# 空气与气体动力学

张科

回顾：

1.面元法；

2.翼型阻力；

3.失速：后缘失速，前缘短气泡，前缘长气泡；

4.改善失速方法：前缘缝翼，后缘襟翼。

# 十. 绕有限翼展机翼不可压流动（空5）





机翼形状特点、原因？

# 十. 绕有限翼展机翼不可压流动（空5）


F-15

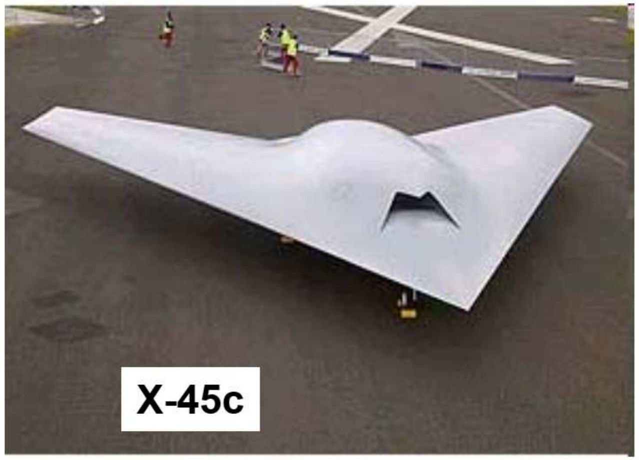

F-22


歼-10


歼-20

机翼形状特点、原因？

# 十. 绕有限翼展机翼不可压流动（空5）



# 十. 绕有限翼展机翼不可压流动(空5)

**10.1 机翼几何、气动参数**

**10.2 下洗和诱导阻力**

**10.3 涡丝**

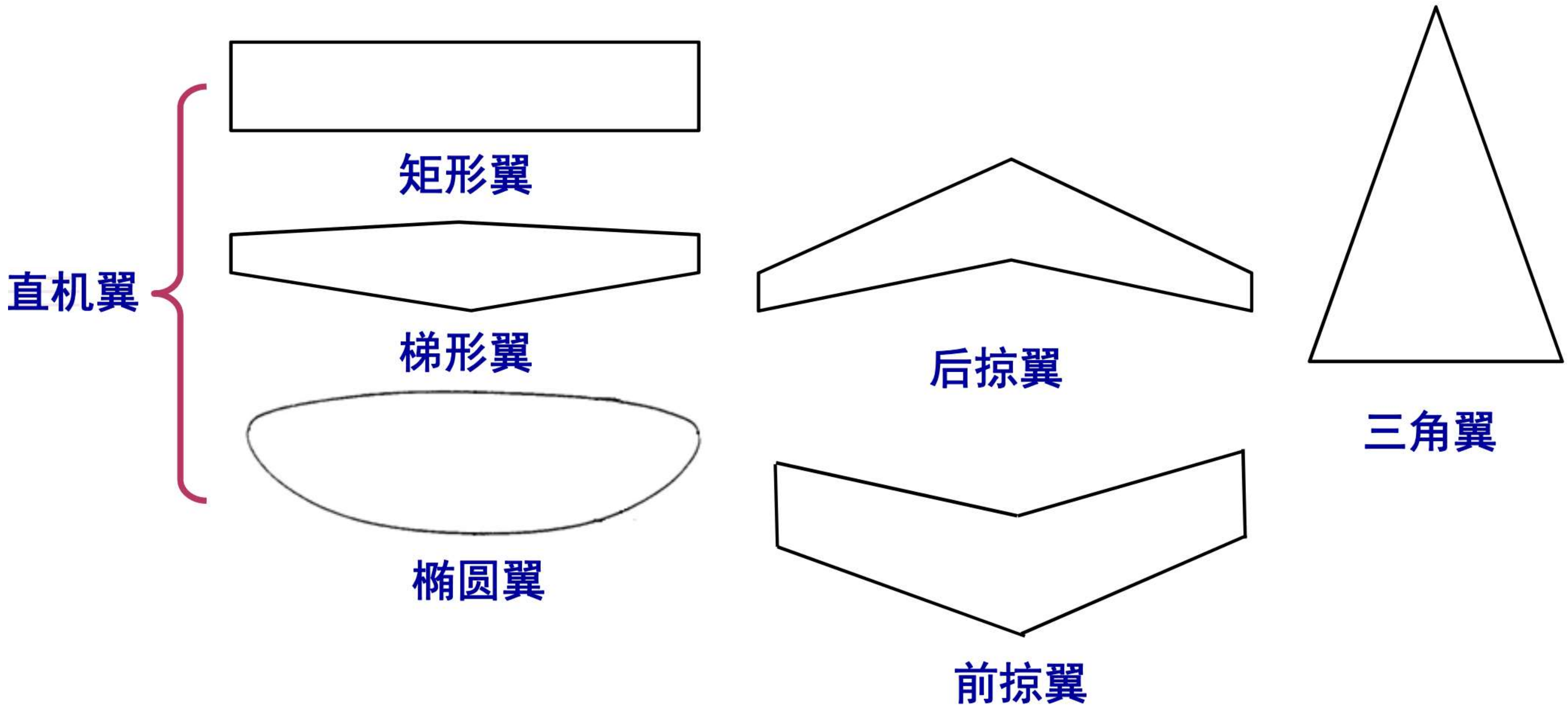
**10.4 普朗特经典升力线理论**

**10.5 升力面理论、涡格法**

机翼形状特点,
机翼气动特点,
绕机翼不可压势流。

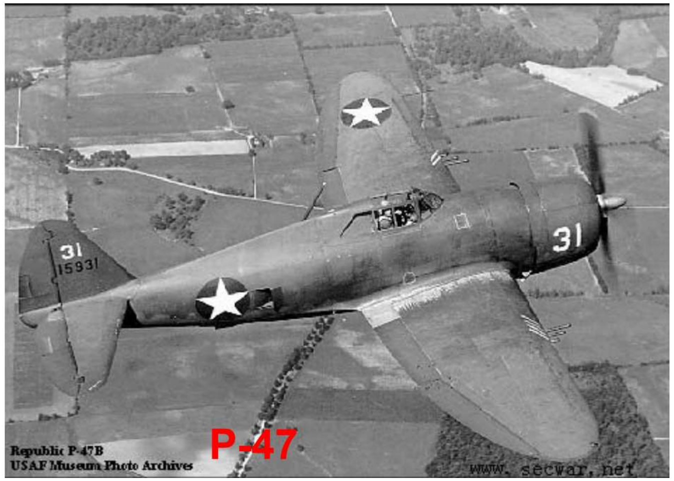
# 10.1 机翼几何、气动参数

1. 机翼几何形状：



# 10.1 机翼几何、气动参数

1. 机翼几何形状：


S-37

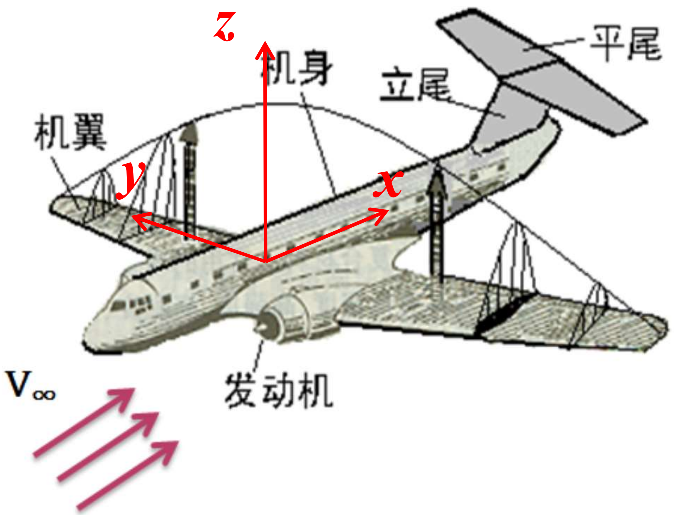


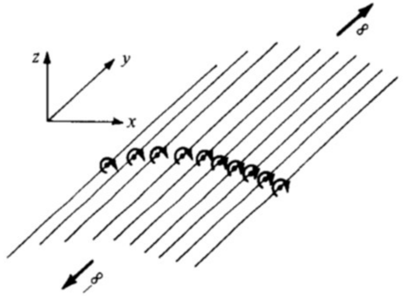


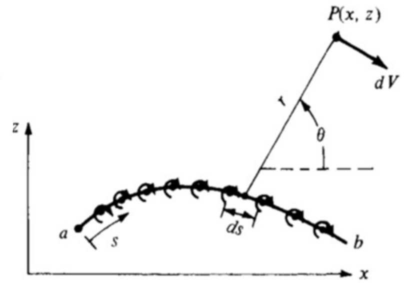
歼-10

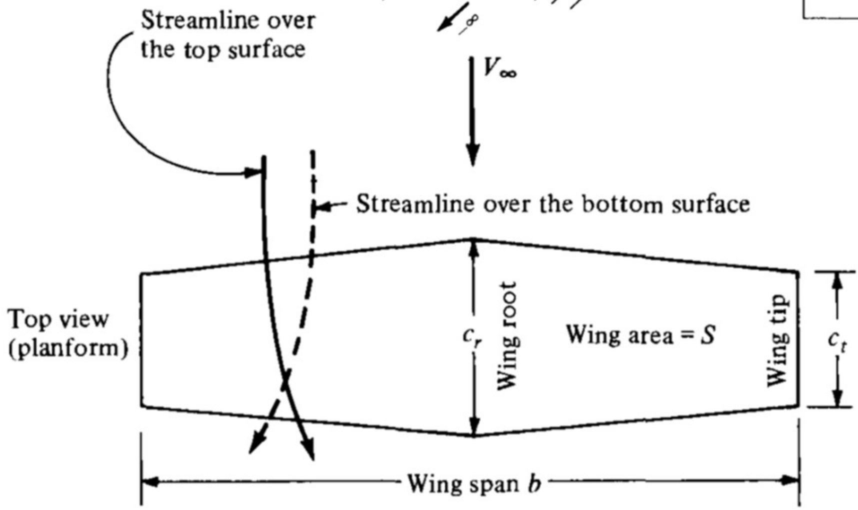
# 10.1 机翼几何、气动参数

## 2. 机翼几何参数：






翼弦：$c$，翼剖面沿机身方向弦长

翼展：$b$，左右翼尖间长度

机翼面积：$S$，机翼在$xoy$投影面积

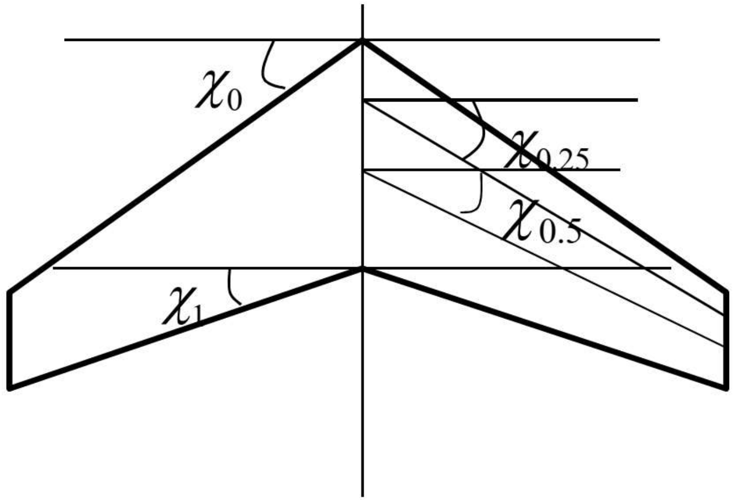
平均弦长：$c_{av} = \frac{S}{b}$

展弦比：$AR = \frac{b}{c_{av}} = \frac{b^2}{S}$

根稍比：$\eta = \frac{c_r}{c_t}$

# 10.1 机翼几何、气动参数

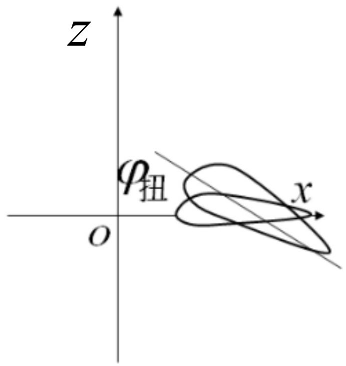
2. 机翼几何参数：





上/下反角：机翼与水平面夹角

几何扭转角$\varphi_{扭}$：剖面弦线相对翼根处弦线夹角



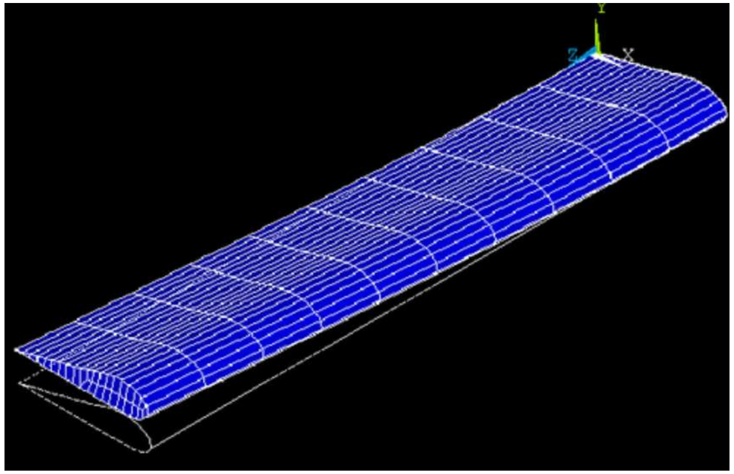

后掠角：$\chi$，机翼与y轴夹角

前缘$\chi_0$、后缘$\chi_1$、$\frac{1}{4}c$处$\chi_{0.25}$、$\frac{1}{2}c$处$\chi_{0.5}$

# 10.1 机翼几何、气动参数

## 2. 机翼几何参数：

几何扭转角$\varphi_{扭}$：剖面弦线相对翼根处弦线夹角




气动扭转：不同$y$处翼型不同

# 10.1 机翼几何、气动参数

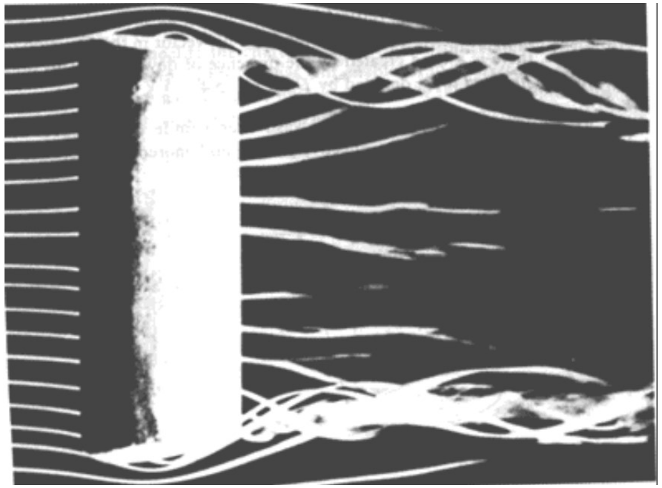
3. 机翼气动参数：

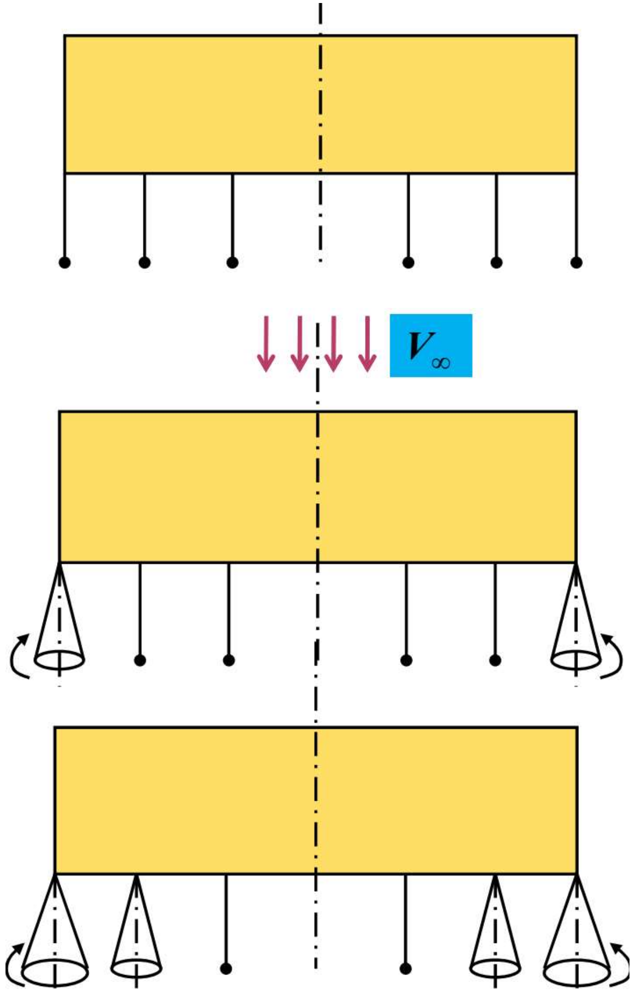
二维翼型： $L', D', M'$ $C_l, C_d, C_d$ $C_l = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho V^2{}_\infty c}$

三维翼型： $L$ , $D$ , $M$ $C_L, C_D, C_M$ $C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2{}_\infty S}$

# 10.2 下洗和诱导阻力(5.2)

1. 翼尖涡：



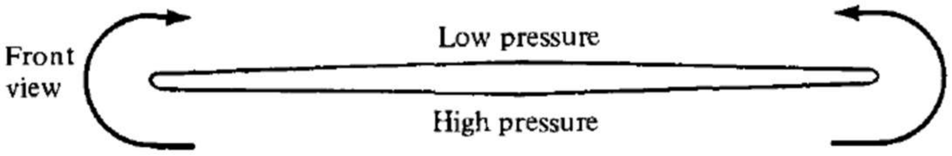


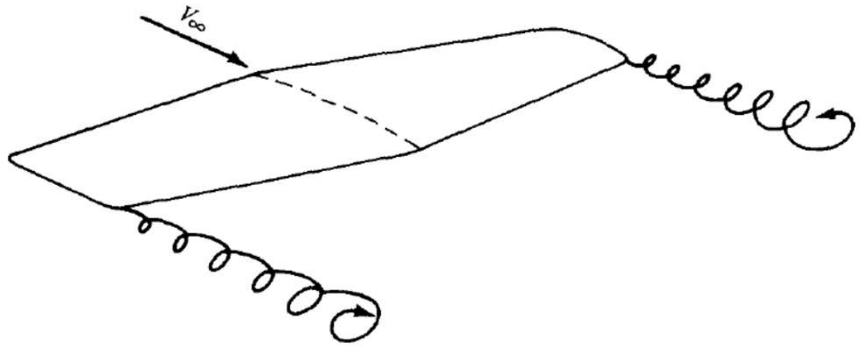

绕机翼流动是三维的，后缘存在涡系(尾涡系)；
翼尖处强，翼根处弱。

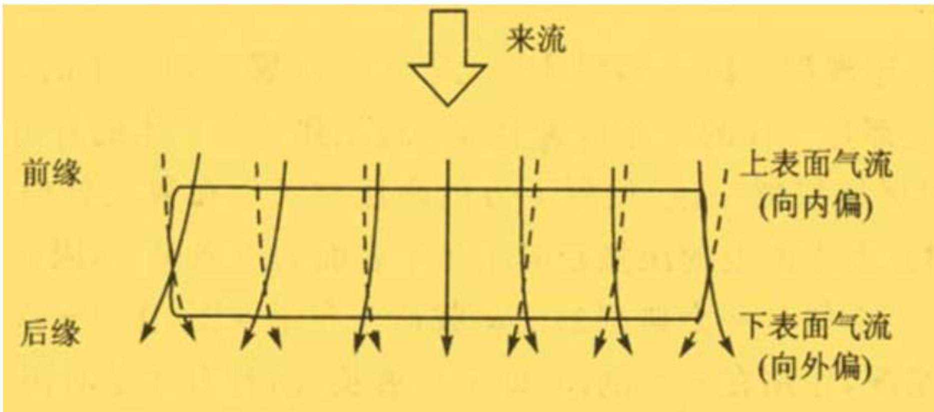
原因？

# 10.2 下洗和诱导阻力(5.2)

1. 翼尖涡：



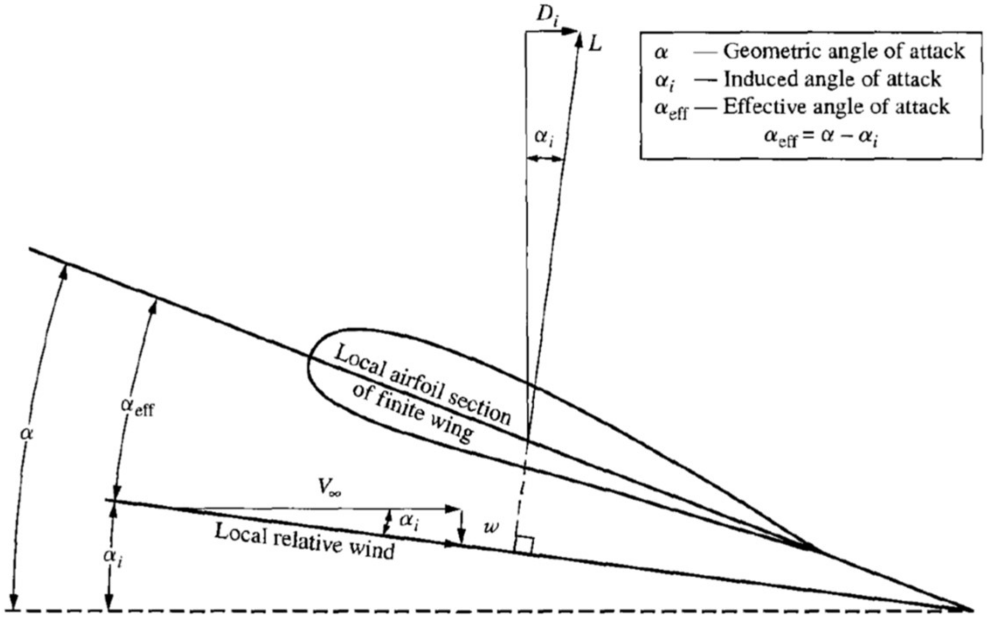



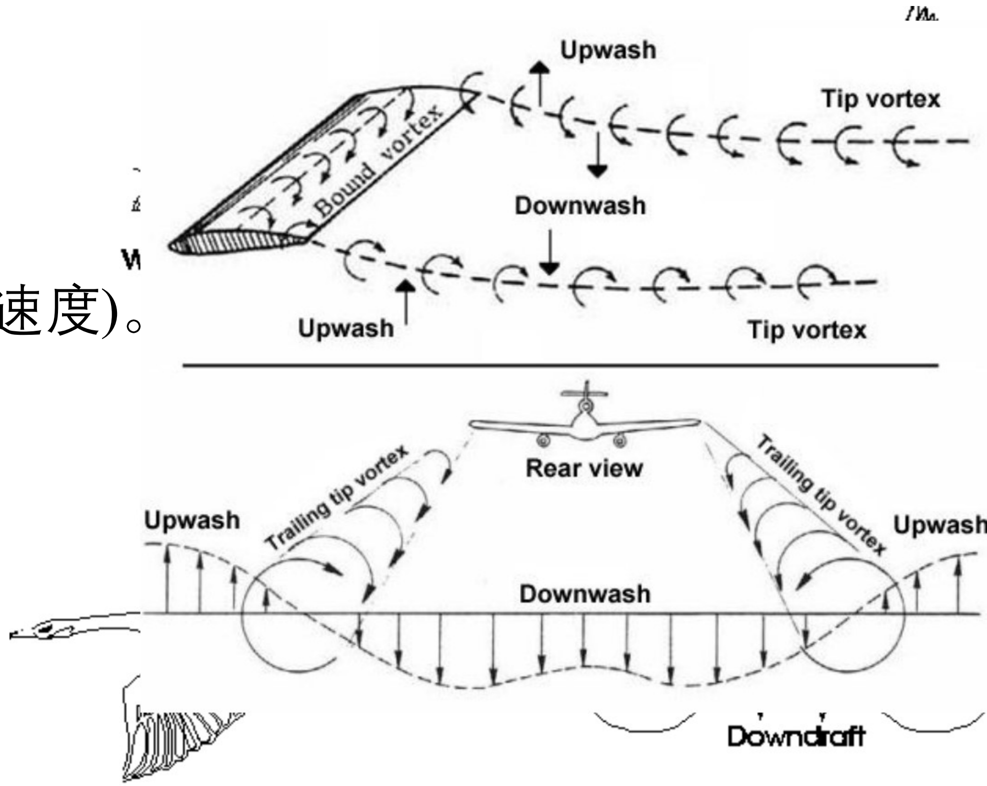

机翼下表面气流向外偏，上表面气流向内偏；
翼间处形成一定强度的翼尖涡。

# 10.2 下洗和诱导阻力(5.2)

## 2. 下洗：

翼尖涡在机翼产生向下的速度分量$w$(下洗速度)。

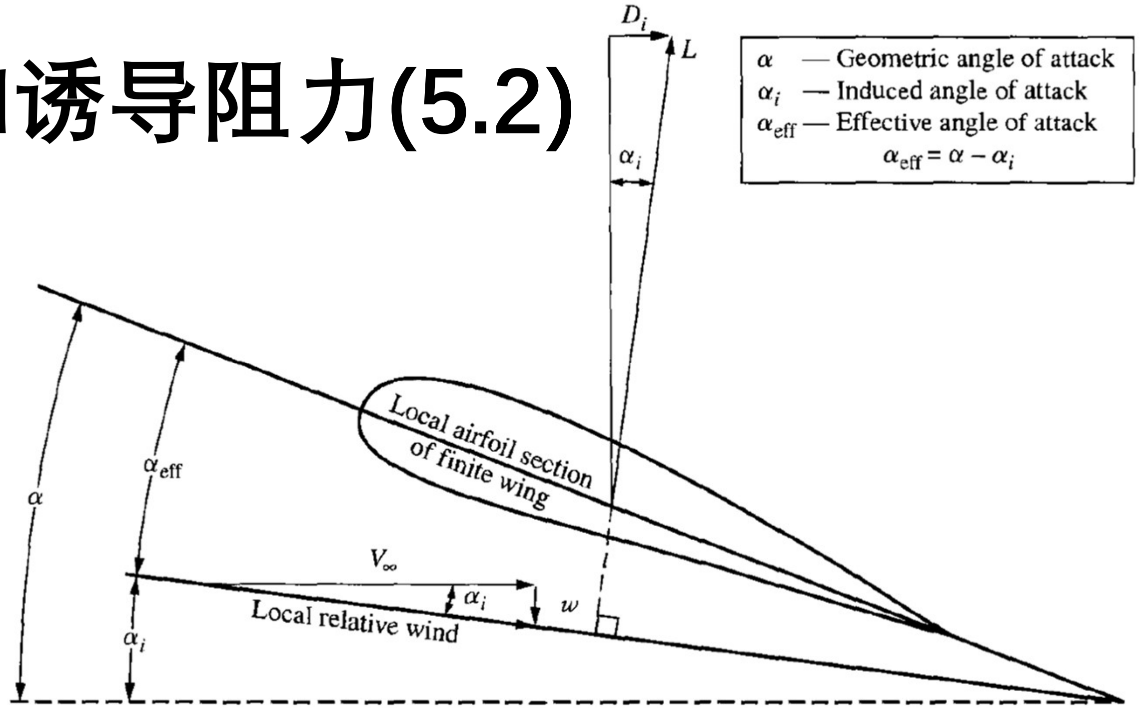



当地来流速度下偏, $\vec{V}_\infty + \vec{w}$!

# 10.2 下洗和诱导阻力(5.2)

3. 诱导阻力：




当地来流速度下偏，$\vec{V}_\infty + \vec{w}$;

下偏角度$\alpha_i$：下洗角（诱导下洗角）；

$\alpha$：几何迎角；

$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ ：有效迎角；

升力$L$与来流方向垂直，偏转$\alpha_i$→

产生水平方向分量$D_i$：诱导阻力；

无粘不可压流在有限翼展机翼上产生的

诱导阻力——上下面压差在$\vec{V}_\infty$方向的分量（翼间涡耗能所需额外动力）

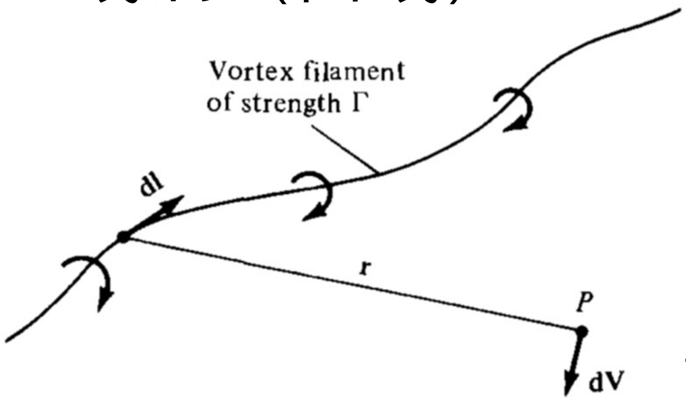
# 10.2 下洗和诱导阻力(5.2)

3. 诱导阻力：

$$\text{有限翼展机翼阻力}\begin{cases}\left.\begin{array}{r}\text{粘性摩擦阻力}D_f\\ \text{压差阻力}D_p\end{array}\right\}\text{型阻}C_d\\ \text{诱导阻力}D_i\qquad\qquad C_{Di}\end{cases}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}\boxed{C_D=C_d+C_{Di}}$$

# 10.3涡丝(线涡5.3)

## 1. 线涡（曲线）：

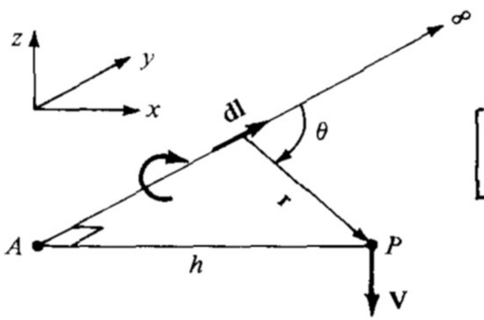



$d\vec{l}$在$P$处诱导速度:

$$\boxed{d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

$Biot - Savart\ Law$

类比电流产生的磁场强度$d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$



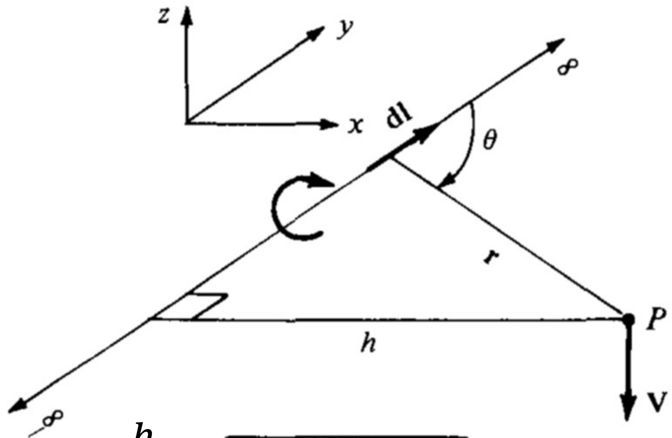

$$\boxed{V = \frac{\Gamma}{4\pi h}}$$

直线: $\vec{V} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dl\cdot r sin\theta}{r^3}$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dl\cdot sin\theta}{r^2}$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi h}\int_{0}^{\pi} sin\theta d\theta$$




$r = \frac{h}{sin\theta}$

$$\boxed{V = \frac{\Gamma}{2\pi h}}$$

$l = \frac{h}{tan\theta}$  $dl = -\frac{h}{sin^2\theta}d\theta$

无限长线涡在$P$处诱导速度： $V = \frac{\Gamma}{2\pi h}$

半无限长线涡在 $P$ 处诱导速度： $V = \frac{\Gamma}{4\pi h}$

# 10.3涡丝(线涡5.3)

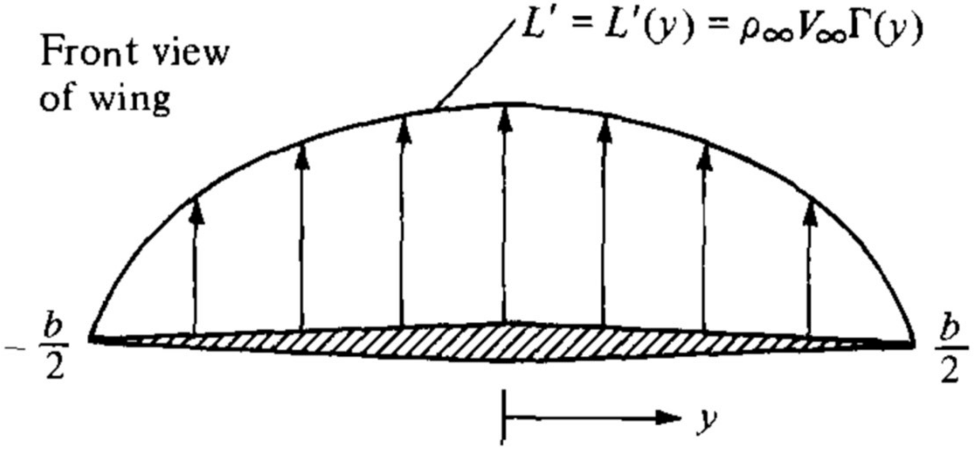
2. Helmholtz定理：

① 线涡强度沿$l$方向不变；

② 线涡不能在流体中终结，必须到边界或组成封闭回路。

3. 升力分布(翼载分布)：

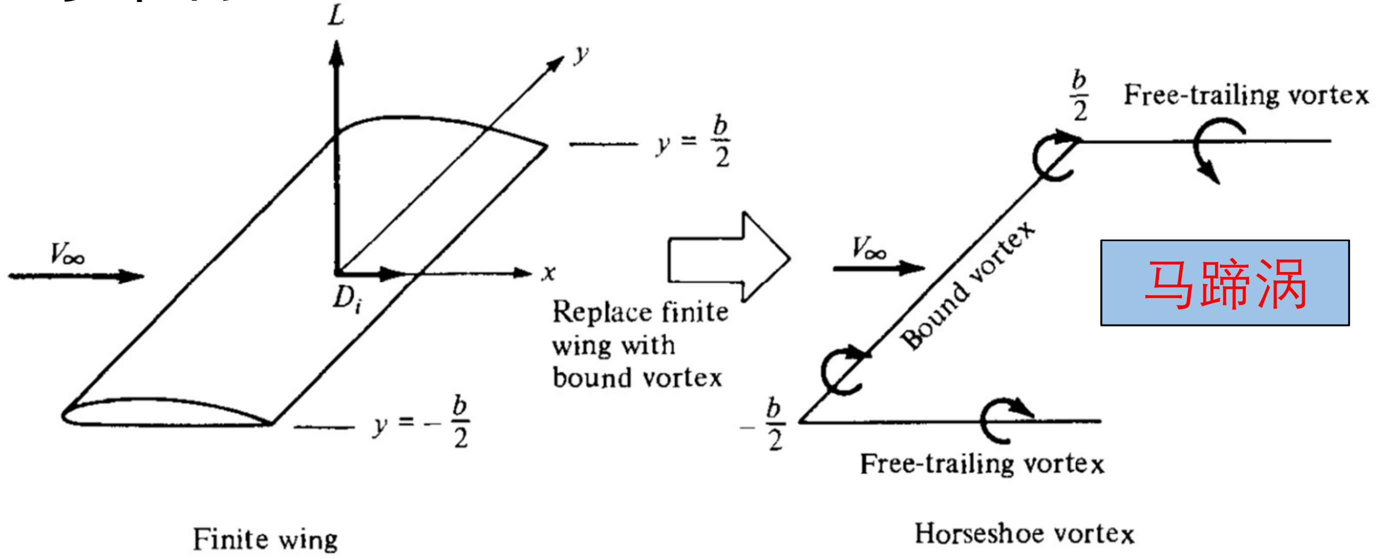
不同$y$处，翼型($\alpha_{L=0}$）、弦长$c$、迎角α不同→$L'(y)$变化 →$\Gamma(y)$变化




如何得到$\Gamma(y)$？

# 10.4普朗特经典升力线理论1911~1918(5.4)

1. 马蹄涡：




附着涡→$L'$

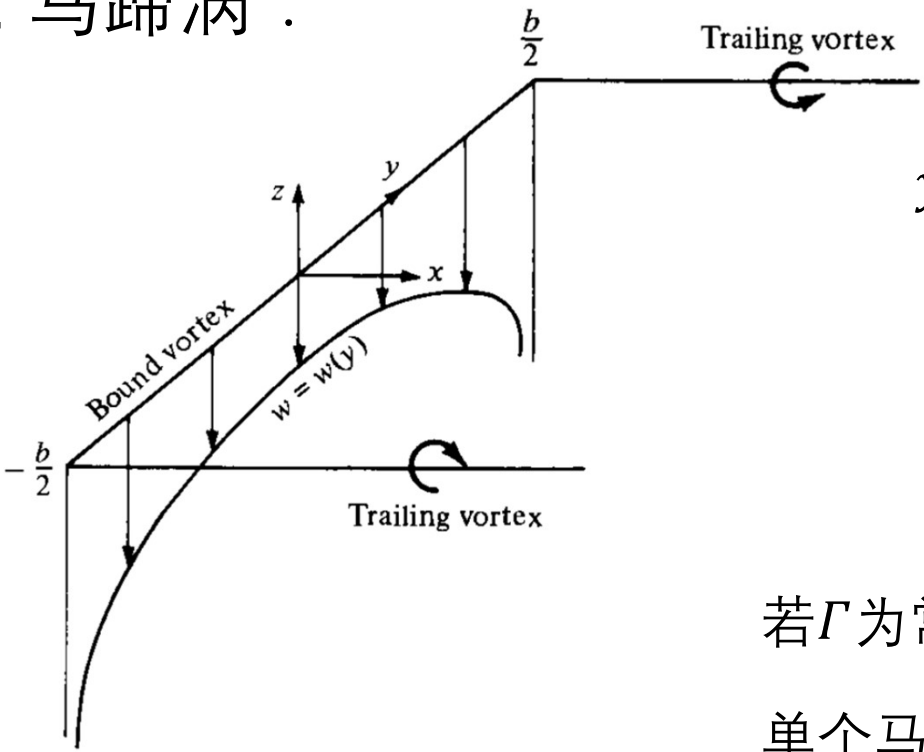
下游自由涡

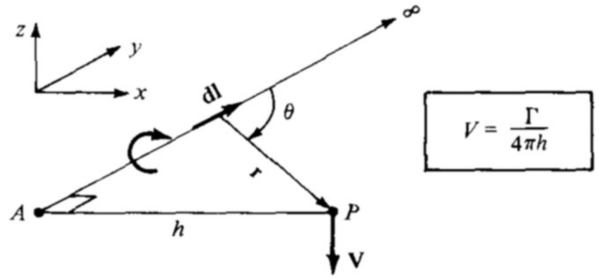
机翼用长$-b/2$到$b/2$附着线涡代替；

线涡不能在流体中终结→翼尖处线涡变尾涡(自由涡)

# 10.4普朗特经典升力线理论(5.4)

1. 马蹄涡：




$y$轴上任意$y$处的下洗速度：

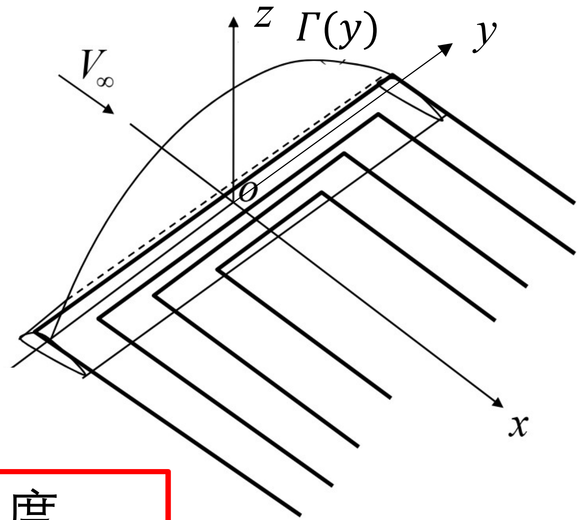
$$w = -\frac{\Gamma}{4\pi(\frac{b}{2}+y)} - \frac{\Gamma}{4\pi(\frac{b}{2}-y)}$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{b}{(\frac{b^2}{4}-y^2)}$$

若$\Gamma$为常数，则 $y \rightarrow \pm\frac{b}{2}, w \rightarrow \infty$

单个马蹄涡不能模拟有限展长机翼!

# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

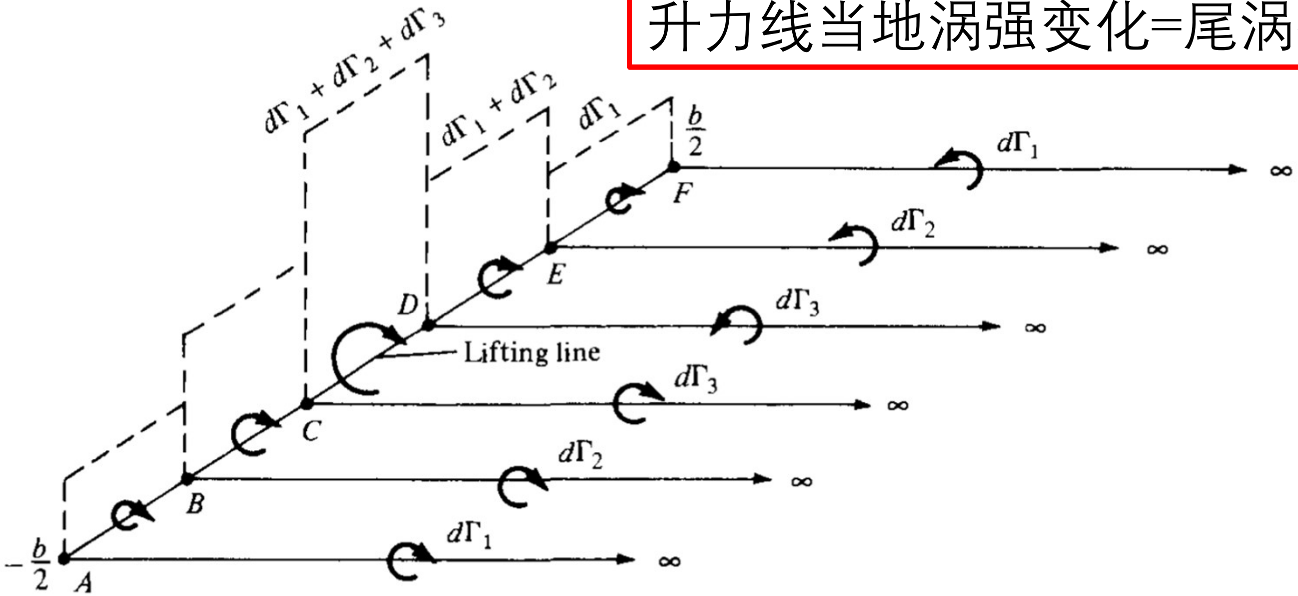



## 2. 多个马蹄涡叠加：

附着涡长度、$\Gamma$不等的多个马蹄涡叠加，

附着涡置于同一线上——升力线！

升力线当地涡强变化=尾涡强度



# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}$$

2. 多个马蹄涡叠加：

无数多个马蹄涡叠加：

升力线上$\Gamma(y)$，微元$dy$上$\Gamma$变化$d\Gamma$:

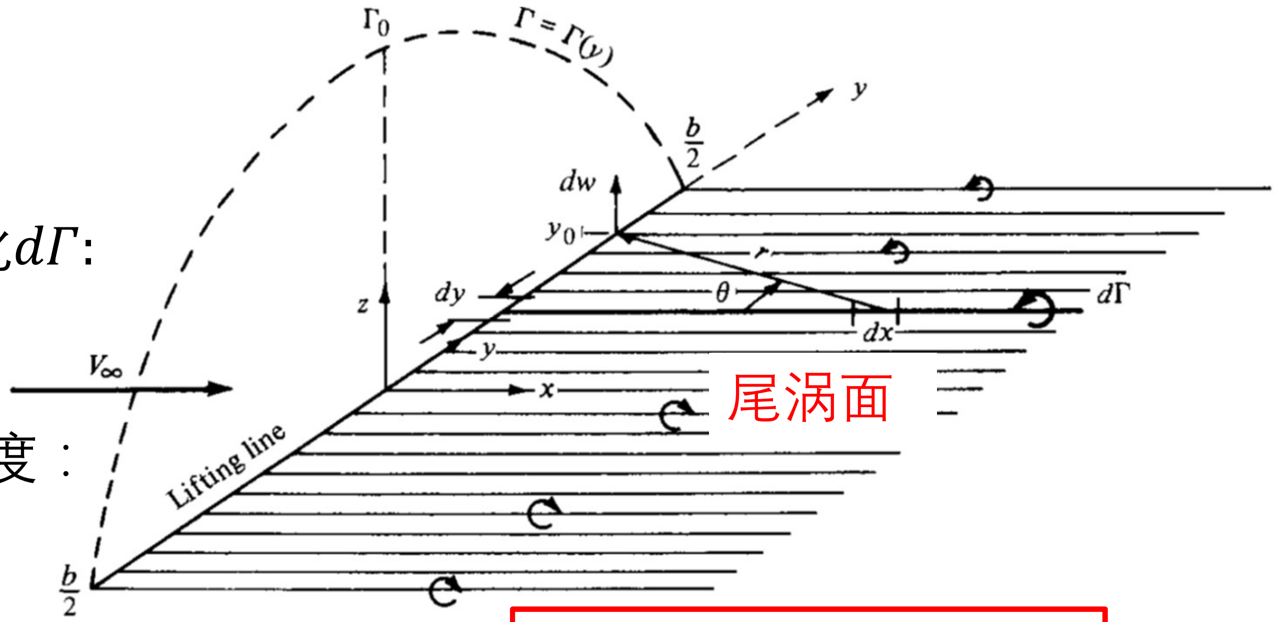
$$d\Gamma = (\frac{d\Gamma}{dy})dy$$

半无限长尾涡$d\Gamma$在$y_0$处诱导速度：

$$dw(y_0) = \frac{-\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{4\pi(y_0 - y)}$$

尾涡面在$y_0$处诱导速度：

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0 - y)}$$




$$\boxed{尾涡强度 d\Gamma = (\frac{d\Gamma}{dy})dy}$$

# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

3. $y_0$处下洗角$\alpha_i(y_0)$：

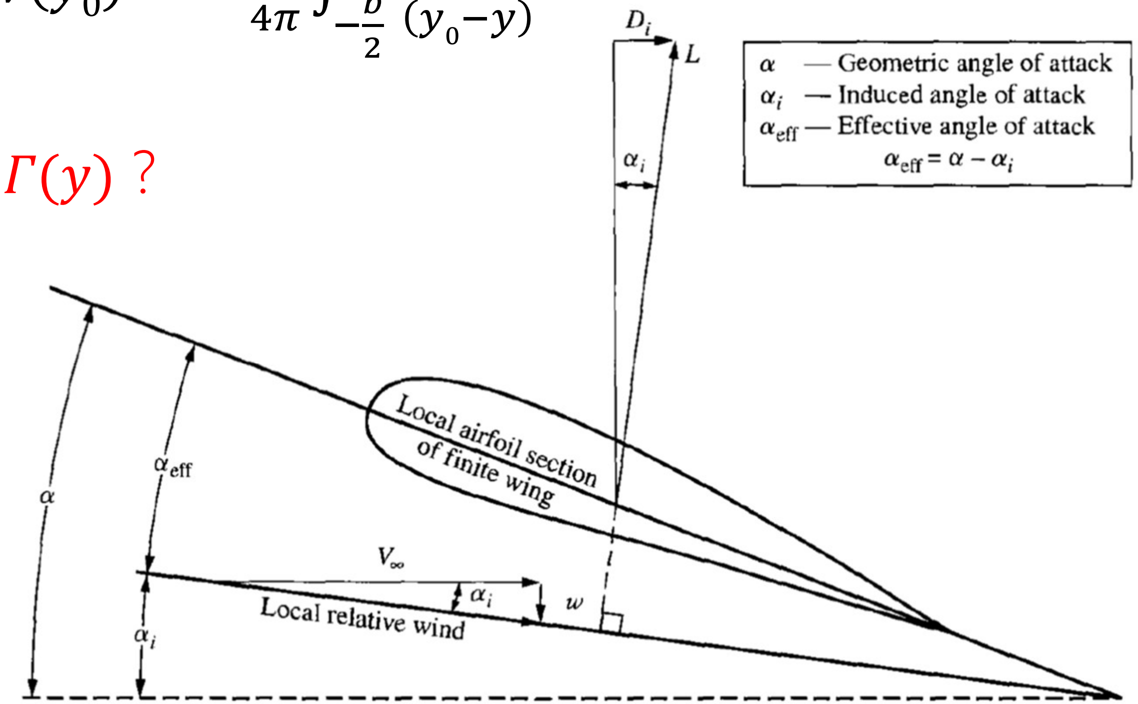
$$\alpha_i(y_0) = \arctan\left(\frac{-w(y_0)}{V_\infty}\right) \approx \frac{-w(y_0)}{V_\infty} \qquad w(y_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0 - y)}$$

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0 - y)}$$

如何得到$\Gamma(y)$？

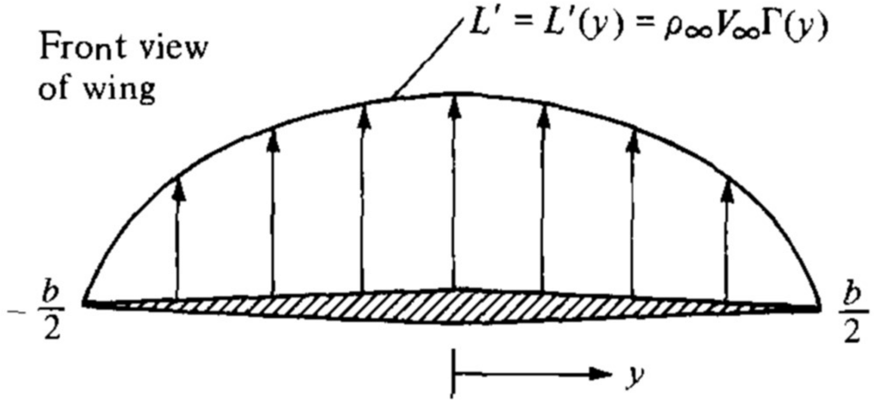
$\Gamma(y) \rightarrow C_l$

$\Gamma(y) \rightarrow \alpha_i(y) \rightarrow \alpha_{eff} \rightarrow C_l$



# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

3. $y_0$处下洗角$\alpha_i(y_0)$： 如何得到$\Gamma(y)$？




$\Gamma(y) \rightarrow C_l$

$\Gamma(y) \rightarrow \alpha_i(y) \rightarrow \alpha_{eff} \rightarrow C_l$

$y_0$处翼剖面：$\alpha_{eff}(y_0) = \alpha(y_0) - \alpha_i(y_0)$

$y_0$处翼剖面：$C_l(y_0) = a_0(\alpha_{eff} - \alpha_{L=0})$

翼剖面$C_l = a_0(\alpha - \alpha_{L=0})$

薄翼理论：$C_l(y_0) = 2\pi(\alpha(y_0) - \alpha_i(y_0) - \alpha_{L=0})$ ①

其中$\alpha(y_0)$、$\alpha_{L=0}$已知，$\alpha_i(y_0) \sim \Gamma(y)$

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy}{(y_0 - y)}$$

升力定理：$L'(y_0) = \rho V_\infty \Gamma(y_0) = \frac{1}{2} \rho V^2{}_\infty c(y_0) C_l(y_0)$ ②

①+②→ $\frac{2\Gamma}{V_\infty c} = C_l = 2\pi(\alpha - \alpha_i - \alpha_{L=0})$

# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

3. $y_0$处下洗角$\alpha_i(y_0)$：

$$\frac{2\Gamma}{V_\infty c} = C_l = 2\pi(\alpha - \alpha_i - \alpha_{L=0}) \qquad \alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0 - y)}$$

$$\boxed{\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} + \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0 - y)}}$$

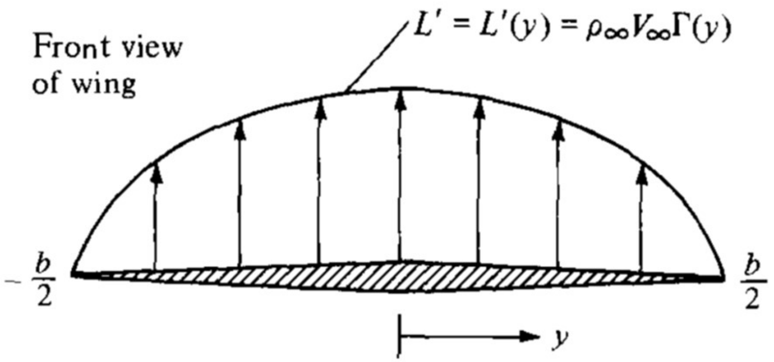
普朗特升力线理论基本方程

求得$\Gamma(y)$

$$L'(y_0) = \rho V_\infty \Gamma(y_0)$$

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y_0)dy = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y_0)dy$$

$$\boxed{C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{2}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y_0)dy}$$



# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

3. $y_0$处下洗角$\alpha_i(y_0)$：

$$\boxed{\alpha(y_0)=\frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)}+\alpha_{L=0}+\frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0-y)}}$$

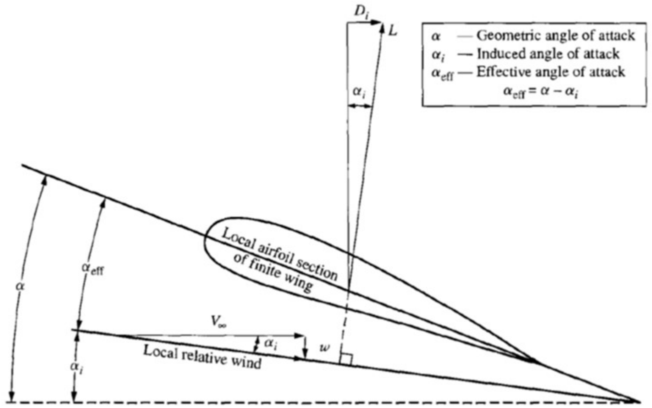
普朗特升力线理论基本方程

诱导阻力：$D'_i=L'sin\alpha_i\approx L'\alpha_i$

$$L'(y_0)=\rho V_\infty\Gamma(y_0)$$

$$D_i=\int_{-b/2}^{b/2}L'\alpha_i dy=\rho V_\infty\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)\alpha_i(y)dy$$

$$\boxed{C_{D,i}=\frac{2}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)\alpha_i(y)dy}$$




方程求解困难，研究简单已知解$\Gamma(y)$。

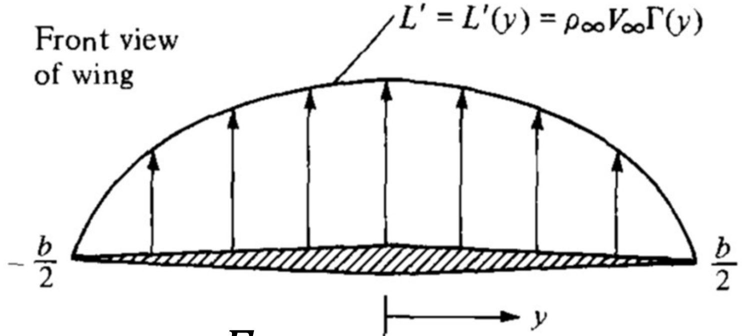
掌握由已知$\Gamma(y)$，求$\alpha_i$，$C_L$， $C_{D,i}$等气动特性。

# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

4. 椭圆升力分布：

$$\boxed{\Gamma(y)=\Gamma_0\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2}}$$

环量沿展向呈椭圆变化。




$$\left(\frac{\Gamma(y)}{\Gamma_0}\right)^2+\left(\frac{y}{b/2}\right)^2=1$$

$$\frac{d\Gamma}{dy}=-\frac{4\Gamma_0}{b^2}\frac{y}{\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2}}$$

$$w(y_0)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0-y)}=\frac{\Gamma_0}{\pi b^2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{ydy}{\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2}(y_0-y)}$$

定义$y=\frac{b}{2}\cos\theta \quad dy=-\frac{b}{2}\sin\theta d\theta$

$$w(\theta_0)=-\frac{\Gamma_0}{2\pi b}\int_0^\pi\frac{\cos\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}d\theta$$

$$\int_0^\pi\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-\cos_{\ 0}}d\theta=\frac{\pi\sin n_{\ 0}}{\sin\theta_0}$$

$$\boxed{w(\theta_0)=-\frac{\Gamma_0}{2b}}$$

椭圆环量分布，下洗速度沿展向为常数！

$$\boxed{\alpha_i=-\frac{w}{V_\infty}=\frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}}$$

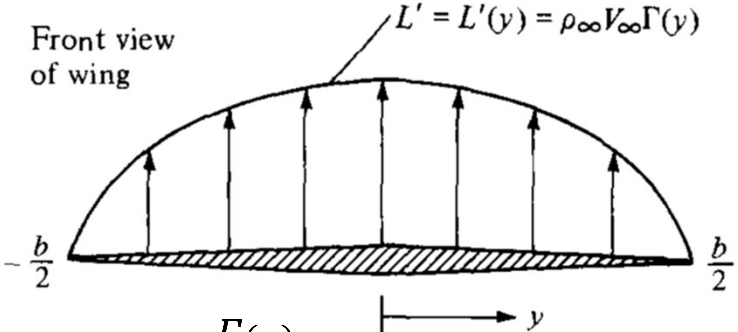
$b\rightarrow\infty$时$\alpha_i\ w\rightarrow 0$

# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

4. 椭圆升力分布：

$$\boxed{\Gamma(y)=\Gamma_0\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2}}$$ 环量沿展向呈椭圆变化。

$$\boxed{w(\theta_0)=-\frac{\Gamma_0}{2b}}\quad \boxed{\alpha_i=-\frac{w}{V_\infty}=\frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}}$$




$$\left(\frac{\Gamma(y)}{\Gamma_0}\right)^2+\left(\frac{y}{b/2}\right)^2=1$$

$$L=\rho V_\infty\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y_0)dy=\rho V_\infty\Gamma_0\int_{-b/2}^{b/2}\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2}\,dy$$

$$y=\frac{b}{2}cos\theta\quad dy=-\frac{b}{2}sin\theta d\theta$$

$$=\rho V_\infty\Gamma_0\frac{b}{2}\int_0^\pi sin^2\theta d\theta$$

$$=\rho V_\infty\Gamma_0\frac{b}{4}\pi$$

$$C_L=\frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2{}_\infty S}=\frac{\rho V_\infty\Gamma_0\frac{b}{4}\pi}{\frac{1}{2}\rho V^2{}_\infty S}=\frac{\Gamma_0 b\pi}{2V_\infty S}\;\Rightarrow\;\Gamma_0=\frac{2V_\infty SC_L}{b\pi}$$

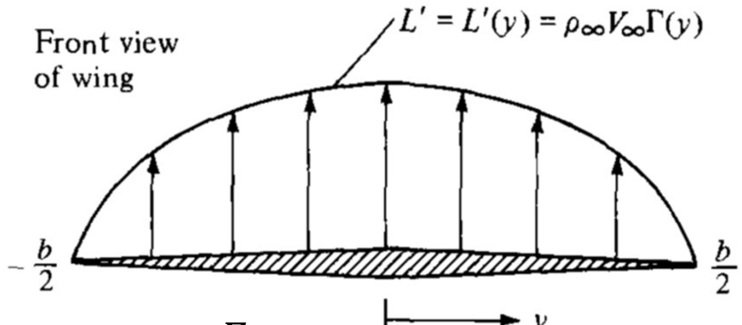
$$\boxed{\alpha_i=\frac{C_L}{\pi AR}}$$

$$\alpha_i=-\frac{w}{V_\infty}=\frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}=\frac{SC_L}{b^2\pi}=\frac{C_L}{\pi AR}$$

展弦比：$AR=\frac{b^2}{S}$

# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

4. 椭圆升力分布：




$$\boxed{\Gamma(y) = \Gamma_0\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2}}$$ 环量沿展向呈椭圆变化。

$$\left(\frac{\Gamma(y)}{\Gamma_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{b/2}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}} \quad \boxed{\alpha_i = -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}} \quad \boxed{\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}}$$

$$C_{D,i} = \frac{2}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)\alpha_i(y)dy$$

$$= \frac{2\alpha_i}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)dy$$

$$\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)dy = \Gamma_0\frac{b}{4}\pi$$

$$= \frac{\pi b\alpha_i\Gamma_0}{2V_\infty S} = \frac{\pi b\alpha_i\Gamma_0}{2V_\infty S}$$

$$C_L = \frac{\Gamma_0 b\pi}{2V_\infty S}$$

$$= C_L\alpha_i$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}}$$

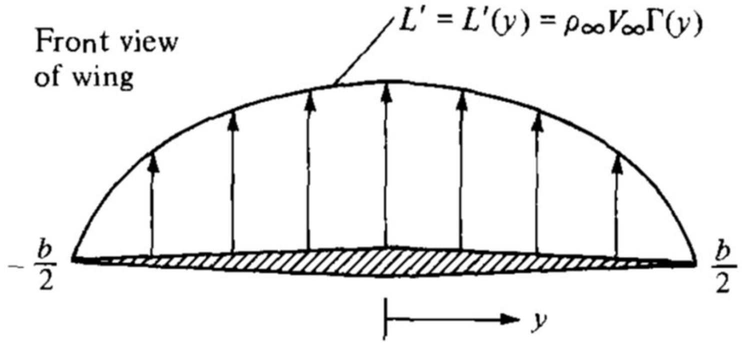
① $C_{D,i} \propto C_L^2$ 升致阻力

② $C_{D,i} \propto \frac{1}{\pi AR}$, $AR\uparrow\ C_{D,i}\downarrow$

*AR*=6~8
1908年white *AR*=6
滑翔机达51

# 10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

4. 椭圆升力分布：

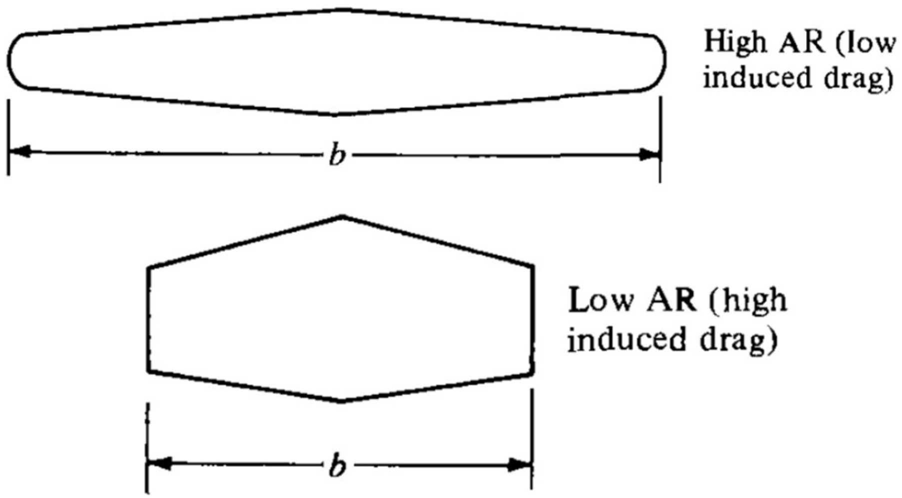



$$\boxed{\Gamma(y) = \Gamma_0\sqrt{1-(\frac{2y}{b})^2}}$$ 环量沿展向呈椭圆变化。

$$\boxed{w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}} \quad \boxed{\alpha_i = -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}} \quad \boxed{\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}}$$

$$\boxed{AR = b^2/S}$$

$$\boxed{C_{D,i} = \frac{{C_L}^2}{\pi AR}} \begin{cases} ① \ C_{D,i} \propto {C_L}^2 \text{ 升致阻力} \\ ② \ C_{D,i} \propto \frac{1}{\pi AR}, \quad AR\uparrow \ C_{D,i}\downarrow \end{cases}$$




$$C_D = C_d + C_{D,i}$$

$C_L$大时$C_{D,i}$占$C_D$比大，
巡航时一般$C_{D,i}$占$C_D$25%

作业:

复习笔记!

空气动力学书5.1