上节课内容回顾

强度理论：关于材料破坏原因的一种假说

$$\sigma_{r1}=\sigma_1$$

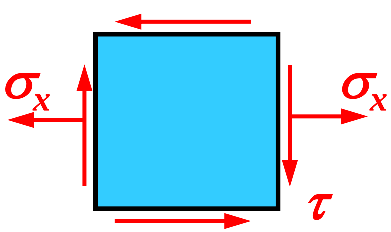
$$\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)$$

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2]}$$

$$\sigma_r\le[\sigma]$$

拉剪应力状态



$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_x{}^2+4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma_x{}^2+3\tau^2}$$

圆柱压力容器

$$\sigma_x=\frac{pD}{4t}\qquad \sigma_t=\frac{pD}{2t}$$

第九章 组合变形

- 概述
- 斜弯曲
- 拉压与弯曲
- 弯曲与扭转
- 其它组合变形

学前问题：

- 解题思路?
- 各组合变形的特点?

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

9-1 概述

- **组合变形(Combined Deformation)**：杆件中同时有两种以上的基本变形。

- **求解方法**：叠加法（根据各个内力分量，分别计算每种基本变形下的应力，再把计算结果叠加，得到杆件在原载荷作用下的应力）

- **求解思路**：

$$\boxed{\text{组合变形}} \xrightarrow[\text{分解简化}]{\text{外力分析}} \boxed{\text{若干基本变形}} \xrightarrow[F_N,\ T,\ M]{\text{内力分析}}$$

$$\boxed{\text{确定危险截面}} \xrightarrow[\sigma、\ \tau]{\text{应力分析}} \boxed{\text{确定危险点}} \xrightarrow[\text{应力叠加}]{\text{应力状态分析}}$$

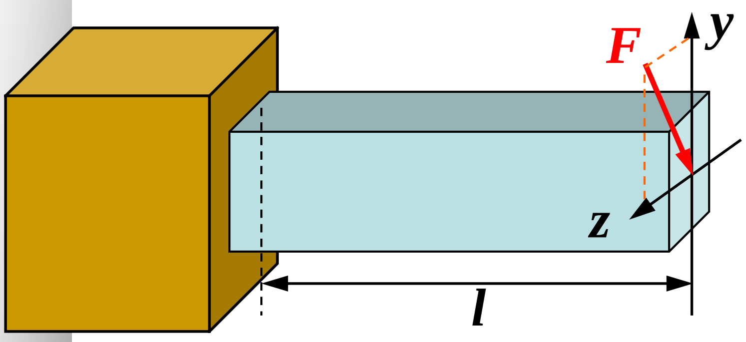
$$\boxed{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3} \xrightarrow[\text{塑、脆性}]{\text{强度理论}} \boxed{\text{相当应力}\sigma_r} \xrightarrow{\text{强度计算}} \boxed{\sigma_r \le [\sigma]}$$

9-1 概述

常见的组合变形类型：

- ★ 斜弯曲(Skew Bending)：两个相互垂直平面内的弯曲组合；
- ★ 拉伸或压缩与弯曲的组合；
- 拉伸或压缩与扭转的组合；
- ★ 弯曲与扭转的组合；
- 两个相互垂直平面内的弯曲与扭转的组合。

9-2 斜弯曲



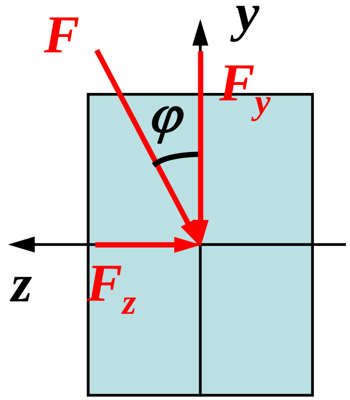
1、外力分析：

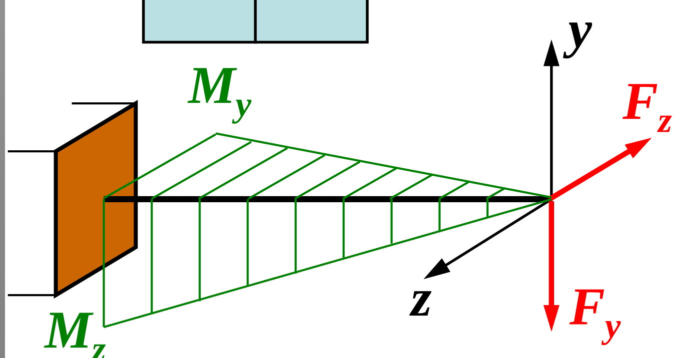
$$F_y = F\cos\varphi,\quad F_z = F\sin\varphi$$

2、内力分析：

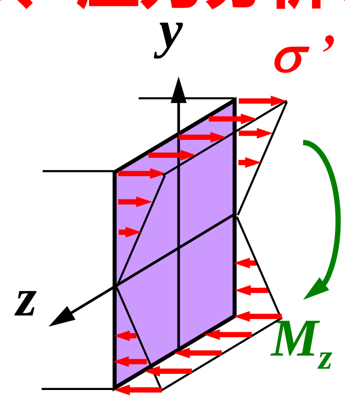
$$\left|M_z\right| = F_y l \qquad \left|M_y\right| = F_z l$$

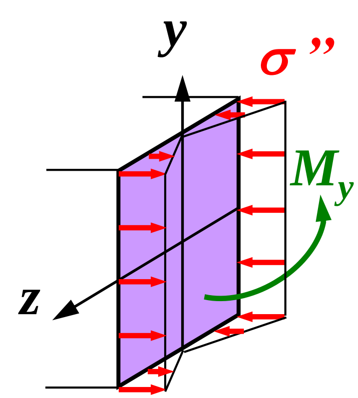
危险截面在固定端





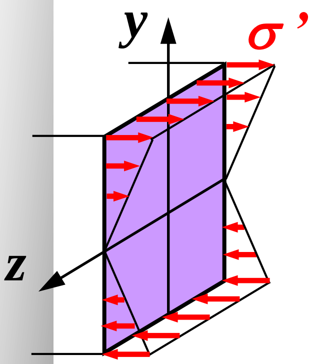
3、应力分析：

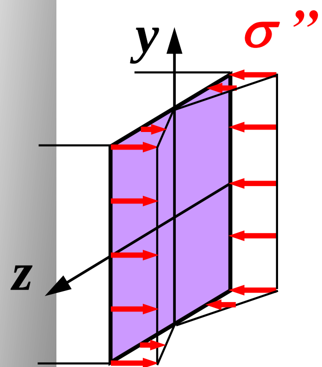


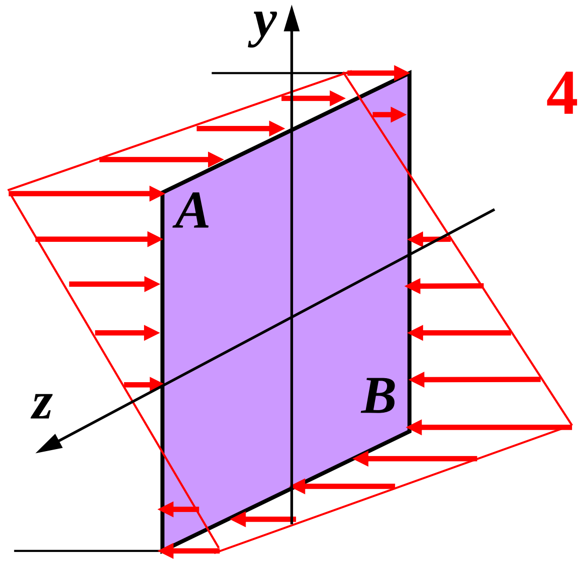


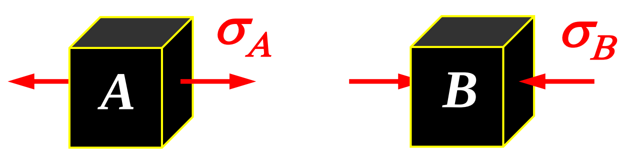
$$\sigma' = \frac{\left|M_z\right|}{I_z} y \qquad \sigma'' = \frac{\left|M_y\right|}{I_y} z$$

9-2 斜弯曲









4. 应力叠加

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{|M_z|y}{I_z} + \frac{|M_y|z}{I_y}$$

A, B 两点是危险点!

$$\sigma_A = \sigma_{\max}^{+} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y}$$

$$= Fl\left(\frac{\cos\varphi}{W_z} + \frac{\sin\varphi}{W_y}\right)$$

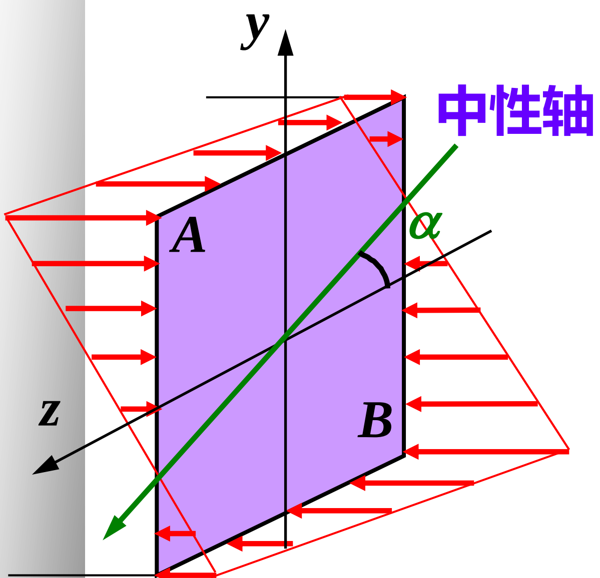
$$\sigma_B = \sigma_{\max}^{-} = -Fl\left(\frac{\cos\varphi}{W_z} + \frac{\sin\varphi}{W_y}\right)$$

注意：危险点的应力状态是单向应力状态!

5. 强度条件

$$\left|\sigma_{\max}^{+}\right| \le [\sigma^{+}] \qquad \left|\sigma_{\max}^{-}\right| \le [\sigma^{-}]$$

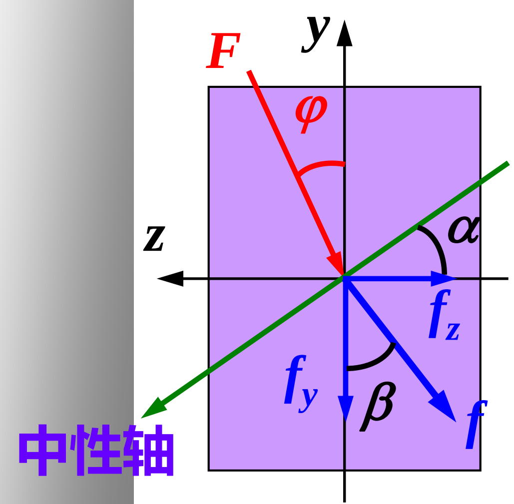
9-2 斜弯曲



6. 中性轴的位置

$$\sigma = \frac{|M_z| y}{I_z} + \frac{|M_y| z}{I_y} = 0 \quad \tan\alpha = -\frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y}\tan\varphi$$

$\alpha \neq \varphi$，中性轴与载荷作用平面不互相垂直，最大应力在距离中性轴最远的点。



7. 自由端的挠度

$$f_y = \frac{Fl^3}{3EI_z}\cos\varphi \qquad f_z = \frac{Fl^3}{3EI_y}\sin\varphi$$

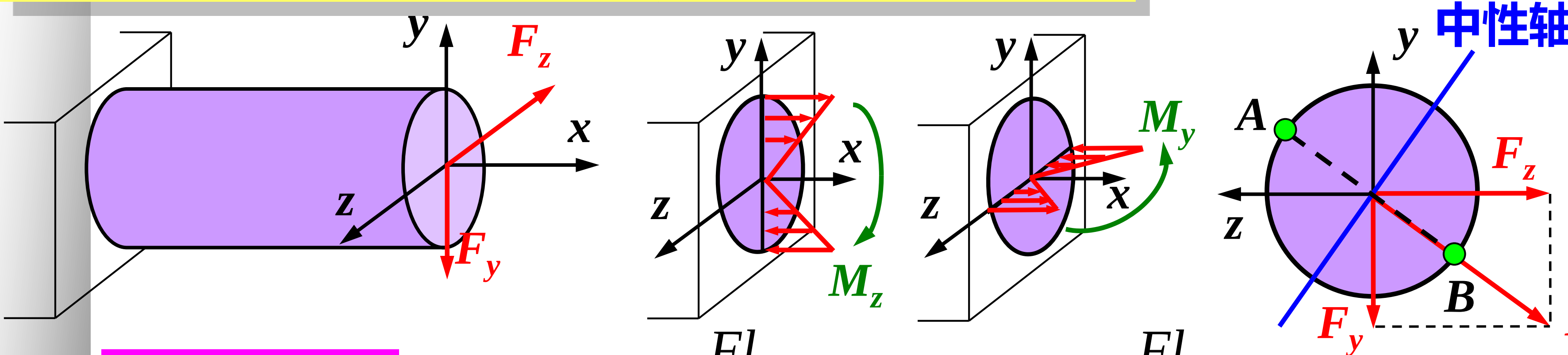
$$\tan\beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{I_z}{I_y}\tan\varphi$$

$$\alpha = \beta$$

挠曲线平面与中性轴仍然互相垂直。

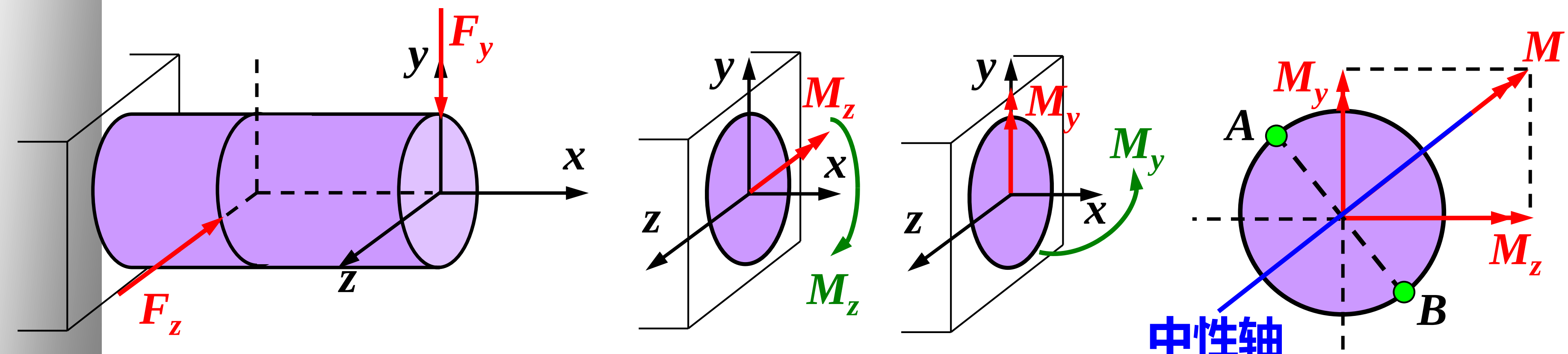
9-2 斜弯曲

圆截面杆的“斜”弯曲问题： $\alpha = \beta = \varphi$



外力合成

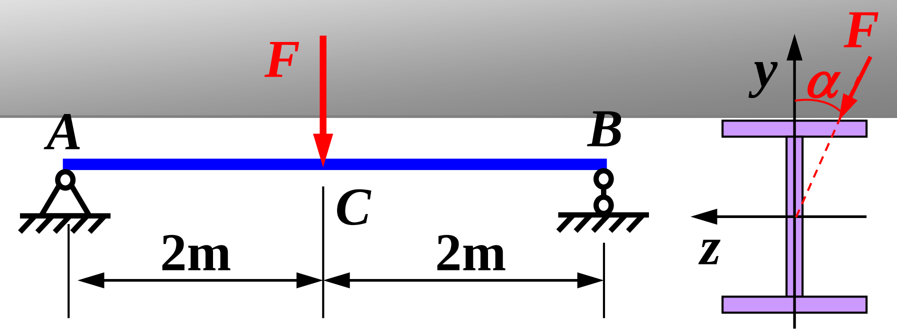
$$\sigma_A = \sigma_{\max}^{+} = \frac{Fl}{W}, \quad \sigma_B = \sigma_{\max}^{-} = -\frac{Fl}{W}$$



内力合成

$$\sigma_A = \sigma_{\max}^{+} = \frac{M}{W}, \quad \sigma_B = \sigma_{\max}^{-} = -\frac{M}{W}$$

9-2 斜弯曲



例9-1 F=7kN, [σ]=160MPa, α=20°,试选择截面工字钢型号。

解：1、外力分析

$$F_y = F\cos\alpha = 6.578\text{kN}$$

$$F_z = F\sin\alpha = 2.394\text{kN}$$

2、内力分析： C截面为危险截面

$$M_{z\max} = F_y l/4 = 6.578\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{y\max} = F_z l/4 = 2.394\text{kN}\cdot\text{m}$$

3、应力分析： 危险点在右上和左下两点

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{M_{y\max}}{W_y} \le [\sigma]$$

4、试算： $W_z / W_y = 6$

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{6.578}{W_z} + \frac{6\times 2.394}{W_z}\right)\times 10^3 \le 160$$

$W_z \ge 130.9\text{cm}^3$ 选择16号工字钢

$W_z = 141\text{cm}^3$ $W_y = 21.2\text{cm}^3$

5、验算：

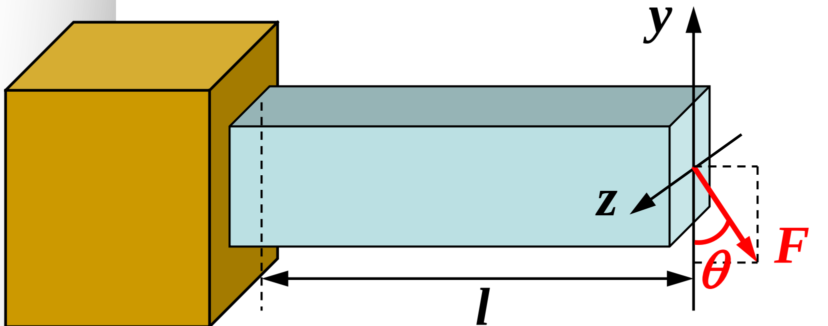
$\sigma_{\max} = 148.5\text{MPa}$ **安全！**

讨论：

1. 若α = 0°: $\sigma_{\max} = 49.6\text{MPa}$

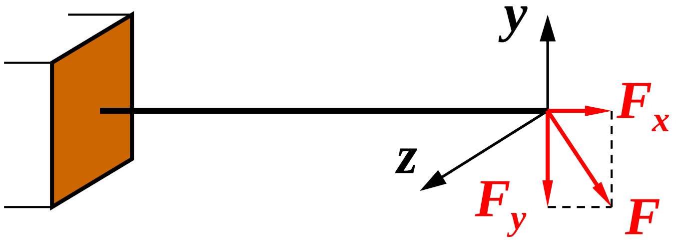
2. 弯曲切应力忽略

9-3 拉压与弯曲



1、外力分析

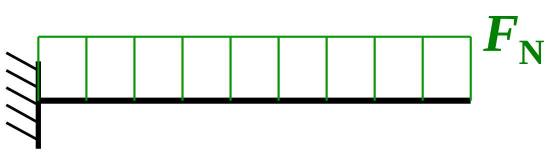
$$F_x = F\sin\theta, \quad F_y = F\cos\theta$$

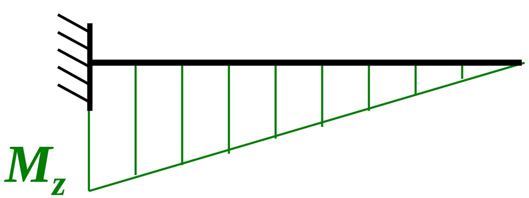


2、内力分析

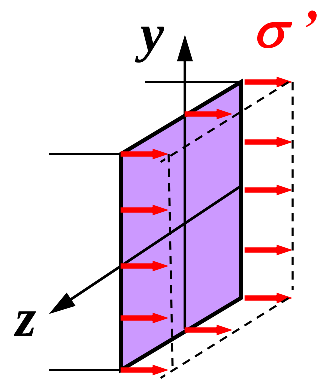
$$F_{\mathrm{N}} = F_x, \; |M_z| = F_y l$$

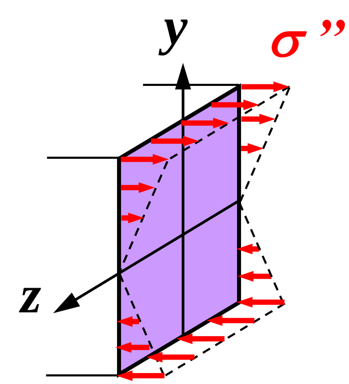
固定端为危险截面





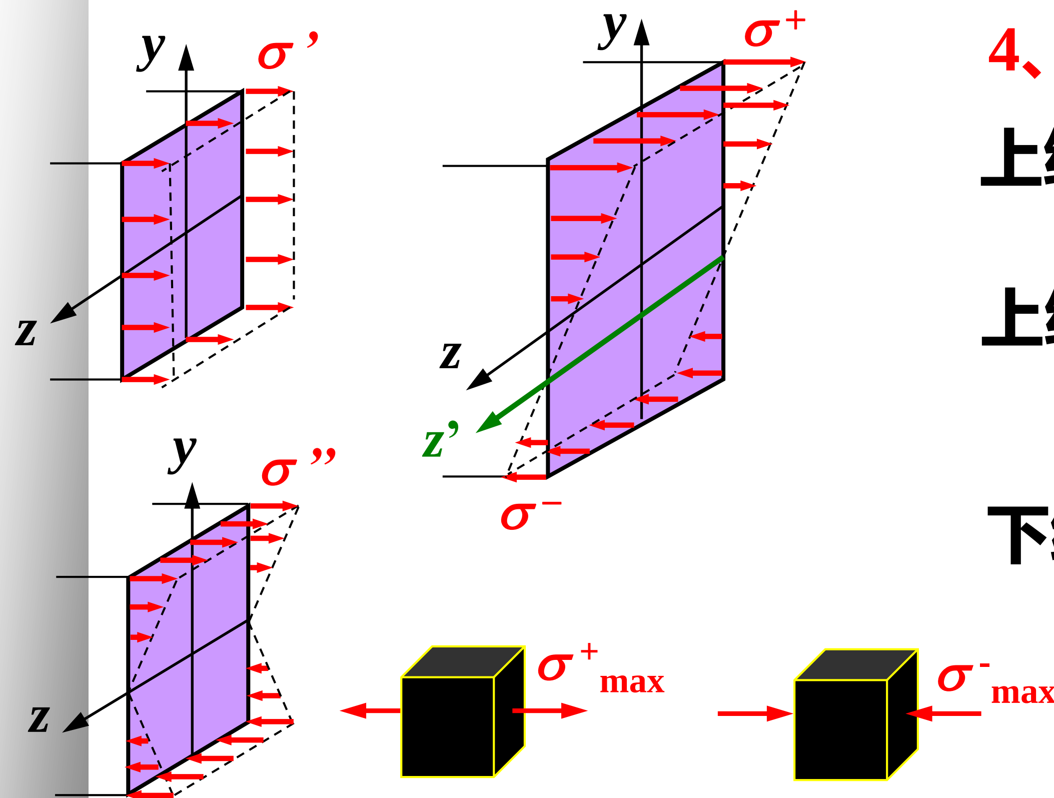
3、应力分析





$$\sigma' = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} \qquad \sigma'' = \frac{|M_z|y}{I_z}$$

9-3 拉压与弯曲



4、应力叠加

上缘、下缘各点为危险点

上缘 $$\sigma_{\max}^{+}=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}+\frac{|M_z|}{W_z}$$

下缘 $$\sigma_{\max}^{-}=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}-\frac{|M_z|}{W_z}$$

注意：危险点的应力状态是单向应力状态！

5、强度条件：

$$\left|\sigma_{\max}^{+}\right|\le[\sigma^{+}]$$

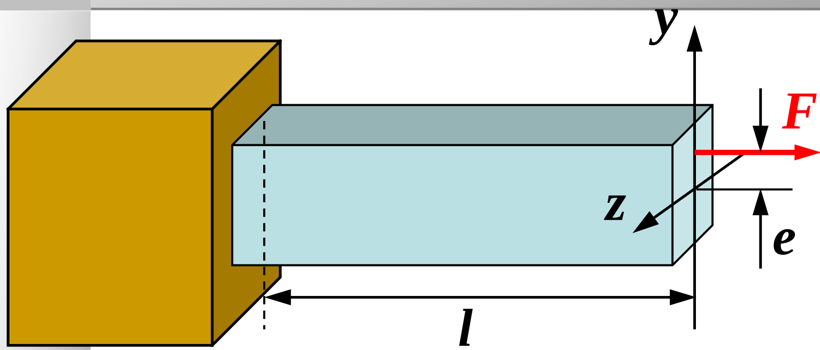
$$\left|\sigma_{\max}^{-}\right|\le[\sigma^{-}]$$

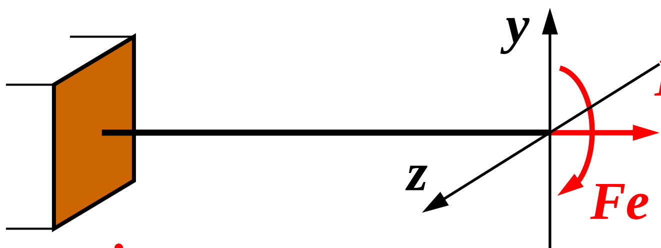
6、中性轴位置：

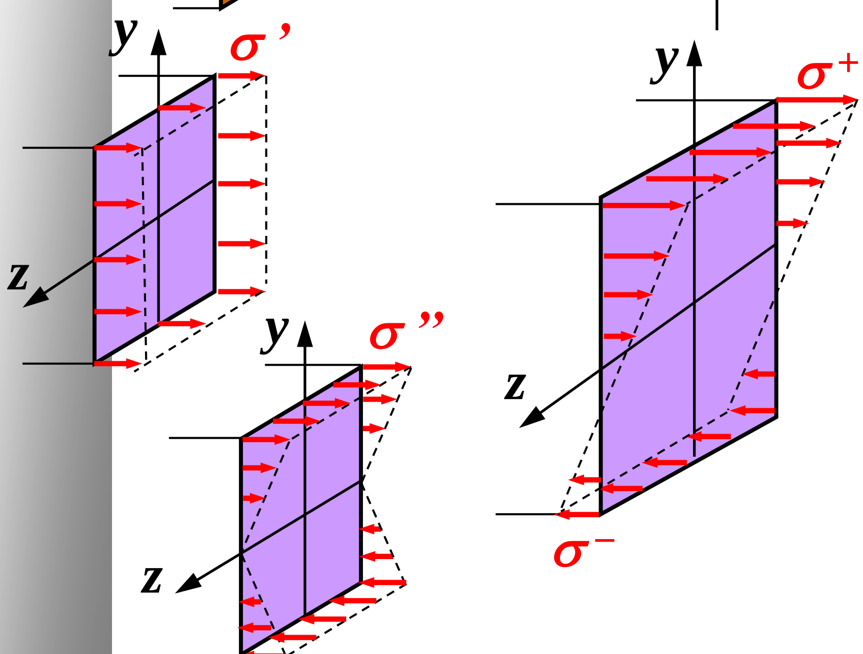
拉伸+弯曲（向压缩区平移）

压缩+弯曲（向拉伸区平移）

9-3 拉压与弯曲







偏心拉压：轴向拉压+弯曲

1、外力分析：**向轴线上转移**

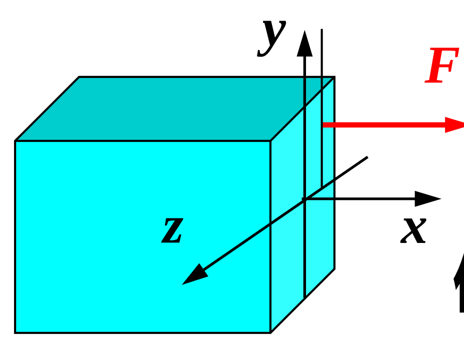
2、内力分析：$F_{\mathrm{N}} = F \qquad M_z = -Fe$

3、应力分析：$\sigma' = \dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A} \qquad \sigma'' = \dfrac{|M_z|y}{I_z}$

4、应力叠加：

$$\sigma^{+}_{\max} = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{F}{A} + \frac{Fe}{W_z}$$

$$\sigma^{-}_{\max} = -\frac{|M_z|}{W_z} + \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} = -\frac{Fe}{W_z} + \frac{F}{A}$$



思考：

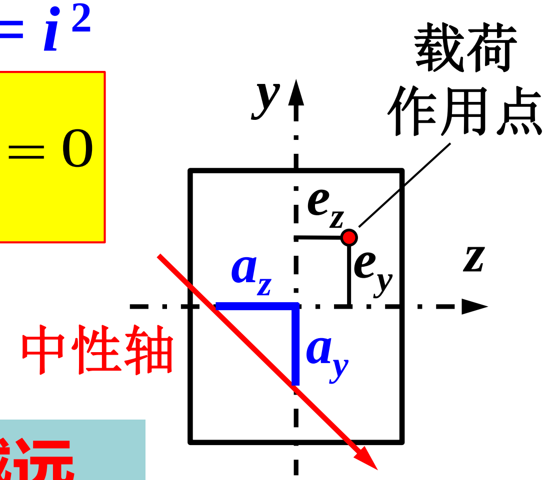
偏心距：e_y，e_z

9-3 拉压与弯曲

偏心拉压中性轴方程： **引入惯性半径 $I/A = i^2$**

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{Fe_y}{I_z} y + \frac{Fe_z}{I_y} z = 0$$

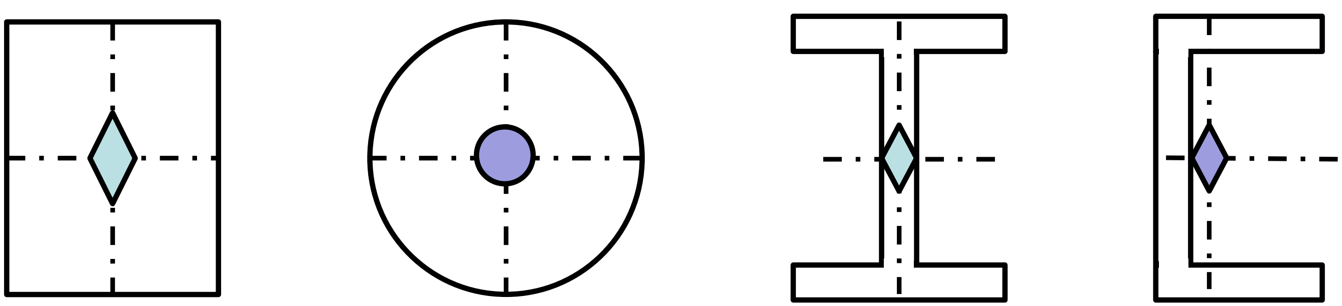
$$\boxed{1 + \frac{e_y}{i_z^2} y + \frac{e_z}{i_y^2} z = 0}$$



中性轴的截距： $a_y = -\frac{i_z^2}{e_y}, a_z = -\frac{i_y^2}{e_z}$

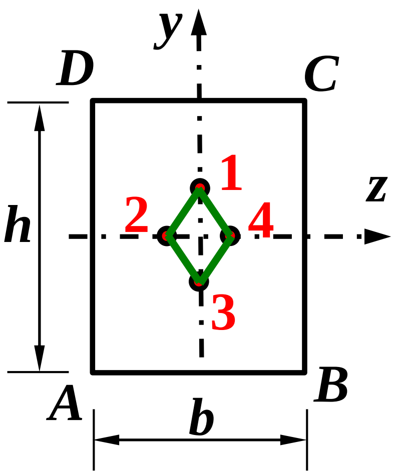
外力作用点离形心越近，中性轴距形心越远。

- 对于偏心压缩，当偏心距过大时，截面上除了压应力外还可能存在拉应力，这对于抗拉强度远远低于抗压强度的材料，如砖、石、混凝土等极为不利。这就要求限制压力的作用位置即偏心距的大小。
- 在截面形心附近可以找到一个区域，当压力作用在此区域上时，整个截面上只出现压应力，这个区域称为截面核心(Core of Section)。



9-3 拉压与弯曲

确定矩形的截面核心：



惯性半径： $i_z^{\ 2}=\dfrac{I_z}{A}=\dfrac{h^2}{12},\ i_y^{\ 2}=\dfrac{I_y}{A}=\dfrac{b^2}{12}$

若中性轴与*AB*边重合： $a_y=-\dfrac{h}{2},\ a_z=\infty$

$$e_y=-\frac{i_z^{\ 2}}{a_y}=\frac{h}{6},\ e_z=0$$

若中性轴与*BC*边重合： $a_y=\infty,\ a_z=\dfrac{b}{2}$ $\qquad e_y=0,\ e_z=-\dfrac{i_y^{\ 2}}{a_z}=-\dfrac{b}{6}$

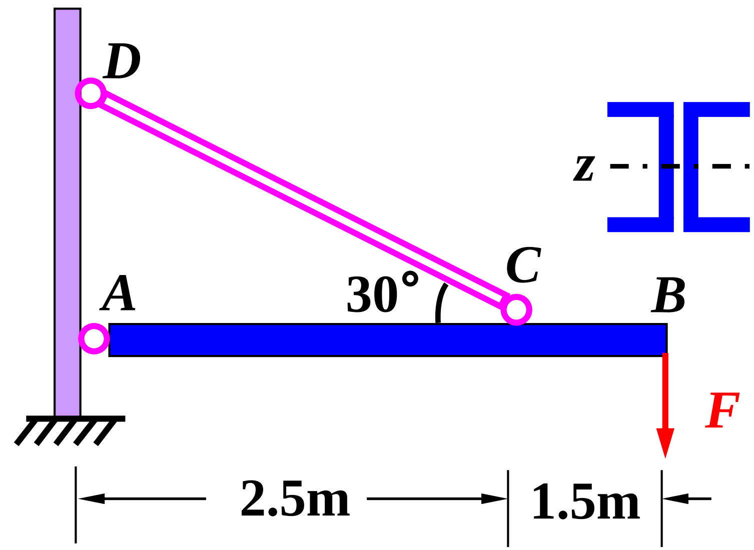
当中性轴绕*B*点从*AB*旋转到*BC*时，将得到一系列通过*B* 点但斜率不同的中性轴，将*B*点的坐标代入中性轴方程得：

$$1+\frac{e_y}{i_z^{\ 2}}y_B+\frac{e_z}{i_y^{\ 2}}z_B=0 \quad \Rightarrow 1+\frac{y_B}{i_z^{\ 2}}e_y+\frac{z_B}{i_y^{\ 2}}e_z=0$$

上式可视为载荷作用点坐标e_y、 e_z之间关系的直线方程，即当中性轴绕*B*点旋转时，载荷作用点移动的轨迹是连接点1，2 的直线。 同理得到3、4点，最终得到矩形截面核心。

9-3 拉压与弯曲

例9-2 校核AB横梁的强度，已知: F=8kN, [σ]=120MPa, 截面为两个No12.6的槽钢。

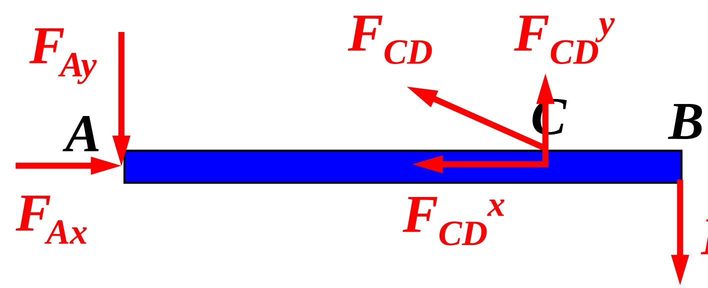


解： 1. 外力分析

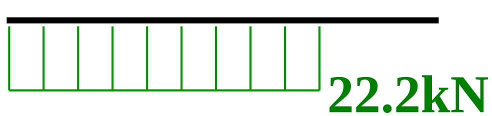
$$F_{CD}=25.6\text{kN}$$

$$F_{CD}{}^{x}=22.2\text{kN} \qquad F_{Ax}=22.2\text{kN}$$

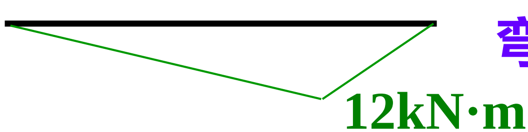
$$F_{CD}{}^{y}=12.8\text{kN} \qquad F_{Ay}=4.8\text{kN}$$



2. 内力分析



轴力图



弯矩图

3. 应力分析

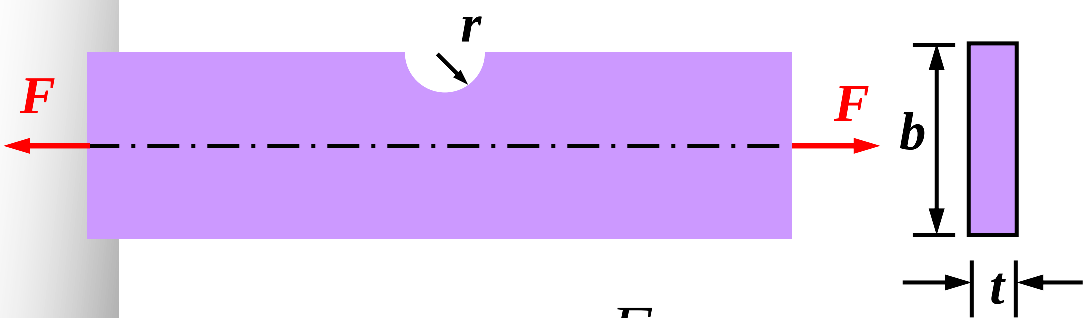
$$A=15.69\text{cm}^2$$

$$W_z=62.137\text{cm}^3$$

$$\left|\sigma_{\max}^{-}\right|=\frac{|F_{\mathrm{N}}|}{2A}+\frac{|M|_{\max}}{2W_z}=104\text{MPa}<[\sigma]$$

强度足够!

9-3 拉压与弯曲

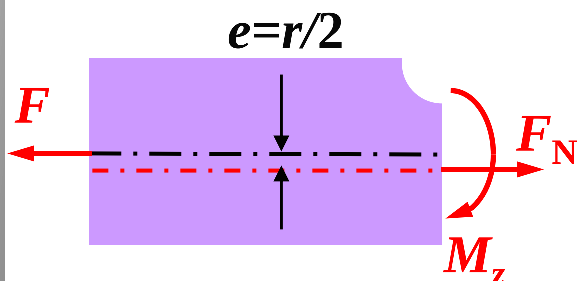


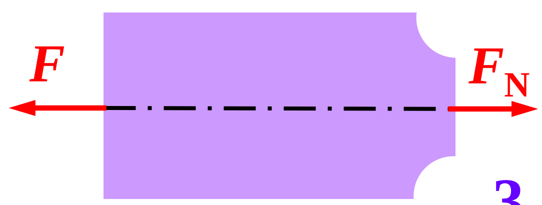
例9-3 梁的上缘有一裂纹，现开一小孔去除裂纹，试问梁的强度是否安全？$[\sigma]=140\text{MPa}$，$b=80\text{mm}$，$t=10\text{mm}$，$r=10\text{mm}$，$F=80\text{kN}$。

解： **1. 开孔前**

$$\sigma=\frac{F}{A}=100\text{MPa}$$

2. 开孔后





$$F_{\text{N}}=F \qquad |M_z|=Fe=Fr/2$$

$$\sigma'=\frac{F_{\text{N}}}{A}=\frac{F}{(b-r)t}=114\text{MPa}$$

$$\sigma''=\frac{|M_z|}{W_z}=\frac{Fr/2}{(b-r)^2t/6}=49\text{MPa}$$

$$\sigma_{\max}=\sigma'+\sigma''=163\text{MPa}$$

强度不够！

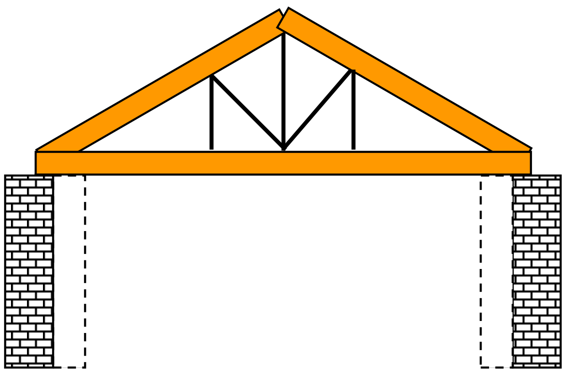
3. 对称位置再开孔

$$\sigma=\frac{F}{(b-2r)t}=133\text{MPa}$$

强度足够！

9-3 拉压与弯曲

讨论题：为什么不能把房子盖得大一点?

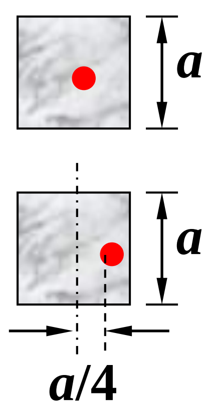


分析：

（1）移动前：纯压缩变形

$$\sigma = -F_{\mathrm{N}} / a^2$$

（2）移动后：压缩+弯曲变形



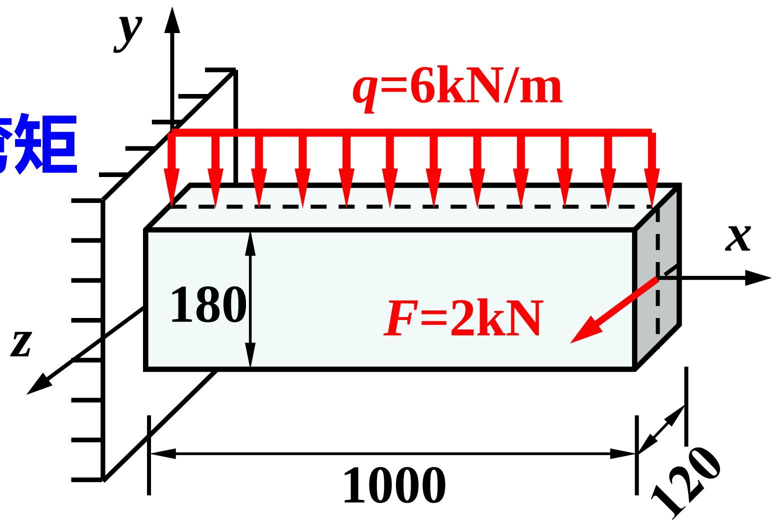
$$\sigma' = -F_{\mathrm{N}} / a^2 \qquad |\sigma''| = \frac{F_{\mathrm{N}} a/4}{a^3/6}$$

$$\sigma_{\max}^{-} = \sigma' - |\sigma''| = -5F_{\mathrm{N}} / 2a^2$$

$$\sigma_{\max}^{+} = \sigma' + |\sigma''| = F_{\mathrm{N}} / 2a^2$$

9-3 拉压与弯曲

例9-4 梁受力及尺寸(单位mm)如图，弹性模量 E=100GPa，试求梁上最大正应力和最大挠度。



解：1、内力计算：悬臂梁根部的弯矩

$$\left|M_z\right| = \frac{ql^2}{2} = 3\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\left|M_y\right| = Fl = 2\text{kN}\cdot\text{m}$$

2、应力计算

$$\sigma_x^{\ 1} = \frac{\left|M_z\right|}{W_z} = \frac{6\left|M_z\right|}{bh^2} = 4.63\text{MPa}$$

$$\sigma_x^{\ 2} = \frac{\left|M_y\right|}{W_y} = \frac{6\left|M_y\right|}{hb^2} = 4.63\text{MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_x^{\ 1} + \sigma_x^{\ 2} = 9.26\text{MPa}$$

3、挠度计算（查表）

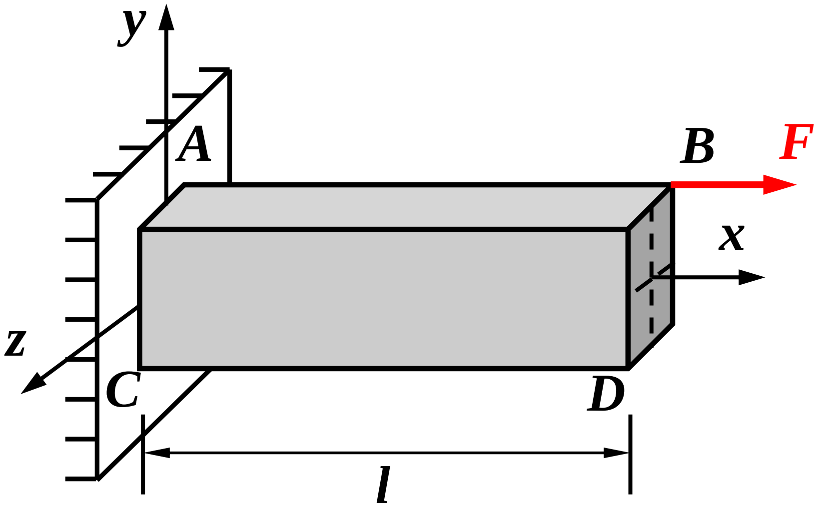
$$f_y = \frac{ql^4}{8EI_z} = 0.1286\text{mm}\ (\downarrow)$$

$$f_z = \frac{Fl^3}{3EI_y} = 0.2572\text{mm}\ (\swarrow)$$

$$f = \sqrt{f_y^{\ 2} + f_z^{\ 2}} = 0.2876\text{mm}$$

9-3 拉压与弯曲

例9-5 悬臂梁受偏心载荷F作用，梁截面为边长a的正方形，弹性模量E，问最大拉应力、最大压应力各是多少，棱边AB、CD的伸长量是多少?



解：1、内力计算

$$F_{\mathrm{N}x}=F \qquad \left|M_z\right|=\left|M_y\right|=Fa/2$$

2、应力计算

$$\sigma_x^1=\frac{F_{\mathrm{N}x}}{A}=\frac{F}{a^2}$$

$$\sigma_x^2=\frac{\left|M_z\right|}{W_z}=\frac{3F}{a^2} \qquad \sigma_x^3=\frac{\left|M_y\right|}{W_y}=\frac{3F}{a^2}$$

3、应力叠加

$$\sigma_{AB}^{+\max}=\frac{7F}{a^2} \qquad \sigma_{CD}^{-\max}=-\frac{5F}{a^2}$$

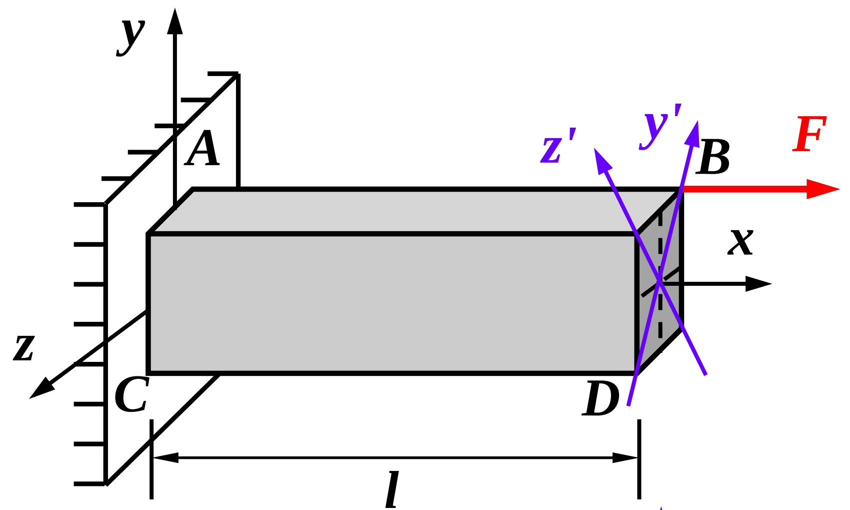
4、变形计算

$$\Delta l_{AB}=\frac{\sigma_{AB}^{+\max}l}{E}=\frac{7Fl}{Ea^2}$$

$$\Delta l_{CD}=\frac{\sigma_{CD}^{-\max}l}{E}=-\frac{5Fl}{Ea^2}$$

9-3 拉压与弯曲

例9-5 悬臂梁受偏心载荷F作用，梁截面为边长a的正方形，弹性模量E，问最大拉应力、最大压应力各是多少，棱边AB、CD的伸长量是多少?



解法二：1、建立新的坐标系

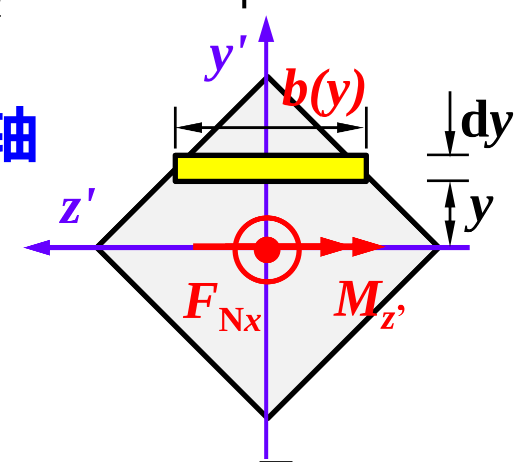
$$F_{\mathrm{N}x}=F \qquad |M_{z'}|=\sqrt{2}Fa/2$$

2、拉伸应力 $$\sigma_x^{1}=\frac{F_{\mathrm{N}x}}{A}=\frac{F}{a^2}$$

3、弯曲应力 $$\sigma_x^{2}=\frac{|M_{z'}|y'_{\max}}{I_{z'}}$$

$$I_{z'}=2\int_0^{\sqrt{2}a/2}y^2\mathrm{d}A=2\int_0^{\sqrt{2}a/2}y^2(\sqrt{2}a-2y)\mathrm{d}y=\frac{a^4}{12}$$ **或利用转轴公式计算**

$$\sigma_x^{2}=\frac{\sqrt{2}Fa}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}a}{2}/(\frac{a^4}{12})=\frac{6F}{a^2}$$



$$b(y)=\sqrt{2}a-2y$$

4、应力叠加 $$\sigma^{+}_{\max}=\frac{7F}{a^2} \qquad \sigma^{-}_{\max}=-\frac{5F}{a^2}$$

学前问题：

- 解题思路?
- 各组合变形的特点?

今日作业

9-1，9-6，9-9

9-6题提示：当小车走到AB梁的中间截面时最危险。
9-9题：矩形截面的尺寸为 b 和 h 。

上节课内容回顾

组合变形求解思路：

组合变形 $\xrightarrow[\text{分解简化}]{\text{外力分析}}$ 若干基本变形 $\xrightarrow[F_N,\ T,\ M]{\text{内力分析}}$

确定危险截面 $\xrightarrow[\sigma、\tau]{\text{应力分析}}$ 确定危险点 $\xrightarrow[\text{应力叠加}]{\text{应力状态分析}}$

$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ $\xrightarrow[\text{塑、脆性}]{\text{强度理论}}$ 相当应力σ_r $\xrightarrow{\text{强度计算}}$ $\sigma_r \le [\sigma]$

斜弯曲、拉压+弯曲：危险点的应力状态都是单向应力状态！

第九章 组合变形

- 概述
- 斜弯曲
- 拉压与弯曲
- 弯曲与扭转
- 其它组合变形

学前问题：

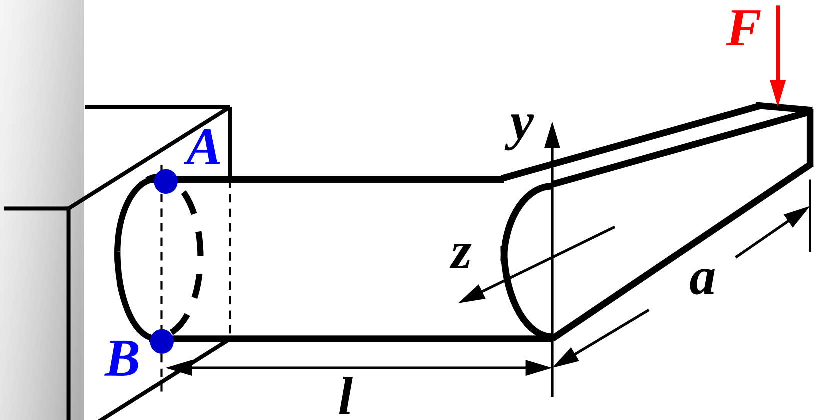
- 解题思路?
- 各组合变形的特点?

西安交通大學

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

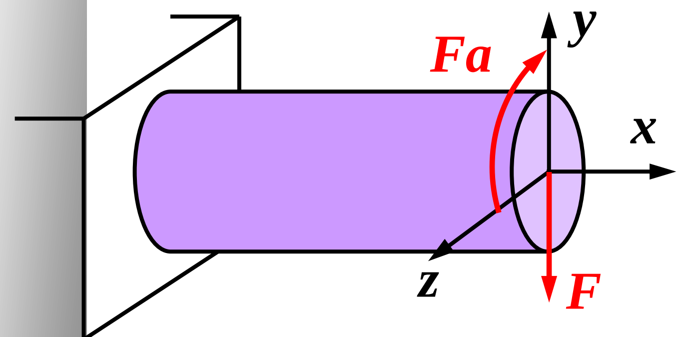
9-4 弯曲与扭转

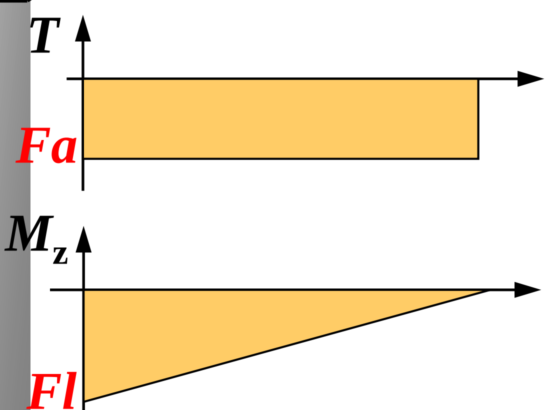


1、外力分析： 弯扭组合变形

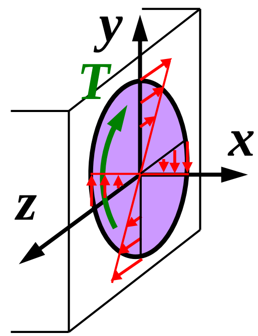
2、内力分析： 固定端为危险截面

$$|T| = Fa \qquad |M_z| = Fl$$



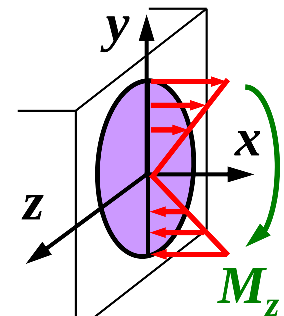


3、应力分析： 危险点为*A*、*B*点

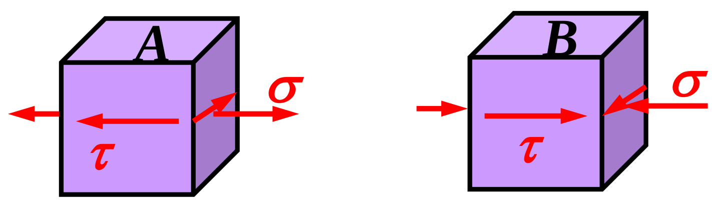


$$\tau_\rho = \frac{|T|\rho}{I_p}$$

$$\sigma_x = \frac{|M_z|y}{I_z}$$



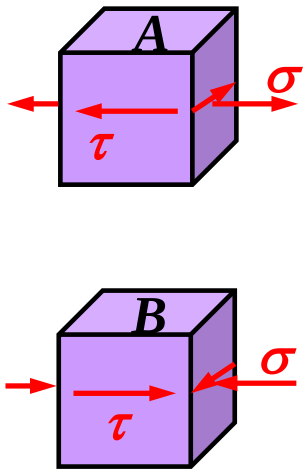
4、应力状态分析：



$$\tau = \frac{|T|}{W_p}$$

$$\sigma = \frac{|M_z|}{W_z}$$

9-4 弯曲与扭转



4、应力状态分析：

注意：危险点的应力状态是拉剪应力状态！

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \qquad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma = \frac{|M_z|}{W_z}, \tau = \frac{|T|}{W_p}$$

5、第三、第四强度理论：

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_z^2 + T^2}}{W_z}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_z^2 + 0.75T^2}}{W_z}$$

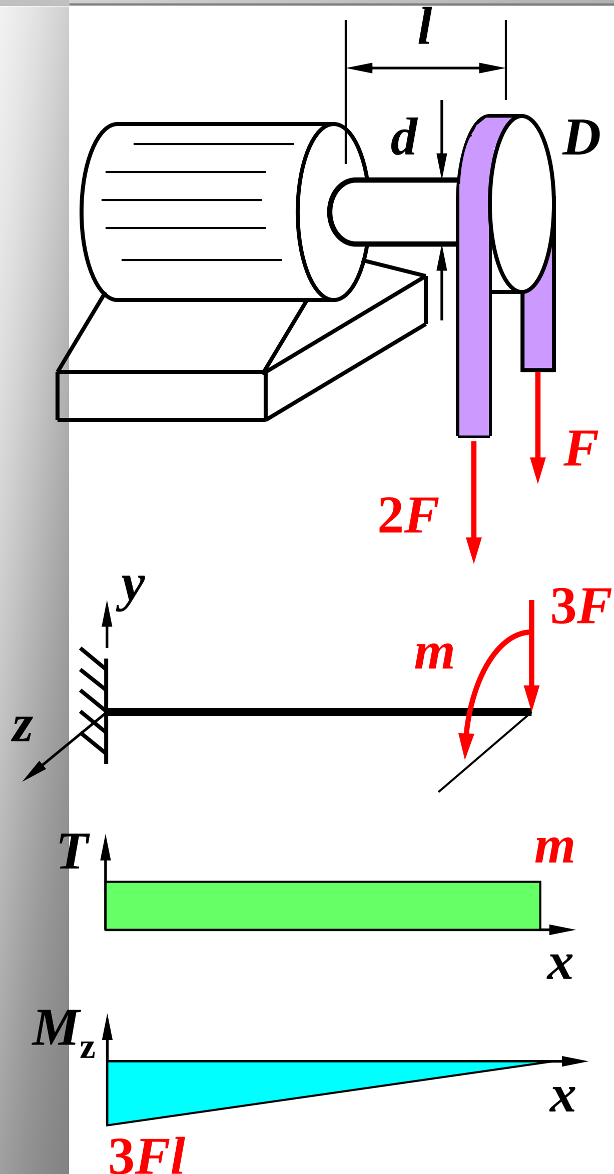
对于圆截面（空心或实心）

$$W_p = 2W_z$$

（可以当公式使用）

6、强度条件

$$\sigma_r \le [\sigma]$$



例9-6 按第三强度理论校核电动机传动轴的强度。 P=9kW，n=715rpm，D=250mm，d=40mm，l=120mm，[σ]=60MPa。

解：1、外力分析：

$$m=(2F-F)D/2$$

$$F=960\text{N}$$

$$m=9549\,P/n=120\text{N}\cdot\text{m}$$

2、内力分析：危险截面在固定端

$$|M_z|=3Fl=345\text{N}\cdot\text{m},\quad |T|=120\text{N}\cdot\text{m}$$

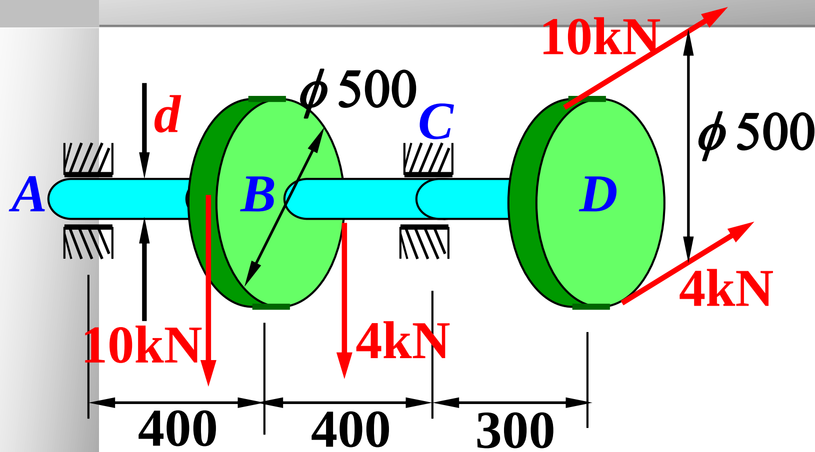
3、应力强度计算(弯曲+扭转)：

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M_z^2+T^2}}{W_z}=58.1\text{MPa}$$

强度足够!

讨论： 弯曲正应力：54.9MPa
弯曲切应力：3.05MPa（忽略）
扭转切应力：9.55MPa

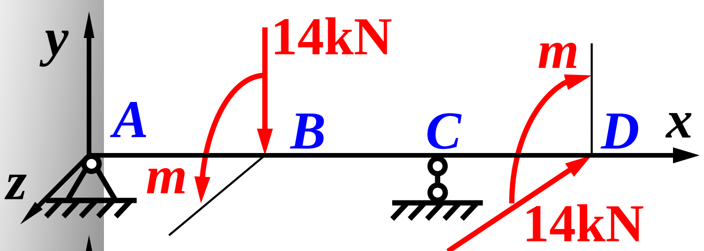
9-4 弯曲与扭转



例9-7 [σ]=80MPa，按第四强度理论设计皮带轮传动轴的直径d。

解： **1、外力分析**

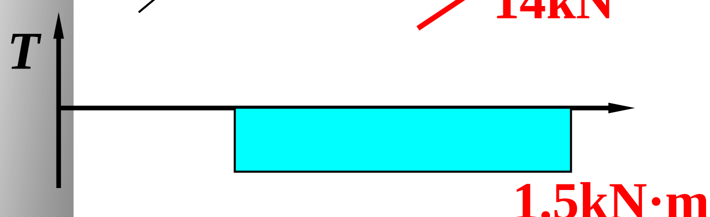
$$m=(10-4)\times\frac{0.5}{2}=1.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

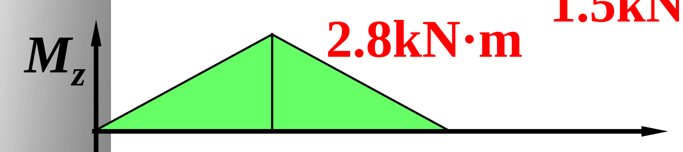


2、内力分析

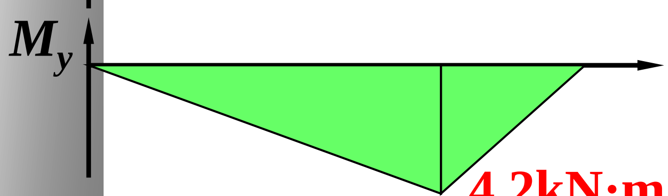
B 截面: $\left|M_{B合}\right|=\sqrt{2.8^2+2.1^2}=3.5\text{kN}\cdot\text{m}$

C 截面: $\left|M_{C合}\right|=4.2\text{kN}\cdot\text{m}$

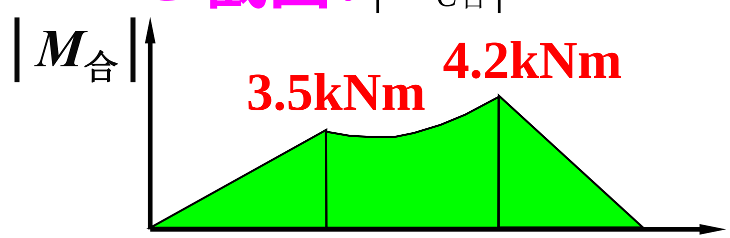




竖直面内



水平面内



C 截面为危险截面！

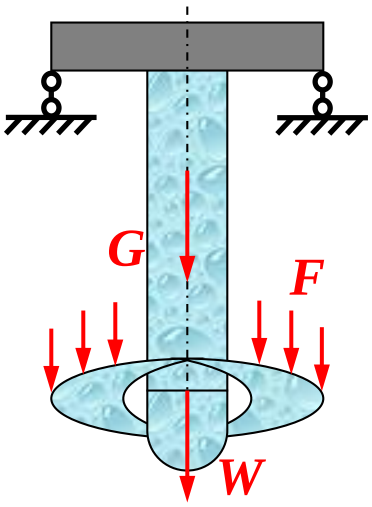
3、应力强度分析

$$\sigma_{r4}=\frac{\sqrt{M_{C合}^2+0.75T^2}}{W}\le[\sigma]$$

$$d=82.4\text{mm}$$

9-5 其它组合变形问题

例9-8 水轮机主轴输出功率P=37500kW，转速n=150rpm，主轴重G=120kN，叶轮重W=180kN，轴向推力F=5000kN，许用应力$[\sigma]$=100MPa，主轴内径d=350mm，外径D=750mm，试用第四强度理论校核叶轮主轴的强度。



解： 1、内力分析（主轴根部）

$$T = M_e = 9549 P/n = 2388\text{kN}\cdot\text{m}$$ 扭矩

$$F_{合} = F + G + W = 5300\text{kN}$$ 轴力

2、应力分析

$$\tau = \frac{T}{W_p} = 30.27\text{MPa}$$

$$W_p = \frac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{16}$$

$$\sigma = \frac{F_{合}}{A} = 15.34\text{MPa}$$

$$A = \frac{\pi D^2(1-\alpha^2)}{4}$$

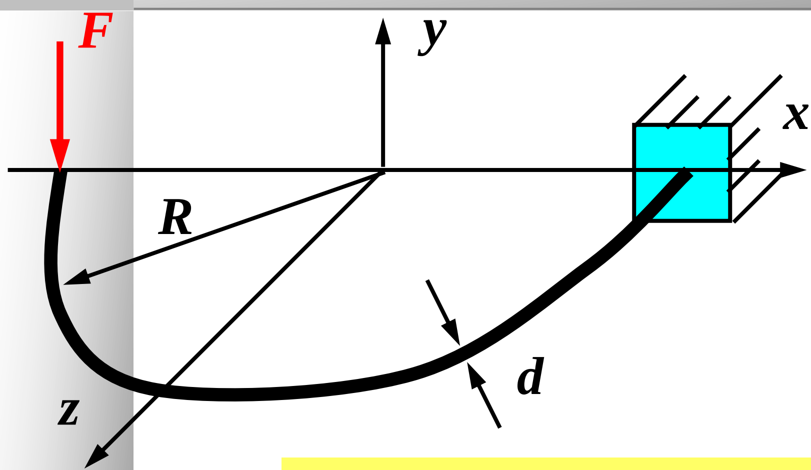
危险点为拉剪应力状态

3、强度计算(拉伸+扭转)

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 54.6\text{MPa}$$

强度足够！

9-5 其它组合变形问题



例9-9 已知水平半圆曲杆半径R，杆为圆截面，直径 d，材料许用应力 $[\sigma]$。用第三强度理论计算许可载荷。

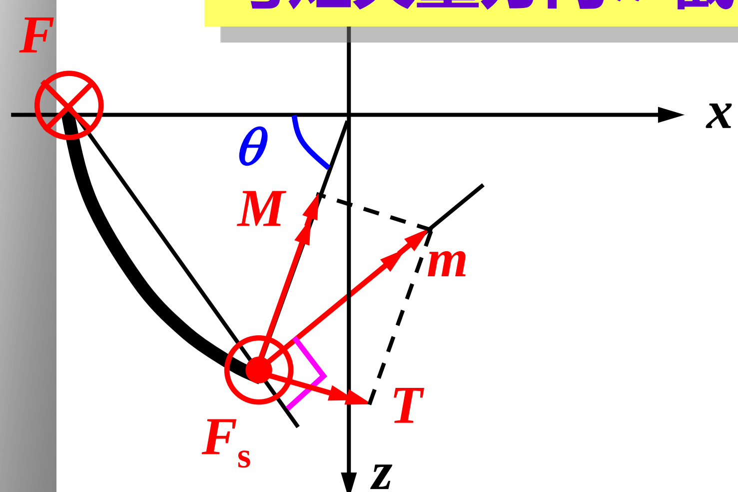
解： 1、内力分析

$$F_s = F \qquad m = 2FR\sin\frac{\theta}{2}$$

$$T = m\sin\frac{\theta}{2} = FR(1-\cos\theta)$$ 扭矩

$$M = m\cos\frac{\theta}{2} = FR\sin\theta$$ 弯矩

扭矩矢量方向⊥截面
弯矩矢量方向//截面



2、强度计算

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W} = \frac{m}{W} = \frac{2FR}{W}\sin\frac{\theta}{2}$$

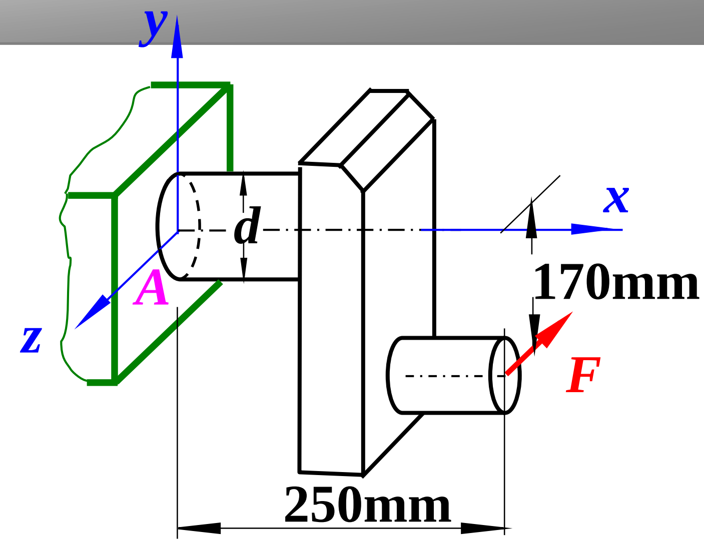
当θ=180°时： $\sigma_{r3}^{\max} = \dfrac{2FR}{W} \le [\sigma]$

$$[F] = \frac{\pi d^3[\sigma]}{64R}$$ 根部为扭转破坏

圆截面的弯扭组合变形

9-5 其它组合变形问题

例9-10 已知$F = 50\ \text{kN}$, $d = 120\ \text{mm}$，$[\sigma] = 80\ \text{MPa}$。按第三强度理论校核$A$截面的强度。

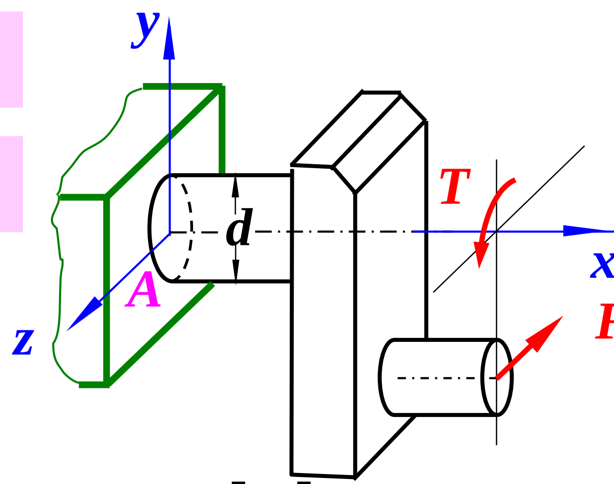


解：1. 外力分析

2. 内力分析（A截面）

$$|T| = Fa = 50\times0.17 = 8.5\,\text{kN}\cdot\text{m}$$ 扭矩

$$|M_y| = Fl = 50\times0.25 = 12.5\,\text{kN}\cdot\text{m}$$ 弯矩

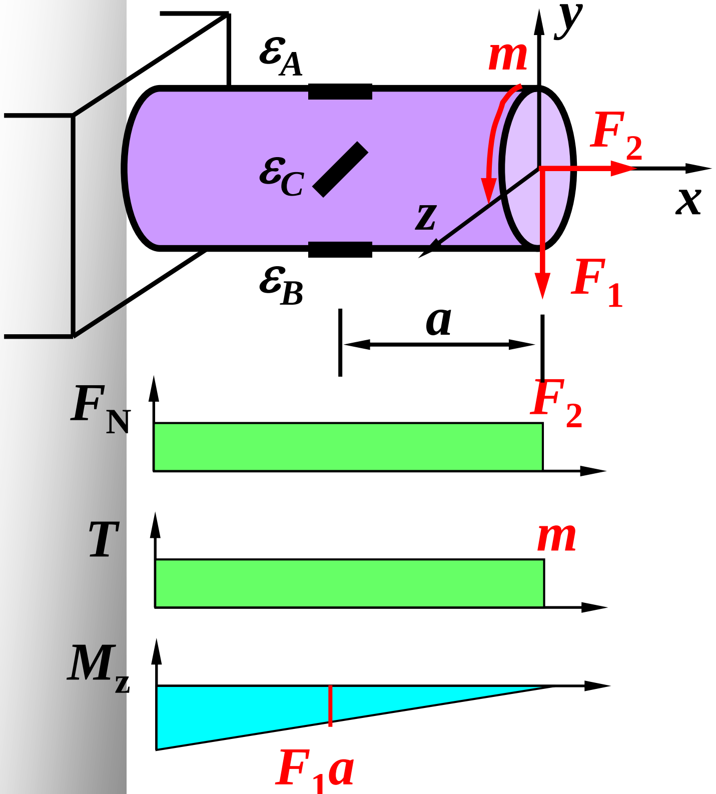


3. 强度计算（弯扭组合变形）

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_y^2+T^2}}{W_z} = \frac{32\sqrt{M_y^2+T^2}}{\pi d^3} = 89.1\text{MPa} \geq [\sigma]$$

强度不够！ **工程上认为：不超过许用应力的5%仍然安全！**

9-5 其它组合变形问题

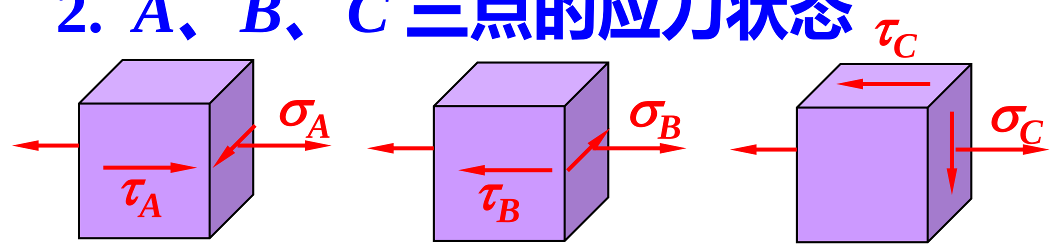


例9-11 已知： ε_A, ε_B, ε_C, E, μ, a, d

求： F_1，F_2，m。

解：1. 内力分析

2. A、B、C 三点的应力状态



$$\sigma_A = \frac{F_2}{A} + \frac{F_1 a}{W} \qquad \tau_A = \frac{m}{W_p} = \tau_B = \tau_C$$

$$\sigma_B = \frac{F_2}{A} - \frac{F_1 a}{W} \qquad \sigma_C^{45^\circ} = \frac{\sigma_C}{2} - \tau_C$$

$$\sigma_C = \frac{F_2}{A} \qquad \sigma_C^{135^\circ} = \frac{\sigma_C}{2} + \tau_C$$

3. 应变分析

$$\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{E} \qquad \varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E}$$

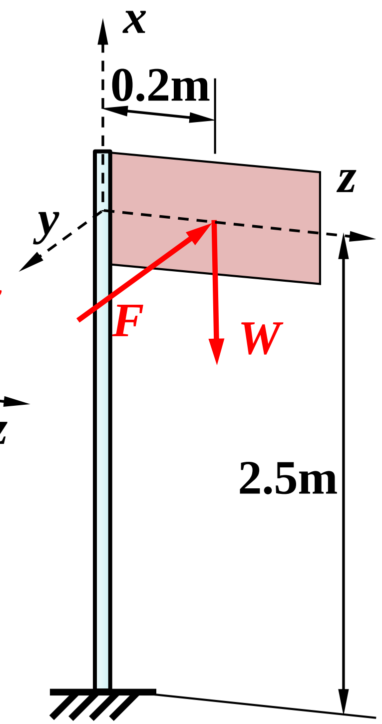
$$\varepsilon_C = \frac{1}{E}(\sigma_C^{45^\circ} - \mu \sigma_C^{135^\circ})$$

4. 联立求解，依次求出F_1，F_2，m

若考虑剪力产生的切应力： $\tau_C = \dfrac{m}{W_p} + \dfrac{4F_2}{3A}$

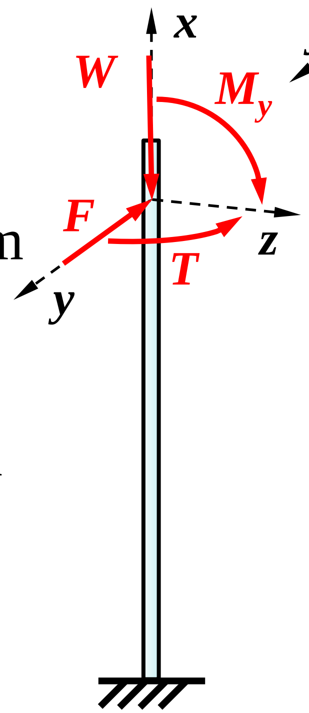
9-5 其它组合变形问题

例9-12 标语牌自重W=150N，受水平风力F=120N作用，钢管内外径d=45mm， D=50mm，许用应力[σ]=70MPa。试按第三强度理论校核钢管的强度。



解： **1、外力分析**

2、内力分析（根部）



$$F_{\mathrm{N}x} = W = -150\mathrm{N}$$

$$M_y = W \times 0.2 = 30\mathrm{N \cdot m}$$

$$T = F \times 0.2 = 24\mathrm{N \cdot m}$$

$$M_z = F \times 2.5 = 300\mathrm{N \cdot m}$$

2、应力分析(压缩+扭转+弯曲+弯曲)

$$\left|\sigma_{F_{\mathrm{N}}}\right| = \frac{\left|F_{\mathrm{N}x}\right|}{A} = 0.4\mathrm{MPa} \qquad \tau = \frac{T}{W_{\mathrm{p}}} = 2.84\mathrm{MPa}$$

$$\left|\sigma_M\right| = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W} = 71.44\mathrm{MPa}$$

3、强度计算

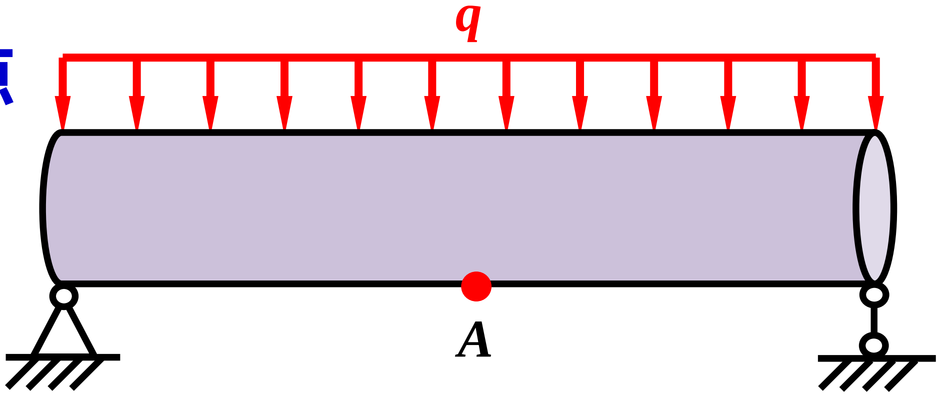
$$\sigma_{\mathrm{r3}} = \sqrt{\left(\left|\sigma_{F_{\mathrm{N}}}\right| + \left|\sigma_M\right|\right)^2 + 4\tau^2} = 72\mathrm{MPa}$$

结论：未超过许用应力的5%，工程上认为仍然安全！

4、讨论：忽略标语牌自重 $\sigma_{\mathrm{r3}} = 71\mathrm{MPa}$

9-5 其它组合变形问题

例9-13 两端简支的圆柱形储油罐长度l=9.6m，内径d=2.6m，厚度t=8mm，承受内压p=0.6MPa和均布载荷q，许用应力[σ]=160MPa。试按第三强度理论求许可分布载荷集度[q]。



解：1、应力分析，确定危险点

2、储油罐A点的环向应力

$$\sigma_{\mathrm{t}} = \frac{pd}{2t} = 97.5\mathrm{MPa}$$

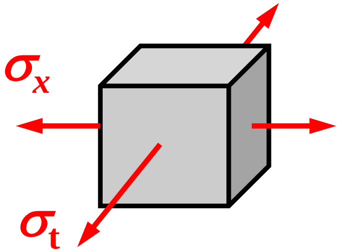
3、储油罐A点的轴向应力

$$M = \frac{ql^2}{8} = 11.52q$$

$$\sigma_x = \frac{pd}{4t} + \frac{M}{W} = 48.75 + 0.27q$$

这里取q的单位为kN/m，应力的单位为MPa。

4、A点的应力状态



$$\sigma_1 = \sigma_x$$

$$\sigma_2 = \sigma_t$$

$$\sigma_3 = 0$$

5、强度计算

$$\sigma_{\mathrm{r3}} = \sigma_x \le [\sigma] \qquad q \le 412\mathrm{kN/m}$$

学前问题：

- 解题思路?
- 各组合变形的特点?

第九章的基本要求

1．了解组合变形的概念，理解运用叠加原理求解组合变形问题的思路；

2．熟练掌握斜弯曲、拉压弯曲、扭转弯曲等典型组合变形强度问题的特点和求解过程。

今 日 作 业

9-14，9-15，9-18

9-15题有误：扭矩 *T* 的单位是 kNm
9-18题提示：剪力产生的切应力忽略