

Metodos computacionales
Algebra lineal
Ejercicio 4 (teorico)

1. Se construye una matriz cuadrada $n \times n$ con n filas y n columnas,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Se procede a hacer la eliminacion de la matriz para ponerla en forma triangular inferior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Comenzamos despejando desde la primera fila hasta la ultima. Entonces, obtenemos la primera ecuacion proveniente de la primera fila de la matriz:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Fila 2:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}b_2 - a_{21}x_1$$

Fila 3:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2$$

Fila 4:

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$$

$$x_4 = \frac{1}{a_{44}}b_4 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3$$

Continuamos de esa manera sucesivamente con el despeje hasta la ultima fila,

Fila n:

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - a_{n4}x_4 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}$$

Notamos que, en general, en este metodo hay un patron para el despeje de cada x :

- (a) Una division entre el elemento que se encuentra en la digonal, de la matriz (2), en la fila i y columna i a_{ii} .
- (b) Hay una multiplicacion.
 - i. El primer termino de esta multiplicacion es el termino correspondiente del vector b a la fila considerada i .
 - ii. Los demas terminos que componen la multiplicacion son una resta entre los demas elementos de la matriz (2), o los que no se encuentran en la digonal y son distintos de cero, es decir los elementos que hacen parte del triangulo inferior a_{ij} (donde $j < i$), los cuales estan multiplicados por su variable x_j correspondiente.

Entonces, podemos escribir de forma simplificada la solucion general de cada x como la siguiente ecuacion:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot b_i - \sum_{j=i-1}^n a_{ij}x_j \quad (3)$$