Taller 2. Puntos teoricos

Punto 1.1

Demostracion de la formula alternativa para la estimacion de la segunda derivada discreta:

A partir de la formula general de la derivada de f evaluada en un punto i

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

Se puede obtener la segunda derivada, haciendo la derivada de la formula anterior.

Tomando cada termino de la primera derivada se obtiene que,

$$f'(x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+2}) - f(x)}{2h}$$

$$f'(x_{i-1}) = \frac{f(x) - f(x_{i-2})}{2h}$$

Ahora reemplazando estos terminos en la ecuacion inicial,

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{2h}\left[\frac{f(x_{i+2}) - f(x)}{2h} - \frac{f(x) - f(x_{i-2})}{2h}\right]$$

Y haciendo las operaciones algebraicas correspondientes

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{1}{2h}\left[\frac{f(x_{i+2}) - f(x) - [f(x) - f(x_{i-2})]}{2h}\right]$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{1}{2h}\left[\frac{f(x_{i+2}) - f(x) - [f(x) - f(x_{i-2})]}{2h}\right]$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{f(x_{i+2}) - f(x) - f(x) + f(x_{i-2})}{4h^2}$$

Obtenemos la formula alternativa para la segunda derivada discreta

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x) + f(x_{i-2})}{4h^2}$$

Punto 1.4

a). La expresion matematica utilizada para el calculo de la segunda derivada $D^2f(x)$ es:

$$D^2f(x) = \frac{1}{h^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} M[m+1]f(x_{n-m})$$

Punto 1.5

Demostrar la cuarta derivada $D^4f(xj)$ y el orden de aproximacion $O(h^k)$

Para poder hallar la cuarta derivada vamos a empezar con la formula correspondiente a la primera derivada

$$Df(xj) = \frac{f(x_{j+1}) + f(x_j)}{h}$$

Luego, se halla la derivada de la primera derivada, para poder determinar la segunda derivada

$$D^2f(xj) = \left[\frac{f(x_{j+2}) - f(x_{j+1})}{h} - \frac{f(x)}{h}\right]\frac{1}{h}$$

$$D^2f(xj) = \left[\frac{f(x_{j+2}) - f(x_{j+1}) - [f(x_{j+1}) - f(x)]}{h}\right]\frac{1}{h}$$

$$D^2f(xj) = \left[\frac{f(x_{j+2}) - f(x_{j+1}) - f(x_{j+1}) + f(x)}{h}\right]\frac{1}{h}$$

$$D^2f(xj) = \left[\frac{f(x_{j+2}) - 2f(x_{j+1}) + f(x)}{h}\right]\frac{1}{h}$$

$$D^2f(xj) = \frac{f(x_{j+2}) - 2f(x_{j+1}) + f(x)}{h^2}$$

Teniendo la segunda derivada, se procede a hallar la derivada de la segunda derivada, es decir la tercera derivada

$$D^3f(xj) = \left[\frac{f(x_{j+3}) - f(x_{j+2})}{h} - \frac{2\left[f(x_{j+2}) - f(x_{j+1})\right]}{h} - \frac{f(x)}{h}\right]\frac{1}{h^3}$$

$$D^3f(xj) = \left[\frac{f(x_{j+3}) - f(x_{j+2}) - 2f(x_{j+2}) + 2f(x_{j+1}) - f(x)}{h}\right]\frac{1}{h^2}$$

$$D^3f(xj) = \left[\frac{f(x_{j+3}) - 3f(x_{j+2}) + 3f(x_{j+1}) - f(x)}{h}\right]\frac{1}{h^2}$$

$$D^3f(xj) = \frac{f(x_{j+3}) - 3f(x_{j+2}) + 3f(x_{j+1}) - f(x)}{h^3}$$

Luego de obtener la tercera derivada, ahora si podemos hallar la cuarta derivada a partir de la derivada de la tercera derivada

$$D^4f(xj) = \frac{f(x_{j+4}) - f(x_{j+3})}{h} - \frac{3\left[f(x_{j+3}) - f(x_{j+2})\right]}{h} + \frac{3\left[f(x_{j+2}) - f(x_{j+1})\right]}{h}$$

$$-\frac{\left[f(x_{j+1}) - f(x)\right]}{h} \cdot \frac{1}{h^3}$$

$$D^4f(xj) = \frac{f(x_{j+4}) - f(x_{j+3})}{h} - \frac{3f(x_{j+3}) + 3f(x_{j+2})}{h} + \frac{3f(x_{j+2}) - 3f(x_{j+1})}{h}$$

$$-\frac{f(x_{j+1}) + f(x)}{h} \cdot \frac{1}{h^3}$$

$$D^4f(xj) = \left[\frac{f(x_{j+4}) - 4f(x_{j+3}) + 6f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + f(x_j)}{h}\right]\frac{1}{h^3}$$

Y se obtiene la cuarta derivada:

$$D^4f(xj) = \frac{f(x_{j+4}) - 4f(x_{j+3}) + 6f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + f(x_j)}{h^4}$$

Para determinar el orden se usara la serie de Taylor:

Derivada Progresiva

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^3f(x)}{dx^3}h^3 + \frac{1}{4}\frac{d^4f(x)}{dx^4}h^4 + ...$$

Derivada Regresiva

$$f(x-h) = f(x) - \frac{df(x)}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2} - \frac{1}{3}\frac{d^3f(x)}{dx^3}h^3 + \frac{1}{4}\frac{d^4f(x)}{dx^4}h^4 - ...$$

Hallaremos la derivada central, para poder despejar el termino de la sucesion correspondiente a la cuarta derivada, pero antes de eso sumaremos las derivadas regresivas y progresivas con el fin de cancelar los impares y poder despejar los pares, y ademas, vamos a considerar hasta el termino de la sexta derivada en la sucesion.

$$f(x+h) + f(x-h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}h^2 + \frac{1}{3}\frac{d^3f(x)}{dx^3}h^3 + [f(x) - \frac{df(x)}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}h^2 - \frac{1}{3}\frac{d^3f(x)}{dx^3}h^3 + \frac{1}{4}\frac{d^4f(x)}{dx^4}h^4 + \frac{1}{6}\frac{d^6f(x)}{dx^6}h^6$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + 2\frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}h^2 + 2\frac{1}{4}\frac{d^4f(x)}{dx^4}h^4 + 2\frac{1}{6}\frac{d^6f(x)}{dx^6}h^6$$

Luego de sumar y cancelar algunos terminos se obtiene:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{d^2f(x)}{dx^2}h^2 + \frac{1}{2}\frac{d^4f(x)}{dx^4}h^4 + \frac{1}{3}\frac{d^6f(x)}{dx^6}h^6$$

Se despeja $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$:

$$\frac{1}{2}\frac{d^4f(x)}{dx^4} + \frac{1}{3}\frac{d^6f(x)}{dx^6}h^6 = f(x+h) - 2f(x) - \frac{d^2f(x)}{dx^2}h^2 + f(x-h)$$

Reorganizando la ecuacion

$$f(x+h) - 2f(x) - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} h^2 + f(x-h) = \frac{1}{2}\frac{d^4 f(x)}{dx^4} h^4 + \frac{1}{3}\frac{d^6 f(x)}{dx^6}(h^6)$$

Continuando con el despeje,

$$2\left[f(x+h) - 2f(x) - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} h^2 + f(x-h)\right] = \frac{d^4 f(x)}{dx^4} h^4 + \frac{1}{3}\frac{d^6 f(x)}{dx^6} h^6$$

Es importante no despejar $\frac{1}{3}\frac{d^6 f(x)}{dx^6} h^6$, ya que este termino es el que indicara el orden que tendra la cuarta derivada.

Por lo que se procede a dividir a ambos lados entre h^4.

$$\frac{2\left[f(x+h) - 2f(x) - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} h^2 + f(x-h)\right]}{h^4} = \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \frac{1}{3}\frac{d^6 f(x)}{dx^6} h^6 \frac{1}{h^4}$$

$$\frac{2\left[f(x+h) - 2f(x) - \frac{d^2 f(x)}{dx^2} h^2 + f(x-h)\right]}{h^4} = \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \frac{1}{3}\frac{d^6 f(x)}{dx^6} h^2$$

Posterior al despeje de $\frac{d^4 f(x)}{dx^4}$

Ahora, nos centramos ahora en el termino que esta al lado de este, el cual es $\frac{1}{3}\frac{d^6 f(x)}{dx^6} h^2$ para poder determinar $O(h^k)$.

Vemos que el exponente de h, es decir k en este termino es de 2. Entonces, concluimos que el orden de la cuarta derivada $\dfrac{d^4 f(x)}{dx^4}$ es de $O(h^2)$.