

## 5. STUDIUL SISTEMELOR ÎN DOMENIUL PULSAȚIE

O metodă eficientă de abordare a sistemelor dinamice (SD) este reprezentată de studiul acestora în domeniul pulsație, cu următoarele avantaje semnificative:

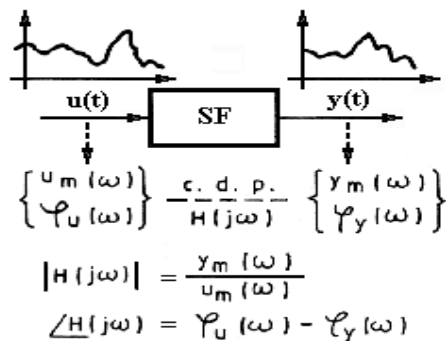
- permite caracterizarea proprietăților SD, în particular, ale SRA,
- asigură soluționarea grafo-analitică a unor situații de proiectare,
- este aplicabilă tuturor categoriilor de sisteme, SL sau SNL.

Metodele de bază se referă la cazul SD-C; ele pot fi extinse însă și la cazul SD-D. În terminologia de limba română pentru termenul *domeniul pulsație* ( $\omega$ ) este (gresit) încetățenit și termenul *domeniul frecvență* ( $f$ ); diferența este însă semnificativă, ținând seama de relația de legătură:

$$\omega = 2\pi f. \quad (5.0.1)$$

### 5.1. Definirea funcției de răspuns la pulsație (frecvență) în cazul SD-C

Mărimile de intrare și, corespunzător, mărimile de ieșire ale unui SF se pot modifica în timp în diferite moduri, fig.5.1. Aplicând *metoda analizei armonice* - bazată pe analiza Fourier [S1] - funcțiile de timp  $u(t)$  și  $y(t)$  pot fi descompuse în armonici sinusoidale, de diferite pulsații (frecvențe).



**Fig.5.1.** Definirea comportării SC în domeniul pulsație.

În cazul SLI, răspunsul  $y(t)$  la un semnal de intrare  $u(t)$  - considerat descompus în armonici - este dat de *suma algebrică a armonicilor de ieșire corespunzătoare armonicilor de intrare*. Dependentele dintre amplitudinile și fazele fiecărei armonici de intrare  $\{u_m(\omega), \varphi_u(\omega)\}$  și de ieșire  $\{y_m(\omega), \varphi_y(\omega)\}$  sunt date de *caracteristicile de pulsație (c.d.p.)* ale sistemului. O astfel de abordare corespunde studiului sistemelor în domeniul pulsație (frecvență).

## Curs 5

### Studiul sistemelor în domeniul pulsație

#### 5.1.1. Definirea funcției de răspuns la pulsație (f.r.p.)

Se consideră un SLI-C caracterizat prin f.d.t.:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (5.1.1)$$

Dacă la intrarea sistemului este aplicat un semnal sinusoidal  $u(t)$  de pulsație  $\omega$ :

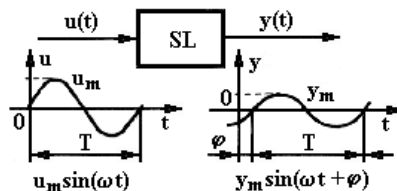
$$u(t) = u_m \sin(\omega t) \quad (\text{pentru simplificare, cu faza inițială } \varphi_u = 0) \quad (5.1.2)$$

atunci, după anularea regimului tranzitoriu, la ieșire este stabilit un **regim permanent armonic** (fig.5.2), care poate fi descris în forma:

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad (5.1.3)$$

Parametrii  $y_m$  și  $\varphi$  sunt dependenți de:

- proprietățile dinamice ale sistemului;
- valoarea pulsației  $\omega$ .



**Fig.5.2. Răspunsul armonic permanent.**

Contribuția sistemului la transferul semnalului sinusoidal poate fi caracterizată prin două componente:

$$A(\omega) = \frac{y_m(\omega)}{u_m(\omega)} = |H(j\omega)| \quad - \text{contribuția în modul,} \quad (5.1.4)$$

$$\varphi(\omega) = \angle H(j\omega) \quad - \text{contribuția în fază.} \quad (5.1.5)$$

Cele două contribuții pot fi reunite în funcția complexă de variabilă reală  $\omega$ :

$$H(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \quad (5.1.6)$$

denumită **funcția de răspuns la pulsație (f.r.p.)** a sistemului.

Expresia analitică a f.r.p. se poate calcula plecând de la f.d.t.  $H(s)$ , cu relația:

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} \quad (5.1.7)$$

## Curs 5 Studiul sistemelor în domeniul pulsație

Expresia complexă (5.1.6) poate fi explicitată și în forma:

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (5.1.8)$$

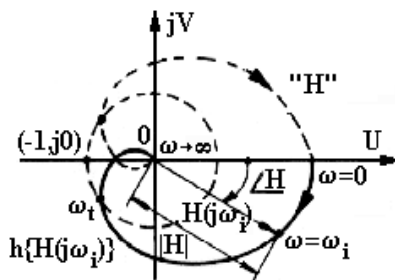
cu relațiile de legătură:

$$|H(j\omega)| = [U^2(\omega) + V^2(\omega)]^{1/2}, \quad \angle H(j\omega) = \arctg(V(\omega)/U(\omega)). \quad (5.1.9)$$

### 5.1.2. Caracteristicile de pulsație ale sistemului (c.d.p.)

Generic, **caracteristicile de pulsație** (c.d.p.) constituie reprezentări grafice ale f.r.p. și ale componentelor acestora.

**A. Locul de transfer (l.d.t.):** notat cu  $h\{H(j\omega)\}$ , este hodograful vectorului  $H(j\omega)$  atunci când  $\omega$  variază de la  $-\infty$  la  $+\infty$ . Pentru pulsații pozitive,  $\omega \in [0, \infty)$ , f.r.p. poate avea semnificație fizică; din acest motiv. În practică vor fi utilizate frecvent numai reprezentările f.r.p. restrânse la acest domeniu. În fig.5.3 este prezentată alura principală a l.d.t. aferent unui SF; cu linie continuă este marcată zona cu  $\omega \geq 0$ .



*Fig.5.3. Alura principală a l.d.t.*

**B. Caracteristicile de pulsație (c.d.p.):** constituie reprezentări analitice sau grafice ale componentelor f.r.p. ca funcții de  $\omega$ .

□ **Caracteristica logaritmică amplitudine (modul)-pulsație (c.a.p.),** definită prin relația:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \lg |H(j\omega)| = f_1(\lg \omega). \quad (5.1.10)$$

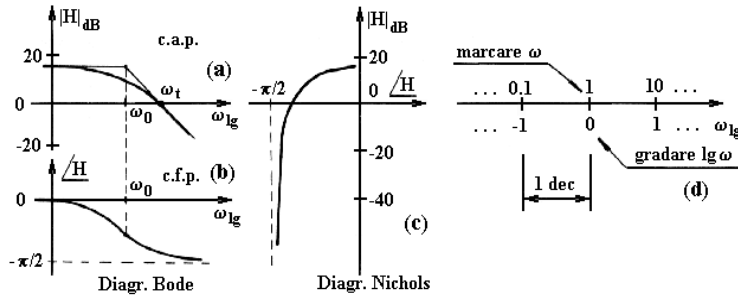
Graficul exact aferent c.a.p., fig.5.4 (a), se construiește punct cu punct. În practică, în locul c.a.p. exacte sunt utilizate adeseori și *c.a.p. simplificate* (c.a.p.-s.) construite pe baza asimptotelor care pot fi duse la c.a.p., în zone semnificative ale acesteia. În fig.5.4 (a), c.a.p.-s. este marcată cu linie subțire.

Panta c.a.p. este definită prin relația:

$$p(|H|_{dB}) = d(|H|_{dB})/d(\lg \omega) < dB/dec >. \quad (5.1.11)$$

Panta asimptotelor ce formează c.a.p.-s. nu poate fi decât 0,  $\pm 20$ ;  $\pm 40$ , ... dB/dec.

## Curs 5 Studiul sistemelor în domeniul pulsație



**Fig.5.4. Reprezentări grafice ale caracteristicilor de pulsație.**

□ **Caracteristica semilogaritmă fază-pulsăție (c.f.p.):**

$$\angle H(j\omega) = f_2(lg\omega), \quad (5.1.12)$$

cu reprezentarea grafică din fig.5.4 (b).

Graficele (a) și (b) reunite poartă denumirea de **diagrame Bode**. Ambele reprezentări au ca abscisă **axa logaritmă** notată prin  $\omega_{lg}$ , fig.5.4 (d) și care:

- este gradată în valorile lui  $lg\omega$ ,
- este marcată în valorile lui  $\omega$ ,
- are ca unitate **decada (dec)**:  
1 dec = intervalul de înzecire a pulsației.

O pulsație semnificativă a f.r.p. o constituie **pulsația de tăiere**, notată cu  $\omega_t$ , pentru care:

- hodograful intersectează (“taie”) cercul de rază unitate centrat în origine:

$$|H(j\omega_t)| = 1; \quad (5.1.13)$$

- c.a.p. “taie” axa  $\omega_{lg}$ , fiind valabilă relația:

$$|H(j\omega_t)|_{dB} = 0. \quad (5.1.14)$$

□ **Caracteristica semilogaritmă amplitudine-fază (c.a.f.):** este cunoscută și sub denumirea de **diagrama Nichols**.

C.a.f. este graficul reprezentării parametrice  $\{|H(j\omega)|_{dB}, \angle H(j\omega)\}$  cu  $\omega$  parametru, în sistemul de axe “ $\angle H, |H|_{dB}$ ”, fig.5.4 (c).

**Observații:** 1. Reprezentările grafice ale f.r.p. sunt MM neparametrice ale SF, utilizabile direct în analiză și proiectare.

2. Principial, în reprezentarea logaritmă  $|H(j\omega)|_{dB}$ , modululul  $|H(j\omega)|$  ar trebui să fie o mărime adimensională. În realitate atât  $y_m$  cât și  $u_m$  sunt cu dimensiune și, prin utilizarea SIU, dimensiunea  $\langle y_m \rangle / \langle u_m \rangle$  va trebui atașată la finele calculului:

**Curs 5**  
**Studiul sistemelor în domeniul pulsație**

$$|H(j0)| = k = 10 \quad \frac{|H(j0)|_{dB}/20}{<y>/<u>}. \quad (5.1.15)$$

Adeseori, în practică se lucrează în unități relative:

$$\hat{u}_m = u_m/u_N, \quad \hat{y}_m = y_m/y_N; \quad (5.1.16)$$

în acest caz se obține:

$$|H(j0)| = y_N/u_N \cdot 10^{\frac{|H(j0)|_{dB}}{20}}. \quad (5.1.17)$$

## 5.2. Calculul analitic al f.r.p. și trasarea grafică a c.d.p.

Dacă SF este dat prin MM-II sau MM-ISI, f.r.p. poate fi calculată analitic:

- pe baza unui calcul *cu creionul*,
- cu utilizarea *calculatorului numeric* (CN).

**A. Etapele calculului componentelor f.r.p. “cu creionul”** sunt următoarele, regăsite și în programele de calcul numeric:

- Se determină f.d.t. aferentă SF,  $H(s)$ ;
- Se calculează f.r.p.  $H(j\omega)$  și componentele sale;
- Se alege *domeniul de pulsații* care prezintă interes practic:  $D_\omega = [\omega_{min}, \omega_{max}]$ ; obișnuit  $D_\omega$  este de 3 ... 4(5) dec;
- Se calculează punct cu punct componentele f.r.p.
- Se reprezintă grafic caracteristicile care prezintă interes; numărul aproximativ de puncte pentru care se calculează f.r.p. și apoi c.a.p. și c.f.p. este de 5 ... 15 valori / decadă; valorile de calcul vor fi echidistanțate logarithmic.

**Exemplul 5.1** [P1]: Să se determine expresia f.r.p. și să se traseze c.d.p. aferente SL-C cu f.d.t.:

$$H(s) = \frac{10}{1 + 10s}. \quad (5.2.1)$$

**Soluție:** Se determină f.r.p.  $H(j\omega)$  și se calculează componentele f.r.p:

$$H(j\omega) = \frac{10}{1 + 10j\omega}, \quad \text{cu } U(\omega) = \frac{10}{1 + 100\omega^2}, \quad V(\omega) = \frac{-100}{1 + 100\omega^2}; \quad (5.2.2)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{1 + (10\omega)^2}, \quad \angle H(j\omega) = -\arctg(10\omega); \quad (5.2.3)$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \lg 10 - 20 \lg(1 + (10\omega)^2)^{1/2}. \quad (5.2.4)$$

## Curs 5

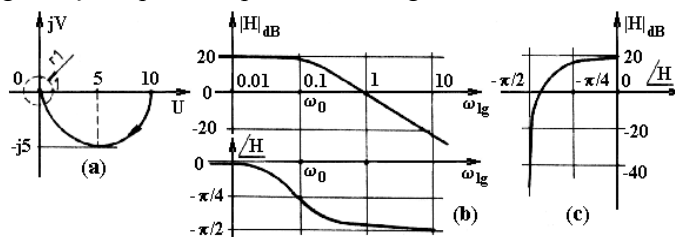
### Studiul sistemelor în domeniul pulsație

Se alege apoi domeniul de pulsații pentru care se face calculul și reprezentarea c.d.p.:  $D_\omega = [0.01; 10]$ . Datele calculate sunt cuprinse în tabelul 5.1.

**Tabelul 5.1.** Datele calculate pentru c.d.p. din exemplul 5.1.

$\omega$	$\lg \omega$	$U(\omega)$	$V(\omega)$	$ H(j\omega) $	$ H(j\omega) _{dB}$	$\angle H(j\omega) [^\circ]$
(0)	$(-\infty)$	10	0	10	20	0
.01	-2	9.9	-.99	9.94	19.96	-5.71
.02	-1.69	9.6	-1.92	9.79	19.81	-11.31
.05	-1.3	8	-4	8.94	19.08	-26
.1	-1	5	-5	7.07	16.99	-45
.2	-.69	2	-4	4.47	13.01	-63.4
.5	-.3	.38	-1.92	1.95	5.83	-78.8
1	0	.1	-.99	.99	-.04	-84
10	1	.001	.1	.1	-19	-87
$(\infty)$	$(\infty)$	0	0	0	$(-\infty)$	-90

Hodograful și c.d.p. sunt reprezentate în fig.5.5.



**Fig.5.5.** Caracteristici de pulsație pentru exemplul 5.1.

**B. În vederea determinării f.r.p. și a componentelor acestora cu utilizarea CN** se va apela de regulă un pachet de programe utilitare sau un mediu de programare specializat (de exemplu, Matlab [M1]).

### 5.3. Principii generale privind determinarea experimentală a c.d.p.

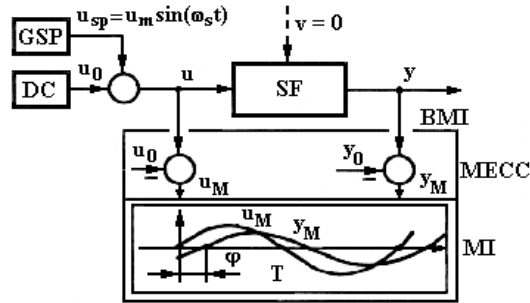
C.d.p. pot fi determinate experimental numai în cazul **sistemelor stabile**. Cea mai simplă modalitate de determinare a c.d.p. aferente unui SF se dovedește cea în care semnalul de probă este un semnal sinusoidal.

În fig.5.6 este prezentată cchema bloc aferentă determinării experimentale, în care:

- DC - dispozitiv de conducere prin care SF se aduce în punctul de funcționare în care se determină c.d.p.;
- GSP - generator de semnal sinusoidal cu frecvență modificabilă;

**Curs 5**  
**Studiul sistemelor în domeniul pulsație**

- BMI - bloc de măsură-înregistrare, MECC - modul de extragere a componentei continue, MI - modul înregistrator.



**Fig.5.6.** Schemă pentru determinarea experimentală a c.d.p.

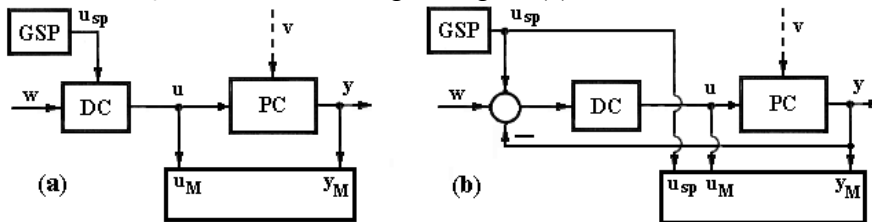
Prelucrarea finală a rezultatelor trebuie să țină seama de factorii de scalare care apar în faza de măsurare și de înregistrare. Experimentele se efectuează pentru diferite frecvențe  $f_s$  ale semnalului sinusoidal; pulsațiile aferente trebuie corelate cu domeniul pulsațiilor semnificative  $D_\omega$  ale SF supus identificării:

$$f_s = \omega_s / (2\pi) . \quad (5.3.1)$$

Ținând seama de numărul mare de valori ale pulsației pentru care se fac determinările și de timpul relativ mare al unei determinări (aducerea acestuia în regim armonic permanentizat), este important ca pe perioada experimentărilor, asupra procesului să nu acționeze perturbații ( $v(t)=0$ ).

Se mai precizează faptul că, pe cale experimentală, c.d.p. – ca bază a IE prin metoda răspunsului la semnal sinusoidal – se pot determina:

- cu PC funcționând izolat, în afara buclei de reglare, fig.5.7 (a);
- cu PC funcționând în bucla de reglare, fig.5.7 (b).



**Fig.5.7.** Scheme pentru determinare experimentală a c.d.p.

Alte situații și soluții tehnice pentru determinarea experimentală a c.d.p. aferente PC (IE în domeniul pulsație) sunt prezentate în literatură, [P2], [E1], [L1].

**Curs 5**  
**Studiul sistemelor în domeniul pulsație**

**5.4. Studiul în domeniul pulsație al SD-D**

Importanța studiului în domeniul pulsație al SD-D rezidă în următoarele:

- ◆ prelucrarea numerică a informației are la bază eșantionarea semnalelor; în consecință, analiza din domeniul pulsație a semnalelor în timp continuu se va baza pe eșantioane din domeniul timp cu corespondente în domeniul pulsație;
- ◆ metodele de studiu din domeniul pulsație specifice sistemelor în timp continuu pot fi extinse și la cazul sistemelor în timp discret.

Studiul detaliat în domeniul pulsație fiind relativ complicat, în cele ce urmează sunt specificate doar câteva aspecte ale acesteia.

**A. Definirea funcției de răspuns la pulsație: varianta transformării Z.** Dacă la intrarea unui SL-D caracterizat prin f.d.t.  $H(z)$  se aplică o secvență de intrare  $u^*(t)$  armonică (sinusoidală):

$$u^*(t) = \{e^{j\omega k T_e}\}, \quad k \in N, \quad (5.4.1)$$

atunci la ieșirea acestuia se va obține secvența armonică  $y^*(t)$ :

$$y^*(t) = \{y(kT_e)\} = e^{j\omega k T_e} \sum_{i=0}^k h(iT_e) e^{j\omega i T_e}, \quad \text{în care:} \quad (5.4.2)$$

$$H(e^{j\omega T_e}) = \sum_{i=0}^k h(iT_e) e^{j\omega i T_e} \quad (5.4.3)$$

reprezintă imaginea în domeniul pulsație a secvenței pondere, adică **funcția de răspuns la pulsație discretă** (f.r.p.-d.). Formal, f.r.p.-d. se calculează cu relația:

$$H(e^{j\omega T_e}) = H(z) \Big|_{\substack{z=e^{sT_e} \\ s=j\omega}}, \quad \text{sau} \quad (5.4.4)$$

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{b_n e^{j\omega T_e n} + \dots + b_1 e^{j\omega T_e} + b_0}{a_n e^{j\omega T_e n} + \dots + a_1 e^{j\omega T_e} + a_0}. \quad (5.4.5)$$

Expresia (5.4.5) fiind transcendentă, utilizarea ei în calcule este anevoioasă. Analiza relației evidențiază și faptul că f.r.p.-d. este o **funcție periodică**, astfel că două secvențe de pulsație  $\omega$  și  $\omega'$ :

$$\omega' = \omega + 2\pi v / T_e, \quad v \in N, \quad (5.4.6)$$



## Curs 5

### Studiul sistemelor în domeniul pulsație

nu se deosebesc. Această periodicitate va determina restrângerea calculului f.r.p.-d. la domeniul de pulsație:

$$0 \leq \omega T_e < \pi \quad \text{sau} \quad 0 \leq \omega < (1/2)(2\pi/T_e) . \quad (5.4.7)$$

“Falsificarea” introdusă în calculul f.r.p.-d. pentru valori  $\omega$  în afara domeniului menționat poartă denumirea de **aliasing** și este domeniul de studiu al teoriei sistemelor și semnalelor.

**B. Determinarea f.r.p.-d.: varianta transformării biliniare “q”.** Este o metodă convenabilă de calcul al f.r.p.-d. care asigură acesteia o formă rațională. Ea se bazează pe transformarea biliniară inversă metodei trapezelor:

$$q = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad \rightarrow \quad z = \frac{1+qT_e/2}{1-qT_e/2} , \quad (5.4.8)$$

$$\text{în care } q \text{ este o variabilă complexă: } q = \Sigma + j\Omega . \quad (5.4.9)$$

Dacă în (5.4.8) se înlocuiesc:

$$z = e^{sT_e} \Big|_{s=j\omega} \quad \text{și} \quad q = j\Omega , \quad (5.4.10)$$

atunci se obține legătura între  $\Omega$  (**pulsație transformată**) și  $\omega$  în forma:

$$\Omega = (2/T_e) \operatorname{tg}(\omega T_e/2) . \quad (5.4.11)$$

Pentru:

$$\omega \leq \omega_e/2 , \quad (\omega_e = 2\pi/T_e) \quad \text{se obține: } \operatorname{tg}(\omega T_e/2) \approx \omega T_e/2 \quad \text{și} \quad \Omega \approx \omega . \quad (5.4.12)$$

Interpretarea condiției (5.4.12): eșantionarea cu o pulsație  $\omega_e$  “mare” permite calculul mai corect al f.r.p.-d. modificate,  $H(j\Omega)$ .

F.r.p.-d. modificată  $H(j\Omega)$  se obține prin lanțul de transformări prezentat în cele ce urmează:

- se pleacă de la f.d.t.  $H(z)$  cunoscută; aceasta poate fi și f.d.t. calculată pe baza relației (4.2.3) rescrisă în forma:

$$H(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\} \Big|_{t=kT_e} \right\} ; \quad (5.4.13)$$

- se calculează f.d.t. transformată  $H(q)$  care este o formă rațională proprie:

$$H(q) = H(z) \Big|_{z = \frac{1+qT_e/2}{1-qT_e/2}} ; \quad (5.4.14)$$

- se calculează f.r.p.-d. cu relația:

$$H(j\Omega) = H(q) \Big|_{q=j\Omega} . \quad (5.4.15)$$

## Curs 5

### Studiul sistemelor în domeniul pulsație

Pe baza relației (5.4.15) se pot calcula apoi toate componentele c.d.p.. Din relația (5.4.11) se poate remarca și faptul că pentru  $\omega \rightarrow \omega_c/2$  se obține  $\Omega \rightarrow \infty$ , adică transformarea biliniară “ $q$ ” dilată domeniul pulsațiilor transformate  $\Omega$  în raport cu domeniul pulsațiilor naturale  $\omega$ .

## 7. STABILITATEA SISTEMELOR

Conceptul de stabilitate a unui sistem dinamic poate fi asimilat celui din termodinamică: astfel, starea de echilibru a unui sistem termodinamic se consideră stabilă dacă respectă cerințele următoare:

- (I) în situația în care sistemul – sub influența unor condiții externe sau interne cu acțiune permanentă – evoluează spre o nouă stare de echilibru,
- (II) în situația în care sistemul – sub influența unor condiții externe sau interne cu acțiune trecătoare – revine la vechea stare de echilibru sau în imediata vecinătate a acesteia.

Conceptul de stabilitate evidențiază proprietatea unui sistem (proces, sistem automat) de a-și menține – în anumite condiții – o stare de echilibru staționar sau de a putea trece de la o stare de echilibru la o altă stare de echilibru. Calitatea de a fi stabil sau nu a unui sistem se poate manifesta ca urmare:

- modificării unei / unor intrări ale sistemului,
- modificării unor parametri ai sistemului,
- modificării chiar a structurii sistemului.

Toate aceste cauze pot avea repercursiuni asupra stării (regimului) în care s-a aflat sistemul în prealabil modificării intrării și respectiv efecte asupra evoluției ieșirii.

În cadrul acestui capitol vor fi prezentate aspecte ingineresti referitoare la:

- definirea conceptului de stabilitate,
- aspectele de bază ale teoriei stabilității sistemelor liniare,
- criterii și metode de verificare a stabilității sistemelor liniare.

Pentru aprofundarea cunostintelor se recomandă consultarea bibliografiei (de exemplu, lucrările în limba română [R2] și [V1]).

### 7.1. Conceptul de stabilitate

Un sistem este tehnic utilizabil numai dacă este **stabil**. Stabilitatea sistemelor tehnice poate fi surprinsă;

- prin formulări intuitive (definiții) verificabile experimental,
- prin formulări referitoare la proprietatea de stabilitate a unui SD asociat SF, verificabilă pe cale analitică.

## Curs 5 Stabilitatea sistemelor

Formulările intuitive ale stabilității sunt date sub forma unor **definiții**; ele vor fi prezentate cu referire la sistemul monovariabil caracterizat prin MM-ISI (liniar):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \text{în care:} \quad (7.1.1)$$

$$\mathbf{x}' = \begin{cases} \mathbf{x}', & \text{în cazul sistemelor în timp continuu,} \\ \mathbf{x}_{k+1}, & \text{în cazul sistemelor în timp discret.} \end{cases}$$

**A) Stabilitatea externă a unui sistem (în sensul intrare-ieșire).** Ea este cunoscută și sub denumirea de stabilitate în sensul **Intrare Mărginită – Ieșire Mărginită** sau **BIBO-stabilitate (Bounded Input – Bounded Output)**.

**Definiție:** Un SD de forma (7.1.1) respectiv SF caracterizat de acest SD se numește **stabil în sensul intrare-ieșire (BIBO-stabil)** dacă, pentru orice moment inițial  $t \in T \subset R$  și stare inițială  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , la o variație mărginită a intrării  $u(t)$ :

$$|u(t)| < L_u, \quad (7.1.2)$$

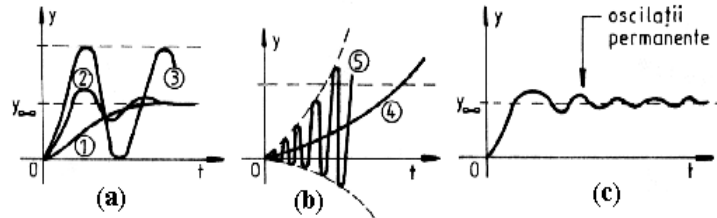
sistemul răspunde cu o variație mărginită a ieșirii:

$$|y(t)| < L_y. \quad (7.1.3)$$

*În caz contrar sistemul se numește instabil.*

**Remarcă:** În cazul unei analize de detaliu, cele două valori ale limitărilor  $L_u$  și  $L_y$  trebuie corelate.

În sensul definiției date, **stabilitatea externă** poate fi **probată intuitiv** prin alura răspunsului la semnal treaptă. Astfel, în fig.7.1 sunt redată aluri tipice pentru răspunsuri la semnal treaptă ale unor sisteme *stabile în sensul intrare-ieșire* ((1), (2), (3)) și respectiv ale unor *sisteme instabile* (4), (5).



**Fig. 7.1. Interpretarea grafică a stabilității externe.**

Deși în sensul definiției sistemele cu alura răspunsului de tipul (3) - cu răspuns oscilant neamortizat - pot fi încadrate în categoria sistemelor stabile, din punct de vedere practic ele vor fi considerate instabile.

O situație particulară apare în fig.7.1-c în care ca urmare a acțiunii intrării și condițiilor de reglare acceptate, în sistemul exemplificat apare **un regim cu**

## Curs 5

### Stabilitatea sistemelor

**oscilații întreținute** de amplitudine constantă (dependentă adeseori de punctul de funcționare cvasi-staționară). În acord cu definiția dată, sistemul poate fi considerat *stabil* (de exemplu, cazul SRA cu reglatoare neliniare de tip bipozițional) sau *instabil* (de exemplu, oscilații întreținute care pot apărea în sistem ca urmare a variației între limitări – impuse – ale ieșirii regulatorului; acestea din urmă nu sunt dorite și vor dovedi instabilitatea sistemului).

În cazul SRA, limitările tehnice de la nivelul diferitelor mărimi (comanda, marimea de execuție) sunt introduse adeseori în mod voit; ele fac ca ieșirea  $y(t)$  să nu crească peste anumite valori de siguranță pentru că, în caz contrar, instalația tehnologică s-ar putea distruge. Scoaterea sistemului din starea de limitare constituie sarcina DCA complex.

**B) Stabilitatea internă a unui sistem** sau **stabilitatea stării unui sistem (stabilitate în sens Liapunov)**. Pentru caracterizarea stabilității interne a unui SF (SD) referirile se fac la o stare inițială a sistemului, notată cu  $\mathbf{x}_0$ , care poate fi o stare stabilă sau instabilă.

**Definiție:** Starea de repaus  $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$  a sistemului dinamic (7.1.1) și corespunzător starea  $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$  aferentă SF este o **stare stabilă** și – corespunzător – **sistemul se consideră stabil**, dacă, sistemul scos din această stare:

$$|\Delta \mathbf{x}_i(0_+)| < L_{x0}, \quad i = 1 \dots n \quad (L_{x0} > 0), \quad (7.1.4)$$

revine după îndepărtarea cauzei:

♦ în starea stabilă inițială  $\mathbf{x}_0$  sau

♦ într-o vecinătate acceptată a acesteia,

în condițiile în care traiectoriile de stare  $\Delta \mathbf{x}(t)$ ,  $t > 0$ , rezultate respectă condiția:

$$|\Delta \mathbf{x}_i(t)| < L_x, \quad i = 1 \dots n \quad (L_x > 0), \quad (7.1.5)$$

în care  $L_x = f\{L_{x0}\}$ , astfel ca  $L_x > L_{x0}$  [B3], [I1].

Dacă nu sunt îndeplinite cerințele conform definiției, atunci **sistemul se consideră instabil**.

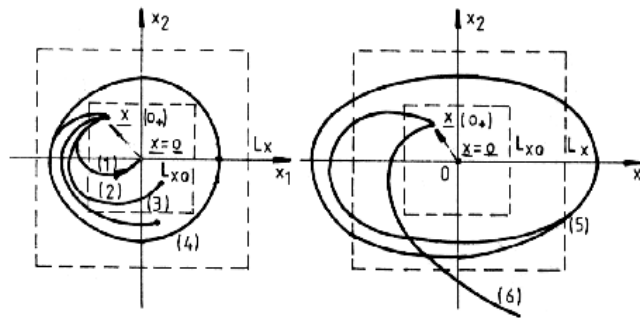
Interpretarea stabilității conform acestei definiții este ilustrată în fig.7.2, pentru un sistem de ordinul doi ( $n=2$ ) prin traiectoriile de fază aferente acestuia. Traiectoriile (1), (2), (3) și (4) denotă comportări stabile, iar traiectoriile (5) și (6) comportări instabile. Traiectoriile (4) și (5) indică faptul că în sistem se stabilește un regim permanent oscilant; deosebirea dintre cele două situații constă în aceea că situația (4), prin alegerea domeniului  $L_x$ , caracterizează un **sistem acceptat a fi stabil**, pe când situația (5), prin alegerea lui  $L_x$ , caracterizează un **sistem instabil**.

Comportarea de tip (1) este remarcabilă: **după îndepărtarea cauzei**, sistemul **revine exact** în starea inițială. Sistemele cu o astfel de comportare sunt denumite **sisteme asimptotic stabile**.

## Curs 5 Stabilitatea sistemelor

**C) Observații finale.** Verificarea stabilității unui SF (SD) pe baza definițiilor nu este avantajoasă deoarece:

- dacă verificarea se face “experimental”, ea se poate forta instalația tehnologică în care se derulează sistemul și solda cu urmări adeseori nedorite;
- dacă verificarea se face prin simularea pe CN a comportării SD, timpul afectat verificării poate fi mai mare decât timpul unui calcul specific dedicat verificării (analizei) stabilității.



**Fig. 7.2.** Interpretarea grafică a stabilității interne.

Pentru practică, au fost formulate **teoreme ce fixează condițiile necesare și adeseori și suficiente** în care un SD (SF aferent) este stabil în sensul definițiilor date. Mai mult, proprietatea de stabilitate – și în anumite cazuri și **gradul de stabilitate a SD** – pot fi verificate operativ pe baza unor **criterii de apreciere a stabilității**. Aceste criterii și teoreme impun cerințe specifice fiecărui tip de sistem, în timp continuu sau discret, liniar (liniarizat) sau neliniar, cu structură fixă (fixată) și valorile parametrilor fiși sau nu ș.a. Prezentările care urmează vor fi restrânse la stabilitatea sistemelor liniare, cu structură fixată și valori fixe dar și posibil variabile ale parametrilor sistemului.

Stabilitatea este o **proprietate structurală a sistemului**, care se poate manifesta în procesul acțiunilor externe (mărimi de intrare) sau interne asupra SD. Atributul de **proprietate structurală** trebuie văzut în două sensuri:

- modificările din structura sistemului pot afecta proprietatea;
- modificările valorilor parametrilor sistemului pot afecta proprietatea.

**Sistemele cu structură fixă** se pot clasifica după cum urmează:

- sisteme **absolut stabile**, la care proprietatea nu depinde de valorile parametrilor ce caracterizează structura;
- sisteme **absolut instabile**, care la structura dată sunt instabile indiferent de valorile parametrilor;

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

- sisteme **condiționat stabile**, care la structura dată pentru un set de valori ale parametrilor sunt stabile, iar pentru alt set sunt instabile.

**7.2. Stabilitatea sistemelor liniare invariante în timp continuu (SL-C).**  
**Teorema fundamentală a stabilității SL-C**

**A. Teorema fundamentală a stabilității SL-C.** Se consideră un SL-C monovariabil caracterizat prin:

$$\text{MM-ISI:} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (7.2.1-a)$$

sau:

$$\text{MM-II:} \quad \sum_{v=0}^n a_v y^{(v)}(t) = \sum_{\mu=0}^m b_\mu u^{(\mu)}(t), \quad (m < n). \quad (7.2.1-b)$$

În general, cele două modele reflectă o aceeași realitate, evidențiată de aceeași f.d.t.  $H(s)$ :

$$H(s) = \begin{cases} \mathbf{c}^T (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \frac{\text{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})} \mathbf{b}, \end{cases} \quad (7.2.2-a)$$

$$H(s) = \begin{cases} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}. \end{cases} \quad (7.2.2-b)$$

cu o aceeași ecuație caracteristică  $\Delta(s) = 0$  (unică):

$$\Delta(s) = \begin{cases} \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) = 0, \end{cases} \quad (7.2.3-a)$$

$$\Delta(s) = \begin{cases} \sum_{v=0}^n a_v s^v = 0. \end{cases} \quad (7.2.3-b)$$

Soluția omogenă a ecuației diferențiale (răspunsul liber al sistemului) este determinată de rădăcinile ecuației caracteristice:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (7.2.4)$$

Dependent de natura rădăcinilor acestei ecuații, răspunsul liber va conține componente cu aluri diferite, exemplificate în tabelul 7.1. Soluțiile libere, care “se sting în timp” la  $t \rightarrow \infty$ , sunt caracterizate de rădăcini care au **partea reală strict negativă**, adică:

$$\text{Re}\{s_v\} < 0. \quad (7.2.5)$$

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

Aceasta înseamnă că, un sistem stabil, trebuie să fie caracterizat prin *rădăcini ale ecuației caracteristice plasate strict în semiplanul stâng al planului rădăcinilor*.  
Cele ilustrate sunt sintetizate prin **teorema fundamentală a stabilității SL-C**:

*Un SL-C caracterizat prin MM-ISI / MM-II de forma (7.2.1) – și, corespunzător, SF descris de acest SD – este stabil dacă și numai dacă cele n rădăcini ale ecuației caracteristice (7.2.4) au **partea reală strict negativă**, adică:*

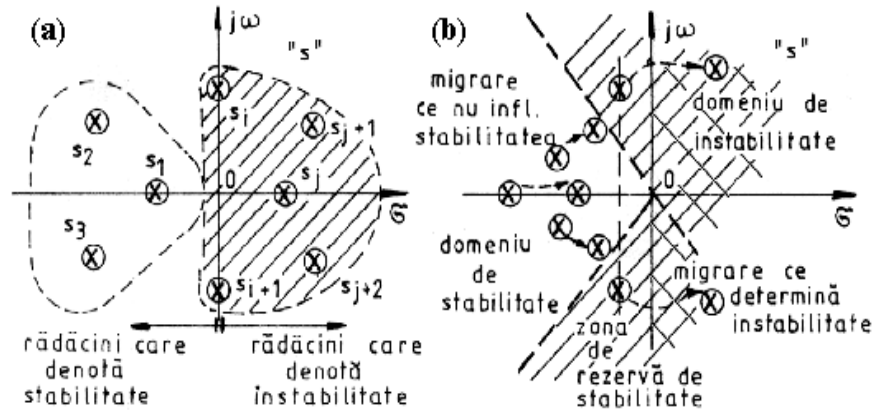
$$\operatorname{Re}\{s_v\} < 0, \quad v = 1 \dots n. \quad (7.2.6)$$

**Tabelul 7.1.** Aluri de răspunsuri libere pentru SL-C (7.2.1).

Nr. crt.	Natura rădăcinilor și condiții suplimentare	Componenta soluției aferente rădăcinii	Graficul soluției coresp. rădăcinii
1.	reală $s_q = \zeta_q$	$\zeta e^{\zeta_q t}$ $(\zeta^* > 0)$	
	$\zeta_q > 0$		
	$\zeta_q < 0$		
2.	imaginară (pereche) $s_{q,q+1} = \pm j\omega_q$	$\zeta \sin(\omega_q t + \varphi_q)$ $(\zeta^* > 0)$	
3.	complex conjugate $s_{q,q+1} = \zeta_q \pm j\omega_q$	$\zeta e^{\zeta_q t} \sin(\omega_q t + \varphi_q)$ $(\zeta^* > 0)$	
	$\zeta_q > 0$ $\omega_q > 0$		

Interpretarea grafică a teoremei fundamentale este prezentată în fig.7.3 (a) prin reprezentarea poziționării polilor sistemului în planul rădăcinilor “s”.

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**



**Fig.7.3. Interpretarea grafică a teoremei fundamentale a stabilității SL-C.**

Din considerente practice datorate:

- posibilității “deplasării” rădăcinilor datorită unor modificări ale parametrilor sistemului, modificări ce pot determina chiar instabilitatea sistemului, fig.7.3 (b),
- regimurilor tranzitorii oscilante, care pentru un SF trebuie să fie cât mai repede amortizate,

în planul rădăcinilor se va marca o **zonă de rezervă de stabilitate**, ca în fig.7.3 (b). La definirea “cantitativă” (adeseori arbitrară) a acestei zone se va ține seama de:

- mărimea constantelor de timp ce caracterizează sistemul,
- tendințele posibile în modificarea parametrilor sistemului.

Cel de-al doilea aspect poate fi studiat analitic pe baza **teoriei sensibilității și robusteții sistemelor**.

**B. Aspecte particulare relative la stabilitatea SRA-cC caracterizate prin MM-II.**

Pentru o structură de SRA-cC, poate fi scrisă relația:

$$z(s) = H_{zw}(s)w(s) + H_{zv}(s)v(s), \quad (7.2.7)$$

$H_{zw}(s)$  și  $H_{zv}(s)$  date de relația (6.3.3).

Ecuția caracteristică aferentă sistemului este:

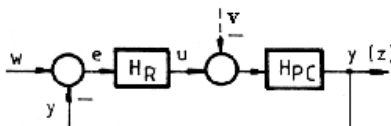
$$\Delta(s) = 1 + H_0(s) = 0, \quad \text{cu } H_0(s) = H_R(s)H_{PC}(s). \quad (7.2.8)$$

În anumite situații particulare dorite - de exemplu, compensarea polilor PC de către zerouri ale RG - în f.d.t.  $H_0(s)$  apar *factori comuni la numărător și numitor* care - din punct de vedere matematic - ar putea fi *simplificați*. Dacă însă factorii comuni sunt situați în *semiplanul drept al planului rădăcinilor*, simplificarea are consecințe dezavantajoase în aprecierea stabilității SRA.



**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

**Exemplul 7.1:** Să se analizeze stabilitatea SRA cu structura din fig.7.4, având:



**Fig.7.4.** Relativă la analiza stabilității SRA-c.

- Cazul (I):  

$$H_R(s) = \frac{(1+4s)}{(1+s)} \quad H_{PC}(s) = \frac{1}{(1+2s)(1+4s)}$$
- Cazul (II):  

$$H_R(s) = \frac{(1-4s)}{(1+s)} \quad H_{PC}(s) = \frac{1}{(1+2s)(1-4s)}$$

*Soluție:*

- *Cazul (I):* Se calculează ecuația caracteristică aferentă SRA:

$$\Delta(s) = 1 + H_0(s) = 1 + \frac{1+4s}{(1+s)} \cdot \frac{1}{(1+2s)(1+4s)} = 0.$$

(1) Fără efectuarea simplificării factorilor  $(1+4s)$  (analiza *corectă*) se obține:

$$\Delta(s) = (1+4s)(2+3s+2s^2) = 0, \text{ cu rădăcinile:}$$

$$s_1 = -1/4 \text{ și } s_{2,3} = (-3 \pm 7^{1/2})/4 \Rightarrow \text{sistem stabil.}$$

(2) Cu efectuarea simplificării factorilor  $(1+4s)$  (*gresit*):

$$\Delta'(s) = (1+2s)(1+s) + 1 = 0, \text{ cu rădăcinile:}$$

$$s_{1,2}' = (-3 \pm 7^{1/2})/4 \Rightarrow \text{sistem stabil.}$$

- *Cazul (II):* Se calculează ecuația caracteristică:

$$\Delta(s) = 1 + H_0(s) = 1 + \frac{1-4s}{(1+s)} \cdot \frac{1}{(1+2s)(1-4s)} = 0.$$

(1) Fără efectuarea simplificării factorilor  $(1-4s)$  (*corect*) se obține:

$$\Delta(s) = (1-4s)(2+3s+2s^2) = 0, \text{ cu rădăcinile:}$$

$$s_1 = 1/4 \text{ și } s_{2,3} = (-3 \pm 7^{1/2})/4 \Rightarrow \text{sistem instabil.}$$

(2) Cu efectuarea simplificării factorilor  $(1-4s)$  (*greșit*):

$$\Delta'(s) = (1+2s)(1+s) + 1 = 0, \text{ cu rădăcinile:}$$

## Curs 5 Stabilitatea sistemelor

$$s_{1,2}' = (-3 \pm 7^{1/2})/4 \quad \Rightarrow \text{ sistem stabil.}$$

*Remarcă:* Dacă în primul caz, simplificarea de factori nu a afectat proprietatea de stabilitate, în cel de-al doilea caz soluția corectă este “*sistem instabil*”.

**În consecință**, în analiza stabilității SRA-cC se va utiliza formularea următoare a teoremei fundamentale a stabilității:

*Un SRA-cC este stabil dacă și numai dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice:*  
 $1 + H_0(s) = 0 \quad (7.2.9)$   
*sunt amplasate strict în semiplanul stâng al planului rădăcinilor, neadmițându-se în  $H_0(s)$  nici o simplificare de factori ce ar afecta ordinul sistemului.*

Aspectul discutat este important ținând seama de faptul că metodele de proiectare bazate pe compensarea constantelor de timp mari ale PC de către RG au la bază tocmai crearea unor astfel de factori în structura (f.d.t. a) RG. Astfel, în cazul în care PC are și poli în semiplanul drept, compensarea acestora nu este permisă (a se vedea și exemplul 7.1).

În acest context, f.d.t. a PC (și similar și a RG) va fi scrisă sub forma:

$$H_{PC}(s) = \frac{B^-(s) B^+(s)}{A^-(s) A^+(s)},$$

în care, cu  $B^-(s)$  și  $A^-(s)$  conțin zerouri/poli necompensabile iar  $B^+(s)$  și  $A^+(s)$  conțin zerouri/poli compensabile.

Un caz particular este cel în care sistemul conține un **element cu timp mort** ( $T_m$ ) când f.d.t.  $H_0(s)$  se explicitează sub forma:

$$H_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} e^{-sT_m}. \quad (7.2.10)$$

Atunci, ecuația caracteristică devine o ecuație transcendentă de forma:

$$A_0(s) + B_0(s)e^{-sT_m} = 0, \quad (7.2.11)$$

pentru care, nu se mai pune problema gradului / respectiv ordinului sistemului.

Din acest motiv, în enunțul teoremei fundamentale a stabilității formularea corectă și completă va fi “... toate rădăcinile ecuației caracteristice ...” și nu “... cele  $n$  rădăcini ale ecuației caracteristice ...”.

În general, stabilizarea sistemelor cu timp mort mare ridică probleme mari.

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

**7.3. Criterii de apreciere a stabilității SL-C**

*Criteriile de apreciere a stabilității (c.a.s.)* bazate pe MM-II sunt de două tipuri:

- criterii algebrice,
- criterii “frecvențiale” care sunt date de regulă în formulări grafo-analitice.

Fiecare din criterii prezintă particularități, tehnici și arii de aplicabilitate diferite. În continuare, referirile se vor face numai la un singur criteriu algebric de apreciere a stabilității criteriul datorat lui Hurwitz.

Pentru studiul altor criterii, se va consulta literatura de specialitate.

***Criteriul Hurwitz de apreciere a stabilității SL-C*** (prescurtat, c.a.s. Hurwitz) este un criteriu algebric care fixează – dependent de valorile coeficienților ecuației caracteristice (7.2.3) – *condițiile necesare și suficiente în care rădăcinile acesteia sunt situate în semiplanul stâng al planului rădăcinilor.*

Prealabil prezentării c.a.s. Hurwitz se reamintește teorema următoare din algebră (fără demonstrație):

*Teoremă:* Pentru ca rădăcinile unei ecuații algebrice de forma:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (7.3.1)$$

să fie situate în semiplanul stâng al planului rădăcinilor este **necesar** (dar nu și suficient) ca **toți coeficienții**  $a_v$  să fie **strict pozitivi**:

$$a_v > 0, \quad v = 0 \dots n. \quad (7.3.2)$$

Un polinom care respectă cerința dată de relația (7.3.2) poartă denumirea de *polinom Hurwitz*.

În consecință, dacă ecuația caracteristică a unui SL-C de forma (7.3.1) va prezenta cel puțin un coeficient  $a_v$  de valoare nulă sau negativă, sistemul este **sigur instabil** și, ca urmare, aplicarea în continuare a oricarui c.a.s. devine inutilă.

***Aplicarea c.a.s. Hurwitz.*** Se consideră un SL-C de MM-ISI sau MM-II de forma (7.2.1) cunoscută, cu ecuația caracteristică (7.2.3) calculată și rescrisă în forma (7.3.1). Pentru aprecierea stabilității SL-C, cu coeficienții  $a_v$ ,  $v=0\dots n$  (toți  $a_v > 0$ ), se construiește *matricea Hurwitz* ( $n \times n$ ) dimensională, cu structura:

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

$$\mathbf{H} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_{n-1} & \\ \hline & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ \hline & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ \hline & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \hline & 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \hline & \dots & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{array} . \quad (7.3.3)$$

Pe baza matricei Hurwitz,  $\mathbf{H}$ , se pot calcula:

- determinantul Hurwitz (determinantul matricei  $\mathbf{H}$ ) și
- minorii principali (de nord-vest) ai matricii Hurwitz (marcați):

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{H}_1) &= a_{n-1}, \\ \det(\mathbf{H}_2) &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \dots \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

.....

$$\det(\mathbf{H}_n) = \det(\mathbf{H}) = a_0 \det(\mathbf{H}_{n-1}),$$

În acest context, *c.a.s. Hurwitz se formulează* după cum urmează:

**C.a.s. Hurwitz:** Condiția ca SL-C, de ecuație caracteristică (7.3.1), să fie *stabil* este ca *determinantul Hurwitz și toți minorii săi principali să fie strict pozitivi*.

**Etapele de aplicare** a c.a.s. Hurwitz pot fi sintetizate prin următoarele:

- ♦ se delimitează sistemul a cărui stabilitate se analizează; se determină MM-II sau MM-ISI aferent;
- ♦ se determină ecuația caracteristică în forma (7.3.1); ordinul sistemului,  $n$ , trebuie să se conserve ( $a_n \neq 0$ );
- ♦ se verifică cerințele teoremei preliminare, ca toți coeficienții  $a_v > 0$ ,  $v = 0 \dots n$ ; *în caz afirmativ*:
- ♦ se construiește matricea Hurwitz,  $\mathbf{H}$ , și se calculează determinantul Hurwitz,  $\det(\mathbf{H}_n)$ , și minorii săi principali:  $\det(\mathbf{H}_1)$ ,  $\det(\mathbf{H}_2)$ , ...,  $\det(\mathbf{H}_{n-1})$ ;
- ♦ se verifică satisfacerea condiției de stabilitate:

$$\text{toți } \det(\mathbf{H}_i) > 0, i = 1 \dots n. \quad (7.3.5)$$

## Curs 5 Stabilitatea sistemelor

Prin enunțul criteriului nu se fac precizări referitoare la tipul sistemului - fără sau cu reacție - c.a.s. Hurwitz aplicandu-se în aceeași manieră indiferent de tipul sistemului.

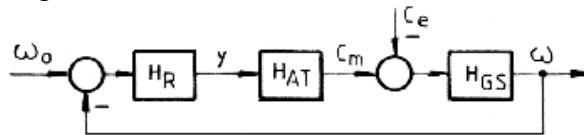
**Avantajele (A)** și **dezavantajele (D)** utilizării c.a.s. Hurwitz pot fi sintetizate prin următoarele:

- A/D:** c.a.s. Hurwitz se aplică simplu în cazul sistemelor de ordin redus ( $n < 4, 5$ ); odată cu creșterea ordinului calculul “manual” devine obositor;
- A:** c.a.s. Hurwitz este ușor algoritimizabil pentru implementarea pe calculator numeric (de exemplu, în varianta dată de Routh);
- A:** c.a.s. Hurwitz poate fi utilizat și la analiza stabilității în funcție de variația unor parametri ai sistemului (SRA) într-un domeniu de valori dat;
- D/A:** c.a.s. Hurwitz nu se aplică sistemelor cu timp mort; totuși, dacă timpul mort ( $T_m$ ) se dovedește de ordinul de mărime al constantelor de timp mici ai sistemului, atunci, apelând un aproximant Pade pentru partea cu timp mort, criteriul poate fi aplicat; acest aproximant este dat de relația:

$$e^{-sT_m} \approx \frac{1}{1 + sT_m}; \quad (7.3.6)$$

- D:** c.a.s. Hurwitz nu dă informații asupra gradului de stabilitate a sistemului.

**Exemplul 7.2:** Se consideră structura unui SRA a vitezei unghiulare  $\omega$  a unui hidrogenerator, fig.7.5; f.d.t. aferente blocurilor sunt de forma:



**Fig.7.5.** Relativă la analiza stabilității unui SRA-c cu c.a.s. Hurwitz.

$$H_R(s) = \frac{k_R(1+8s)}{1+20s}; \quad H_{AT}(s) = \frac{1-4s}{1+2s}; \quad H_{GS}(s) = \frac{1}{\alpha+7s},$$

cu  $\alpha \in (0, 1.2]$  și  $k_R > 0$ . Se cere:

1. Considerând pentru  $\alpha$  valoarea  $\alpha = 1$ , să se determine domeniul valorilor  $k_R$  pentru care SRA este stabil.
2. Alegând  $k_{R0} = k_{Rmax}/4$ , să se analizeze dacă pentru  $\alpha = 0.2$ , SRA este stabil; sa se calculeze valoarea limită inferioară a lui  $k_R$  pentru care sistemul rămâne stabil.

**Soluție:** 1. Pentru  $\alpha = 1$ , ecuația caracteristică a SRA-c se calculează cu relația

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

$$\Delta(s) = 1 + H_0(s), \quad \text{unde } H_0(s) = \frac{k_R(1+8s)(1-4s)}{(1+20s)(1+2s)(1+7s)}.$$

Operând, se obține:

$$\Delta(s) = 280s^3 + (194 - 32k_R)s^2 + (29 + 4k_R)s + 1 + k_R.$$

În acord cu cerințele teoremei preliminare, sunt impuse condițiile de stabilitate:

$$\begin{aligned} 194 - 32k_R &> 0, \\ 29 + 4k_R &> 0, \\ 1 + k_R &> 0, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad k_R \in (0, 6.0625).$$

Se construiește matricea Hurwitz (n=3) și se calculează expresia determinantului Hurwitz:

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{H}_3) = \begin{vmatrix} 194-32k_R & 1+k_R & 0 \\ 280 & 29+4k_R & 0 \\ 0 & 194-32k_R & 1+k_R \end{vmatrix}.$$

Se impun condițiile de stabilitate:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{H}_1) = 194 - 32k_R &> 0 \Rightarrow k_R < 194/32 = 6.0625; \\ \det(\mathbf{H}_2) = (194 - 32k_R)(29 + 4k_R) - 280(1 + k_R) &> 0 \\ &\Rightarrow k_R \in (-4.9919, 8.3668); \\ \det(\mathbf{H}_3) &> 0 \Rightarrow k_R > -1 \cap k_R \in (-4.9919, 8.3668); \\ &\Rightarrow k_R \in (-4.9918, 6.0625). \end{aligned}$$

În consecință, domeniul valorilor  $k_R$  ( $k_R > 0$ ) pentru care sistemul este stabil este:

$$D_{k_R} = (0, 6.0625) \text{ cu } k_{R\max} = 6.0625.$$

2. Se calculează valoarea  $k_{R0}$ :  $k_{R0} = 6.0625/4 = 1.5156$ .

Pentru  $\alpha = 0.2$ , f.d.t.  $H_{GS}(s)$  și  $\Delta'(s)$  devine:

$$H_{GS}'(s) = \frac{1}{0.2+7s} = \frac{5}{1+35s} \quad \text{și} \quad \Delta'(s) = 1 + H_0'(s) = 1 + \frac{5k_{R0}(1+8s)(1-4s)}{(1+20s)(1+2s)(1+35s)}.$$

Operând se obțin succesiv:

- polinomul caracteristic:

$$\Delta'(s) = 1400s^3 + 10(81 - 16k_{R0})s^2 + s(57 + 20k_{R0}) + 1 + 5k_{R0};$$

- condițiile preliminare de stabilitate:

$$81 - 16k_{R0} > 0, \quad 57 + 20k_{R0} > 0, \quad 1 + 5k_{R0} > 0, \quad \Rightarrow \quad k_{R0} \in (0, 5.0625);$$

- determinantul Hurwitz:

$$\det(\mathbf{H}') = \begin{vmatrix} 10(81-16k_{R0}) & 1+5k_{R0} & 0 \\ 1400 & 57+20k_{R0} & 0 \\ 0 & 10(81-16k_{R0}) & 1+5k_{R0} \end{vmatrix};$$

## Curs 5

### Stabilitatea sistemelor

- condițiile de stabilitate:

$$\det(\mathbf{H}_1') = 10(81 - 16k_{R0}) > 0 \quad \Rightarrow \quad k_{R0} < 81/16 = 5.0625 ;$$

$$\det(\mathbf{H}_2') = 10(81 - 16k_{R0})(57 + 20k_{R0}) - 1400(1 + 5k_{R0}) > 0$$

$$\Rightarrow \quad k_{R0} \in (-6.5394, 2.1394) ;$$

$$\det(\mathbf{H}_3') = (1 + 5k_{R0})\det(\mathbf{H}_2') > 0 \quad \Rightarrow \quad k_{R0} \in (-0.2, \infty) \cap (-6.5394, 2.1394) .$$

Deci, domeniul valorilor lui  $k_{R0}$  pentru care SRA este stabil (obținut prin intersecția condițiilor mai sus prezentate cu cea din enunț) este:

$$D_{kR0} = (0, 2.1394) .$$

Valoarea  $k_{R0} = 1.5156$  aparține domeniului de stabilitate, adică SRA este stabil pentru  $k_{R0} = k_{Rmax}/4$ ; valoarea inferioară a lui  $k_R$  pentru care SRA este stabil este 0.

#### 7.4. Stabilitatea sistemelor liniare invariante în timp discret (SL-D).

##### Teorema fundamentală a stabilității SL-D

**A. Teorema fundamentală a stabilității SL-D.** Se consideră un SL-D monovariabil caracterizat prin:

$$\text{MM-ISI:} \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{b} u_k, \quad y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k, \quad (7.4.1-a)$$

$$\text{MM-II:} \quad \sum_{v=0}^n a_v y(k+v) = \sum_{\mu=0}^m b_\mu u(k+\mu), \quad (m < n) . \quad (7.4.1-b)$$

Ca și în cazul SL-C, în general cele două modele reflectă o aceeași realitate, evidențiată de exemplu prin aceeași f.d.t.  $H(z)$ :

$$H(z) = \begin{cases} \mathbf{c}^T (\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \frac{\text{adj}(\mathbf{zI} - \mathbf{A})}{\det(\mathbf{zI} - \mathbf{A})} \mathbf{b}, \end{cases} \quad (7.4.2-a)$$

$$H(z) = \begin{cases} \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} . \end{cases} \quad (7.4.2-b)$$

Ecuția caracteristică aferentă sistemului,  $\Delta(z) = 0$ , poate avea una din formele:

$$\Delta(z) = \begin{cases} \det(\mathbf{zI} - \mathbf{A}) = 0, \end{cases} \quad (7.4.3-a)$$

$$\Delta(z) = \begin{cases} \sum_{v=0}^n a_v z^v = 0 . \end{cases} \quad (7.4.3-b)$$

Se cunoaște că soluția omogenă a ecuației recurente este determinată de rădăcinile ecuației caracteristice (7.4.4):

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 . \quad (7.4.4)$$

## Curs 5

### Stabilitatea sistemelor

Dependent de natura rădăcinilor, răspunsul SL-D va fi:

- stabil, dacă  $|z_v| < 1$ , cu  $z_v, v = 1 \dots n$  – rădăcina ecuației caracteristice;
- instabil, dacă cel puțin o rădăcină a ecuației caracteristice este  $|z_v| > 1$ ;
- pentru valorile  $|z_v| = 1$ , în sistem se instalează regimuri particulare care denotă instabilitate; astfel, pentru:
  - $z_v = +1$ , ieșirea este liniar crescătoare,
  - $z_v = -1$ , ieșirea este oscilantă ș.a.m.d. [I4], [L1].

În acest context se poate sintetiza **teorema fundamentală a stabilității SL-D**, conform căreia:

Un SL-D caracterizat prin MM-ISI / MM-II de forma (7.4.1) – și, corespunzător, SF descris de acest SD – este stabil **dacă și numai dacă** cele  $n$  rădăcini ale ecuației caracteristice (7.4.4) au **modulul subunitar**, adică:

$$|z_v| < 1, \quad v = 1 \dots n. \quad (7.4.5)$$

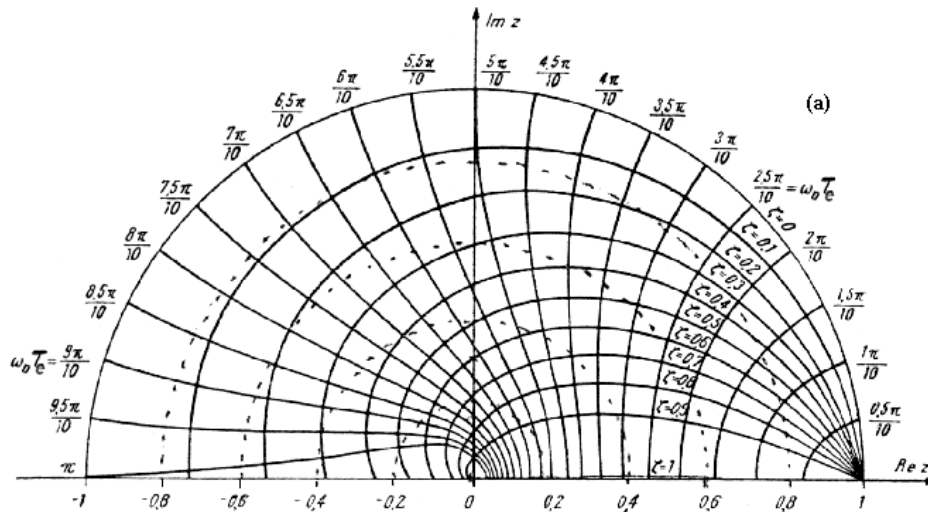
Interpretarea grafică a teoremei fundamentale este redată în fig.7.6 prin reprezentarea polilor în planul rădăcinilor “ $z$ ”. Și în acest caz, din considerente practice se va prefera amplasarea polilor în așa-numite **zone favorabile**, care asigură:

- regimuri tranzitorii favorabile,
- menținerea stabilității chiar în condițiile migrării polilor.

**B. Relații de legătură între planul “ $s$ ” și planul “ $z$ ”.** În analiza și proiectarea SRA în timp continuu, cunoașterea amplasării polilor în planul rădăcinilor “ $s$ ” constituie un mijloc eficient de informare asupra dinamicii sistemului. Pentru a obține o experiență similară și în cazul SRA în timp discret, se poate studia corelația dintre amplasarea rădăcinilor în planul “ $s$ ” (corespunzător timpului continuu) și amplasarea rădăcinilor în planul “ $z$ ” (corespunzător timpului discret).



**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**



**Fig. 7.6.** Interpretarea grafică a teoremei fundamentale a stabilității SL-D.

Relația de definiție:

$$z = e^{sT_e} \quad \text{respectiv} \quad z^{-1} = e^{-sT_e}, \quad (7.4.6)$$

permite stabilirea legăturilor între repartiția polilor din planul “s” și cea a polilor din planul “z”. Înlocuind  $s = \sigma + j\omega$ , se obține:

$$z = e^{\sigma T_e + j\omega T_e} = e^{\sigma T_e} \cdot e^{j\omega T_e} = |z| \cdot e^{j\angle z}, \quad \text{în care:} \quad (7.4.7)$$

$$|z| = e^{\sigma T_e} \quad (a) \quad \text{și} \quad \angle z = \omega T_e \quad (b). \quad (7.4.8)$$

Din relația (7.4.8-a), condiția de stabilitate din cazul continuu,  $\sigma < 0$ , se transformă în condiția:

$$|z| = e^{\sigma T_e} < 1 \quad \text{numai dacă} \quad \sigma < 0; \quad (7.4.9)$$

altfel spus, cele două condiții de stabilitate surprinse prin teoremele fundamentale enunțate au același conținut.

Din relația (7.4.8-b) se constată că **legătura dintre planul “s” și planul “z” nu este univocă**; fiecărui punct din planul “z” îi vor corespunde o infinitate de puncte din planul “s”. Acest lucru se explică prin faptul că unui punct de afix  $z_1$  din planul

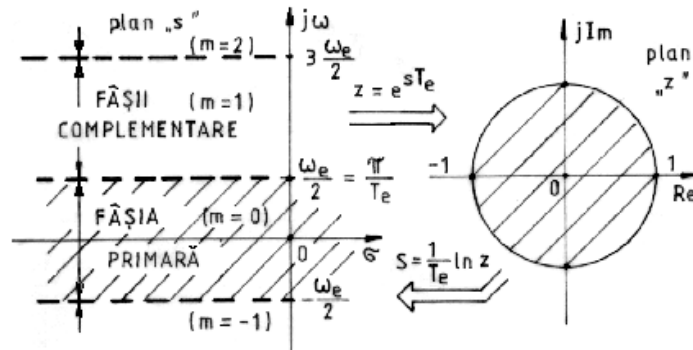
## Curs 5 Stabilitatea sistemelor

“z” îi corespunde o multitudine de puncte caracterizate de un același modul,  $|z_1|$ , dar argument  $\angle z_1$  diferit:

$$z_1 = e^{s_1 T_e} = e^{\sigma_1 T_e} \cdot e^{j(\omega T_e + 2m\pi)} \quad \text{sau:} \quad (7.4.10)$$

$$z_1 = [e^{\sigma_1 T_e} \cdot e^{j\omega T_e}] \cdot e^{j2m\pi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

factorul din paranteză [ ... ] corespunde pulsației fundamentale. Situația poate fi surprinsă prin fig.7.7 [P1].



**Fig.7.7.** Corespondența dintre punctele planelor “s” și “z”.

**Observații:** 1. Prin relațiile (7.4.7) ... (7.4.10), proprietățile specifice pentru fâșia primară din planul “s” sunt transformate în planul “z” și invers. Lățimea fâșiei primare,  $2 \cdot (\omega_e/2)$ , depinde de perioada de eșantionare  $T_e$ :

- dacă  $T_e$  scade,  $\omega_e$  crește și lățimea fâșiei crește, permițând includerea în fâșia primară a unui număr mai mare de poli continui (complex conjugați);
- dacă  $T_e$  crește,  $\omega_e$  scade și lățimea fâșiei scade, excluzându-se poli “esențiali” din fâșia primară, ceea ce va “falsifica” interpretarea informațiilor susținute de acești poli.

2. Relațiile prezentate sunt corecte numai în cazul SL-D fiind obținute prin eșantionarea funcției pondere aferente unui SL-C utilizând metoda transformării Z. Pentru un SL-D la care MM au fost obținute prin alte metode de discretizare, relațiile constituie doar aproximații mai mult sau mai puțin corecte.

Poate prezenta interes cunoașterea modului în care se transformă *locuri geometrice* din planul “s” în *locuri geometrice* corespondente din planul “z”. În fig.7.8 sunt prezentate astfel de transformări; pentru explicitarea lor se consideră sistemul continuu de ordinul 2 cu f.d.t. (PT2, a se vedea tabelul 6.2):

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 s + s^2}, \quad (7.4.11)$$

cu  $\omega_0 = 1/T$ ,  $\xi$  – coeficient de amortizare, cu polii:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0(1-\xi^2)^{1/2}, \quad (7.4.12)$$

sau:

$$p_{1,2} = -\omega_0 \cos\psi \pm j\omega_0 \sin\psi, \text{ în care:} \quad (7.4.13)$$

$$\tan\psi = (1-\xi^2)^{1/2} / \xi. \quad (7.4.14)$$

Cu condiția amplasării polilor  $p_1, p_2$  în semiplanul complex stâng, ( $\xi > 0$ ), dependent de valoarea lui  $\xi$ , comportarea sistemului va fi:

$0 < \xi < 1$ :  $p_{1,2}$  – complex conjugați → comportare oscilantă;

$\xi > 1$ :  $p_{1,2}$  – reali și distincți → comportare aperiodică;

$\xi = 1$ :  $p_{1,2}$  – reali și egali → comportare aperiodic limită.

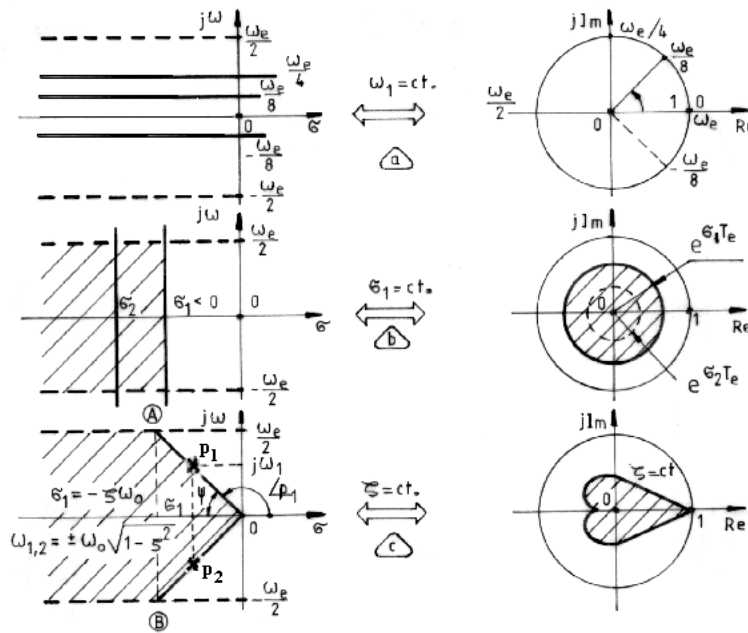
Correspondentul discret aferent acestei perechi de poli rezultă, din relația (7.4.10):

$$z_{1,2} = e^{p_{1,2}T_e} = e^{-\xi\omega_0 T_e} \cdot e^{\pm j\omega_0 T_e(1-\xi^2)^{1/2}}, \text{ în care:} \quad (7.4.15)$$

$$|z_{1,2}| = e^{-\xi\omega_0 T_e} = e^{-\omega_0 T_e \cos\psi}, \quad (7.4.16)$$

$$\angle z_{1,2} = \pm \omega_0 T_e(1-\xi^2)^{1/2} = \pm \omega_0 T_e \sin\psi.$$

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**



**Fig.7.8.** Transferul unor locuri geometrice din planul “s” în planul “z” (aluri de principiu).

În consecință, pot fi precizate **transformările** următoare [P1]:

- Locul geometric de pulsație constantă  $\omega_1 = ct.$  din planul “s” are drept corespondent în planul “z” o dreaptă care trece prin origine sub unghiul  $\theta$ :

$$\theta = \omega_1 T_e. \quad (7.4.17)$$

- Locul geometric de  $\sigma_1 = \text{Re}(s_1) = \text{const}$  din planul “s” are drept corespondent în planul “z” un cerc de rază constantă  $r$ , fig.7.8 (b), cu centrul în origine:

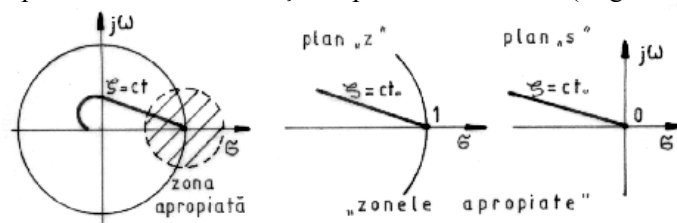
$$r = |z_1| = e^{\sigma_1 T_e} = \text{const}. \quad (7.4.18)$$

Pentru o aceeași  $T_e$ , reducerea lui  $|\sigma_1|$  echivalentă cu creșterea constantei de timp corespondente, raza cercului scade. Ca urmare, polii din planul “s” care caracterizează constante de timp mari și sunt “aproape” de axa  $j\omega$  a planului, vor trece în planul “z” aproape de punctul de afix  $\{0, j 1\}$ .

- Locul geometric al punctelor de amortizare constantă  $\xi = \text{const}$  din planul “s” se transferă în planul “z” sub forma unor spirale logaritmice, fig.7.8 (c).

## Curs 5 Stabilitatea sistemelor

În baza relațiilor (7.4.11) ... (7.4.18), pot fi construite corespondențele de amplasare a polilor f.d.t. în  $z$  în funcție de polii f.d.t. continue (originalul), fig.7.9.



**Fig.7.9.** Caracteristici de amplasare a polilor în planul “z”.

Fără a intra în alte detalii, se poate observa faptul că pentru a situa polii sistemului în timp discret în apropierea punctului  $(0, j 1)$ , este obligatorie corelarea pulsațiilor proprii ale sistemului (toate  $\omega_0$  esențiale) cu perioada de eșantionare  $T_e$ .

### 7.5. Criterii de apreciere a stabilității SL-D

Criteriile de apreciere a stabilității bazate pe MM-II sunt de două tipuri:

- criterii algebrice,
  - criterii frecvențiale (de pulsație), de regulă date prin formulări grafo-analitice.
- Și în acest caz, prezentările vor fi restrânse numai la o prezentare selectivă a criteriilor algebrice de apreciere a stabilității SL-D. Ținând seama de specificul amplasării rădăcinilor (polilor) SL-D în planul “z”, transpunerea directă a relațiilor de analiză a stabilității specifice cazului continuu pentru analiza stabilității SL-D nu este posibilă. Din acest motiv apar ca interesante două **categorii de c.a.s. SL-D**:
- Criterii bazate pe extinderea criteriilor algebrice specifice cazului continuu (de exemplu, c.a.s. Hurwitz) la cazul sistemelor în timp discret.
  - Criterii specifice sistemelor în timp discret.

**A. Extinderea criteriului Hurwitz la cazul SD-D.** Procedura are la bază utilizarea unei transformări conforme de forma:

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad \text{sau} \quad z = \frac{r+1}{r-1}; \quad (7.5.1)$$

aceasta transformă toate punctele din interiorul cercului de rază unitate al planului “z” (puncte ce caracterizează un sistem stabil) în puncte situate în semiplanul stâng al unui plan  $w$  sau  $r$ .

În consecință, plecând de la f.d.t.  $H(z)$  cunoscută, se poate calcula o f.d.t. “pseudocontinuă”  $H(r)$  sau  $H(w)$ , care va avea proprietatea că **polii aferenți**

## Curs 5 Stabilitatea sistemelor

respectă precizarea anterioară și - pe această bază - se poate aplica apoi c.a.s. Hurwitz (c.a.s. Hurwitz extins la cazul SL-D):

$$H(r) = H(z) \Big|_{\substack{z = \frac{r+1}{r-1}}} \quad (a) \quad \text{sau} \quad H(w) = H(z) \Big|_{\substack{z = \frac{1+w}{1-w}}} \quad (b) \quad . \quad (7.5.2)$$

Prin restrângerea prezentării la transformarea (a), se obține:

$$H(r) = H(z) \Big|_{\substack{z = \frac{r+1}{r-1}}} = \frac{B(r)}{A(r)} \quad , \quad \text{cu ecuația caracteristică:}$$

$$A(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0 \quad . \quad (7.5.3)$$

Cu coeficienții  $a_v$  astfel calculați, stabilitatea SL-D poate fi verificată utilizând c.a.s. Hurwitz.

**Etapele de aplicare** a metodei sunt:

- ◆ având  $H(z)$  cunoscută, se calculează  $H(r)$  sau  $H(w)$ ;
- ◆ se determină polinomul caracteristic  $A(r)$  sau  $A(w)$ ;
- ◆ în continuare se aplică “toate” etapele specifice c.a.s. Hurwitz.

Concluzia de **stabil** sau **instabil** astfel obținută este valabilă apoi și relativ la sistemul în timp discret “original”.

**Observație:** Relația de transformare (7.5.2) nu constituie o “readucere a polilor planului “z” în poli ai sistemului continuu discretizat” întrucât prin ea nu este evidențiată sub nici un fel perioada de eșantionare  $T_e$ . Efectul acesteia asupra stabilității sistemului rezultă în conversia inițială “continuu” (s) → “discret” (z).

**B. Criteriul Jury de apreciere a stabilității SL-D.** Este un criteriu specific sistemelor în timp discret. Acceptând că f.d.t. aferentă SL-D,  $H(z)$ , este cunoscută, atunci în baza expresiei ecuației caracteristice:

$$\Delta(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad \text{cu } a_n > 0 \quad , \quad (7.5.4)$$

se poate construi un **tablou al coeficienților Jury** conform tabelului 7.2.

Coeficienții tabloului sunt calculați utilizând relațiile:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad , \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad , \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix} \quad , \quad \dots ,$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix} \quad , \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix} \quad , \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} \quad . \quad (7.5.5)$$

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

*Tabelul 7.2. Tabloul coeficienților Jury.*

Linie	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$\dots z^{n-k} \dots$	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots a_{n-k} \dots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots a_k \dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\dots b_{n-k} \dots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	—
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$\dots b_k \dots$	$b_1$	$b_0$	—
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$\dots c_{n-k} \dots$	$c_{n-2}$	—	—
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$\dots c_k \dots$	$c_0$	—	—
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	—	—	—
$2n-5$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	—	—	—
$2n-4$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$	—	—	—
$2n-3$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	—	—	—	—

Având la bază tabloul coeficienților Jury, **criteriul de apreciere a stabilității după Jury** (c.a.s. Jury) **este enunțat** după cum urmează:

Sistemul liniar în timp discret având polinomul caracteristic (7.5.4) este **stabil** (are toate rădăcinile situate în interiorul cercului de rază unitate centrat în origine) dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele  $n+1$  **condiții**:

$$\Delta(1) > 0, \quad (1)$$

$$\Delta(-1) > 0, \text{ dacă } n - \text{par}, \quad (2)$$

$$< 0, \text{ dacă } n - \text{impar},$$

$$|a_0| < a_n \quad (a_n > 0), \quad (3)$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|, \quad (4)$$

$$|c_0| > |c_{n-2}|, \quad (5)$$

$$|d_0| > |d_{n-3}|, \quad (6)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|q_0| > |q_2| \cdot \dots \quad (n+1)$$

Ca.a.s. Jury prezintă același dezavantaj că nu dă informații asupra gradului de stabilitate a sistemului. Datorită numărului mare de inegalități care apar, analiza stabilității funcție de unul sau mai mulți parametri ai sistemului devine greoaie.

**Etapale de aplicare** a c.a.s. Jury sunt:

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

- ◆ se delimitează structura de SRA în timp discret și se determină f.d.t. a sistemului,  $H(z)$ , și polinomul caracteristic al sistemului,  $\Delta(z)$ ; se precizează ordinul sistemului,  $n$ ;
- ◆ se construiește tabloul coeficienților Jury și se calculează  $\Delta(1)$  și  $\Delta(-1)$ ;
- ◆ se verifică cele  $n+1$  condiții de stabilitate ale sistemului de ordinul  $n$ .

**Exemplul 7.3:** Să se analizeze stabilitatea sistemului discret cu f.d.t.:

$$H(z) = \frac{11z^2 - 3z + 0.5}{z^3 + 3z^2 + 4z + 0.5}.$$

*Soluție:* Polinomul caracteristic al sistemului este:

$$\Delta(z) = z^3 + 3z^2 + 4z + 0.5 \quad \text{cu } n = 3.$$

Se construiește tabloul coeficienților Jury prezentat în tabelul 7.3.

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_3^2 = -0.75, \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_0a_1 - a_2a_3 = -1,$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_0a_2 - a_1a_3 = -2.5.$$

**Tabelul 7.3.** Tabloul coeficienților Jury pentru exemplul 7.3.

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$
1	0.5 ( $a_0$ )	4 ( $a_1$ )	3 ( $a_2$ )	1 ( $a_3$ )
2	1 ( $a_3$ )	3 ( $a_2$ )	4 ( $a_1$ )	0.5 ( $a_0$ )
3	-0.75 ( $b_0$ )	-1 ( $b_1$ )	-2.5 ( $b_2$ )	—

Se face verificarea celor  $n+1 = 4$  condiții de stabilitate:

$$\Delta(1) = 8.5 > 0, \quad (1)$$

$$\Delta(-1) = -1.5 < 0 \quad (n = 3 - \text{impar}), \quad (2)$$

$$|a_0| = 0.5 < a_3 = 1, \quad (3)$$

$$|b_0| = 0.75 < |b_2| = 2.5. \quad (4)$$

Condiția (4) din enunțul criteriului nu este realizată. Deci sistemul este instabil.

La o aceeași concluzie se ajunge dacă se calculează polii sistemului (de exemplu, utilizând mediul MATLAB, [M1]):

$$z_1 = -0.139, \quad z_{2,3} = -1.43 \pm j1.25.$$



## Curs 5 Stabilitatea sistemelor

Acești poli cad în afara cercului de rază unitate centrat în origine, ceea ce denotă instabilitatea sistemului.

### 7.6. Aspecte ale analizei stabilității SRA-c cu regulatoare în timp discret

Situația specifică aplicațiilor practice de conducere este cea în care:

- regulatorul (RG) este în timp discret, caracterizat prin f.d.t.  $H_R(z)$ ;
- procesul condus (PC) este continuu, caracterizat prin f.d.t.  $H_{PC}(s)$ .

**Interfațarea** dintre cele două subsisteme este asigurată de:

- convertorul analog-numeric (CAN), cu echivalentul informațional {eșantionator + element de reținere (ES + ER)};
- convertorul numeric-analogic (CAN), cu echivalentul informațional {eșantionator (ES)}.

Prin construcția informațională, RG numeric va conține elementul de reținere.

**Algoritmul de reglare numerică** (a.r.n.) specific RG continuu va putea fi obținut:

- prin discretizarea l.d.r. continue (printr-o metodă adoptată, de exemplu, MD-A, MD-I, MT sau alta) utilizând o perioadă de eșantionare  $T_e$ ;
- prin proiectare directă, când adeseori  $T_e$  aleasă este substanțial mai mare.

În consecință, **analiza stabilității SRA în timp discret** va impune parcurgerea **pașilor** următori:

- ◆ se precizează a.r.n. prin f.d.t.  $H_R(z)$ ;
- ◆ se precizează PC prin f.d.t.  $H_{PC}(s)$ ;
- ◆ se calculează f.d.t. în z aferentă PC extins cu modulele (ES + ER) și (ES):

$$H_{PC}(z) = \frac{z-1}{z} Z\{L^{-1}\{\frac{1}{s} H_{PC}(s)\} |_{t=kT_e}\} ; \quad (7.6.1)$$

- ◆ se calculează f.d.t. în z aferentă SRA,  $H_w(z)$  și ecuația caracteristică:

$$H_w(z) = \frac{H_R(z)H_{PC}(z)}{1 + H_R(z)H_{PC}(z)} \text{ cu } H_R(z)H_{PC}(z) = H_0(z) , \quad (7.6.2)$$

$$\Delta(z) = 1 + H_0(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 ; \quad (7.6.3)$$

- ◆ se aplică etapele specifice criteriului de apreciere a stabilității apelat.

Creșterea perioadei de eșantionare  $T_e$  determină de regulă înrăutățirea condițiilor de stabilitate.

**Exemplul 7.4:** Se consideră SRA cu RG discret și PC continuu, având:

$$H_R(z) = k_r \frac{z^{T_e}}{z-1} \quad (\text{a.r.n. de tip I discretizat}) , \quad (7.6.4)$$

**Curs 5**  
**Stabilitatea sistemelor**

$$H_{PC}(s) = \frac{2}{(1+s)^2} \quad (\text{PT2}) . \quad (7.6.5)$$

Să se analizeze stabilitatea sistemului pentru  $T_e = 0.2$  sec și  $k_r$  – parametru; să se determine domeniul valorilor lui  $k_r$  pentru care SRA este stabil.

*Soluție:* Se calculează  $H_{PC}(z)$  cu relația cunoscută și se obține:

$$H_{PC}(z) = \frac{0.69z - 0.624}{z^2 + 1.637z + 0.67} . \quad (7.6.6)$$

Se calculează  $H_w(z)$  și se delimitează polinomul caracteristic:

$$H_w(z) = \frac{k_r(0.138z^2 - 0.125z)}{z^3 + (0.138k_r - 2.637)z^2 + (2.38 - 0.125k_r)z - 0.67} , \quad (7.6.7)$$

$$\Delta(z) = z^3 + (0.138k_r - 2.637)z^2 + (2.38 - 0.125k_r)z - 0.67 , \quad (7.6.8)$$

cu  $n = 3$ .

Pentru analiza stabilității se aplică criteriul Hurwitz extins, cu:

$$z = \frac{1+w}{1-w} . \quad (7.6.9)$$

Corespunzător, se obține expresia polinomului caracteristic transformat,  $\Delta(w)$ :

$$\Delta(w) = b_3w^3 + b_2w^2 + b_1w + b_0 , \quad \text{în care:} \quad (7.6.10)$$

$$\begin{aligned} b_3 &= 6.616 - 0.269k_r , \quad b_2 = 1.319 - 0.0131k_r , \\ b_1 &= 0.2629k_r + 0.0657 , \quad b_0 = 0.0131k_r . \end{aligned} \quad (7.6.11)$$

Se construiește determinantul Hurwitz cu coeficienții calculați mai sus:

$$\det(\mathbf{H}_3) = \begin{vmatrix} b_2 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & b_0 \end{vmatrix} . \quad (7.6.12)$$

Analiza stabilității conduce la condiția:

$$0 < k_r < 25.17 . \quad (7.6.13)$$

## **BIBLIOGRAFIE**

- [A1] Åström, K.J. și B. Wittenmark: Computer Controlled Systems – Theory and Design, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [A2] Åström, K.J. și T. Hägglund: „Benchmark Systems for PID Control”, Preprints of IFAC Workshop on Digital Control: Past, Present and Future of PID Control”, editori: J. Quevedo și T. Escobet, Terassa, Spain, pp. 181-182, 2000.
- [A3] Åström, K.J. și T. Hägglund: PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, 2<sup>nd</sup> edition, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.
- [A4] Arnautovic, D.B. și D.M. Skataric: „Suboptimal Design of Hydroturbine Governors”, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 6, no. 3, pp. 438 – 444, 1991.
- [A5] Anderson, B.D.O. și J.B. Moore: Optimal Control. Linear Quadratic Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [B1] Barbu, V.: Ecuatii diferențiale, Editura Junimea, Iași, 1985.
- [C1] Coleman, T., M.A. Branch și A. Grace: MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, Mathworks Inc., Natick, MA, 1999.
- [C2] Călin, S., M. Tertișco, I. Dumitrache, C. Popeea și D. Popescu: Optimizări în automatizări industriale, Editura Tehnică, București, 1979.
- [D1] Dumitrache, I., S. Dumitriu, I. Mihu, F. Munteanu, Gh. Muscă și G. Calcev: Automatizări electronice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
- [D2] Dragomir, T.-L. și St. Preitl: Elemente de teoria sistemelor și reglaj automat, curs, vol. 1 și 2, Lito I.P.T.V. Timișoara, 1979.
- [D3] DIN 40719, Deutsche Industrie Normen, 1978.
- [D4] Dragomir, T.-L.: Tehnici de optimizare, Curs, vol. 1, Litografia I.P.T.V.T., Timișoara, 1987.
- [D5] Dorato, P., C.-L. Shen și W. Yang: Robust Control Systems Design, China Aviation Industry Press, Beijing, 1996.
- [E1] Eykhoff, P.: Identificarea sistemelor, Editura Tehnică, București, 1977.
- [F1] Franklin, G.F., J.D Powell și M.L. Workman: Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1998.
- [H1] Hoppe, M. și S. Tešnjak: „Modellbildung und Simulation des dynamischen Verhaltens von Wasserkraftanlagen”, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Mess- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 20, Bochum, 1983.

**Curs 5**  
**Bibliografie**

- [I1] Ionescu, Vl.: Teoria sistemelor. Sisteme liniare, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- [I2] Isermann, R.: Digitale Regelungssysteme, vol. I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [I3] IEEE Working Group on Prime Mover and Energy Models for System Dynamic Performance Studies: „Hydraulic Turbine and Turbine Control Models for System Dynamic Studies”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 7, no. 1, pp. 167 – 178, 1992.
- [I4] Ionescu, Vl. și C. Popeea: Optimizarea sistemelor, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [K1] Kessler, C.: „Über die Vorausberechnung optimal abgestimmter Regelkreise. Teil III. Die optimale Einstellung des Reglers nach dem Betragsoptimum”, Regelungstechnik, vol. 3, pp. 40 – 49, 1955.
- [L1] Landau, I.D.: Identificarea și comanda sistemelor, Editura Tehnică, București, 1997.
- [M1] Matlab. User's Guide, Mathworks Inc., Natick, MA, 1988.
- [M2] Marlin, T.E.: Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance, McGraw-Hill, 1995.
- [M3] Middleton, R.H. și G.C. Goodwin: Digital Control and Estimation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [M4] Müller, H.-W.: „Algorithmen für die digitale Drehzahlregelung von Wasserturbinen”, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Mess- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 23, Bochum, 1984.
- [N1] Nourescu, Al. și Al. Vasiliu: „Valorificarea energetică a resurselor hidraulice din România”, Energetica, vol. 22, no. 6-7, pp. 224 – 240, 1974.
- [P1] Preitl, St. și R.-E. Precup: Introducere în ingineria reglării automate, Editura Politehnica, Timișoara, 2001.
- [P2] Preitl, St.: Teoria sistemelor și reglaj automat, curs, vol. 1, partea 1 Teoria sistemelor, Lito U.T. Timișoara, 1992.
- [P3] Penescu, C., G. Ionescu, M. Terțișco și E. Ceangă: Identificarea experimentală a proceselor automatizate, Editura Tehnică, București, 1971.
- [P4] Preitl, St., A. Fogarași și R.-E. Precup: Teoria sistemelor și reglaj automat. Ingineria reglării automate, culegere de probleme, vol. 1, partea 1, Lito U.T. Timișoara, 1994.
- [P5] Preitl, St., A. Fogarași și R.-E. Precup: Teoria sistemelor și reglaj automat. Ingineria reglării automate, probleme rezolvate și comentate, vol. 2, Lito U.T. Timișoara, 1994.
- [P6] Preitl, St., R.-E. Precup și A. Porumb: Elemente de reglare automată, curs, vol. 1, Lito U.P. Timișoara, 1996.

**Curs 5**  
**Bibliografie**

- [P7] Precup, R.-E., St. Preitl, St. Kilyeni, St. și B. Luștea: „Fuzzy Speed and Voltage Control of a Hydrogenerator”, Preprints of Fifth Symposium on Application of Multivariable System Techniques – AMST’94, editor: R. Whalley, Mechanical Engineering Publications Limited, London, pp. 151-158, 1994.
- [P8] Preitl, St., R.-E. Precup și A. Porumb: „Behaviour of ARW Structures in the Case of Control Systems with Essential Delays”, Fourth International Symposium on Automatic Control and Computer Science – SACCS’93, Iași, vol. 1, pp. 222-227, 1993.
- [P9] Precup, R.-E. și St. Preitl: Sisteme de reglare avansată, Curs, vol. 1, Litografia U.T.T., Timișoara, 1995.
- [P10] Precup, R.-E.: Soluții de conducere fuzzy a sistemelor cu fază neminimă. Aplicații la conducerea hidrogenatoarelor, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2000.
- [P11] Pivovarov, V.A.: Proiectirovanie i rasciet sistem regulirovania ghidroturbin, Mașinostroenie, Leningrad, 1973.
- [R1] Răsvan, Vl.: Teoria stabilității, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1987.
- [S1] Stănășilă, O.: Analiză matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [S2] Simulink. Dynamic System Simulator for Use with Matlab, Mathworks Inc., Natick, MA, 1988.
- [S3] Sângeorzan, D.: Regulate adaptiv, Editura Militară, București, 1992.
- [S4] Sima, V. și A. Varga: Practica optimizării asistate de calculator, Editura Tehnică, București, 1986.
- [T1] Terțișco, M. și P. Stoica: Identificarea și estimarea parametrilor sistemelor, Editura Academiei, București, 1987.
- [T2] Terțișco, M., P. Stoica și Th. Popescu: Identificarea asistată de calculator a sistemelor, Editura Tehnică, București, 1987.
- [V1] Voicu, M.: Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate, Editura Tehnică, București, 1986.
- [V2] Varga, A. și V. Sima: Ingineria asistată de calculator a sistemelor automate, Editura Tehnică, București, 1997.