3. Hacer los pasos intermedios para encontrar la regla de Simpson simple, Ecuacion (1.87).

Como es Simpson simple se usará un polinomio de segundo grado $P(x) = Ax^2 + Bx + C$. Y, como es simpson 1/3 se van a considerar tres puntos, final, medio e inicial, a, m y b.

Donde el intervalo de aproximación quedaría como

$\Omega = (a, P(a)); (m, P(m)); (b, P(b))$

Para este ejercicio se modificaran un poco las constantes. Donde a sera igual a $-h$, b será igual a h y m será 0

Entonces, nuestro intervalo modificado nos que da como

$\Omega = (h, P(-h)); (0, P(0)); (h, P(h))$

Primero, se calcula la integral del polinomio de grado 2, quedaría como

$$= \int_{h}^{-h} (Ax^2 + Bx + C) \cdot dx$$
$$= \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx$$

Evaluando en los extremos h y $-h$

$$= \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(-\frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} - Ch\right)$$
$$= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch$$
$$= \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)$$

Ahora evaluando el polinomio en cada punto:

$P(h) = A \cdot h^2 + B \cdot h + C$

$P(0) = A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C = C$

Es decir $P(0) = C$

$P(-h) = A \cdot (-h)^2 - B \cdot h + C$

Sumando $P(h)$ y $P(-h)$

$P(h) + P(-h) = A \cdot h^2 + B \cdot h + C + A \cdot (-h)^2 - B \cdot h + C$

$P(h) + P(-h) = 2A \cdot h^2 + 2C$

Despejando $2A \cdot h^2$

$P(h) + P(-h) - 2C = 2A \cdot h^2$

Ahora, lo anterior se reemplaza en el resultado obtenido de la integral evaluada en h y $-h$

$= \frac{h}{3} \left(P(h) + P(-h) - 2C + 6C\right)$

$= \frac{h}{3} \left(P(h) + P(-h) + 4C\right)$

Como $P(0) = C$ reemplazamos y nos queda

$= \frac{h}{3} \left(P(h) + P(-h) + 4P(0)\right)$

Esto se puede reescribir como

$= \frac{h}{3} \left(P(-h) + 4P(0) + P(h)\right)$

Ahora, volviendo a nuestro intervalo de aproximacion inicial $\Omega = (a, P(a)); (m, P(m)); (b, P(b))$

La ecuacion la podríamos volver a escribir como

$= \frac{h}{3} \left(P(a) + 4P(m) + P(b)\right)$

Y asi llegamos a la ecuacion correspondiente a la *(1.87)* de las notas del curso.

4. Verificar el resultado presentado en la Ecuacion (1.89).

El error en la formula de Newton-Cotes esta dado por

$$E(f) = \frac{h^{n+2} f^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \int_0^n t^2(t-1)...(t-n)dt$$

Ahora, el error en el metodo o regla de Simpson 1/3 en en un intervalo (a, b) con una discretizacion par $n = 2$ y con $h = \dfrac{b-a}{2}$ es

$$E = \frac{t^4 f'''}{3!} \cdot \int_0^2 t \cdot (t-1) \cdot (t-2)dt$$

$$E = \frac{h^4 f'''}{3!} \cdot \int_0^2 (t^3 - 3t^2 + 2t)dt$$

$$E = \frac{h^4 f'''}{3!} \cdot \int_0^2 \frac{t^4}{4} - \frac{3t^3}{3} + \frac{2t^2}{2}dt$$

$$E = \frac{h^4 f'''}{3!} \cdot \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2$$

Evaluando en los extremos 0 y 2:

$$E = \frac{h^4 f'''}{3!} \cdot \frac{16}{4} - 8 + 4 - (0 - 0 + 0)$$

$$E = \frac{h^4 f'''}{3!} \cdot 4 - 8 + 4$$

$$E = \frac{h^4 f'''}{3!} \cdot 8 - 8$$

$$E = \frac{h^4 f'''}{3!} \cdot 0$$

$$E = 0$$

De esa manera, por medio de la formula de newton cotes se llega a que el error es cero.