空气与气体动力学

张科

3.10. 在某点向流场中不断加入有色颗粒，这些有色颗粒随流体一起运动，试问这些颗粒所组成的是流线还是迹线

是迹线

脉线！

3.11. 看完足球赛从大门相继离散而去的人流，在刚出门时它们相对位置可以连成不同的曲线，试问这类曲线相当于流体运动中的什么线，为什么

脉线！

3.7 已知速度场，$u=2y^2$，$v=3x$，$w=0$。

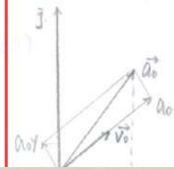
(1) 试计算(1,2)点的速度和加速度。(2) 求加速度平行于速度矢量方向的分量。

(3) 求加速度垂直于速度矢量的分量。

解：(1) 速度 $\vec{v}_0=4\vec{i}+3\vec{j}$

加速度 $\vec{a}=\frac{D\vec{v}}{Dt}=\frac{Du}{dt}\vec{i}+\frac{Dv}{Dt}\vec{j}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v\right)\vec{j}=12xy\vec{i}+6y^2\vec{j}$

把(1,2)代入得 $\vec{a}_0=24\vec{i}+24\vec{j}$



$$\begin{cases}\frac{4}{5}a_{ox}-\frac{3}{5}a_{oy}=24\\ \frac{3}{5}a_{ox}+\frac{4}{5}a_{oy}=24\end{cases}$$

解之得 $\begin{cases}a_{ox}=33.6\\ a_{oy}=4.8\end{cases}$

平行分量为 33.6

垂直分量为 4.8

④

3.7. (1) $\vec{v}=2y^2\vec{i}+3x\vec{j}$

@ $\vec{V}(1,2)=8\vec{i}+3\vec{j}$

$$\vec{a}=\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}$$

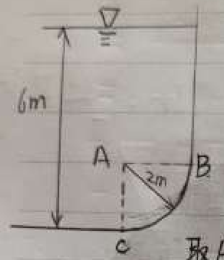
$$=0+2y^2(3\vec{j})+3x(4y\vec{i})$$

$$=12xy\vec{i}+6y^2\vec{j} \qquad \vec{a}(1,2)=24\vec{i}+24\vec{j}$$

(2) $$a_{\parallel}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{V}}{|\vec{V}|}=\frac{8\times24+3\times24}{\sqrt{8^2+3^2}}=30.9$$

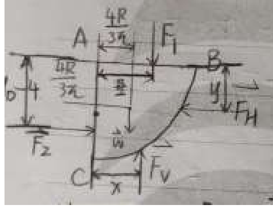
$$a_{\perp}=\sqrt{|\vec{a}|^2-|a_{\parallel}|^2}=\sqrt{24^2\times2-30.9^2}=14.04$$

2-20



$l=3m.\ R=2m$

取ABC围成的单位宽度的流团体团分析



$W=\rho g\cdot\frac{1}{4}(\pi R^2)=\frac{\rho g\pi R^2}{4}$

$F_1=\rho g(H-R)R$

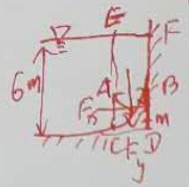
$F_2=\rho g(H-R+\frac{R}{2})R$

$=\rho g(H-\frac{R}{2})R$

2.20 (1)

$L_{BD}=2m$

解: $F_x=P_c\cdot A=\rho g h_c\cdot A$



$=10^3\times9.8\times(4+1)\times2\times3$

$=2.94\times10^5N$

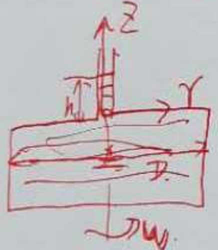
$F_y=G_{V_{EFC}}=\rho g\cdot(V_{EFBA}+V_{ABC})$

$=10^3\times9.8(\underbrace{4}_{L_{AE}}\times\underbrace{2}_{L_{AB}}\times\underbrace{3}_{宽}+\frac{\pi\times2^2}{4}\times3)$

$=3.28\times10^5N.$

合力作用线过A点，因为曲面上任意微元受力均过A点。

2.28. 解：选坐标如图. 旋转时液体内：



$$-\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$$

r向：$-\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho w^2 r$ $\quad \frac{\partial P}{\partial r} = \rho w^2 r$

z向：$-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g = 0$ $\quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$

θ向：$-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ $\quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$

$$\Rightarrow dP = \rho w^2 r dr - \rho g dz$$

选 $r=0$，$z=h$ 处为参考点，此处 $P = P_{atm}$

$$P - P_{atm} = \rho w^2 (r^2 - 0) - \rho g (z - h)$$

液体内任一点压强：$P = P_{atm} + \rho w^2 r^2 - \rho g (z - h)$

顶盖处 $z=0$：$P(r,z) = P_{atm} + \rho w^2 r^2 + \rho g h$

③

顶盖受力 $F = \int_0^{D/2} [P(r,z) - P_{atm}] 2\pi r dr$

$$= \int_0^{\frac{D}{2}} (\rho w^2 r^2 + \rho g h) 2\pi r dr$$

$$= \left(\frac{\pi \rho w^2}{2} r^4 + \pi \rho g h r^2\right)\Big|_0^{\frac{D}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{64} \rho w^2 D^4 + \frac{\pi \rho g h D^2}{4}$$

$$= \frac{\pi}{64} \rho D^2 (w^2 D^2 + 16 g h)$$

回顾：

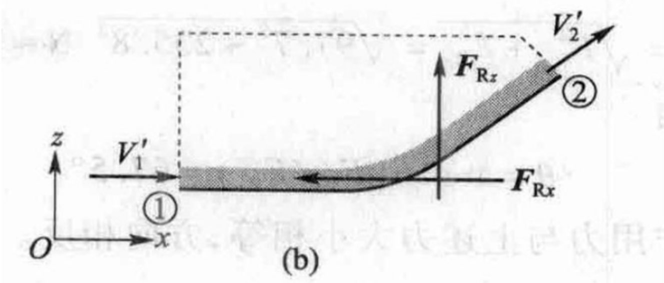
1.雷诺输运定理：$\frac{dN}{dt}_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\eta\rho d\mathcal{V} + \int_{CS}\eta\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

2.连续性方程（质量守恒）：$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$

3.动量方程：$\sum\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec{V}\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})dS$

4.能量方程：$\dot{Q} + \dot{W}_{轴} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}(\hat{u} + \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

5.应用。

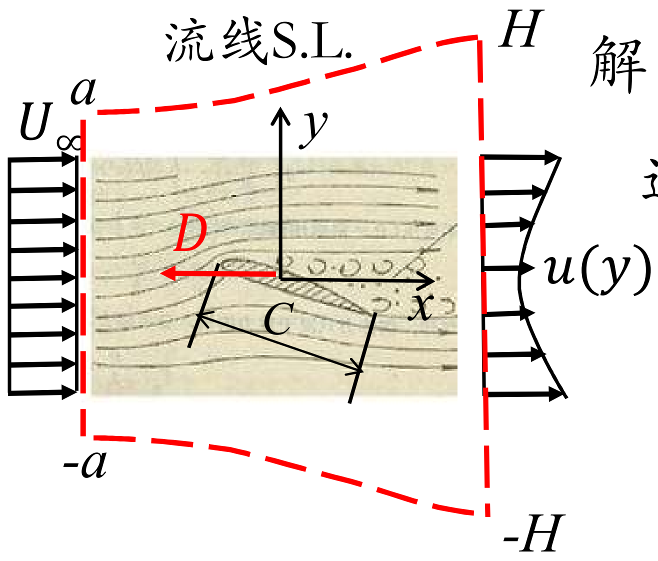


V=$V_1 = 30m/s$

V_r=V_1-$V_0 = 20m/s$

4.5 动量方程（牛顿第二定律）

例 4.　Drag force on an airfoil. 假设2D、定常、远场压力均匀、展长为b。



解：选C.V.如图所示。上下面上$\vec{V}\perp\vec{n}$；前后面上$\vec{V}//\vec{n}$。

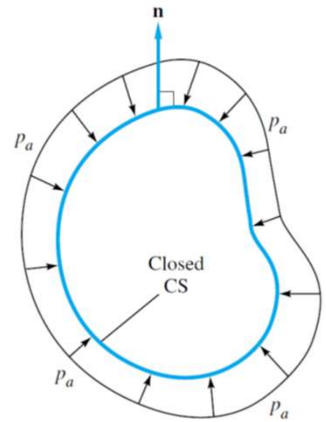
连续性方程：$\int_{CS}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$　（定常不可压）

$$\int_{-a}^{a}-U_\infty b dy+\int_{-H}^{H}u(y)\,b dy=0$$

$$-2aU_\infty+\int_{-H}^{H}u(y)\,dy=0$$

$$\int_{-H}^{H}u(y)\,dy=2aU_\infty \qquad ①$$

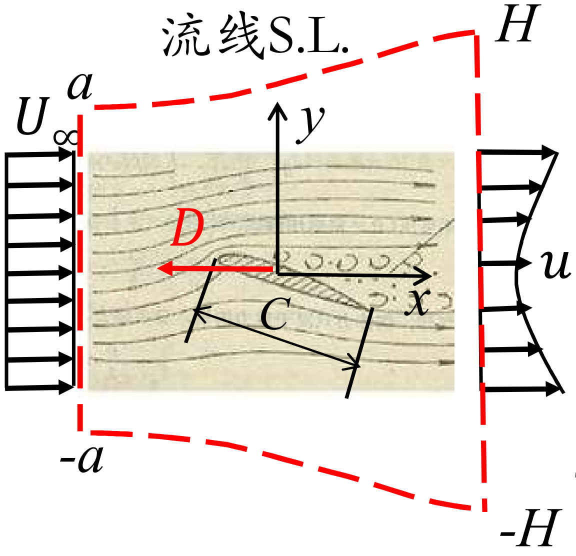
x方向动量方程：　$-D=\int_{CS}u\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$



均匀压力场在闭合面上合力为0!

4.5 动量方程（牛顿第二定律）

例 4. Drag force on an airfoil. 假设2D、定常、远场压力均匀、展长为b。



解：选C.V.如图所示。上下面上$\vec{V}\perp\vec{n}$；前后面上$\vec{V}//\vec{n}$。

x方向动量方程：$-D=\int_{CS}u\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

$$=\int_{-a}^{a}-U_\infty\rho U_\infty b dy+\int_{-H}^{H}\rho u^2(y)\,b dy$$

$$=[\int_{-H}^{H}u^2(y)\,dy\;-U^2{}_\infty 2a]\,b\rho$$

$\int_{-H}^{H}u(y)\,dy=2aU_\infty$ ①

$$=[\int_{-H}^{H}u^2(y)\,dy\;-\int_{-H}^{H}u(y)U_\infty dy\,]\,b\rho$$

$$D=\rho b\int_{-H}^{H}u\,(y)\,[U_\infty-u(y)]dy$$

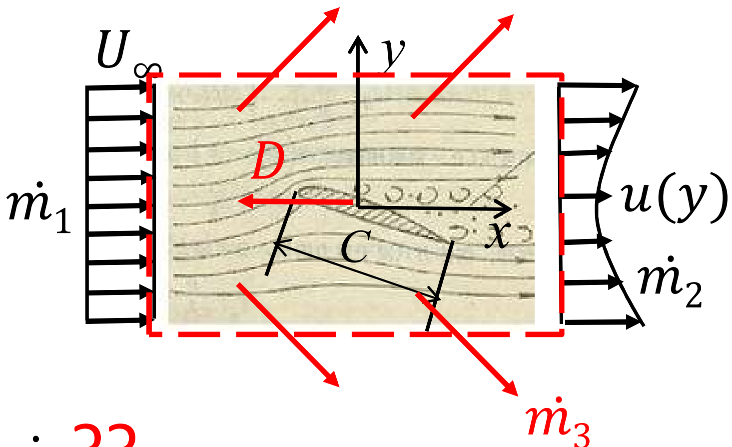
$$C_D=\frac{D}{0.5\rho U^2{}_\infty bC}=\frac{2}{C}\boxed{\int_{-H}^{H}\frac{u\,(y)}{U_\infty}\,[1-\frac{u\,(y)}{U_\infty}]dy}=\frac{2}{C}\theta$$

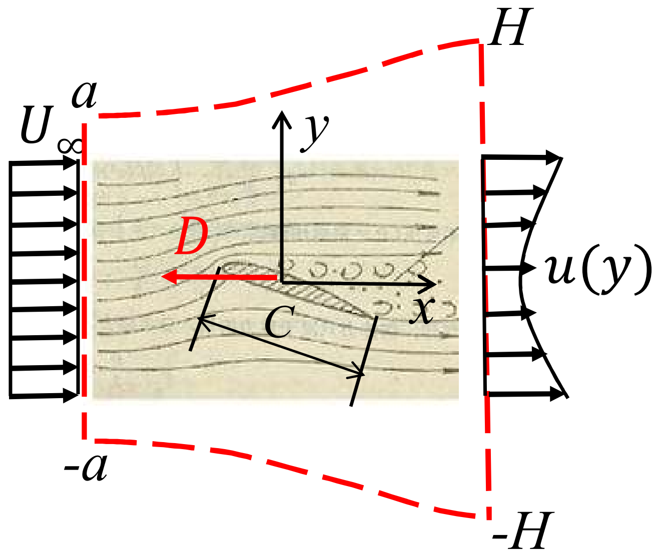
θ动量厚度！

翼型受力向右，为阻力！

4.5 动量方程（牛顿第二定律）

例 4. Drag force on an airfoil. 假设2D、定常、远场压力均匀、展长为b。





$\dot{m}_1 \cancel{=} \dot{m}_2$??

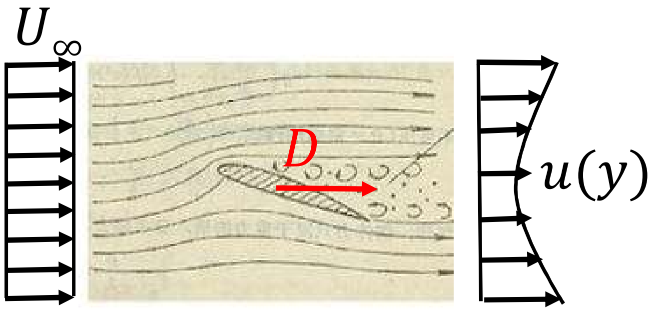
$\dot{m}_1 > \dot{m}_2$

$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$

上下面上$\vec{V} \perp \vec{n}$；前后面上$\vec{V} // \vec{n}$。

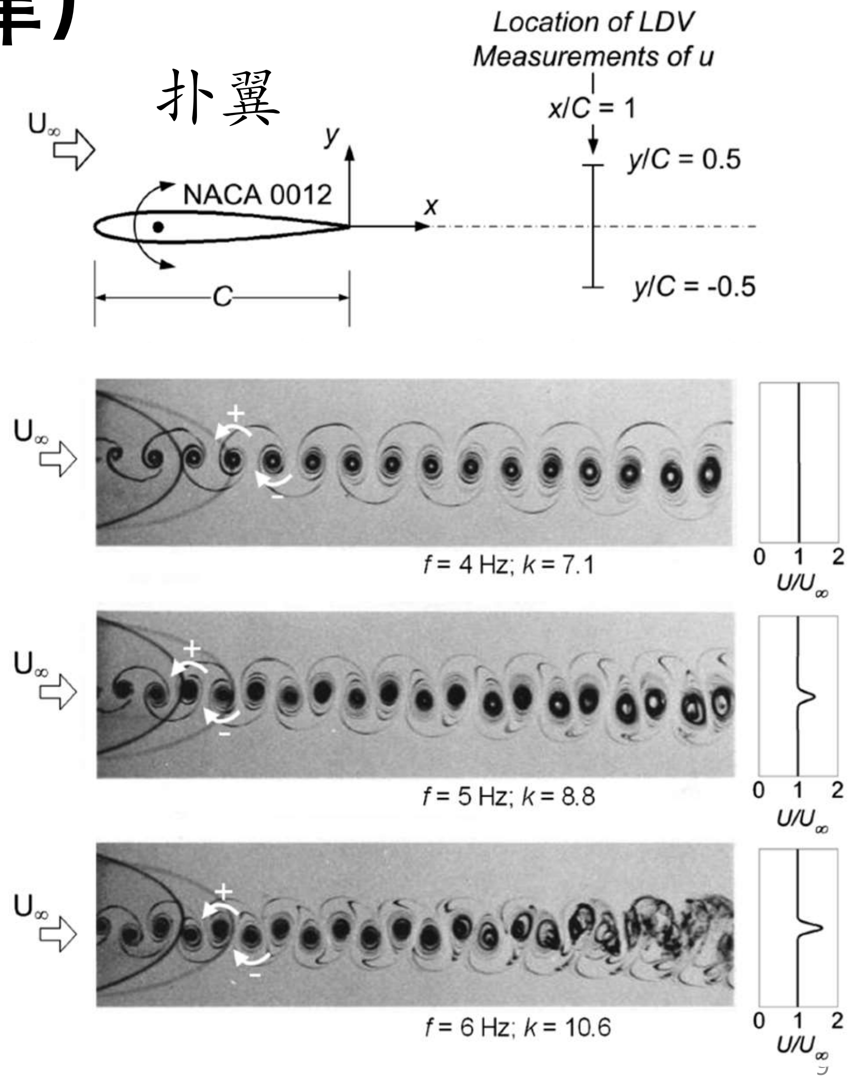
4.5 动量方程（牛顿第二定律）

例 4. Drag force on an airfoil.



飞机推力如何产生？鸟类呢？

扑翼



4.6 能量方程（热力学第一定律）：

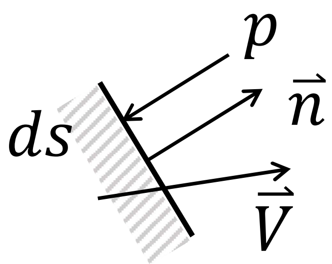
$$\dot{Q}+\dot{W}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS} e\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

- $e=\hat{u}+\dfrac{V^2}{2}+gz$
- $\dot{Q}=\int_{CS}(\vec{q}\cdot\vec{n})dS$， $\vec{q}$单位面积热流率。
- $\dot{W}=\dot{W}_{轴}+\dot{W}_p+\cancel{\dot{W}_v}$　　$\dot{W}_p=\int_{CS}-p(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$　　$\dot{W}_v=\int_{CS}\vec{\tau}\cdot\vec{V}\,dS$

旋转机械作功　压力作功　粘性力作功

壁面：$\vec{V}=0\rightarrow\dot{W}_v=0$

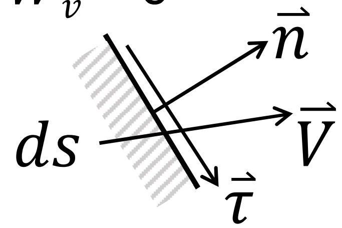
出入口：$\vec{\tau}\perp\vec{V}\rightarrow\dot{W}_v=0$



$$\dot{W}=\vec{F}\cdot\vec{V}$$

$$d\dot{W}_p=(-p\vec{n}dS)\cdot\vec{V}=-p(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

$$d\dot{W}_v=(\vec{\tau}dS)\cdot\vec{V}=\vec{\tau}\cdot\vec{V}\,dS$$



4.6 能量方程（热力学第一定律）：

$$\dot{Q}+\dot{W}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}e\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

◆ $e=\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz$ $\dot{W}=\dot{W}_{轴}+\dot{W}_p+\dot{W}_v$ $\dot{W}_p=\int_{CS}-p(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$ $\dot{W}_v\approx 0$

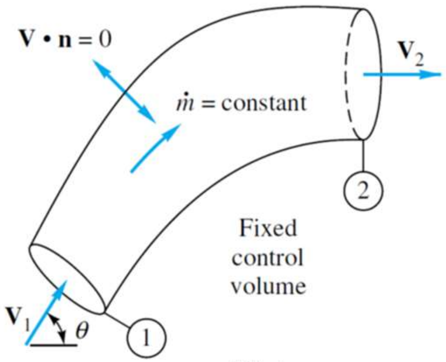
$$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}\boxed{-\int_{CS}p(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\boxed{\int_{CS}e\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}$$

$$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}\left(e+\frac{p}{\rho}\right)\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

$$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}\left(\underbrace{\hat{u}}_{内能}+\underbrace{\frac{V^2}{2}}_{动能}+\underbrace{gz}_{势能}+\underbrace{\frac{p}{\rho}}_{压力能}\right)\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

$\hat{u}=CvT$， $h=\hat{u}+\frac{p}{\rho}=C_pT$ （焓）

4.6 能量方程：$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho dV+\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$



定常：$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

1D：$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\sum\dot{m}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})$

$$=\dot{m}\left(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_{out}-\dot{m}\left(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_{in}$$

若$\dot{Q}=\dot{W}_{轴}=0$，$\hat{u}+\boxed{\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}}=\text{constant}$

机械能

$$\boxed{h+\frac{V^2}{2}+gz=\text{constant}}=\text{H}$$ 伯努利常数

投票　最多可选1项

设置

是否理解能量方程各项物理含义：

A　可以

B　基本可以

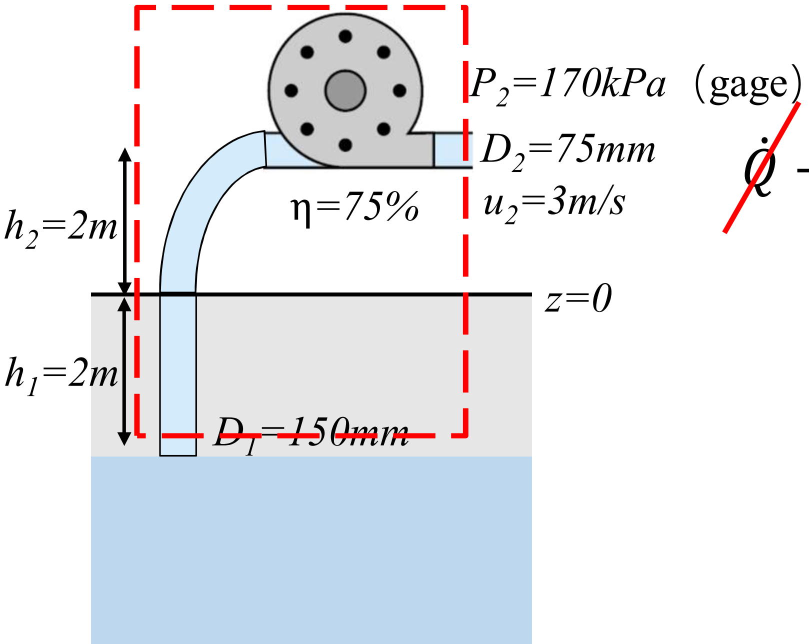
C　有困难

提交

4.6 能量方程： $\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho dV\!\!\!/+\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

例 1. 水泵从地下抽水，抽水管入口在海平面下2m处。进水管径150mm，
6.13
出水管径75mm，流速3m/s，出水管在海平面上2m，出水口压力表读数为170kPa,泵效率75%。求：水泵所需功率？（绝热定常不可压恒温出入口速度均匀）

$\dot{Q}=0 \quad \frac{\partial}{\partial t}=0$



解：选C.V.如图。能量方程：

$$\cancel{\dot{Q}}+\dot{W}_{轴}=\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}} e\rho dV\!\!\!/+\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

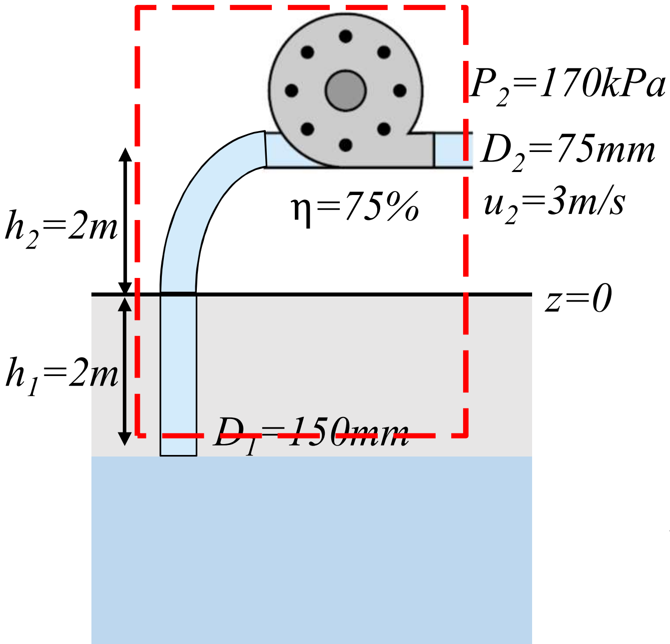
$$\dot{W}_{轴}=\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

$$=\dot{m}\left(\hat{u}_2+\frac{V_2^{\ 2}}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho}\right)-\dot{m}\left(\hat{u}_1+\frac{V_1^{\ 2}}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho}\right)$$

4.6 能量方程：$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho d\forall+\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

例 1. 水泵从地下抽水，抽水管入口在海平面下2m处。进水管径150mm，出水管径75mm，流速3m/s，出水管在海平面上2m，出水口压力表读数为170Pa,泵效率75%。求：水泵所需功率？（绝热、定常、不可压、恒温、出入口速度均匀）。

6.13



解：$\dot{W}_{轴}=\dot{m}\left(\hat{u}_2+\frac{V_2^{\ 2}}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho}\right)-\dot{m}\left(\hat{u}_1+\frac{V_1^{\ 2}}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho}\right)$

入口处：$z_1=-h_1$，$p_1=p_{atm}+\rho g h_1$

$$\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{p_{atm}+\rho g h_1}{\rho}-gh_1=\frac{p_{atm}}{\rho}$$

也可以
$u_2\rightarrow V_1$

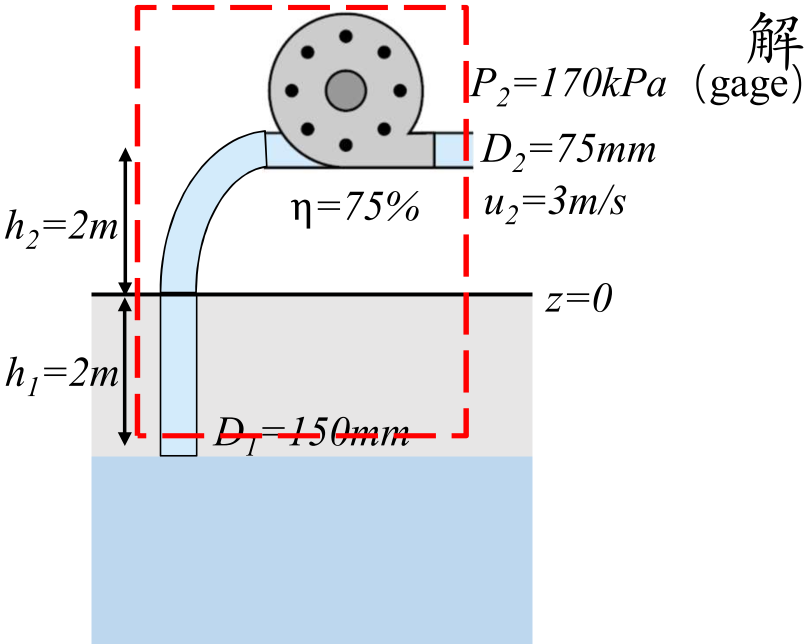
$V_1\approx 0$　恒温：T不变 $\rightarrow \hat{u}_1=\hat{u}_2$

$$\dot{W}_{轴}=\dot{m}\left(\frac{V_2^{\ 2}}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho}\right)-\dot{m}\left(\frac{p_{atm}}{\rho}\right)=\dot{m}\left(\frac{V_2^{\ 2}}{2}+gz_2+\frac{p_2-p_{atm}}{\rho}\right)$$

4.6 能量方程：$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

例 1. 水泵从地下抽水，抽水管入口在海平面下2m处。进水管径150mm，出水管径75mm，流速3m/s，出水管在海平面上2m，出水口压力表读数为170Pa,泵效率75%。求：水泵所需功率？（绝热定常不可压恒温出入口速度均匀）。

6.13



解：

$$\dot{W}_{轴}=\dot{m}\left(\frac{V_2^{\,2}}{2}+gz_2+\frac{p_2-pat_m}{\rho}\right)$$

$$=\rho u_2\frac{\pi D_2^{\,2}}{4}\left(\frac{u_2^{\,2}}{2}+gh_2+\frac{p_2-pat_m}{\rho}\right)$$

$$=1000\times3\times\frac{\pi0.075^2}{4}\left(\frac{3^2}{2}+9.8\times2+\frac{170\times1000}{1000}\right)$$

$$=2.57kW$$

$$\dot{W}_{泵}=\dot{W}_{轴}/\eta=3.43kW$$

4.6 能量方程：

$$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}\left(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

定常： $$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\int_{CS}\Big(\underbrace{\hat{u}}_{内能}+\underbrace{\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}}_{机械能}\Big)\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

不可压：$\hat{u}$来自机械能损失　粘性→不可逆机械能损失→摩擦生热→内能/散热

绝热： $\dot{Q}=0$　损失 $Losses=\int_{CS}\hat{u}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=\dot{m}\frac{V^2}{2}\underbrace{K}_{损失系数}=\dot{m}g\underbrace{\boxed{h_L}}_{损失水头高度}$

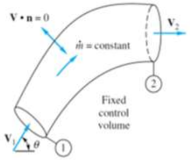
$$\dot{W}_{轴}=Losses+\int_{CS}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

无外功： $\dot{W}_{轴}=0$　$Losses+\underbrace{\int_{CS}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}_{机械能流率}=0$

4.6 能量方程： $\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho d\forall+\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

定常、不可压、$\dot{Q}=\dot{W}_{轴}=0$：

$Losses=\int_{CS}\hat{u}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$



$$Losses+\int_{CS}(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$$

1D（沿流管）：$Losses+\dot{m}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_2-\dot{m}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_1=0$

$$Losses=\dot{m}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_1-\dot{m}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_2$$ 机械能损失→内能增加

无损失（无粘）：$\dot{m}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_1=\dot{m}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_2$

$$\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)=constant$$ 伯努利方程 Bernoulle's Equation

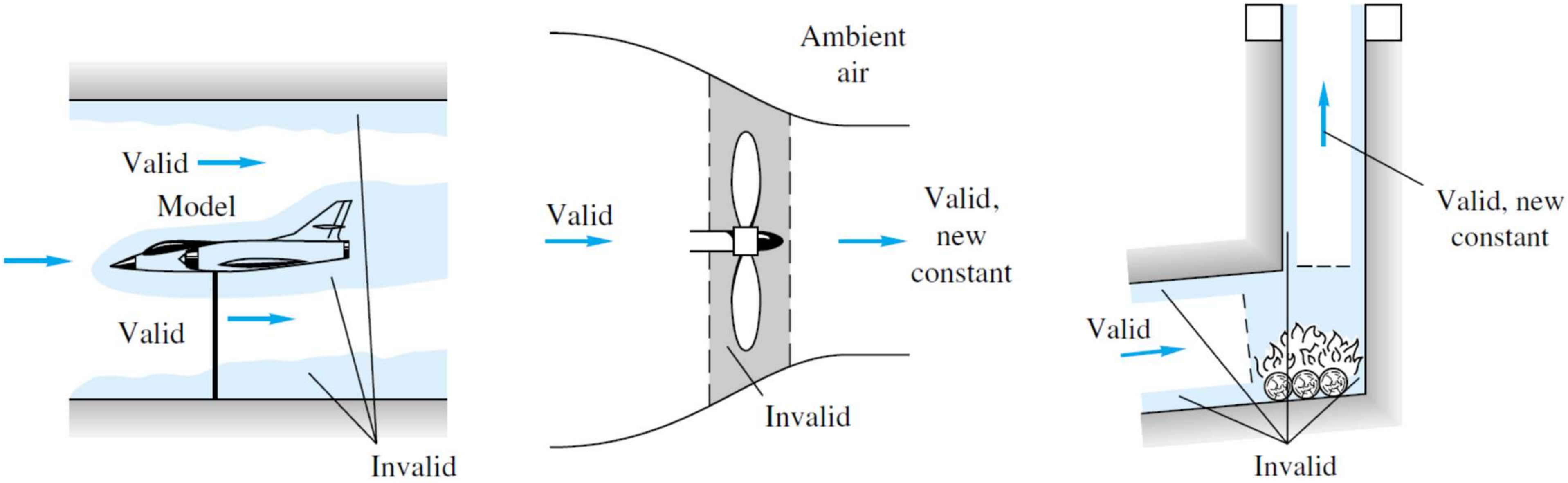
机械能=动能+势能+压力能，沿流线不变 $\left(\frac{V^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}\right)=C$

条件：无粘、不可压、定常、沿流线、$\dot{Q}=\dot{W}_{轴}=0$

4.6 能量方程：

$$\left(\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = constant$$ 伯努利方程 Bernoulle's Equation

条件：无粘、不可压、定常、沿流线、$\dot{Q} = \dot{W}_{轴} = 0$



投票 最多可选1项

设置

是否能正确理解能量方程简化为伯努利方程过程与条件？

A 可以

B 基本可以

C 有困难

提交

作业:

复习笔记!

P243 . 6.11, 6.12，4.10，4.14

多多练习！（4.12）

回顾：

1.能量方程： $\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\cancel{V}+\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

定常、不可压、$\dot{Q}=\dot{W}_{轴}=0$：$Losses+\int_{CS}(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

$Losses=\int_{CS}\hat{u}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=\dot{m}\frac{V^2}{2}K=\dot{m}gh_L$

定常、不可压、无粘、沿流线、$\dot{Q}=\dot{W}_{轴}=0$: $\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)=constant$

伯努利方程 Bernoulle’s Equation

2.方程熟记，理解物理含义，熟练应用。