Metodos computacionales
Algebra lineal
Ejercicio 4 (teorico)

1. Se construye una matriz cuadrada nxn con n filas y n columnas,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Se procede a hacer la eliminacion de la matriz para ponerla en forma triangular inferior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Comenzamos despejando desde la primera fila hasta la ultima. Entonces, obtenemos la primera ecuacion proveniente de la primera fila de la matriz:

$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$

Fila 2:

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

$x_2 = \frac{1}{a_{22}}b_2 - a_{21}x_1$

Fila 3:

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

$x_3 = \frac{1}{a_{33}}b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2$

Fila 4:

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$

$x_4 = \frac{1}{a_{44}} b_4 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3$

Continuamos de esa manera sucesivamente con el despeje hasta la ultima fila,

Fila n:

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + ... + a_{nn}x_n = b_n$

$x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n - a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + ... + a_{nn-1}x_{n-1}$

Notamos que, en general, en este metodo hay un patron para el despeje de cada x:

(a) Una division entre el elemento que se encuentra en la digonal, de la matriz (2), en la fila i y columna i a_{ii}.

(b) Hay una multiplicacion.

  i. El primer termino de esta multiplicacion es el termino correspondiente del vector b a la fila considerada i.

  ii. Los demas terminos que componen la multiplicacion son una resta entre los demas elementos de la matriz (2), o los que no se encuentran en la digonal y son distintos de cero, es decir los elementos que hacen parte del triangulo inferior a_{ij} (donde $j<i$), los cuales estan multiplicados por su variable x_j correspondiente.

Entonces, podemos escribir de forma simplificada la solucion general de cada x como la siguiente ecuacion:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot b_i - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j \tag{3}$$