

Logică digitală

-Curs 5-
Minimizare
-2021-

Sinteza funcțiilor logice

- Hărți Karnaugh
 - Quine McCluskey
 - Maparea în tehnologie a funcțiilor logice folosind:
 - ȘI-NU
 - SAU_NU
 - XOR
 - PLA
-

Minimizarea funcțiilor logice

□ se înțelege simplificarea/rescrierea ecuațiilor logice booleene în vederea:

■ Unui cost mai mic și/sau;

■ Performanță mai ridicată;

□ Cheia simplificării este: $y(x + \bar{x}) = y$

■ distributivitatea - $x(y+z) = xy+xz$ —

■ Proprietatea complementului $x + \bar{x} = 1$

Minimizarea funcțiilor logice

- Găsirea a doi termeni (produs SOP) pentru care:
 - funcția ia valoare 1
 - numai o variabilă își modifică valoarea

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

B are aceeași
valoare → B este
păstrat

A are valori
diferite → A este
eliminat

$$F = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} = (\bar{A} + A)\bar{B} = \bar{B}$$

Metoda de minimizare Karnaugh

□ Diagramele Karnaugh:

- Metodă alternativă tabelelor de adevăr și ecuațiilor logice de a vizualiza o funcție
 - se aplică atât pentru ecuațiile logice descrise sub formă canonică de sumă de produse (SOP), cât și pentru ecuațiile logice descrise sub formă canonică de produs de sume (POS)
-

Diagramele Karnaugh

- ❑ constituie o matrice de pătrate cu proprietatea ca două celule vecine corespund unor mintermi **adiacenți**.
 - ❑ doi vectori sunt adiacenți dacă diferă valoric printr-un singur bit
 - ❑ în diagramă se marchează acei mintermi care au valoarea logică 1 în tabelul de adevăr
-

Diagrame Karnaugh

- ❑ Numerele adiacente numărului 0100 sunt: 0101; 0110; 0000; 1100.
 - ❑ Numerele adiacente numărului 000 sunt: 001; 010; 100.
 - ❑ Vectorii adiacenți mintermului abc sunt: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}c$, abc
-

Construcție diagrame Karnaugh

- Diagrame Karnaugh pentru funcții logice cu 2 variabile a, b

		b	
		0	1
a	0	(00)	(01)
	1	(10)	(11)

00 - $\bar{a}\bar{b}$
01 - $a\bar{b}$
11 - ab
10 - $\bar{a}b$

Construcție diagrame Karnaugh

- Diagrame Karnaugh pentru funcții logice cu 3 variabile a, b, c

		<u>b</u>			
		<u>bc</u>			
a	0	00	01	11	10
	000	001	011	010	
a	1	100	101	111	110
		<u>c</u>			

Construcție diagrame Karnaugh

- construcția diagramei Karnaugh pentru o funcție logică cu 4 variabile de intrare

cd \ ab		c			
		00	01	11	10
a	00	0000	0001	0011	0010
	01	0100	0101	0111	0110
	11	1100	1101	1111	1110
	10	1000	1001	1011	1010
		d			
		b			

Diagrame Karnaugh

□ Ex. completare diagramă:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

		b			
		bc			
a	0	00	01	11	10
	0	000	001	011 1	010
1	1	100	101 1	111 1	110 1

1. Introducerea mintermilor în diagramă conform tabelului de adevăr.

Diagrame Karnaugh

□ Ex. completare diagramă:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

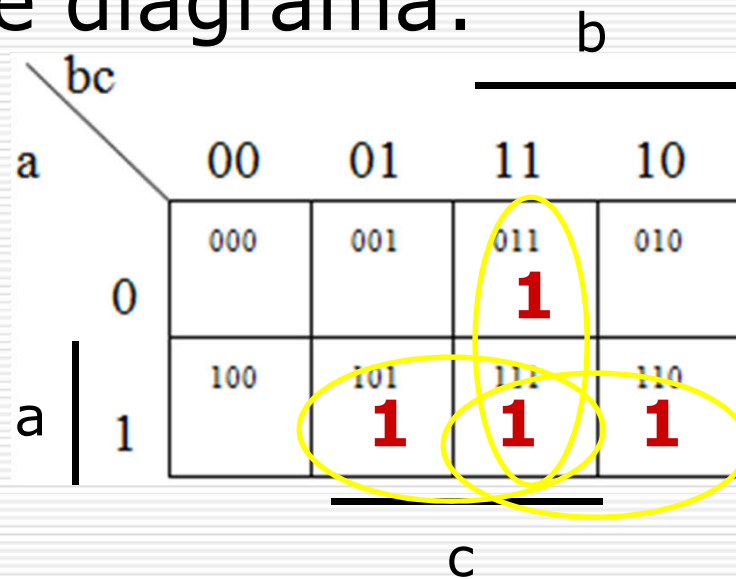
		b			
		bc			
a	0	00	01	11	10
	0	000	001	011 1	010
1	1	100	101 1	111 1	110 1

2. se încearcă formarea unor grupe de mintermi bazate pe reguli de adiacență

Diagrame Karnaugh

□ Ex. completare diagramă:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

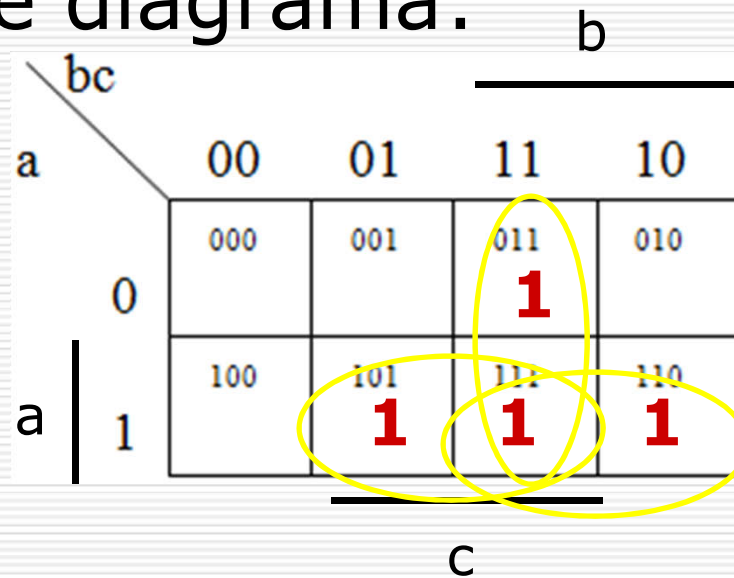


2. O grupare are forma unor dreptunghiuri/pătrate și conține 2^n mintermi!

Diagrame Karnaugh

□ Ex. completare diagramă:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



2. O grupare are forma unor dreptunghiuri/pătrate și conține 2^n mintermi!

Diagrame Karnaugh

□ Ex. completare diagramă:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

		b			
		bc			
a	0	00	01	11	10
	0	000	001	011 1	010
a	1	100	101 1	111 1	110 1

2. Din totalul de m variabile booleene a funcției, termenul asociat grupării formate va conține $m-n$ variabile

Diagrame Karnaugh

□ Ex. completare diagramă:

		bc			
		00	01	11	10
a	0	000	001	011 1	010
	1	100	101 1	111 1	110 1

2. Din totalul de m variabile booleene a funcției, termenul asociat grupării formate va conține $m-n$ variabile

Minimizarea folosind diagrame Karnaugh

- Dacă la o astfel de grupare nu mai pot fi adăugați mintermi înseamnă că s-a obținut un **implicant prim**.
 - Dacă un anumit implicant prim conține cel puțin un minterm care nu poate apare în alt implicant prim atunci acesta este un **implicant prim esențial**
-

Diagrame Karnaugh

□ Ex. completare diagramă:

		b			
		bc			
a	0	000	001	011 1	010
	1	100	101 1	111 1	110 1

$$f = ab + ac + bc$$

3. Ecuația minimizată va conține toți implicantii primi esențiali, și uneori și implicantii primi neesențiali, astfel încât toate celule marcate cu 1 logic să fie acoperite.

Diagramme Karnaugh

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	⁰ $x'y'z'w'$	¹ $x'y'z'w$	³ $x'y'zw$	² $x'y'zw'$
01	⁴ $x'yz'w'$	⁵ $x'yz'w$	⁷ $x'yzw$	⁶ $x'yzw'$
11	¹² $xyz'w'$	¹³ $xyz'w$	¹⁵ $xyzw$	¹⁴ $xyzw'$
10	⁸ $xy'z'w'$	⁹ $xy'z'w$	¹¹ $xy'zw$	¹⁰ $xy'zw'$

Map Organization

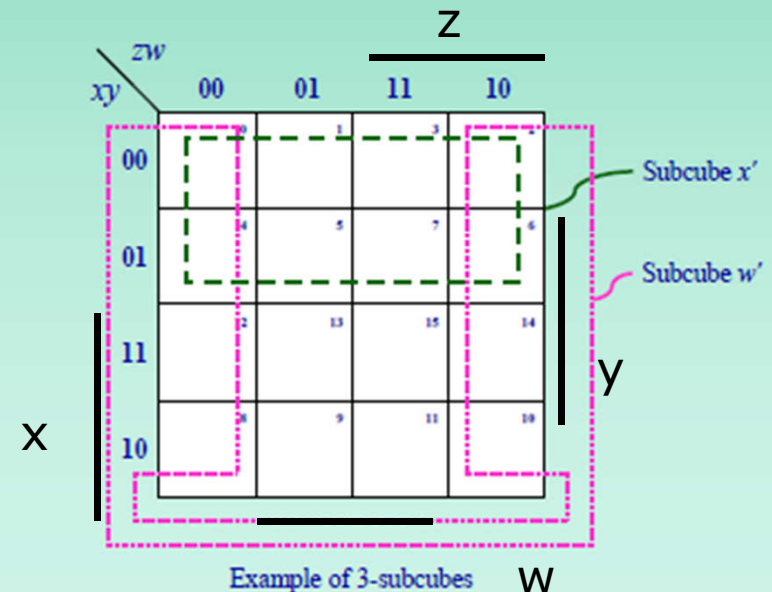
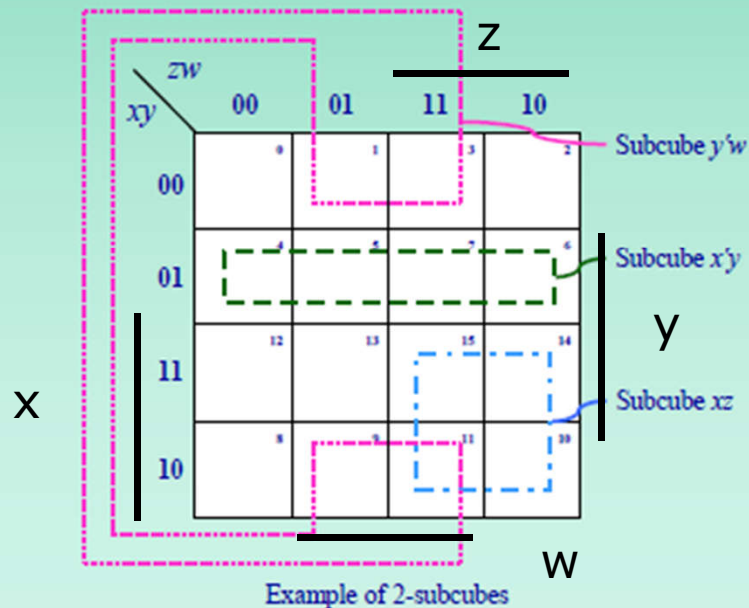


Diagramme Karnaugh

x_1	x_0	y_1	y_0	Greater Than	Equal	Less Than
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0

Truth Table

$x_1x_0 \backslash y_1y_0$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	1	5	7	6
11	1	13	15	1
10	1	9	11	10

Greater-than Function

$$G = x_1y_1' + x_0y_1y_0' + x_1x_0y_0'$$

$x_1x_0 \backslash y_1y_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	4	5	1	6
11	12	13	15	14
10	8	9	1	10

Less-than Function

$$L = x_1'y_1 + x_1'x_0y_0 + x_0y_1y_0$$

Diagrame Karnaugh – don't care

- ❑ Nu toate funcțiile logice sunt definite complet.
 - ❑ Pentru unele valori ale variabile de intrare funcția este nu specificată (funcția are „valoarea” don't care - d)
 - ❑ Pt. "d" în diagrama Karnaugh se va lua în considerare valoarea care ne convine pentru d (0 sau 1) a.î. să permită o acoperire mai largă a minternilor.
-

a	b	c	p	q
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	d
0	1	1	d	1
1	0	0	0	d
1	0	1	0	0
1	1	0	d	0
1	1	1	1	1

Tabelul 5.3

Funcțiile p și q pot fi scrise și altfel:

$$p = f(a, b, c) = \sum (1; 2; 7) + \sum d(3; 6)$$

$$q = f(a, b, c) = \sum (0; 3; 7) + \sum d(2; 4)$$

a	bc			
	00	01	11	10
0		1	d	1
1			1	d

a	bc			
	00	01	11	10
0	1		1	d
1	d		1	

$$p = b + \bar{a}c$$

$$q = \bar{b}\bar{c} + bc$$

Minimizare: metoda Quine McCluskey

- ❑ este o metodă tabelară;
 - ❑ mai laborioasă pentru un număr mic de variabile de intrare;
 - ❑ elimină în bună măsură dezavantajele metodei Karnaugh:
 - Poate fi inclusă în programe specializate de sinteză;
 - Permite o abordare sistematică pentru funcții cu mai multe variabile de intrare;
-

Metoda Quine McCluskey

Studiu de caz

- Să se minimizeze următoarea funcție logică prin metoda Quine-McCluskey:

$$f1(a,b,c,d) = \sum (1,3,4,5,6,9,11,12,13)$$

Quine McCluskey

Pasul 1:

- ❑ mintermi sunt grupați într-un tabel funcție de numărul de variabile nenegate conținute.
 - ❑ aranjarea se va face în ordine crescătoare.
 - ❑ o funcție cu patru variabile de intrare poate avea cinci grupe de minterm:
 - ❑ grupa 0: numai minterm-ul 0,
 - ❑ grupa 1 : mintermi 1, 2, 4 și 8,
 - ❑ grupa 2 : mintermi 3, 5, 6, 9, 10, 12,
 - ❑ grupa 3 va conține mintermi 7, 11, 13 și 14,
 - ❑ grupa 4 va conține minterm-ul 15.
-

Quine McCluskey

$$f1(a,b,c,d) = \sum (1,3,4,5,6,9,11,12,13)$$

Pasul 1:

- ❑ În tabel se trec doar minterm-ii a căror valoare în tabelul de adevăr este **1**
 - ❑ Ex. considerat: 1, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13
 - ❑ grupa 0: numai minterm-ul 0,
 - ❑ grupa 1 : mintermi **1**, 2, **4** și 8,
 - ❑ grupa 2 : mintermi **3**, **5**, **6**, **9**, 10, **12**,
 - ❑ grupa 3 va conține mintermi 7, **11**, **13** și 14,
 - ❑ grupa 4 va conține minterm-ul 15.
-

Quine McCluskey

$$f1(a,b,c,d) = \sum (1,3,4,5,6,9,11,12,13)$$

Pasul 1:

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

- ❑ fiecare minterm din grupă *i* se se compară cu fiecare minterm din grupa *i+1*
 - ❑ Se verifică condiția de adiacență (să difere doar printr-o singură variabilă logică)
 - ❑ Dacă doi mintermi verifică condiția de adiacență atunci:
 - se înlocuiește variabila care diferă cu o liniuță
 - grupul de doi mintermi va fi trecut în grupa *i*.
 - în tabelul precedent se bifează toți mintermii care au fost grupați. ***Această observație este importantă în vederea ultimului pas.***
-



Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	




Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	




Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	





Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	





Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	






Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	☺
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	☺
	5	0	1	0	1	☺
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	☺
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	







Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	







Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	








Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	









Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	










Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	
	1,5	0	-	0	1	
	1,9	-	0	0	1	
	4,5	0	1	0	-	
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	
2	3,11	-	0	1	1	
	5,13	-	1	0	1	
	9,11	1	0	-	1	
	9,13	1	-	0	1	
	12,13	1	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 2

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1	0	0	0	1	
	4	0	1	0	0	
2	3	0	0	1	1	
	5	0	1	0	1	
	6	0	1	1	0	
	9	1	0	0	1	
	12	1	1	0	0	
3	11	1	0	1	1	
	13	1	1	0	1	

Quine McCluskey

Pasul 2

- Pasul 2 se repetă **recursiv** până **NU** se mai pot forma grupări pe baza adicenței!
-

Quine McCluskey

Important:

Toți termenii nebifați din tabelele
construite până acum sunt **implicanți
primi!**

Quine McCluskey

Pasul 3

□ nou tabel:

- prima coloană: grupările obținute care sunt implicanții primi
- Celelalte coloane toți mintermii conținuți de implicanții primi
- în dreptul fiecărui implicant prim se bifează minterm-ii care îi conține

Implicanți primi	Mintermi acoperiți	Mintermi								
		1	3	4	5	6	9	11	12	13
$\bar{a}b\bar{d}$	4,6			X		X				

Quine McCluskey

Pasul 3

- Dacă un minterm este conținut de un singur implicant prim → implicant prim esențial;
 - Expresia minimizată a funcției conține:
 - implicantii primi esențiali,
 - implicantii primi selectați astfel încât acoperirea de mintermi cu fiecare implicant adăugat să fie maximă.
-

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3	0	0	-	1	X
	1,5	0	-	0	1	X
	1,9	-	0	0	1	X
	4,5	0	1	0	-	X
	4,6	0	1	-	0	
	4,12	-	1	0	0	X
2	3,11	-	0	1	1	X
	5,13	-	1	0	1	X
	9,11	1	0	-	1	X
	9,13	1	-	0	1	X
	12,13	1	1	0	-	X

Grupă	Mintermi	a	b	c	d	Bifare
1	1,3,9,11	-	0	-	1	
	1,5,9,13	-	-	0	1	
	4,5,12,13	-	1	0	-	

Quine McCluskey

Pasul 3

$$f1(a, b, c, d) = \bar{a}b\bar{d} + \bar{b}d + b\bar{c}$$

Implicanți primi	Mintermi acoperiți	Mintermi								
		1	3	4	5	6	9	11	12	13
$\bar{a}b\bar{d}$	4,6			X		X				
$\bar{b}d$	1,3,9,11	X	X				X	X		
$\bar{c}d$	1,5,9,13	X			X		X			X
$b\bar{c}$	4,5,12,13			X	X				X	X

Implicant prim
esențial (singur pe
coloană)

Întrebări?

**Enough Talking Let's Get To It
!!Brace Yourselves!!**

