~~Regla del trapecio~~ Punto 1

La Regla del trapecio es usada para dar una aproximación de una integral.

Usando un polinomio de primer orden tenemos:

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$ a y b es el intervalo de integración

Lo que queremos ahora es la integral, la cual es equivalente al area del ~~a~~ trapezoide

$$\underbrace{A = I}_{\text{Integral}} = \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{función}} dx$$

sustituimos f(x) por la definición de $P_1(x)$

Regla del punto medio

$$= \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

n son la cantidad de puntos entre [a,b]

$$\approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$\approx \Delta x\left(\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(x_N)+f(x_0)}{2}\right)$$

$$\approx \boxed{\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}$$

Punto 2.

Error

El error es la diferencia entre la integral y Tn:

$$E = \int_a^b f(x)dx - T_n(f) =$$

Si tenemos $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ $\quad h = \frac{b-a}{n}$

$$E_1 = \int_a^{a+h} f(x)\,dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)] = -\frac{h^3}{12} f''(c)$$

$$E_2 = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx - \frac{h}{2}[f(x_{j-1}) + f(x_j)] = -\frac{h^3}{12} f''(\gamma_j)$$

siendo $x_{j-1} \leq \gamma_j \leq x_j$

$$E(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\gamma_1) - \cdots - \frac{h^3}{12} f''(\gamma_n)$$

$$= -\frac{h^3 n}{12}\left[\frac{f''(\gamma_1) + \cdots + f''(\gamma_n)}{\cancel{12}\ n}\right]$$

$$\min_{a \leq x \leq b} f''(x) \leq \xi(h) \leq \max_{a \leq x \leq b} f''(x)$$

Dado que $f''(x)$ es continua sabemos que debe haber un numero c_n en el intervalo $[a, b]$ que sea:

$$f''(c_n) = \xi_n$$

Ademas $hn = b - a$

$$E(f) = -\frac{h^3 n}{12}\left[\frac{f''(\gamma_1) + \cdots + f''(\gamma_n)}{n}\right]$$

$$= -\frac{h^2 (b-a)}{12} f''(c_n) \rightarrow \text{Formula del error}$$