

3. CARACTERIZAREA SISTEMELOR ÎN DOMENIUL OPERAȚIONAL

Dependent de modul de tratare a timpului, caracterizarea matematică în domeniul operațional a SL (SLn) are la bază două transformări operaționale:

- transformarea Laplace, pentru cazul sistemelor cu timp continuu (-C),
- transformarea Laplace discretă, sau transformarea Z, pentru cazul sistemelor cu timp discret (-D).

Transformarea Laplace a fost tratată în unul din capitolele anterioare.

3.2. Transformarea Laplace discretă (transformarea Z)

Definirea transformării Z (este utilizată exclusiv în studiul SD-D). Dacă o funcție de timp (un șir) $u^*(k) = \{u_k = u(k)\}_{k \in N}$, $u^*: N \rightarrow R$ (fig.3.1) are proprietatea:

□ $\exists M > 0$ și $\sigma_0 \geq 0$ (σ_0 - indice de creștere) astfel încât

$$|u_k| \leq M \cdot \sigma_0^k, \quad \forall k \in N,$$

atunci ea admite o *transformată Z definită prin relația* ([P1], [D1], [V1]):

$$u(z) = Z\{u^*(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot z^{-k}, \quad (3.2.1)$$

cu $u(z): \Delta_0 \rightarrow C$, în care $\Delta_0 = \{z \in C \mid |z| > \sigma_0\}$, iar σ_0 reprezintă tocmai raza de convergență a seriei din membrul drept al relației (3.2.1).

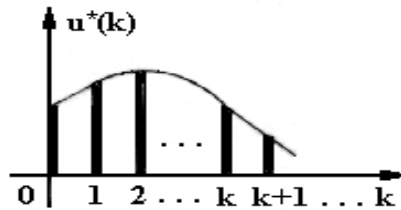


Fig.3.1. Secvența de valori $u^*(k)$.

Prin analogie cazului cu timp continuu, $u(z)$ este numită **imaginea** lui $u(k)$ sau **transformata Laplace discretă** a lui $u(k)$, iar $u(k)$ **originalul** lui $u(z)$ sau **șirul original** al lui $u(z)$. Șirul original este marcat cu indicele superior “*”. **Transformarea Laplace discretă** este o aplicație liniară de la mulțimea șirurilor original la mulțimea funcțiilor complexe de variabilă complexă, care asociază

Curs 6
Caracterizarea matematica a sistemelor în domeniul operațional

fiecărui șir original transformata sa Z . Funcția complexă de variabilă complexă $u(z)$ este peste tot definită în exteriorul discului Δ_0 al planului complex.

Originalul $u(k)$ poate fi calculat din $u(z)$ utilizând relația de inversiune:

$$u(k) = Z^{-1}\{u(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C u(z) \cdot z^{k-1} ds, \quad c > \sigma_0, \quad (3.2.2)$$

Conturul (C) reprezintă o curbă închisă care include toate singularitățile lui $f(z)$.

În tabelul 3.2 sunt sintetizate principalele proprietăți și teoreme referitoare la transformarea Z . În tabelul A.2.1 sunt prezentate sintetic principalele transformate Z utilizate în aplicațiile de conducere.

Tabelul 3.2. Proprietățile de bază ale transformării Z .

Nr. crt.	Proprietate	Enunț
1.	Liniaritate	$Z\{c_1 f_k + c_2 g_k\} = c_1 f(z) + c_2 g(z), \quad \forall c_1, c_2 \in R$
2.	Teorema diferenței originalului	$Z\{f_{k+1} - f_k\} = (z-1)f(z) - f_0,$ $Z\{f_k - f_{k-1}\} = (1-z^{-1})f(z) - f_{-1},$
3.	Teorema sumei originalului	$Z\{\sum_{i=0}^k f_i\} = \frac{1}{1-z^{-1}} f(z)$
4.	Teorema întârzierii	$Z\{f_{k-d}\} = z^{-d} f(z), \quad d \in N^*$
5.	Teorema amortizării	$Z\{f_k e^{-akt}\} = f(z e^{aT}), \quad a, T \in R$
6.	Transformata produsului de convoluție (teorema lui Borel)	$Z\{\sum_{i=0}^k f_i g_{k-i}\} = Z\{\sum_{i=0}^k f_i g_i\} = f(z) \cdot g(z)$
7.	Teorema valorii inițiale	Dacă există f_0 atunci: $f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1)f(z)$
8.	Teorema valorii finale	Dacă există $f_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ atunci $f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1, z > 1} (z-1)f(z)$

Remarcă: Relația de definiție (3.2.1) nu include perioada de eșantionate T_e . În tabelele de transformate Z , în expresiile transformatelor Z , este însă reflectată perioada de eșantionare.

Curs 6
Caracterizarea matematică a sistemelor în domeniul operațional

Tabelul A.2.1. Tabel de transformate Z uzuale.

Nr. crt.	Funcția original $f(t)$	Transformata Z $f(z) = Z\{f(kT_e)\}$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$\sigma(t)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
3.	$t \cdot \sigma(t)$	$\frac{T_e z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
4.	$(t^2/2) \cdot \sigma(t)$	$\frac{T_e^2 z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$
5.	$e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{1 - \exp(-aT_e)z^{-1}}$
6.	$t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{T_e \exp(-aT_e)z^{-1}}{(1 - \exp(-aT_e)z^{-1})^2}$
7.	$(1 - e^{-at})\sigma(t)$	$\frac{(1 - z^{-1})(1 - \exp(-aT_e)z^{-1})}{(1 - \exp(-aT_e)z^{-1})z^{-1}}$
8.	$[t - (1 - e^{-at})/a]\sigma(t)$	$\frac{T_e z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{(1 - \exp(-aT_e)z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - \exp(-aT_e)z^{-1})}$
9.	$e^{-at} \sin(bt)\sigma(t)$	$\frac{\exp(-aT_e)\sin(bT_e)z^{-1}}{N(z^{-1})}$, $N(z^{-1}) = 1 - 2\exp(-aT_e)\cos(bT_e)z^{-1} + \exp(-2aT_e)z^{-2}$
10.	$e^{-at} \cos(bt)\sigma(t)$	$\frac{1 - \exp(-aT_e)\sin(bT_e)z^{-1}}{N(z^{-1})}$

În studiul sistemelor o secvență de valori $u(k)$, $k = 0, 1, \dots$, se consideră obținută prin eșantionarea ideală a unui semnal continuu. Eșantionarea ideală se poate interpreta ca un proces de modulare a unei secvențe de impulsuri Dirac $\delta^*(t)$

Curs 6

Caracterizarea matematică a sistemelor în domeniul operațional

de către semnalul continuu, fig.3.2. Pe această bază, transformata Z se introduce ca transformată Laplace aplicată secvenței de valori aferente eșantioanelor, $u^*(t)$:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_e) \delta(t - kT_e), \quad \rightarrow \quad u^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_e) e^{-kT_e s}. \quad (3.2.3)$$

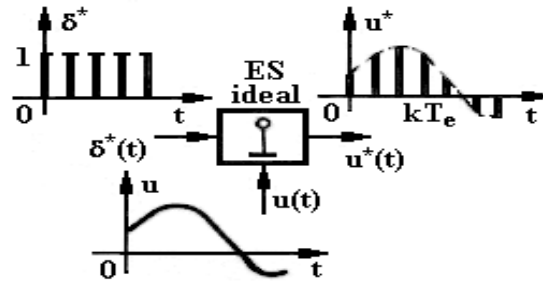


Fig.3.2. Interpretarea procesului ideal de eșantionare.

Cu substituția:

$$e^{sT_e} = z \quad \text{sau} \quad e^{-sT_e} = z^{-1}, \quad (3.2.4)$$

este regăsită relația (3.2.1) într-o altă formulare; z reprezintă *anticiparea cu un pas de eșantionare* iar z^{-1} reprezintă *întârzierea cu un pas de eșantionare*.

Cum sistemele evoluează cauzal numai în sensul *trecut* \rightarrow *prezent* \rightarrow *viitor*, prezintă interes mai mare explicitările în z^{-1} , $u(z^{-1})$. Expresia $u(z^{-1})$ se obține împărțind cu z^n atât numărătorul cât și numitorul expresiei raționale $u(z)$; n este gradul polinomului de la numitorul lui $u(z)$.

Observație: Originalul $u^*(t)$ este o secvență de valori care nu caracterizează o funcție continuă unică. În fig.3.3, funcțiile de timp continuu $u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}(t)$, $u^{(3)}(t)$, ..., sunt caracterizate în timp discret de o aceeași secvență de valori $u^*(t)$.

3.3. Semnale, secvențe și funcții de intrare deterministe tipice

În caracterizarea comportării sistemelor este utilizat răspunsul acestora la semnale (secvențe) de intrare deterministe considerate tipice. Utilizarea acestor semnale prezintă două avantaje:

- *în studiul analitic:* prin aceea că astfel de semnale prezintă caracterizări matematice relativ simple;
- *practice:* prin aceea că aceste semnale sunt ușor de generat și ușor reproductibile.

Curs 6
Caracterizarea matematică a sistemelor în domeniul operațional

În unul din capitolele anterioare au fost discutate principalele semnale de funcții de intrare tipice. În continuare sunt enumerate și caracterizate principalele secvențe de funcții de intrare tipice.

(b) Cazul secvențelor în timp discret. Secvențele cu variație polinomială de ordin redus și funcțiile aferente sunt prezentate în fig.3.7 și au transformatele $Z\{\}$ detaliate în tabelele de transformate.

♦ **Secvența de impulsuri unitate (treapta unitate), (a):**

$$\sigma^*(t) = 1^*(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \delta(t-\tau); \quad (3.3.7)$$

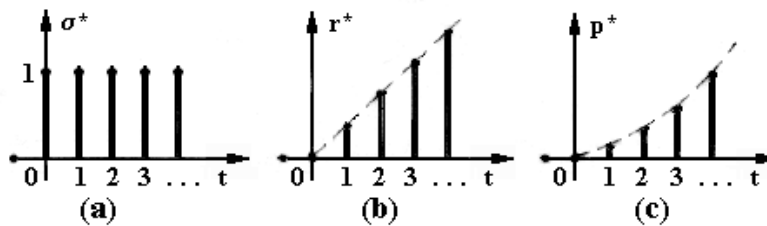


Fig.3.7. Secvențe de intrare treaptă, rampă și parabolă unitate.

♦ **Secvența de impulsuri rampă unitate, (b):**

$$r^*(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \delta(t-\tau); \quad (3.3.8)$$

♦ **Secvența de impulsuri parabolă unitate, (c):**

$$p^*(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} (\tau^2/2) \delta(t-\tau); \quad (3.3.9)$$

Semnalele și secvențele treaptă, rampă sau parabolă neunitate sunt obținute apoi în baza relațiilor:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{\infty} \sigma(t), & u^*(t) &= u_{\infty} \sigma^*(t), \\ u(t) &= u_{\infty} r(t), & u^*(t) &= u_{\infty} r^*(t), \\ u(t) &= u_{\infty} p(t), & u^*(t) &= u_{\infty} p^*(t). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Semnalul/secvența treaptă este utilizat(ă) în studiul **SRA cu referință constantă**. În cazul sistemelor stabile, în urma variației treaptă a intrarilor în sistem se stabilește (la $t \rightarrow \infty$) un regim denumit regim staționar constant (RSC).

Curs 6

Caracterizarea matematică a sistemelor în domeniul operațional

C. Funcții și semnale secvențe de intrare cu variație armonică în timp (definire separată în cazul continuu și cel discret).

(a) Cazul cu timp continuu. A fost tratat în unul din capitolele anterioare

(b) Cazul cu timp discret. Secvența sinusoidală este semnalul armonic de bază (fig.3.8-b), definită conform relației:

$$u^*(t) = \{u_m \sin(\omega t + \varphi_0)\} \Big|_{t=kT_e} \quad (3.3.12)$$

ea este eșantionata semnalului continuu; $\{u_m, \omega, T, \varphi_0\}$ au aceeași semnificație.

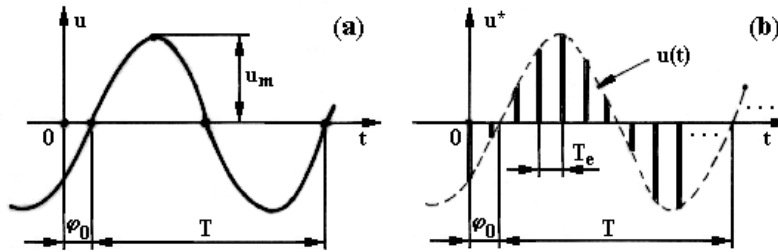


Fig.3.8. Semnal sinusoidal (a) și secvența sinusoidală (b).

Pentru caracterizarea “completă” a informației cuprinse într-un semnal sinusoidal $u(t)$ pe baza eșantioanelor $u^*(t)$, perioada de eșantionare T_e trebuie să satisfacă cerințele **teoremei eșantionării**, sintetizabilă prin condiția:

$$T_e < (1/2)T \quad (3.3.13)$$

Regimul permanent armonic reprezintă *regimul permanent* care se stabilește într-un sistem (stabil) ca urmare aplicării unui semnal / secvență armonică. Acest regim poate oferi suport pentru studiul analitic și experimental al sistemelor în *domeniul pulsație sau frecvență*.

3.5. MM în domeniul operațional: funcția de transfer, matricea de transfer

A. Cazul sistemelor cu timp continuu (SD-C). A fost tratat în unul din capitolele anterioare.

B. Cazul sistemelor cu timp discret (SD-D). Se consideră un sistem liniar invariant cu timp discret, **monovariabil**, aflat în condiții inițiale nule și caracterizat prin MM-II de forma (1.4.3), în care pentru generalizare s-a admis că $m = n$:

$$\begin{aligned} a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = \\ = b_n u(k+n) + b_{n-1} u(k+n-1) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k) \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Curs 6
Caracterizarea matematica a sistemelor în domeniul operațional

Aplicând transformarea Laplace discretă (Z) celor doi membri ai relației (3.5.13) și ținând seama de faptul că sistemul se află în condiții inițiale nule:

$$\Psi_0 = (u_0, u_{-1}, \dots, u_{-(n-1)}; y_0, y_{-1}, \dots, y_{-(n-1)}) = \mathbf{0}, \quad (3.5.14)$$

precum și de proprietățile sintetizate în tabelul 3.2, se obține:

$$\begin{aligned} a_n z^n y(z) + \dots + a_1 z y(z) + a_0 y(z) = \\ = b_n z^n u(z) + \dots + b_1 z u(z) + b_0 u(z). \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Prin separarea variabilei $y(z)$ ca funcție de $u(z)$ rezultă:

$$y(z) = \frac{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \cdot u(z). \quad (3.5.16)$$

Relația (3.5.16) permite introducerea noțiunii (prin definiție) de **funcție de transfer în z (f.d.t. în z)** aferentă SD-D, $H(z)$, sub forma:

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} \Big|_{\Psi_0=\mathbf{0}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}. \quad \text{și} \quad y(z) = H(z) \cdot u(z). \quad (3.5.17)$$

În cazul **SD-D multivariabile**, se va defini **matricea de transfer în z**:

$$\mathbf{H}(z) = [H_{ji}(z)] \Big|_{\substack{j=1,\dots,q \\ i=1,\dots,r}} = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & \dots & H_{1r}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{j1}(z) & \dots & H_{jr}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{q1}(z) & \dots & H_{qr}(z) \end{bmatrix}, \quad (3.5.18)$$

în care:

$$H_{ji}(z) = \frac{y_j(z)}{u_i(z)} \Big|_{\Psi_0=\mathbf{0}}, \quad j = 1 \dots q, \quad i = 1 \dots r, \quad u_k = 0, \quad k \neq i.$$

respectiv: (3.5.19)

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{H}(z) \mathbf{u}(z).$$

Observații. 1. Analogia relațiilor (3.5.5) și (3.5.17) permite **caracterizarea într-o formă unitară** a ambelor f.d.t. (categorii de SD), ca fiind:

$$H(\lambda) = \frac{y(\lambda)}{u(\lambda)} \Big|_{\Psi_0=\mathbf{0}} = \frac{b_n \lambda^n + \dots + b_1 \lambda + b_0}{a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0}, \quad (3.5.20)$$

Curs 6

Caracterizarea matematică a sistemelor în domeniul operațional

în care:

$$\lambda = \begin{cases} s, & \text{pentru cazul SL-C} \\ z, & \text{pentru cazul SL-D.} \end{cases} \quad (3.5.21)$$

Generalizarea are avantaje în formalizarea matematică unitară a SL-C și SL-D.

2. Numitorul f.d.t., $A(\lambda)$, este **polinomul caracteristic al SL**; rădăcinile ecuației caracteristice:

$$A(\lambda) = 0 \rightarrow a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (3.5.22)$$

poartă denumirea de **polii sistemului** și se notează cu p_v , $v = 1, \dots, n$; gradul n al polinomului caracteristic definește **ordinul sistemului**.

3. Rădăcinile numărătorului f.d.t.:

$$B(\lambda) = 0 \rightarrow b_n \lambda^n + \dots + b_1 \lambda + b_0 = 0, \quad (3.5.23)$$

poartă denumirea de **zerourile sistemului** și se notează cu z_μ , $\mu = 1, \dots, m$.

4. Polii și zerourile unui sistem se numesc **puncte critice** ale sistemului. În baza repartiției în planul complex a polilor și zerourilor unui sistem pot fi apreciate proprietățile sistemului. Astfel [B2]:

- ◆ *repartiția polilor* va avea implicații asupra stabilității și asupra comportării de regim dinamic a sistemului;
- ◆ *repartiția zerourilor* va avea implicații numai asupra comportării de regim dinamic a sistemului.

În baza repartiției poli-zerouri este posibil un studiu eficient al proprietăților sistemului [D1]. Prin explicitarea polilor și zerourilor, f.d.t. (3.5.20) este scrisă astfel:

$$H(\lambda) = \frac{b_m \prod_{\mu=1}^m (\lambda - z_\mu)}{a_n \prod_{v=1}^n (\lambda - p_v)}. \quad (3.5.24)$$

C. Calculul răspunsului sistemului aflat în condiții inițiale nule. În baza relației (3.5.17) poate fi calculat răspunsul sistemului la un semnal de intrare cunoscut sau la o secvență de intrare cunoscută.

a) Cazul SL-C (continuu). A fost tratat în unul din capitolele anterioare.

Curs 6
Caracterizarea matematică a sistemelor în domeniul operațional

Originalul $y(t)$ (răspunsul în domeniul timp) se obține apoi în forma:

b) Cazul SL-D (discret). Se consideră SL cu f.d.t. $H(z)$ cunoscută; având secvența de intrare $u^*(k)$ cunoscută (este șir original):

$$u^*(k) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k < 0, \\ u(k), & \text{pentru } k \geq 0, \end{cases} \quad (3.5.27)$$

și acceptând că aceasta admite o transformată Z , expresia operațională a ieșirii (răspunsul în operațional al sistemului), $y(z)$, se poate calcula utilizând relația (3.5.17). Apoi, răspunsul în domeniul timp al sistemului $y(k)$ (secvența de ieșire) este obținut în forma:

$$y(k) = Z^{-1}\{y(z)\} = \dots \quad (\text{din tabele de transformate}). \quad (3.5.35)$$

3.6. Legătura dintre MM-ISI și MM-II aferente unui SLI

Între cele două MM ale unui același SLI se pot realiza conexiuni care în operațional, cu utilizarea variabilei comune λ , pot fi scrise unitar pentru:

$$\lambda = \begin{cases} s, & \text{pentru sistemelor liniare cu timp continuu, SD-C} \\ z, & \text{pentru sistemele liniare cu timp discret, SD-D.} \end{cases} \quad (3.6.1)$$

- **Cazul SLI monovariabil în timp continuu** a fost tratat în unul din capitolele anterioare.

- **Cazul SLI în timp discret**, caracterizat de MM-ISI de forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{b} \cdot u_k, \quad y_k = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}_k. \quad (3.6.6)$$

Se aplică transformarea Z pentru $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ și se obține:

$$z \cdot \mathbf{x}(z) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(z) + \mathbf{b} \cdot u(z), \quad y(z) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(z). \quad (3.6.7)$$

În final, se obține expresia f.d.t. în z :

$$H(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{b} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (3.6.8)$$

cu:

$$A(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}), \quad B(z) = \mathbf{c}^T \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{b}, \quad (3.6.9)$$

În explicitarea generală (variabila λ), f.d.t. are expresia:

$$H(\lambda) = \mathbf{c}^T (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.6.10)$$

Curs 6
Caracterizarea matematica a sistemelor în domeniul operațional

3.7. Scrierea MM cu timp discret în întârzieri

Valoarea ieșirii de la moment actual, y_k , este determinată de valoarea intrării de la momentul actual, u_k și evenimente de la momente trecute $\{y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots\}$. Atunci, în locul variabilei z , care reprezintă anticiparea cu o perioadă de eșantionare devine utilă utilizarea variabilei întârziere cu o perioadă de eșantionare, notată cu z^{-1} . Ca urmare, în f.d.t. (3.5.17), scrisă sub forma (mai generală, cu $m = n$):

$$H(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad (3.7.1)$$

înmulțind atât numărătorul cât și numitorul cu z^{-n} , se obține:

$$H(z^{-1}) = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-(n-1)} + b_0 z^{-n}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-(n-1)} + a_0 z^{-n}} = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})} = \frac{y(z)}{u(z)}. \quad (3.7.2)$$

Corespunzător, se poate explicita în operațional:

$$a_n y(z) + a_{n-1} z^{-1} y(z) + \dots + a_1 z^{-(n-1)} y(z) + a_0 z^{-n} y(z) = b_n u(z) + b_{n-1} z^{-1} u(z) + \dots + b_1 z^{-(n-1)} u(z) + b_0 z^{-n} u(z). \quad (3.7.3)$$

În baza proprietăților transformării Z (tabelul 3.2), se obține originalul:

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_1 y(k-n+1) + a_0 y(k-n) = b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \dots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n); \quad (3.7.4)$$

împărțind cu a_n și separând valoarea actuală a ieșirii, $y_k = y(k)$ se obține:

$$y_k = - (a_{n-1}/a_n) y_{k-1} - \dots - (a_0/a_n) y_{k-n} + (b_n/a_n) u_k + (b_{n-1}/a_n) u_{k-1} + \dots + (b_0/a_n) u_{k-n}, \quad (3.7.5)$$

în care s-a utilizat notația:

$$y_{k-n} = y(k-n), \dots, u_{k-n} = u(k-n). \quad (3.7.6)$$

Dacă se notează coeficienții normați cu aceeași variabilă, în forma:

$$a_v = a_v/a_n, \quad b_\mu = b_\mu/a_n, \quad v = 0, \dots, n-1, \quad \mu = 0, \dots, n, \quad (3.7.7)$$

atunci se obține explicitarea MM cu timp discret ca **ecuație recurentă**:

$$y_k = - a_{n-1} y_{k-1} - \dots - a_0 y_{k-n} + b_n u_k + b_{n-1} u_{k-1} + \dots + b_0 u_{k-n}. \quad (3.7.8)$$

Interpretarea relației (3.7.8): valoarea actuală a ieșirii y_k se obține pe baza valorii actuale a intrării u_k și a valorilor trecute ale intrării $u_{k-\mu}$ și ieșirii y_{k-v} , $\mu, v = 1 \dots n-1$.

În cazul în care $m < n$, relația (3.5.17) se explicitază în forma:

$$m = n - d \quad \text{sau} \quad n = m + d, \quad (3.7.9)$$

atunci (3.7.1) și (3.7.2) se pot rescrie în formele:

Curs 6
Caracterizarea matematică a sistemelor în domeniul operațional

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad (3.7.10)$$

respectiv, prin înmulțirea cu z^{-n}/z^{-n} se obține:

$$H(z^{-1}) = \frac{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-(m-1)} + b_0 z^{-m}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-(n-1)} + a_0 z^{-n}} \cdot z^{-d} = \frac{y(z)}{u(z)}. \quad (3.7.11)$$

Factorul z^{-d} caracterizează “întârzierea cu d pași” a intrării în raport cu ieșirea actuală; într-adevăr, din relația (3.7.11) rezultă (cu $a_n=1$):

$$y_k = -a_{n-1} y_{k-1} - \dots - a_1 y_{k-n+1} - a_0 y_{k-n} + b_n u_{k-d} + b_{n-1} u_{k-d-1} + \dots + b_0 u_{k-d-m+1} + b_0 u_{k-d-m}. \quad (3.7.12)$$

4. CALCULUL MODELULUI MATEMATIC ÎN TIMP DISCRET AFERENT UNUI SISTEM ÎN TIMP CONTINUU

4.1. Elementul de reținere (Zero Order Hold, ZOH)

În conducerea numerică a proceselor, eșantioanele comenzii date de DC numerică la momentele de timp $t_k = kT_e$, $u^*(t)$, se aplică PC, fig.4.1, peste modulul ER (convertor numeric-analogic CAN) care realizează semnalul continuu $u_c(t)$.

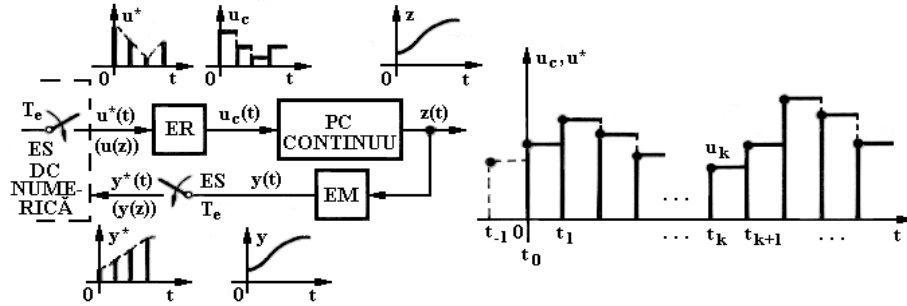


Fig.4.1. Construirea semnalului continuu $u_c(t)$ din secvența $u^*(t)$.

Cea mai uzuală modalitate de realizare a lui $u_c(t)$ se obține prin *reținerea* valorii eșantionului de la momentul curent, u_k , pe întreaga durată a perioadei de eșantionare T_e ; în acest caz, expresia lui $u_c(t)$ se poate explicita în forma:

$$u_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_e) [\sigma(t - kT_e) - \sigma(t - (k+1)T_e)], \quad (4.1.1)$$

Curs 6

Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

în care

$$u_c(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_e) \left[\frac{1 - e^{-sT_e}}{s} - \frac{1 - e^{-s(k+1)T_e}}{s} \right] . \quad (4.1.2)$$

Prin reordonare rezultă:

$$u_c(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_e) e^{-skT_e} . \quad (4.1.3)$$

În membrul drept al relației (4.1.3) se pot delimita factorii:

$$u^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_e) e^{-skT_e} \quad (a), \quad H_{ER}(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s} \quad (b). \quad (4.1.4)$$

Factorul (a) reprezintă imaginea Laplace a secvenței de valori $u^*(t)$ și factorul (b) reprezintă **f.d.t. în s** aferentă **elementului de reținere (ER)**. $H_{ER}(s)$ nu este o formă rațională, ceea ce îngreunează utilizarea ei în calculele analitice. În conexiunea $u^*(t) \rightarrow (ER + PC) \rightarrow y(t)$, **f.d.t. continuă a PC extins cu ER** devine:

$$H_{EPC}(s) = H_{ER}(s) H_{PC}(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s} H_{PC}(s) . \quad (4.1.5)$$

Observație: În situațiile în care valoarea lui T_e este *suficient de mică în raport cu constantele de timp ale PC*, în prezența CAN (ES+ER) se poate obține o caracterizare continuă convenabilă a PC extins cu ER, de forma:

$$H_{EPC}(s) \approx H_{PC} e^{-sT_e/2} \quad \text{sau} \quad H_{EPC}(s) \approx \frac{1}{1 + sT_e/2} H_{PC}(s) . \quad (4.1.6)$$

Justificarea relației (4.1.6) poate fi găsită relativ ușor prin tratarea în domeniul pulsație.

4.2. F.d.t. în z aferentă conexiunii {eșantionator + element de reținere + proces condus + eșantionator} (prescurtat ER+PC)

Conexiunea serie (fig.4.1) {eșantionator + element de reținere + proces condus + eșantionator}, notată cu {ES+ER+PC+ES}, caracterizează *procesul condus văzut -la momente discrete ale timpului-* de către echipamentul de conducere numerică.

La determinarea f.d.t. $H_{EPC}(z)$ se pleacă de la relația (4.1.6) în care se scrie:

Curs 6

Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

$$H_{EPC}(z) = Z\{L^{-1}\{H_{EPC}(s)\} \mid_{t=kT_e}\} . \quad (4.2.1)$$

Ținând seama de faptul că z reprezintă anticiparea cu o perioadă de eșantionare, se obține:

$$H_{EPC}(z) = \frac{z-1}{z} Z\{L^{-1}\{\frac{1}{s}H_{PC}(s)\} \mid_{t=kT_e}\} . \quad (4.2.2)$$

În cazurile de interes practic în care $H_{PC}(s)$ are forme raționale, $H_{PC}(s)/s$ se poate descompune în fracții simple, de exemplu sub forma:

$$\frac{1}{s}H_{PC}(s) = \frac{\beta_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s + \alpha_i} . \quad (4.2.3)$$

(pentru simplificare, în (4.2.3) s-a acceptat că polinomul $A(s)$ are polii reali și distincți). Corespunzător, se obține:

$$H_{EPC}(z) = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{z\beta_0}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{z\beta_i}{z - \exp(-\alpha_i T_e)} \right\} , \quad (4.2.4)$$

sau, în forma în z^{-1} :

$$H_{EPC}(z^{-1}) = (1 - z^{-1}) \left\{ \frac{\beta_0}{1 - z^{-1}} + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{1 - \exp(-\alpha_i T_e)z^{-1}} \right\} . \quad (4.2.5)$$

Parametrul α_i reprezintă inversul unei constante de timp: $\alpha_i = 1/T_i$, $i = 1, \dots, n$.

Dacă f.d.t. $H_{PC}(s)$ are și rădăcini complex conjugate, în relația (4.2.3) se va utiliza relația specifică:

$$Z\{L^{-1}\{\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\}\} = \frac{1 - \exp(-aT_e)\cos(bT_e)z^{-1}}{1 - 2\exp(-aT_e)\cos(bT_e)z^{-1} + \exp(-2aT_e)z^{-2}} . \quad (4.2.6)$$

Valoarea coeficientului $\exp(-T_e/T_i)$, $i=1, \dots, n$, va depinde de valoarea lui T_e ; altfel spus, pentru un PC continuu, având $H_{PC}(s)$ cu constantele de timp $\{T_1, T_2, \dots\}$, coeficienții MM cu timp discret $H_{PC}(z)$ vor depinde de valoarea perioadei de eșantionare (T_e). În consecință, **orice schimbare a perioadei de eșantionare T_e va implica recalcularea coeficienților MM cu timp discret.**

Observație: Omiterea elementului de reținere ER în calculul f.d.t. în z aferentă PC conduce la falsificarea rezultatelor.

Exemplul 4.1: Să se determine f.d.t. în z aferentă PC extins cu ER cunoscând:

Curs 6
Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

$$H_{PC}(s) = \frac{1}{s(1+s)}, \text{ la o perioadă de eșantionare preconizată } T_e = 1 \text{ sec.} \quad (4.2.7)$$

Soluție: În baza relației (4.2.3) se scrie:

$$H_{EPC}(z) = \frac{z-1}{z} Z\{L^{-1}\{\frac{1}{s} \cdot \frac{k}{s(1+s)}\}\}, \quad (4.2.8)$$

în care expresia în “s” se descompune în forma:

$$\frac{k}{s^2(1+s)} = k\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1+s}\right]. \quad (4.2.9)$$

Prin utilizarea tabelelor de transformate se obține:

$$H_{EPC}(z) = k \frac{z-1}{z} \left[\frac{T_e z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-\exp(-T_e)} \right] = \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

Pentru $T_e = 1$ sec, rezultă valorile numerice:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.367879, & a_1 &= -1.367879, & a_2 &= 1, \\ b_0 &= 0.26424, & b_1 &= 0.367879, & & \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Exemplul 4.2: Să se studieze influența valorii lui T_e asupra coeficienților f.d.t. $H_{EPC}(z)$ pentru PC caracterizat prin f.d.t.:

$$H_{PC}(s) = \frac{1}{(1+5s)(1+7.5s)(1+10s)}, \text{ pentru } T_e = 2; 6; 12 \text{ sec.} \quad (4.2.11)$$

Soluție: Urmând calea descrisă anterior se obține:

$$H_{EPC}(z^{-1}) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_2 z^{-1} + a_1 z^{-2} + a_0 z^{-3}} z^{-1}. \quad (4.2.12)$$

Valorile coeficienților astfel calculați sunt prezentate în tabelul 4.1. Analiza valorilor calculate și a tendințelor în modificarea acestora la modificarea lui T_e este deosebit de importantă.

Pe baza exemplului prezentat pot fi formulate câteva concluzii generale privind influența perioadei de eșantionare T_e asupra valorii coeficienților f.d.t. în z pentru o f.d.t. $H_{PC}(s)$ bine precizată:

- Odată cu creșterea lui T_e , valoarea absolută a coeficienților a_v scade;
- Odată cu creșterea lui T_e , valoarea absolută a coeficienților b_μ crește;

Curs 6
Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

Tabelul 4.1. Valorile coeficienților din relația (4.2.12).

Coeficient \ T_e	$T_e = 2$	$T_e = 6$	$T_e = 12$
a_2	-2.25498	-1.2993	-0.59381
a_1	1.68932	0.54723	0.10645
a_0	-0.42035	-0.07427	-0.00552
$1 + \sum_{v=1}^3 a_v$ (a)	0.01399	0.17362	0.50712
b_2	0.00269	0.05108	0.22608
b_1	0.00926	0.1086	0.26433
b_0	0.00186	0.01391	0.02672
$\sum_{\mu=0}^3 b_{\mu}$ (b)	0.01399	0.017362	0.50713
$\frac{\sum_{\mu=0}^3 b_{\mu}}{1 + \sum_{v=1}^3 a_v}$ (c)	1	1	1

- Odată cu creșterea lui T_e , valorile sumelor (a) și (b) cresc dar raportul (c) rămâne constant, egal cu coeficientul de transfer al PC continuu,

$$\frac{\sum_{\mu=0}^3 b_{\mu}}{1 + \sum_{v=1}^3 a_v} = k = H_{PC}(s) \Big|_{s=0}.$$

- La creșterea excesivă a lui T_e , se manifestă tendințele următoare (general valabile):

$$(1): |a_0| \ll \left| \sum_{v=1}^3 a_v \right|, \quad (2): |b_0| \ll \left| \sum_{\mu=1}^3 b_{\mu} \right|,$$

adică are loc creșterea excesivă a lui T_e apare tentația reducerii ordinului sistemului.

Efectuarea unei astfel de reduceri nu este recomandată întrucât între momentele de eșantionare sistemul inițial (neredus) și cel redus vor avea comportări net diferite; ele se comportă *aproape identic* numai în momentele de eșantionare. În tabelul 4.2. sunt prezentate f.d.t. în z aferente unor procese de ordin redus (benchmark) frecvente în aplicațiile industriale.

Mai este de remarcat faptul că, în cazul PC multivariabil, fiecare canal de comandă va fi prevăzut cu modul ZOH (CNA) și comanda continuă $u_{c,i}$ va fi

Curs 6

Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

construită din secvența de comandă $u_i^*(t)$ prin reținere. D.p.d.v.d. al calculelor MM cu timp discret acestea se efectuează pentru fiecare canal în parte.

4.3. Determinarea MM-ISI discret aferent legăturii {ER+PC}. Conversia MM-ISI

Se consideră cazul PC caracterizat prin MM-ISI de forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot u(t), \quad \text{cu } \mathbf{x}_0 - \text{cunoscut}, \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

precedat de un ER (fig.4.1). Soluția acestui sistem de ecuații diferențiale este:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (4.3.2)$$

Integrând pe un interval $\Delta t = [(k+1)T_e, kT_e]$, se obține:

$$\mathbf{x}((k+1)T_e) = e^{\mathbf{A}T_e} \cdot \mathbf{x}(kT_e) + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{\mathbf{A}[(k+1)T_e-\tau]} \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (4.3.3)$$

Expresia lui $u(\tau)$ este construită prin reținerea comenzii pe fiecare pas de eșantionare; ca urmare, rezultă în final:

$$\begin{aligned} \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{\mathbf{A}[(k+1)T_e-\tau]} \mathbf{b} u(\tau) d\tau &= \mathbf{b}_d u(kT_e) = \\ &= \left[\int_0^{T_e} e^{\mathbf{A}\theta} \mathbf{b} d\theta \right] u(kT_e), \quad \text{cu } \theta = kT_e + T_e - \tau. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Matricele MM-ISI cu timp discret aferente {ER+PC}:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_d \cdot u_k \quad \text{și} \quad y_k = \mathbf{c}_d^T \cdot \mathbf{x}_k, \quad (4.3.5)$$

se calculează cu relațiile:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_e}, \quad \mathbf{b}_d = \int_0^{T_e} e^{\mathbf{A}\theta} \mathbf{b} d\theta, \quad \mathbf{c}_d^T = \mathbf{c}^T. \quad (4.3.6)$$

Efectuând un calcul operativ, se obțin relațiile:

$$\mathbf{A}_d = L^{-1} \{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \} \Big|_{t=T_e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\mathbf{A}T_e)^i, \quad (4.3.7)$$

Curs 6

Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

$$\mathbf{b}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{b} = T_e \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} (\mathbf{A}T_e)^i \mathbf{b} \quad (4.3.8)$$

Tabelul 4.2. Funcții de transfer în timp discret aferente proceselor cu timp continuu, cu luarea în considerare a elementului de reținere.

Nr. crt.	Denumire	F.d.t. în s $H_P(s)$	F.d.t. în z $H_{EP}(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \cdot Z\left\{\frac{H_P(s)}{s}\right\}$
1	Element de transfer de tip proporțional, ET-P	k_P	k_P
2	Element de transfer cu timp mort, ET-Tm	$k_P \cdot e^{-sT_m}$	$k_P \cdot z^{-d}, T_m = d \cdot T_e, d \in N^*$
3	Element de transfer de tip integrator, ET-I	$\frac{k_{iP}}{s}, \frac{1}{T_{iP}s}$	$\frac{k_{iP}T_e}{z-1}, \frac{T_e}{T_{iP}} \cdot \frac{1}{z-1}$
4	Element de transfer de tip dublu integrator, ET-I2	$\frac{k_{iP}^2}{s^2}, \frac{1}{T_{iP}^2 s^2}$	$\frac{k_{iP}^2 T_e^2 (z+1)}{2(z-1)^2}, \frac{T_e^2 (z+1)}{2T_{iP}^2 (z-1)^2}$
5	Element de transfer de tip integrator cu temporizare de ordinul întâi, ET-IT1	$\frac{k_P}{1+sT_P} \cdot \frac{1}{T_{iP}s}$	$\frac{k_P T_P}{T_{iP}} \cdot \frac{B(z)}{(z-1)(z - e^{-T_e/T_P})}$ cu $B(z) = (T_e/T_P - 1 + e^{-T_e/T_P})z + 1 - (T_e/T_P + 1)e^{-T_e/T_P}$
6	Element de transfer de tip proporțional cu temporizare de ordinul întâi, ET-PT1	$\frac{k_P}{1+s \cdot T_P}$	$k_P \frac{1 - e^{-T_e/T_P}}{z - e^{-T_e/T_P}}$
7	Element de transfer de tip proporțional cu temporizare de ordinul întâi cu timp mort, ET-PT1Tm	$\frac{k_P}{1+s \cdot T_P} \cdot e^{-sT_m}$	$k_P \frac{1 - e^{-T_e/T_P}}{z - e^{-T_e/T_P}} \cdot z^{-d},$ $T_m = dT_e, d \in N$

Curs 6

Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

8	Element de transfer de tip proporțional-derivativ cu temporizare de ordinul întâi, ET-PDT1	$k_P \frac{1+s \cdot T_1}{1+s \cdot T_2}$	$k_P \frac{(T_1 / T_2)z + (1 - T_1 / T_2 - e^{-T_e / T_2})}{z - e^{-T_e / T_2}}$
9	Element de transfer de tip proporțional cu temporizare de ordinul doi, ET-PT2 cu comportare aperiodic	$\frac{k_P}{(1+s \cdot T_1)(1+s T_2)}$ $T_1 \neq T_2$	$k_P \frac{B(z)}{(T_1 - T_2)(z - e^{-T_e / T_1})(z - e^{-T_e / T_2})}$ $B(z) = (a_1 T_1 - a_2 T_2)z + a_1 a_2 (T_1 - T_2) - (a_1 T_1 - a_2 T_2)$ $a_1 = 1 - e^{-T_e / T_1}, a_2 = 1 - e^{-T_e / T_2}$
10	Element de transfer de tip proporțional cu temporizare de ordinul doi, ET-PT2 cu comportare aperiodic critic	$\frac{k_P}{(1+s T_1)^2}$	$k_P \frac{B(z)}{(z - e^{-T_e / T_1})^2}$ $B(z) = [1 - (1 - T_e / T_1)e^{-T_e / T_1}]z - [1 + T_e / T_1 - e^{-T_e / T_1}]e^{-T_e / T_1}$
11	Element de transfer de tip proporțional cu temporizare de ordinul doi, ET-PT2 cu comportare oscilant amortizată	$\frac{k_P \omega_0^2}{A(s)}$ $A(s) = s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2$ $0 \leq \zeta < 1$	$k_P \frac{B(z)}{z^2 - 2a_1 \cos(\omega_D T_e) \cdot z + a_1^2}$ $B(z) = \left[1 - \frac{a_1 \sin(\omega_D T_e + \phi)}{\sqrt{1 - D^2}} \right] z +$ $+ a_1 \left[a_1 + \frac{\sin(\omega_D T_e - \phi)}{\sqrt{1 - D^2}} \right]$ $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}, \phi = \arccos D,$ $a_1 = e^{-D\omega_0 T_e}$

Exemplul 4.3: Să se determine MM-ISI cu timp discret aferent PC extins cu ER, cu MM-ISI cu timp continuu [P1]:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t). \quad (4.3.9)$$

Perioada de eșantionare se alege $T_e = 1$ sec.

Soluție: Se calculează succesiv:

Curs 6
Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}, \quad (4.3.10)$$

$$\mathbf{A}_d = L^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\} \Big|_{t=T_e} = \begin{bmatrix} e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}. \quad (4.3.11)$$

Pentru $T_e = 1$ sec, se obține:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} -0.0972 & 0.2325 \\ -0.4651 & 0.6004 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.1998 \\ 0.8320 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_d^T = \mathbf{c}^T = [1 \quad 0] \quad (4.3.12)$$

Observație: Relațiile (4.3.6) se pot utiliza și în sens invers, pentru calculul lui \mathbf{A} , \mathbf{b} și \mathbf{c}^T când se cunosc \mathbf{A}_d , \mathbf{b}_d , \mathbf{c}_d^T și T_e :

$$\mathbf{A} = (1/T_e)(\ln \mathbf{A}_d), \quad \mathbf{b} = (\mathbf{A}_d - \mathbf{I})^{-1}(1/T_e)(\ln \mathbf{A}_d)\mathbf{b}_d, \quad \mathbf{c}^T = \mathbf{c}_d^T. \quad (4.3.13)$$

4.4. Discretizarea MM-II prin integrarea numerică a ecuației diferențiale

Dacă SF-C este cunoscut prin MM-II în domeniul timp, atunci prin integrarea modelului pe intervalul $[(t_k - T_e), t_k]$, cu t_k – valoarea curentă a timpului discret, se poate obține un MM-II cu timp discret. Astfel:

A. La integrarea expresiilor care conțin derivatele funcției, $u^{(\mu)}(t)$, se utilizează formula Leibniz-Newton, în forma:

$$\int_{t_k - T_e}^{t_k} u^{(\mu)}(t) dt = u^{(\mu-1)}(t_k) - u^{(\mu-1)}(t_k - T_e). \quad (4.4.1)$$

B. La integrarea funcției $u(t)$ se utilizează una din formulele de aproximare prezentate în continuare (fig.4.2):

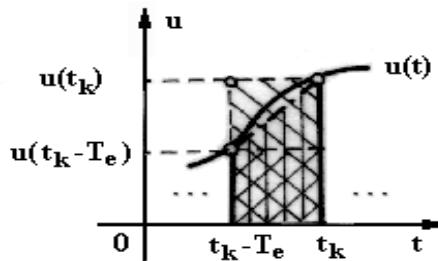


Fig.4.2. Referitoare la integrarea numerică.

- La integrarea numerică prin **metoda dreptunghiurilor avansată (MDA)**:

Curs 6

Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

$$I_k = \int_{t_k - T_e}^{t_k} u(t) dt \approx u(t_k) t \Big|_{t_k - T_e}^{t_k} = T_e u(t_k) . \quad (4.4.2)$$

□ La integrarea numerică prin **metoda dreptunghiurilor întârziată (MDI)**:

$$I_k \approx u(t_k - T_e) t \Big|_{t_k - T_e}^{t_k} = T_e u(t_k - T_e) . \quad (4.4.3)$$

□ La integrarea numerică prin **metoda trapezelor (MT)**:

$$I_k \approx (1/2)[u(t_k) + u(t_k - T_e)] t \Big|_{t_k - T_e}^{t_k} = (T_e/2)[u(t_k) + u(t_k - T_e)] . \quad (4.4.4)$$

Pe baza acestor relații se poate *calcula integrala unei funcții pe un interval ales* ($t_0 = 0$ la $t_k = kT_e$). Astfel, dacă:

$$y(t_k) = \int_0^{t_k} u(t) dt, \quad y(s) = \frac{1}{s} u(s) , \quad (4.4.5)$$

atunci, pentru T_e suficient de mic se va putea scrie:

□ **La integrarea numerică prin MDA:**

$$y(kT_e) = T_e \sum_{i=0}^k u(iT_e) \quad \text{și} \quad y(kT_e - T_e) = T_e \sum_{i=0}^{k-1} u(iT_e) ; \quad (4.4.6)$$

pentru diferența ($y_k - y_{k-1}$) se obține:

$$y(kT_e) - y(kT_e - T_e) \approx T_e u(kT_e) . \quad (4.4.7)$$

Trecând relația (4.4.7) în operațional, se obține apoi:

$$y(z)(1 - z^{-1}) = T_e u(z) , \quad \text{adică} \quad y(z) = \frac{T_e}{1 - z^{-1}} u(z) . \quad (4.4.8)$$

Comparând conținutul rel.(4.4.5) și rel.(4.4.8), rezultă că pentru T_e suficient de mic sunt valabile corespondențele:

$$\text{MDA: } \frac{1}{s} \leftrightarrow \frac{T_e}{1 - z^{-1}} \quad \text{respectiv} \quad s \leftrightarrow \frac{1}{T_e}(1 - z^{-1}) . \quad (4.4.9)$$

□ **La integrarea numerică prin MDI respectiv MT** se obțin corespondențele:

$$\text{MDI: } \frac{1}{s} \leftrightarrow \frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad \text{respectiv} \quad s \leftrightarrow \frac{1}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}} ; \quad (4.4.10)$$

Curs 6

Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

$$\text{MT: } \frac{1}{s} \leftrightarrow \frac{T_e}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad \text{respectiv} \quad s \leftrightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad . \quad (4.4.11)$$

Correspondența (4.4.11) este cunoscută în literatură sub denumirea de **relația lui Tustin**.

Pe baza acestor corespondențe se poate determina **MM-II (MM-ISI) discret aferent SC** parcurgând **pașii** următori:

- Se calculează f.d.t. $H(s)$ aferentă SC; ținând seama de mărimea constantelor de timp se alege valoarea lui T_e ;
- Se calculează f.d.t. $H(z)$ utilizând relația:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\dots \text{rel.}(4.4.9),(4.4.10),(4.4.11)} = \frac{Q(z)}{P(z)} \quad ; \quad (4.4.12)$$

$H(z)$ se explicitază de regulă în varianta *în întârzieri* în forma:

$$H(z^{-1}) = \frac{q_n + q_{n-1}z^{-1} + \dots + q_0z^{-n}}{1 + p_{n-1}z^{-1} + \dots + p_0z^{-n}} \quad . \quad (4.4.13)$$

D.p.d.v. al implementării a.r.n., relația (4.4.13) se scrie cu indicii coeficienților inversați:

$$H(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_nz^{-n}}{1 + p_1z^{-1} + \dots + p_nz^{-n}} \quad . \quad (4.4.14)$$

- Pe baza relației (4.4.14) se scrie ecuația recurentă:

$$y_k = -p_1y_{k-1} - \dots - p_ny_{k-n} + q_0u_k + q_1u_{k-1} + \dots + q_nu_{k-n} \quad . \quad (4.4.15)$$

Exemplul 4.4: Să se determine f.d.t. în z^{-1} aferentă a.r. continuu, cu f.d.t.:

$$H_R(s) = \frac{b_1s + b_0}{a_1s + a_0} \quad , \quad (4.4.16)$$

cu metoda de discretizare MDI.

Soluție: În baza relației (4.4.12) se obține:

$$H_R(z^{-1}) = H_R(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/T_e} \rightarrow H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1z^{-1}}{1 + p_1z^{-1}} \quad , \quad (4.4.17)$$

în care:

Curs 6

Calculul modelului matematic în timp discret aferent unui sistem în timp continuu

$$q_0 = b_1/a_1, \quad q_1 = (b_0/a_1)T_e - b_1/a_1, \quad p_1 = (a_0/a_1)T_e - 1. \quad (4.4.19)$$

Observații: 1. Metoda de discretizare bazată pe aproximarea integralei, este utilizată la discretizarea a.r. continuu, în vederea **obținerii a.r.n. cvasicontinui**. Metoda este adeseori prezentată, în diferite variante, bazate pe aproximarea derivatei prin creșterea de ordinul 1; de exemplu: $dy(t)/dt \approx [y(kT_e) - y((k-1)T_e)]/T_e$.

2. Indiferent de varianta de discretizare, **ordinul algoritmului** (gradul numitorului $Q(z)$) **se conservă**; gradul numărătorului $Q(z)$ va putea fi diferit de gradul numărătorului f.d.t. $H(s)$.

3. Între rezultatele discretizării unui SD-C prin cele două metode – cea bazată pe luarea în considerare a ER, relația (4.2.3), respectiv cea bazată pe aproximarea integralei, relația (4.4.12) – vor apare diferențe; mai exactă este cea bazată pe relația (4.2.3).

6.3. Caracteristicile de transfer (c.d.t.) aferente sistemelor de reglare automată convențională (SRA-c)

A) Structura de sistem de reglare automată convențională continuă (SRA-cC). **Caracteristicile de transfer ale SRA-cC.** În practică, schema bloc aferentă unui SRA după ieșire se poate detalia pe blocuri constructiv-funcționale ale PC și ale DC conform fig.6.7, în care: RG – regulatorul automat, EC – elementul de comparare, EP – elementul de referință (prescriere). Structura de reglare astfel realizată poartă denumirea de *sistem de reglare automată (SRA) convențională (-c)*.

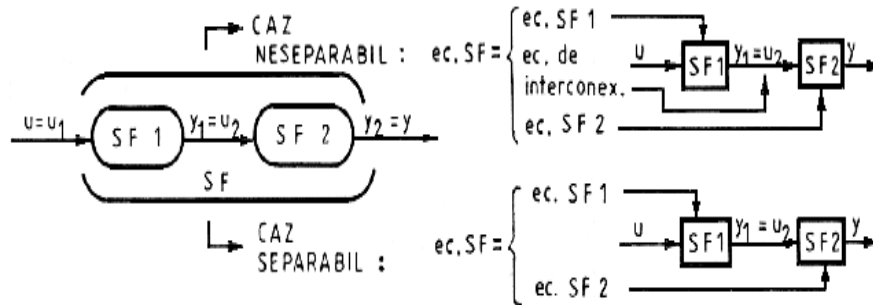


Fig.6.6. Aspecte legate de separabilitatea informațională a sistemelor fizice.

Funcțiile de conducere ale DC pot fi detaliate după cum urmează:

- **Memorarea informației privind modul în care trebuie să se desfășoare PC** este asigurată prin EP, care asigură fixarea (receptarea) mărimii de prescriere / referință primară w_z respectiv, pentru bucla de reglare propriu-zisă ($w \rightarrow z$),

Curs 6

Caracteristicile de transfer aferente sistemelor de reglare automată convențională

generarea mărimii de referință w “înțeleasă” (natură fizică, domeniu de variație, nivel energetic) de către elementul de comparare, EC.

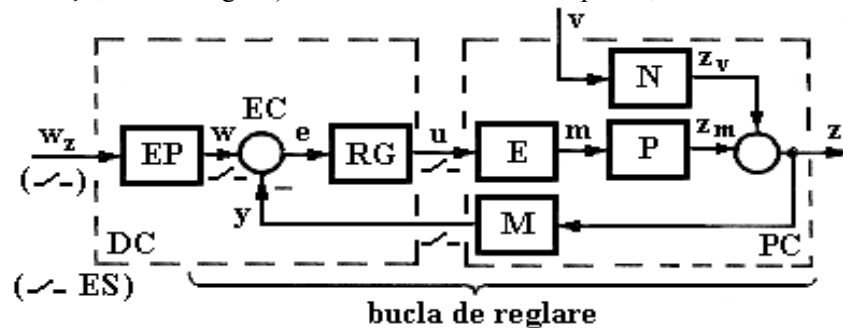


Fig.6.7. Schema bloc a unui SRA-c.

- **Compararea evoluției reale a PC, redată de ieșirea de măsură (reacția, feedback-ul) $y(t)$ – cu evoluția dorită fixată prin $w(t)$ – prin intermediul elementului de comparare EC, care lucrează pe principiul diferenței:**

$$w(t) - y(t) = e(t) . \quad (6.3.1)$$

Rezultatul comparației îl reprezintă mărimea $e(t)$ - eroarea de reglare.

- **Intervenția în desfășurarea PC este asigurată prin comanda $u(t)$ elaborată de RG pe baza unui algoritm propriu numit *algoritm de reglare (a.r.)*:**

$$u(t) = f\{e(t)\} . \quad (6.3.2)$$

În cazul continuu a.r. poartă și denumirea de *lege de reglare (l.d.r.)*.

Din punctul de vedere al parametrilor care caracterizează a.r. – denumiți parametri de acordare – aceștia se pot categorisi în:

- ♦ *a.r. cu parametrii constanți*, fixați după anumite criterii pentru o situație de conducere; operația de fixare a parametrilor regulatorului poartă denumirea de **acordarea parametrilor**;
- ♦ *a.r. cu parametrii ajustabili sau adaptabili* în timpul funcționării, după anumite strategii / criterii bine precizate. În acest caz se vorbește despre *structuri de SRA cu adaptarea parametrilor RG sau SRA adaptive*. În cazul în care această ajustare se face în timpul funcționării, pe baza unei strategii bine determinate și fără intervenția operatorului uman ea poartă și denumirea de self-tuning control systems.

Fiecare din blocurile SRA poate fi caracterizat (după caz) prin MM-II sau -ISI. Pentru structura de SRA-c, caracterizarea de bază este cea prin MM-II în domeniul operațional prin f.d.t.. Cum structura de SRA-c prezintă două intrări: w – mărimea

Caracteristicile de transfer aferente sistemelor de reglare automată convențională

$$H_{zw}(s) = \frac{z(s)}{w(s)} \Big|_{v=0}, \quad H_{zv}(s) = \frac{z(s)}{v(s)} \Big|_{w=0}. \quad (6.3.3)$$

- **f.d.t. în raport cu referința w , $H_{zw}(s)$, rezultă imediat:**

$$H_{zw}(s) = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)H_r(s)} = \frac{H_R(s)H_E(s)H_P(s)}{1 + H_R(s)H_F(s)H_P(s)H_M(s)}, \quad (6.3.4)$$

$$H_R(s)H_F(s)H_P(s)H_M(s) = H_0(s) - \text{f.d.t. a sistemului deschis}; \quad (6.3.5)$$

$$H_{zw}(s) = \frac{H_N(s)}{1 + H_0(s)} = \frac{H_N(s)}{1 + H_R(s)H_F(s)H_P(s)H_M(s)} \quad (6.3.6)$$

1. În raport cu cele două canale w și v , comportarea SRA va fi diferită (regimuri tranzitorii care pot fi net diferite).

104 R.-E. Precup, UPT, 2023

Curs 6

Caracteristicile de transfer aferente sistemelor de reglare automată convențională

Un caz particular frecvent în practică este acela în care perturbația $v(t)$ acționează direct pe calea directă, fig.6.8 (b), când $H_N(s)$ este “parte din $H_P(s)$ ”; atunci, numitoarele celor două f.d.t. și ecuația caracteristică sunt aceleași:

$$1 + H_0(s) = 0. \quad (6.3.7)$$

În multe situații prezintă interes c.d.t. ale SRA-c considerat având ca ieșire ieșirea de măsură y ; în aceste condiții relațiile (6.3.4) și (6.3.6) devin:

$$H_w(s) = \frac{y(s)}{w(s)} \Big|_{v=0} = \frac{H_0(s)}{1 + H_0(s)}, \quad H_v(s) = \frac{y(s)}{v(s)} \Big|_{w=0} = \frac{H_N'(s)}{1 + H_0(s)}. \quad (6.3.8)$$

în care:

$$H_N'(s) = H_N(s)H_M(s). \quad (6.3.9)$$

Trecerile între cele două grupuri de relații sunt:

$$H_{zw}(s) = H_w(s)H_M^{-1}(s), \quad H_{zv}(s) = H_v(s)H_M^{-1}(s). \quad (6.3.10)$$

B) Structurarea particulară a SRA-c cu timp discret (SRA-cD). Caracteristicile de transfer ale SRA-cD. În cazul sistemelor cu timp discret, f.d.t. (caracterizările matematice) se pot scrie doar între mărimi eșantionate. În fig.6.7 sunt evidențiate cu prezența eșantionatorului ES mărimile care sunt eșantionate (w^* , e^* , u^* , y^* (w_z^*)). În consecință, blocurile pentru care se pot scrie f.d.t. în z sunt:

- RG – regulatorul $e^* \rightarrow u^* : H_R(z);$
- PC – procesul condos $u^* \rightarrow y^* :$

$$H_{PC}(z) = \frac{z-1}{z} Z\{L^{-1}\{\frac{1}{s}H_{PC}(s)\} \Big|_{t=kT_e}\} ; \quad (6.3.11)$$

- EP – elementul de prescriere (dacă este cazul):

$$w_z^* \rightarrow w^* : (H_F(z)).$$

În acest context, o f.d.t. în z aferentă canalului $v \rightarrow (z) \rightarrow y$ (y^*) poate fi scrisă numai în condițiile următorului “artificiu informațional”:

- se consideră că perturbația v este eșantionată virtual $v \rightarrow v^*$, cu aceeași perioadă de eșantionare T_e ;
- semnalul eșantionat v^* este reținut și astfel se creează semnalul v_c , care aproximează foarte bine semnalul analogic original v ;
- între mărimile v^* și y^* (ieșirea de măsură eșantionată) se poate construi / defini f.d.t. în z , $H_N'(z)$:

$$H_N'(z) = \frac{y(z)}{v(z)} = \frac{z-1}{z} Z\{L^{-1}\{\frac{1}{s}H_N(s)H_M(s)\} \Big|_{t=kT_e}\}. \quad (6.3.12)$$

Curs 6

Caracteristicile de transfer aferente sistemelor de reglare automată convențională

Corespunzător, pentru SRA-cD se vor defini următoarele două f.d.t. în z:

$$H_w(z) = \left. \frac{y(z)}{w(z)} \right|_{v=0} = \frac{H_0(z)}{1 + H_0(z)}, \quad (6.3.13)$$

$$H_v(z) = \left. \frac{y(z)}{v(z)} \right|_{w=0} = \frac{H_N'(z)}{1 + H_0(z)}. \quad (6.3.14)$$

în care:

$$H_0(z) = H_R(z)H_{PC}(z). \quad (6.3.15)$$

Definirea unor f.d.t. în z între mărimi care nu sunt eșantionate este greșită. Relațiile (6.3.11) și (6.3.12) impun tratarea “în bloc” a PC, între mărimi eșantionate. Dacă există mărimi intermediare ale PC, care se preiau prin eșantionare în vederea conducerii, cum este cazul mărimii z_1 exemplificată în fig.6.8 (b), atunci se pot defini :

- f.d.t. în z: $u^*(m) \rightarrow (z_1) y_{z1}^*$;
- f.d.t. în z: $u^*(m) \rightarrow (z) y^*$;

C) Categorisirea SRA-c. Pe baza relațiilor prezentate rezultă că proprietățile SRA vor depinde de expresia f.d.t. a sistemului deschis, $H_0(\lambda)$:

$$H_0(\lambda) = H_R(\lambda)H_{PC}(\lambda), \quad (6.3.16)$$

în care, în f.d.t. $H_{PC}(\lambda)$ s-a grupat ansamblul $\{E, P, M\}$; PC abreviază **procesul condus** sau **partea fixă a sistemului**, prin care este caracterizat procesul care se derulează în instalația tehnologică. Expresia lui $H_0(\lambda)$ conduce la *observația* că la un $H_{PC}(\lambda)$ dat – PC fiind proiectat din considerente tehnologice – proprietățile SRA-c pot fi influențate prin alegerea adecvată a regulatorului RG, $H_R(\lambda)$, și fixarea la valori corespunzătoare a parametrilor de acordare.

Din considerente legate de proprietățile manifestate de SRA, în $H_0(\lambda)$ se evidențiază acei poli ai procesului care caracterizează **componenta integratoare**.

Pentru cazul SRA-cC, aceștia sunt polii în origine, $p = 0$, astfel că relația (6.3.16) se detaliază în forma:

$$H_0(s) = \frac{k_0 \prod_{\mu=1}^{m_0} (1 + \beta_\mu s)}{s^{q_0} \prod_{v=1}^{n_0 - q_0} (1 + \alpha_v s)}, \quad (6.3.17)$$

Curs 6

Caracteristicile de transfer aferente sistemelor de reglare automată convențională

în care:

- k_0 – coeficientul de transfer al sistemului deschis având expresia $k_0 = k_R k_{PC}$;
- $q_0 \in \{0, 1, 2\}$ – ordinul de multiplicitate al polului în origine ($p=0$) al sistemului deschis; acest pol sau cel puțin unul din doi este “adus” în mod voit de către regulatorul $H_R(s)$;
- α_v, β_μ – coeficienți care, dacă polinoamele de la numitorul și numitorul lui $H_0(s)$ au numai rădăcini reale și distincte, sunt tocmai constante de timp ale procesului și / sau regulatorului (T_v, T_μ).

Dependent de valoarea lui q_0 , **SRA-c se categorisesc** în:

- $q_0 = 0$: SRA-c de tip “0” sau “P” / proporționale;
- $q_0 = 1$: SRA-c de tip “1” sau “I” / simplu integratoare;
- $q_0 = 2$: SRA-c de tip “2” sau “2I” / dublu integratoare.

Remarcă: Din considerente de stabilitate a buclei de reglare, situația $q_0 > 2$ este tehnic neutilizabilă, ceea ce restrânge situațiile de interes practic la $q_0 \leq 2$.

În cazul SRA-cD, polii care caracterizează componente integratoare sunt polii de afix $(-1, j0)$ ($p = 1$), astfel că relația (6.3.16) se poate rescrie în forma:

$$H_0(z) = \frac{z^{m_0-1} \sum_{\mu=0}^{m_0-1} \beta_\mu z^\mu}{(z-1)^{q_0} \sum_{v=0}^{n_0-q_0} \alpha_v z^v} = \frac{z^{m_0-1} H_0'(z)}{(z-1)^{q_0}} \quad (6.3.18)$$

în care $H_0'(z)$ reprezintă partea fără componentă integratoare. În baza teoremei valorii finale se poate calcula valoarea coeficientul de transfer $k_0 = k_R k_{PC}$:

$$k_0 = H_0'(1) \quad (6.3.19)$$

Mai departe, aspectele explicitate pentru cazul SRA-cC își mențin valabilitatea.

BIBLIOGRAFIE

- [A1] Åström, K.J. și B. Wittenmark: Computer Controlled Systems – Theory and Design, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [A2] Åström, K.J. și T. Häggglund: „Benchmark Systems for PID Control”, Preprints of IFAC Workshop on Digital Control: Past, Present and Future of

Curs 6

Bibliografie

- PID Control”, editori: J. Quevedo și T. Escobet, Terassa, Spain, pp. 181-182, 2000.
- [A3] Åström, K.J. și T. Hägglund: PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, 2nd edition, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.
- [A4] Arnavotic, D.B. și D.M. Skataric: „Suboptimal Design of Hydroturbine Governors”, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 6, no. 3, pp. 438 – 444, 1991.
- [A5] Anderson, B.D.O. și J.B. Moore: Optimal Control. Linear Quadratic Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [B1] Barbu, V.: Ecuații diferențiale, Editura Junimea, Iași, 1985.
- [C1] Coleman, T., M.A. Branch și A. Grace: MATLAB Optimization Toolbox User’s Guide, Mathworks Inc., Natick, MA, 1999.
- [C2] Călin, S., M. Tertișco, I. Dumitrache, C. Popeea și D. Popescu: Optimizări în automatizări industriale, Editura Tehnică, București, 1979.
- [D1] Dumitrache, I., S. Dumitriu, I. Miha, F. Munteanu, Gh. Muscă și G. Calcev: Automatizări electronice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
- [D2] Dragomir, T.-L. și St. Preitl: Elemente de teoria sistemelor și reglaj automat, curs, vol. 1 și 2, Lito I.P.T.V. Timișoara, 1979.
- [D3] DIN 40719, Deutsche Industrie Normen, 1978.
- [D4] Dragomir, T.-L.: Tehnici de optimizare, Curs, vol. 1, Litografia I.P.T.V.T., Timișoara, 1987.
- [D5] Dorato, P., C.-L. Shen și W. Yang: Robust Control Systems Design, China Aviation Industry Press, Beijing, 1996.
- [E1] Eykhoff, P.: Identificarea sistemelor, Editura Tehnică, București, 1977.
- [F1] Franklin, G.F., J.D Powell și M.L. Workman: Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1998.
- [H1] Hoppe, M. și S. Tešnjak: „Modellbildung und Simulation des dynamischen Verhaltens von Wasserkraftanlagen”, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Mess- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 20, Bochum, 1983.
- [I1] Ionescu, Vl.: Teoria sistemelor. Sisteme liniare, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- [I2] Isermann, R.: Digitale Regelungssysteme, vol. I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [I3] IEEE Working Group on Prime Mover and Energy Models for System Dynamic Performance Studies: „Hydraulic Turbine and Turbine Control Models for System Dynamic Studies”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 7, no. 1, pp. 167 – 178, 1992.
- [I4] Ionescu, Vl. și C. Popeea: Optimizarea sistemelor, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.

Curs 6

Bibliografie

- [K1] Kessler, C.: „Über die Vorausberechnung optimal abgestimmter Regelkreise. Teil III. Die optimale Einstellung des Reglers nach dem Betragsoptimum”, Regelungstechnik, vol. 3, pp. 40 – 49, 1955.
- [L1] Landau, I.D.: Identificarea și comanda sistemelor, Editura Tehnică, București, 1997.
- [M1] Matlab. User's Guide, Mathworks Inc., Natick, MA, 1988.
- [M2] Marlin, T.E.: Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance, McGraw-Hill, 1995.
- [M3] Middleton, R.H. și G.C. Goodwin: Digital Control and Estimation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [M4] Müller, H.-W.: „Algorithmen für die digitale Drehzahlregelung von Wasserturbinen”, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Mess- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 23, Bochum, 1984.
- [N1] Nourescu, Al. și Al. Vasiliu: „Valorificarea energetică a resurselor hidraulice din România”, Energetica, vol. 22, no. 6-7, pp. 224 – 240, 1974.
- [P1] Preitl, St. și R.-E. Precup: Introducere în ingineria reglării automate, Editura Politehnica, Timișoara, 2001.
- [P2] Preitl, St.: Teoria sistemelor și reglaj automat, curs, vol. 1, partea 1 Teoria sistemelor, Lito U.T. Timișoara, 1992.
- [P3] Penescu, C., G. Ionescu, M. Tertișco și E. Ceangă: Identificarea experimentală a proceselor automatizate, Editura Tehnică, București, 1971.
- [P4] Preitl, St., A. Fogarași și R.-E. Precup: Teoria sistemelor și reglaj automat. Ingineria reglării automate, culegere de probleme, vol. 1, partea 1, Lito U.T. Timișoara, 1994.
- [P5] Preitl, St., A. Fogarași și R.-E. Precup: Teoria sistemelor și reglaj automat. Ingineria reglării automate, probleme rezolvate și comentate, vol. 2, Lito U.T. Timișoara, 1994.
- [P6] Preitl, St., R.-E. Precup și A. Porumb: Elemente de reglare automată, curs, vol. 1, Lito U.P. Timișoara, 1996.
- [P7] Precup, R.-E., St. Preitl, St. Kilyeni, St. și B. Luștea: „Fuzzy Speed and Voltage Control of a Hydrogenerator”, Preprints of Fifth Symposium on Application of Multivariable System Techniques – AMST'94, editor: R. Whalley, Mechanical Engineering Publications Limited, London, pp. 151-158, 1994.
- [P8] Preitl, St., R.-E. Precup și A. Porumb: „Behaviour of ARW Structures in the Case of Control Systems with Essential Delays”, Fourth International Symposium on Automatic Control and Computer Science – SACCS'93, Iași, vol. 1, pp. 222-227, 1993.

Curs 6
Bibliografie

- [P9] Precup, R.-E. și St. Preitl: Sisteme de reglare avansată, Curs, vol. 1, Litografia U.T.T., Timișoara, 1995.
- [P10] Precup, R.-E.: Soluții de conducere fuzzy a sistemelor cu fază neminimă. Aplicații la conducerea hidrogeneratoarelor, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2000.
- [P11] Pivovarov, V.A.: Proiectirovanie i rasciet sistem regulirovania ghidroturbin, Mașinostroenie, Leningrad, 1973.
- [R1] Răsvan, Vl.: Teoria stabilității, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1987.
- [S1] Stănășilă, O.: Analiză matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [S2] Simulink. Dynamic System Simulator for Use with Matlab, Mathworks Inc., Natick, MA, 1988.
- [S3] Sângeorzan, D.: Regulate adaptiv, Editura Militară, București, 1992.
- [S4] Sima, V. și A. Varga: Practica optimizării asistate de calculator, Editura Tehnică, București, 1986.
- [T1] Terțișco, M. și P. Stoica: Identificarea și estimarea parametrilor sistemelor, Editura Academiei, București, 1987.
- [T2] Terțișco, M., P. Stoica și Th. Popescu: Identificarea asistată de calculator a sistemelor, Editura Tehnică, București, 1987.
- [V1] Voicu, M.: Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate, Editura Tehnică, București, 1986.
- [V2] Varga, A. și V. Sima: Ingineria asistată de calculator a sistemelor automate, Editura Tehnică, București, 1997.