5) Să se verifice stabilitatea sistemului cu f.d.t. a sistemului deschis (f.d.t. în buclă deschisă)

$$H_0(z) = \frac{0.2z + 0.5}{z^2 - 1.2z + 0.2}.$$

6) Să se determine valoarea parametrului *k* pentru care sistemul cu f.d.t. în buclă deschisă

$$H_0(z) = \frac{k(0.2z + 0.5)}{z^2 - 1.2z + 0.2}$$

este stabil.

7) Ecuația caracteristică a unui sistem în timp discret este dată de

$\Delta(z) = z^3 - 2z^2 + 1.4z - 0.1.$

Să se analizeze stabilitatea acestui sistem.

(7) $z^3 - 2z^2 + 1.4z - 0.1 - 1 =$

$$H_0(z) = \frac{1}{z^3 - 2z^2 + 1.4z - 1.1}$$

$$1 + H_0(z) = \Delta(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 1.4 - 1.1 + 1}{\ldots}$$

$2n - 3 = 2$

$\Delta(z) = z^3 - 2z^2 + 1.4z - 0.1$ $\quad n = 3$

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	a_0	a_1	a_2	a_3
2	a_3	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.1 & 1 \\ 1 & -0.1 \end{vmatrix} = -0.99$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.1 & -2 \\ 1 & 1.4 \end{vmatrix} = 1.86$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.1 & 1.4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.2$$

$$\begin{cases} a_3 > 0 \\ \Delta(1) > 0 \;\big|\; 1 - 2 + 1.4 - 0.1 = 0.3 \checkmark \quad a_3 > 1 \\ \Delta(-1) < 0 \;\big|\; -1 - 2 - 1.4 - 0.1 < 0 \checkmark \\ \quad n \,\%\, 2 = 1 \\ |a_0| < a_n \rightarrow |-0.1| < 1 \checkmark \quad |b_0| > |b_2| \rightarrow 0.99 > 1.2 \; \times \end{cases}$$

$\rightarrow$ Sistem instabil

5) Să se verifice stabilitatea sistemului cu f.d.t. a sistemului deschis (f.d.t. în buclă deschisă)

$$H_0(z) = \frac{0.2z + 0.5}{z^2 - 1.2z + 0.2}.$$

$\Delta(z) = 1 + H_0(z) = z^2 - 1.2z + 0.2 + 0.2z + 0.5$

$\Delta(z) = 1 \cdot z^2 - z + 0,7 \quad > 0$

$n = 2$

$2 \cdot n - 3 = 1$

z_2	z_1	z_0
a_2	a_1	a_0

✓

$$\begin{cases} \Delta(1) > 0 & 1 - 1 + 0.7 = 0.7 > 0 \\ \Delta(-1) > 0 \ (n \text{ par}) & 1 + 1 + 0.7 > 0 \\ |a_0| < a_2 & |0.7| < 1 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

✓✓

-> Sistemul este stabil

$\Delta(z) = z^2 - z + 0,7$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 0,7 = -1,8$

$z_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{1,8}}{2}$ ⟨ $z_1 = 0.5 + i \cdot 0,67$; $z_2 = 0.5 - i \cdot 0,67$

$|z_1| = \sqrt{0.5^2 + 0,67^2} = \sqrt{0,25 + 0,4489} = \sqrt{0,6989}$

$= |z_2| = \sqrt{0.5^2 + (-0,67)^2}$

$0,69 < 1$

$\sqrt{0,69} < 1$

$$\begin{cases} |z_1| < 1 \\ |z_2| < 1 \end{cases}$$

-> stabil

6) Să se determine valoarea parametrului k pentru care sistemul cu f.d.t. în buclă deschisă

$$H_0(z) = \frac{k(0.2z+0.5)}{z^2 - 1.2z + 0.2}$$

este stabil.

$$\Delta(z) = 1 + H_0(z) = \frac{z^2 - 1.2z + 0.2 + k(0.2z + 0.5)}{----} = 0$$

$$\Delta(z) = z^2 + (0,2k - 1,2)z + (0,5k + 0,2)$$

$n = 2 \rightarrow 2 \cdot n - 3 = 1$

	z_2	z_1	z_0
1	a_2	a_1	a_0

$$\begin{cases} a_2 > 0 \\ \Delta(1) > 0 \\ \Delta(-1) > 0 \ (n \text{ par}) \\ |a_0| < a_2 \end{cases}$$

$1 > 0$

$\cancel{1} + 0,2k - \cancel{1,2} + 0,5k + \cancel{0},2 > 0$

$0,7k > 0$

$\underline{k > 0}$

$1 - 0,2k + 1,2 + 0,5k + 0,2 > 0$

$1,4 + 0,3k > 0$

$0,3k > -1,4$

$k > -4,66$

$\underline{k > 0}$

$|a_0| < a_2$

$|\underbrace{0,5k}_{>0} + 0,2| < 1$

$0,5k < 0,8$

$\underline{k < 1,6}$

$$\boxed{k \in (0, 1.6)}$$

Metoda II

$$\Delta(z) = z^2 + (0{,}2k - 1{,}2)z + (0{,}5k + 0{,}2)$$

$$z = \frac{r+1}{r-1}$$

$$r-1 \qquad (r-1)^2$$

$$\Delta(r) = \frac{(r+1)^2}{(r-1)^2} + (0{,}2k - 1{,}2)\frac{r+1}{r-1} + (0{,}5k + 0{,}2)$$

$$(r^2 - 2r + 1)$$

$$\Delta(r) = \frac{r^2 + 2r + 1}{(r-1)^2} + \frac{(r^2-1)(0{,}2k - 1{,}2)}{(r-1)^2} + \frac{\cancel{(r-1)}^2(0{,}5k+0{,}2)}{(r-1)^2}$$

$$\Delta(r) = \cancel{r^2} + 2r + 1 +$$
$$+ 0{,}2k\,r^2 - \cancel{1{,}2\,r^2} - 0{,}2k + 1{,}2 +$$
$$+ 0{,}5k\,r^2 + \cancel{0{,}2\,r^2} - kr - 0{,}4r + 0{,}5k + 0{,}2$$

$$\Delta(r) = (0{,}7k)r^2 + (1{,}6 - k)r + (2{,}4 + 0{,}3k)$$

$$\begin{cases} 0{,}7k > 0 & k > 0 \\ 1{,}6 - k > 0 & k < 1{,}6 \\ 2{,}4 + 0{,}3k > 0 & \end{cases}$$

$$\underline{k \in (0;\ 1{,}6)}$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det(H_1) &> 0 \\ \det(H_2) &> 0 \end{aligned}$$

$$a_1 > 0 \rightarrow 1{,}6 - k > 0, \quad \underline{k < 1{,}6}$$

$$\det(H_2) > 0 \rightarrow a_1 a_0 > 0$$

$$\underbrace{(1{,}6 - k)}_{k < 1{,}6}\underbrace{(2{,}4 + 0{,}3k)}_{k > 0} > 0$$

$$\boxed{k \in (0,\ 1{,}6)}$$