés s'énonce : un graphe fortement connexe est eulérien si et seulement si en tout noeud le degré entrant est égal au degré sortant (avec preuve semblable). Et le théorème des poignées de main : la somme des degrés entrants égale la somme des degrés sortants, égale le nombre d'arêtes. Le cas dirigé est aussi le cadre le plus naturel pour exprimer le problème du plus court chemin.

Théorème 2.5 (Plus court chemin et plus court parcours). Pour un graphe (dirigé ou non) avec une fonction de poids ≥ 0 , si le plus court parcours entre u et v est de longueur d , alors le plus court chemin entre u et v est aussi de longueur d (la notion de plus court parcours se ramène donc à celle du plus court chemin).

Démonstration. Soit d' la longueur du plus court chemin. Comme tout chemin est un parcours, on a nécessairement $d' \geq d$ où d est la longueur du plus court parcours. Supposons par l'absurde que le plus court parcours soit strictement plus court que le plus court chemin et donc que $d' > d$. Ce plus court parcours, P , n'est donc pas un chemin et contient donc un ou plusieurs cycles. Prenons donc $P = v_0 \dots v_i \dots v_i \dots v_n$ contenant un de ces cycles $v_i \dots v_i$. Si on retire ce cycle $v_i \dots v_i$ on obtient un nouveau parcours $P' = v_0 \dots v_i \dots v_n$. Comme les arêtes sont de poids positif, deux cas sont possibles :

- Soit le cycle retiré possède au moins une arête de poids positif, donc P' est plus court que P , ce qui contredit notre hypothèse que P est le plus court parcours (impossible).
- Soit le cycle retiré est de poids nul, et P' a un poids d égal au poids de P . Dans ce cas : (i) soit il n'y a plus de cycle dans P' , ce qui veut

dire que P' est un chemin de longueur d inférieure à la longueur d' du plus court chemin (impossible), (ii) soit il reste des cycles dans P' , on recommence alors l'argument présenté en remplaçant P par P' et on finira par tomber sur un des cas impossibles car le nombre de cycles dans P est fini.

□

On se restreint donc à la notion de plus court chemin. Trouver le plus court chemin entre deux noeuds dans un graphe est un problème important qui nécessite un algorithme efficace (le temps de calcul nécessaire pour essayer tous les chemins possibles est énorme).

2.2 Algorithme de Dijkstra

Algorithme 2.6 (Algorithme de Dijkstra). L'algorithme de Dijkstra prend en entrée un graphe pondéré (connexe, dirigé ou non) G avec poids positifs, ainsi qu'un noeud de départ u_0 , et donne en sortie la distance la plus courte entre u_0 et tous les autres noeuds de G ². Ici, $w(uv)$ représente le poids de l'arête uv , S désigne l'ensemble des noeuds pour lesquels on connaît la plus petite distance depuis u_0 , et $\ell(u)$ est la distance la plus courte de u_0 à u en passant par les noeuds dans S uniquement. Si il n'y a pas d'arête entre u et v on note $w(uv) = \infty$.

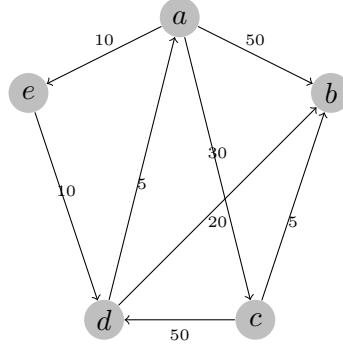
1. Initialisation :
 - $S = \{u_0\}$ (on connaît la distance trivialement nulle au point de départ)
 - $\ell(u_0) = 0$ et $\ell(v) = \infty$ pour $v \neq u_0$ ($\ell(v)$ est une borne supérieure de $d(u_0, v)$).
 - $u' = u_0$ (dernier noeud ajouté à S)
2. Tant qu'il reste des sommets hors de S :
 - Mise à jour de ℓ en considérant passer par u' : $\forall v \notin S, \ell(v) \leftarrow \min(\ell(v), \ell(u') + w(u'v))$
 - Trouver $v_{min} \notin S$ le plus proche : $\forall v \notin S, \ell(v_{min}) \leq \ell(v)$
 - L'ajouter à S : $u' \leftarrow v_{min}$ puis $S \leftarrow S \cup \{u'\}$

En d'autres mots, l'algorithme de Dijkstra ajoute à chaque itération à S un noeud pour lequel la longueur du plus court chemin est connu, puis ré-évalue les "plus courts chemins candidats" des noeuds restants en considérant passer par ce nouveau noeud.

Exemple 2.7. On cherche les distances à partir de a dans le graphe suivant. Le résultat de chaque itération de l'algorithme est notée dans une ligne du

2. Il est également possible de donner les plus courts chemins, pas uniquement leur longueur.

tableau associé.



u'	S	$l(a)$	$l(b)$	$l(c)$	$l(d)$	$l(e)$
a	$\{a\}$	0	∞	∞	∞	∞
a	$\{a, e\}$		50	30	∞	10
e	$\{a, e, d\}$		50	30	20	
d	$\{a, e, d, c\}$		40	30		
c	$\{a, e, d, c, b\}$		35			

Théorème 2.8 (L'algorithme de Dijkstra fonctionne). Après chaque mise à jour de ℓ dans l'algorithme, les deux propriétés suivantes³ sont vérifiées :

- pour $v \in S$, $\ell(v) = d(u_0, v)$ et le chemin le plus court de u_0 à v reste dans S ;
- pour $v \notin S$, $\ell(v) \geq d(u_0, v)$, et $\ell(v)$ est la longueur du plus court chemin de u_0 vers v dont tous les noeuds internes sont dans S .

Démonstration. Faisons une preuve par induction : on suppose qu'à l'itération $i - 1$ les propriétés sont vérifiées et on cherche à les prouver pour l'itération i . Soit S_i l'ensemble S à la fin de l'itération i .

Initialisation Au début, $\ell(u_0) = 0 = d(u_0, u_0)$ et $\ell(v) = \infty > d(u_0, v)$ (car on considère le graphe connexe), les deux propriétés sont vérifiées.

Induction On prouve une propriété à la fois :

- Il faut prouver qu'après avoir ajouté un noeud u_i dans S_i , $\ell(u_i) = d(u_0, u_i)$ (par hypothèse d'induction, la propriété est vérifiée pour les autres éléments de S_i). Supposons par l'absurde que $\ell(u_i) > d(u_0, u_i)$. Comme (par hypothèse d'induction sur la seconde propriété) $\ell(u_i)$ est la longueur du plus court chemin où tous les noeuds intermédiaires sont dans S_{i-1} , la seule possibilité pour que $\ell(u_i) \neq d(u_0, u_i)$, c'est qu'il existe un plus court chemin passant par

3. Puisque ces propriétés sont vérifiées à chaque itération de la boucle, on les appelle des *invariants de boucle*.

un noeuds de \bar{S}_{i-1} . Soit v , le premier noeud de \bar{S}_{i-1} de ce chemin. Le sous-chemin de u_0 à v est le plus court chemin de u_0 à v par le lemme 1.24. Par la définition de v , ce chemin ne passe que par des noeuds de S_{i-1} . Du coup, on sait que $d(u_0, v) = \ell(v)$. Comme les arêtes sont de poids positifs, on a $\ell(v) = d(u_0, v) \leq d(u_0, u_i)$. Mais comme on a pris u_i tel que $\ell(u_i) = \min_{u \in \bar{S}_{i-1}} \ell(u)$, on a $\ell(u_i) \leq \ell(v)$. Dès lors $\ell(u_i) \leq d(u_0, u_i)$, ce qui est absurde car on a supposé le contraire.

- Commençons par montrer que $\ell(v) \geq d(u_0, v)$. Les seuls, $\ell(v)$ qui changent à cette itération sont égaux à $\ell(u_i) + w(u_i, v)$. On remarque que c'est la longueur du chemin composé du plus court chemin de u_0 à u_i et de l'arête de u_i à v . Par la définition de $d(u_0, v)$, on a donc nécessairement l'inégalité voulue.

Pour le dernier point, par l'hypothèse de récurrence, on sait que $\ell(v)$ est la longueur du plus court chemin de u_0 vers v pour tout noeud de S_{i-1} . Pour que ce soit vrai pour tout noeud de S_i , il reste à considérer les chemin passant par u_i . De tout ces chemins (de u_0 à v passant par u_i et dont les noeuds internes sont dans S_i), il ne faut garder que le chemin constitué du plus court chemin de u_0 vers u_i et de l'arête $u_i v$ parce que les autres chemins candidats ne sont pas des plus courts chemins. En effet, comme u_i est le dernier noeud à avoir été ajouté à S_i , u_i est le noeud le plus éloigné de u_0 ce qui veut dire que u_i n'est jamais sur un plus court chemin vers un noeud de S_i (mis à part celui vers u_i bien sûr). La longueur de ce chemin est $\ell(u_i) + w(u_i, v)$. Le plus court chemin vers v passe donc soit uniquement par S_{i-1} (longueur $\ell(v)$ calculée à l'itération précédente) soit le chemin passant par u_i (longueur $\ell(u_i) + w(u_i, v)$), ce qui correspond à la mise à jour $\ell(v) \leftarrow \min(\ell(v), \ell(u_i) + w(u_i, v))$.

□

Corollaire 2.9 (L'algorithme de Dijkstra est correct). L'algorithme de Dijkstra est correct.

Théorème 2.10 (L'algorithme de Dijkstra est quadratique). L'algorithme de Dijkstra sur un graphe se termine en un temps de l'ordre n^2 , on note que le temps est $\mathcal{O}(n^2)$.

Démonstration.

- Au début $|\bar{S}| = n - 1$ et à chaque passage de boucle $|\bar{S}|$ décroît de 1. Ce qui implique n itérations.
- A chaque itération, l'instruction " $\forall v \in \bar{S}$ " fait $\mathcal{O}(n - |S|)$ opérations ; ensuite "trouver v_{\min} " fait $\mathcal{O}(n - |S|)$ opérations également.
- Le nombre d'opérations total est donc $2n + 2(n - 1) + \dots + 2(1)$. Cela implique un temps total (on oublie les constantes multiplicatives) $\mathcal{O}(n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1) = \mathcal{O}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \mathcal{O}(n^2)$.

□

Rappelons le sens de la notation $\mathcal{O}(\cdot)$. Soient deux fonctions f et g des entiers vers les réels. On dit que $f \in \mathcal{O}(g)$ s'il y a des constantes n_0 et c telles que $|f(n)| \leq cg(n)$ pour tout $n \geq n_0$. Par exemple $2n^3 \in \mathcal{O}(n^3 + 10n^2)$, ou $n \log n \in \mathcal{O}n^2$. On généralise aisément aux fonctions de plusieurs variables entières, par exemple $n + m \in \mathcal{O}nm$.

Les temps de calcul d'un algorithme sont ici toujours considérés au pire, pour l'instance de taille donnée la plus défavorable.

Définition 2.11. Un algorithme travaillant sur un graphe $G = (V, E, \varphi)$ avec $|V| = n$, $|E| = m$ est un *algorithme efficace* si il possède un temps d'exécution borné par un polynôme, donc en $\mathcal{O}(P(n, m))$ pour un certain polynôme P . L'algorithme de Dijkstra est un exemple d'algorithme efficace, avec $P(n, m) = n^2$.

2.3 Anneaux et Semi-anneaux

Définition 2.12. Un *semi-anneau* est un ensemble muni de deux opérations (\oplus, \otimes) et leur propriétés habituelles.

Définition 2.13. Un *anneau* est un ensemble muni de trois opérations $(\oplus, \otimes, \ominus)$ et leur propriétés habituelles.

Définition 2.14. Un *corps* est un ensemble muni de quatre opérations $(\oplus, \otimes, \ominus, \oslash)$ et leurs propriétés habituelles.

Par exemple, une de ces propriété est la distributivité :

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

On peut définir une somme et un produit matriciels dont les entrées sont dans le semi-anneau :

$$A \oplus B = (a_{ij} \oplus b_{ij})_{ij} \tag{1}$$

$$A \otimes B = \left(\sum_k a_{ik} \otimes b_{kj} \right)_{ij} \tag{2}$$

Les matrices munies de ces opérations forment à leur tour un semi-anneau.

Prenons, sur les réels (augmentés de l'infini), $\oplus = \min$ et $\otimes = +$. Le neutre de min est ∞ et celui de $+$ est 0 donc

$$I = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \dots & \infty \\ \infty & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \infty \\ \infty & \dots & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

En prenant A tel que $a_{ij} = w(i, j)$, en comptant $w(i, j) = \infty$ (longueur infinie) partout où il n'y a pas d'arêtes, la matrice A^k a pour élément ij la longueur du plus court parcours à k arêtes de i vers j : cela se démontre aisément par induction sur k . Si on ajoute des boucles de poids nul sur le graphe, autrement dit on considère la matrice de poids $I \oplus A$, alors $(I \oplus A)^{\otimes k}$ encode les plus courts chemins de longueur au plus k . Comme tout chemin est au plus de n noeuds dans un graphe à n noeuds, la matrice des plus courts chemins entre chaque paire de noeuds est donnée par

$$(I \oplus A)^{\otimes n}.$$

Pour calculer cette matrice, on peut effectuer n multiplications matricielles successives, chacune s'effectuant (suivant l'application naïve de la définition) en n^3 opérations. On arrive donc à n^4 opérations. Plus efficace est d'élever la matrice $I \oplus A$ au carré $\log_2 n$ fois de suite, aboutissant ainsi à $n^3 \log n$. C'est un peu moins bon que l'application de l'algorithme de Dijkstra sur chaque noeud (n^3).

Mais le semi-anneau $(\min, +)$ possède des propriétés intéressantes, dont l'idempotence : $a \oplus a = a$ pour tout a . Ces propriétés, utilisées de manière ingénieuse, permettent de court-circuiter certains calculs de la multiplication et d'obtenir une complexité en $n^3 / \log n$ (Timothy M Chan 2005), ou même moins. Ceci est la manière la plus efficace de calculer toutes les distances dans un graphe.

3 Arbres et connectivité

Dans ce chapitre il est important de noter que tous les graphes sont non-dirigés, pas nécessairement simples (les arêtes multiples et les boucles sont autorisées), sauf spécification contraire. La théorie des arbres et de la connectivité pour les graphes dirigés est beaucoup moins univoque : on peut généraliser les concepts et résultats au cas dirigé de plusieurs manières et ceci n'est pas traité dans ce cours.

3.1 Arbres

Définition 3.1. Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle. Une *forêt* est un graphe sans cycle.

Définition 3.2. Un *sous-graphe sous-tendant* ou *couvrant* d'un graphe G est un sous-graphe qui contient tous les sommets de G .

Théorème 3.3 (Arbres sous-tendants). Tout graphe connexe contient un arbre sous-tendant.

Démonstration. Parmi tous les sous-graphes sous-tendants connexes, on choisit un sous-graphe *minimal pour l'inclusion* dans cet ensemble (*minimal pour l'inclusion* = si j'enlève n'importe quelle arête, alors je perds la connexité). Je prétends que c'est un arbre sous-tendant :

- *Connexe* : par construction
- *Sans cycle* : supposons un cycle. Soit $e = uv$ une arête quelconque de ce cycle. Si on enlève e , le graphe est toujours connexe (en effet, pour tout parcours $x \rightarrow uev \rightarrow y$, on peut remplacer e par le reste du cycle dont e faisait partie). Il y a contradiction, donc il n'y pas de cycle.

□

Théorème 3.4 (Caractérisations des arbres). Soit G un graphe à n sommets et m arêtes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est connexe et sans cycle ;
2. G est sans cycle et $m = n - 1$;
3. G est connexe et $m = n - 1$;
4. G est connexe et supprimer une arête quelconque déconnecte G ;
5. G est sans cycle et ajouter une arête quelconque crée un et un seul cycle ;
6. Deux noeuds de G sont toujours reliés par un seul chemin.

La dernière condition implique, appliquée pour deux noeuds identiques, que G est sans boucle.

Démonstration. Nous allons démontrer que chaque condition implique la suivante, et la dernière la première. Ainsi il sera établi qu'elles sont toutes équivalentes.

— (1) \Rightarrow (2) :

Il faut juste prouver qu'un arbre (graphe connexe et sans cycle) a $m = n - 1$ arêtes :

- D'abord, on prouve que tout arbre possède une feuille, c-à-d un nœud de degré 1. Tous les nœuds ont un degré ≥ 1 (par connexité, s'il y a au moins deux nœuds). Supposons que tous les nœuds aient un degré au moins 2. Alors, partant d'un nœud on peut créer un parcours sans jamais rebrousser chemin (chaque fois qu'on visite un nœud pour la première fois, on peut sortir par une autre arête), jusqu'à revenir à un nœud déjà visité. Cela implique qu'on peut extraire un cycle, d'où contradiction. Tout arbre possède donc au moins une feuille.
- On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1, m = 0$: on a bien $m = n - 1$. Pour tout arbre de $n + 1$ nœuds on trouve une feuille x . En enlevant x et son arête, on obtient un nouvel arbre de n nœuds (on a supprimé un nœud) et $n - 1$ arêtes (par hypothèse de récurrence). Donc l'arbre de $n + 1$ nœuds avait bien n arêtes.

— (2) \Rightarrow (3) :

Un graphe sans cycle de $m = n - 1$ arêtes est-il connexe ?

Supposons qu'il y ait éventuellement plusieurs composantes connexes, de n_i nœuds et m_i arêtes. Sur chacune, on peut appliquer (1) \Rightarrow (2) (puisque chaque composante est connexe et sans cycle). Donc, pour toute composante connexe i : $m_i = n_i - 1$. Sommons maintenant sur l'ensemble des composantes connexes, et l'on obtient $m = \sum_i m_i = \sum_i n_i - \# \text{composantes connexes} = n - \# \text{comp. conn.}$ qui doit être égal à $n - 1$ par hypothèse. Donc il n'y a qu'une seule composante connexe.

— (3) \Rightarrow (4) :

Soit G un graphe connexe de $m = n - 1$ arêtes.

Supprimer une arête de G déconnecte-t-il le graphe ? Supposons par l'absurde qu'en enlevant une arête e à G , le graphe résultant $G - e$ reste connexe. Par le théorème précédent, dans $G - e$ (connexe), il y a un arbre sous-tendant. Par (1) \Rightarrow (2), cet arbre a $n - 1$ arêtes. Donc $G - e$ a au moins $n - 1$ arêtes. Donc G a au moins n arêtes, d'où contradiction avec l'hypothèse $m = n - 1$.

— (4) \Rightarrow (5) :

Soit G connexe, déconnecté par tout retrait d'une arête.

Est-il bien sans cycle ? S'il y avait un cycle, on pourrait supprimer une arête de ce cycle et maintenir la connexité, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Il n'y a donc pas de cycle.

Vérifions qu'ajouter une arête quelconque crée un et un seul cycle :

- D'abord, on prouve qu'il existe un cycle. Ajoutons une arête e entre les noeuds u et v . Par connexité, il existe un chemin $C = u \dots v$. Donc $\underbrace{u \dots v}_C eu$ est un cycle.
- Ensuite, on prouve que c'est le seul cycle. Supposons qu'on ait obtenu au moins 2 cycles C_1, C_2 en ajoutant e . Alors on a un parcours fermé $u \dots v \dots u$ dans G (en adjoignant $C_1 - e$ à $C_2 - e$), dont on peut extraire un cycle dans G , ce qui est une contradiction.

— (5) \Rightarrow (6) :

Soit G sans cycle et muni d'un et un seul cycle par tout ajout d'arête. Soit deux noeuds u et v . Supposons qu'il existe deux chemins $P_1 = u \dots v$, $P_2 = u \dots v$, alors $u \dots v \dots u$ est un parcours fermé dont on peut extraire un cycle, contradiction. Il y a donc au plus un chemin $u \rightarrow v$. En ajoutant une arête e entre u et v , par hypothèse je crée un cycle C . Cela implique que $C - e$ est un chemin $u \rightarrow v$. Il y a donc bien un chemin entre deux noeuds de G et c'est le seul.

— (6) \Rightarrow (1) :

Soit G un graphe qui trace un et un seul chemin entre toute paire de noeuds. Il est donc connexe. Est-il sans cycle ? Supposons qu'il existe un cycle. Soient x et y deux noeuds distincts dans ce cycle. Le cycle donne deux chemins $x \rightarrow y$, en contradiction avec l'hypothèse. Il n'y a donc pas de cycle.

□

Définition 3.5. Soit $G = (V, E, \varphi)$ un graphe et soit $e = (u, v)$ une arête de G . On définit les opérations suivantes sur G :

- *Suppression d'arête.* On définit $G - e = (V, E \setminus \{e\}, \varphi)$ comme le graphe obtenu en supprimant l'arête e de G .
- *Contraction d'arête.* On définit $G.e = (V \setminus \{u, v\} \cup \{w\}, E \setminus \{e\}, \varphi')$ comme le graphe obtenu en contractant l'arête e de G , où φ' est obtenu à partir de φ en remplaçant chaque occurrence des sommets u et v par w . En d'autres termes, les sommets u et v sont remplacés par un sommet w qui reprend toutes leurs arêtes initiales, à l'exception de e qui est retirée du graphe.

Théorème 3.6 (Formule de Cayley). Soit $T(G)$ le nombre d'arbres sous-tendants de G , et e une arête quelconque de G , qui n'est pas une boucle. Alors $T(G) = T(G - e) + T(G.e)$.

Démonstration. On divise les arbres sous-tendants de G en deux catégories

- a) ceux qui ne contiennent pas l'arête e ;
- b) ceux qui contiennent l'arête e .

On compte chaque catégorie :

- On voit que les arbres de $a)$ sont en bijection avec les arbres sous-tendants de $G - e$. En effet un arbre sous-tendant de G qui ne contient pas e reste un arbre sous-tendant de $G - e$ et inversement.
- On voit que les arbres de $b)$ sont en bijection avec les arbres sous-tendants de $G.e$. L'argument est similaire : tout arbre A sous-tendant de G qui contient e engendre un arbre $A.e$ sous-tendant de $G.e$ et réciproquement, tout arbre sous-tendant de $G.e$ correspond à un arbre sous-tendant de G qui contient e .

On a donc $T(G) = T(G - e) + T(G.e)$. □

Le théorème suivant est admis sans démonstration :

Théorème 3.7 (Théorème de Cayley). Le nombre d'arbres sous-tendants du graphe complet à n noeuds est n^{n-2} .

Exemple 3.8 (Application de la formule de Cayley).

$$\begin{aligned}
 T(\square) &= T(\sqcup) + T(\wp) \\
 &= T(\sqcup) + T(\triangle) + T(\wp) + T(\wp) \\
 &= 1 + T(\triangle) + T(\wp) + T(\wp) + T(\wp) + 2 \\
 &= 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 \\
 &= 8.
 \end{aligned}$$

On notera que la contraction génère quelque fois des boucles, qui n'ont pas été représentées ici car elles n'interviennent dans aucun arbre.

3.2 Arbre sous-tendant de poids minimum

Un problème courant concernant les arbres est le calcul de l'arbre sous-tendant de poids minimum dans un graphe connexe. Si tous les poids sont positifs, cela revient à chercher le sous-graphe sous-tendant de poids minimum. Par exemple, on pourrait chercher le réseau téléphonique le moins cher possible permettant de connecter une série de stations.

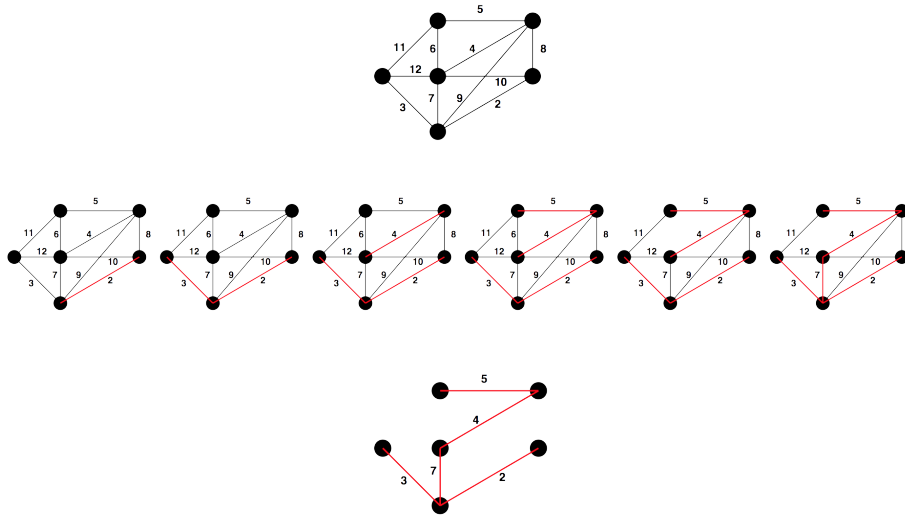
L'algorithme de Kruskal (1956), 3.9 ci-dessous, permet de calculer efficacement cet arbre. Cet algorithme d'une simplicité surprenante car il s'agit d'un algorithme glouton, c'est-à-dire qui opère une série de choix basés l'impact immédiat sur la fonction objective, sans jamais les remettre en cause. A chaque étape, l'algorithme considère l'arête la moins chère non-encore explorée. Si cette arête ne crée pas de cycle avec les arêtes déjà choisies, celle-ci est définitivement ajoutée à l'arbre en construction.

Exemple 3.10 (Exécution de l'algorithme de Kruskal). On cherche l'arbre sous-tendant de poids minimum de :

Algorithme 3.9 (Algorithme de Kruskal).

#Entrée : graphe connexe pondéré

#Sortie : T , arbre sous-tendant de poids minimum $E_{\text{trié}} \leftarrow E$ trié en ordre croissant**while** $|T| < |V| - 1$ [#Invariant : T est une forêt] **do** $e \leftarrow$ première arête de E_s $E_{\text{trié}} \leftarrow E_{\text{trié}} \setminus \{e\}$ **if** e ne crée pas de cycle **then** $T \leftarrow T \cup \{e\}$ **end if****end while**



On montre à présent que malgré sa simplicité, l'algorithme de Kruskal fournit toujours un arbre de recouvrement de poids minimal.

Prouvons d'abord un petit lemme qui encapsule l'argument fondamental de la preuve de correction de l'algorithme de Kruskal, mais aussi de l'algorithme de Prim, expliqué juste après.

Lemme 3.11. Soit F un ensemble d'arêtes du graphe connexe pondéré G , qui peut être étendu en un arbre sous-tendant de poids minimum (autrement il y a un arbre sous-tendant de poids minimum qui contient F , en particulier F est une forêt). Soit encore une partition des noeuds V en plusieurs classes non vides V_1, V_2, \dots , et C la coupe d'arêtes associée — c.-à-d. l'ensemble des arêtes entre deux classes V_i et V_j différentes — que l'on suppose disjointe de F . Soit encore $e \in C$ une arête de poids minimum parmi les arêtes de C . Alors $F \cup \{e\}$ peut également être étendu en un arbre sous-tendant de poids minimum.

Démonstration. Soit T un arbre sous-tendant de poids minimum qui contient F . Si $e \in T$ alors la conclusion est trivialement vraie : $F \cup \{e\}$ est étendue par T . Si $e \notin T$ alors je considère $T + e$, qui possède un unique cycle. Ce cycle passe nécessairement par une arête (au moins, en plus de e) de C qui relie deux composantes connexes de $G - C$, puisqu'il relie une extrémité de e qui est dans V_1 à l'autre extrémité, qui est dans V_2 . Soit $f \in C$ une telle arête. On voit que $T + e - f$, qui n'a plus de cycle (en enlevant f on brise l'unique cycle de $T + e$) et a le même nombre d'arêtes que T , est également un arbre sous-tendant. Puisque e est de poids $w(e) \leq w(f)$ (par définition de e ; on note $w(\cdot)$ la fonction de poids), et que $w(T) \leq w(T + e - f)$ (par définition de T , de poids minimum), on a que $w(e) = w(f)$. Donc $T + e - f$ est également un arbre sous-tendant de poids minimum, qui étend $F \cup \{e\}$. \square

Théorème 3.12. L'algorithme de Kruskal est correct.

Démonstration. On démontre par induction qu'à tout moment l'ensemble des arêtes découvertes peut être étendu en un arbre sous-tendant de poids minimum du graphe connexe pondéré G sur lequel on applique l'algorithme. C'est trivialement le cas au début de l'algorithme, quand l'ensemble des arêtes découvertes est vide. Ensuite, tant que les arêtes découvertes ne forment pas un arbre sous-tendant, on applique le lemme 3.11 ci-dessus, avec F l'ensemble de tous les noeuds du graphe et des arêtes découvertes, et C l'ensemble des arêtes du graphe qui relient deux arbres de F (les classes de noeuds V_i sont donc les composantes connexes de F). L'algorithme ajoute alors l'arête e de poids minimum de C qui relie deux composantes connexes de F . Le nouvel ensemble d'arêtes découvertes peut donc bien être étendu en un arbre sous-tendant de poids minimal. A la dernière étape, on a donc bien un arbre sous-tendant de poids minimal. \square

Théorème 3.13 (L'algorithme de Kruskal est efficace). L'algorithme de Kruskal requiert un temps de calcul de l'ordre de $\mathcal{O}(m \log(m))$ sur un graphe à m arêtes.

Démonstration. On doit commencer par trier les arêtes du graphe ce qui se fait en $\mathcal{O}(m \log(m))$ avec un algorithme efficace.

Savoir si ajouter une arête crée un cycle se fait en $\mathcal{O}(\log(m))$, et même beaucoup moins en moyenne, à condition d'utiliser la bonne structure de données pour retenir les arêtes déjà sélectionnées par l'algorithme. Quoique la description complète dépasse le cadre de ce cours, on peut en donner ici une description générale à toutes fins pratiques. A tout moment l'ensemble des arêtes déjà sélectionnées est une forêt. On retient pour chaque noeud dans quelle composante connexe de la forêt il se trouve. Une arête crée un cycle si et seulement si ses deux extrémités sont dans la même composante connexe, il faut donc être capable de trouver ('Find') rapidement dans quelle composante connexe ces deux noeuds se trouvent. Si une arête joint deux

composantes connexes différentes, alors on admet l'arête et on fusionne les deux composantes connexes en une seule ('Union').

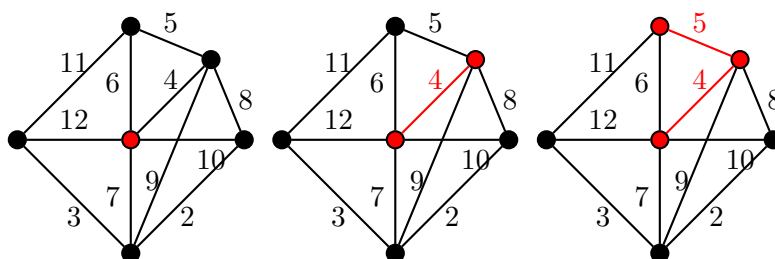
On utilise donc une structure de données dite 'Union-Find' (ou 'ensembles disjoints', car les éléments sont répartis en ensemble disjoints). C'est une structure de donnée qui enregistre une partition d'un ensemble donné. Les classes de la partition sont désignées par un représentant de la classe (élément arbitrairement choisi pour jouer ce rôle). Une opération de base est la fusion de deux classes en une seule (Union). Une autre est de vérifier à quelle classe appartient un élément donné (Find). Une troisième consiste à ajouter un nouvel élément à l'ensemble, qui forme sa propre classe-singleton (MakeSet).

Ici, à partir d'une structure de données vide, on peut créer une partition de tous les noeuds en autant de classes-singletons (n opérations MakeSet) ; à tout moment de l'algorithme, les classes de la partition encodent les noeuds reliés par un même arbre. Ensuite pour vérifier si une arête doit être ajoutée, on vérifie comme on a dit si les deux extrémités appartiennent au même arbre (deux opérations Find). Si on ajoute l'arête à la forêt, on fusionne les classes contenant les noeuds présents dans les arbres reliés par cette arête (une opération Union).

Quelle est la complexité de ces opérations ? Par une implémentation astucieuse de ces opérations, une suite des N opérations élémentaires en partant d'une structure vide peut être effectuées en temps $N\mathcal{O}(\alpha(N))$. Ici la fonction $\alpha(N)$ est une fonction qui croît indéfiniment en fonction de N bien plus lentement que $\log N$, en fait si lentement qu'on peut considérer qu'en pratique elle est bornée par 5, par exemple. Pour l'anecdote c'est la réciproque de la fonction $f(n) = A(n, n)$ d'Ackermann, construite par ce dernier pour donner un exemple de fonction de croissance extrêmement rapide. Dans notre cas, on vérifie donc que la difficulté principale de l'algorithme est la phase de tri des arêtes. \square

Mentionnons encore l'algorithme de Prim (1957) fait croître un arbre (non-sous-tendant, sauf à la dernière étape) de proche en proche à partir d'un noeud arbitraire, en ajoutant toujours l'arête la plus légère pour ce faire, jusqu'à atteindre tous les noeuds.

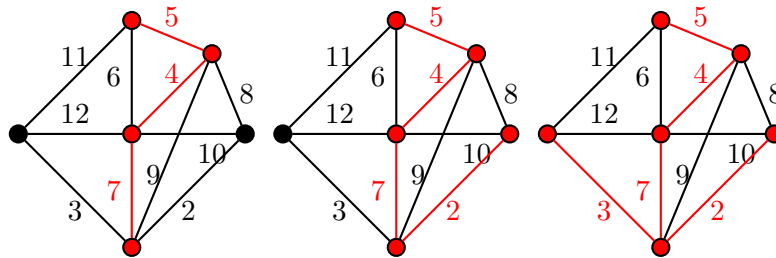
Exemple 3.15 (Exécution de l'algorithme de Prim). On cherche l'arbre sous-tendant de poids minimum de :



Algorithme 3.14 (Algorithme de Prim).

#Entrée : un graphe connexe pondéré

#Sortie : T un arbre sous-tendant de poids minimum $T \leftarrow$ noeud arbitraire et pas d'arête**while** T non-sous-tendant [#Invariant : T est un arbre] **do** $e \leftarrow$ arête la plus légère avec exactement une extrémité dans T $x \leftarrow$ extrémité de e qui n'est pas dans T $T \leftarrow x$ et e **end while**



On voit sans peine qu'à la sortie de l'algorithme l'ensemble de noeud et d'arêtes T est bel et bien un arbre sous-tendant. Qu'il soit bien de poids minimal se prouve de façon très semblable à l'algorithme de Kruskal, en utilisant le lemme ci-dessus.

Théorème 3.16. L'algorithme de Prim est correct.

Démonstration. On démontre par induction qu'à tout moment l'ensemble des arêtes découvertes peut être étendu en un arbre sous-tendant de poids minimum du graphe connexe pondéré G sur lequel on applique l'algorithme. C'est trivialement le cas au début de l'algorithme, quand l'ensemble des arêtes découvertes est vide. Ensuite, tant que les arêtes découvertes ne forment pas un arbre sous-tendant, on applique le lemme 3.11, avec F l'ensemble des arêtes découvertes et les noeuds incidents (qui forment un arbre non-sous-tendant), et C l'ensemble des arêtes du graphe qui ont exactement une extrémité incidente à F (donc V_1 est la classe des noeuds déjà découverts et V_2 les autres noeuds du graphe). Alors l'algorithme ajoute précisément l'arête de C la plus légère à F , formant ainsi un nouvel arbre qui peut être étendu à un arbre sous-tendant de poids minimum. A la fin, on a donc bien un arbre sous-tendant de poids minimum. \square

Quant à la complexité, elle dépend de l'implémentation. Une implémentation adéquate requiert la structure de données dite "file de priorité" pour encoder les noeuds et trouver commodément le prochain noeud à ajouter au graphe. Une file de priorité peut elle même être implémentée de façons diverses : avec un "tas de Fibonacci" on atteint une complexité de

$\mathcal{O}(m + n \log n)$, pour un graphe de m arêtes et n noeuds. C'est mieux que l'algorithme de Kruskal, néanmoins avec une importante constante cachée, qui est le talon d'Achille des tas de Fibonacci. Avec un "tas binaire" (qui intervient également dans le célèbre "tri par tas") on obtient $\mathcal{O}(m \log n)$ ce qui est théoriquement moins bon que le tas de Fibonacci pour des graphes denses, et essentiellement équivalent à la complexité de l'algorithme de Kruskal.

Il y a encore d'autres algorithmes de recherche d'arbre sous-tendant de poids minimal. Citons le plus ancien : celui de Borůvka (1926), et un des plus récents : celui de Chazelle (2000), qui fonctionne en temps quasi-linéaire $\mathcal{O}(m\alpha(m))$ (voir la preuve de complexité de l'algorithme de Kruskal pour l'explication de $\alpha(m)$).

Citons encore le théorème suivant pour vérifier qu'un arbre sous-tendant donné est de poids minimum.

Théorème 3.17. Soit T un arbre sous-tendant d'un graphe connexe pondéré. Alors T est un arbre sous-tendant de poids minimum si et seulement si toute arête e qui n'est pas dans T est au moins aussi lourde que chaque arête de l'unique cycle de $T + e$.

Démonstration. $\boxed{\implies}$ Nous supposons, par contraposition, que la conclusion n'est pas vérifiée : il existe une arête e hors de l'arbre sous-tendant T , et une arête e' de T qui est sur le cycle unique de $T + e$ (autrement dit, sur le chemin unique de T qui rejoint les extrémités de e) telle que $w(e) < w(e')$ (où $w(\cdot)$ désigne la fonction de poids). Alors $T + e - e'$ est encore un arbre sous-tendant (en effet retirer e' de $T + e$ brise l'unique cycle de $T + e$ et a le même nombre d'arêtes que T , on a donc bien un arbre sous-tendant), et il est de poids $w(T) + w(e) - w(e') < w(T)$. Donc T n'est pas de poids minimum.

$\boxed{\impliedby}$ Nous supposons, par contraposition, que T n'est pas de poids minimum. Quoique T ne soit pas de poids minimum, certaines sous-forêts sous-tendantes de T , couvrant l'ensemble des noeuds de façon non-connexe, sont extensibles à un arbre sous-tendant de poids minimum. Par exemple il en va ainsi de la sous-forêt à 0 arête, composée de tous les noeuds du graphe isolés. On prend T_0 un élément maximum (pour la relation de sous-graphe) de cette famille. Autrement dit, T_0 est une forêt qui peut être étendue à un arbre sous-tendant de poids minimum, mais ce n'est pas le cas pour $T_0 + f$, quelle que soit l'arête $f \in T \setminus T_0$.

On applique à présent le lemme 3.11, pour la forêt $F = T_0$, et la coupe d'arêtes C composée de toutes les arêtes qui rejoignent deux arbres de F .

Par le lemme, pour toute arête parmi les plus légères de C , $T_0 + e$ peut être étendu en un arbre sous-tendant T^* de poids minimum. On en déduit aussi qu'aucune de ces arêtes les plus légères n'est dans T , par définition de T_0 .

On peut alors considérer $T + e$, qui possède un cycle qui doit contenir une arête f (autre que e) passant par deux arbres de T_0 . Cette arête $f \in T$ est strictement plus lourde que e , on l'a vu. Ceci contredit la conclusion. On a bien démontré l'implication, par contraposition. \square

En exploitant ce théorème, il est possible de vérifier en temps linéaire $\mathcal{O}(m)$ qu'un arbre sous-tendant donné est bien de poids minimum (Dixon-Rauch-Tarjan 1992, King 1995).

3.3 Connectivité

Les arbres sont typiquement les graphes connexes les moins résistants à la suppression d'arête ou de sommets dans la mesure où quelle que soit l'arête ou le sommet (de degré au moins deux) que l'on supprime, on déconnecte le graphe. La notion de connexité permet de définir la robustesse d'un graphe à ce type d'opérations. Voyons à présent comment elle se formalise.

Définition 3.18. Pour un graphe connexe, une *coupe de sommets* est un ensemble de sommets qui déconnecte le graphe quand on l'en retire.

Définition 3.19. Pour un graphe connexe, une *coupe d'arêtes* est un ensemble d'arêtes qui déconnecte le graphe quand on l'en retire.

Définition 3.20. Un graphe est dit *k-connexe* s'il possède au moins $k + 1$ noeuds et retirer $k - 1$ noeuds quelconques laisse le graphe connexe ; autrement dit, si toutes les coupes de sommets sont de taille au moins k .

Définition 3.21. La *connectivité* d'un graphe est la taille de la plus petite coupe de sommets. Si tous les n noeuds sont voisins deux à deux (ex., le graphe complet), la connectivité est définie comme $n - 1$.

Notons que le graphe complet est le seul graphe simple dont tous les noeuds sont voisins deux à deux ; la définition s'applique aussi aux graphes non simples.

Définition 3.22. Un graphe est dit *k-arête-connexe* si son arête-connectivité est d'au moins k ; autrement dit, si retirer $k - 1$ arêtes quelconques laisse le graphe connexe.

Définition 3.23. L'*arête-connectivité* d'un graphe est la taille de la plus petite coupe d'arêtes.

Théorème 3.24 (Whitney 1932).

$$\text{connectivité} \leq \text{arête-connectivité} \leq \text{degré minimum}$$

Démonstration.

$$\text{arête-connectivité} \leq \text{degré minimum}$$

Une façon de déconnecter un graphe est de retirer les arêtes incidentes au noeud de degré minimum.

$$\text{connectivité} \leq \text{arête-connectivité}$$

Soit S une coupe minimum de k arêtes, qui sépare les noeuds en deux ensembles V_1 et V_2 . Epuisons tous les cas possibles :

- S'il y a un noeud $v_1 \in V_1$ qui n'est pas incident à S , alors je peux retirer toutes les extrémités de S dans V_1 (il y en a au plus k), ce qui déconnecte v_1 de V_2 : on a donc trouvé une coupe de k noeuds ou moins.
- De même s'il y a un noeud $v_2 \in V_2$ qui n'est pas incident à S .
- Si au contraire S atteint tous les noeuds du graphe alors on prend un noeud arbitraire $v_1 \in V_1$. S'il est incident à (disons) d arêtes de S , alors il y a au plus $k - d$ autres noeuds dans V_1 , atteints par les $k - d$ arêtes de S qui ne sont pas incidentes à v_1 . Le nombre total de voisins de v_1 (dans V_2 et dans V_1) est donc au plus $d + (k - d) = k$. Si v_1 et ses voisins ne constituent tout le graphe alors il y a un noeud v_2 non voisin de v_1 , et supprimer ces k voisins au plus isole donc v_1 de v_2 : on a trouvé une coupe de noeuds de k noeuds au plus. Si v_1 et ses voisins ne constituent tout le graphe, alors on applique l'argument ci-dessus à un autre noeud qui n'est pas voisin de tous les noeuds du graphe. Si un tel noeud n'existe pas, alors tous les noeuds (au plus $k + 1$) sont voisins les uns des autres : dans ce cas par convention la connectivité est au plus k . On a bien couvert toutes les situations possibles.

□

On fait à présent le lien entre la connectivité et l'existence de multiples chemins entre chaque paire de noeuds. On commence par une version particulière du théorème de Menger pour lequel il existe une jolie preuve par induction.

Théorème 3.25. Un graphe à au moins trois noeuds est 2-connexe ssi toute paire de noeuds distincts est reliée par au moins deux chemins dont les noeuds internes sont distincts.

Démonstration. ⇐ Si je retire un noeud quelconque du graphe, pour toute paire de noeuds u, v au plus un des deux chemins joignant u à v est affecté donc G reste connexe.

\Rightarrow Il faut trouver deux chemins disjoints par les noeuds entre toute paire de noeuds distincts u, v . On procède par induction sur la distance (nombre d'arêtes du plus court chemin) $d(u, v)$ entre les deux noeuds :

- Cas de base : $d(u, v) = 1$, càd u et v sont adjacents. Ici on a un chemin trivial, composé d'une seule arête e entre u et v . Ce chemin n'a pas de noeud intérieur, donc il suffit à présent de vérifier qu'il existe un autre chemin. Si G est 2-connexe alors G est 2-arête-connexe (cf. théorème précédent) donc retirer une arête laisse le graphe connexe. En particulier si je retire l'arête e (le premier chemin entre u et v), il reste un second chemin entre u et v .
- Si la conclusion recherchée est vraie pour toute paire de noeuds x, y tels que $d(x, y) < d(u, v)$, prouvons qu'elle est également vraie pour u et v . Soit w , le dernier noeud sur le plus court chemin de u à v . Par hypothèse, $d(u, w) < d(u, v)$ et par récurrence, u et w sont reliés par au moins 2 chemins dont les noeuds internes sont distincts, nommons-les P_1 et P_2 . Si je retire w , il existe, par 2-connexité, un chemin P de u à v qui ne passe donc pas par w . Soit x le dernier noeud de P qui appartient à P_1 ou à P_2 (éventuellement, $x = u$). Disons que x se trouve en fait sur P_1 . Il existe donc 2 chemins de u à v : uQ_1xQ (où Q_1 est le morceau de P_1 qui va de u à x , et Q est le morceau de P qui va de x à v) , et uP_2wv . Par construction, ces chemins sont disjoints.

□

Ce théorème se généralise :

Théorème 3.26 (Théorème de Menger, 1927). Un graphe à au moins $k + 1$ noeuds est k -connexe ssi toute paire de noeuds distincts est reliée par au moins k chemins dont les noeuds internes sont distincts.

Nous acceptons ce théorème sans preuve mais on peut dire qu'une preuve possible passe par la version de ce théorème pour les arêtes.

Théorème 3.27 (Théorème de Menger pour les arêtes, 1927). Un graphe à au moins $k + 1$ noeuds est k -arête-connexe ssi toute paire de noeuds distincts est reliée par au moins k chemins dont les arêtes sont distinctes.

Ce théorème s'appuie lui-même sur le théorème d'égalité entre flot maximum et coupe minimum, démontré dans un autre chapitre. En réalité il le précède historiquement, et le théorème sur flot et coupe s'est construit comme une généralisation de celui de Menger pour les arêtes.

Théorème 3.28 (Nombre d'arêtes dans un graphe k -connexe). Tout graphe k -connexe à n noeuds possède $kn/2$ arêtes au moins (condition nécessaire).

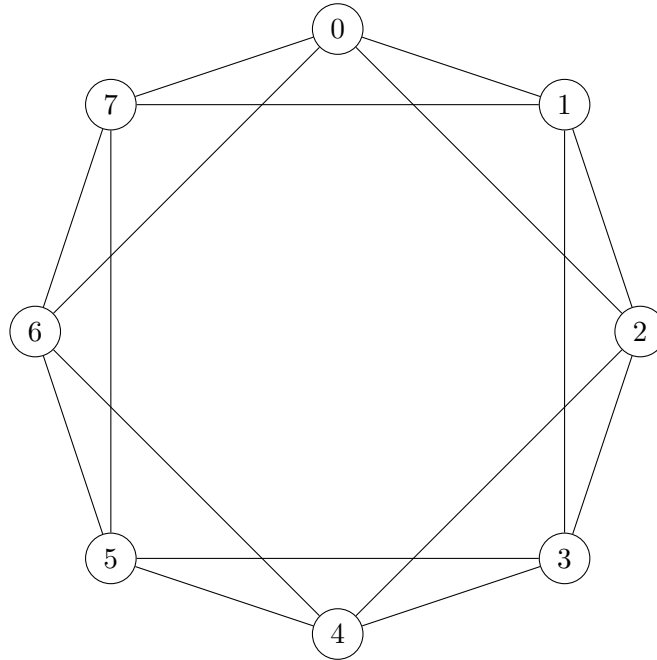
Démonstration. k -connexe \Rightarrow degré min $\geq k \Rightarrow \sum$ degrés $\geq kn \Rightarrow \#$ arêtes $\geq kn/2$. \square

Il existe une famille de graphes qui atteint cette borne : les graphes de Harary.

Théorème 3.29 (Théorème de Harary). Le graphe de Harary $H_{k,n}$ (pour k pair) possède $kn/2$ arêtes et est k -connexe. Ce graphe à n noeuds v_0, \dots, v_{n-1} est défini comme celui qui relie v_j à $v_{j+1}, \dots, v_{j+k/2}$ et à $v_{j-1}, \dots, v_{j-k/2}$, où les indices sont compris modulo n .

La construction existe aussi pour k impair, mais est plus compliquée.

Exemple 3.30. Le graphe de Harary $H_{4,8}$ de degré 4 a 16 arêtes et est 4-connexe :



4 Graphes hamiltoniens

Définition 4.1. Un *chemin* est *hamiltonien* s'il passe par chaque noeud du graphe une et une seule fois.

Définition 4.2. Un *cycle* est *hamiltonien* s'il passe par chaque noeud du graphe une et une seule fois.

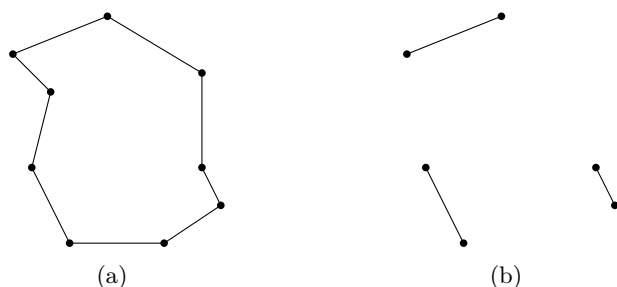
Définition 4.3. Un *graphe* est *hamiltonien* s'il possède un cycle hamiltonien.

Théorème 4.4 (Condition nécessaire pour un graphe hamiltonien). Si on ôte k noeuds quelconques d'un graphe hamiltonien, on obtient au plus k composantes connexes.

Démonstration. Soit $v_1 \dots v_n v_1$, le cycle hamiltonien.

Retirer k noeuds du cycle casse le cycle en au plus k chemins, et tous les noeuds sur un même chemin sont dans une même composante connexe. \square

Exemple 4.5. Le graphe suivant est bien hamiltonien.



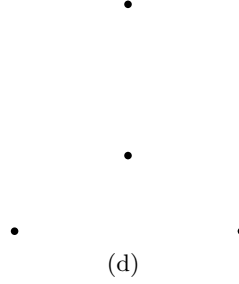
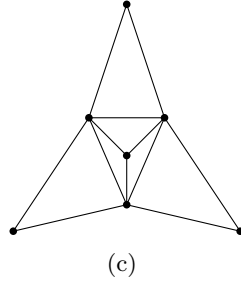
En retirant 3 noeuds du graphe g on obtient bien 3 composantes connexes dans le graphe h .

Par contre, ce graphe n'est pas hamiltonien. Pour le prouver, il suffit de supprimer les trois noeuds connectés au noeud central : on crée ainsi quatre composantes connexes. Par le théorème précédent, cela conclut la preuve.

Théorème 4.6 (Condition suffisante pour un graphe hamiltonien, Dirac 1952). Un graphe simple à $n \geq 3$ noeuds tel que le degré minimum est d'au moins $n/2$ est hamiltonien.

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe un graphe simple à $n \geq 3$ noeuds de degré minimum $d(v) \geq \frac{n}{2}$ non hamiltonien.

Prenons un tel graphe qui est maximal pour cette propriété, c'est-à-dire qu'ajouter n'importe quelle arête dans ce graphe le rendrait hamiltonien.



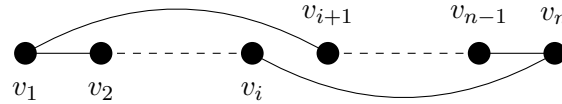
Ce graphe G n'est pas le graphe complet K_n , donc on peut trouver des noeuds, disons v_1 et v_n , non-adjacents. Comme ajouter l'arête v_1v_n crée un cycle hamiltonien (par propriété de maximalité), passant forcément par la nouvelle arête, il existe un chemin hamiltonien d'extrémité v_1 et v_n obtenu en retirant la nouvelle arête v_1v_n . Disons que ce chemin est $v_1v_2 \dots v_{n-1}v_n$.

Considérons les ensembles :

$$\begin{aligned} S &= \{v_i \mid v_{i+1} \text{ est adjacent à } v_1\} & |S| &= \text{degré}(v_1) \geq \frac{n}{2} \\ T &= \{v_i \mid v_i \text{ est adjacent à } v_n\} & |T| &= \text{degré}(v_n) \geq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

On sait que $v_n \notin S$, par hypothèse v_1 et v_n ne sont pas adjacents, et $v_n \notin T$. On a donc $|S \cup T| < n$ puisqu'aucun des ensembles ne contient v_n .

De plus, $S \cap T = \emptyset$: en effet, si $\exists v_i \in S \cap T$, alors $v_1v_2 \dots v_iv_nv_{n-1} \dots v_{i+1}v_1$ est un cycle hamiltonien.



Enfin, $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T| \geq n$ mais $|S \cup T| < n$: on a notre contradiction ! \square

Un problème particulièrement courant faisant intervenir les cycles hamiltonien est celui du voyageur de commerce.

Définition 4.7 (*Problème du voyageur de commerce*). Dans un graphe pondéré, trouver le parcours fermé le plus court qui passe par tous les noeuds au moins une fois.

L'analogue pour des arêtes se nomme le problème du postier chinois.

Définition 4.8 (*Problème du postier chinois*). Dans un graphe pondéré, trouver le parcours fermé le plus court qui passe par toutes les arêtes au moins une fois.

Notons qu'on connaît un algorithme efficace (en temps polynomial) pour résoudre le problème du postier chinois, mais pas pour celui du voyageur de commerce. . .

5 Mariages, couplages et couvertures

5.1 Couplage

Définition 5.1. Un *couplage* dans un graphe est un ensemble d'arêtes M tel que M ne contient pas de boucles et deux arêtes de M n'ont jamais d'extrémité en commun.

Définition 5.2. Un *couplage maximum* est un couplage dont le nombre d'arêtes est maximal.

Définition 5.3. Un *couplage parfait* est un couplage qui est incident à tous les noeuds.

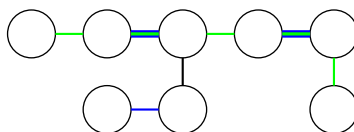
Remarque 5.4. Un couplage parfait, s'il existe, est maximum.

Définition 5.5. Pour un couplage M , un *chemin M -alterné* est un chemin qui passe alternativement par une arête de M et par une arête hors de M .

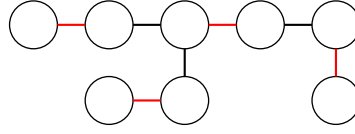
Définition 5.6. Un *chemin M -augmenté* est un chemin M -alterné dont les noeuds d'origine et de destination ne sont incidents à aucune arête de M .

Théorème 5.7 (Berge). Un couplage M est maximum si et seulement s'il n'y a pas de chemin M -augmenté.

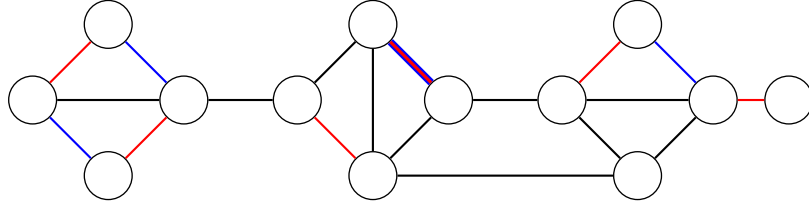
Démonstration. Preuve : \implies On montre la contraposée, qui s'énonce : s'il y a un chemin M -augmenté, alors M n'est pas maximum. Soit le couplage M , représenté en bleu sur la figure ci-dessous, et un chemin M -augmenté en vert que nous noterons P . Il faut donc montrer que M n'est pas maximum.



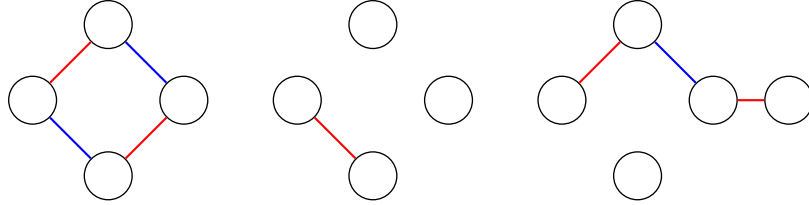
On construit l'ensemble d'arêtes $M' = M \Delta P$ où Δ indique une différence symétrique entre M et P (par définition, $M \Delta P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ indique la différence symétrique, ce sont donc les arêtes qui appartiennent à M ou à P mais pas aux deux). On vérifie aisément que M' est bien un couplage : tous les noeuds incidents à une arête de M sont incidents à une (et une seule) arête de M' , et les deux extrémités de P , qui n'étaient pas incidentes à M , sont maintenant chacune incidente à une arête de M' . Ce nouveau couplage est représenté en rouge. $|M'| = |M| + 1$. On voit bien que M n'est pas maximum.



\Leftarrow On procède à nouveau par contraposition : on montre que si M (représenté en bleu ci-dessous) n'est pas maximum, alors il y a un chemin M -augmenté. Soit M^* le couplage maximum (en rouge), avec $|M^*| > |M|$. On va construire un chemin M -augmenté.



Regardons $M \Delta M^*$, qui est composé des arêtes appartenant à M ou M^* mais pas les deux. Précisons tout de suite qu'en dehors de $M \Delta M^*$, les couplages M et M^* coïncident, par définition de $M \Delta M^*$. Donc dans $M \Delta M^*$, il y a strictement plus d'arêtes de M^* que d'arêtes de M .



On observe en outre que les noeuds dans $M \Delta M^*$ sont de degré 0, 1 ou 2. Les noeuds de degrés 2 ont une arête dans M et une arête dans M^* . Donc $M \Delta M^*$ est une union de noeuds isolés, chemins et cycles ; de plus les chemins et les cycles alternent les arêtes de M et les arêtes de M^* . Les cycles sont par conséquent de longueur paire, et comptent autant d'arêtes de M que de M^* . Il faut qu'il existe un chemin de longueur impaire qui commence et termine par une arête de M^* . On voit facilement que ce chemin est un chemin M -augmenté. En effet chaque extrémité de ce chemin est incidente à M^* , donc n'est pas incidente à d'autre arête de M^* (un couplage) dans le graphe, et donc n'est pas incidente à une arête de M , ni dans $M \Delta M^*$ (par choix du chemin), ni en dehors de $M \Delta M^*$ (où M et M^* coïncident). \square

Théorème 5.8 (Théorème du mariage ou de Hall). Un graphe biparti avec bipartition (X, Y) possède un couplage incident à tous les noeuds de X si et seulement si pour tout ensemble $S \subseteq X$, le nombre de voisins de S est au moins $|S|$.

Démonstration. Montrons les deux sens, l'un après l'autre.

\Rightarrow Un couplage M incident à tout $x \in X$ crée une fonction injective $f_M : X \rightarrow Y : x \mapsto y$ où y est le noeud associé à x dans le couplage M . On a $\forall S \subseteq X, f_M(S) \subseteq \text{Voisin}(S)$. Dès lors, $|\text{Voisin}(S)| \geq |f_M(S)| = |S|$.

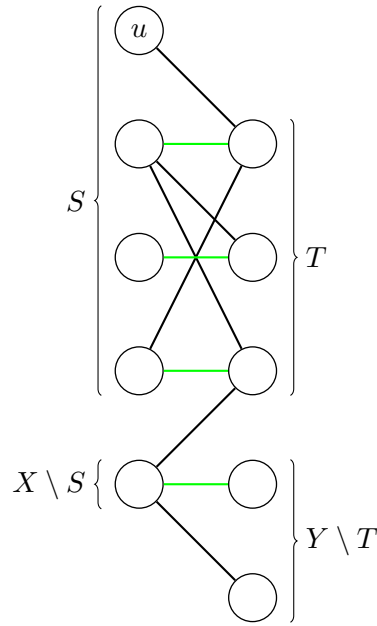
\Leftarrow Par contraposition, on suppose qu'il n'existe pas de couplage incident à tout X et on veut montrer qu'il existe un $S \subseteq X : |\text{Voisin}(S)| < |S|$.

Soit M le couplage maximum (en vert sur la figure ci-dessous) et $u \in X$ non incident à M . Prenons les chemins M alternés partant de u : Soit Z l'ensemble des noeuds ainsi rencontrés. $S = X \cap Z$, $T = Y \cap Z$. Notons que ces chemins M -alternés quittent toujours T vers S par une arête de M , et quittent toujours S vers T par une arête hors M .

On remarque que

- $\text{Voisin}(S) = T$ (par construction ; une arête entre S et $Y \setminus T$ ne peut être dans le couplage, et si elle est hors couplage elle constituerait un moyen de prolonger un chemin M -alterné, donc l'extrémité côté Y serait dans T également) ;
- M est incident à tout T , sinon on aurait un chemin M -augmenté — car un chemin alterné qui part de u et qui arrive finalement à $y \in T$ (via une arête hors M) peut toujours poursuivre par une arête de M , si M est bien incident à T , mais doit s'arrêter à y et constituer un chemin M -augmenté si M n'est pas incident à y ;
- M est incident à tout $S \setminus \{u\}$ par construction ;
- M crée une bijection entre $S \setminus \{u\}$ et T — car $f_M(S \setminus \{u\}) \subseteq T$ et $f_M(T) \subseteq S \setminus \{u\}$, où l'on se rappelle que f_M est injective.

On a dès lors $\text{Voisin}(S) = T$ d'où $|\text{Voisin}(S)| = |S| - 1 < |S|$.



□

Définition 5.9. Un graphe est k -régulier si tous les noeuds sont de degré k .

Corollaire 5.10 (du théorème de Hall). Tout graphe biparti k -régulier (pour $k > 0$) possède un couplage parfait.

Démonstration. Soit (X, Y) la bipartition d'un graphe biparti k -régulier. Le nombre d'arêtes est par le théorème des poignées de main $\frac{(|X|+|Y|)k}{2}$ mais aussi $|X|k$ (en comptant les arêtes incidentes à X , et elles le sont toutes bien sûr) et $|Y|k$ (arêtes incidentes à Y). Donc on voit que $|X| = |Y|$, pour $k > 0$.

Soit un ensemble $S \subseteq X$ quelconque, on définit

- $E_1 = \{\text{arêtes incidentes à } S\}$
- $E_2 = \{\text{arêtes incidentes à } \text{Voisin}(S)\}$

On remarque

- $E_1 \subseteq E_2$,
- $|E_1| = |S|k$,
- $|E_2| = |\text{Voisin}(S)|k$,

donc $|S| \leq |\text{Voisin}(S)|$

Donc le théorème de Hall s'applique : il existe un couplage incident à tout X . Ce couplage est parfait car $|X| = |Y|$. □

5.2 Couverture

Définition 5.11. Une *couverture de sommets* d'un graphe est un ensemble de sommets incident à toutes les arêtes.

Définition 5.12. Une *couverture de sommets minimum* d'un graphe est une couverture de sommets avec un nombre minimal de sommets.

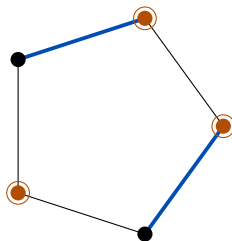
Lemme 5.13. Si K est une couverture de sommets et M un couplage, alors $|M| \leq |K|$.

Démonstration. Toute arête a une extrémité dans K , par définition de couverture de sommets. En particulier toute arête m de M a une extrémité $x_m \in K$ (si les deux extrémités de m sont dans K alors on nomme l'une d'elles x_m , au choix). L'application $M \rightarrow K : m \mapsto x_m$ est injective, par la définition de couplage. Donc $|M| \leq |K|$. \square

Lemme 5.14. Si K est une couverture de sommets, M un couplage et que $|M| = |K|$, alors K est minimum et M est maximum.

Démonstration. Soit M^* un couplage maximum et K^* une couverture minimum. Donc par le résultat précédent, $|M^*| \leq |K^*|$. En fait on peut écrire $|M| \leq |M^*| \leq |K^*| \leq |K|$. Par conséquent, si $|M| = |K|$ alors $|M| = |M^*| = |K^*| = |K|$. \square

Notons que le lemme fournit une condition suffisante et pas nécessaire. Par exemple, dans le graphe suivant, les noeuds indiqués en rouge forment couverture de sommets minimum K et les arêtes indiquées en bleu forment un couplage maximum M , or $|K| \neq |M|$.



Théorème 5.15 (König). Dans un graphe biparti, si K^* est une couverture de sommets minimum et M^* un couplage maximum, alors $|M^*| = |K^*|$.

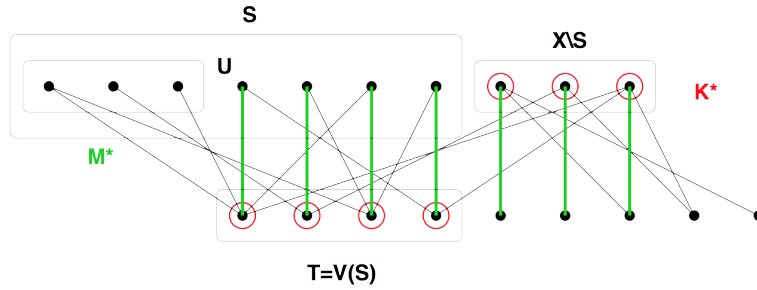
Démonstration. La preuve suit de très près les idées de la preuve du théorème de Hall ci-dessus. Soit un graphe biparti de bipartition (X, Y) et M^* un couplage maximum dans ce graphe. Soit U les noeuds qui ne sont pas incidents à M^* dans X . Soit Z l'ensemble des noeuds atteints par tous les chemins M^* -alternés partant de U . Soient encore

- $S = Z \cap X$
- $T = Z \cap Y$

Ces chemins M^* -alternés quittent toujours T vers S par une arête de M^* , et quittent toujours S vers T par une arête hors M^* . On remarque (comme dans la preuve du théorème de Hall) que

- $\text{Voisin}(S) = T$ (par construction);

- M^* est incident à tout T , sinon on aurait un chemin M^* -augmenté — car un chemin alterné qui part de U et qui arrive finalement à $y \in T$ (via une arête hors M) peut toujours poursuivre par une arête de M^* , si M^* est bien incident à M^* , mais doit s'arrêter à y et constituer un chemin M^* -augmenté si M^* n'est pas incident à y ;
- M^* est incident à tout $S \setminus U$ par construction;
- M^* crée une bijection entre $S \setminus U$ et T — car $f_{M^*}(S \setminus U) \subseteq T$ et $f_{M^*}(T) \subseteq S \setminus \{u\}$, où l'on se rappelle que f_{M^*} est injective.



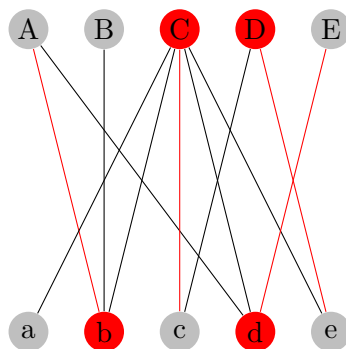
On choisit $K^* = T \cup (X \setminus S)$ et on va montrer que K^* est une couverture de sommets de même taille que $|M^*|$. On aura alors terminé car ceci suffit à montrer que K^* est une couverture minimum.

K^* est une couverture de sommets, autrement dit toutes les arêtes ont une extrémité dans K^* car si ce n'est pas le cas, on a une arête du graphe liant $(Y \setminus T)$ à S , or $\text{Voisin}(S) = T$ (contradictoire). On va montrer que K est une couverture minimale et qu'elle vérifie $|K^*| = |M^*|$.

Vérifions la taille de cette couverture : $|K^*| = |X \setminus S| + |T|$. Mais T est en bijection avec $S \setminus U$. Donc $|K^*| = |X \setminus S| + |S \setminus U| = |X \setminus U|$. Par définition $X \setminus U$ sont les noeuds de X atteints par M^* donc $|X \setminus U| = |M^*|$. \square

Notons que dans la preuve on n'a pas seulement montré qu'il existe une couverture minimum K^* telle que $|K^*| = |M^*|$, on a aussi vu comment on pouvait la construire connaissant M^* .

Exemple 5.16 (Problème du site de rencontres). Soit 5 filles (représentées par les noeuds A, B, C, D, E) et 5 garçons (représentés par les noeuds a, b, c, d, e) dont les préférences sont représentées dans le graphe biparti ci-dessous : une arête entre un garçon et une fille indique que ceux-ci s'apprécient. On souhaite former un maximum de couples en respectant les préférences de chacun. Pour cela, il suffit de trouver un couplage maximum dans ce graphe.



Un couplage possible M est indiqué par les arêtes rouges tandis qu'une couverture possible des sommets K est représentée par les sommets rouges. Dans ce cas, on voit que $|M| = |K|$, ce qui garantit que le couplage est maximum (et donc que la couverture est minimum).

5.3 L'algorithme hongrois

Rassemblant les observations précédentes, on peut concevoir un algorithme qui trouve un couplage maximum dans un graphe biparti défini par la bipartition (X, Y) . L'algorithme fonctionne en trouvant des chemins M -augmentés pour augmenter itérativement le nombre d'arêtes du couplage d'une unité.

Algorithme 5.17 (Algorithme Hongrois).

0. *Initialisation.* Partir d'un couplage initial arbitraire M . Par exemple on peut construire M en sélectionnant une première arête arbitraire, une deuxième qui n'est pas adjacente à la première, une troisième qui n'est adjacente à aucune des deux premières etc. jusqu'à ce qu'on ne puisse plus ajouter d'arêtes : on obtient ainsi un couplage M maximal au sens de l'inclusion.
1. Soit $U = \{u \in X \text{ et } u \text{ non-incident à } M\}$. Si U est vide, le couplage est maximum (arrêt).
2. A partir d'un sommet u de U , trouver un chemin M -augmenté C .
 - (a) Si un tel chemin n'existe pas, par le Théorème de Berge, le couplage M est maximum (arrêt).
 - (b) Sinon, mettre à jour le couplage M comme suit :

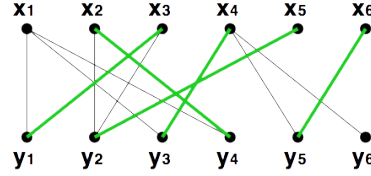
$$M \leftarrow (M \setminus C) \cup (C \setminus M)$$

3. Retour à l'étape 1.

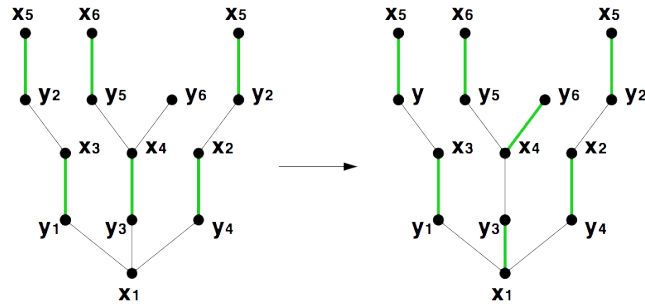
Notons que l'étape 2(b) consiste à inverser les arêtes qui font partie du couplage le long du chemin M -augmenté C qui a été trouvé.

Exemple 5.18 (Illustration de l'algorithme Hongrois).

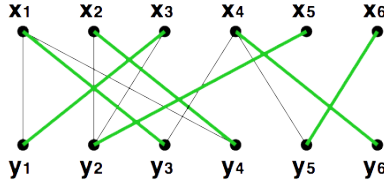
1. Couplage initial :



2. Recherche des chemins alternés :



3. nouveau couplage (maximum) :



L'algorithme hongrois (Kuhn-Munkres 1955-1957, se basant sur les travaux de deux Hongrois, König et Egerváry) se généralise en fait (non-trivialement) au problème pondéré : étant donné des poids sur les arêtes, comment trouver le couplage de poids maximum. Dans sa présente version, il est de complexité $\mathcal{O}(|V||E|)$ (pour un graphe biparti de $|V|$ noeuds et $|E|$ arêtes). L'algorithme de Hopcroft-Karp (1973) procède de même, avec une stratégie plus intelligente pour trouver les chemins augmentés, et une complexité résultante de $\mathcal{O}(\sqrt{|V|}|E|)$.

Dans le cadre des graphes non-pondérés généraux (non-bipartis), l'algorithme d'Edmonds (1965) pour trouver le couplage maximum consiste également à trouver des chemins augmentés, où la difficulté est de les trouver efficacement, en l'occurrence avec une complexité de $\mathcal{O}(|V|^2|E|)$. Des travaux ultérieurs ramènent cette complexité à $\mathcal{O}(\sqrt{|V|}|E|)$ (Micali-Vazirani 1980).

6 Coloriages d'arêtes

Problème des horaires Chaque professeur doit enseigner à un certain nombre de classes pendant un certain nombre d'heures. On veut créer un horaire sur le plus petit nombre de périodes possibles.

On relie chaque professeur aux classes auxquelles il donne cours en veillant à colorier les arêtes en fonction des tranches horaires. Deux arêtes de même couleur ne peuvent pas être incidentes au même nœud.

Définition 6.1. Un *coloriage* des arêtes d'un graphe en k couleurs est l'assignation à chaque arête d'une couleur $1, 2, \dots$, ou k . Ce coloriage est dit *propre* si deux arêtes adjacentes sont toujours de couleurs différentes.

Définition 6.2. L'*indice chromatique* d'un graphe G , noté $\chi'(G)$ est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour obtenir un coloriage propre des arêtes de G .

Théorème 6.3 (König). Pour tout graphe biparti : $\chi' = \deg_{\max}$

Démonstration. On va utiliser le corollaire 5.10 du théorème 5.8 de Hall pour les graphes bipartis réguliers (qui ont toujours un couplage parfait).

1. Soit un graphe biparti k -régulier, pour $k > 0$. Par le théorème de Hall, il existe un couplage parfait. On le colorie en couleur c_1 . On considère ensuite les arêtes restantes non encore coloriées : elles forment un graphe $(k - 1)$ -régulier. On recommence pour la couleur c_2 avec un autre couplage. On continue jusqu'à épuisement, on obtient alors $\chi' = k$.
2. Pour un graphe biparti quelconque de degré maximum k .
 - Ajouter des nœuds d'un côté si nécessaire pour avoir le même nombre de nœuds de chaque côté.
 - Si tous les nœuds ne sont pas de degré k , alors il y a au moins un nœud de degré $< k$ de chaque côté. (En effet pour une bipartition (X, Y) , la somme des degrés des nœuds de X est la somme des degrés des nœuds de Y qui est le nombre d'arêtes ; donc, dans la mesure où $|X| = |Y|$ par construction, si chaque nœud de X a degré k alors il en est de même pour Y .) On ajoute alors une arête entre ces deux nœuds de degrés $< k$. On recommence jusqu'à la k -régularité.

Par le point 1., il existe un coloriage propre à k couleurs. On supprime ensuite les arêtes et nœuds ajoutés : on obtient un coloriage propre pour le graphe de départ.

$$\Rightarrow \deg_{\max} \leq \chi' \leq k = \deg_{\max}$$

$$\Rightarrow \chi' = k$$

□

Théorème 6.4 (Vizing). Pour tout graphe simple : $\chi' = \deg_{\max}$ ou $\chi' = \deg_{\max} + 1$

Démonstration. On sait que $\chi' \geq \deg_{\max}$, il faut donc prouver que $\chi' \leq \deg_{\max} + 1$. On présente ici les idées principales de la preuve.

On le prouve par induction sur le nombre d'arêtes du graphe.

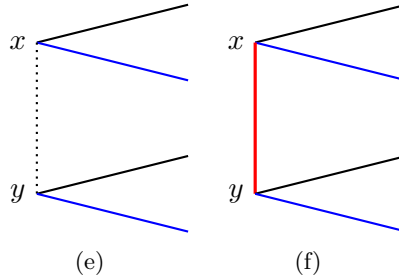
Pas inductif : Vrai pour m arêtes. Soit un graphe à $m + 1$ arêtes, de degré max k . Je retire une de ces arêtes : il existe un coloriage propre à $\leq k + 1$ couleurs.

- Si ce coloriage comporte $\leq k$ couleurs : je choisis $(k + 1)$ couleurs pour la $(m + 1)^{\text{ième}}$ arête.
- Si $k + 1$ couleurs c_1, \dots, c_{k+1} : je rétablis la $(m + 1)^{\text{ième}}$ arête : il faut trouver une couleur pour cette arête.

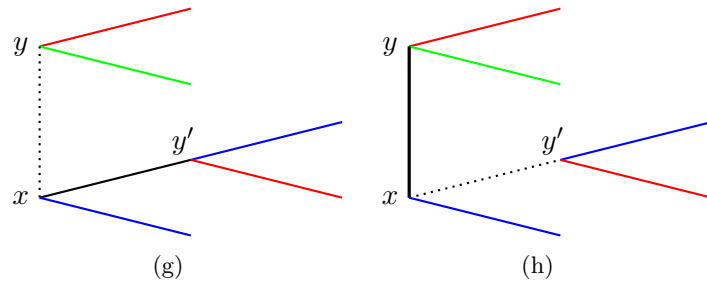
Observation clef : En chaque nœud il y a au moins une couleur libre (c'est à dire pas utilisée par les arêtes incidentes).

Voici 3 exemples avec $k = 3$ et 4 couleurs *noir*, *bleu*, *rouge* et *vert* qui montrent comment exploiter cette information pour colorier la $(m + 1)^{\text{ième}}$ arête xy .

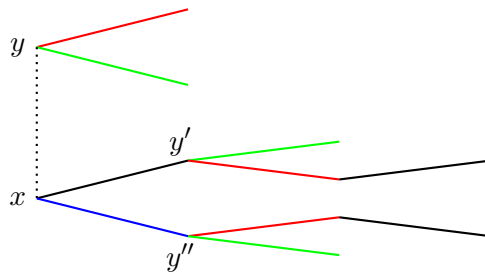
1. Même couleur libre *rouge* pour x et pour y donc on peut utiliser le *rouge* pour xy .



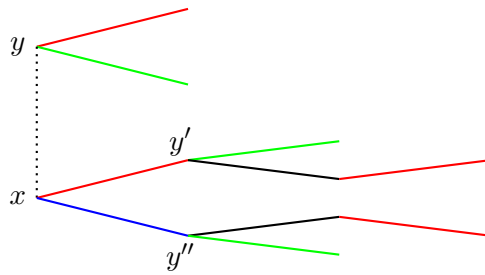
2. Pas de couleur libre commune à x et y . Mais le *noir* est libre pour y , donc on utilise le *noir* pour xy , et on efface l'arête *noire* xy' . On se retrouve alors dans le cas 1. mais pour l'arête xy' , que l'on colorie en *vert*, couleur libre pour x et pour y' .



3. Quelquefois cette astuce ne suffit pas :



Pour se ramener au cas 1. ou 2., on va libérer une couleur pour x , disons le *noir*. Pour ce faire échangeons le *noir* et *rouge* le long du chemin noir-rouge qui prolonge xy' . Le coloriage reste propre. Ce chemin peut impliquer au plus un autre voisin de x , ici y'' .



A présent le *noir*, qui était déjà libre pour y , l'est aussi pour x et on se retrouve dans le cas 1. : on colorie xy en *noir*.

Pour compléter la preuve, il faudrait montrer que toutes les situations se résolvent par l'application éventuellement répétée des trois techniques illustrées ici. On l'admet sans démonstration. \square

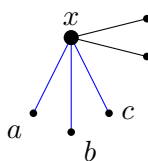
7 Cliques, ensembles indépendants et l'impossible désordre

7.1 Ensembles indépendants

Théorème 7.1 (Théorème de l'amitié 1). Parmi six personnes, on en trouve toujours trois qui se connaissent l'une l'autre, ou trois qui sont étrangères l'une à l'autre.

Démonstration. Considérons le graphe complet K_6 pour représenter le problème. Les nœuds symbolisent les personnes et les arêtes symbolisent les relations entre elles. Deux personnes sont reliées par une arête bleue si elles se connaissent, et par une arête rouge sinon. On veut montrer que le graphe contient un triangle bleu ou un triangle rouge.

Chaque nœud x a cinq voisins. On peut donc définir une couleur majoritaire en chaque nœud comme la couleur du plus grand nombre d'arêtes incidentes. Prenons le cas où la couleur majoritaire pour x est le bleu. Il existe donc au moins trois arêtes bleues incidentes à x .



Considérons trois nœuds a , b et c reliés à x par une arête bleue. Si ces trois nœuds forment un triangle rouge, alors le graphe contient un triangle rouge. Sinon, le triangle abc contient au moins une arête bleue. Prenons par exemple l'arête ab bleue. Le triangle abx est alors bleu. Le graphe contient donc dans ce cas-ci un triangle bleu.

La preuve reste évidemment valable si l'on prend l'arête bc ou l'arête ac bleue, de même que si l'on prend le rouge comme couleur majoritaire du nœud x . \square

Théorème 7.2 (Théorème de l'amitié 2). En coloriant, de façon arbitraire, les arêtes du graphe complet à six nœuds en bleu et rouge, on crée un triangle bleu ou un triangle rouge.

Démonstration. Voir théorème 7.1. \square

Définition 7.3. Un *ensemble indépendant* d'un graphe est un ensemble de nœuds deux à deux non adjacents.

Définition 7.4. Un *ensemble indépendant maximum* est un ensemble indépendant dont le nombre de nœuds est maximal.

Théorème 7.5. Un ensemble de nœuds est indépendant si et seulement si son complémentaire est une couverture de sommets.

Démonstration. Soit S un ensemble de nœuds indépendant.

S est un ensemble de nœuds indépendant.

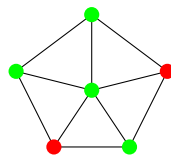
\Leftrightarrow Il n'existe pas d'arête rejoignant 2 nœuds de S .

\Leftrightarrow Toute arête a au moins une extrémité qui n'est pas incluse dans S .

\Leftrightarrow Le complémentaire de S est une couverture de sommets.

□

Exemple 7.6. Complémentaire d'un ensemble indépendant



Couverture de sommets (minimale)

Ensemble indépendant (maximal)

Corollaire 7.7. $|\text{ensemble indépendant maximum}| + |\text{couverture minimum}| = |\text{nombre de nœuds}|$

Ainsi, trouver un ensemble indépendant maximum est tout aussi difficile que de trouver une couverture de sommets minimale.

7.2 Cliques

Définition 7.8. Une *clique* d'un graphe est un ensemble de nœuds deux à deux adjacents. Autrement dit, c'est un sous-graphe complet.

Définition 7.9. Une *clique maximum* est une clique dont le nombre de nœuds est maximal.

Théorème 7.10. Un ensemble est indépendant dans un graphe simple si et seulement s'il est une clique dans le graphe complémentaire.

Démonstration. Soit S un ensemble indépendant dans un graphe simple G .

S est un ensemble indépendant de G

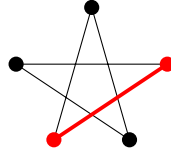
\Leftrightarrow Deux nœuds quelconques de S sont non-adjacents dans G .

\Leftrightarrow Deux nœuds quelconques de S sont adjacents dans le complémentaire de G .

$\Leftrightarrow S$ est une clique dans le complémentaire de G .

□

Exemple 7.11. Voici le complémentaire du graphe de l'exemple 7.6. Les sommets de l'ensemble indépendant de ce dernier exemple sont devenus les sommets d'une clique (en rouge) dans le graphe complémentaire. L'ensemble indépendant étant maximum, la clique l'est également.



On peut ainsi reformuler le théorème de l'amitié de cette façon :

Théorème 7.12 (Théorème de l'amitié 3). Tout graphe simple à six nœuds contient une clique de trois nœuds ou un ensemble indépendant de trois nœuds.

Définition 7.13 (Nombres de Ramsey). Le *nombre de Ramsey* $R(n_1, \dots, n_k)$ est le plus petit naturel r tel que tout coloriage du graphe complet de r nœuds en k couleurs c_1, \dots, c_k crée une clique de n_1 nœuds de couleur c_1 , ou une clique de n_2 nœuds de couleur c_2, \dots , ou une clique de n_k nœuds de couleur c_k .

Théorème 7.14 (Théorème de Ramsey). Le nombre de Ramsey $R(n_1, \dots, n_k)$ existe.

On le prouve d'abord pour $k = 2$ couleurs.

Théorème 7.15 (Théorème d'Erdős et Szekeres). Pour $m, n \geq 2$: $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n)$.

Démonstration. Prenons un nœud quelconque u dans un graphe complet à $R(m, n-1) + R(m-1, n)$ nœuds avec des arêtes coloriées en bleu (couleur 1) ou en rouge (couleur 2). On doit démontrer qu'il y a soit une m -clique monochrome bleue, soit une n -clique monochrome rouge.

Soit M et N définis tels que

$$\begin{aligned} M &= \{\text{voisins de } u \text{ reliés par des arêtes bleues}\} \\ N &= \{\text{voisins de } u \text{ reliés par des arêtes rouges}\}. \end{aligned}$$

On obtient en comptant les nœuds :

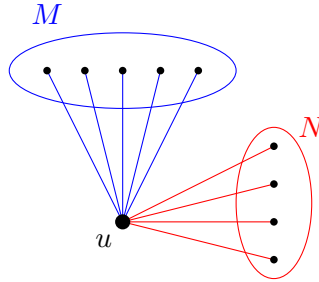
$$|M| + |N| + 1 = R(m, n-1) + R(m-1, n).$$

Donc on a que

$$|M| \geq R(m-1, n) \tag{3}$$

ou bien

$$|N| \geq R(m, n-1) \tag{4}$$



Si on est dans le cas de figure de l'inégalité 3, il y a deux possibilités. Soit il existe une clique rouge de n nœuds dans M ce qui implique qu'il existe une clique rouge de n nœuds dans le graphe. Soit il existe une clique bleue de $m - 1$ nœuds dans M ce qui en incluant u fait une clique bleue de m nœuds dans le graphe.

Si on est dans le cas de figure de l'inégalité 4, idem mutatis mutandis. \square

Ceci démontre bien sûr que $R(m, n)$ existe pour tout m, n , par induction sur m et n . On peut même vérifier que l'(in)équation de récurrence se solutionne de la façon suivante, en se souvenant de l'identité du triangle de Pascal $\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-1}{q}$. On se souvient que $\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ dénote le nombre d'ensembles de q éléments pris parmi p éléments.

Corollaire 7.16. Pour tout $m, n \geq 1$ on a $R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$.

Démonstration. On le démontre par induction sur (m, n) .

Ici l'induction n'est pas sur un entier naturel comme c'est souvent le cas, mais un couple d'entiers naturels ; il est donc peut-être utile de rappeler ou résumer le cadre général des preuves par induction. Quand on veut montrer par induction qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour tout $x \in X$, on munit l'ensemble X d'un ordre \leq , c-à-d une relation réflexive ($x \leq x$), transitive ($x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$) et anti-symétrique ($x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$). L'ordre strict $x < y$ est défini bien sûr par $x \leq y$ et $x \neq y$. On exige que l'ordre est *bien fondé*, c-à-d ne possède pas de suite infinie strictement décroissante. Par exemple l'ordre habituel sur les entiers naturels est bien fondé, mais par l'ordre habituel sur les réels ou les entiers (positifs ou négatifs). Si on démontre que l'*hypothèse d'induction* $\forall y < x : P(y)$ implique $P(x)$, alors on peut conclure que $\forall x : P(x)$: c'est le *principe d'induction* (admis sans démonstration dans ce cours). Notons que ceci implique en particulier de démontrer le *cas de base* pour les éléments minimaux de l'ordre : si on n'a pas de y tel que $y < x$ alors l'hypothèse d'induction est automatiquement vérifiée et il faut montrer que $P(x)$.

Dans cette preuve on choisit l'ordre $(m, n) \leq (m', n')$ ssi $m \leq m'$ et $n \leq n'$. Ce n'est pas le seul ordre possible sur \mathbb{N}_+^2 mais il est clairement bien fondé et convient à notre preuve.

Le cas de base ici est $m = 1$ ou $n = 1$: on vérifie que $R(1, n) = 1 = \binom{n-1}{0}$ et $R(m, 1) = 1 \leq \binom{m-1}{m-1}$, ce qui satisfait l'inégalité.

Ensuite le pas inductif pour $m, n \geq 2$: on suppose en particulier que les inégalités suivantes sont déjà démontrées :

$$R(m-1, n) \leq \binom{m+n-3}{m-2}$$

et

$$R(m, n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-1}$$

En les additionnant et en appliquant le théorème 7.15 sur les membres de gauche, ainsi que l'identité du triangle de Pascal sur les membres de droite, on obtient le résultat attendu. \square

Le théorème suivant fournit l'argument inductif aboutissant au théorème de Ramsey pour un nombre arbitraire de couleurs.

Théorème 7.17. $R(n_1, \dots, n_k) \leq R(n_1, \dots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k))$.

Démonstration. Prenons un graphe complet à $R(n_1, \dots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k))$ nœuds et leurs arêtes coloriées en k couleurs c_1, c_2, \dots, c_k .

Faisons momentanément semblant que c_{k-1} et c_k sont une seule couleur. Cela implique qu'il n'y a plus que $k-1$ couleurs. Il existe donc une clique à n_1 nœuds de couleur c_1 ou bien une clique à n_2 nœuds de couleur c_2 et ainsi de suite jusqu'à la possibilité d'une clique de $R(n_{k-1}, n_k)$ nœuds de couleur c_{k-1} ou c_k .

Or par définition de $R(n_{k-1}, n_k)$, cette dernière possibilité revient à dire qu'il existe une clique de n_{k-1} nœuds de couleur c_{k-1} ou une clique de n_k nœuds de couleur c_k . \square

Ceci prouve bien le théorème de Ramsey, par récurrence sur le nombre k de couleurs, avec le théorème d'Erdős-Szekeres comme cas de base.

Théorème 7.18 (Théorème de l'amitié 4). $R(3, 3) = 6$

Démonstration. Cela découle directement du théorème 7.2. \square

Quoique les nombres de Ramsey soient difficiles à calculer, on peut produire des bornes supérieures, comme ci-dessus, et des bornes inférieures, telles que ce théorème d'Erdős :

Théorème 7.19 (Erdős). Si N est tel que $\binom{N}{m} < 2^{\frac{m(m-1)}{2}-1}$ alors $R(m, m) > N$

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour un tel N il existe un coloriage en deux couleurs (disons bleu et rouge) des arêtes de K_N qui ne comporte aucune m -clique monochrome.

Pour le montrer on utilise la *méthode probabiliste*. On génère un coloriage aléatoire en choisissant la couleur bleue ou rouge pour chaque arête avec probabilité $1/2$ indépendamment des autres arêtes. Il suffit de démontrer la probabilité de n'avoir aucune m -clique monochrome est non-nulle pour démontrer l'existence d'un tel coloriage.

Alternativement on démontre que la probabilité d'avoir une m -clique monochrome est < 1 :

$$\begin{aligned} \text{Proba}[\exists \text{ } m\text{-clique monochrome}] &\leq \sum_{\text{noeuds}\{v_1, \dots, v_m\}} \text{Proba}[\text{arêtes entre } \{v_1, \dots, v_m\} \text{ monochromes}] \\ &= \sum_{\text{noeuds}\{v_1, \dots, v_m\}} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} \\ &= \binom{N}{m} 2^{-\frac{m(m-1)}{2} + 1} \\ &< 1 \end{aligned}$$

□

Ce théorème est important notamment pour sa méthode de preuve, qui est devenu depuis un outil important en combinatoire.

Le théorème de Ramsey ne nous dit pas de quelle couleur est la clique monochrome, lacune partiellement comblée par le théorème suivant.

Théorème 7.20 (Théorème de Turán). Si un graphe simple possède strictement plus de $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$ arêtes, alors il a une clique de $r + 1$ nœuds.

7.3 La théorie de Ramsey

Beaucoup de théorèmes existent qui imitent le théorème de Ramsey et prouvent quelque chose du genre, en termes informels :

- “Dans un machin suffisamment grand, il y a toujours des sous-machins avec une certaine propriété.”
- “Dans un grand machin, même tout-à-fait quelconque, un certain ordre est inévitable.”
- “Le désordre complet est impossible.”

Voyons quelques exemples.

Théorème 7.21 (Sommes d'entiers). Si l'on colorie les nombres de un à quatorze en trois couleurs alors il existe trois nombres (pas forcément distincts) x , y et z de même couleur tels que $x + y = z$.

Exemple 7.22. Séparons les nombres de 1 à 13 en trois couleurs :

couleur1	1			4						10			13
couleur2		2	3								11	12	
couleur3					5	6	7	8	9				

On vérifie que quelle que soit la couleur attribuée au 14, la propriété sera vérifiée.

Théorème 7.23 (Théorème de Schur). Pour chaque k , il y a un nombre r_k tel que pour toute partition des nombres $1, 2, \dots, r_k$ en k classes, une de ces classes contient x, y (possiblement égaux) et z tels que $x + y = z$.⁴

Démonstration. Nous montrons que l'on peut choisir $r_k = R(\underbrace{3, \dots, 3}_k)$.

Colorions les arêtes du graphe à r_k nœuds, sachant qu'on a réparti arbitrairement ses nœuds dans les classes S_1, S_2, \dots, S_k .

Nous allons les colorier de la manière suivante : l'arête ij est dans la couleur c ssi $|i - j| \in S_c$. Nous utilisons donc k couleurs différentes pour les arêtes.

Par le théorème de Ramsey, il y a un triangle monochrome. Donc il y a i, j et l tels que :

- $i < j < l$
- $j - i, l - j, l - i$ sont dans la même classe.

On prend alors $x = j - i, y = l - j$ et $z = l - i$, d'où $x + y = z$. \square

Théorème 7.24 (Théorème d'Esther Klein). Parmi cinq points arbitraires dans le plan, tels que trois d'entre eux ne sont jamais alignés, on peut toujours en choisir quatre qui déterminent un quadrilatère convexe.

Théorème 7.25. Si l'on colorie les nombres de un à neuf en deux couleurs. Alors il existe une progression arithmétique de longueur trois qui est monochrome.

Théorème 7.26 (Théorème de Van der Waerden). Pour tout k, ℓ , il existe un nombre $W(k, \ell)$ tel que les nombres de 1 à $W(k, \ell)$, coloriés arbitrairement en k couleurs, contiennent une progression arithmétique monochrome de longueur ℓ .

Exemple 7.27. Cherchons $W(2, 3)$ expérimentalement.

1 2 3 4 5 6 7 8

On ne sait comment colorier le huit car si on le met en rouge on crée la suite arithmétique 6, 7, 8, de raison un et en vert la suite 2, 5, 8, de raison 3.

4. dans l'exemple ci-dessus $k = 3$ et $r_k = 14$

Parmi les théorèmes les plus avancés de la théorie de Ramsey, on trouve celui-ci :

Théorème 7.28 (Théorème de Green-Tao, 2004). La suite des nombres premiers contient des sous-suites en progression arithmétique arbitrairement longues.

Par exemple 5, 11, 17, 23, 29 est suite de raison 6 et de longueur 5, composée uniquement de nombres premiers.

8 Coloriages de sommets

8.1 Coloriages de sommets et nombre chromatique

Définition 8.1. Un *coloriage* ou une *coloration* des noeuds (parfois appelé également *sommets-coloration*) est l'attribution à chaque noeud d'une couleur. Le coloriage est dit *propre* si des noeuds adjacents ont des couleurs différentes (on parlera toujours implicitement de coloriages propres). On parle de *k-coloriage* du graphe quand on se restreint à *k* couleurs au plus.

Définition 8.2. Un coloriage *minimum* est un coloriage propre qui emploie un nombre minimal de couleurs. Le *nombre chromatique*, noté $\chi(G)$, d'un graphe *G* est le nombre minimal de couleurs d'un coloriage propre de sommets du graphe :

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists k\text{-coloration de } G\}.$$

Exemple 8.3. Un graphe est biparti ssi son nombre chromatique est $\chi \leq 2$ (il suffit de colorier les noeuds selon leur classe de la bipartition du graphe, le cas $\chi = 1$ est pour des noeuds isolés). Le graphe complet à *n* noeuds K_n (chaque noeud est adjacent à tous les autres) a $\chi(K_n) = n$. Un graphe constitué d'un simple cycle ont un nombre chromatique égal à 2 (3) si le nombre de noeuds est pair (impair). Un graphe dit "planaire" a $\chi \leq 4$, voir chapitre sur les graphes planaires.

8.2 Bornes sur le nombre chromatique

Théorème 8.4. $|\text{clique max}| \leq \chi$

Démonstration. Dans une clique, chaque noeud est adjacent à tous les autres, donc tous les noeuds de la clique doivent avoir une couleur différente. Il faut donc au minimum une couleur différente pour chaque noeud de la plus grande clique du graphe. \square

Théorème 8.5. $\chi \leq \deg_{\max} + 1$

Démonstration. On explique d'abord le coloriage glouton, qui fonctionne de la façon suivante. On ordonne toutes les couleurs, que l'on nomme 1, 2, 3, ... On visite les noeuds du graphe dans un ordre arbitraire v_1, \dots, v_n . A chaque noeud v_i visité, on choisit la plus petite couleur disponible, différente des couleurs déjà attribuées aux voisins de v_i parmi les noeuds déjà visités v_1, \dots, v_{i-1} . A la fin, on regarde le nombre de couleurs utilisés, qui est aussi le numéro de la plus grande couleur utilisée.

Puisque les voisins de v_i sont au nombre de \deg_{\max} ou moins, il y a toujours une couleur disponible de numéro $\leq \deg_{\max} + 1$ pour colorier v_i . \square

Cette borne n'est pas améliorable dans l'absolu, puisqu'elle est atteinte pour un cycle impair ($\deg_{\max} = 2, \chi = 3$) et pour un graphe complet K_n ($\deg_{\max} = n - 1, \chi = n$). Toutefois, dans cette preuve on constate que l'on visite les noeuds dans n'importe quel ordre. Cela fait beaucoup de liberté ! On se dit qu'en choisissant un ordre de façon intelligente pour le coloriage glouton, on peut peut-être réduire le nombre de couleurs utilisées, du moins pour certains graphes.

Théorème 8.6 (Brooks). Pour tout graphe connexe G de degré maximal \deg_{\max} , $\chi \leq \deg_{\max}$ sauf si G est un graphe complet ou un cycle de longueur impaire (auxquels cas $\chi = \deg_{\max} + 1$).

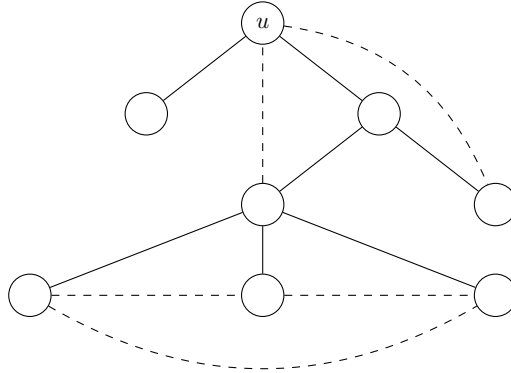
On prouve le Théorème de Brooks par étapes.

Lemme 8.7. Dans un graphe connexe non-régulier, $\chi \leq \deg_{\max}$.

Démonstration. Le graphe étant non-régulier il existe un noeud u de degré strictement inférieur à \deg_{\max} .

A partir de u je crée un arbre sous-tendant de racine u (par exemple via un parcours en profondeur à partir de u).

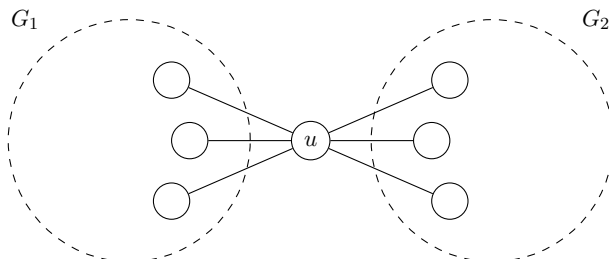
Je colorie l'arbre de façon gloutonne en commençant par les feuilles de façon à ce que chaque noeud soit colorié avant son parent (et avec u colorié en dernier). Par exemple lors d'un parcours en profondeur, je colorie chaque noeud la dernière fois que je le visite, au moment où je l'enlève de la pile de noeuds encore à explorer.



Pour tout noeud différent de u il y a au plus $\deg_{\max} - 1$ voisins déjà coloriés (puisque le parent n'est pas encore colorié), donc une couleur $\leq \deg_{\max}$ suffit pour le colorier. Le noeud u est sans parent, mais il a strictement moins de \deg_{\max} voisins par hypothèse, et donc il reste une couleur $\leq \deg_{\max}$ de libre. Au total on a eu besoin de \deg_{\max} couleurs au plus. \square

Lemme 8.8. Si un graphe G est connexe et régulier de degré k mais pas 2-connexe alors $\chi \leq k$.

Démonstration. Il n'est pas 2-connexe, il existe donc un noeud u tel que $G - u$ est non-connexe. Séparons le graphe en deux sous-graphes, G_1 et G_2 , uniquement liés via u et tel que $G = G_1 \cup G_2$ et $G_1 \cap G_2 = \{u\}$.



Le degré de u dans G_1 est strictement inférieur à k et le Lemme précédent s'applique. Donc k couleurs ou moins sont suffisantes.

Le même raisonnement s'applique pour G_2 . Éventuellement on échange 2 couleurs du coloriage de G_2 pour qu'il soit consistant avec le coloriage de G_1 sur le noeud u . \square

On traite les cas de graphes connexes réguliers pour $k = 0, 1, 2$.

- $k = 0$: un noeud isolé, $\chi = 1$.
- $k = 1$: deux noeuds liés, $\chi = 2$.
- $k = 2$: soit un cycle de longueur paire, $\chi = 2$; soit de longueur impaire, $\chi = 3$.

Lemme 8.9. Si un graphe G est connexe, k -régulier pour $k \geq 3$, et tel qu'il existe une coupe de 2 noeuds non-adjacents alors $\chi \leq k$.

Démonstration. Même idée générale que le Lemme précédent, détails admis. \square

Preuve du Théorème de Brooks. On sépare la preuve en différents cas.

Non régulier. Lemme 8.7.

k -régulier avec $k < 3$. Les trois cas ont été traités.

k -régulier avec $k \geq 3$ et il n'existe pas deux noeuds non-adjacents. Le graphe est alors complet.

k -régulier avec $k \geq 3$ et il existe deux noeuds non-adjacents. Il existe un noeud u tel qu'il existe deux voisins de u non-adjacent entre eux, v et w .

Si le graphe $G - v - w$ est non-connexe ces deux noeuds forment une coupe et le Lemme 8.9 s'applique.

On peut donc continuer en supposant que $G - v - w$ est connexe.

J'applique le coloriage glouton, avec un ordre des noeuds bien choisi : je construis un arbre sous-tendant de $G - v - w$ partant de u puis j'y ajoute v et w comme feuilles directement reliées à u . Je colorie en commençant par les feuilles v et w en leur donnant la couleur 1

(ils sont non-adjacents), puis je continue le coloriage en partant des autres feuilles de l'arbre et en remontant vers u , de sorte que chaque noeud ($nequ$) soit colorié avant son parent.

Tout les noeuds différents de u peuvent être coloriés avec une couleur $\leq k$ en appliquant cette stratégie. Les noeuds v et w ayant la même couleur, u a au plus $k - 1$ couleurs dans ses voisins et donc une $k^{\text{ième}}$ est disponible.

□

Malgré ces bornes, trouver le nombre chromatique d'un graphe général est un problème difficile (il n'existe pas d'algorithme efficace).

8.3 Polynôme chromatique

Pour un graphe G , le nombre de coloriage propres différents à k couleurs est noté $\pi_G(k)$. On peut donc écrire $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \pi_G(k) > 0\}$.

Par exemple, $\pi_G(k) = k^n$ pour n noeuds isolés, et $\pi_G(k) = k(k - 1) \dots (k - n + 1)$ pour $G = K_n$. Pour un arbre à n noeuds, on a $\pi_G(k) = k(k - 1)^{n-1}$. Pour des graphes généraux cependant, il est plus difficile de trouver une expression explicite de $\pi_G(k)$. Le théorème suivant peut parfois nous aider.

Théorème 8.10. Pour toute arête e du graphe G ,

$$\pi_G(k) = \pi_{G-e}(k) - \pi_{G.e}(k),$$

où $G.e$ est le graphe obtenu en *contractant* l'arête e (fusionnant les deux noeuds incidents à e , et éliminant les boucles éventuellement obtenues sur le noeud résultant).

Démonstration. Soit u et v les deux extrémités de e .

- $\pi_{G-e}(k)$ est le nombre de coloriages des noeuds de G à moins de k couleurs qui sont propres sauf possiblement entre u et v . On peut avoir u et v de même couleur ou de couleur différente.
- $\pi_{G.e}(k)$ est le nombre de coloriages des noeuds de G à moins de k couleurs qui sont propres sauf entre u et v . On doit avoir u et v de même couleur.

On a donc finalement $\pi_{G-e}(k) - \pi_{G.e}(k)$ est le nombre de coloriages des noeuds de G à k couleurs ou moins qui sont propres même entre u et v : on doit avoir u et v de couleurs différentes. □

Notons que $G.e$ contient éventuellement des arêtes multiples, même si G est simple. On peut alors les fusionner en une arête simple, c'est sans importance pour les questions de coloriage de noeuds.

Corollaire 8.11 (Birkhoff). Pour un graphe G à n noeuds, $\pi_G(k)$ est un polynôme monique de degré n , de terme constant nul et dont les coefficients alternent en signe.

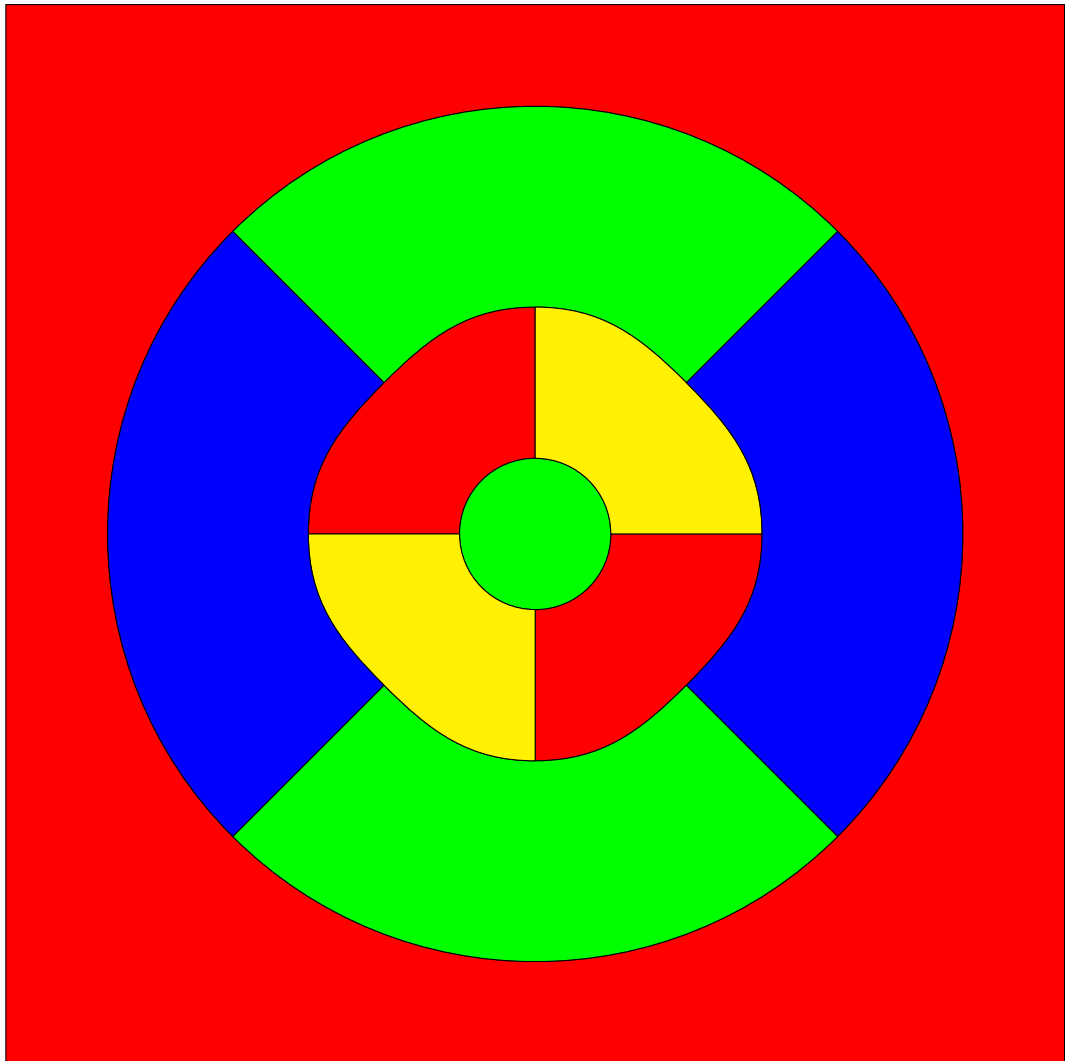
Démonstration. Par récurrence sur le nombre d'arêtes et en utilisant $\pi_G(k) = \pi_{G-e}(k) - \pi_{G.e}(k)$. Le cas de base correspond aux noeuds isolés, il y a exactement k^n coloriage possible. Le pas inductif s'obtient en constatant que $G - e$ et $G.e$ ont strictement moins d'arêtes que G , et le même nombre de noeuds (pour $G - e$) ou un noeud de moins (pour $G.e$). \square

9 Graphes planaires

Un graphe est planaire si il possède une représentation dans le plan dont les arêtes ne se touchent pas, sauf à leurs extrémités.

Théorème 9.1 (Conjecture des quatre couleurs). Quatre couleurs suffisent toujours pour colorier une carte

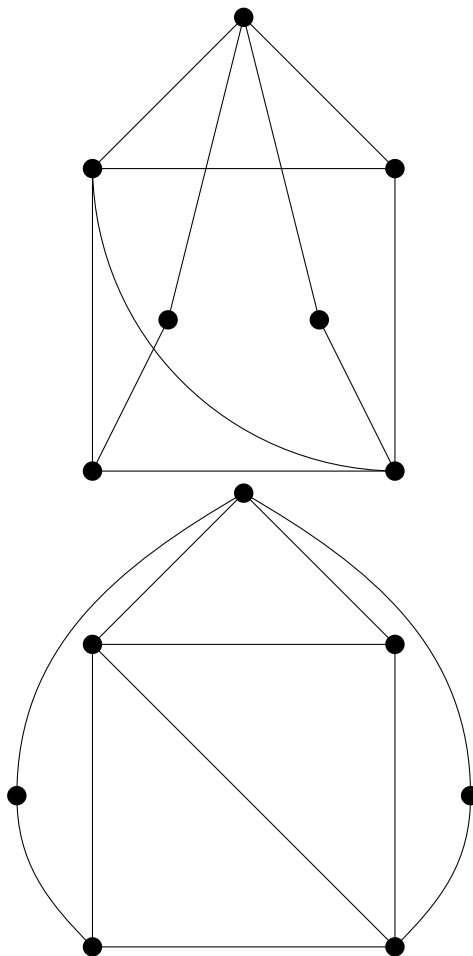
Démonstration. On suppose qu'en chaque point se rencontrent au maximum trois pays, et que les pays sont d'un seul tenant.



Il est possible de partir du graphe correspondant en remplaçant les pays par des sommets et les frontières par des arêtes. Ce graphe est alors planaire. Il suffit alors de montrer que tout graphe planaire a un nombre chromatique $\chi \leq 4$ (ou de manière équivalente, admet au moins un coloriage de quatre couleurs).

□

Notons qu'un graphe planaire peut être dessiné de manière non planaire.



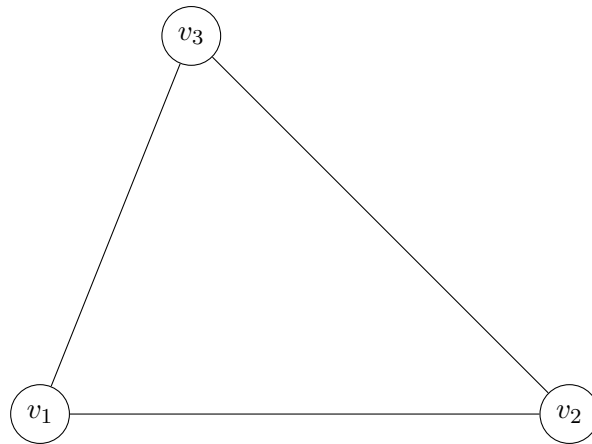
9.1 Graphes planaires

Théorème 9.2 (Fáry). Tout graphe planaire simple peut être représenté en n'utilisant que des arêtes droites.

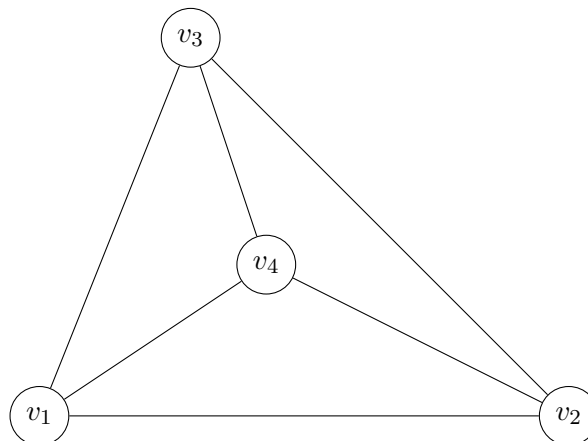
Théorème 9.3. Le graphe complet K_5 à cinq noeuds n'est pas planaire.

Démonstration. Représentons K_5 dans le plan. Soit l'ensemble de ses noeuds $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

v_1, v_2 et v_3 forment un triangle. Où placer v_4 ?

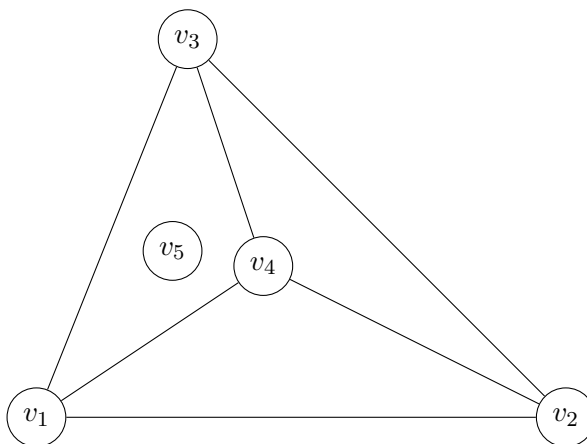


1. A l'intérieur du triangle formé par v_1, v_2 et v_3 ?



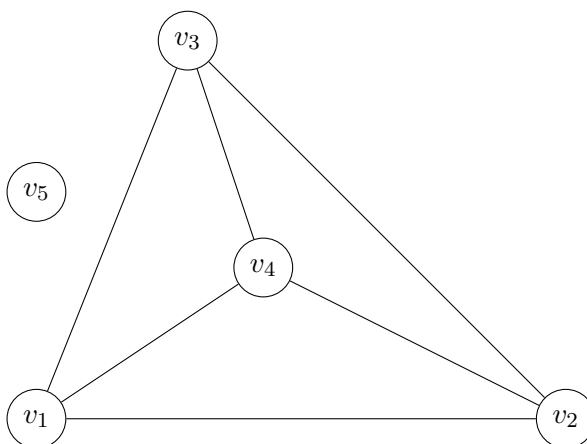
Où placer v_5 ?

- (a) A l'intérieur du triangle formé par v_1, v_3 et v_4 ? Le graphe ne serait plus planaire puisqu'il faudrait couper le triangle v_1, v_3 et v_4 pour relier v_5 à v_2 .



(b) A l'intérieur de v_1, v_2, v_4 ou de v_2, v_3, v_4 ? Idem.

(c) A l'extérieur de v_1, v_2, v_3 ?



2. A l'extérieur de v_1, v_2, v_3 ? En appliquant le même type d'énumération qu'au point précédent, on trouve qu'il n'y a aucune manière de représenter K_5 dans le plan de manière à ce qu'il soit planaire.

□

Théorème 9.4. Le graphe complet biparti $K_{3,3}$ à $3 + 3$ noeuds n'est pas planaire.

Définition 9.5. Une *subdivision* d'un graphe est un graphe obtenu en remplaçant une ou plusieurs arêtes par un chemin (de longueur 1 ou plus).

Théorème 9.6 (Kuratowski). Un graphe est non planaire si et seulement s'il contient comme sous-graphe K_5 ou $K_{3,3}$ ou une subdivision de ceux-ci.

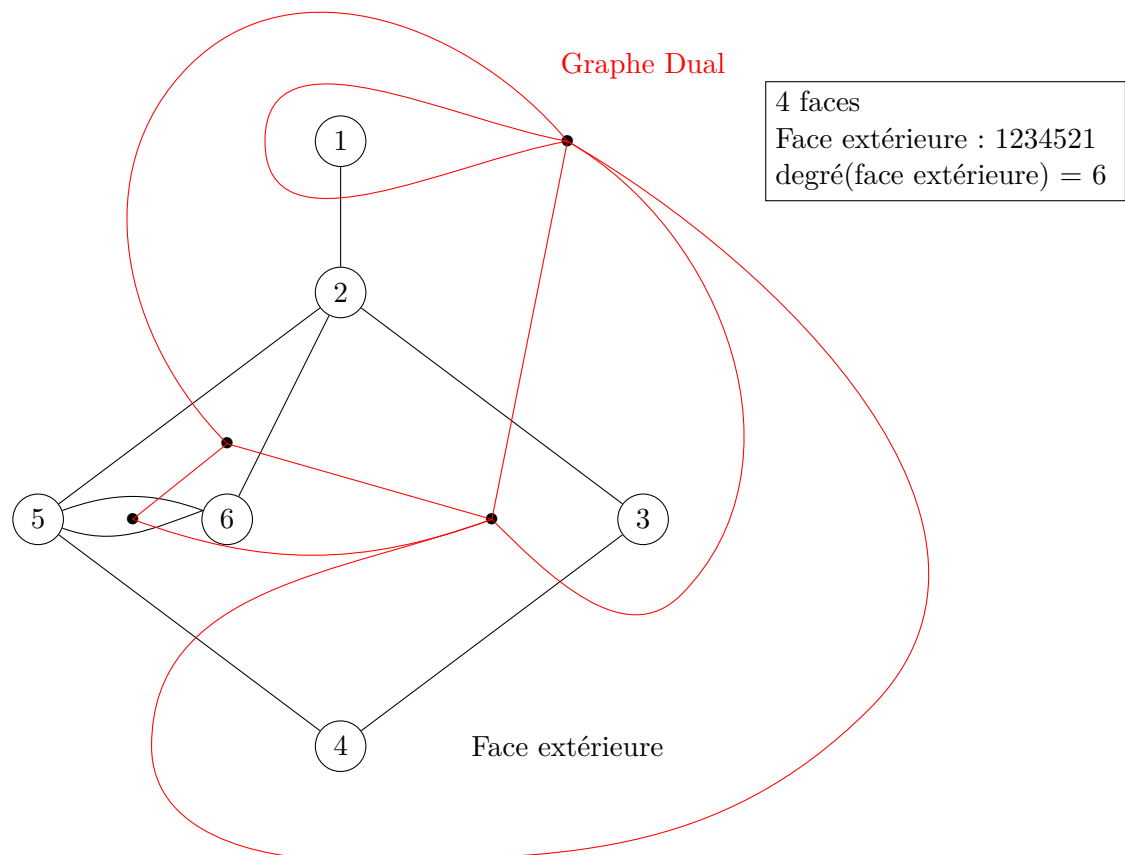
Théorème 9.7. Une *subdivision* d'un graphe non planaire est non-planaire, et un sous-graphe d'un graphe planaire est planaire.

Définition 9.8. Un graphe planaire (dans une représentation sans croisement) découpe le plan en plusieurs régions connexes (au sens géométrique). Ces régions sont appelées *faces*. Il y a une et une seule face non bornée, nommée *face extérieure*, les autres faces sont *intérieures*.

Définition 9.9. On identifie le *bord d'une face* au parcours fermé qui longe la face. Le bord parcourt chaque arête une ou deux fois. Une face est *incidente* aux arêtes et sommets qui sont sur son bord. Le *degré d'une face* est la longueur du bord, donc le nombre d'arêtes incidentes (comptées une ou deux fois).

Définition 9.10. Etant donné un graphe planaire G (dans une représentation sans croisement), construisons G^* , graphe dont les sommets sont les faces de G , reliés si et seulement si les faces correspondantes ont dans G une arête en commun. Ce graphe G^* est le *dual* de G (dans cette représentation).

Exemple 9.11. *Exemple :*



Théorème 9.12. La somme des degrés des faces est deux fois le nombre d'arêtes.

Démonstration. On passe au graphe dual, sur lequel on applique le théorème des poignées de mains. \square

Théorème 9.13. Un graphe est planaire si et seulement si il est représentable sur la sphère sans croisement d'arêtes.

Démonstration. On utilise la projection stéréographique pour passer d'une représentation planaire à une représentation sphérique et vice versa. \square

9.2 Formule d'Euler

Théorème 9.14 (Formule d'Euler). Dans un graphe planaire connexe à n sommets, e arêtes et f faces :

$$n - e + f = 2$$

Démonstration. On démontre cette égalité par récurrence sur le nombre de faces

Initialisation S'il y a une seule face, alors le graphe est sans cycle car chaque cycle crée au moins 2 faces, la face intérieure au cycle et la face extérieure au cycle. C'est donc un arbre d'où $e = n - 1$, c'est à dire $n - e + f = 2$ car $f = 1$.

Induction Soit un graphe G avec $f > 1$ faces. Comme les arbres ont une seule face, G possède un cycle et donc deux faces adjacentes. Soit G' obtenu en supprimant une arête entre les deux faces. Les deux faces deviennent une seule face pour G' . Ce graphe a donc $f - 1$ faces et $e - 1$ arêtes, par l'hypothèse de récurrence sur G' , on a

$$\begin{aligned} n - (e - 1) + (f - 1) &= 2 \\ \implies n - e + f &= 2. \end{aligned}$$

\square

Théorème 9.15. Dans tout graphe planaire *simple* à $n \geq 3$ sommets et e arêtes, $e \leq 3n - 6$.

Démonstration. Commençons par montrer que pour toute face f , $\deg(f) \geq 3$. Pour la face extérieure, c'est vrai car $n \geq 3$. Pour une face intérieure, comme le graphe est simple, la plus petite face en terme de degré est un triangle donc c'est vrai également.

On a donc

$$\sum_{f \in F} \deg(f) \geq 3|F|.$$

Or par le théorème des poignées de main dual,

$$\sum_{f \in F} \deg(f) = 2|E|.$$

Et donc

$$\frac{2}{3}e \geq |F|. \quad (5)$$

En injectant 5 dans la formule d'Euler, on obtient

$$2 = n - e + |F| \leq n - e + \frac{2}{3}e$$

d'où

$$\frac{1}{3}e \leq n - 2.$$

□

Théorème 9.16. Pour tout graphe planaire *simple*, il y a un noeud de degré ≤ 5 .

Démonstration. On va montrer que le degré moyen est < 6 . Ce qu'il voudra dire qu'il existe un noeud de degré ≤ 5 .

$$\begin{aligned} \deg_{\text{avg}} &= \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{|V|} \\ &= \frac{2|E|}{|V|}. \end{aligned}$$

Considérons 2 cas

- Si $|V| < 3$, l'énoncé est trivial car dans un graphe simple, pour tout $v \in V$, $\deg(v) \leq |V| - 1$ du coup $\deg(v) \leq |V| - 1 < 2 \leq 5$ pour tout v .
- Comme notre graphe est simple, on peut utiliser le théorème 9.15, on a donc $|E| \leq 3|V| - 6$. Dès lors

$$\begin{aligned} \deg_{\text{avg}} &\leq 2 \frac{3|V| - 6}{|V|} \\ &= 6 - \frac{12}{|V|} < 6. \end{aligned}$$

□

Corollaire 9.17. K_5 est non planaire.

Démonstration. K_5 a 5 noeuds et 10 arêtes. Par le théorème 9.15, $|E| \leq 3|V| - 6$. Il faut donc que $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, ce qui est faux. Le graphe est par conséquent non planaire. □

Corollaire 9.18. $K_{3,3}$ est non planaire.

Démonstration. Supposons que $K_{3,3}$ soit planaire et montrons une contradiction.

Le graphe $K_{3,3}$ a 6 noeuds et 9 arêtes. C'est un graphe biparti donc les cycles sont de longueurs paires, de plus il est simple donc tous les cycles ont une longueur ≥ 4 . Donc toutes les faces ont un degré ≥ 4 . On a alors $\sum_{f \in F} \deg(f) \geq 4|F|$ et par le théorème des poignées de main dual, $\sum_{f \in F} \deg(f) = 2|E| = 18$. Donc $|F| \leq \frac{18}{4} = 4.5$.

Par la formule d'Euler, il faut que :

$$|F| - |E| + |V| = 2$$

or

$$|F| - |E| + |V| \leq 4.5 - 9 + 6 = 1.5.$$

$K_{3,3}$ ne peut donc pas être planaire. □

9.3 Les cinq solides platoniciens

Définition 9.19. Un *solide platonicien* est un polyèdre convexe régulier. C'est-à-dire que toutes les faces, sommets et arêtes sont identiques à une rotation près.

Théorème 9.20. Il y a 5 solides platoniciens.

Démonstration. Les polyèdres convexes correspondent à des graphes planaires, via projection. Le fait qu'ils soient platoniciens nous dit que chaque noeud est de même degré p et que chaque face est de même degré q .

La formule d'Euler	$ F - E + V = 2$
Poignées de main	$p V = 2 E $
Poignées de main dual	$q F = 2 E $

Donc

$$\begin{aligned} \frac{2}{q}|E| - |E| + \frac{2}{p}|E| &= 2 \\ \frac{2}{q} - 1 + \frac{2}{p} &= \frac{2}{|E|} > 0 \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{p} &> \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On sait donc que soit p , soit q est < 4 (ou les deux). Or $p \geq 3$ et $q \geq 3$ (par géométrie, graphes planaires simple de dual simple : toute face a au moins trois côtés, tout sommet a au moins trois voisins). Les possibilités sont

p	q	$ V $	$ F $	$ E $	Polyèdre
3	3	4	4	6	Tétraèdre
3	4	8	6	12	Cube
4	3	6	8	12	Octaèdre
3	5	20	12	30	Dodécaèdre
5	3	12	20	30	Icosaèdre

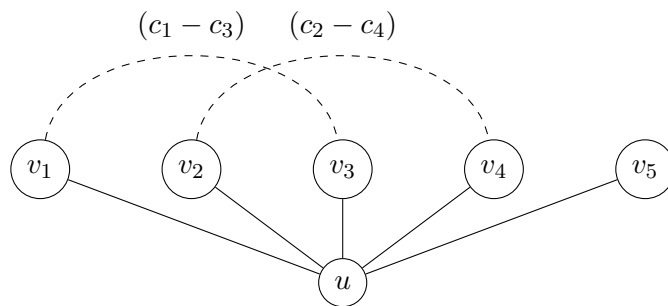
Il reste à montrer que chacune de ces possibilités pour p et q est réalisée par un unique polyèdre régulier (indiqué dans la colonne de droite) : c'est la partie 'géométrique' de la preuve, que nous admettons ici. \square

9.4 Coloriage des graphes planaires

Théorème 9.21 (Kempe). Tout graphe planaire possède un coloriage propre à cinq couleurs. "Toute carte peut être coloriée avec 5 couleurs". Nombre chromatique χ (graphe planaire) ≤ 5 .

Démonstration. Par récurrence : "on enlève un noeud, on colorie par hyp. de récurrence, on remet le noeud." On peut supposer le graphe G *simple* (car arêtes multiples n'affectent pas χ). Il existe un noeud u de degré ≤ 5 . On enlève u , on a encore un graphe planaire, on le colorie. On rétablit u :

- si $\deg(u) < 5$: facile, on utilise une couleur non utilisée par les voisins pour u .
- Si $\deg(u) = 5$: Si ces 5 voisins utilisent < 5 couleurs : facile aussi. Si 5 couleurs utilisées : numérotions les 5 noeuds voisins v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , lus dans l'ordre horloger (ou anti-horloger) autour de u . Soient c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 leurs couleurs respectives. Regardons v_1 et v_3 , et le sous-graphe $c_1 - c_3$ de tous les noeuds de couleurs c_1 ou c_3 et leurs arêtes. Si v_1 et v_3 sont sur des composantes connexes différentes de ce sous-graphe : on échange c_1 et c_3 sur la composante connexe (dans le sous-graphe $c_1 - c_3$) de v_3 dans $G \setminus u$, et on colorie u en c_1 . Si v_1 et v_3 sont dans la même composante connexe ($c_1 - c_3$) : Maintenant v_2 et v_4 sont dans des composantes connexes différentes (dans le sous-graphe des noeuds couleurs $c_2 - c_4$), sinon la planarité serait violée. Même raisonnement : échanger c_2 et c_4 sur composante connexe (v_2).



□

Théorème 9.22 (Appel, Haken). Tout graphe planaire possède un coloriage propre à quatre couleurs.

10 Flots et coupes

10.1 Flots et coupes

Définition 10.1. Un *réseau* est un graphe dirigé $G = (V, E, \varphi)$, dont les noeuds sont partitionnés en sources, puits et noeuds intermédiaires, et dont chaque arête e porte un nombre réel $c(e)$ nommé *capacité*. Un *flot* (d'un réseau) est une fonction $f(e)$ sur les arêtes, telle que la capacité limitée soit respectée :

$$0 \leq f(e) \leq c(e) \quad \forall e \in E,$$

et que le flot net sortant de chaque noeud intermédiaire soit nul (équation de conservation, "ce qui rentre doit sortir") :

$$\sum_{u \in V} f(uv) = \sum_{u \in V} f(vu) \quad \forall v \text{ étant un noeud intermédiaire.}$$

Définition 10.2.

- Le *flot net* sortant d'un *noeud* u est défini comme

$$f_{\text{net}}(u) = \sum_{\text{arêtes } a \text{ d'origine } u} f(a) - \sum_{\text{arêtes } b \text{ de destination } u} f(b).$$

- Le *flot net* sortant d'un *ensemble* U de noeuds est la somme des flots nets sortant des noeuds de U .
- La *valeur du flot*, notée $\text{valeur}(f)$, est le flot net sortant de l'ensemble des noeuds sources.

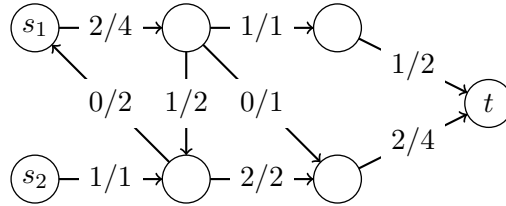


FIGURE 2 – Exemple de flot avec pour chaque arête e , $f(e)/c(e)$. Il y a deux noeuds sources s_1 et s_2 ainsi qu'un noeud puits t .

Exemple 10.3. Pour le flot f de la figure 2, on voit que $f_{\text{net}}(s_1) = 2 - 0 = 2$ et $f_{\text{net}}(s_2) = 1$. On a donc

$$\text{valeur}(f) = f_{\text{net}}(\{s_1, s_2\}) = f_{\text{net}}(s_1) + f_{\text{net}}(s_2) = 2 + 1 = 3.$$

On s'intéressera au problème du *flot maximum* f_{max} , c'est-à-dire trouver le flot dont la valeur est maximale. Ce problème est lié à celui de la coupe minimum.

Définition 10.4. Une *coupe* (d'un réseau) est un ensemble d'arêtes tel qu'il n'y ait plus aucun chemin d'un noeud source vers un noeud puits quand on retire cet ensemble du graphe. La *capacité d'une coupe* est la somme des capacités des arêtes constituant la coupe.

On s'intéressera au problème de la *coupe minimum*, c'est-à-dire la coupe dont la capacité est minimale.

Observation Une coupe minimale peut être décrite par un ensemble S de noeuds atteignables à partir des sources. Lorsqu'on a une coupe, S est la composante connexe comprenant les sources lorsqu'on enlève les arêtes de la coupe. En d'autres mots, la coupe est donc l'ensemble des arêtes reliant les noeuds de S (tous les noeuds sources doivent appartenir à S) à ceux de \bar{S} (tous les noeuds puits doivent appartenir à \bar{S}).

On note alors la coupe $S \rightarrow \bar{S}$ et, étant donné un certain flot pour le réseau, le *flot net à travers la coupe* est le flot net de l'ensemble S

$$f_{\text{net}}(S \rightarrow \bar{S}) = f_{\text{net}}(S) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in \bar{S}} f(uv) - \sum_{v \in \bar{S}} \sum_{u \in S} f(vu).$$

Lemme 10.5. Pour un flot donné, toutes les coupes ont le même flot net, qui est la valeur du flot.

Démonstration. Soit une coupe $S \rightarrow \bar{S}$ et s l'ensemble des sources (rappel : $S \setminus s$ ne contient que des noeuds intermédiaires qui ont donc un flot net nul par l'équation de conservation),

$$\begin{aligned} f_{\text{net}}(S \rightarrow \bar{S}) &= f_{\text{net}}(S) \\ &= f_{\text{net}}(s) + f_{\text{net}}(S \setminus s) \\ &= f_{\text{net}}(s) \\ &= \text{valeur}(f) \end{aligned}$$

ou la dernière égalité est la définition de la valeur du flot. □

Lemme 10.6. Pour tout flot f et toute coupe $S \rightarrow \bar{S}$,

$$\text{valeur}(f) \leq \text{capacité}(S \rightarrow \bar{S}).$$

L'égalité a lieu si et seulement si toutes les arêtes a de la coupe $S \rightarrow \bar{S}$ sont f -saturées (i.e., $f(a) = c(a)$) et toutes les arêtes b de $\bar{S} \rightarrow S$ sont f -nulles (i.e., $f(b) = 0$).

Démonstration. On prend comme point de départ le lemme précédent :

$$\begin{aligned}
\text{valeur}(f) &= f_{\text{net}}(S \rightarrow \bar{S}) \\
&= \sum_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S} \\ ij \in E}} f(ij) - \sum_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S} \\ ji \in E}} f(ji) \\
&\leq \sum_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S} \\ ij \in E}} f(ij) \\
&\leq \sum_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S} \\ ij \in E}} c(ij) \\
&= \text{capacité}(S \rightarrow \bar{S}).
\end{aligned}$$

Avec égalité si et seulement si $\sum_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S} \\ ji \in E}} f(ji) = 0$ et $\sum_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S} \\ ij \in E}} f(ij) = \sum_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S} \\ ij \in E}} c(ij)$ c'est à dire que toutes les arêtes qui lient un noeud de S à un noeud de \bar{S} sont saturées et que les arêtes qui lient un noeud de \bar{S} à un noeud de S ont un flot nul. \square

Corollaire 10.7. Si un flot f et une coupe $S \rightarrow \bar{S}$ sont tels que

$$\text{valeur}(f) = \text{capacité}(S \rightarrow \bar{S}),$$

alors ce flot est maximum et cette coupe minimum.

Démonstration. On sait que pour toute coupe $S \rightarrow \bar{S}$ et flot f , $\text{capacité}(S \rightarrow \bar{S}) \geq \text{valeur}(f)$. Dès lors, pour toute coupe $\text{capacité}(S \rightarrow \bar{S}) \geq f_{\max}$ et pour tout flot, $\text{coupe}_{\min} \geq \text{valeur}(f)$ et en particulier $\text{coupe}_{\min} \geq f_{\max}$. On a donc

$$\text{capacité}(S \rightarrow \bar{S}) \geq \text{coupe}_{\min} \geq f_{\max} \geq \text{valeur}(f)$$

d'où $\text{capacité}(S \rightarrow \bar{S}) = \text{coupe}_{\min}$ et $f_{\max} = \text{valeur}(f)$ en cas d'égalité $\text{capacité}(S \rightarrow \bar{S}) = \text{valeur}(f)$. \square

On va montrer quelque chose d'encore plus fort : la valeur du flot maximum est toujours égal à la capacité de la coupe minimum. Pour cela, on a besoin de quelques définitions supplémentaires.

Définition 10.8. Etant donné un flot f , à tout chemin P dans le graphe non-dirigé sous-jacent associons la quantité $i(P) = \min_{a \in P} i(a)$, où $i(a) = c(a) - f(a)$ pour les arêtes a prises par P dans le sens direct, et $i(a) = f(a)$ pour les arêtes prises dans le sens inverse.

Un chemin P est f -saturé si $i(P) = 0$. Il est f -augmentant s'il est non saturé, part d'un noeud source et arrive à un noeud puits.

De manière intuitive, l'intérêt d'un chemin f -augmentant est que l'on peut augmenter la valeur du flot f en faisant passer plus de flot le long de ce chemin. En effet, un nouveau flot valide peut être obtenu en faisant la mise à jour $f(e) \leftarrow f(e) + i(P)$ pour les arêtes en sens direct, et $f(e) \leftarrow f(e) - i(P)$ pour les arêtes en sens inverse. La valeur du flot est ainsi augmentée de $i(P)$.

Exemple 10.9. Sur le flot f figure 3 on a un chemin f -augmentant $SABCDT$: en effet il va de la source S au puits T et est non-saturé car $i(SA) = 5 - 1 = 4$ (sens direct), $i(AB) = 2$ (sens inverse), $i(BC) = 1$, $i(CD) = 2$, $i(DT) = 4$ et donc $i(SABCDT) = 1$. On peut dès lors créer un nouveau flot f' valide qui augmente la valeur du flot de 1, donc $\text{valeur}(f') = \text{valeur}(f) + 1$. Le flot est alors modifié le long de ce chemin comme montré à la figure 4. Notre chemin est maintenant f' -saturé, on ne peut plus augmenter le flot le long de ce chemin (l'arête BC a atteint sa capacité maximale).

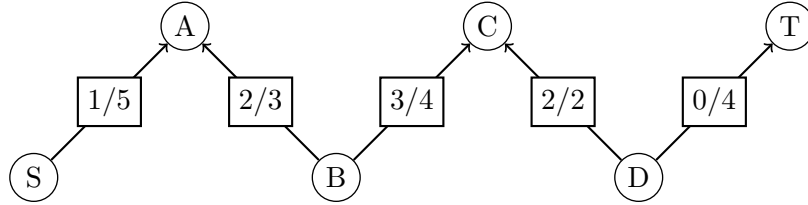


FIGURE 3 – Chemin f -augmentant. Note : seul le sous-graphe associé au chemin f -augmenté est représenté et non le graphe complet, sinon le flot ne serait pas correct (le flot net des noeuds intermédiaires est non nul).

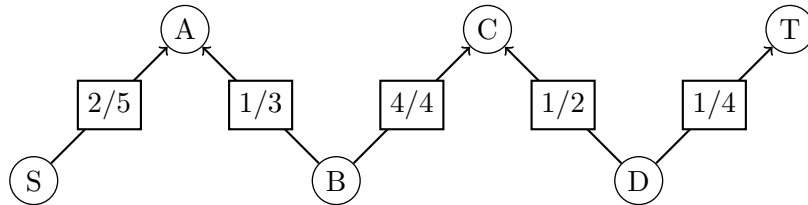


FIGURE 4 – Chemin avec f' . Il est f' -saturé.

Théorème 10.10. Un flot est maximum si et seulement si il ne contient pas de chemin f -augmentant.

Démonstration. Montrons un sens à la fois

- \Rightarrow Supposons par l'absurde qu'il existe un chemin f -augmentant dans un flot maximal f . Alors on peut améliorer strictement le flot le long de ce chemin augmentant, ce qui contredit l'hypothèse d'optimalité de f .
- \Leftarrow Soit f un flot qui ne contient pas de chemin f -augmentant. Soit S l'ensemble des noeuds qu'on peut atteindre à partir de la source avec

des chemins non f -saturés. S ne contient aucun puits, sinon on aurait un chemin f -augmentant. Soit une arête de $S \rightarrow \bar{S}$, elle est f -saturée par construction de S , sinon la destination de l'arête serait dans S . Soit une arête de $\bar{S} \rightarrow S$, elle doit être f -nulle pour la même raison. Dès lors,

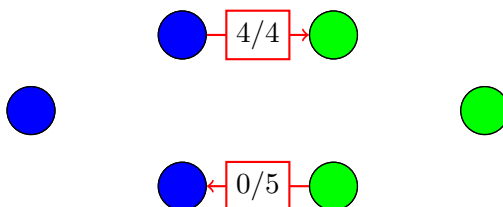


FIGURE 5 – En bleu, l'ensemble S et en vert, l'ensemble \bar{S}

$$\begin{aligned} \text{capacité}(S \rightarrow \bar{S}) &= \text{valeur du flot qui quitte } S \text{ vers } \bar{S} \\ &= \text{valeur du flot net entre } S \text{ et } \bar{S} \\ &= \text{valeur}(f), \end{aligned}$$

et par le corollaire 10.7 on a donc que cette coupe est la coupe minimum et ce flot est le flot maximum. □

Théorème 10.11 (“Max Flow = Min Cut”). La valeur du flot maximum et la capacité de la coupe minimum sont toujours égales, donc

$$f_{\max} = \text{coupe}_{\min}.$$

Démonstration. On a déjà prouvé dans le corollaire 10.7 que la capacité de la coupe minimale est toujours supérieure ou égale à la valeur du flot maximum, on montre ici qu'il est toujours possible de trouver une coupe de capacité égale au flot maximum. En utilisant la preuve du théorème précédent, on a une méthode qui montre comment du flot maximum on déduit une coupe minimale de même valeur. Il faut construire S l'ensemble des noeuds atteignables depuis les sources par des chemins non f -saturés, et la coupe minimale est donc donnée par $S \rightarrow \bar{S}$. □

10.2 L'algorithme de Ford-Fulkerson

Les résultats précédents suggèrent une méthode pour trouver le flot maximum dans un réseau : il suffit d'augmenter le flot en trouvant des chemins augmentants, jusqu'à ce que cela ne soit plus possible : c'est ce que fait l'algorithme de Ford-Fulkerson.

Algorithme 10.12 (Algorithme de Ford-Fulkerson). L'algorithme de Ford-Fulkerson permet de déterminer le flot maximum d'un graphe. Partant d'un flot initial arbitraire f , on cherche un chemin f -augmentant et on augmente le flot grâce à ce chemin, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chemin augmentant ce qui veut dire que le flot est optimal. Pour trouver le chemin augmentant on peut, par exemple, créer un graphe auxiliaire, où chaque arête est remplacée par une arête dans le même sens portant la capacité encore disponible (le flot qu'on peut ajouter, c'est-à-dire $c(e) - f(e)$) et une arête retour portant la quantité qu'on peut retirer sur cette arête (le flot qu'on peut retirer, c'est-à-dire $f(e)$). Il suffit ensuite de chercher un chemin partant d'une source vers un puits dans le graphe auxiliaire pour trouver un chemin augmentant associé.

Lemme 10.13. Dans tout graphe dirigé avec un noeud source u et un noeud puits v et chaque arête de capacité unitaire, le nombre maximum de chemins dirigés de u vers v disjoints deux à deux par les arêtes est la valeur du flot maximum.

11 \mathcal{P} , \mathcal{NP} et \mathcal{NP} -complétude

11.1 \mathcal{P} , \mathcal{NP} et \mathcal{NP} -complétude

Définition 11.1. Un *problème de décision* est une liste d'objets finis appelés *instances*, chacune porteuse d'un label OUI ou NON. Donc c'est une fonction des instances vers l'ensemble $\{\text{OUI}, \text{NON}\}$. Les instances positives sont celles de label OUI.

Un algorithme résout un problème de décision donné s'il prend en entrée une instance du problème et renvoie en sortie le label OUI ou NON correspondant à l'instance.

Définition 11.2. La *taille d'une instance* est le nombre de bits nécessaire pour décrire l'instance. Pour un graphe, on considère souvent que c'est son nombre d'arêtes ou son nombre de noeuds.

Définition 11.3. Un algorithme est *efficace* ou *polynomial* s'il produit une réponse en un temps borné par un polynôme de la taille de l'entrée.

Définition 11.4. La *classe \mathcal{P}* est la classe des problèmes pour lesquels il existe un algorithme efficace qui les résout.

Cette classe contient par exemple le problème du graphe eulérien.

Définition 11.5. Un problème est dans \mathcal{NP} s'il existe un algorithme efficace A tel que :

- pour chaque instance positive m , il existe un objet fini n tel que $A(m, n)$ renvoie OUI,
- pour chaque instance négative m et tout objet fini n , $A(m, n)$ renvoie NON.

Exemple 11.6. Problème du graphe hamiltonien :

m = graphe non-dirigé = instance

n = cycle dans m = “preuve” ou “témoin”

$A(m, n)$ = OUI ssi n est hamiltonien.

Corollaire 11.7. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$

Démonstration. C'est par définition de l'ensemble. On verra à la fin de cette section qu'il pourrait (bien qu'il est peu probable) prouver que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ \square

Définition 11.8. Etant donnés deux problèmes P et Q , on dit que P est *réductible en temps polynomial* à Q , ou que P est *réductible* à Q , ou plus informellement que P est plus facile que Q , noté $P \leq Q$, s'il existe un algorithme efficace A (appelé réduction) qui prenne en entrée une instance n de P et renvoie en sortie une instance $A(n)$ de Q , telle que n est positive ssi $A(n)$ est positive.

Exemple 11.9. Soit les problèmes suivant

Problème COUPLAGE-PARFAIT

Instance Graphe non-dirigé

Question Existe-t-il un couplage parfait ?

Problème POLYÈDRE-NON-VIDE

Instance Inégalité $Ax \leq b$ (géométriquement : polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\}$)

Question Le polyèdre est-il non vide ? C'est à dire, $\exists x : Ax \leq b$?

COUPLAGE-PARFAIT \leq POLYÈDRE-NON-VIDE

Démonstration. Soit M la matrice d'incidence du graphe. Il existe un couplage parfait si et seulement si $\exists x \in \{0,1\}^m$ tel que $Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si (il faut admettre le sens "seulement si", le sens "si" est trivial) $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $0 \leq x_i \leq 1$. Ce qui est un cas particulier de la question " $\exists x : Ax \leq b$?" Fabriquer A et b à partir du graphe se fait en temps polynomial en la taille du graphe. \square

Donc : Tout algo pour résoudre POLYÈDRE-NON-VIDE peut être utilisé pour résoudre COUPLAGE-PARFAIT.

Théorème 11.10. Si $P \leq Q$ et $Q \in \mathcal{P}$ alors $P \in \mathcal{P}$.

Démonstration. Cette preuve n'a pas été vue. \square

Exemple 11.11. Soit les problèmes suivant

Problème k -CLIQUE

Instance Graphe

Question Existe-t-il une clique à k noeuds ?

k -CLIQUE $\leq k$ -INDEPENDANT $\leq k$ -CLIQUE. Ils sont donc équivalents.

Définition 11.12. On dit qu'un problème P est \mathcal{NP} -complet si $P \in \mathcal{NP}$ et pour tout problème $Q \in \mathcal{NP}$, $Q \leq P$.

C'est donc un problème de \mathcal{NP} plus difficile que tous les autres.

Théorème 11.13 (Cook). SAT est \mathcal{NP} -complet.

Exemple 11.14. Soit le problème suivant

Problème SAT

Instance Formule logique

Question Existe-t-il des valeurs de vérité pour les variables telles que la formule est vraie.

Par exemple, l'instance $\neg(P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)$ est une instance positive car $(R, P, Q) = (\text{VRAI}, \text{FAUX}, \text{FAUX})$ vérifie la formule.

Théorème 11.15 (Karp). Déterminer si un graphe est hamiltonien est \mathcal{NP} -complet.

Démonstration. — HAMILTONIEN $\in \mathcal{NP}$: trivial.

— Il existe une réduction de SAT vers HAMILTONIEN (partie difficile de la preuve) donc $\text{SAT} \leq \text{HAMILTONIEN}$.

Donc HAMILTONIEN est \mathcal{NP} -complet. On a d'ailleurs $\text{SAT} = \text{HAMILTONIEN}$ car SAT est \mathcal{NP} -complet. \square

Théorème 11.16 (Comment prouver qu'un problème P est \mathcal{NP} -complet?). *Démonstration.* 1. Prouver $P \in \mathcal{NP}$;

2. Choisir un problème Q connu comme \mathcal{NP} - complet ;

3. Prouver $Q \leq P$ en exhibant une réduction efficace. \square

Définition 11.17. On pourrait essayer de prouver que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ si et seulement si on montrait qu'un problème \mathcal{NP} (Hamilton, SAT ou encore le sudoku) $\in \mathcal{P}$

Exemple 11.18. Quelques problèmes \mathcal{NP} -complets en théorie des graphes :

- k -CLIQUE
- k -COUVERTURE
- k -INDEPENDANT
- HAMILTONIEN
- k -COLORABILITE
- k -ARETE-COLORABILITE
- COUPE-MAX
- VOYAGEUR DE COMMERCE

Exemple 11.19. k -INDEPENDANT est \mathcal{NP} -complet.

La réduction de 3-SAT vers k -INDEPENDANT sur un exemple :

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

donne

