Stabilitate

I Liniare continue, invariante în timp

3. Teorema fundamentală a stabilității a sistemelor liniare continue și invariante în timp

Fie sistemul dinamic SISO în timp continuu descris de modelul matematic intrare-stare-ieșire (MM-ISI) sau de modelul matematic intrare-ieșire (MM-II):

MM-ISI:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u, \qquad y = \mathbf{c}^T\,\mathbf{x}, \tag{3.1-a}$$

sau MM-II:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(\nu)}(t) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu u^{(\mu)}(t),\ m < n. \tag{3.1-b}$$

Ambele modele pot fi reprezentate prin f.d.t. $H(s)$:

$$H(s) = \begin{cases} \mathbf{c}^T(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}^T \dfrac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\mathbf{b}, \\[2ex] \dfrac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}. \end{cases}$$

Ecuația caracteristică $\Delta(s) = 0$ poate fi exprimată astfel:

$$\Delta(s) = \begin{cases} \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0, \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu s^\nu = 0. \end{cases}$$

Poli

→ stabil ⟺ toate rădăcinile ec. caracteristice au părțile reale negative

$Re(s_\nu) < 0 \qquad \nu = 1 \ldots n$

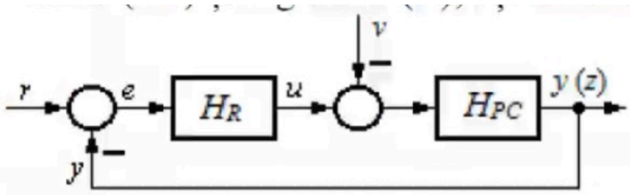

Fig. 3. Structură de reglare automată convențională (buclă de reglare).

Funcția de transfer (f.d.t.) în buclă închisă de la mărimea de referință r la mărimea de ieșire y este dată de:

$$H_{zr}(s) = \frac{H_R(s)H_{PC}(s)}{1 + H_R(s)H_{PC}(s)} = \frac{H_0(s)}{1 + H_0(s)}, \tag{3.5}$$

cu $H_R(s)H_{PC}(s) = H_0(s)$. $H_0(s)$ este de asemenea denumită f.d.t. a sistemului deschis (f.d.t. în buclă deschisă). Așadar stabilitatea este analizată pentru ecuația caracteristică $\Delta(s) = 0$, ceea ce este echivalent cu $1+H_0(s)=0$. În timpul calculului f.d.t. în buclă deschisă, rezultată ca și produs dintre f.d.t. a regulatorului și f.d.t. a procesului condus, pot fi efectuate simplificări între factorii comuni de la numărător și de la numitor. **Efectuarea simplificărilor va conduce la un rezultat greșit în ceea ce privește stabilitatea sistemului în buclă închisă și, din acest motiv, este interzisă.**

$\Delta(s) = 0 \quad == \quad 1 + H_0(s) = 0$

Regulator -> Zeros

Proces Condus -> Poles

$$\Delta(s) = 1 + H_0(s) = 1 + \frac{1+4s}{1+s}\cdot\frac{1}{(1+2s)(1+4s)} = 0.$$

(1) Fără simplificarea (1+4s) (**corect**) rezultatul este

$$\Delta(s) = (1+4s)(2+3s+2s^2) = 0,$$

cu rădăcinile

$$s_1 = -\frac{1}{4},\ s_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{4} \rightarrow \text{sistem stabil.}$$

(2) Simplificând factorul comun (1+4s) (**incorect**), ecuația caracteristică devine

$$\Delta'(s) = (1+2s)(1+s) + 1 = 2s^2 + 3s + 2 = 0,$$

cu rădăcinile:

$$s'_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{4} \rightarrow \text{sistem stabil.}$$

Criteriul lui Hurwitz

Teorema 2: Pentru ca rădăcinile unei ecuații algebrice de forma

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{4.1}$$

să aibă părți reale negative, este necesar (dar nu și suficient) ca toți coeficienții ecuației să fie strict pozitivi.
Așadar, dacă cel puțin unul dintre coeficienți nu este strict pozitiv, atunci sistemul caracterizat prin $\Delta(s)$ **este instabil**.

Criteriul de stabilitate al lui Hurwitz necesită construirea matricei Hurwitz a coeficienților:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_{n-1} & \end{array} \\ \mathbf{H} = & \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \ldots 0 & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots a_2 & a_0 \end{bmatrix} . \end{array} \tag{4.2}$$

Utilizând **H**, vor fi efectuate calculele următoare:

- determinantul Hurwitz det(**H**),
- minorii principali ai lui **H**: det($\mathbf{H}_1$), det($\mathbf{H}_2$), ...

Condițiile suficiente astfel încât sistemul caracterizat de $\Delta(s)$ **să fie stabil** sunt ca **determinantul Hurwitz și toți minorii principali să fie strict pozitivi**.

$$H_R(s)=\frac{k_R(1+8s)}{1+20s};\quad H_{pc}(s)=\frac{1-4s}{(1+2s)(1+7s)},\quad k_R>0$$

$$\Delta(s)=1+H_0(s)=1+H_R(s)H_{pc}(s)=1+\frac{k_R(1+8s)(1-4s)}{(1+20s)(1+2s)(1+7s)}$$

$$\Delta(s)=(1+20s)(1+2s)(1+7s)+k_R(1+8s)(1-4s)$$
$$\Delta(s)=(1+20s)(14s^2+9s+1)+k_R(1+4s-32s^2)$$
$$\Delta(s)=14s^2+9s+1+280s^3+180s^2+20s+k_R+4k_Rs-32k_Rs^2$$
$$\Delta(s)=280s^3+(194-32k_R)s^2+(29+4k_R)s+k_R+1=a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

Sunt impuse condițiile necesare specificate în teorema 2 (T_2):

$$\left.\begin{array}{l}
a_3=280>0\\
a_2=194-32k_R>0\Rightarrow 32k_R<194\Rightarrow k_R<6{,}0625\Rightarrow k_R\in(-\infty;6{,}0625)\\
a_1=29+4k_R>0\Rightarrow 4k_R>-29\Rightarrow k_R>-7{,}25\Rightarrow k_R\in(-7{,}25;+\infty)\\
a_0=k_R+1>0\Rightarrow k_R>-1\Rightarrow k_R\in(-1;+\infty)
\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$k_R\in(-\infty;6{,}0625)\cap(-7{,}25;+\infty)\cap(-1;+\infty)\cap(0;+\infty)\Rightarrow\boxed{k_R\in(0;6{,}0625)}\ (*)$$

$$n=3\Rightarrow\quad H=\begin{bmatrix}a_2&a_0&0\\a_3&a_1&0\\0&a_2&a_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}194-32k_R&k_R+1&0\\280&29+4k_R&0\\0&194-32k_R&k_R+1\end{bmatrix}$$

Sunt impuse condițiile de stabilitate (condițiile suficiente):

$$\det(H_1)=a_2=194-32k_R>0\Rightarrow k_R\in(-\infty;6{,}0625)$$
$$\det(H_2)=a_2a_1-a_3a_0>0\Rightarrow(194-32k_R)(29+4k_R)-280(k_R+1)>0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5626+776k_R-928k_R-128k_R^2-280k_R-280>0$$
$$-128k_R^2-432k_R+5346>0\Rightarrow 128k_R^2+432k_R-5346<0\Rightarrow$$
$$k_R^2+3{,}375k_R-41{,}7656<0,\quad \Delta=b^2-4ac=(3{,}375)^2+4\cdot 41{,}7656=178{,}453$$

$$k_{R_{1,2}}=\frac{-3{,}375\pm 13{,}3586}{2}\ \begin{array}{l}\nearrow k_{R_1}\cong 4{,}9919\\ \searrow k_{R_2}=-8{,}3668\end{array}\ \Rightarrow k_R\in(-8{,}3668;4{,}9919)$$

k_R	$-\infty$		$-8{,}3668$		$4{,}9919$		$+\infty$
$k_R-4{,}9919$	− − −	− − −	− − −	− − −	0	+ + +	+ + +
$k_R+8{,}3668$	− − −	− − −	0	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +
$(\ )(\ )$	+ + +	+ + +	0	− − −	0	+ + +	+ + +

$$\det(H_3)=a_0\cdot\det(H_2)=(k_R+1)\det(H_2)>0\Rightarrow k_R(-1;+\infty)\cap(-8{,}3668;4{,}9919)$$
$$\Rightarrow k_R\in(-1;4{,}9919)$$

$$k_R\in(-\infty;6{,}0625)\cap(-8{,}3668;4{,}9919)\cap(-1;4{,}9919)\cap(0;+\infty)\Rightarrow\boxed{k_R\in(0;4{,}9919)}\ (**)$$

din (*) și (**) $\Rightarrow k_R\in(0;6{,}0625)\cap(0;4{,}9919)\Rightarrow\boxed{k_R\in(0;4{,}9919)}$

Temă: 1; 2 Lab 3 ts 2022

+ simulink -> 3 valori stabilitate / aproape / instabilitate

1) Să se analizeze stabilitatea sistemelor următoarelor în timp continuu: motorul de curent continuu, procesul de încălzire electrică a unei camere (incluzând elementele de execuție și cele de măsură), modelul matematic al dinamicii virusului HIV prezentat în laboratorul 1, sistemul masă-arc-amortizor și sistemul electric prezentate în laboratorul 2.

2) Să se determine domeniul de variație a parametrului k pentru care sistemul în timp continuu care are polinomul caracteristic

$$\Delta(s) = s^3 + 3k\, s^2 + (k+2)s + 4$$

este stabil.

3) Fie bucla de reglare caracterizată prin f.d.t. a procesului condus

$$H_{PC}(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}.$$

Să se proiecteze un regulator în timp continuu care să stabilizeze sistemul în buclă închisă în două cazuri, a) și b):

a) regulator Proporțional (P), cu f.d.t. $H_R(s) = k$ și trebuie determinat domeniul de variație al parametrului k al regulatorului.

b) regulator Proporțional-Integrator (PI), cu f.d.t. $H_R(s) = k_P + \frac{k_I}{s}$, k_P – coeficientul componentei P, k_I – coeficientul componentei I și trebuie determinat domeniul în planul $\langle k_P, k_I \rangle$.