

上节课内容回顾

□ 扭转破坏分析

□ 非圆截面杆的扭转简介

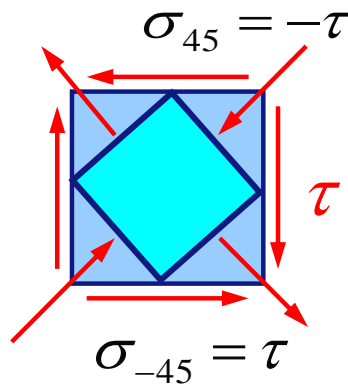
□ 扭转超静定问题的求解

□ 静矩和形心: $S_z = \int_A y dA$ $y_c = \frac{S_z}{A}$

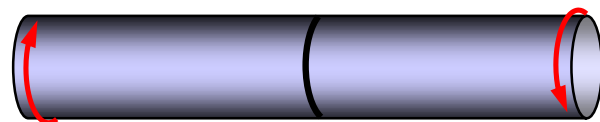
□ 惯性矩和惯性积: $I_z = \int_A y^2 dA$ $I_{yz} = \int_A yz dA$

□ 平行移轴公式: $I_z = I_{zc} + Aa^2$

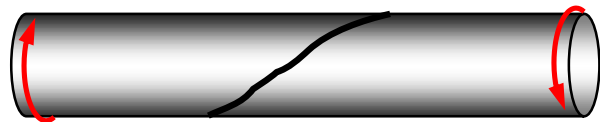
□ 主惯轴、形心主惯轴



低碳钢



灰铸铁



矩形截面 $I_z = \frac{bh^3}{12}$

圆截面 $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$

第四章 弯曲内力

- ✓ 概述
- ✓ 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图
- ✓ 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系
- ✓ 刚架和曲杆的弯曲内力

学前问题：

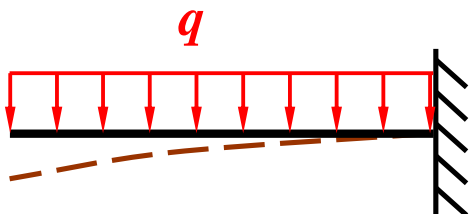
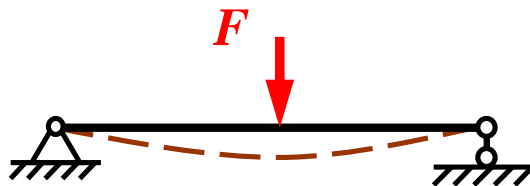
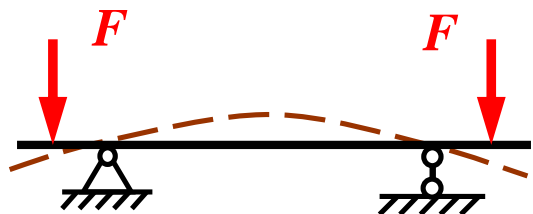
- 弯曲内力？
- 内力的符号规则？
- 弯曲内力如何确定？



航天航空学院--力学中心

4-1 概述

一、力学模型：

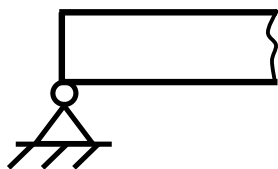


- ◆ **受力特点：**力偶或外力作用垂直于轴线。
- ◆ **变形特点：**杆件的轴线由直线变为曲线。
- ◆ 以**弯曲(Bending)**为主要变形的杆称之为**梁(Beam)**。

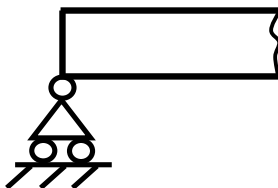
4-1 概述

二、支座形式:

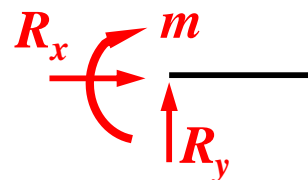
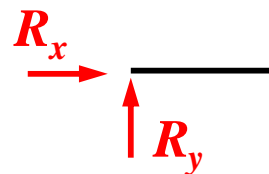
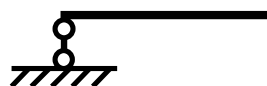
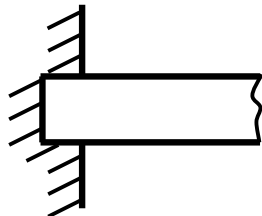
- 固定铰支座:



- 活动铰支座:



- 固定端:



三、静定梁的形式:



简支梁

(Simply Supported Beam)



外伸梁

(Overhanging Beam)

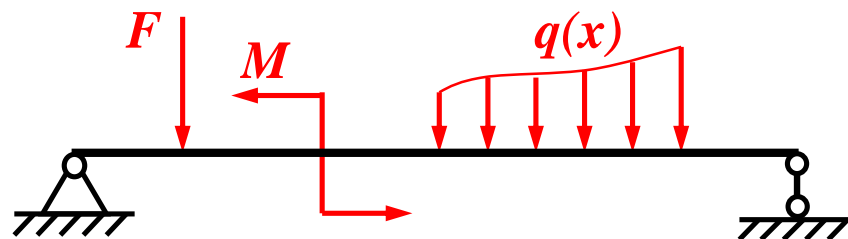


悬臂梁

(Cantilever Beam)

四、载荷的形式:

集中力 集中力偶 分布力

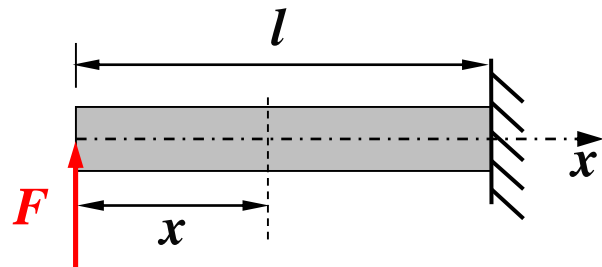


4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

$$\sum F_y = 0 \quad F_s = F \quad F_s \text{ 称为剪力 (Shearing Force)}$$

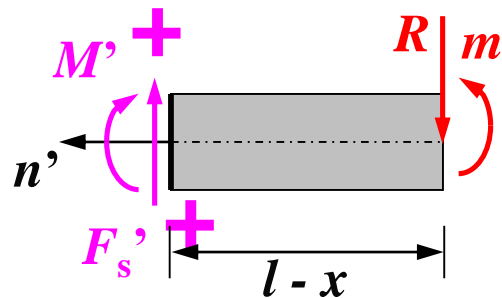
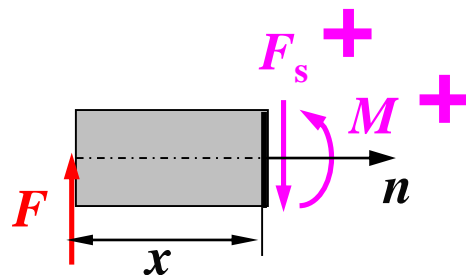
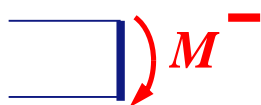
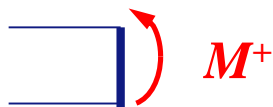
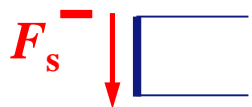
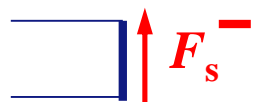
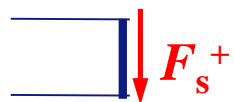
$$\sum m = 0 \quad M = Fx \quad M \text{ 称为弯矩 (Bending Moment)}$$

$$F'_s = F_s = F \quad M' = M = Fx$$



剪力的符号规则:

截面外法线顺时针转90度后与剪力方向一致时, 该剪力为正; 反之为负。



弯矩的符号规则:

使分离体弯曲成凹面向上的弯矩为正; 使分离体弯曲成凹面向下的弯矩为负。

4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

- **剪力、弯矩方程**：用方程的形式表达 F_s 和 M 沿梁轴线的变化规律；
- **剪力、弯矩图**：用图线的形式表达 F_s 和 M 沿梁轴线的变化规律；
- **力区**：能用一个方程来表达内力的变化规律的区间。
- **设正法**：由于截面上内力的方向未知，故将截面上的内力均假设为正值，若求出为正，说明假设与实际一致，作内力图时画在轴线的上方；若求出为负，说明假设与实际相反，作内力图时画在轴线的下方。

4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

例4-1 作内力图。

解：1、支反力： $R_A = F/2$, $R_B = F/2$

2、剪力方程和弯矩方程：

$$F_{s1} = \frac{1}{2} F$$

$$M_1 = \frac{1}{2} Fx$$

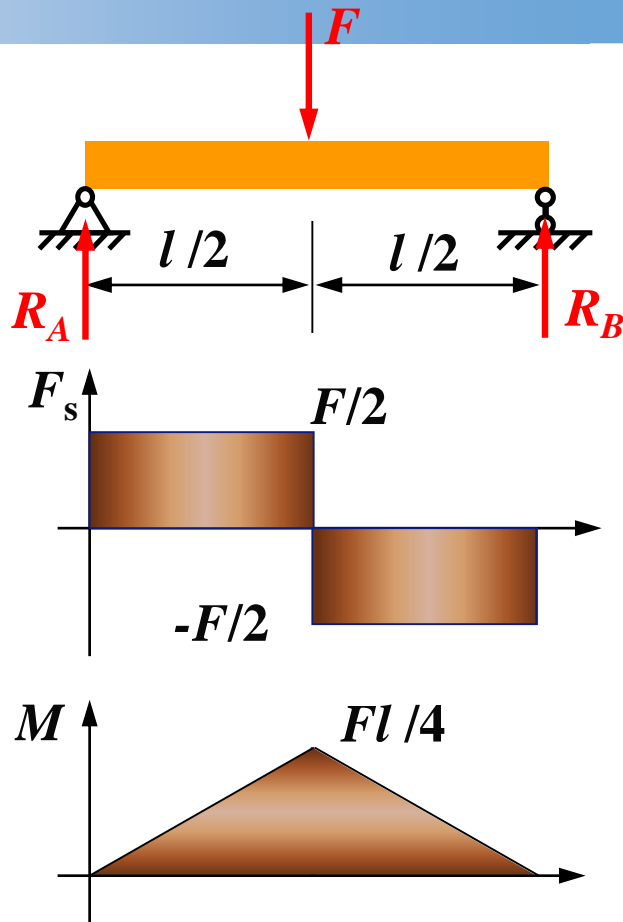
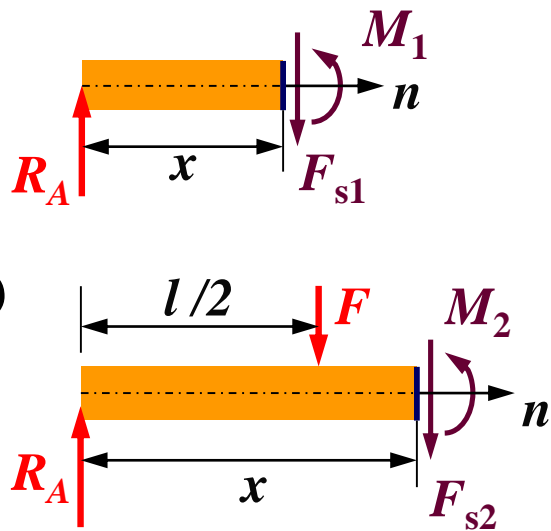
$$(0 \leq x \leq l/2)$$

$$F_{s2} = -\frac{1}{2} F$$

$$M_2 = \frac{1}{2} F(l - x)$$

$$(l/2 \leq x \leq l)$$

3、剪力图 and 弯矩图：



4、最大值：

$$|F_s|_{\max} = F/2 \quad |M|_{\max} = Fl/4$$

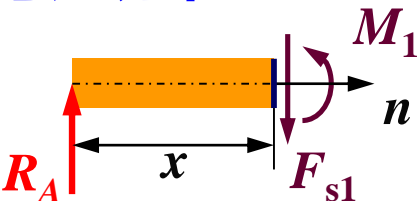
5、讨论：

4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

例4-2 作内力图。

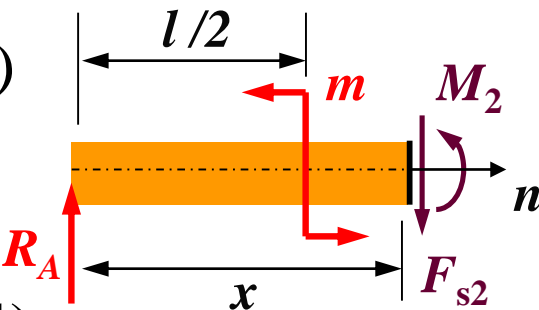
解：1、支反力： $R_A = m/l$ $R_B = -m/l$

2、剪力方程和弯矩方程：

$$F_{s1} = \frac{m}{l}$$


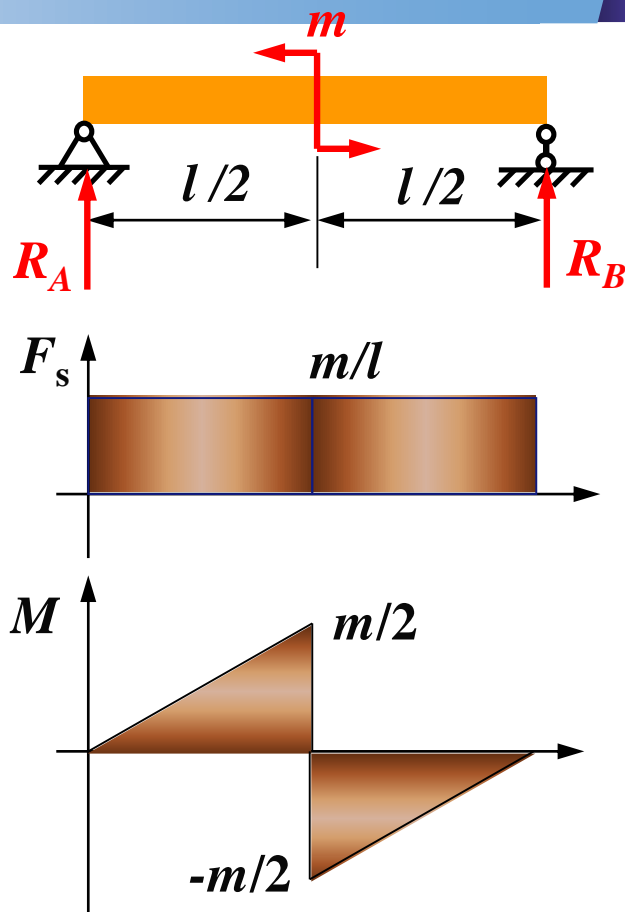
$$M_1 = \frac{m}{l} x$$

$$(0 \leq x \leq l/2)$$


$$F_{s2} = \frac{m}{l}$$
$$M_2 = m\left(\frac{x}{l} - 1\right)$$

$$(l/2 \leq x \leq l)$$

3、剪力图和弯矩图：



4、最大值：

$$|F_s|_{\max} = m/l \quad |M|_{\max} = m/2$$

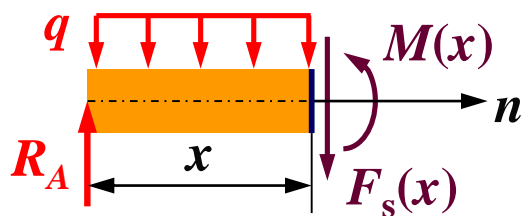
5、讨论：

4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

例4-3 作内力图。

解： 1、支反力： $R_A = R_B = ql/2$

2、剪力方程和弯矩方程：



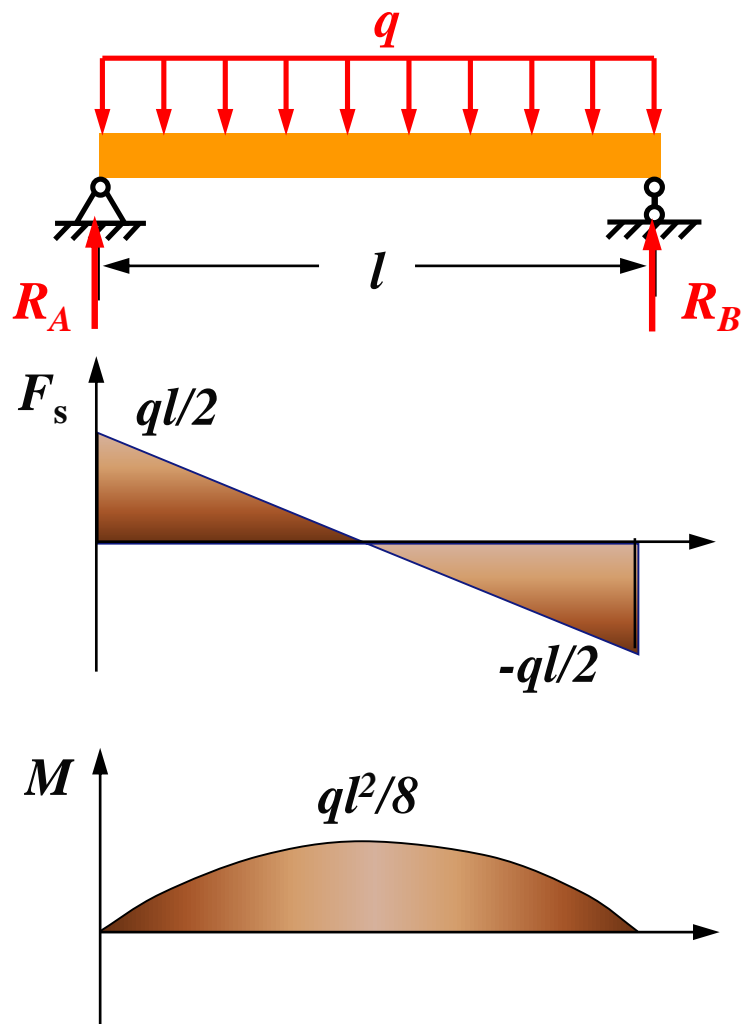
$$F_s = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

3、剪力图和弯矩图：

4、最大值：

$$|F_s|_{\max} = ql/2 \quad |M|_{\max} = ql^2/8$$



5、讨论：

4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

例4-4 作内力图。

解：1、剪力和弯矩方程

$$F_s(x) = -qx \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$M(x) = -\frac{q}{2}x^2$$

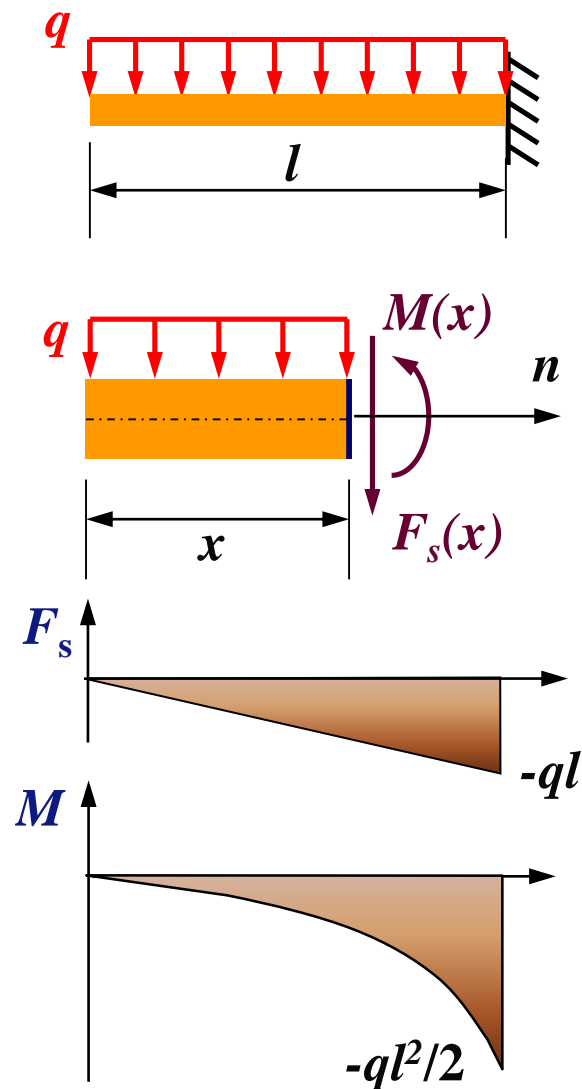
2、剪力图 and 弯矩图

3、最大值

$$|F_s|_{\max} = ql$$

$$|M|_{\max} = \frac{ql^2}{2}$$

4、讨论



4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

例4-5 求图示梁的剪力弯矩方程，并作 F_s 、 M 图。

解：(1) 支反力 $F_A = F_B = qa$

(2) 列 F_s 、 M 方程

$$F_s(x_1) = qa - qx_1 \quad (0 \leq x_1 \leq 2a)$$

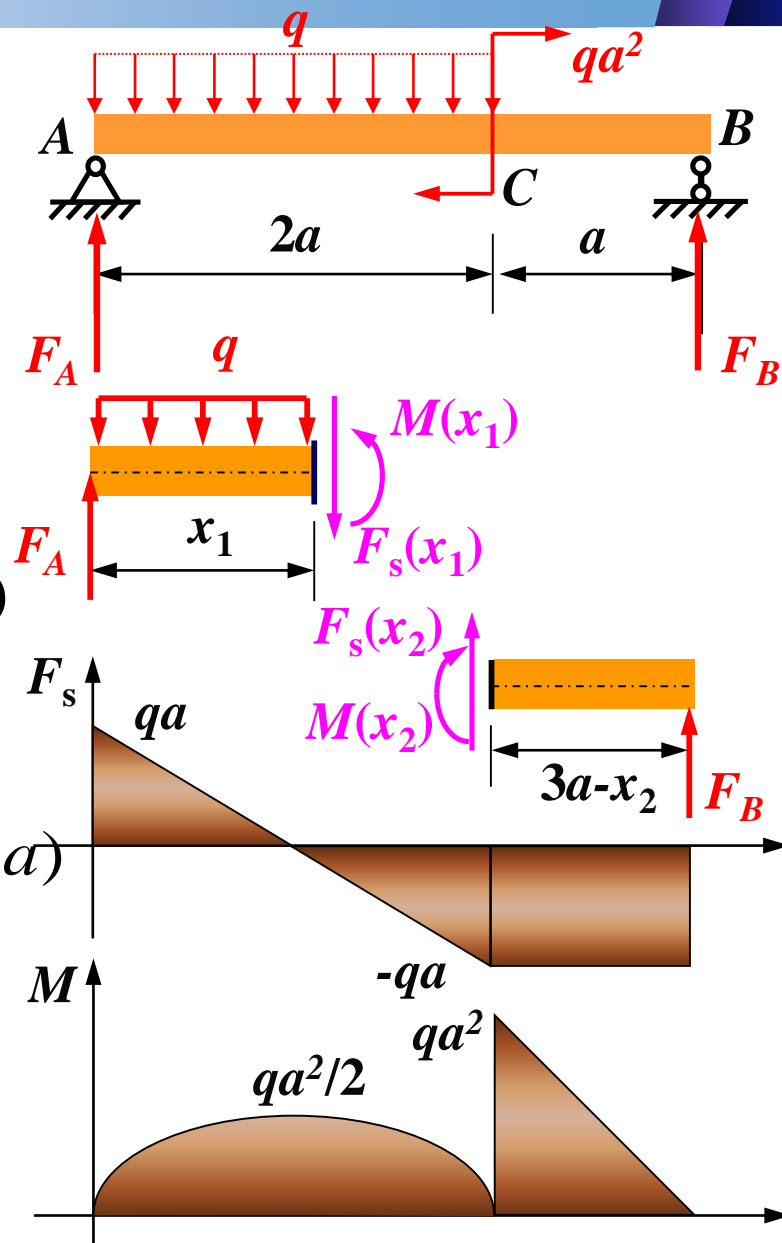
$$M(x_1) = qax_1 - \frac{q}{2}x_1^2$$

$$F_s(x_2) = -F_B = -qa \quad (2a \leq x_2 \leq 3a)$$

$$M(x_2) = F_B x_2 = qa(3a - x_2)$$

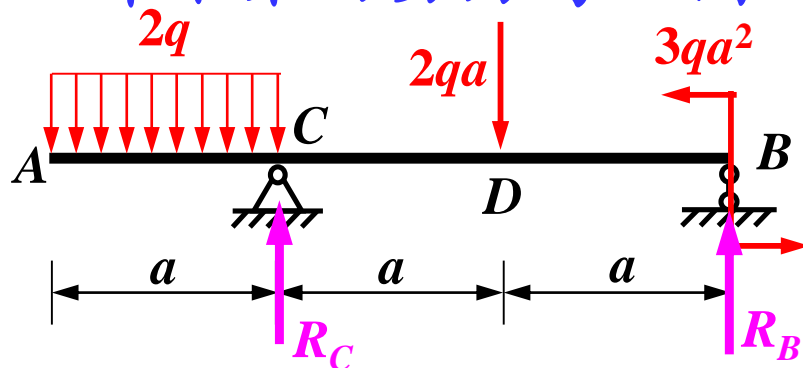
(3) 作 F_s 、 M 图

$$|F_s|_{\max} = qa \quad |M|_{\max} = qa^2$$

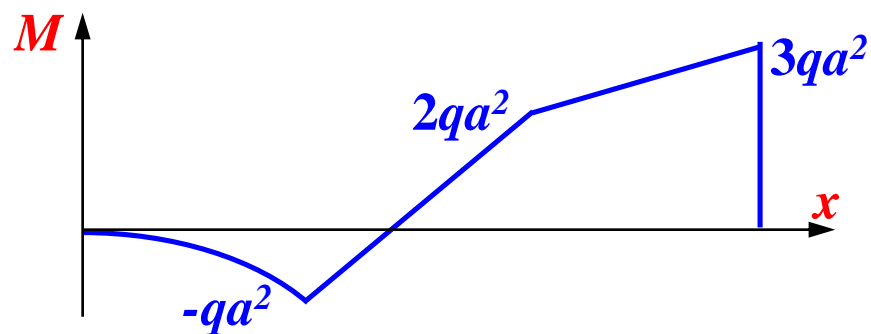
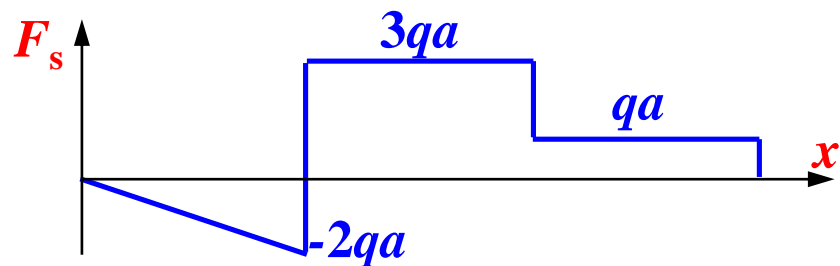


4-2 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

课堂练习：作下梁的剪力弯矩图。



解：(1) 求支反力： $R_C=5qa$, $R_B=-qa$



今日作业

4-2 (e)、(f)、(h)

上节课内容回顾

□ 弯曲内力：剪力 F_s 和弯矩 M

□ 符号规则：

剪力 F_s ：

截面外法线顺时针转90度后
与剪力方向一致时，该剪力
为正；反之为负。

弯矩 M ：

使分离体弯曲成凹面向上的
弯矩为正；使分离体弯曲成
凹面向下的弯矩为负。

□ 利用截面法作弯曲内力图（设正法）

第四章 弯曲内力

- ✓ 概述
- ✓ 梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图
- ✓ 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系
- ✓ 刚架和曲杆的弯曲内力

学前问题：

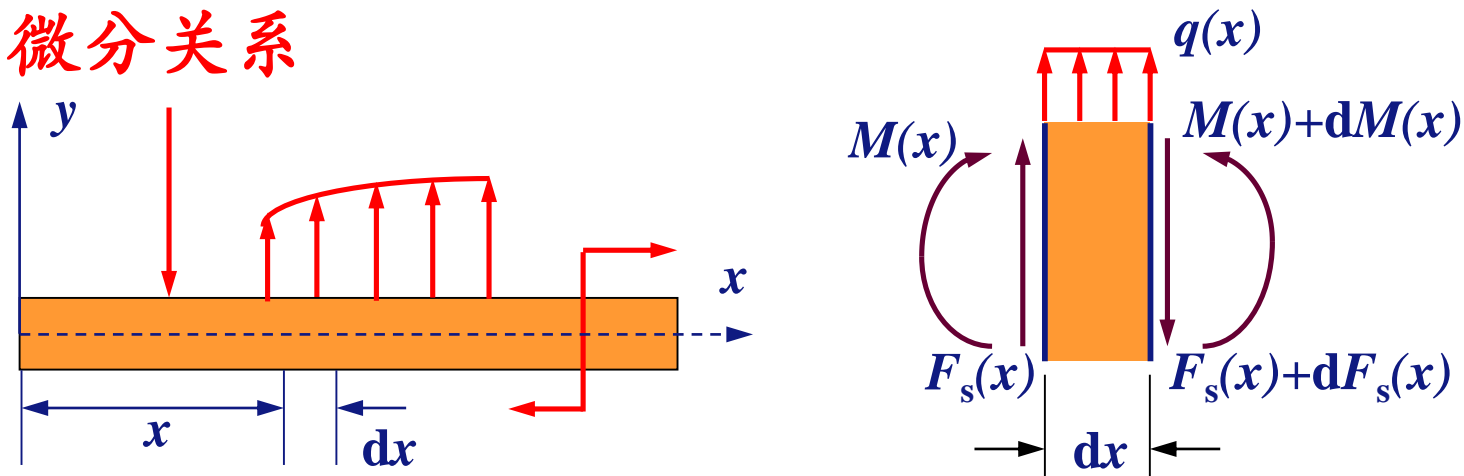
- 微分-积分关系的几何意义？
- 作图规律？
- 运用作图规律作内力图？



航天航空学院--力学中心

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

一、微分关系



$$F_s(x) + dF_s(x) = F_s(x) + q(x)dx$$

$$M(x) + dM(x) = M(x) + F_s(x)dx + q(x)dx \frac{dx}{2}$$

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

微分关系的几何意义：剪力图某处的斜率等于该处分布力的大小；弯矩图某处的斜率等于该处剪力的大小；剪力为零处的弯矩有极值。

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

二、积分关系

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$$

$$dF_s(x) = q(x)dx$$

$$dM(x) = F_s(x)dx$$

$$\int_{F_{s1}}^{F_{s2}} dF_s(x) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

$$\int_{M_1}^{M_2} dM(x) = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x)dx$$

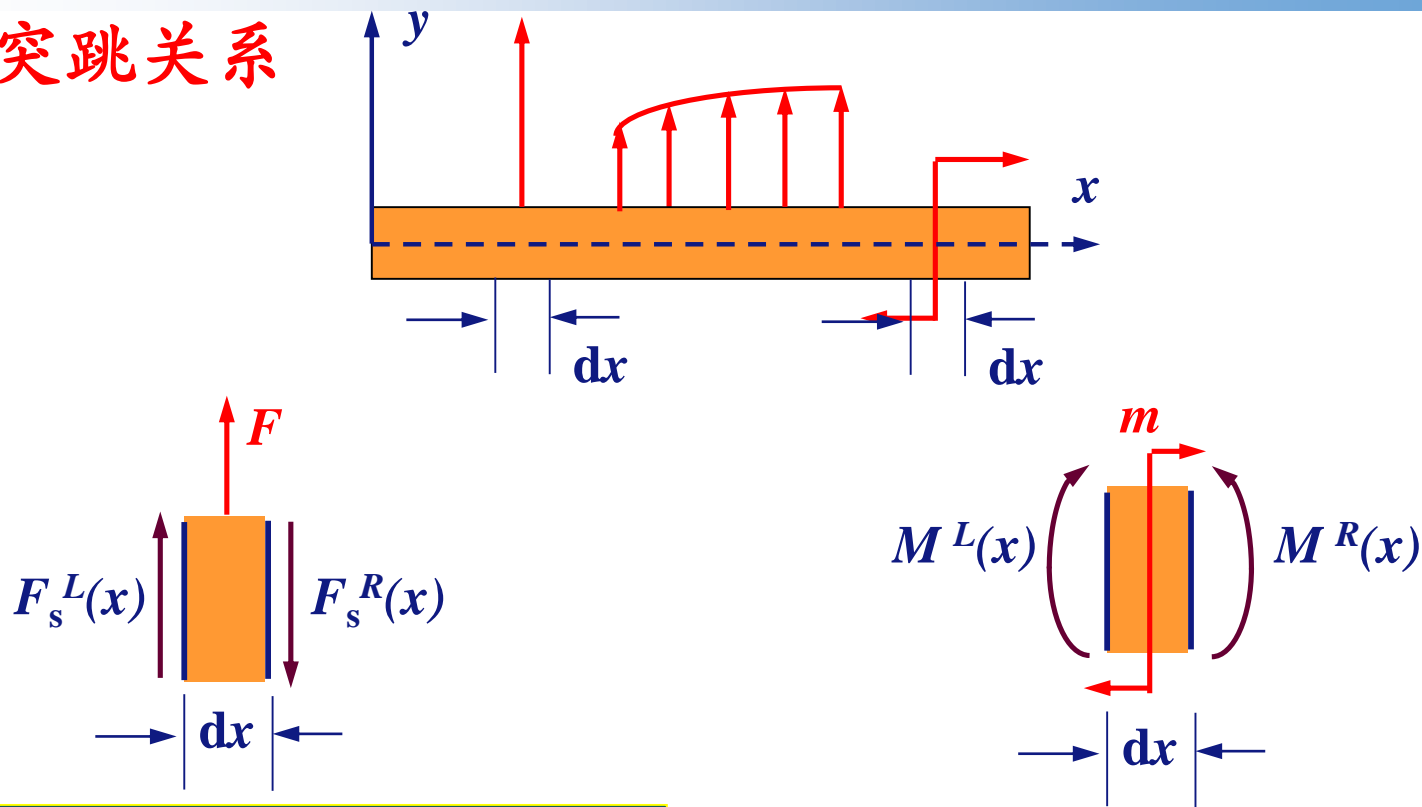
$$F_{s2} - F_{s1} = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x)dx$$

积分关系的几何意义：任意两截面的剪力差等于两截面间分布力所包围的面积；任意两截面的弯矩差等于两截面间剪力图所包围的面积。

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

三、突跳关系



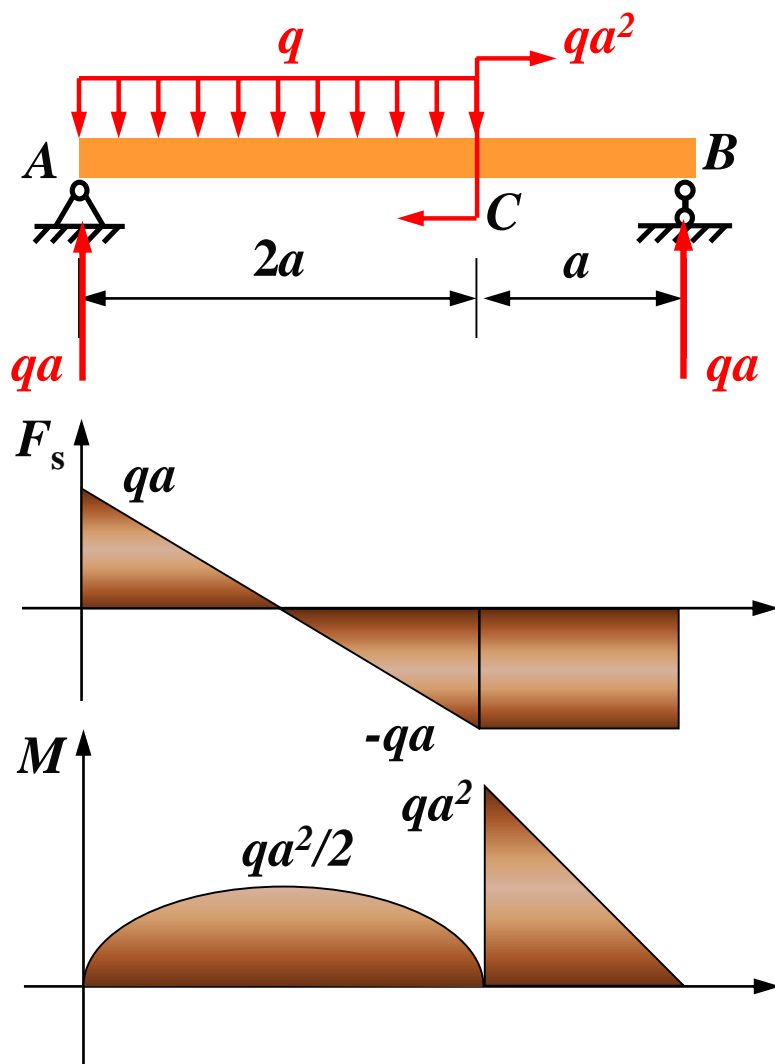
$$F_s^R(x) = F + F_s^L(x)$$

$$M^R(x) = m + M^L(x)$$

突跳关系的几何意义：集中力作用处剪力图突跳该力的大小，突跳方向与集中力的方向一致；集中力偶作用处弯矩图突跳该力偶的大小，且顺时针力偶向上突跳。

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

通过例4-5进行验证：



1、微分关系

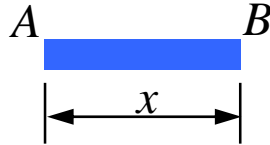
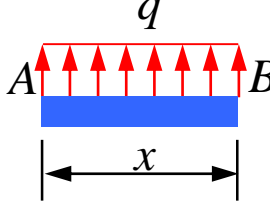
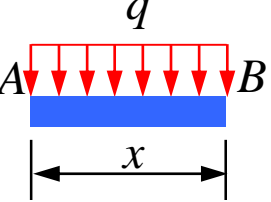
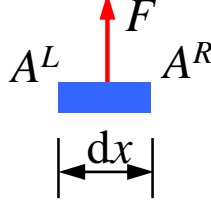
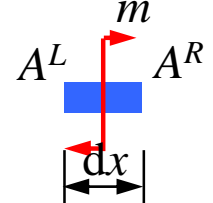

M 图抛物线的极值点，一定是剪力为零的点

2、积分关系

3、突跳关系

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

四、如何利用 M 、 F_s 和 q 之间的关系作内力图

载荷	无载荷	均布力(+)	均布力(-)	集中力(+)	集中力偶(顺)
					
F_s 图	水平线 斜率为0 $F_s^A = F_s^B$	上斜直线 斜率为 q $F_s^A + qx = F_s^B$	下斜直线 斜率为 $-q$ $F_s^A - qx = F_s^B$	突跳 F 正 F 向上突跳 $F_s^{AL} + F = F_s^{AR}$	无变化 —
M 图	斜直线 斜率为 F_s^A $M^A + F_s^A x = M^B$	下凸抛物线 极值在 $F_s=0$ 处 $M^A + S(F_s) = M^B$	上凸抛物线 极值在 $F_s=0$ 处 $M^A + S(F_s) = M^B$	有拐点 	突跳 m 顺 m 向上突跳 $M^{AL} + m = M^{AR}$

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

四、如何利用 M 、 F_s 和 q 之间的关系作内力图

基本步骤

1、确定支反力：

2、定特征点：集中载荷处、约束处、边界、极值处

3、定线型：水平线、斜直线、抛物线，何处突跳

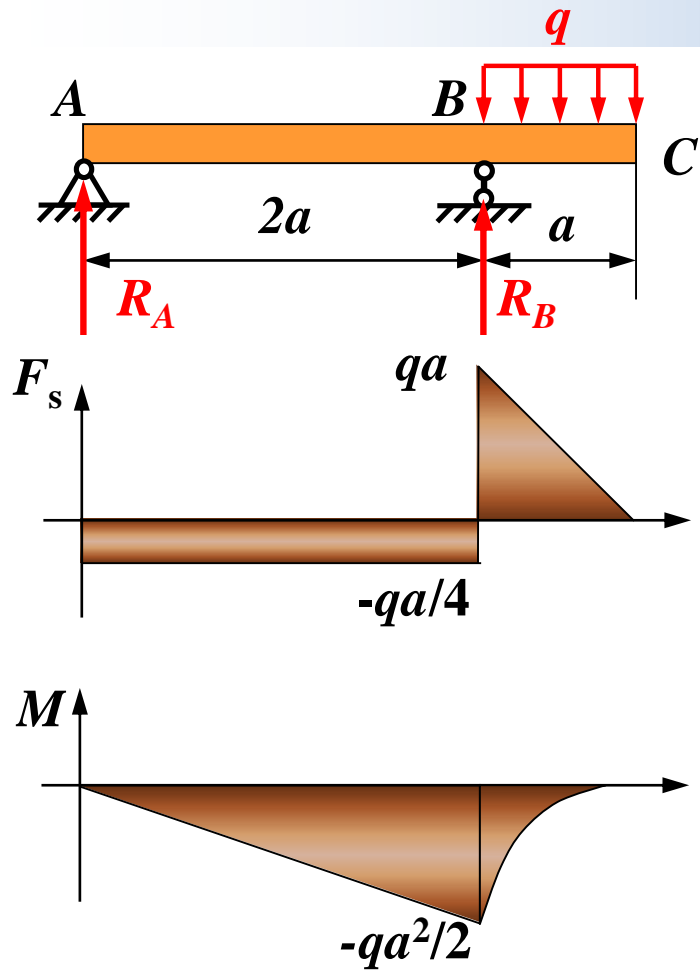
4、定数值：原点出发，是否突跳，斜直线用微分关系(斜率)定值，抛物线用积分关系(面积)定值

5、作剪力、弯矩图：

注意：1、从轴线的原点出发，最终一定回到轴线上；

2、剪力图线穿越横轴，弯矩图将出现极值点。

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系



例4-8 作下梁的剪力弯矩图。

解： (1) 支反力：

$$R_A = -\frac{qa}{4} \quad R_B = \frac{5qa}{4}$$

(2) 剪力图 (线型、数值)：

AB 段水平线, BC 段下斜直线, 斜率为 $-q$, A 、 B 处突跳。

(3) 弯矩图 (线型、数值)：

AB 段下斜直线, 斜率为 $-qa/4$, BC 段上凸抛物线, 无突跳。

(4) 最大值：

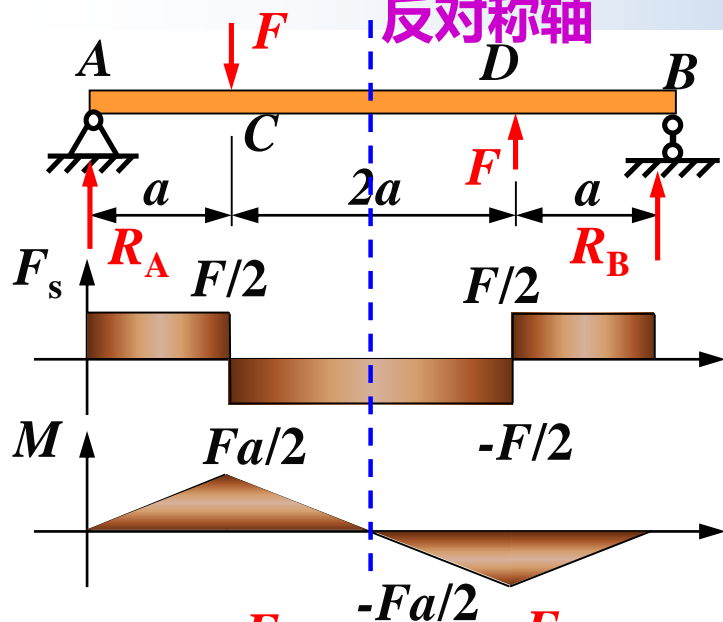
$$|F_s|_{\max} = qa \quad |M|_{\max} = qa^2 / 2$$

$$M_B = M_A + \left(-\frac{qa}{4}\right) \times 2a = -\frac{qa^2}{2}$$

(斜率或面积)

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

反对称轴



例4-9 作下梁的剪力弯矩图。

解: (1) 求支反力: $R_A = -R_B = F/2$

(2) 作剪力图、弯矩图:

(3) 最大值:

$$|F_s|_{\max} = F/2 \quad |M|_{\max} = Fa/2$$

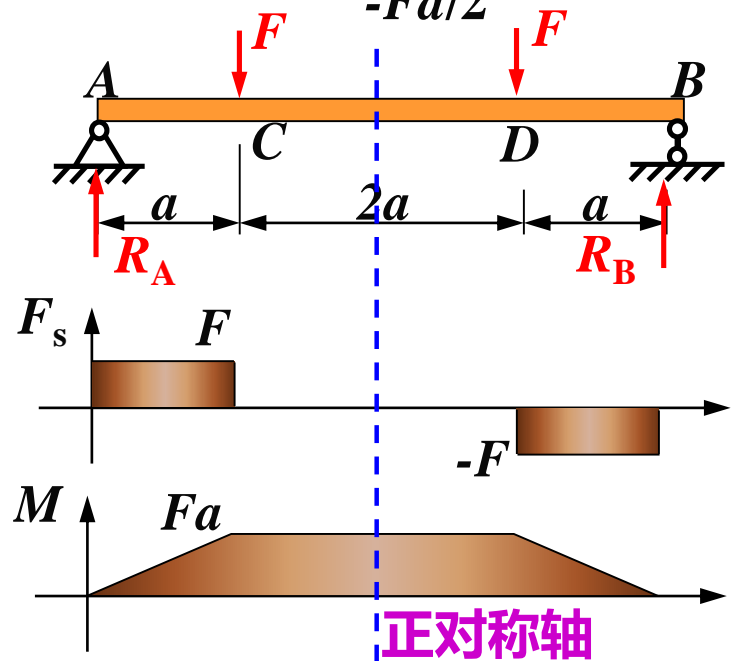
(4) 若将D点的载荷反向

(5) 特点:

□ 对称结构受正对称载荷时, 剪力图反对称, 弯矩图正对称;

□ 对称结构受反对称载荷时, 剪力图正对称, 弯矩图反对称;

□ 反对称轴通过的截面弯矩为零, 正对称轴通过的截面剪力为零。



4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

例4-10 作下梁的剪力弯矩图。

解: (1) 求支反力:

$$R_A = R_B = qa$$

(2) 作剪力图、弯矩图:

$$F_{sA} = qa$$

$$F_{sC} = F_{sA} + (-q) \times 2a = -qa$$

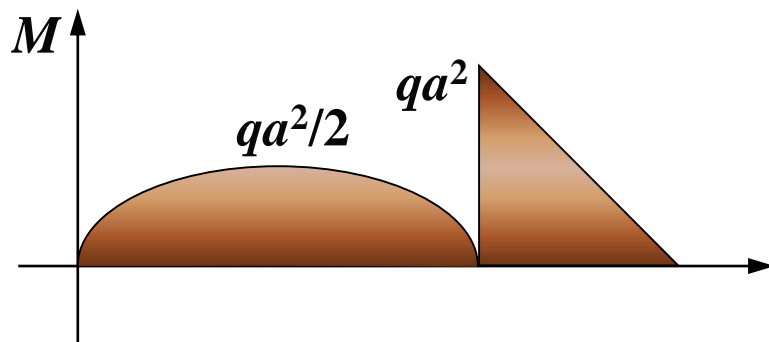
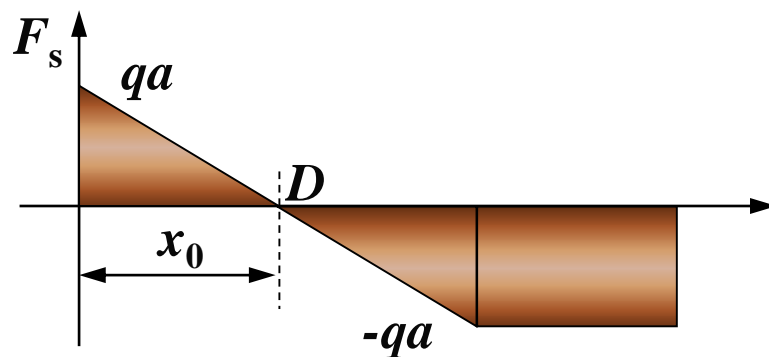
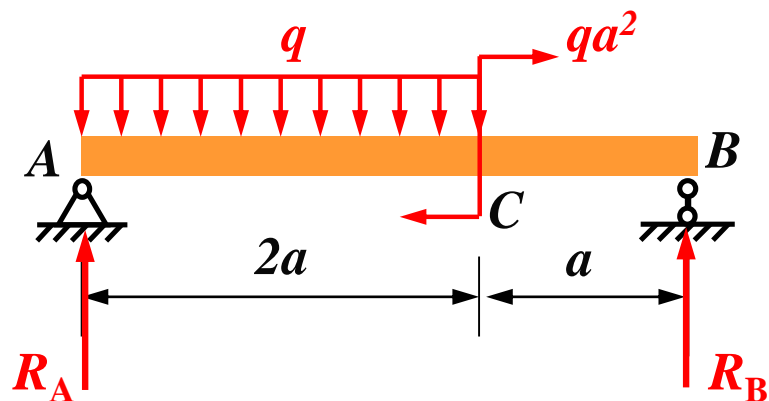
$$F_{sD} = 0 : x_0 = a$$

$$M_D = M_A + \frac{1}{2} \times qa \times a = \frac{qa^2}{2} \quad \text{面积}$$

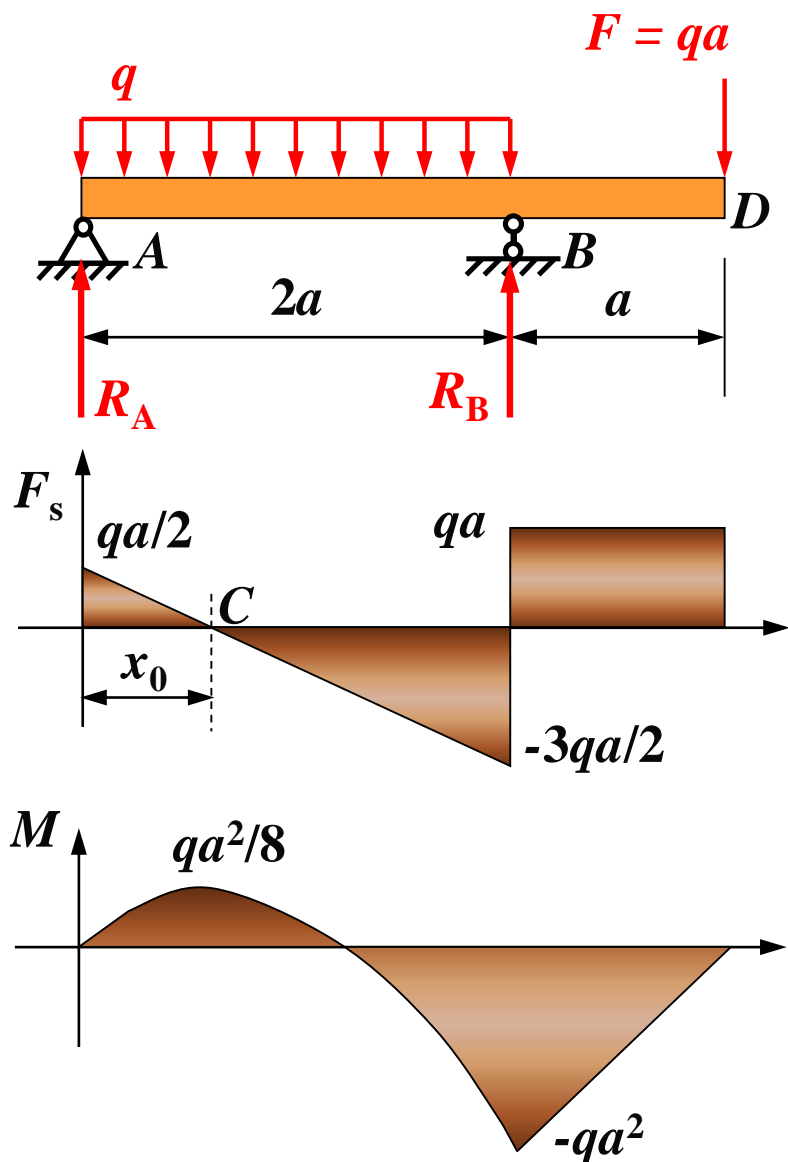
$$M_C^- = 0 \quad \text{面积} \quad M_C^+ = qa^2$$

(3) 最大值:

$$|F_s|_{\max} = qa \quad |M|_{\max} = qa^2$$



4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系



例4-11 作下梁的剪力弯矩图。

解：(1) 求支反力：

$$R_A = qa/2 \quad R_B = 5qa/2$$

(2) 作剪力图、弯矩图：

$$F_{sA} = R_A = \frac{qa}{2}$$

$$F_{sB}^- = F_{sA} + (-q) \times 2a = -\frac{3qa}{2}$$

$$F_{sB}^+ = F_{sB}^- + R_B = qa$$

$$F_{sC} = 0: x_0 = a/2$$

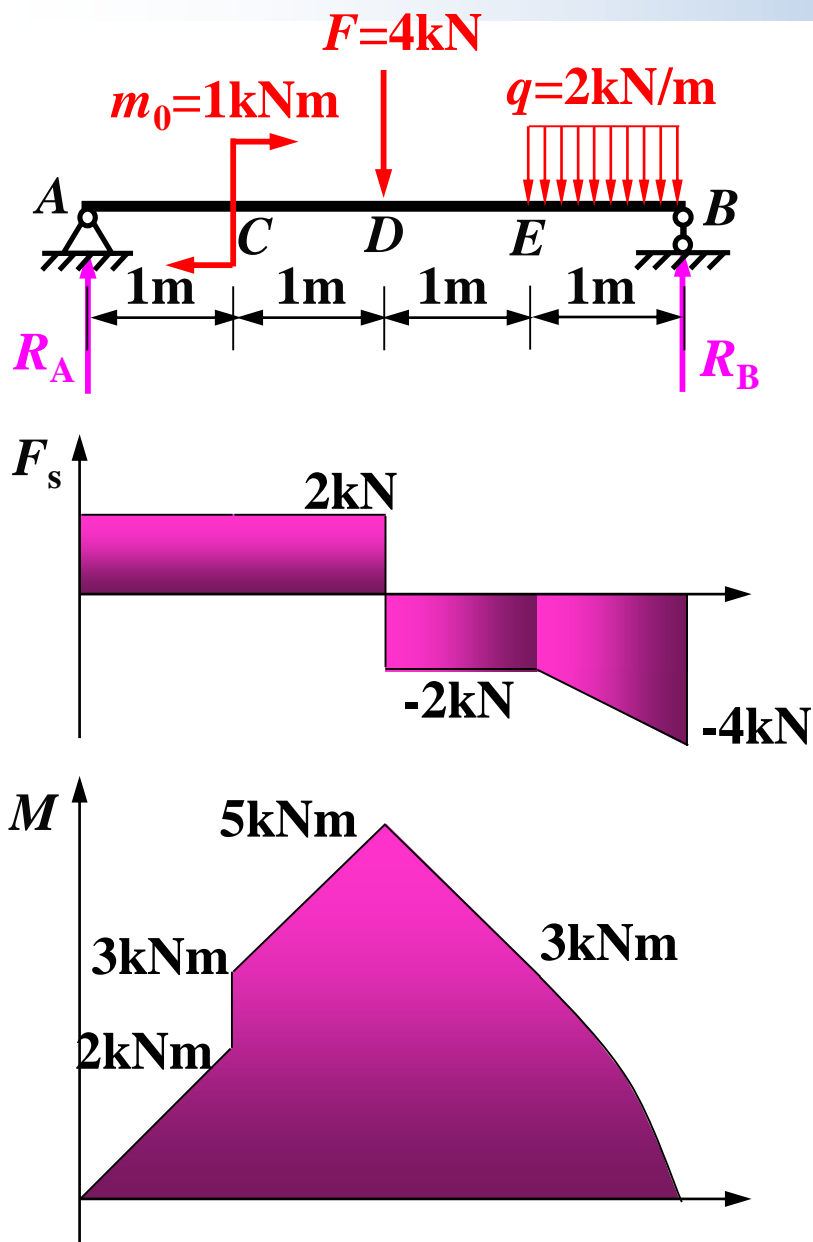
$$M_C = M_A + \frac{1}{2} \times \frac{qa}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{qa^2}{8} \quad \text{面积}$$

$$M_B = M_C - \frac{1}{2} \times \frac{3qa}{2} \times \frac{3a}{2} = -qa^2 \quad \text{面积}$$

(3) 最大值：

$$|F_s|_{\max} = 3qa/2 \quad |M|_{\max} = qa^2$$

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系



例4-12 作下梁的剪力弯矩图。

解：(1) 求支反力 R_A 、 R_B ：

$$R_A = 2\text{kN}, \quad R_B = 4\text{kN}$$

(2) 作剪力图和弯矩图：

$$F_{sA} = F_{sC} = F_{sD}^- = 2\text{kN}$$

$$F_{sD}^+ = F_{sD}^- - F = -2\text{kN}$$

$$F_{sB} = F_{sE} - q \times 1 = -4\text{kN}$$

$$M_C^- = F_{sA} \times 1 = 2\text{kNm}$$

$$M_C^+ = M_C^- + m_0 = 3\text{kNm}$$

$$M_D = M_C^+ + F_{sC} \times 1 = 5\text{kNm}$$

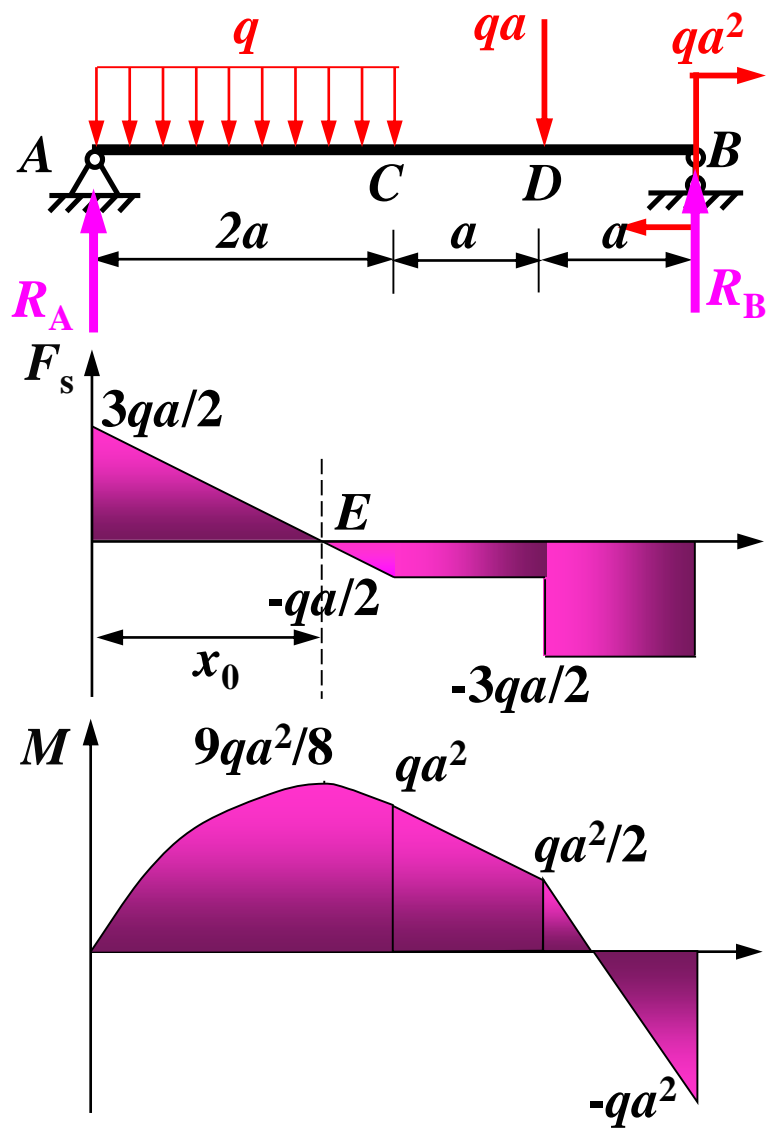
$$M_E = M_D + F_{sD}^+ \times 1 = 3\text{kNm}$$

(3) 最大值：

$$|F_s|_{\max} = 4\text{kN} \quad |M|_{\max} = 5\text{kNm}$$

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

例4-13 作下梁的剪力弯矩图。



解： (1) 求支反力：

$$R_A = 3qa/2, \quad R_B = 3qa/2$$

(2) 作剪力和弯矩图：

$$F_{sA} = R_A = 3qa/2$$

$$F_{sC} = R_A - q \times 2a = -qa/2$$

$$F_{sD}^+ = F_{sC} - qa = -3qa/2$$

$$F_{sE} = 0 : x_0 = 3a/2$$

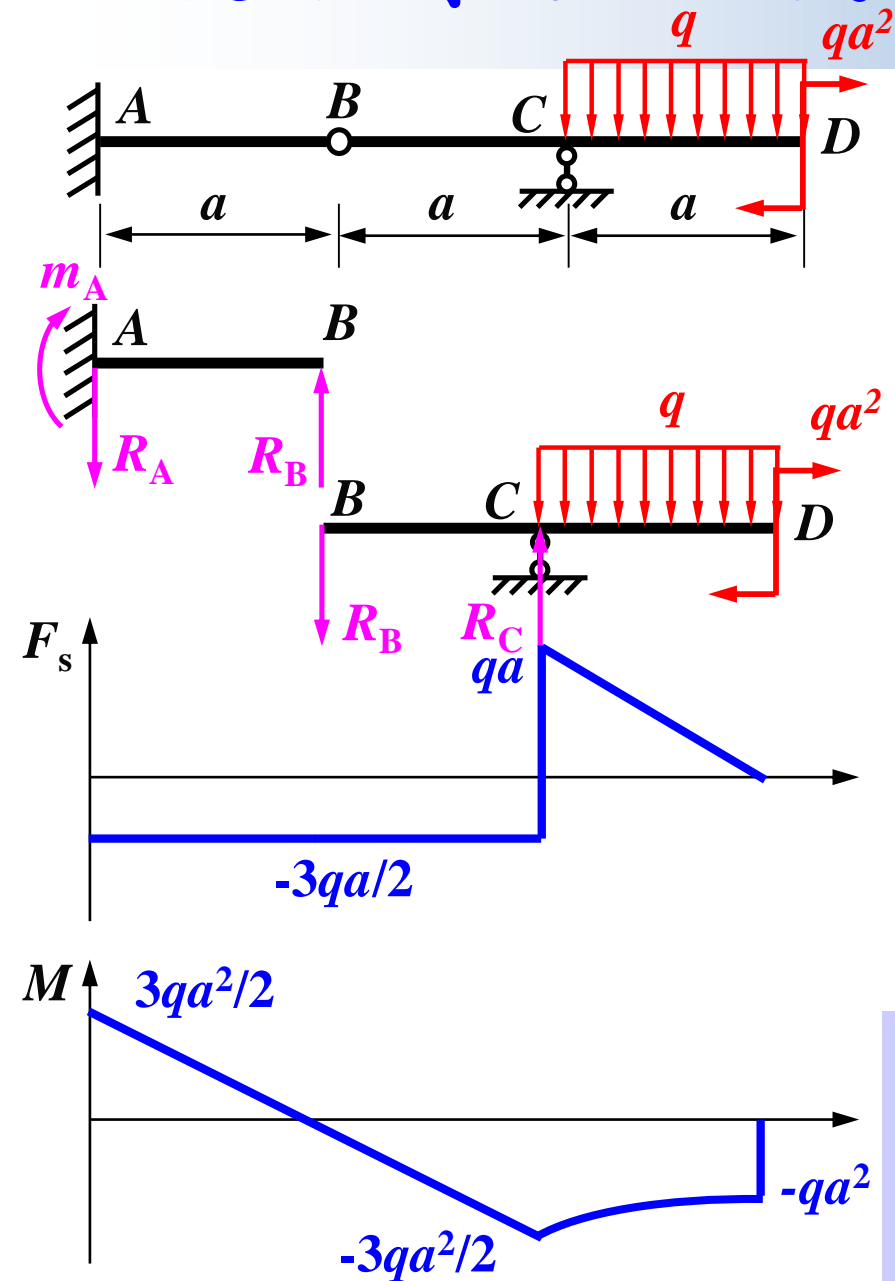
$$M_E = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} qa \times \frac{3}{2} a = \frac{9qa^2}{8}$$

$$M_C = M_E - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} qa \times \frac{1}{2} a = qa^2$$

$$M_D = M_C - \frac{1}{2} qa \times a = qa^2/2$$

$$M_B^- = M_D - \frac{3}{2} qa \times a = -qa^2$$

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系



例4-14 作多跨梁的剪力弯矩图。

解：(1) 中间铰拆开，求约束力：

$$R_C = 5qa/2, \quad R_B = 3qa/2$$

$$R_A = 3qa/2, \quad m_A = 3qa^2/2$$

(2) 作剪力、弯矩图：

$$M_A = 3qa^2/2$$

$$M_C = M_A - 3qa/2 \times 2a = -3qa^2/2$$

$$M_D = M_C + \frac{1}{2} \times qa \times a = -qa^2 \quad \text{面积}$$

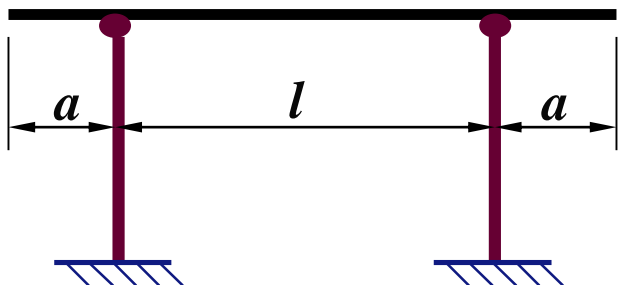
(3) 最大值： $|F_s|_{\max} = qa$ $|M|_{\max} = 3qa^2/2$

(4) 总结：

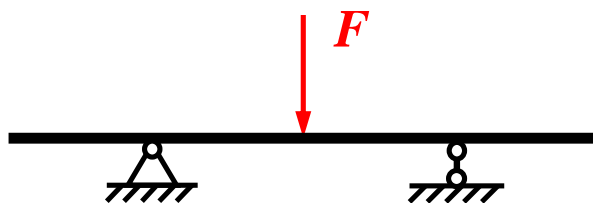
- 多跨梁可视为若干独立的梁，先确定各中间铰的约束力；
- 中间铰只传递剪力，不传递弯矩；
- 若中间铰无外力偶作用，该处弯矩为零。

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

思考题：分析双杠的合理跨度



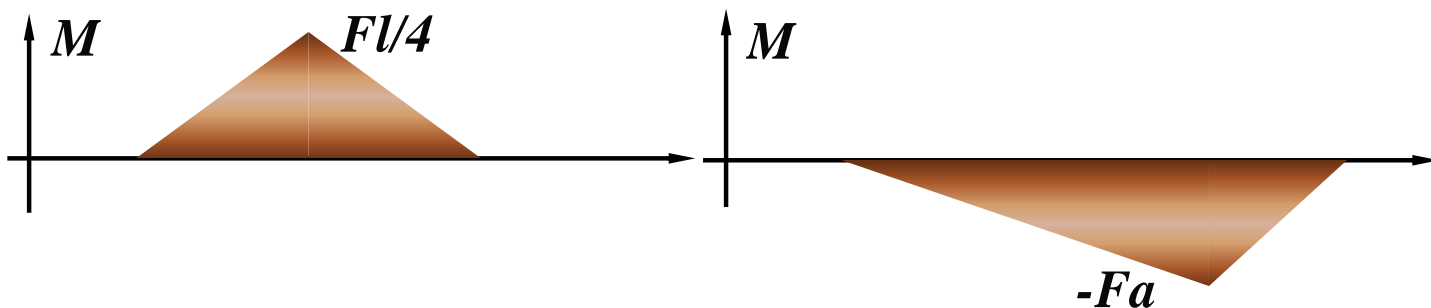
解：建立力学模型



最佳设计方案

$$Fa = Fl / 4$$

$$a = l / 4$$



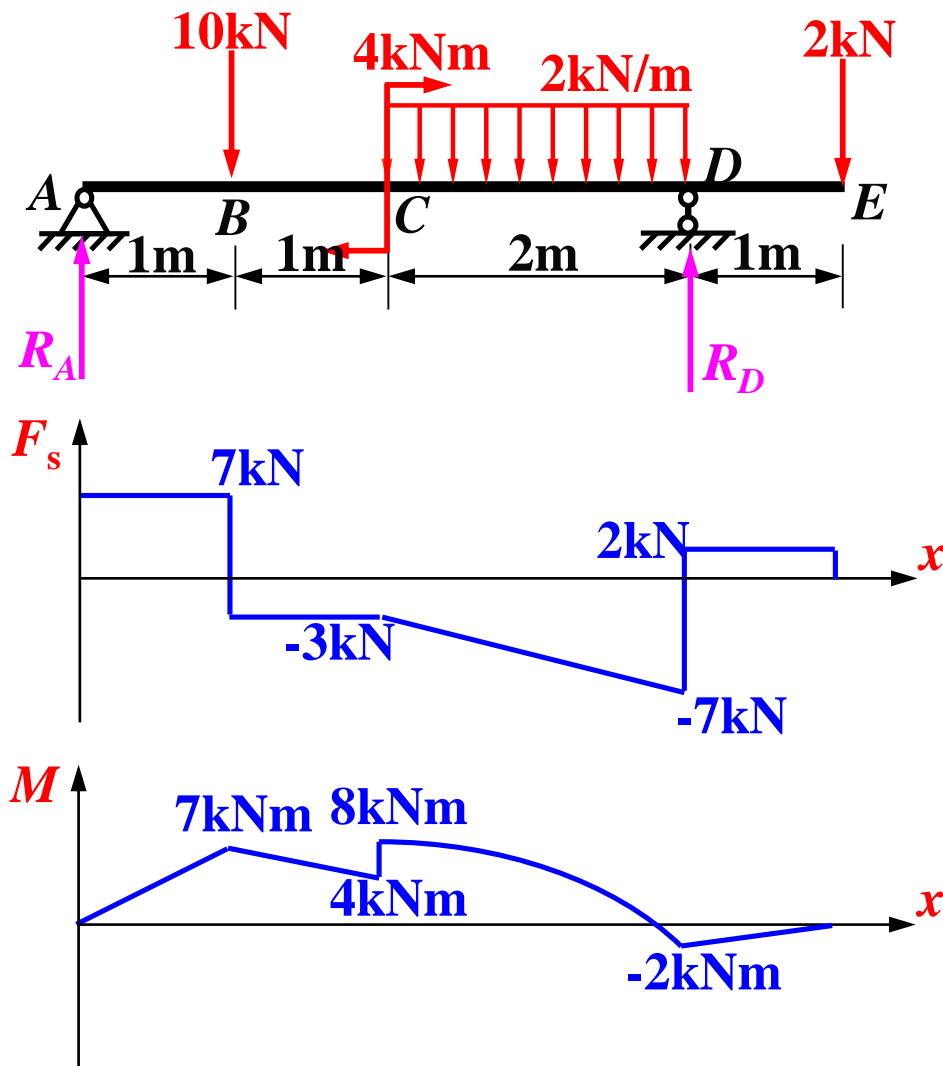
国际标准：

$$l = 230\text{cm}$$

$$a = 60\text{cm}$$

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

课堂练习：作下梁的剪力弯矩图。



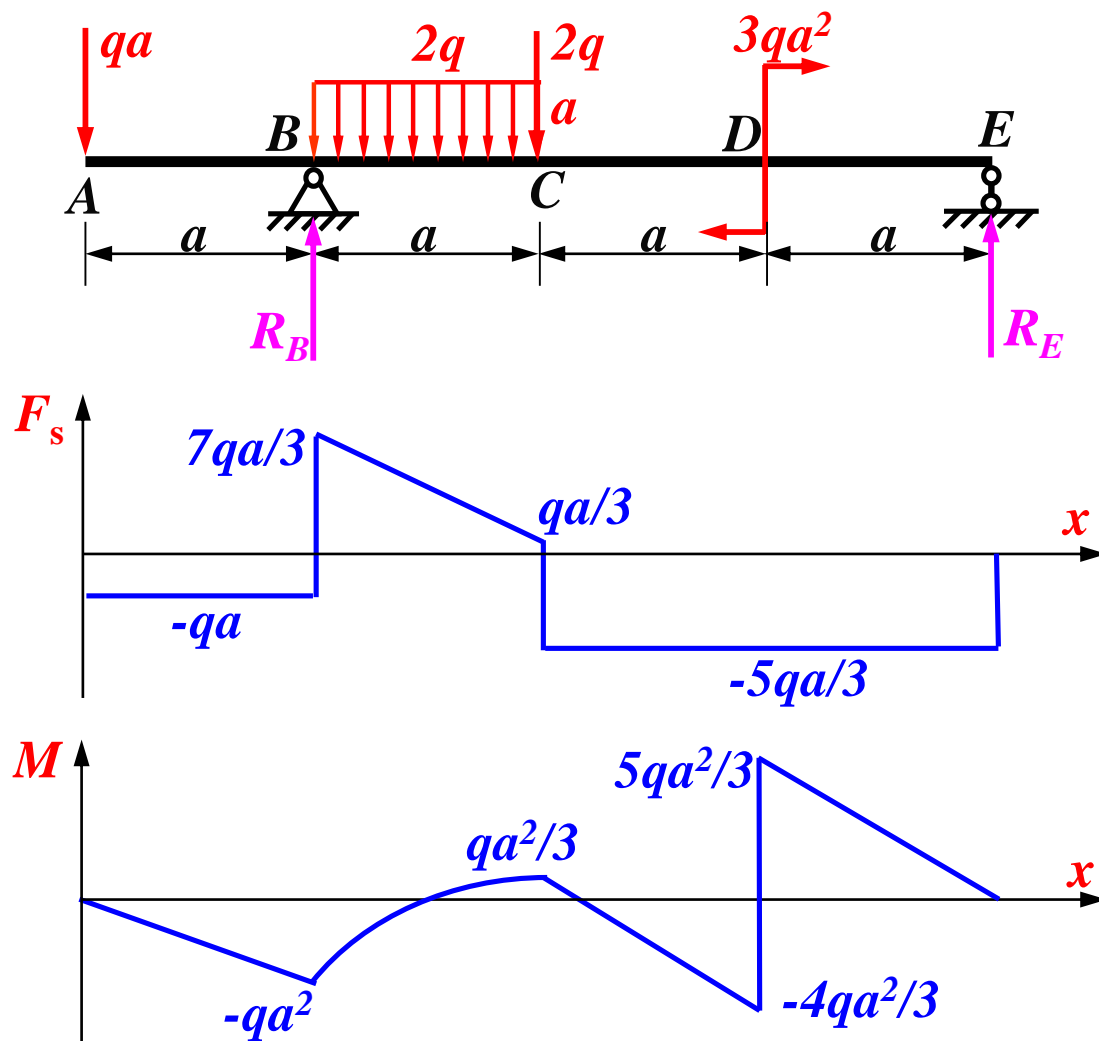
解：

$$R_A = 7\text{kN}$$

$$R_D = 9\text{kN}$$

4-3 弯矩、剪力和载荷之间的微分-积分关系

课堂练习：作下梁的剪力弯矩图。



解:

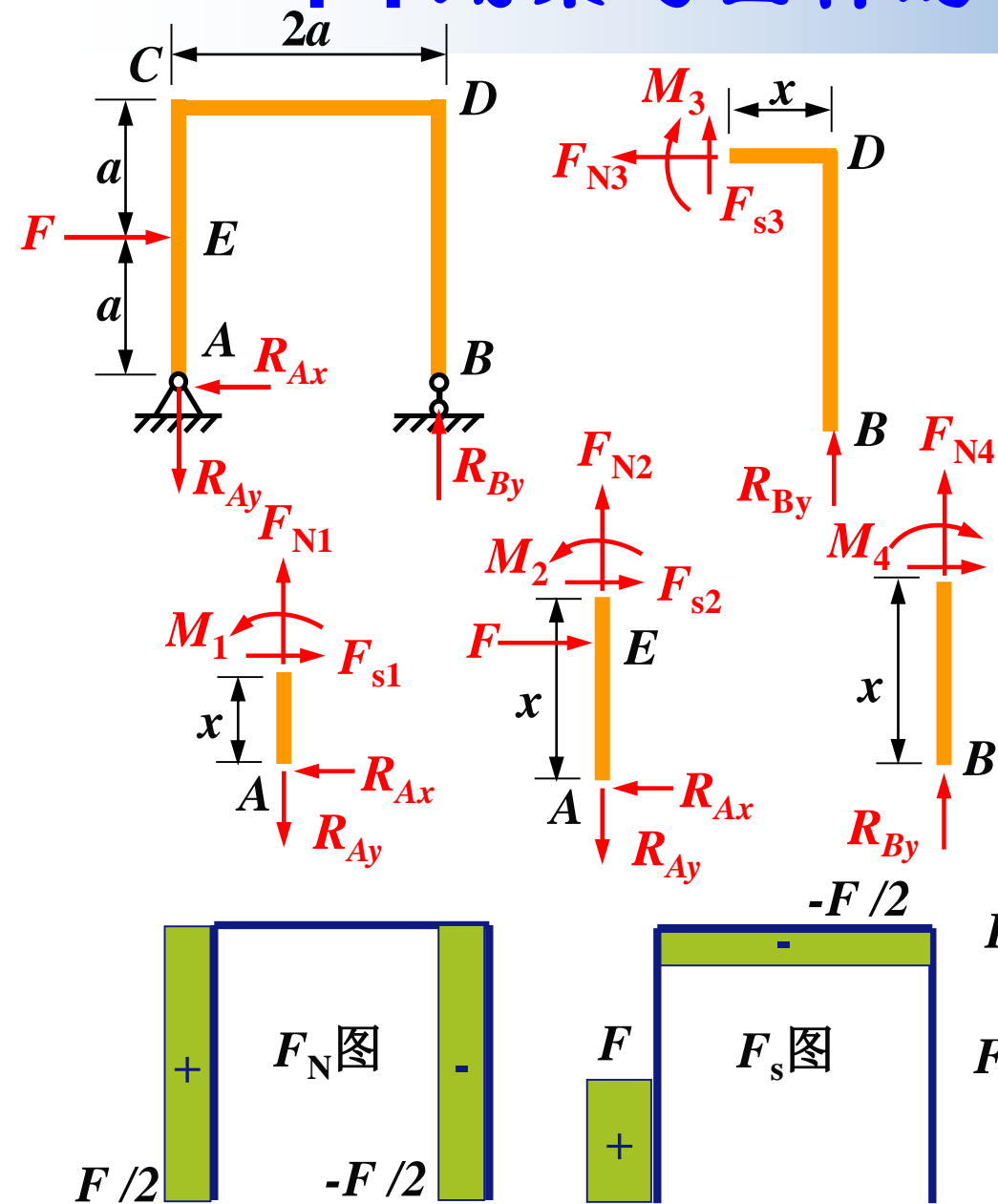
$$R_B = 10qa/3$$

$$R_E = 5qa/3$$

4-4 刚架与曲杆的弯曲内力

- 轴线为平面折线或平面曲线的杆件称为**刚架(Rigid Frame)**和**曲杆(Curved Bar)**;
- 刚架和曲杆中的内力通常有：**弯矩 M 、剪力 F_s 和轴力 F_N** ;
- 作刚架和曲杆内力图的步骤：**求支反力，分力区，截面法求解**;
- **刚架和曲杆内力的符号规则：**
 - M ：凹面向外为正;
 - F_s ：截面外法线方向顺时针转90度后一致为正;
 - F_N ：截面外法线方向一致为正;
 - 正的内力画在杆外侧，同时在图中标出正负。**

4-4 刚架与曲杆的弯曲内力



例4-6 作刚架内力图。

解: $R_{Ax} = F, R_{Ay} = R_{By} = F/2$

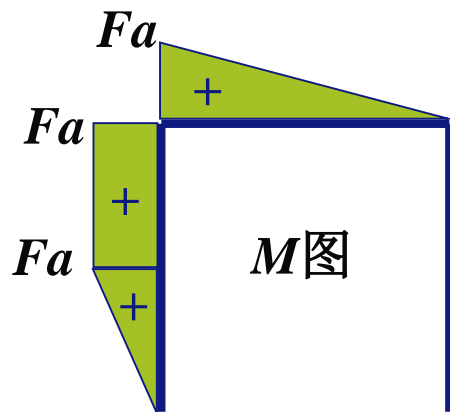
分力区作 F_N 图、 F_s 图、 M 图

$$F_{N1} = F/2, F_{s1} = F, M_1 = Fx$$

$$F_{N2} = F/2, F_{s2} = 0, M_2 = Fa$$

$$F_{N3} = 0, F_{s3} = -F/2, M_3 = Fx/2$$

$$F_{N4} = -F/2, F_{s4} = 0, M_4 = 0$$



$$|F_N|_{\max} = F/2$$

$$|F_s|_{\max} = F$$

$$|M|_{\max} = Fa$$

4-4 刚架与曲杆的弯曲内力

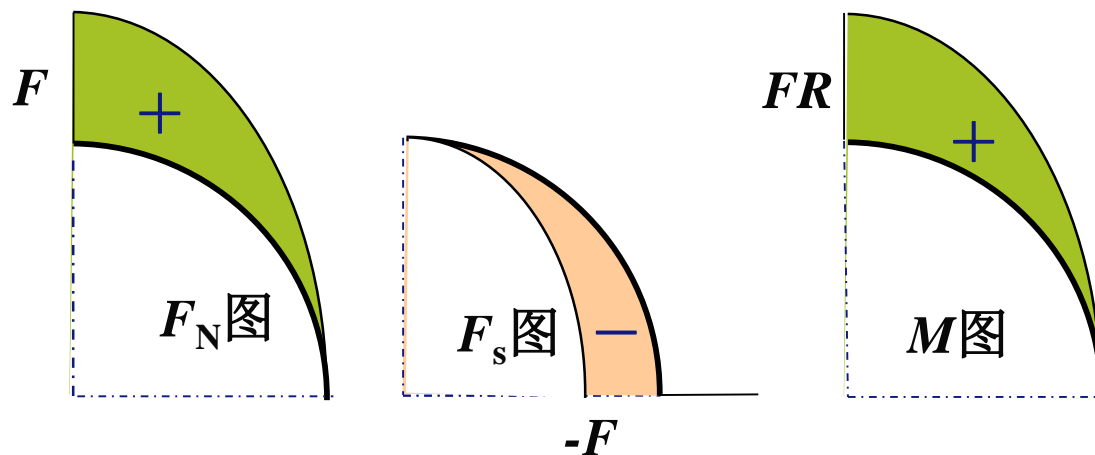
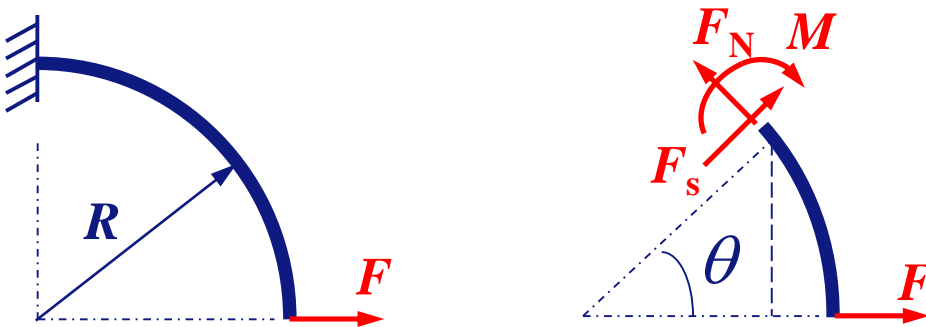
例4-7 作曲杆内力图。

解： 取分离体

$$F_N(\theta) = F \sin \theta$$

$$F_s(\theta) = -F \cos \theta$$

$$M(\theta) = FR \sin \theta$$



$$|F_N|_{\max} = F$$

$$|F_s|_{\max} = F$$

$$|M|_{\max} = FR$$

第四章的基本要求

1. 掌握梁上内力：剪力 F_s 和弯矩 M 的正负号规则；
2. 熟练掌握如何建立剪力、弯矩方程，如何绘制剪力图和弯矩图；
3. 深刻理解弯矩、剪力和线分布载荷集度三者之间的微分-积分关系，并利用微分-积分关系绘制或检查内力图（即剪力图、弯矩图）；
4. 掌握刚架和曲杆的内力图绘制方法。

今日作业

4-3 (a) (c) (d), 4-6(c)