2. MODELAREA MATEMATICĂ A PROCESELOR

2.1. Aspecte introductive

Descrierea cantitativă şi calitativă a sistemelor (proceselor) are la bază ***modele matematice*** (**MM**) asociate acestora. Complexitatea unui MM depinde adeseori de scopul pentru care acesta este determinat. În acest context, MM aferent unui SF trebuie să satisfacă ***cerinţele*** următoare*:*

- să fie suficient de general (generalitate);
- să conţină un număr limitat de parametri şi aceşti parametri să poată fi determinaţi pe cale analitică sau experimentală.

Pentru ca MM aferent unui SF (PC) să fie ***utilizabil*** în dezvoltarea unui sistem de conducere automată (SCA), el trebuie să satisfacă două ***cerinţe***:

- să redea proprietăţile esenţiale pentru conducerea PC;
- să fie cât mai simplu.

MM utilizate în caracterizarea unui SF pot fi ***încadrate în*** *diferite categorii / clase*; în acest context:

(a) *Dependent de modul de reprezentare,* se disting
- *MM parametrice* (ecuaţii diferenţiale, forme operaţionale)
- *MM neparametrice* (caracteristici grafice).

(b) *Dependent de modul de tratare a timpului,* se disting
- *MM cu timp continuu* (MM-C),
- *MM cu timp discret* (MM-D);

(c) *Dependent de invarianţa structurii şi valorilor parametrilor,* se disting
- *MM cu structură sau / şi parametri constanţi în timp*
- *MM cu structură sau / şi parametri variabili în timp* ş.a.

(d) *Dependent de numărul intrărilor şi ieşirilor ce caracterizează SF*, MM aferente sunt categorisite în:
- ***MM monovariabile*** *care caracterizeză sisteme cu o intrare şi o ieşire* (SISO) sau numai *unul din canalele de transfer ale unui sistem multivaiabil,* $u_i \rightarrow y_j$;
- ***MM multivariabile*** (MIMO) care caracterizează global sistemul, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{y}$.

Caracterizareă completă prin MM trebuie să ia in considerare simultan toate punctele de vedere de categorisire.

MM asociat unui SF ***poate fi determinat*** [P2], [E1], [T1], [T2]:

(1) pe cale analitică (construcţia analitica a modelului),
(2) pe cale experimentală (experimental-analitică, data-driven identification).

Determinarea MM aferent unui SF (PC) poartă şi denumirea de ***identificare, analitică*** (**IA**) sau ***experimentală*** (**IE**).

În tehnica reglării automate sunt importante ***MM parametrice***, caracterizate prin:

- structură matematică care descrie relaţia intrare-ieşire:
  - explicit sub forma MM intrare-ieşire (MM-II),
  - implicit sub forma MM intrare-stare-ieşire (MM-ISI);
- prin parametri (coeficienţi) care caracterizează structura.

Determinarea pe cale experimentală a valorilor parametrilor care descriu structura cunoscută a MM poartă denumirea de ***estimarea parametrilor***.

2.2. Determinarea modelelor matematice aferente proceselor conduse (PC). Identificarea PC

MM aferent unui PC poate fi determinat pe calea analizei teoretice (IA) sau pe calea experimental-analitică (IE). În fig.2.1 [P1] sunt sintetizate etapele unei astfel de determinări. Întotdeauna MM este construit pentru un anumit scop, care va putea determina şi gradul de detaliere a MM.

Determinarea pe cale analitică a MM aferent unui PC presupune parcurgerea ***etapelor*** următoare:

I. Definirea PC din puctul de vedere al conducerii (intrări, ieşiri, stări) şi al relatiilor sale cu mediul înconjurător; stabilirea ipotezelor simplificatoare care pot fi adoptate la scrierea MM.

II. Scrierea ecuaţiilor de bilanţ de materie (mase, energii) aferente PC, caracterizarea interconexiunilor din proces, întocmirea schemei bloc informaţionale aferente; ca rezultat se obţine ***MM primar*** aferent PC sub forma unor ecuaţii diferenţiale; utilizarea nemijlocită a acestora se dovedeşte adeseori greoaie.

III. Precizarea ipotezelor simplificatoare în care MM primar poate fi adus la forme mai simple, prin:

- liniarizarea ecuaţiilor neliniare (liniarizabile) sau omiterea unor neliniarităţi neesenţiale; concentrarea parametrilor;
- reducerea ordinului MM liniarizat prin renunţarea la evidenţierea efectelor unor constante de timp foarte mici.

IV. Reordonarea ecuaţiilor în vederea stabilirii formei finale a MM; adeseori se dovedeşte utilă întocmirea schemei bloc informaţionale aferente. MM astfel obţinut poate servi ca bază pentru: (a) determinarea valorilor parametrilor SF pe cale analitică sau experimental-analitică; (b) fundamentarea uneor proceduri de IE a PC.

Procedeul de validare va depinde de informaţiile disponibile relative la PC real.

V. Verificarea corectitudinii MM şi validarea acestuia. Aceasta operaţie trebuie derulată în acord cu scopul pentru care a fost creat MM.

Capitolul 2
Modelarea matematică a proceselor

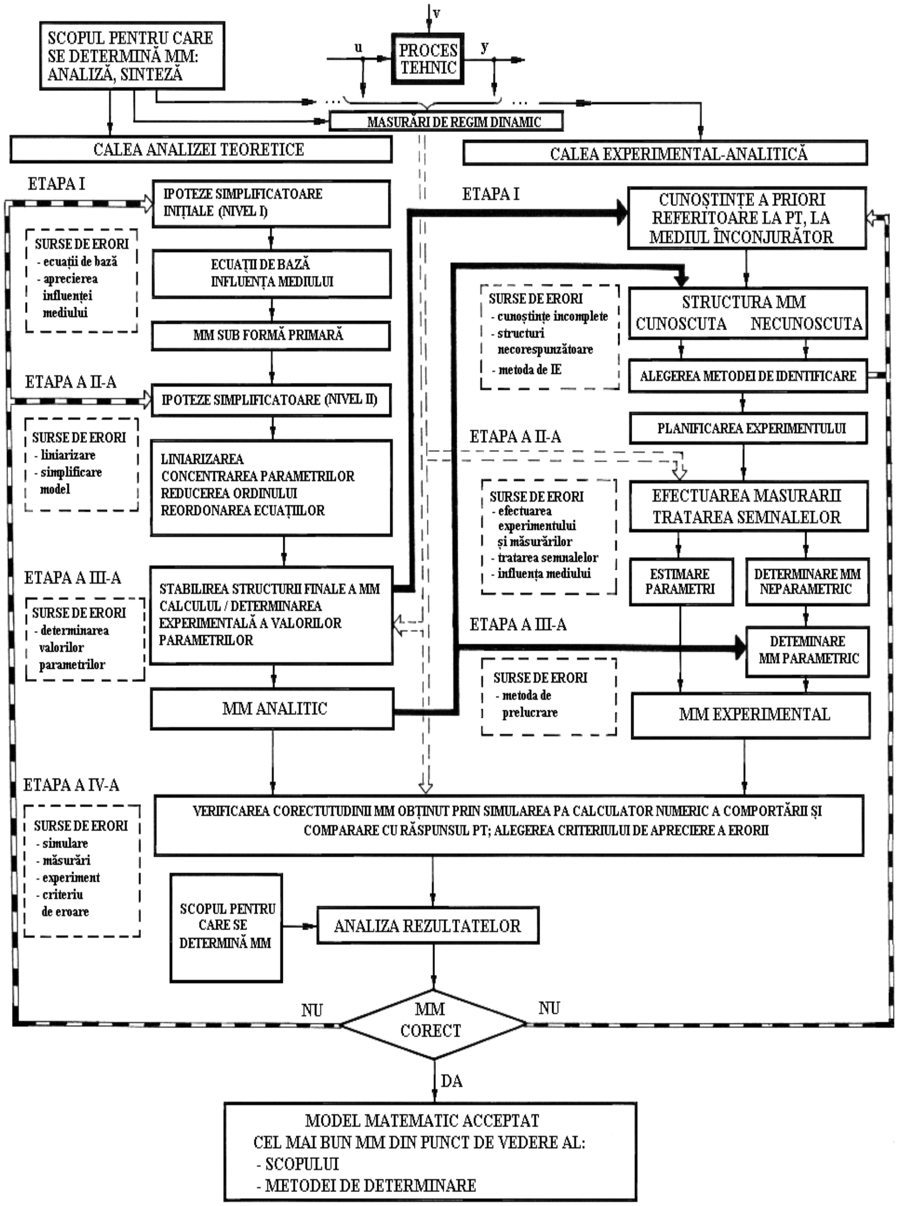

Fig.2.1. *Identificarea analitică a unui PC*

2.2.2. Identificarea experimentală a proceselor

Identificarea experimentală (IE) a PC reprezintă o etapă de cunoaştere a posteriori a MM. MM aferent PC va fi fi determinat prin IE pe bazele următoare:

- informaţiile primare furnizate de o IA efectuată a-priori,
- rezultate strict experimentale; în acest caz cunoştinţele primare despre PC sunt minimale (black box, grey box).

Metoda de identificare va fi adoptată dependent de cunoştinţele primare despre proces, de aparatura disponibilă şi de experienţa de identificare. Reuşita IE va depinde de buna planificare a experimentelor, de prelucrarea ulterioară a informaţiei disponibile şi de interpretarea rezultatelor.

Principalele ***etapele ale unei IE*** sunt:

I. ***Alegerea metodei de IE***, a metodelor de prelucrare analitică şi a echipamentelor de IE. Organizarea experimentelor de IE.

II. ***Generarea semnalului de probă:*** GST – generator de semnal de test u_T; efectuarea măsurărilor de regim dinamic; înregistrarea simultană a mărimilor u şi y, eventual şi a altor mărimi, tratarea înregistrărilor (filtrarea de zgomote suprapuse, extragerea componentelor continue, extragerea trendurilor ş.a.).

III. Prelucrarea rezultatelor primare bazat pe cunoştinţele primare relative la structura MM valori orientative ale parametrilor, se prelucrează înregistrările pentru determinarea: (i) parametrilor MM la o structură acceptată a MM; (ii) MM neparametric, urmată de (iii) prelucrarea MM neparametric la forma MM parametric.

IV. Verificarea corectitudinii şi validarea MM obţinut în concordanţă cu scopul pentru care a fost determinat MM.

Sunt utile ***câteva precizări*** (finale) referitoare la practica IE a PC:

(1) IE a unui PC poate fi efectuată cu funcţionarea PC:

- *în circuit deschis*, în afara buclei de reglare, fig.2.2 (a);
- *conectat în bucla de reglare*, fig.2.2 (b); în acest caz însă, determinarea MM aferent PC este supusă unor restricţii.

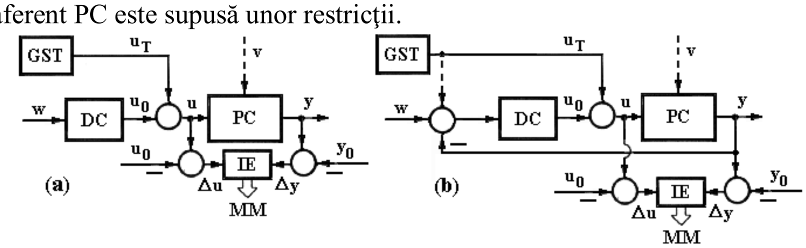

Fig.2.2. *Schema bloc aferentă IE în circuit deschis (a) şi IE în circuit închis (b).*

(2) MM primare obţinute prin IE sunt adesori *MM neparametrice* şi au ***particularităţile*** următoare:

- valabiliatea lor este este limitată, legată de punctul de funcţionare în care a fost efectuată IE;
- MM neparametrice sunt modele care caracterizează global PC în relaţia u → y, fără evidenţierea structurii interne a PC; ca efect, MM parametrice asociate vor avea parametri care pot să nu caracterizeze parametrii interni ai PC;
- MM parametrice care se construiesc sunt relativ simple; ele au adeseori structura construită orientat spre a fi uşor utilizabile în scopul propus.

(3) Identificarea experimentală presupune adeseori prelucrarea primară a semnalului preluat din proces; acest lucru presupune alegerea adecvata a periadei de eşantionare, prefiltrarea semnalului (inclusiv extragerea unor componente continue legate de coordonatele punctului de funcţionare ş.a.).

(4) MM obţinut prin identificare poate fi în timp continuu sau în timp discret, dependent de tehnologia de identificare şi în acord cu scopul pentru care a fost determinat MM. Conversia MM continue în MM în timp discret şi invers are la bază tehnici şi relaţii bine precizate, valabile în aumite condiţii specifice.

(5) MM determinat este validat în acord cu scopul propus prin ***verificarea concordanţei*** dintre ***evoluţia MM*** şi evoluţia ***reală a PC***. În acest scop pot fi utilizate tehnicile următoare: (a) simularea pe calculator (analogic sau numeric) a comportamentului MM; (b) realizarea unor modele la scară redusă ale PC pe baza MM determinat şi studiul comportamentului acestora ş.a.

(6) ***Detalierile*** de identificare şi de modelare trebuie aduse întodeauna ***în acord cu scopul*** pentru care este construit MM. Acesta poate fi: (i) pur informativ, pentru o mai bună cunoaştere a PC şi (eventual) îmbunătăţirea calităţii conducerii; (ii) proiectarea structurilor şi algoritmilor de conducere a PC; rezultatul proiectării şi, în consecinţă, performanţele SCA, vor depinde de corectitudinea MM al PC.

2.3. Modele matematice cu timp continuu. MM liniare şi MM neliniare. Liniarizarea MM neliniare

În cele mai frecvente situaţii din practică, dependenţele dintre mărimile caracteristice ale SF sunt neliniare. În anumite condiţii, aceste dependenţe pot fi caracterizate (local) prin dependenţe de aproximare liniară. Operaţia de înlocuire a unui MM neliniar cu un MM liniarizat, de aproximare, poartă denumirea de ***liniarizare***.

Un MM liniar presupune respectarea cerinţelor impuse de ***teorema generală a superpoziţiei*** *(aditivitate şi omogenitate).*

2.3.1. Condiţii de liniaritate a sistemelor neliniare continue. Sisteme liniare şi liniarizate

MM aferent unui SF se numeşte ***sistem liniar*** (**SL**) atunci când, MM afferent, exprimat în forma generală (cazul SISO):

$y(t)=f\{u(t); \mathbf{\Psi}_0\}$, cu $\mathbf{\Psi}_0$ – vectorul condiţiilor (stărilor) iniţiale, (2.3.1)

satisface condiţia *(aditivitate şi omogenitate)*:

$$f\{\alpha_1 u_{(1)}(t)+\alpha_2 u_{(2)}(t); \alpha_1\mathbf{\Psi}_{0(1)}+\alpha_2\mathbf{\Psi}_{0(2)}\}=\alpha_1 f\{u_{(1)}(t); \mathbf{\Psi}_{0(1)}\} + \alpha_2 f\{u_{(2)}(t); \mathbf{\Psi}_{0(2)}\} , \quad (2.3.2)$$

în care: α_1, α_2 sunt constante arbitrare; $u_{(1)}(t)$, $u_{(2)}(t)$ sunt două funcţii (semnale) de intrare posibile; $\mathbf{\Psi}_{0(1)}$, $\mathbf{\Psi}_{0(2)}$ sunt două condiţii (stări) iniţiale posibile.

Relaţia (2.3.2) evidenţiază două aspecte esenţiale:

- Un regim oarecare al SL este obţinut prin suprapunerea comportărilor sale particulare:
  - de ***regim liber*** – caracterizată prin $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ pentru $t \geq 0$ şi $\mathbf{\Psi}_0 \neq \mathbf{0}$ dat , şi
  - de ***regim forţat*** – caracterizată prin $\mathbf{u}(t)$ dat pentru $t \geq 0$ şi $\mathbf{\Psi}_0 = \mathbf{0}$ – adică:

$$\mathbf{f}\{\mathbf{u}(t); \mathbf{\Psi}_0\} = \mathbf{f}\{\mathbf{0}; \mathbf{\Psi}_0\} + \mathbf{f}\{\mathbf{u}(t); \mathbf{0}\}. \quad (2.3.3)$$

- Fiecare din aceste regimuri poate fi studiat prin superpoziţia unor regimuri particulare cu intrările sau stările iniţiale convenabil alese.

Proprietatea de liniaritate se referă şi poate fi verificată pentru fiecare din MM (-II sau -ISI) aferente unui SL invariant cu timp continuu:

***MM-ISI*:**

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\cdot u(t) , \quad (2.3.4)$$
$$y(t) = \mathbf{c}^T\cdot\mathbf{x}(t) + d\cdot u(t) ,$$

în care: dim $\mathbf{A}$ =(n×n) , dim $\mathbf{b}$ =(n×1) , dim $\mathbf{c}^T$ =(1×n) , dim d =(1×1);

***MM-II*:**

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(\nu)}(t) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu u^{(\mu)}(t) , \ t \in R, \ \text{cu} \ m \leq n , \quad (2.3.5)$$

sau:

$$a_n y^{(n)}(t)+\ldots+a_1 y'(t)+a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t)+\ldots+b_1 u'(t)+b_0 u(t) \quad . \quad (2.3.6)$$

2.3.2. Sisteme neliniare cu timp continuu

Sistemele neliniare (SNL) sunt caracterizate prin ***dependenţe neliniare*.*dintre mărimile lor caracteristice.*** Un exemplu de SNL este *elementul de execuţie (E)* (amplificator de putere) care constă dintr-o punte cu tiristoare ce debitează energie pe un circuit electric, de exemplu: (a) înfăşurarea de excitaţie a unui generator sincron (GS); (b) un element de încălzire cu rezistor; (c) indusul unui motor de curent continuu (c.c.) ş.a. Pentru exemplificare, în fig.2.3 este prezentată situaţia unui element de încălzire cu rezistor alimentat printr-o punte cu tiristoare (PTr) comandată printr-un dispozitiv de comandă (ACG).

Elementul de execuţie astfel realizat are ca mărime de *intrare, tensiunea de comandă* u_c, iar ca mărime de *ieşire, puterea* p_e.

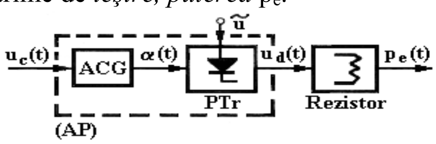

Fig.2.3. *Un element de execuţie văzut ca exemplu de sistem neliniar.*

Dependenţa intrare-ieşire este neliniară; ea este dictată atât de comportarea amplificatorului de putere (AP) cât şi de procesul de conversie a energiei în rezistor. Se pot scrie următoarele relaţii de funcţionare (caracterul relaţiei L-liniar, NL-neliniar):

- valoarea unghiului de comandă este (L):

$$\alpha(t) = k \cdot u_c(t) \; ; \qquad (2.3.7)$$

- valoarea medie a tensiunii redresate $u_d(t)$ este (NL)

$$u_d(t) = u_{d0} \cdot \sin \alpha(t) \; ; \qquad (2.3.8)$$

- în procesul de redresare sunt generate armonici; valoarea efectivă a tensiunii este definită în raport cu acestea (NL):

$$u_{def}(t) = [u_d^2(t) + u_{d1}^2(t) + u_{d2}^2(t) + ...]^{1/2} \; ; \qquad (2.3.9)$$

- puterea disipată pe rezistor este caracteterizată de relaţia (NL):

$$p_e(t) = u_{def}^2(t)/R(t) \; , \quad \text{cu} \quad R(t)=R_0[1 + \alpha(t) \cdot \Delta\theta] \; . \qquad (2.3.10)$$

Un sistem care contine cel puţin o neliniaritate se numeşte ***sistem neliniar*** (**SNL**). Neliniarităţile sunt datorate ***cauzelor*** următoare:

- *caracteristici statice* (CS) neliniare ale blocurilor din cadrul SF; aceste CS pot fi explicitate analitic sau grafic;
- *operaţii neliniare* ce caracterizează fenomenele din SF (în formă analitică).

Caracteristica statică (**CS**) **a unui SF.** Un SF (SD) se află în regim staţionar constant (**RSC**) atunci când mărimile sale caracteristice nu variază în timp (au valoare *constantă*). CS a unui SF reprezintă dependenţa grafică (de RSC) dintre mărimile sale caracteristice (u → y sau, după caz, altele).

În fig.2.4 sunt exemplificate o CS liniară (CS-L, (a)) şi diferite aluri de CS neliniare (CS-NL, (b) … (d)).

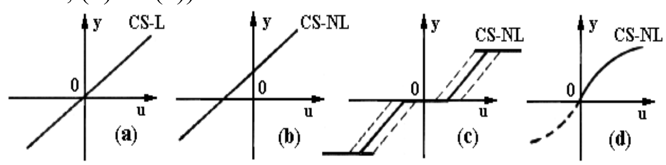

Fig.2.4. *Exemple de caracteristici statice: liniară (a) şi neliniare (b) … (d).*

Trebuie însă reţinut faptul că – de regulă – prezenţa neliniarităţilor în structura PC îngreunează (adeseori semnificativ) condiţiile de conducere (reglare).

2.3.3. Liniarizarea MM neliniare (MM-NL)

În anumite situaţii, unele tipuri de neliniarităţi pot fi caracterizate, *pe porţiuni şi cu oarecare aproximare*, prin MM liniare, care sunt obţinute prin *liniarizarea MM-NL* de bază. Ataşarea la un SNL a unui *MM de aproximare liniar* poartă denumirea de ***liniarizare*** iar MM astfel obţinut ***MM liniarizat*** (**MM-Ln**).

Adeseori valabilitatea MM-Ln este restrânsă la domenii din jurul unor puncte de funcţionare sau – mai general – unor traiectorii de funcţionare în care s-a efectuat liniarizarea. Obişnuit, punctele de liniarizare corespund unor regimuri reprezentative de funcţionare ale sistemului, numite ***puncte de funcţionare staţionară constantă*** (**p.d.f.s.c.**). P.d.f.s.c. caracterizează ansamblul valorilor mărimilor caracteristice care corespund funcţionării SF (SD) în ***regimul staţionar constant*** (**RSC**) specificat. P.d.f.s.c. ale unui SF sunt marcate prin coordonatele lor, în forma uzuală $A_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0)$ sau $A(u_\infty, \mathbf{y}_\infty, \mathbf{x}_\infty)$.

Un SF (SD) se află în **RSC** atunci când mărimile sale caracteristice nu variază în timp (au valoare *constantă*). Din punct de vedere matematic, stabilirea RSC revine la anularea efectelor de derivare şi de integrare din sistem.

Referitor la MM-ISI şi MM-II de forma (2.3.4) şi (2.3.5), aceasta revine la asigurarea condiţiilor următoare:

(2.3.4): $u = \text{const}, \quad y = \text{const}$ şi $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ pentru $t \ge t_f$; (2.3.11)

(2.3.5): toţi $y^{(\nu)}(t) = 0$, $\nu = 1,\dots, n$, (2.3.12)

toţi $u^{(\mu)}(t) = 0$, $\mu = 1,\dots, m$.

Ca urmare, în RSC, MM-II (2.3.4) şi (2.3.5) se transformă în dependenţle:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{b}\cdot u \,, \qquad \cdot\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}\cdot u \qquad (2.3.13')$$

$$y = \mathbf{c}^T\cdot\mathbf{x} + d\cdot u(t) \,, \qquad y = [\,-\mathbf{c}^T\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} + d]\cdot u$$

respectiv:

$$y = (b_0/a_0)\bullet u \;,\quad \text{cu condiţia} \quad a_0 \neq 0 \quad \text{şi} \quad b_0 \neq 0 \;. \tag{2.3.13”}$$

Important: Prezintă CS doar sistemele care satisfac condiţiile: $a_0 \neq 0$ şi $b_0 \neq 0$. Cazurile $b_0 = 0$ şi $a_0 = 0$ constituie cazuri aparte care vor fi discutate ulterior.

În general, plecând de la MM-NL cu variabilele caracteristice {**u**, **y**, **x**}, *prin liniarizare va fi determinat un MM liniarizat (MM-Ln)* care va avea ca variabile proprii, ***creşterile variabilelor*** de bază în raport cu coordonatele p.d.f.s.c. de liniarizare, notate prin:

$$\Delta\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_0 \;,\quad \Delta\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}(t)-\mathbf{y}_0 \;,\quad \Delta\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0 \;. \tag{2.3.14}$$

Observaţii: 1. În cazul particular $A_0(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ (punctul de repaus al sistemului), se obţine:

$$\Delta\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) \;,\; \Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) \;,\; \Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) \;. \tag{2.3.15}$$

2. Dpă cum s-a menţionat, liniarizarea poate fi efectuată şi în jurul unor puncte de echilibru dinamic, caracterizate, de exemplu, prin viteză constantă sau prin acceleraţie constantă (traiectorii de liniarizare).

Aplicarea procedurii de liniarizare.

În practică apar diverse situaţii tipice de aplicare a procedurii de liniarizare. În prima fază se presupune că neliniaritatea SNL este caracterizată printr-un MM-NL analitic. În acest context, MM-Ln se obţine *prin dezvoltarea MM-NL în* serie Taylor, *în vecinătatea p.d.f.s.c.* de liniarizare A_0 şi *neglijarea termenilor care conţin creşterile de ordin superior ale variabilelor*.

Cazuri remarcabile de liniarizare.

A. ***Liniarizarea MM-NL aferent unui sistem monovariabil***, pentru care MM-NL:

$$y(t) = f(u(t)) \tag{2.3.16}$$

este cunoscut sub formă analitică neliniară dar derivabilă pe porţiuni.

Un caz particular remarcabil care va rezulta din procedeul general descris este şi cel în care MM-NL este cunoscut *sub forma grafică* a CS neliniare aferente SF.

Prin dezvoltarea în serie Taylor, în jurul p.d.f.s.c. $A_0(u_0, y_0)$, a relaţiei (2.3.16), se obţine:

$$y(t)-y_0 = \left.\frac{df}{du}\right|_{A_0}\bullet[u(t)-u_0] + \underbrace{\frac{1}{2!}\bullet\left.\frac{d^2f}{du^2}\right|_{A_0}\bullet[u(t)-u_0]^2 + \dots}_{\to\ \text{termeni care se neglijează.}} \;. \tag{2.3.17}$$

Cu notaţiile (2.3.14), relaţia devine:

$$\Delta y(t)=k\cdot\Delta u(t)\ ,\ \text{cu}\quad k=\left.\frac{df}{du}\right|_{A_0}\quad \text{– coeficientul de transfer.}\qquad (2.3.18)$$

Interpretarea grafică a relaţiei (2.3.18) este ilustrată în fig.2.5, în care k este o mărime cu dimensiune:

$k = \mathrm{tg}\ \alpha$ (2.3.19) $\langle k\rangle = \langle\Delta y\rangle/\langle\Delta u\rangle$. (2.3.20)

$A_0(u_0, y_0)$, este punctul de liniarizare iar $A(u, y)$ punctul curent de funcţionare a sistemului. Prin liniarizare, punctul de funcţionare este *translatat* în $A'(u, y')$, segmentul AA' fiind o posibilă *măsură a erorii de liniarizare*.

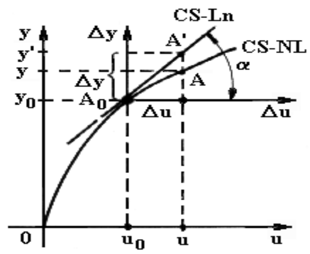

Fig.2.5. *Interpretarea grafică a liniarizării.*

B. Liniarizarea MM-NL pentru care în dependenţa neliniară intervin două sau mai multe variabile. Relaţiile de liniarizare vor fi prezentate pentru un SNL cu două intrări, u_1 şi u_2 , şi o ieşire y, în două variante de explicitare a MM-NL:

(a) ***Forma explicită*** a dependenţei neliniare (MM-NL):

$y(t) = f\{u_1(t), u_2(t)\}$. ; (2.3.21)

(b) ***Forma implicită*** a dependenţei neliniare (MM-NL):

$g\{u_1(t), u_2(t), y(t)\} = 0$. . (2.3.22)

P.d.f.s.c. de liniarizare este $A_0(u_{10}, u_{20}, y_0)$.

Urmărind procedura de liniarizare indicată, se obţine imediat:

$$\Delta y(t) = K_1\Delta u_1(t) + K_2\Delta u_2(t) \qquad (2.3.23)$$

în care, pentru cele două variante, rezultă:

$$\text{(a)}\quad K_1=\left.\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|_{A_0}\ ,\quad K_2=\left.\frac{\partial f}{\partial u_2}\right|_{A_0}\ , \qquad (2.3.24)$$

$$\text{(b)}\quad K_1=-\frac{\partial g/\partial u_1\,|_{Ao}}{\partial g/\partial y\,|_{Ao}}\ ,\qquad K_2=-\frac{\partial g/\partial u_2\,|_{Ao}}{\partial g/\partial y\,|_{Ao}}\ . \qquad (2.3.25)$$

Utilizând reprezentarea prin scheme bloc, liniarizarea poate fi evidenţiată în fig.2.6.

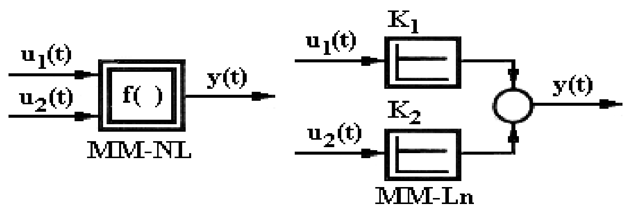

Fig.2.6. *Schema bloc pentru MM neliniar şi MM liniarizat.*

Exemplul 2.1: Liniarizarea MM-NL din exemplul prezentat în fig.2.3; p.d.f.s.c. de liniarizare $A_0(u_{c0}, \alpha_0, u_{d0}, R_0)$:

(2.3.7) $\quad (L) \Rightarrow \quad \Delta\alpha(t) = k \bullet \Delta u_c(t)$; (2.3.26)

(2.3.8) $\xrightarrow{(Ln)} \quad \Delta u_d(t) = -u_{d0}(\cos\alpha_0) \bullet k \bullet \Delta u_c(t)$; (2.3.27)

(2.3.9) $\quad (L) \Rightarrow \quad \Delta u_{def}(t) = K \bullet \Delta u_d(t)$; (2.3.28)

(2.3.10) $\xrightarrow{(Ln)} \quad \Delta p_e(t) = -k_{E1}\Delta R(t) + k_{E2}\Delta u_{def}(t)$.

C. Liniarizarea MM-ISI-NL explicitate sub formă matricială:

(a) – forma explicită

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}_1\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}\ , \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}_2\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}\ ; \qquad (2.3.29)$$

(b) – forma implicită

$$\mathbf{g}_1\{\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\} = \mathbf{0}\ , \quad \mathbf{g}_2\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)\} = \mathbf{0}\ . \qquad (2.3.30)$$

Liniarizarea va fi exemplificată pentru una din ecuaţiile de stare ale modelului (a), în jurul unui p.d.f.s.c. $A_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0)$:

$$x_i'(t) = f_{1i}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}\ ,\ i = 1 \ldots n\ . \qquad (2.3.31)$$

Conform procedeului de liniarizare prezentat, se obţine:

$$\underbrace{x_i'(t)}_{} - \underbrace{f_{1i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}_{x_{i0}'} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_{1i}}{\partial x_j}\right|_{A_0} [x_j(t) - x_{j0}] + \sum_{k=1}^{r} \left.\frac{\partial f_{1i}}{\partial u_k}\right|_{A_0} [u_k(t) - u_{k0}]\ ,$$

$$\text{cu}\ \ i=1 \ldots n\ . \qquad (2.3.32)$$

Cu notaţiile (2.3.15), se obţine:

$$\Delta x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_{1i}}{\partial x_j}\right|_{A_0} \Delta x_j(t) + \sum_{k=1}^{r} \left.\frac{\partial f_{1i}}{\partial u_k}\right|_{A_0} \Delta u_k(t)\ , \quad i=1,\ldots,n\ . \qquad (2.3.33)$$

(similar şi pentru ecuaţia ieşirii).

Prin generalizare se obţine apoi ***MM-ISI liniarizat*** în forma:

$$\Delta\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}_l \bullet \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_l \bullet \mathbf{u}(t)\,, \qquad (2.3.34)$$
$$\Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_l \bullet \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_l \bullet \mathbf{u}(t)\,,$$

în care $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$ şi $\mathbf{D}_l$ sunt matrice de tip Jacobian şi au expresiile:

$$\mathbf{A}_l = \left.\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}\right|_{A_0} \;;\quad \mathbf{B}_l = \left.\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}}\right|_{A_0} \;;\quad \mathbf{C}_l = \left.\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}\right|_{A_0} \;;\quad \mathbf{D}_l = \left.\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}}\right|_{A_0} . \qquad (2.3.35)$$

Observaţii: 1. În urma liniarizării – în jurul unui p.d.f.s.c. de liniarizare – proprietăţile SLn pot fi analizate prin metode specifice analizei SL.

2. Dacă în cadrul unui MM-Ln coexistă ecuaţii liniare şi liniarizate, pentru evitarea confuziilor de reprezentare, este bine ca *toate variabilele* care apar în MM-Ln să fie explicitate *în creşteri.*

3. Valorile absolute ale variabilelor MM-Ln pot fi calculate pe baza relaţiei:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}_0 \;,\quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0 \;,\quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}_0 \,, \qquad (2.3.36)$$

în care $\Delta\mathbf{u}_0$, $\Delta\mathbf{x}_0$ şi $\Delta\mathbf{y}_0$ sunt valori calculate pe baza MM-Ln.

Exemplul 2.2 [P3]: Este considerat SF cu timp continuu "generator de c.c. (g.c.c.) antrenat de un motor primar (MP)", fig.2.7. Generatorul debitează peste un consumator caracterizat prin rezistenţa R_c şi inductanţa L_c (aplicatia poate fi vazută ca excitatricea unui sistem de excitaţie pentru un GS).

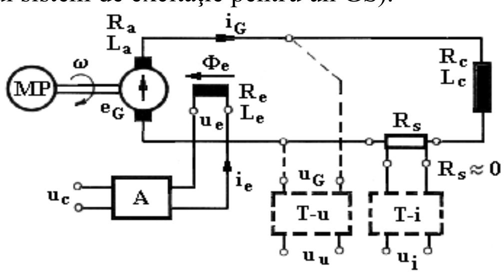

Fig.2.7. *Procesul condus "generator de curent continuu".*

Mărimile de intrare ale sistemului sunt: u_c – tensiunea de comandă la amplificator (A) (tensiunea de excitaţie va fi considerată ca fiind proporţională cu mărimea de comandă, $u_e = k_E \bullet u_c$); ω – viteza unghiulară cu care este antrenat g.c.c.
Mărimea de ieşire este tensiunea la bornele g.c.c., u_G. În fig.2.7 a fost marcată şi prezenţa traductoarelor de tensiune (T-u) şi de curent (T-i) care pot deservi funcţionarea unui SCA mai complex.

Se cere: 1. Să se scrie ecuaţiile primare care caracterizează funcţionarea sistemului şi să se expliciteze MM-ISI primar NL asociat SF. 2. Să se liniarizeze ecuaţiile primare şi, pe această bază, să se determine: - MM-ISI liniarizat; - MM-II liniarizate, ce caracterizează dependenţa $u_G(t) = f_l\{u_e(t), \omega(t)\}$.

Soluţie [P4]: 1. Ecuaţiile primare aferente funcţionării g.c.c. sunt:
- pentru circuitul de excitaţie:

$$u_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}, \qquad (2.3.37)$$

- pentru circuitul de indus şi sarcină:

$$u_G(t) = e_G(t) - R_a i_G(t) - L_a \frac{di_G(t)}{dt} = R_c i_G(t) + L_c \frac{di_G(t)}{dt}, \qquad (2.3.38)$$

- tensiunea electromotoare (t.e.m.) indusă în g.c.c. este:

$$e_G(t) = K_\omega \bullet e(t) \bullet \omega(t)\ . \qquad (2.3.39)$$

Pentru explicitarea MM-ISI sunt alese ca *mărimi de stare* $i_e(t) = x_1(t)$ şi $i_G(t) = x_2(t)$ şi se obţine MM-ISI neliniar cu ieşirea $u_G(t) = y(t)$, de forma:

$$x_1'(t) = -\frac{R_e}{L_e} x_1(t) + \frac{k_E}{L_e} u_c(t)\ , \qquad (2.3.40)$$

$$x_2'(t) = \frac{K_\omega}{L_a+L_c} x_1(t) \bullet \omega(t) - \frac{R_a+R_c}{L_a+L_c} x_2(t)\ , \qquad (2.3.41)$$

$$y(t) = \frac{K_\omega L_c}{L_a+L_c} x_1(t) \bullet \omega(t) + \frac{L_a R_c - R_a L_c}{L_a+L_c} x_2(t)\ . \qquad (2.3.42)$$

2. Liniarizând ecuaţiile MM-ISI (2.3.40) ... (2.3.42), se obţine MM-ISI liniarizat (pentru simplificarea scrierii, se omite variabila timp, t):

$$\Delta x_1' = -\frac{R_e}{L_e} \Delta x_1 + \frac{k_E}{L_e} \Delta u_c\ , \qquad (2.3.43)$$

$$\Delta x_2' = \frac{K_\omega \omega_0}{L_a+L_c} \Delta x_1 - \frac{R_a+R_c}{L_a+L_c} \Delta x_2 + \frac{K_\omega i_{e0}}{L_a+L_c} \Delta\omega\ , \qquad (2.3.44)$$

$$\Delta y = \frac{K_\omega L_c \omega_0}{L_a+L_c} \Delta x_1 + \frac{L_a R_c - R_a L_c}{L_a+L_c} \Delta x_2 + \frac{K_\omega L_c i_{e0}}{L_a+L_c} \Delta\omega\ . \qquad (2.3.45)$$

Prin eliminarea variabilelor intermediare sunt obţinute două MM-II-Ln în raport cu cele două intrări:

- MM-II-Ln $\Delta u_c(t) \rightarrow \Delta u_G(t)$ în cazul $\Delta\omega(t) = 0$:

$$T_{ac} T_{el} \Delta u_G'' + (T_{ac}+T_{el}) \Delta u_G' + \Delta u_G = K_{uc}[T_c \Delta u_c' + \Delta u_c] \qquad (2.3.46)$$

- MM-II-Ln $\Delta\omega(t) \rightarrow \Delta u_G(t)$ în cazul $\Delta u_c(t) = 0$:

$$T_{ac}T_{el}\Delta u_G''+(T_{ac}+T_{el})\Delta u_G'+\Delta u_G = K_{\omega 1}[T_{ac}T_{el}\Delta\omega''+(T_{ac}+T_{el})\Delta\omega'+(T_{ac}/T_C)\Delta\omega] \quad (2.3.47)$$

cu: $T_a = L_a/R_a$, $T_{ac} = (L_a+L_c)/(R_a+R_c)$, $T_c = L_c/R_c$, (2.3.48)
$K_{uc} = k_E K_\omega \omega_0 R_c/R_e/(R_a+R_c)$, $K_{\omega 1} = K_\omega i_{e0} Lc/(L_a+L_c)$.

3. CARACTERIZAREA SISTEMELOR ÎN DOMENIUL OPERAŢIONAL

Dependent de modul de tratare a timpului, caracterizarea matematică în domeniul operaţional a SL (SLn) are la bază două transformări operaţionale:

- transformarea Laplace, pentru cazul sistemelor cu timp continuu (-C),
- transformarea Laplace discretă, sau transformarea *Z*, pentru cazul sistemelor cu timp discret (-D).

3.1. Transformarea Laplace. Definirea matematică

Definirea transformării Laplace: Dacă o funcţie u(t): $R \rightarrow R$ are proprietăţile următoare:

- ❑ $u(t) = 0$, $\forall\ t < 0$,
- ❑ este derivabilă pe porţiuni,
- ❑ $\exists\ M > 0$ şi $\sigma_0 \geq 0$ astfel încât:

$$|u(t)| \leq M \cdot e^{\sigma_0 t} , \quad \forall\ t \geq 0 ,$$

atunci, ea admite o ***transformată Laplace*** unilaterală definită prin relaţia ([P1], [D1], [V1]):

$$u(s) = L\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t) \cdot e^{-st}\, dt , \qquad (3.1.1)$$

cu $u(s): \Delta_0 \rightarrow C$, în care $\Delta_0 = \{s \in C \mid \text{Re } s > \sigma_0\}$.

Funcţia u(s) este numită ***imaginea Laplace*** a funcţiei u(t). Invers, funcţia u(t) este numită ***originalul*** lui u(s) sau ***funcţia original*** a lui u(s). Numărul σ_0 este numit ***indice de creştere***. Funcţia complexă de variabilă complexă u(s) este peste tot definită în semiplanul Δ_0 al planului complex. ***Transformarea Laplace*** este o aplicaţie liniară.

Originalul u(t) se determină pe baza lui u(s) cu ***formula de inversiune Mellin-Fourier***:

$$u(t) = L^{-1}\{u(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} u(s)\cdot e^{ts}\, ds\,, \qquad c > \sigma_0\,, \tag{3.1.2}$$

valabilă în punctele de continuitate ale lui u(t).

În tabelul 3.1 sunt sintetizate principalele proprietăţi ale transformării Laplace, utilizate în calculele legate de studiul SCA. În tabelul A.1.1 sunt prezentate transformatele Laplace aferente unor funcţii de timp utilizate frecvent în aplicaţiile de conducere automată.

Tabelul 3.1. *Propretăţile de bază ale transformării Laplace.*

Nr. crt.	Proprietate	Enunţ
1.	Liniaritate	$L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 f(s) + c_2 g(s)\,, \quad \forall\, c_1, c_2 \in R$
2.	Teorema derivării originalului	$L\{f'(t)\} = sf(s) - f(0_+)\,,$ $L\{f^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} f(0_+) - s^{n-2} f'(0_+) - \ldots - sf^{(n-2)}(0_+) - f^{(n-1)}(0_+)$
3.	Teorema integrării originalului	$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = (1/s) \bullet f(s)$
4.	Teorema întârzierii	$L\{f(t-\tau)\} = e^{-st} \bullet f(s)\,, \ \tau \in R$
5.	Teorema deplasării	$L\{f(t)e^{\alpha t}\} = f(s-\alpha)\,, \ \alpha \in R$
6.	Transformata produsului de convoluţie (Borel)	$L\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\} = L\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\} = f(s) \bullet g(s)$
7.	Teorema valorii iniţiale	Dacă există $f(0_+)$ atunci: $f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sf(s)$
8.	Teorema valorii finale	Dacă există $f(\infty)$ atunci: $f(\infty) = \lim_{s\to 0} sf(s)$
9.	Teorema derivării imaginii	$L\{tf(t)\} = -f'(s)\,,$ $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$

Capitolul 2
Caracterizarea sistemelor în domeniul operaţional

Tabelul A.1.1. *Tabel de transformate Laplace uzuale.*

Nr. crt.	Funcţia original $f(t)$	Transformata Laplace $f(s) = L\{f(t)\}$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$t \bullet \sigma(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$(t^2/2) \bullet \sigma(t)$	$\frac{1}{s^3}$
5.	$e^{-at} \bullet \sigma(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$t \bullet e^{-at} \bullet \sigma(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7.	$(1 - e^{-at}) \bullet \sigma(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$
8.	$[t-(1-e^{-at})/a] \bullet \sigma(t)$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
9.	$e^{-at} \bullet \sin(bt) \bullet \sigma(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
10.	$e^{-at} \bullet \cos(bt) \bullet \sigma(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

3.3. Semnale, secvenţe şi funcţii de intrare deterministe tipice

În caracterizarea comportării sistemelor este utilizat răspunsul acestora la semnale (secvenţe) de intrare deterministe considerate tipice. Folosirea acestor semnale prezintă două avantaje:

- *în studiul analitic:* prin aceea că astfel de semnale prezintă caracterizări matematice relativ simple;
- *practice:* prin aceea că aceste semnale sunt uşor de generat şi uşor reproductibile.

În continuare sunt enumerate şi caracterizate principalele semnale / secvenţe de funcţii de intrare tipice.

A. Funcţia Dirac, ***semnalul impuls unitate*** $\delta(t)$; este definită prin relaţia:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{pentru } t \neq 0\,, \\ \infty\,, & \text{pentru } t = 0\,; \end{cases} \quad \text{cu proprietatea} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1\,. \qquad (3.3.1)$$

În fig.3.4 (a) este ilustrat graficul funcţiei Dirac.

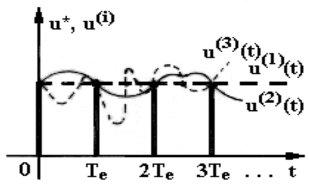

Fig.3.3. *Referitoare la neunivocitatea dintre $u^*(t)$ şi u(t).*

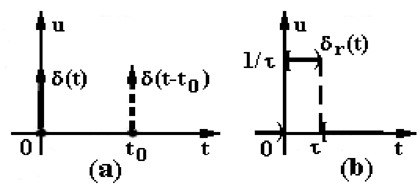

Fig.3.4. *Graficul funcţiei Dirac şi semnalul impuls unitate real.*

Realizarea fizică a funcţiei Dirac este semnalul impuls unitate real, $\delta_r(t)$, de durată finită τ şi amplitudine $1/\tau$, fig.3.4 (b). În calculele analitice prezintă interes *convoluţia cu funcţia Dirac,* care respectă următoarele relaţii formale:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) \quad \text{sau} \quad f(t)*\delta(t) = f(t)\,, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta^{(n)}(t-\tau)d\tau = f^{(n)}(t) \quad \text{sau} \quad f(t)*\delta^{(n)}(t) = f(t)\,. \end{aligned} \qquad (3.3.2)$$

Imaginea Laplace a funcţiei Dirac este:

$$\delta(s) = 1\,. \qquad (3.3.3)$$

B. Semnale şi secvenţe de intrare şi funcţii de intrare cu variaţie polinomială de ordin redus. Pentru o mai uşoară urmărire, aceste semnale vor fi definite separat pentru cazul continuu şi separat pentru cazul discret.

(a) Cazul semnalelor cu timp continuu. Semnalele şi funcţiile de intrare cu variaţie polinomială de ordin redus sunt reprezentate în fig.3.5 şi au transformatele Laplace ataşate:

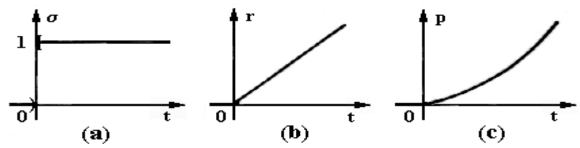

Fig.3.5. *Semnale de tip treaptă, rampă şi parabolă unitate.*

- ***semnalul treaptă unitate (a)*** (***funcţia Heaviside***), σ(t):

$$\sigma(t) = 1(t) = \begin{cases} 0\ , \text{ pentru } t < 0\ , \\ 1\ , \text{ pentru } t \geq 0\ ; \end{cases} \qquad \text{cu} \qquad \sigma(s) = 1/s \qquad (3.3.4)$$

- ***semnalul rampă unitate (b),*** r(t):

$$r(t) = t \bullet 1(t)\ ; \qquad \text{cu} \qquad r(s) = 1/s^2 \qquad (3.3.5)$$

- ***semnalul parabolă unitate(c)***, p(t):

$$p(t) = (t^2/2) \bullet 1(t)\ . \qquad \text{cu} \qquad p(s) = 1/s^3 \quad . \qquad (3.3.6)$$

Utilitatea acestor funcţii rezultă şi în aceea că mărimile de intrare ale SRA pot fi aproximate pe intervale de timp, prin funcţii treaptă, rampă şi parabolă, fig.3.6.

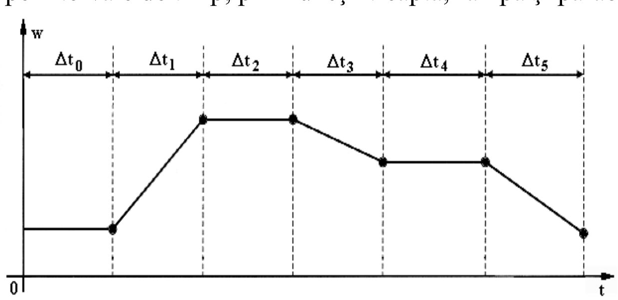

Fig.3.6. *Aproximarea unei referinţe w(t) ca succesiune de secvenţe treaptă şi rampă.*

(b) Cazul secvenţelor în timp discret. Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

Semnalele şi secvenţele treaptă, rampă sau parabolă neunitate sunt obţinute apoi în baza relaţiilor:

$u(t) = u_\infty\sigma(t)$, , $u^*(t) = u_\infty\sigma^*(t)$,
$u(t) = u_\infty r(t)$, , $u^*(t) = u_\infty r^*(t)$, (3.3.10)
$u(t) = u_\infty p(t)$, , $u^*(t) = u_\infty p^*(t)$.

Semnalul/secvenţa treaptă este utilizat(ă) în studiul ***SRA cu referinţă constantă***. În cazul sistemelor stabile, în urma variaţiei treaptă a intrarilor în sistem se stabileşte (la $t \to\infty$) un regim denumit regim staţionar constant (RSC).

C. Funcţii şi semnale secvenţe de intrare cu variaţie armonică în timp (definire separată în cazul continuu şi cel discret).

(a) Cazul cu timp continuu. Semnalul armonic de bază este *semnalul sinusoidal*, fig.3.8-a:

$u(t) = u_m\sin(\omega t+\varphi_0)$, cu $\omega > 0$, (3.3.11)

în care: u_m – amplitudinea, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ – pulsaţia, f – frecvenţa, T – perioada semnalului sinusoidal, φ_0 – faza iniţială; obişnuit se poate considera $\varphi_0 = 0$.

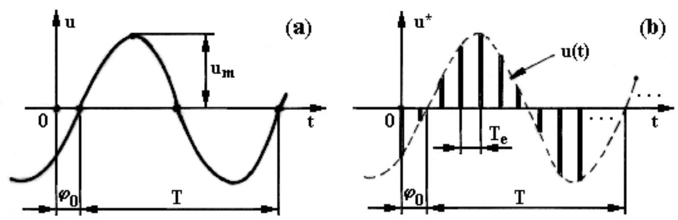

Fig.3.8. *Semnal sinusoidal (a) şi secvenţa sinusoidală (b).*

(b) Cazul cu timp discret. Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

Regimul permanent armonic reprezintă *regimul permanent* care se stabileşte într-un sistem (stabil) ca urmare aplicării unui semnal / secvenţă armonică. Acest regim poate oferi suport pentru studiul analitic şi experimental al sistemelor în *domeniul pulsaţie* sau *frecvenţă*.

3.5. MM în domeniul operaţional: funcţia de transfer, matricea de transfer

A. Cazul sistemelor cu timp continuu (SD-C). Se consideră un SLI monovariabil, cu timp continuu, *aflat în condiţii iniţiale nule* şi caracterizat prin MM-II de forma:

$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$, $m \le n$. (3.5.1)

Aplicând transformarea Laplace membru cu membru şi termen cu termen şi ţinând seama că sistemul se află în condiţii iniţiale nule:

$\boldsymbol{\psi}_0 = (u_0, u_0', \ldots, u_0^{(m-1)}; y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})^T = \mathbf{0}$, (3.5.2) se obţine (a se vedea şi tabelul 3.1):

$$a_n s^n y(s) + \ldots + a_1 s y(s) + a_0 y(s) = b_m s^m u(s) + \ldots + b_1 s u(s) + b_0 u(s)\ . \qquad (3.5.3)$$

Separând variabila y(s) ca funcţie de u(s), rezultă:

$$y(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \bullet u(s)\ . \qquad (3.5.4)$$

În baza relaţiei (3.5.4) se introduce prin ***definiţie*** conceptul de funcţie de transfer (f.d.t.):

Funcţia de transfer (**f.d.t.**) a unui sistem liniar, notată H(s), este definită ca *raportul dintre imaginea Laplace a mărimii de ieşire* y(s) şi *imaginea Laplace a mărimii de intrare* u(s), sistemul fiind considerat în condiţii iniţiale nule:

$$H(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\boldsymbol{\psi}_0=\mathbf{0}} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}\ . \qquad (3.5.5)$$

Corespunzător, relaţia (3.5.4) poate fi rescrisă în forma:

$$y(s) = H(s) \bullet u(s) \quad ; \qquad (3.5.6)$$

relaţia stă la baza unei metode de calcul al răspunsului SLI.

Pentru caracterizarea dinamicii SF (PC) continue sunt utilizate *constantele de timp*, notate de regula cu T. Evidenţierea acestora în MM din domeniul timp şi din domeniul operaţional (f.d.t.) este foarte utilă.

În vederea exemplificării acestei evidenţieri este considerat SF cu MM de forma:

$$a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = b_0\, u(t)\ ; \qquad (3.5.7)$$

prin împărţire cu a_0 şi reordonare se obţine:

$$(a_1/a_0)\, y'(t) + y(t) = (b_0/a_0)\, u(t) \ \rightarrow \quad T\, y'(t) + (t) = k\, u(t)\ , \qquad (3.5.8)$$

în care: $a_1/a_0 = T$ –constanta de timp a SF (are dimensiunea <sec>) iar $b_0/a_0 = k$ – coeficientul de transfer al SF (sau factorul de amplificare).

În operaţional se obţine:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{1 + sT}\ . \qquad (3.5.9)$$

În general, operând în manieră similară, relaţia (3.5.5) poate fi rescrisă în forma:

$$H(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{(b_m/b_0)s^m + \ldots + b_1/b_0 s + b_0}{(a_n/a_0)s^n + \ldots + a_1/a_0 s + a_0}, \qquad (3.5.10)$$

în care: $b_0/a_0 = k$ –coeficientul de transfer, iar coeficienţii (b_μ /b_0) respectiv (a_ν /a_0) au *dimensiunea de constantă de timp* la puterea μ, $\mu = 1\ldots m$, respectiv ν, $\nu = 1\ldots n$.

Dacă ***sistemul este multivariabil (MIMO)***, cu r intrări şi q ieşiri (fig.3.10), atunci între fiecare intrare $u_i(t)$, $i = 1\ldots r$, şi fiecare ieşire $y_j(t)$, $j = 1 \ldots q$ poate fi stabilit câte un MM-II $u_l(t) \rightarrow y_j(t)$ sub forma unei f.d.t. $H_{ji}(s)$ definită prin relaţia:

$$H_{ji}(s) = \left.\frac{y_j(s)}{u_i(s)}\right|_{\boldsymbol{\psi}_0=\mathbf{0}}, \; j = 1\ldots \; q, \; i = 1\ldots r, \quad u_k = 0, \; k \neq i. \qquad (3.5.11)$$

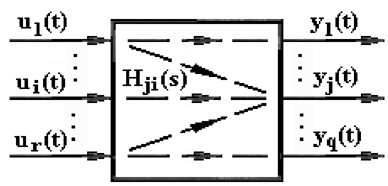

Fig.3.10. *Definirea matricei de transfer în cazul sistemelor multivariabile.*

Ansamblul funcţiilor de transfer (q × r) care caracterizează un sistem multivariabil, aflat în condiţii iniţiale nule, poartă denumirea de ***matrice de transfer*** (**m.d.t.**):

$$\mathbf{H}(s) = [H_{ji}(s)]\Big|_{\substack{j=1,\ldots,q \\ i=1,\ldots,r}} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) \ldots H_{1r}(s) \\ \ldots \\ H_{j1}(s) \ldots H_{jr}(s) \\ \ldots \\ H_{q1}(s) \ldots H_{qr}(s) \end{bmatrix}, \quad \text{şi} \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s) \qquad (3.5.12)$$

B. Cazul sistemelor cu timp discret (SD-D). Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

Observaţii. 1. Analogia relaţiilor (3.5.5) cu cea în z aferentă SD-D permite ***caracterizarea într-o formă unitară*** a ambelor f.d.t. (categorii de SD), ca fiind:

$$H(\lambda) = \left.\frac{y(\lambda)}{u(\lambda)}\right|_{\boldsymbol{\psi}_0=\mathbf{0}} = \frac{b_n\lambda^n + \ldots + b_1\lambda + b_0}{a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0}. \quad \text{în care} \qquad (3.5.20)$$

$$\lambda = \begin{cases} s, & \text{în cazul SL-C} \\ & , \\ z, & \text{în cazul SL-D}. \end{cases} \qquad (3.5.21)$$

Generalizarea are avantaje în formalizarea matematică unitară a SL-C şi SL-D.

2. Numitorul f.d.t., A(λ), este ***polinomul caracteristic al SL***; rădăcinile ecuaţiei caracteristice:

$$A(\lambda) = 0 \;\rightarrow\; a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0\,, \tag{3.5.22}$$

poartă denimirea de ***polii sistemului*** şi se notează cu p_ν, $\nu = 1,\ldots n$; gradul n al polinomului caracteristic defineşte ***ordinul sistemului***.

3. Rădăcinile numărătorului f.d.t.:

$$B(\lambda) = 0 \;\rightarrow\; b_n \lambda^n + \ldots + b_1 \lambda + b_0 = 0\,, \tag{3.5.23}$$

poartă denumirea de ***zerourile sistemului*** şi se notează cu z_μ, $\mu = 1,\ldots m$.

4. Polii şi zerourile unui sistem se denumesc ***puncte critice*** ale sistemului; pe baza repartiţiei în planul complex a polilor şi zerorurilor unui sistem se pot aprecia proprietăţile sistemului. Astfel [B2]:

- *repartiţia polilor* va avea implicaţii asupra stabilităţii şi asupra comportării de regim dinamic a sistemului;
- *repartiţia zerourilor* va avea implicaţii numai asupra comportării de regim dinamic a sistemului.

Pe baza repartiţiei poli-zerouri este posibil un studiu eficient al proprietăţilor sistemului [D1]. Prin explicitarea polilor şi zerourilor, f.d.t. (3.5.20) se scrie astfel:

$$H(\lambda) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (\lambda - z_\mu)}{\prod_{\nu=1}^{n} (\lambda - p_\nu)}\,, \tag{3.5.24}$$

C. ***Calculul răspunsului sistemelui aflat în condiţii iniţiale nule***. În baza relaţiei (3.5.6) respectiv celei în z aferente SD-D se poate calcula răspunsul sistemului la un semnal de intrare cunoscut sau la o secvenţă de intrare cunoscută.

a) Cazul SL-C (continuu). Se consideră un SL cu f.d.t. H(s); semnalul de intrare u(t) este cunoscut (formă analitică), cu u(t) = 0 pentru t < 0 . Acceptând că u(t) are transformata Laplace u(s) cunoscută (de exemplu din tabelele de transformate), aplicând relaţia (3.5.5), se poate calcula expresia operaţională a ieşirii, y(s) (răspunsul în operaţional al sistemului).

Originalul y(t) (răspunsul în domeniul timp) se obţine apoi în forma:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \ldots \quad \text{(din tabele de transformate)}\,. \tag{3.5.25}$$

Expresiile operaţionale ale semnalelor şi secvenţelor de intrare impuls, treaptă şi rampă sunt următoarele:

$u(t) = \delta(t)$, $u(s) = 1$; $u^*(t) = \delta(t)$, $u(z) = 1$; (3.5.26)

$u(t) = u_\infty\sigma(t)$, $u(s) = (1/s)u_\infty$; $u^*(t) = u_\infty\sigma^*(t)$, $u(z) = (z/(z-1))u_\infty$;

$u(t)=u_\infty t\sigma(t)$, $u(s)=(1/s^2)u_\infty$; $u^*(t)=u_\infty r^*(t)$, $u(z)=(T_e z/(z-1)^2)u_\infty$.

b) Cazul SL-D (discret). Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

3.6. Legătura dintre MM-ISI şi MM-II aferente unui SLI

Între cele două MM ale unui acelaşi SLI se pot realiza conexiuni care în operaţional, cu utilizarea variabilei comune λ, se pot scrie unitar pentru:

$$\lambda = \begin{cases} s, & \text{pentru sistemelor liniare cu timp continuu, SD-C} \\ z, & \text{pentru sistemele liniare cu timp discret, SD-D.} \end{cases} \quad (3.6.1)$$

- ***Cazul SLI monovariabil cu timp continuu*** cu MM-ISI:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\cdot u(t), \quad (3.6.2)$$
$$y(t) = \mathbf{c}^T\cdot\mathbf{x}(t).$$

Aplicând transformarea Laplace pentru $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, se poate scrie:

$$s\cdot\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}\cdot u(s), \quad (3.6.3)$$
$$y(s) = \mathbf{c}^T\cdot\mathbf{x}(s).$$

Operând, se obţine în final expresia f.d.t.:

$$H(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \frac{\mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{b} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad \text{cu} \quad (3.6.3)$$

$$A(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \qquad B(s) = \mathbf{c}^T \mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\, \mathbf{b} \qquad \text{şi} \quad (3.6.4)$$

$$y(s) = \mathbf{c}^T\cdot(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{b}\cdot u(s). \quad (3.6.5)$$

- ***Cazul SLI cu timp discret***. Va fi tratat în unul din capitolele următoare.

6. CONEXIUNI DE SISTEME

Sistemele fizice (SF) sunt realizate prin interconectarea unor sisteme mai simple, numite subsisteme. Proprietăţile de ansamblu ale sistemului pot fi determinate relativ uşor pe baza proprietăţilor subsistemelor componente şi a proprietăţilor suplimentare obţinute prin interconectare.

6.1. Conexiuni de sisteme (subsisteme)

Prin ***sistem echivalent unei conexiuni de subsisteme*** se înţelege sistemul care prezintă aceleaşi intrări, aceleaşi ieşiri şi aceleaşi proprietăţi ca şi conexiunea. Sistemul în ansamblu (conexiunea) poate fi caracterizată din punct de vedere informaţional pe baza MM aferente subsistemelor şi a relaţiilor de legătură care sunt realizate prin conexiune. ***Interconectarea funcţională a unor S***F – şi a blocurilor informaţionale aferente – trebuie să respecte **cerinţele** următoare:

- SF se pot cupla numai prin mărimi de aceeaşi natură fizică şi domeniu de variaţie/
- În cazul cuplării unor sisteme la care nivelul energetic al semnalelor este diferit, la nivelul cuplajului trebuie asigurată o adaptare corespunzătoare.
- Sistemele cu timp continuu şi sistemele cu timp discret se pot interconecta numai prin interfaţare corespunzătoare, în speţă convertor analog-numeric (CAN) sau convertor numeric-analogic (CNA).

Prezentările din acest capitol sunt efectuate relativ la cazul sistemelor monovariabile. Cazul multivariabil se tratează principial în aceeaşi manieră cu respectarea compatibilităţii dimensionale a vectorilor mărimilor prin care este realizată interconectarea.

Conexiunile de sisteme pot fi caracterizate din punct de vedere informaţional în toate domeniile (timp, operaţional, pulsaţie) şi în ambele forme de reprezentare matematică, MM-II sau MM-ISI. Caracterizarea în domeniul timp a transferului intrare-ieşire al informaţiei printr-un SF (SD) face apel la integrale (sume) de convoluţie a căror tratare este însă greoaie.

Din acest motiv, se preferă aproape exclusiv caracterizarea în domeniul:

- ***Operaţional,*** prin MM-II sub forma f.d.t. (exemplificare în cazul continuu):

$y(s)=H(s)u(s)$, cu $H(s)=B(s)/A(s)$ (forma raţională) , (6.1.1)

- ***Pulsaţie***, prin utilizarea c.d.p. aferente, ($H(j\omega)$, $h\{H(j\omega)\}$, $|H(j\omega)|_{dB}$, $\underline{/H}(j\omega)$).

La utilizarea carcterizării prin MM-ISI a SF sunt utilizate atât reprezentările din domeniul timp:

$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\,u(t)$, $y(t) = \mathbf{c}^T\,\mathbf{x}(t) + d\,u(t)$, (6.1.2)

cât şi reprezetările din domeniul operaţional.

Un sistem cu o intrare u(t) şi o ieşire y(t) de ordin relativ redus poartă denumirea de ***element de transfer*** (**ET**).

Conexiunile de sisteme omogene (timp continuu, timp discret) sunt tratate în manieră similară pentru ambele categorii de sisteme. Trebuie însă reţinut faptul că interconectarea sistemelor cu timp discret impune eşantionarea semnalelor implicate în conexiune (intrări, ieşiri, stări).

A) ***Conexiunea serie de sisteme***. Două sisteme conectate ca în fig.6.1 constituie o conexiune serie de sisteme.

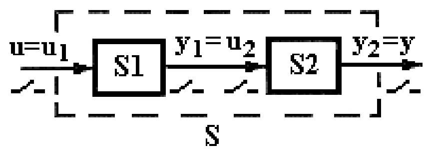

Fig.6.1. *Conexiunea serie.*

Caracterizarea informaţională a conexiunii are la bază următoarele relaţii:

S1: $y_1(\lambda) = H_1(\lambda)u_1(\lambda)$, S2: $y_2(\lambda) = H_2(\lambda)u_1(\lambda)$, (6.1.3)

$\lambda = s$ pentru SL-C sau $\lambda = z$ pentru SL-D ,

$u(\lambda) = u_1(\lambda)$, $y_1(\lambda) = u_2(\lambda)$, $y(\lambda) = y_2(\lambda)$ (6.1.4)

$y(\lambda) = H(\lambda)u(\lambda)$. (6.1.5)

Pe baza relaţiilor (6.1.3) … (6.1.5) se obţine (cu particularizarea $\lambda = s$):

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)}\,\frac{B_2(s)}{A_2(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad . \qquad (6.1.6)$$

Reprezentarea în domeniul pulsaţie: expresiile componentelor f.r.p. $H(j\omega)$ se calculează imediat, şi anume:

$$|H(j\omega)|=|H_1(j\omega)|\,|H_2(j\omega)| , \qquad \underline{/H}(j\omega) = \underline{/H_1}(j\omega) + \underline{/H_2}(j\omega) , \qquad (6.1.7)$$

respectiv, expresiile analitice ale caracteristicilor logaritmice:

$$|H|_{dB} = |H_1|_{dB} + |H_2|_{dB} , \qquad \underline{/H} = \underline{/H_1} + \underline{/H_2} . \qquad (6.1.8)$$

Importanţa practică a relaţiilor (6.1.8) apare la trasarea grafică a caracteristicilor logaritmice de pulsaţie (c.l.p.) aferente SD de ordin mare. In acest caz, f.d.t. $H(s)$ poate fi descompusă în factori sub forma:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \prod_i \frac{B_i(s)}{A_i(s)} \quad . \qquad (6.1.9)$$

Factorii $B_i(s)/A_i(s)$ pot fi reprezentaţi separat prin c.l.p. proprii, iar c.l.p. aferentă sistemului rezultă prin însumarea c.l.p. parţiale (relaţia (6.1.8)).

Exemplul 6.1: Este considerat PC sistem aducţiune-turbină (AT) -generator sincron (GS) caracterizat prin schema bloc din fig.6.2 (a) şi f.d.t. (de aproximare):

$$H_{AT}(s) = 5\,\frac{1-4s}{1+2s} \quad \text{şi} \quad H_{GS}(s) = \frac{2}{1+10s}\,. \qquad (6.1.10)$$

Să se determine f.d.t. aferentă PC şi să se traseze c.l.p. aferente sistemului.

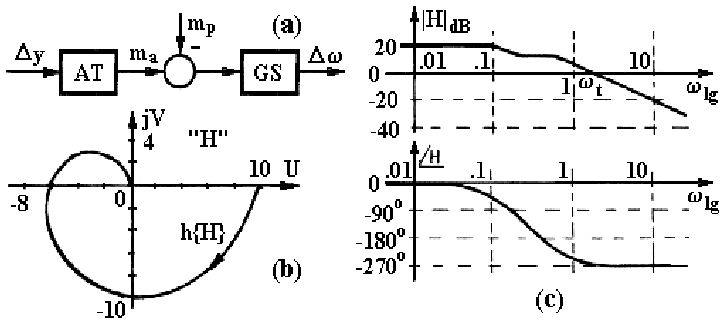

Fig.6.2. *Exemplu de tratare a unei conexiuni serie de ET.*

Soluţie: Fiind vorba de o conexiune serie de subsisteme, se poate scrie:

$$H_{PC}(s) = H_{AT}(s)H_{GS}(s) = \frac{10\,(1-4s)}{(1+2s)(1+4s)}\,. \qquad (6.1.11)$$

Inversele constantelor de timp, $T_d = 4$ sec $T_w = 2$ sec şi $T_m = 10$ sec care apar sunt pulsaţiile de frângere ale c.l.p.; domeniul valorilor ω pentru care se calculează punctele c.d.p., D_ω , se determină ţinând seama de aceste pulsaţii: $\omega_{01}=1/2 = 0.5$, $\omega_{0d}=1/4 = 0.25$, $\omega_{02}=1/10 = 0.1$. Se va alege $D_\omega = [0.01, 10]$; acesta acoperă trei decade, pentru fiecare decadă alegându-se 5 valori ale pulsaţiei (echidistanţate logaritmic). Expresiile c.d.p. aferente sistemului analizat sunt:

$$|H(j\omega)| = \frac{10(1+(4\omega)^2)^{1/2}}{(1+(2\omega)^2)^{1/2}(1+(10\omega)^2)^{1/2}}, \qquad (6.1.12)$$

$$\underline{/H}(j\omega) = -\operatorname{arctg}(2\omega) - \operatorname{arctg}(4\omega) - \operatorname{arctg}(10\omega)\,, \qquad (6.1.13)$$

respectiv c.l.p.:

$$|H|_{dB} = 20\lg(1+(4\omega)^2)^{1/2} - 20\lg(1+(2\omega)^2)^{1/2} - 20\lg(1+(10\omega)^2)^{1/2} + 20\lg 10\,. \quad (6.1.14)$$

Valorile numerice calculate sunt sintetizate în tabelul 6.1. Alurile principiale ale hodografului şi ale c.l.p. sunt redate în fig.6.2 (b) şi (c).

B) ***Conexiunea paralel de sisteme***. Două sisteme conectate ca în fig.6.3 constituie o conexiune paralel de (sub)sisteme. Caracterizarea informaţională a conexiunii are la bază relaţiile (6.1.3) şi relaţiile specifice conexiunii:

Tabelul 6.1. *Datele calculate pentru c.d.p. din exemplul 6.1.*

ω	lg ω	U(ω)	V(ω)	|H(jω)|	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB}$	$\underline{/H}(j\omega)$ [°]
.01	-2	9.82	-1.58	9.95	19.96	-9.14
.0158	-1.8	9.58	-2.46	9.89	19.9	-14.4
.0251	-1.6	8.98	-3.75	9.73	19.76	-22.69
.0398	-1.4	7.65	-5.41	9.38	19.44	-35.3
.0631	-1.2	5.13	-6.96	8.65	18.74	-53.61
.1	-1	1.53	-7.3	7.46	17.46	-78.11
.158	-.8	-1.81	-5.75	6.03	15.61	-107.83
.251	-.6	-3.59	-3	4.68	13.41	-140.05
.398	-.4	-3.55	-.48	3.58	11.08	-172.28
.631	-.2	-2.46	0.94	2.64	8.43	-201.0
1	0	-1.32	1.26	1.83	5.27	-223.68
1.58	.2	-.61	1.05	1.21	1.72	-239.82
2.51	.4	-.25	.74	.78	-2.1	-250.76
3.98	.6	-.1	.48	.5	-6.03	-257.8
6.31	.8	-.04	.31	.31	-10.0	-262.29
10	1	-.01	.19	.2	-13.98	-265.13

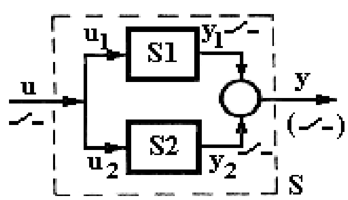

Fig.6.3. *Conexiunea paralel a două sisteme.*

$$u(\lambda) = u_1(\lambda) = u_2(\lambda)\,, \qquad y(\lambda) = y_1(\lambda) + y_2(\lambda)\,. \qquad (6.1.15)$$

Particularizand cazul continuu, în baza relaţiilor (6.1.3) şi (6.1.15), se obţine:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{B_1(s)A_2(s) + B_2(s)A_1(s)}{A_1(s)A_2(s)}\,. \qquad (6.1.16)$$

În domeniul pulsaţie se obţine f.r.p. aferentă sistemului echivalent:

$$H(j\omega) = \sum_{i} \{|H_i(j\omega)|\, e^{j\underline{/H_i}(j\omega)}\} \quad . \qquad (6.1.17)$$

Relaţia (6.1.17) evidenţiază faptul că c.d.p. şi c.l.p. aferente sistemului echivalent trebuie calculate "punct cu punct", nefiind valabile aspectele practice evidenţiate la conexiunea serie (relaţia (6.1.8)).

C) ***Conexiunea cu reacţie a două sisteme***. Două sisteme conectate conform fig.6.4 constituie o conexiune cu **reacţie** (sau în conexiune inversă, ***feedback***). Principial, reacţia poate fi:

- **negativă** "–", cu caracter stabilizator şi esenţialmente utilizată în practica de conducere automată;
- **pozitivă** "+", destabilizatoare, utilizată numai în aplicaţii speciale.

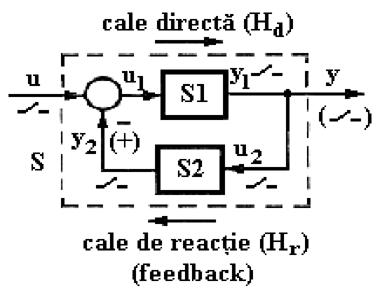

Fig.6.4. *Conexiunea cu reacţie.*

Relaţiile sunt prezentate în cazul ***reacţiei negative*** (–); relaţiile specifice conexiunii sunt:

$$u_1(\lambda) = u(\lambda) - y_2(\lambda) \quad \text{sau} \quad u(\lambda) = u_1(\lambda) + y_2(\lambda)\ ,$$
$$y(\lambda) = y_1(\lambda) = u_2(\lambda)\ . \qquad (6.1.18)$$

Pentru sistemul echivalent, conexiunea S, rezultă imediat (cazul continuu):

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}\ . \qquad (6.1.19)$$

şi, în continuare:

$$H(s) = \frac{B_1(s)B_2(s)}{A_1(s)A_2(s) + B_1(s)B_2(s)}\ . \qquad (6.1.20)$$

În aplicaţiile practice legate de analiza stabilităţii, proiectarea sistemelor cu reglare automată ş.a.m.d. prezintă interes cunoaşterea ***f.d.t. a sistemului deschis***, $H_0(s)$, definită conform relaţiei:

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} \bullet \frac{B_2(s)}{A_2(s)}\,. \qquad . \tag{6.1.21}$$

În baza relaţiei (6.1.19), în domeniul pulsaţie se obţine:

$$H(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)}\,, \tag{6.1.22}$$

Relaţia (6.1.22) indică necesitatea calculului “punct cu punct” al c.d.p. şi c.l.p.. În literatură sunt prezentate şi metode grafo-analitice de determinare a punctelor c.d.p. $H(j\omega)$ bazat pe c.d.p. $H_0(j\omega)$.

În cazul conexiunii inverse directe (reacţie unitate), fig.6.5, $H_2(s) = 1$ şi corespunzător, se poate scrie:

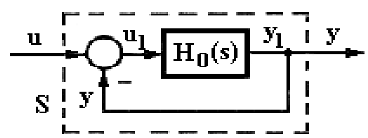

Fig.6.5. *Conexiunea inversă directă.*

$$H_0(s) = H_d(s) = H_1(s)\,, \quad \text{respectiv:} \qquad H(s) = \frac{H_0(s)}{1 + H_0(s)} \tag{6.1.23}$$

6.2. Interconectarea sistemelor fizice

Fie, pentru exemplificare (fig.6.6), două subsisteme SF1 şi SF2 conectate în serie. Dacă se analizează funcţionalitatea sistemului, se constată că pentru caracterizarea completă a comportării sistemului realizat prin interconectare, ansamblul MM ale SF1 şi SF2 considerate independente – ca şi cum ar funcţiona “în gol” – nu este suficient, fiind necesară luarea în considerare a ecuaţiilor de legatură care caracterizează interinfluenţele dintre sistemele cuplate.

În măsura în care ecuaţiile de legatură (efectul acestora) pot fi neglijate, regimul de funcţionare “în sarcină” al subsistemelor poate fi aproximat prin regimul de funcţionare “în gol” şi ansamblul MM ale sistemelor componente va aproxima suficient de bine comportarea SF realizat prin interconectare. În aceste situaţii se vorbeşte despre ***separabilitatea informaţională*** a SF pe subsistemele SF1 şi SF2.

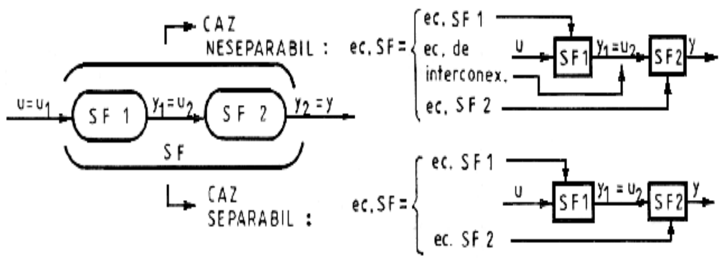

Fig.6.6. *Aspecte legate de separabilitatea informaţională a sistemelor fizice.*

6.6. Studiul sistemelor pe baza schemelor bloc informaţionale

Reprezentarea prin *scheme bloc informaţionale a sistemelor* constituie o metodă cu transparenţă maximă de studiu al structurii şi proprietăţilor acestora. În cele ce urmează sunt tratate două aspecte esenţiale:

- aspecte referitoare la întocmirea schemelor bloc;
- aspecte referitoare la transformarea şi reducerea (complexitatii) schemelor bloc.

Schema bloc informaţională poate fi întocmită atât pentru SD-C cât şi pentru SD-D. Cum procesele conduse care prezintă interes în cadrul cărţii sunt procese continue, aspectele de bază legate de intocmirea schemelor bloc vor fi analizate pentru această categorie de sisteme. Câteva din ***particularităţile specifice sistemelor cu timp discret*** vor fi însă evidenţiate în continuare:

- În cazul conducerii în timp discret, PC continuu va fi reprezentat de o schemă bloc continuă şi interfaţat cu DC prin CAN (ES + ER) şi CAN (ES).
- Conţinutul informaţional al schemelor bloc aferente algoritmilor de reglare numerică serveşte implementării lor pe un echipament de conducere numerică.

A) ***Întocmirea schemelor bloc aferente sistemelor continue***. La întocmirea schemei bloc aferente unui sistem se presupune că intrările şi ieşirile acestuia au fost fixate în prealabil pe baza principiilor constructiv-funcţionale, ţinând seama de transferul cauzal din sistem. Acest lucru este important din două motive:

- Un acelaşi sistem poate avea aceleaşi mărimi fizice, fie mărimi de intrare fie mărimi de ieşire, dependent de regimul în care sistemul este pus să funcţioneze. De exemplu, o maşină electrică poate funcţiona in regim de generator, când are loc conversia “energie mecanică → energie electrică”, sau in regim de motor, când are loc conversia “energie electrică → energie mecanică”.

- Chiar în timpul funcţionării este posibilă schimbarea regimului de funcţionare (de exemplu, din regim de motor în regim de generator sau invers), ceea ce impune ca in schema bloc informationala sa se evidenţieze posibilităţile de modificare a caracterului acestor mărimi (intrare ↔ ieşire) şi a structurii.

Schema bloc aferentă unui sistem se întocmeşte pe baza MM ataşat - ecuaţii primare sau ecuaţii obţinute prin simplificarea, reordonarea sau rearanjarea adecvată a acestora - cu ***parcurgerea următoarelor etape****:*

(1) Ataşarea blocurilor la ecuaţiile ce compun MM al sistemului:

- se analizează fiecare ecuaţie a MM şi – ţinând seama de sensul de transfer al informaţiei – se fixează mărimea de ieşire, iar celelalte mărimi vor apare ca marimi de intrare;
- se separă mărimea de ieşire şi derivatele acesteia în membrul stâng al ecuaţiei, iar în membrul drept mărimile de intrare şi – după caz – şi derivatele acestora;
- se asociază fiecărei ecuaţii unul sau mai multe blocuri, după cum în noua expresie se recunosc sau nu subsisteme tipizate; aspecte aparte apar în cazul ecuaţiilor neliniare, când ataşarea schemei bloc poate ridica dificultăţi.

(2) Întocmirea schemei bloc:

- blocurile anterior ataşate se interconectează prin unirea tuturor intrărilor cu ieşirea de acelaşi nume;
- se reordonează schema astfel obţinută într-formă cât mai uşor interpretabilă.

Referitor la ataşarea schemei bloc informaţionale la un SF se mai fac două ***precizări****:*

- mărimile de intrare şi cele de ieşire din sistem trebuie să-şi păstreze semnificaţia (pentru un regim de funcţionare a SF);
- celelalte mărimi ale SF trebuie să apară cel puţin o dată ca intrări ale unor blocuri şi o dată ca ieşire dintr-un bloc.

Schema bloc astfel obţinută poate conţine atât blocuri liniare cât şi blocuri neliniare. Simplificarea unui MM (primar sau chiar redus) poate fi efectuată cu mult mai mare încredere dacă se dispune de schema bloc informaţională aferentă.

Exemplul 6.3: Să se întocmească schema bloc aferentă PC “sistem de acţionare cu motor de curent continuu” descris de următoarele ecuaţii primare:

$$u_a = K_A u_c \, , \qquad (6.6.1)$$

$$T_a \frac{di_a}{dt} + i_a = \frac{1}{R_a}(u_a - e_M) \quad \text{cu} \quad T_a = \frac{L_a}{R_a} \, , \qquad (6.6.2)$$

$$m = K_m i_a \, , \qquad (6.6.3)$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = m - m_s - m_f \,, \tag{6.6.4}$$

$e_M = K_e\omega$, (6.6.5) $m_f = K_f\omega$, (6.6.6)

$u_i = K_{Ti}i_e$, (6.6.7) $u_\omega = K_T\omega$. (6.6.8)

Soluţie: În aceste ecuaţii sunt recunoscute ET tipizate, după cum urmează (se renunţă la cifrele corespunzătoare paragrafului):
P: (1), (3), (5), (6), (7), (8),
I: (4),
PT1: (2),
pentru care pot fi ataşate simbolizările cunoscute, fig.6.12 (a). Prin interconectarea blocurilor ataşate şi rearanjarea convenabilă a schemei, se obţine schema bloc din fig.6.12 (b).

B) ***Transformarea şi reducerea schemelor bloc***. Asigurarea unei imagini cât mai concludente asupra structurii sistemului necesită adeseori transormarea schemelor bloc informaţionale primare. Mai mult, pe baza schemelor bloc, prin operaţii de transformare se poate asigura ***transformarea*** şi ***reducerea*** schemei la forme adecvate. Această reducere poate fi solicitată:

- pentru compactizarea schemei,
- pentru determinarea f.d.t.,
- în alte scopuri de analiză a sistemului.

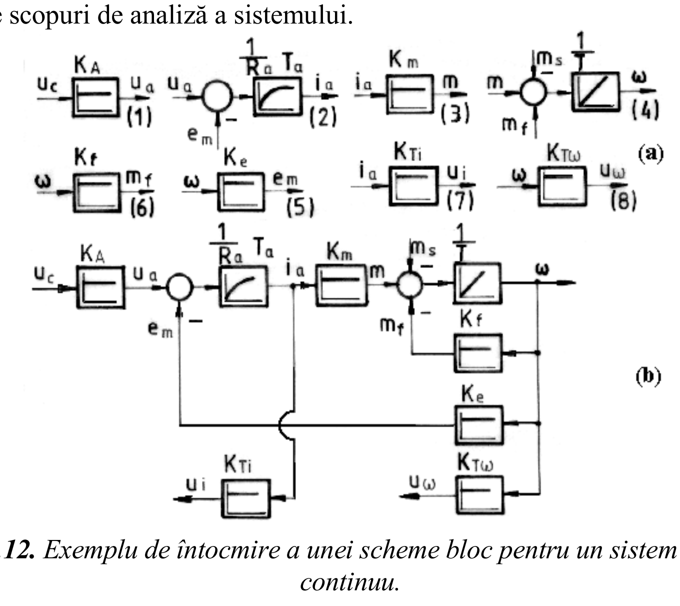

Fig.6.12. *Exemplu de întocmire a unei scheme bloc pentru un sistem cu timp continuu.*

- **Transformarea schemei bloc**: reprezintă operaţia de reaşezare convenabilă a MM / schemei bloc aferente unui sistem. Ea se bazează pe principalele reguli de transformare indicate în fig.6.13, reguli cunoscute şi sub denumirea de ***regulile algebrei schemelor bloc***.
- **Reducerea schemei bloc**: reprezintă operaţia de aducere a schemei bloc la o formă cât mai simplă sau mai convenabilă (dintr-un anumit punct de vedere). Ea se bazează pe regulile de transformare a schemelor bloc precum şi pe recunoaşterea celor trei tipuri de conexiuni de bază de subsisteme şi înlocuirea acestora cu subsisteme echivalente.

Observaţie: Operaţiile cu schemele bloc pot conduce în unele situaţii greşit tratate la modificarea artificială a ordinului sistemului, lucru care nu este acceptabil; din acest motiv, în urma efectuării transformărilor şi reducerilor din schemele bloc este strict necesară ***verificarea conservării ordinului sistemului***.

Exemplul 6.4: Se consideră PC "generator sincron + turbină hidraulică" cu schema bloc dată în fig.6.14. Utilizând regulile de transformare şi de reducere a schemelor bloc, să se determine f.d.t. aferente PC:

$$H_{\Delta\omega\Delta Cm}(s) = \left.\frac{\Delta\omega(s)}{\Delta C_m(s)}\right|_{\Delta u_E=0}, \quad H_{\Delta\omega\Delta uE}(s) = \left.\frac{\Delta\omega(s)}{\Delta u_E(s)}\right|_{\Delta C_m=0}, \qquad (6.6.9)$$

$$H_{\Delta uG\Delta Cm}(s) = \left.\frac{\Delta u_G(s)}{\Delta C_m(s)}\right|_{\Delta u_E=0}, \quad H_{\Delta uG\Delta uE}(s) = \left.\frac{\Delta u_G(s)}{\Delta u_E(s)}\right|_{\Delta C_m=0}.$$

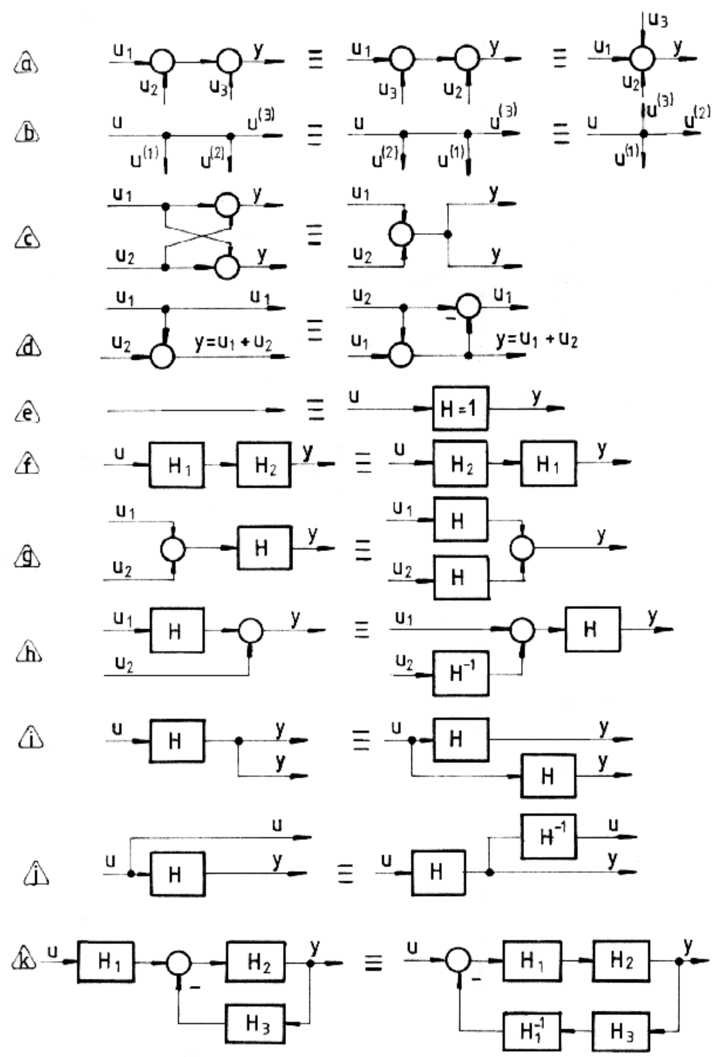

Fig.6.13. *Principalele reguli de transformare a schemelor bloc.*

Soluţie: Pentru exemplificare se consideră doar determinarea f.d.t. $H_{\Delta\omega\Delta Cm}(s)$, celelalte ramânând ca exerciţiu pentru cititor. În acest scop, din schema bloc prezentată în fig.6.13-a se "decupează" doar canalul de transfer care prezintă interes, fig.6.13 (a) exclusiv partea încadrată, care poate fi transformat succesiv la formele din fig.6.13 (b) şi (c).

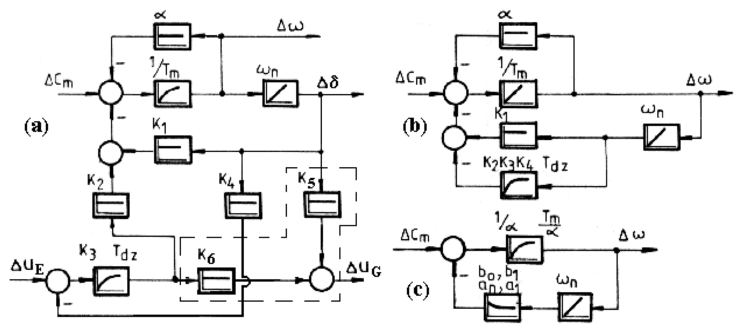

Fig.6.14. *Exemplu privind reducerea schemelor bloc.*

În final, f.d.t. căutată obţine forma următoare:

$$H_{\Delta\omega\Delta Cm}(s) = \frac{(1/T_m)\, s\, (s+1/T_{dz})}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \qquad (6.6.10)$$

cu:

$$a_0 = \omega_n(K_1 - K_2K_3K_4)/(T_mT_{dz}), \qquad a_1 = (\alpha + K_1T_{dz}\omega_n)/(T_mT_{dz}),$$
$$a_2 = \alpha/T_m + 1/T_{dz} \qquad . \qquad (6.6.11)$$

BIBLIOGRAFIE

[A1] Åström, K.J. şi B. Wittenmark: Computer Controlled Systems – Theory and Design, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
[A2] Åström, K.J. şi T. Hägglund: „Benchmark Systems for PID Control", Preprints of IFAC Workshop on Digital Control: Past, Present and Future of PID Control", editori: J. Quevedo şi T. Escobet, Terassa, Spain, pp. 181-182, 2000.
[A3] Åström, K.J. şi T. Hägglund: PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, 2nd edition, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.

Capitolul 2
Bibliografie

[A4] Arnautovic, D.B. şi D.M. Skataric: „Suboptimal Design of Hydroturbine Governors”, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 6, no. 3, pp. 438 – 444, 1991.

[A5] Anderson, B.D.O. şi J.B. Moore: Optimal Control. Linear Quadratic Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[B1] Barbu, V.: Ecuaţii diferenţiale, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[C1] Coleman, T., M.A. Branch şi A. Grace: MATLAB Optimization Toolbox User's Guide, Mathworks Inc., Natick, MA, 1999.

[C2] Călin, S., M. Tertişco, I. Dumitrache, C. Popeea şi D. Popescu: Optimizări în automatizări industriale, Editura Tehnică, Bucureşti, 1979.

[D1] Dumitrache, I., S. Dumitriu, I. Mihu, F. Munteanu, Gh. Muscă şi G. Calcev: Automatizări electronice, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[D2] Dragomir, T.-L. şi St. Preitl: Elemente de teoria sistemelor şi reglaj automat, curs, vol. 1 şi 2, Lito I.P.T.V. Timişoara, 1979.

[D3] DIN 40719, Deutsche Industrie Normen, 1978.

[D4] Dragomir, T.-L.: Tehnici de optimizare, Curs, vol. 1, Litografia I.P.T.V.T., Timişoara, 1987.

[D5] Dorato, P., C.-L. Shen şi W. Yang: Robust Control Systems Design, China Aviation Industry Press, Beijing, 1996.

[E1] Eykhoff, P.: Identificarea sistemelor, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.

[F1] Franklin, G.F., J.D Powell şi M.L. Workman: Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1998.

[H1] Hoppe, M. şi S. Tešnjak: „Modellbildung und Simulation des dynamischen Verhaltens von Wasserkraftanlagen”, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Mess- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 20, Bochum, 1983.

[I1] Ionescu, Vl.: Teoria sistemelor. Sisteme liniare, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

[I2] Isermann, R.: Digitale Regelungssysteme, vol. I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[I3] IEEE Working Group on Prime Mover and Energy Models for System Dynamic Performance Studies: „Hydraulic Turbine and Turbine Control Models for System Dynamic Studies”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 7, no. 1, pp. 167 – 178, 1992.

[I4] Ionescu, Vl. şi C. Popeea: Optimizarea sistemelor, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[K1] Kessler, C.: „Über die Vorausberechnung optimal abgestimmter Regelkreise. Teil III. Die optimale Einstellung des Reglers nach dem Betragsoptimum”, Regelungstechnik, vol. 3, pp. 40 – 49, 1955.

Capitolul 2
Bibliografie

[L1] Landau, I.D.: Identificarea şi comanda sistemelor, Editura Tehnică, Bucureşti, 1997.

[M1] Matlab. User's Guide, Mathworks Inc., Natick, MA, 1988.

[M2] Marlin, T.E.: Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance, McGraw-Hill, 1995.

[M3] Middleton, R.H. şi G.C. Goodwin: Digital Control and Estimation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

[M4] Müller, H.-W.: „Algorithmen für die digitale Drehzahlregelung von Wasserturbinen", Schriftenreihe des Lehrstuhls für Mess- und Regelungstechnik, Abt. Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 23, Bochum, 1984.

[N1] Nourescu, Al. şi Al. Vasiliu: „Valorificarea energetică a resurselor hidraulice din România", Energetica, vol. 22, no. 6-7, pp. 224 – 240, 1974.

[P1] Preitl, St. şi R.-E. Precup: Introducere în ingineria reglării automate, Editura Politehnica, Timişoara, 2001.

[P2] Preitl, St.: Teoria sistemelor şi reglaj automat, curs, vol. 1, partea 1 Teoria sistemelor, Lito U.T. Timişoara, 1992.

[P3] Penescu, C., G. Ionescu, M. Tertişco şi E. Ceangă: Identificarea experimentală a proceselor automatizate, Editura Tehnică, Bucureşti, 1971.

[P4] Preitl, St., A. Fogaraşi şi R.-E. Precup: Teoria sistemelor şi reglaj automat. Ingineria reglării automate, culegere de probleme, vol. 1, partea 1, Lito U.T. Timişoara, 1994.

[P5] Preitl, St., A. Fogaraşi şi R.-E. Precup: Teoria sistemelor şi reglaj automat. Ingineria reglării automate, probleme rezolvate şi comentate, vol. 2, Lito U.T. Timişoara, 1994.

[P6] Preitl, St., R.-E. Precup şi A. Porumb: Elemente de reglare automată, curs, vol. 1, Lito U.P. Timişoara, 1996.

[P7] Precup, R.-E., St. Preitl, St. Kilyeni, St. şi B. Luştrea: „Fuzzy Speed and Voltage Control of a Hydrogenerator", Preprints of Fifth Symposium on Application of Multivariable System Techniques – AMST'94, editor: R. Whalley, Mechanical Engineering Publications Limited, London, pp. 151-158, 1994.

[P8] Preitl, St., R.-E. Precup şi A. Porumb: „Behaviour of ARW Structures in the Case of Control Systems with Essantial Delays", Fourth International Symposium on Automatic Control and Computer Science – SACCS'93, Iaşi, vol. 1, pp. 222-227, 1993.

[P9] Precup, R.-E. şi St. Preitl: Sisteme de reglare avansată, Curs, vol. 1, Litografia U.T.T., Timişoara, 1995.

Capitolul 2
Bibliografie

[P10] Precup, R.-E.: Soluţii de conducere fuzzy a sistemelor cu fază neminimă. Aplicaţii la conducerea hidrogeneratoarelor, Editura Orizonturi Universitare, Timişoara, 2000.
[P11] Pivovarov, V.A.: Proiectirovanie i rasciet sistem regulirovania ghidroturbin, Maşinostroenie, Leningrad, 1973.
[R1] Răsvan, Vl.: Teoria stabilităţii, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1987.
[S1] Stănăşilă, O.: Analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
[S2] Simulink. Dynamic System Simulator for Use with Matlab, Mathworks Inc., Natick, MA, 1988.
[S3] Sângeorzan, D.: Regulatoare adaptive, Editura Militară, Bucureşti, 1992.
[S4] Sima, V. şi A. Varga: Practica optimizării asistate de calculator, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.
[T1] Tertişco, M. şi P. Stoica: Identificarea şi estimarea parametrilor sistemelor, Editura Academiei, Bucureşti, 1987.
[T2] Tertişco, M., P. Stoica şi Th. Popescu: Identificarea asistată de calculator a sistemelor, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.
[V1] Voicu, M.: Tehnici de analiză a stabilităţii sistemelor automate, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.
[V2] Varga, A. şi V. Sima: Ingineria asistată de calculator a sistemelor automate, Editura Tehnică, Bucureşti, 1997.