空气与气体动力学

张科

回顾：

1.超声速线化理论: $Ma_\infty > 1$：　$\lambda^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0$　解为：$\hat{\phi} = f(x - \lambda y)$

$$\boxed{C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}}$$

2.

$$\boxed{C_l = \frac{4\alpha}{B}}\qquad \boxed{C_{dw} = \frac{4\alpha^2}{B} + \frac{4}{cB}\int_0^c \left[\left(\frac{dy_f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_t}{dx}\right)^2\right] dx}$$

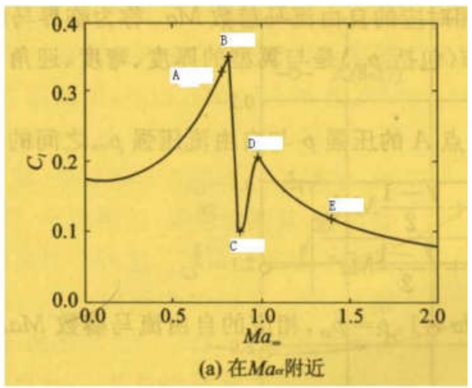
升致波阻

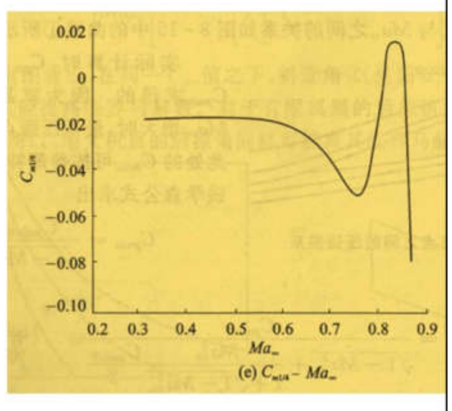
(α引起，与f,t无关)!

零升波阻

(与f,t有关)!

3.$\boldsymbol{Ma}$数对机翼气动特性影响：





8.2　在马赫数为 4 的流动中的一激波角为 30° 的斜激波，波前压力与温度分别为 2.65×10^4 Pa，233.3 K。（相应于 10 000 m 标准海拔）。试计算波后压力、温度、马赫数、总压、总温及通过激波的熵增。

8.2. 解：$\beta=30^\circ$, $Ma_1=4$. 查图 8.6 得 $\theta=17^\circ$ 附表 A：$\frac{p_{01}}{p_1}=151.8$，$\frac{T_{01}}{T_1}=4.2$

$Ma_{1n}=Ma_1\sin\beta=2$.

附表 B：$\frac{p_2}{p_1}=4.5$，$\frac{T_2}{T_1}=1.687$，$Ma_{2n}=0.5774$，$\frac{p_{02}}{p_{01}}=0.7209$

$\therefore p_2=\frac{p_2}{p_1}\cdot p_1=11.925\times10^4\,\text{Pa}$. $\quad p_{02}=\frac{p_{02}}{p_{01}}\cdot\frac{p_{01}}{p_1}\cdot p_1=2.9\times10^6\,\text{Pa}$

$T_2=\frac{T_2}{T_1}\cdot T_1=393.58\,\text{K}$. $\quad T_{02}=\frac{T_{02}}{T_{01}}\cdot\frac{T_{01}}{T_1}\cdot T_1=1\times4.2\times233.3=979.86\,\text{K}$

$$Ma_2=\frac{Ma_{2n}}{\sin(\beta-\theta)}=\frac{0.5774}{\sin13^\circ}=2.567$$

$$s_2-s_1=-R\ln\frac{p_{02}}{p_{01}}=-287\times\ln0.7209=93.922\ \text{J/kg·K}$$

8.4 一激波角为 36.87° 的斜激波。波前 $Ma_1 = 3$，$p_1 = 1$ atm。试以下面两种方法计算波后总压：

(1) 附录 B 中，$p_{0,2}/p_{0,1}$（正确的方法）；

(2) 附录 B 中，$p_{0,2}/p_1$（不正确的方法）。

比较计算结果。

8.4. 解：$Ma_1=3$. $\beta=36.87°$. $Ma_{1n}=Ma_1\sin\beta=1.8$.

附表B：$\frac{p_{02}}{p_{01}}=0.8127$，$\frac{p_{02}}{p_1}=4.67$

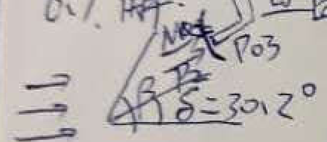
(1). $p_{02}=\frac{p_{02}}{p_{01}}\cdot\frac{p_{01}}{p_1}\cdot p_1=0.8127\times36.73\times1=29.85\,atm$

表A. $Ma_1=3$ 时 $\frac{p_{01}}{p_1}=36.73$

(2). $p_{02}=\frac{p_{02}}{p_1}\cdot p_1=4.67\,atm$

8.7　考虑一半楔型，角度为 30.2°，处于 $Ma_\infty = 3.5$，$p_\infty = 0.5$ atm 的来流中，在半楔形上方的激波后放置一皮托管，求皮托管测得的压力值。

8.7 解: 查图8.6 $Ma=3.5$, $\delta=30.2$ 时 $\beta=48°$



$Ma_\infty=3.5$

$p_\infty=0.5\,atm$

$$Ma_{1n}=Ma_\infty \sin\beta=2.6$$

附表B: $Ma_{2n}=0.5039$　$Ma_2=\dfrac{Ma_{2n}}{\sin(\beta-\delta)}=1.65$

$$\frac{p_2}{p_\infty}=7.72 \quad \therefore p_2=3.86\,atm.$$

$Ma_2=1.65$处皮托管前有正激波:

附表B: $Ma=1.65$ 时. $\dfrac{p_{03}}{p_2}=0.4011$

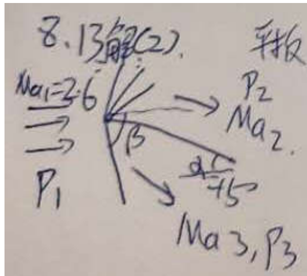
∴皮托管总压 $p_{03}=\dfrac{p_{03}}{p_2}\cdot p_2=1.548\,atm.$

8.13　当马赫数为 2.6 时，分别计算无限薄平板下面给定的三个攻角下的升力系数和波阻系数：

(1)$\alpha = 5^\circ$；

(2)$\alpha = 15^\circ$；

8.13解(2). 平板上前缘产生膨胀波. $\delta = 15^\circ$



附表C: $\nu(Ma_1) = 41.41^\circ$

$\nu(Ma_2) = \nu(Ma_1) + \delta = 56.41^\circ$

$\therefore Ma_2 = 3.37$　　附表A: $\frac{p_{01}}{p_1} = 19.95$

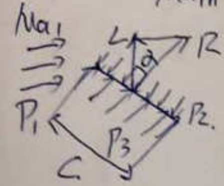
$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_{02}} \cdot \frac{p_{01}}{p_1} = \frac{19.95}{63.38} = 0.3148$　　$\frac{p_{02}}{p_2} = 63.38$

4

平板下前缘产生斜激波: $\theta = \alpha = 15^\circ$, $Ma_1 = 2.6$

查图8.6: $\beta = 36^\circ$

$Ma_{1n} = Ma_1 \sin\beta = 1.528$　查附表B: $\frac{p_3}{p_1} = 2.564$



$L = R\cos\alpha = (p_3 - p_2)c\cos\alpha$

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \cdot c} = \frac{L}{\frac{1}{2}\frac{\gamma p_\infty}{a_\infty^2} V_\infty^2 \cdot c} = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2} \cdot \frac{(p_3 - p_2)c\cos\alpha}{p_\infty \cdot c}$$

$$= \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2}\left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}\right)\cos\alpha$$

$$\therefore C_l = \frac{2}{1.4 \times 2.6}(2.564 - 0.3148)\cos 15^\circ$$

$$= 0.459$$

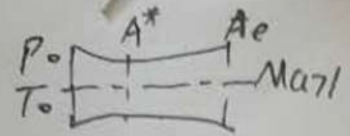
$$C_d = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2}\left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}\right)\sin\alpha$$

$$= \frac{2}{1.4 \times 2.6}(2.564 - 0.3148)\sin 15^\circ$$

$$= 0.123$$

9.1　收缩-扩张喷管的滞止压力和滞止温度分别为 5 atm 和 288 K，气流在喷管内等熵膨胀并在出口处达到超声速。如果出口面积与喉道处面积之比为 2.193，计算在出口处的气体性质：Ma_e，p_e，T_e，ρ_e，u_e，$p_{0,e}$，$T_{0,e}$。

9.1. ①



解：$\frac{A_e}{A^*}=2.193$，$p_0=5\,atm$，$T_0=288\,K$，$\rho_0=6.128\,kg/m^3$

查表A得 $Ma_e=2.3$　$\frac{p_0}{p_e}=12.5$，$\frac{T_0}{T_e}=2.058$，$\frac{\rho_0}{\rho_e}=6.076$

$p_e=0.4\,atm$　$p_{0,e}=p_0=5\,atm$

$T_e=139.9\,K$　$T_{0,e}=T_0=288\,K$

$\rho_e=1.0087\,kg/m^3$

9.7 收缩-扩张喷管的出口面积与喉道处面积之比为 1.616，其出口压力和滞止压力分别为 0.947 atm 和 1.0 atm。假设流动是等熵的，计算喉道处的马赫数和压力。

9.7.解：$\frac{A_e}{A_t}=1.616$，$p_e=0.947\,atm$，$p_0=1.0\,atm$

~~若等熵流：则 $p_0/p_e=1.05$~~6

若喉道达 $Ma_t=1$，则 $\frac{A_e}{A^*}=1.616$，$\frac{p_0}{p_{e3}}=1.11$

$p_{e3}=0.909$

$\because p_e>p_{e3}$，$\therefore$ 喉道 $Ma_t<1$.

$\frac{A_e}{A_t}=1.616$．$\frac{p_0}{p_e}=1.056$，则 $\frac{A_e}{A^*}=2.166$

$\frac{A_t}{A^*}=\frac{2.166}{1.616}=1.34$

附表A：$Ma_t=0.5$　$\frac{p_0}{p_t}=1.186$　$p_t=0.843\,atm$

9.8　对于题 9.7 中的流动，计算通过喷管的质量流量，假设储室温度为 288 K，喉道面积为 0.3 m^2。

9.8 解：$T_0=288K$.　$\frac{T_0}{T_t}=1.050$　$\frac{\rho_0}{\rho_t}=1.13$

$T_t=274.3K$　$\rho_t=\frac{p_0}{RT_0\cdot 1.13}=1.088\,kg/m^3$

$V_t=Ma_t\cdot\sqrt{\gamma RT}=0.5\times\sqrt{1.4\times 286\times 274.3}=165.7\,m/s$

$\dot{m}=\rho_t V_t A_t=1.088\times 165.7\times 0.3=54\,kg/s$

10.1　在一直角坐标系中给定一速度势函数为

$$\phi(x,y) = V_\infty x + \frac{70}{\sqrt{1-Ma_\infty^2}} e^{-2\pi\sqrt{1-Ma_\infty^2}\,y} \sin 2\pi x$$

自由来流参数为 $V_\infty = 210$ m/s，$p_\infty = 1$ atm 和 $T_\infty = 519°\mathrm{R}$[①]，计算点 $(x,y) = (0.06\ \mathrm{m}, 0.06\ \mathrm{m})$ 处的 Ma，p 和 T 值。

10.1 解：$\hat{u} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{70 \cdot 2\pi}{\sqrt{1-Ma_\infty^2}} e^{-2\pi\sqrt{1-Ma_\infty^2}\,y} \cos 2\pi x$　　$(x,y) = (0.06, 0.06)$ 处

②

$\hat{v} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{70}{\sqrt{1-Ma_\infty^2}} e^{-2\pi\sqrt{1-Ma_\infty^2}\,y} \sin 2\pi x$

$$\begin{cases} \hat{u} = 0.2238\ \mathrm{m/s} \\ \hat{v} = 0.235\ \mathrm{m/s} \end{cases}$$

$T_\infty = 288\mathrm{K}$，$Ma_\infty = \frac{V_\infty}{\sqrt{\gamma R T_\infty}} = \frac{210}{\sqrt{1.4 \times 286 \times 288}}$

$= 0.618$

$$c_p T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} = c_p T + \frac{(V_\infty + \hat{u})^2 + \hat{v}^2}{2}$$

$T = 287.95\ \mathrm{K}$.

$$Ma = \frac{\sqrt{(V_\infty + \hat{u})^2 + \hat{v}^2}}{\sqrt{\gamma R T}} = \frac{210.2239}{339.55} = 0.6191$$

$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$　　$p = p_\infty \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.9994\ \mathrm{atm}$

10.2　在低速不可压缩流动条件下，翼型上某点的压力系数为 -0.54，试用普朗特-格劳尔特法则计算来流马赫数为 0.58 时该点的 C_p。

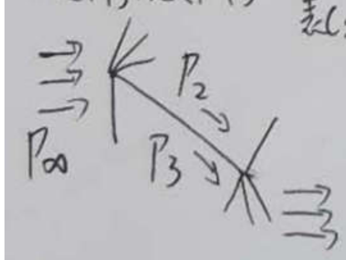
10.2.解：$C_{p,0}=-0.54$.

$$C_p=\frac{C_{p,0}}{\sqrt{1-Ma_\infty^2}}=\frac{-0.54}{\sqrt{1-0.58^2}}=-0.8137.$$

10.3　二维平板在 6 km 高度，以 $Ma_\infty = 2$ 飞行，迎角为 $10°$。试用激波-膨胀波理论计算上、下表面间的压力差。

10.3解: 6Km: $P_\infty = 4.718\times10^4 Pa$ $T_\infty = 249.15K$, $\rho_\infty = 0.6597 kg/m^3$

(P13, 表1.1)



表C: $\nu(Ma_\infty=2) = 26.38°$　$\theta = 10°$

$\nu(Ma_2) = 36.38°$　$Ma_2 = 2.38$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_0}{P_1}\Big/\frac{P_0}{P_2} = \frac{7.824}{14.236} = 0.5477$$

$Ma_\infty = 2$. $\theta = 10°$ 查图8.6 得 $\beta = 39°$

$Ma_{1n} = Ma_\infty \cdot \sin\beta = 1.258$

查表B 得 $P_3/P_1 = 1.686$

$$C_L = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2}\left(\frac{P_3}{P_1} - \frac{P_2}{P_1}\right)\cos\alpha$$

$$= \frac{2}{1.4\times2^2}(1.686 - 0.5477)\cos10° = 0.4004$$

对平板,线化理论: $C_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2-1}} = \frac{4\times10/180\times3.14}{\sqrt{2^2-1}} = 0.4029$