上节课内容回顾

□转角、挠度的确定：查表叠加法（逐段刚化法）

□ 弯曲刚度条件： $v_{\max} \leq [v]$

$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

□ 提高弯曲刚度的措施

□ 简单超静定梁的求解：几何方程、物理方程、静力学平衡方程联立求解。

基本解题思路

静定结构：

外力 $\xrightarrow[\text{作图规律}]{\text{截面法}}$ 内力（弯矩M，剪力F_s）$\longrightarrow$

应力 $\sigma = \dfrac{M}{I_z} y$，$\tau = \dfrac{F_s S_z^*}{b I_z}$ $\longrightarrow$ 强度条件 $\sigma_{max} = \dfrac{M}{W_z} \le [\sigma]$，$\tau_{max} = k \dfrac{F_s}{A} \le [\tau]$

变形 $\dfrac{1}{\rho(x)} = \dfrac{M(x)}{EI}$，$v''(x) = \theta'(x) = \dfrac{M(x)}{EI}$ $\longrightarrow$ 刚度条件 $v_{max} \le [v]$，$\theta_{max} \le [\theta]$

直接积分法、查表叠加法（逐段刚化法）

第二部分 组合变形

第七章 应力状态分析

第八章 强度理论

第九章 组合变形

西安交通大學

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

第七章 应力状态分析

- 应力状态的概念
- 二向应力状态分析—公式解析法
- 二向应力状态分析—图解解析法
- 典型的三向应力状态
- 广义胡克定律
- 平面应力状态下的应变分析*

学前问题：

- 何为应力状态?
- 为何要进行应力状态分析?
- 如何进行平面应力状态分析?

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

7-1 应力状态的概念

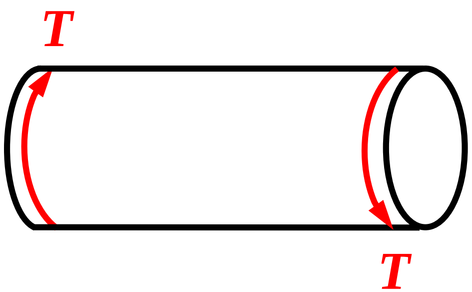
一、为何要进行应力状态分析?

拉压

$$\sigma=\frac{F_N}{A}\qquad \sigma_\alpha=\frac{\sigma}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sigma_{\max}=\sigma\le[\sigma]$$

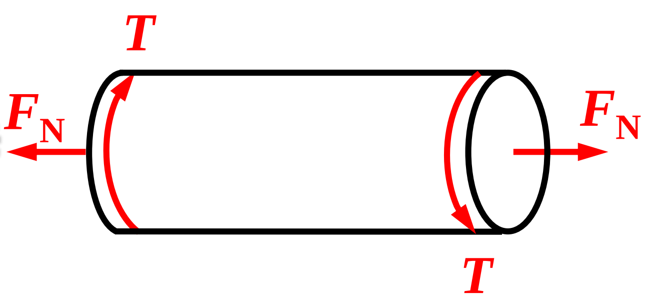
扭转



$$\tau=\frac{T}{I_p}\rho\qquad \tau_\alpha=\tau\cos 2\alpha$$

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}\le[\tau]$$

拉压+扭转



问题：

- 最大σ, τ是多少? 第七章
- 破坏原因：σ, τ? 第八章

本章的任务：从应力已知的截面(横截面)出发，求其它任意截面的应力，从而找到最大应力，为建立强度条件做准备。

7-1 应力状态的概念

二、应力状态的概念:

- 通过同一点所取截面方向不同，应力的大小也不同。应力既是点的位置的函数，也是过该点的截面方位的函数。

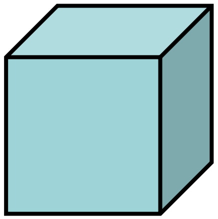
- 通过同一点不同方位截面上的应力的集合称为该点的**应力状态(Stress State)**。

- 材料力学中的“点”是物理点，不是几何点，有大小和形状，通常用正六面体表示，称为**单元体 (Element Volume)**。

- 单元体很小，可以认为:

  (1)各个面上的应力均匀分布;

  (2)相互平行的平面上，应力大小和性质完全相同。



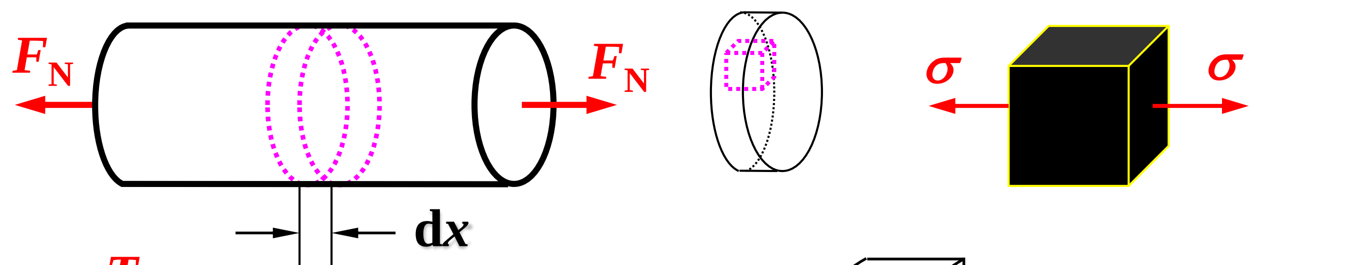
- 应力状态分析的基本方法：列平衡方程。

7-1 应力状态的概念

三、如何取某点的单元体和其上应力：

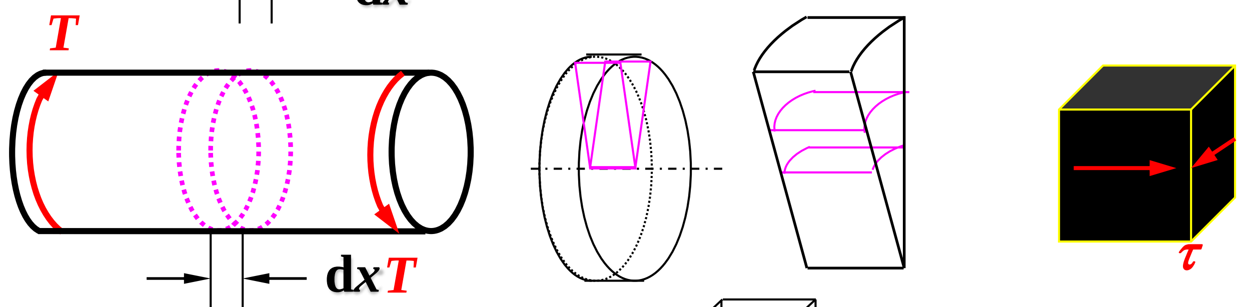
以应力已知的截面出发，取出正六面体，再考虑基本变形的应力计算公式。

拉压



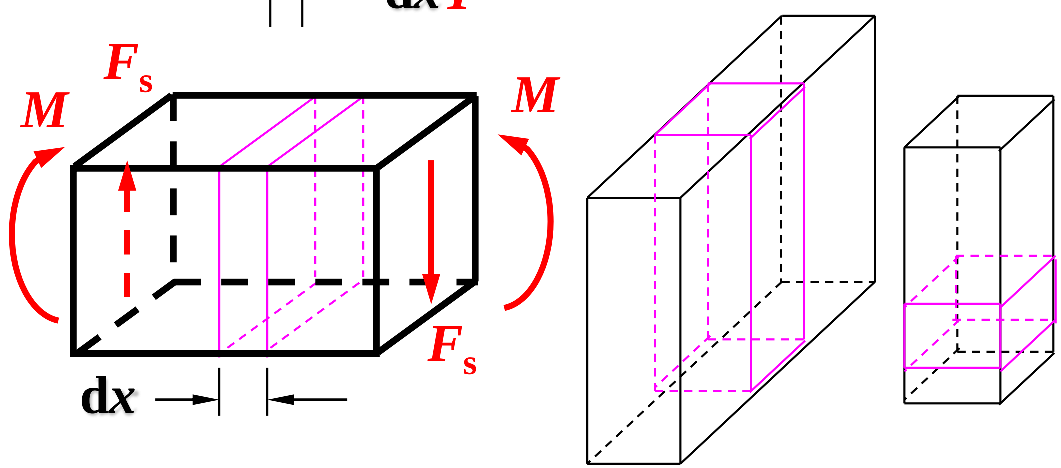
$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

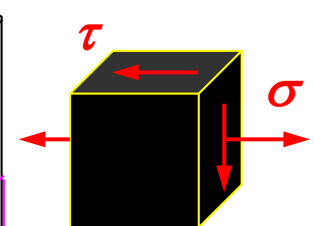
扭转



$$\tau = \frac{T}{I_p}\rho$$

弯曲





$$\sigma = \frac{M}{I_z}y$$

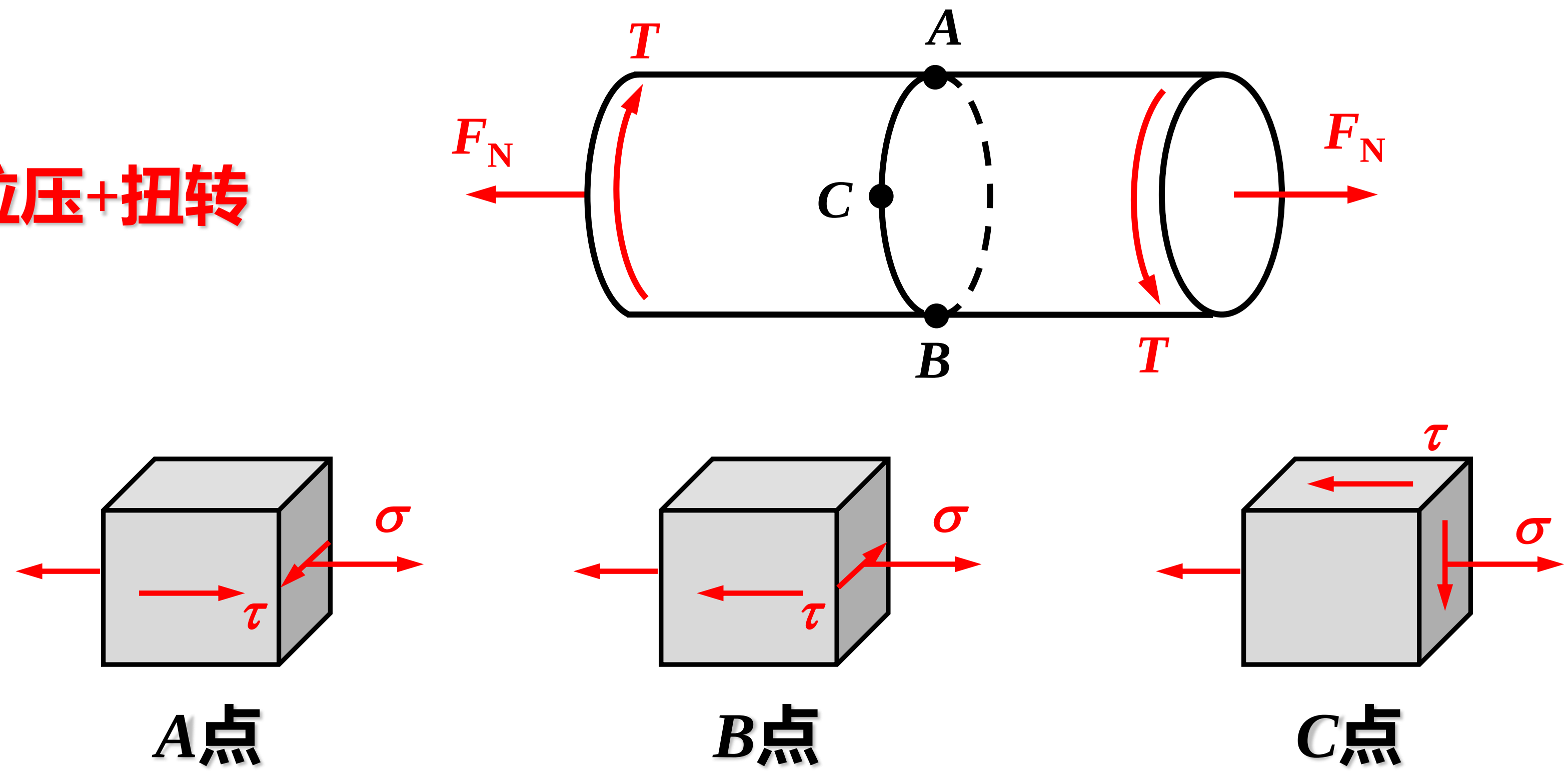
$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{bI_z}$$

弯曲切应力可以忽略

四、组合变形单元体的取法：

先按基本变形取，同方位面上应力叠加

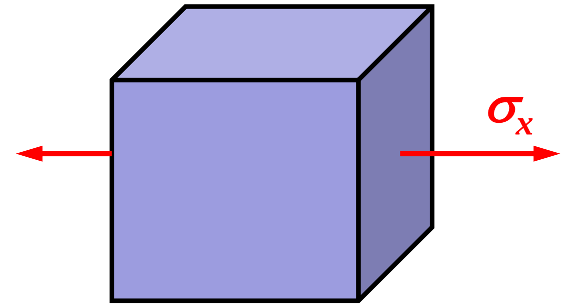
拉压+扭转



$$\sigma = \frac{F_N}{A} \qquad \tau = \frac{T}{W_p}$$

7-1 应力状态的概念

五、应力状态的分类：（不严格定义）

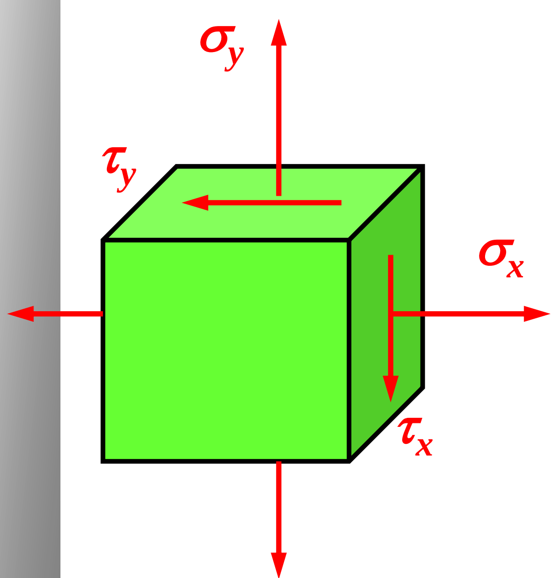


（一个应力分量）

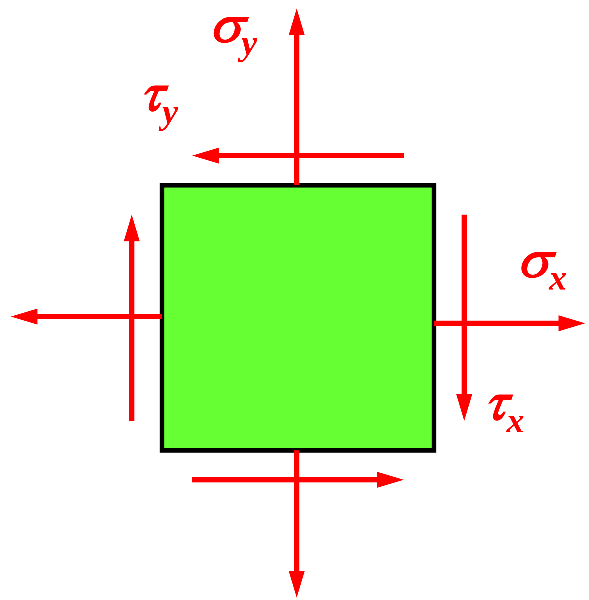
单向应力状态： 某两对面上的应力为零

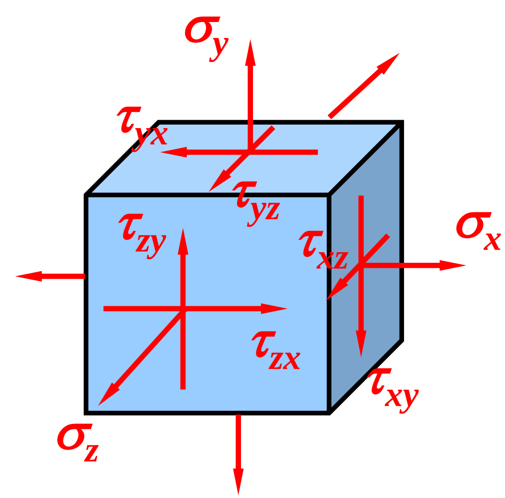
平面应力状态： 某一对面上的应力为零

三向应力状态： 各对面上的应力均不为零



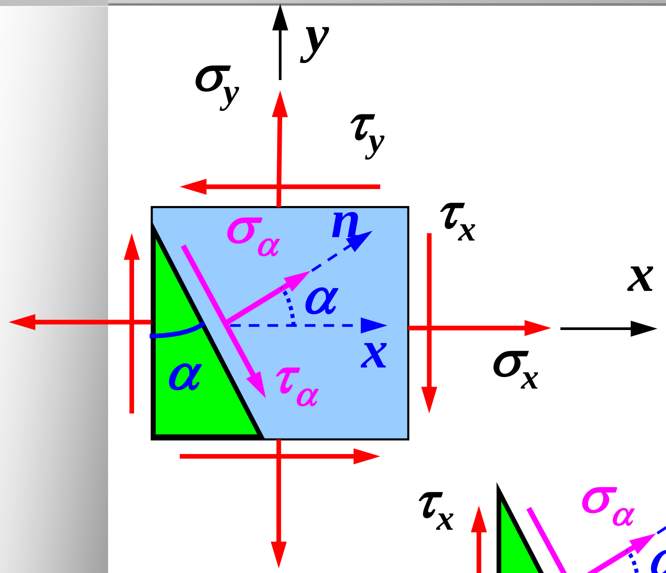
（三个应力分量）





（六个应力分量）

7-2 二向应力状态分析——公式解析法

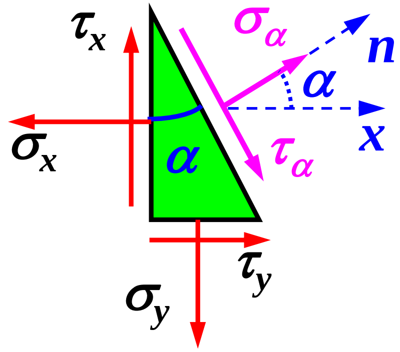


已知：σ_x，σ_y，$\tau_x = -\tau_y$

求：斜截面上应力

α 的定义：x 轴与截面外法线 n 之间的夹角，x 到 n 逆针向转动为正。

注意：正应力、切应力的正负！



$$A_x = A_\alpha \cos\alpha,\quad A_y = A_\alpha \sin\alpha$$

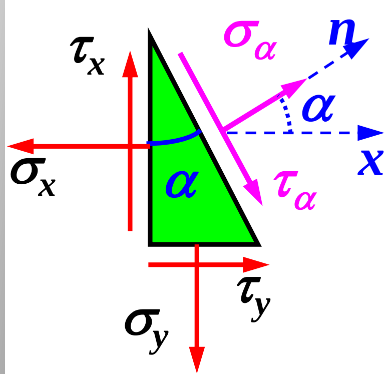
列平衡方程： $\begin{cases} \sum F_n = 0 \\ \sum F_t = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_x A_x \cos\alpha - \sigma_y A_y \sin\alpha + \tau_x A_x \sin\alpha + \tau_y A_y \cos\alpha = 0 \\ \tau_\alpha A_\alpha - \sigma_x A_x \sin\alpha + \sigma_y A_y \cos\alpha - \tau_x A_x \cos\alpha + \tau_y A_y \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

7-2 二向应力状态分析——公式解析法

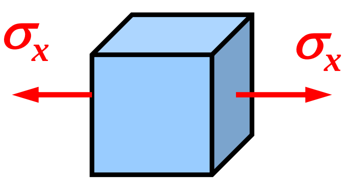


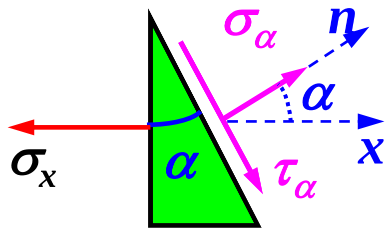
$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha$$

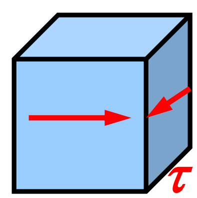
$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha$$

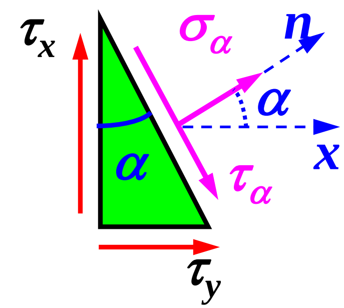
轴向拉伸与压缩

扭转









$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_x}{2}\cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha=-\tau_x\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha=\tau_x\cos 2\alpha$$

7-2 二向应力状态分析——公式解析法

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

- **最大和最小正应力**

$$\sigma_\alpha' = -2\tau_\alpha = 0 \qquad \alpha_0 = \frac{1}{2}\arctan\frac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y} \qquad \begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^{\ 2}}$$

此时： $\tau_{\alpha 0} = 0$

- **最大和最小切应力**

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_x} \qquad \begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^{\ 2}}$$

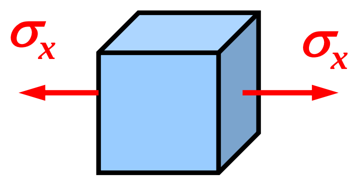
- **极值切应力平面与极值正应力平面：** $\alpha_1 = \alpha_0 \pm 45^{\circ}$

- $\sigma_{\alpha+90^{\circ}} + \sigma_\alpha = \sigma_x + \sigma_y \qquad \tau_{\alpha+90^{\circ}} = -\tau_\alpha$

7-2 二向应力状态分析——公式解析法

- 极值正应力称为主应力(Principal Stress)；
- 主应力所在截面称为主平面(Principal Planes)；此面上的切应力必为零;
- 若单元体的三对面均为主平面，该单元体称为主单元体。

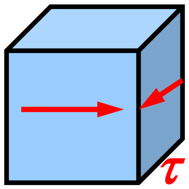
轴向拉伸与压缩

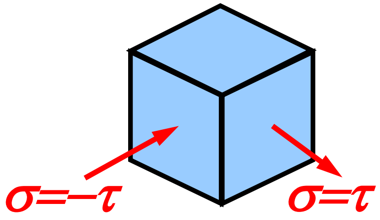


是主单元体吗?

是！主应力为σ_x和0

扭转





是主单元体吗?

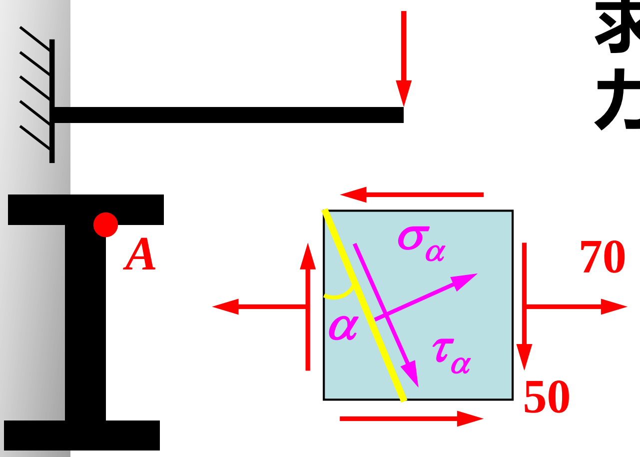
不是！

主应力为$\pm\tau$和0

7-2 二向应态分析—公式解析法

例7-1 *A* 点取出单元体如图所示（应力单位为MPa）。

求：α=30°截面的正应力和切应力，主应力的大小和主平面方位及最大切应力。

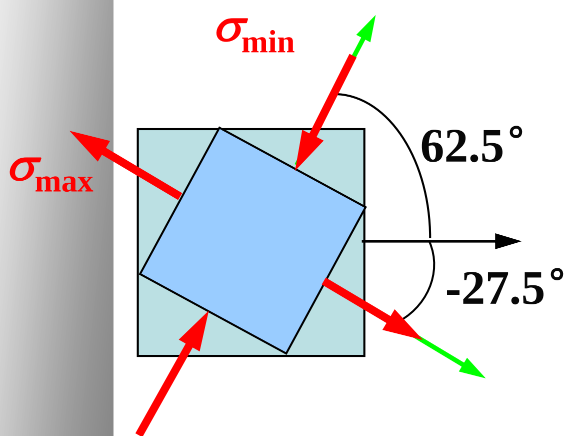


解： $\sigma_x=70\text{MPa}$， $\sigma_y=0$， $\tau_x=50\text{MPa}$

根据公式，得

$$\sigma_\alpha=\frac{70}{2}+\frac{70}{2}\cos 60^\circ-50\sin 60^\circ=9.2\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha=\frac{70}{2}\sin 60^\circ+50\cos 60^\circ=55.3\text{MPa}$$



主平面 $\tan 2\alpha_0=\frac{2\times 50}{-70}$ $\qquad \alpha_0=\begin{cases}-27.5^\circ\\ 62.5\end{cases}$

主应力

$$\sigma_{\max}=\sigma_{-27.5^\circ}=96\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min}=\sigma_{67.5^\circ}=-26\text{MPa}$$

最大切应力

$$\tau_{\max}=\sqrt{(35)^2+50^2}=61\text{MPa}$$

7-3 二向应力状态分析——图解解析法

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

消去参数α，得

$$(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_\alpha{}^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_x{}^2$$

圆心: $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ **半径:** $\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_x{}^2}$

此圆称为应力圆（或莫尔圆），是德国科学家Mohr在1882年提出的。

7-3 二向应力状态分析——图解解析法

一、画应力圆的一般步骤：

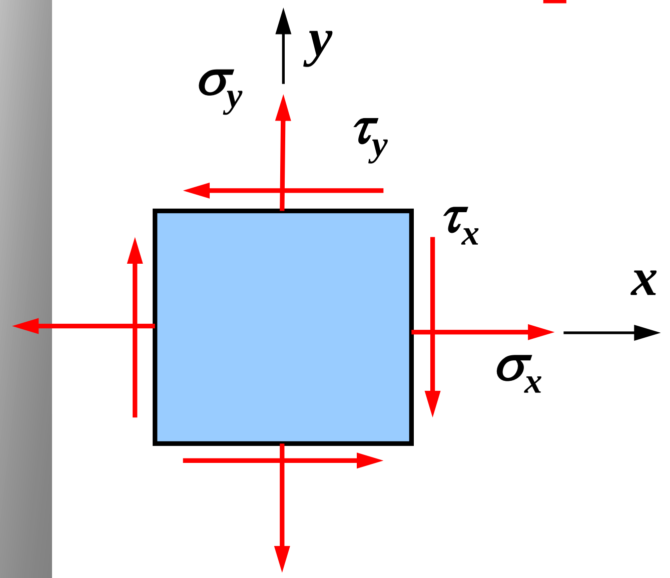
1、根据三个已知应力的大小，建立$\sigma\sim\tau$直角坐标系；

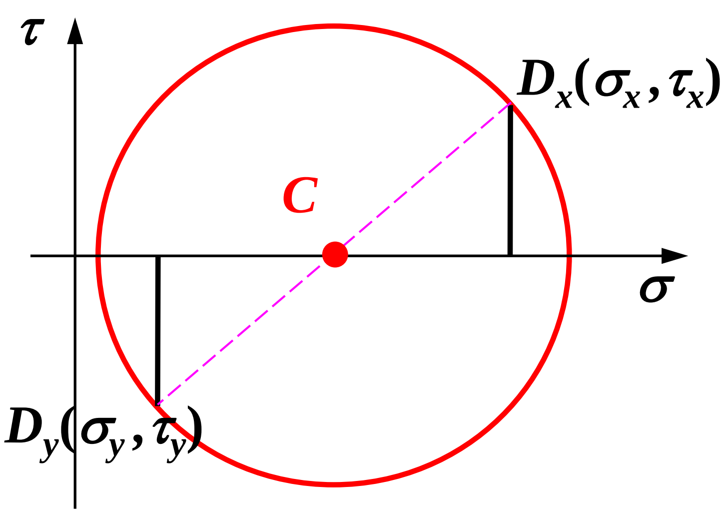
2、在$\sigma\sim\tau$坐标系中，确定x、y面所对应的两点D_x、D_y；

3、连接两点D_x、D_y，交横轴得圆心C点；

4、以C点为圆心，以CD_x为半径画圆，即为应力圆；

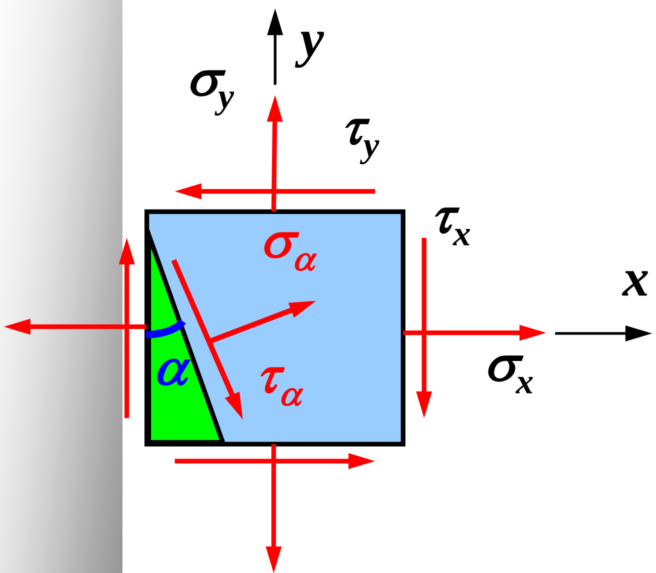
5、证明：圆心$(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0)$　半径$\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_x^2}$

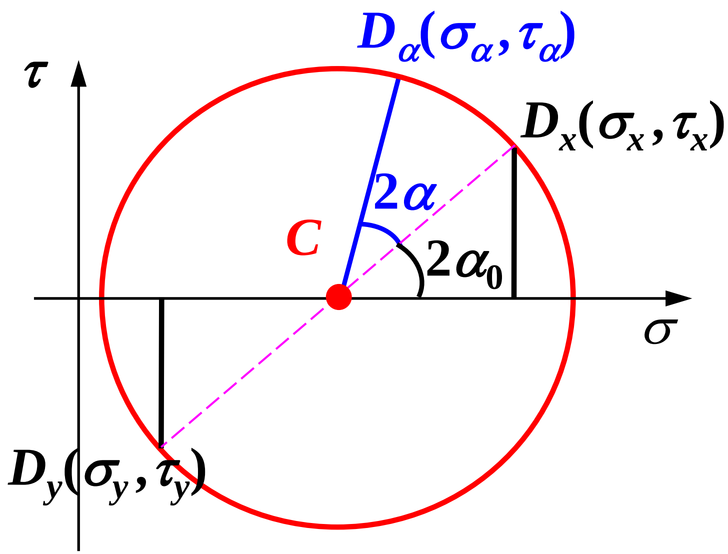




7-3 二向应力状态分析——图解解析法

二、α截面上的应力如何在应力圆上得到?





从D_x(或D_y)点出发，根据单元体α角的转向，沿圆周转动2α圆心角，得到D_α点，该点的坐标即为α截面上的应力。

$$D_{\alpha x}=C_x+R\cos(2\alpha+2\alpha_0)=C_x+R\cos 2\alpha\cos 2\alpha_0-R\sin 2\alpha\sin 2\alpha_0$$

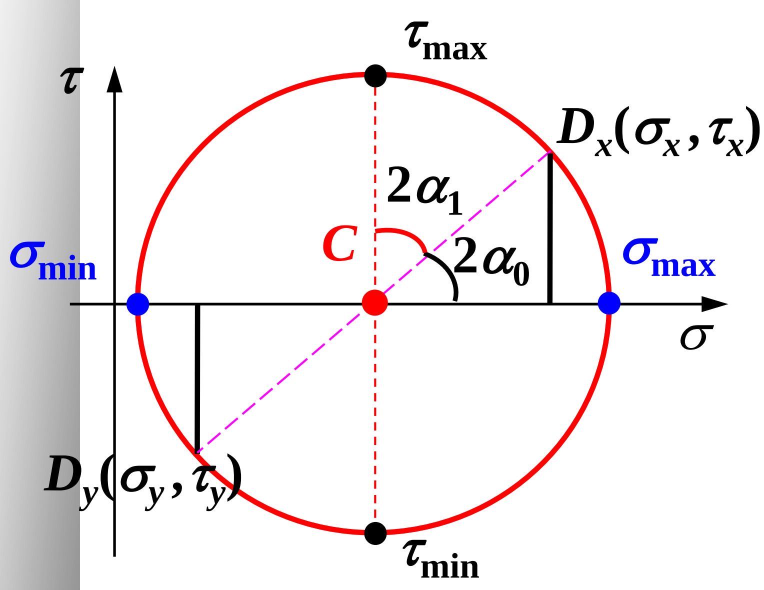
$$=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha=\sigma_\alpha$$

$$D_{\alpha y}=R\sin(2\alpha+2\alpha_0)=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha=\tau_\alpha$$

应力圆与单元体的关系：点面对应，转向一致，转角加倍。

7-3 二向应力状态分析——图解解析法

三、应力圆上应力的极值如何在应力圆上得到？



1、极值正应力（主应力）：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}$$

2、极值切应力：

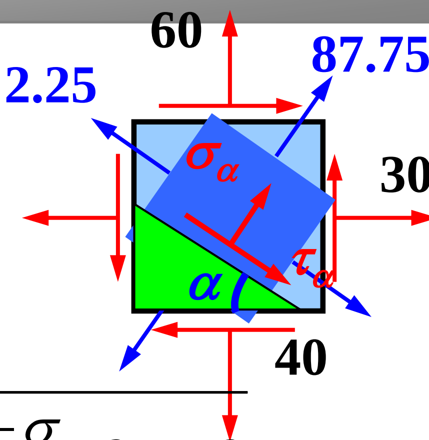
$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_x}$$

此外，根据应力圆还可以得到：

- 极值切应力的作用面与主平面间的夹角是45度；
- 互相垂直的截面上，切应力等值反向，正应力之和为常数；
- 切应力最大与最小的截面上，正应力不一定为零，且两正应力大小相等，符号一致。

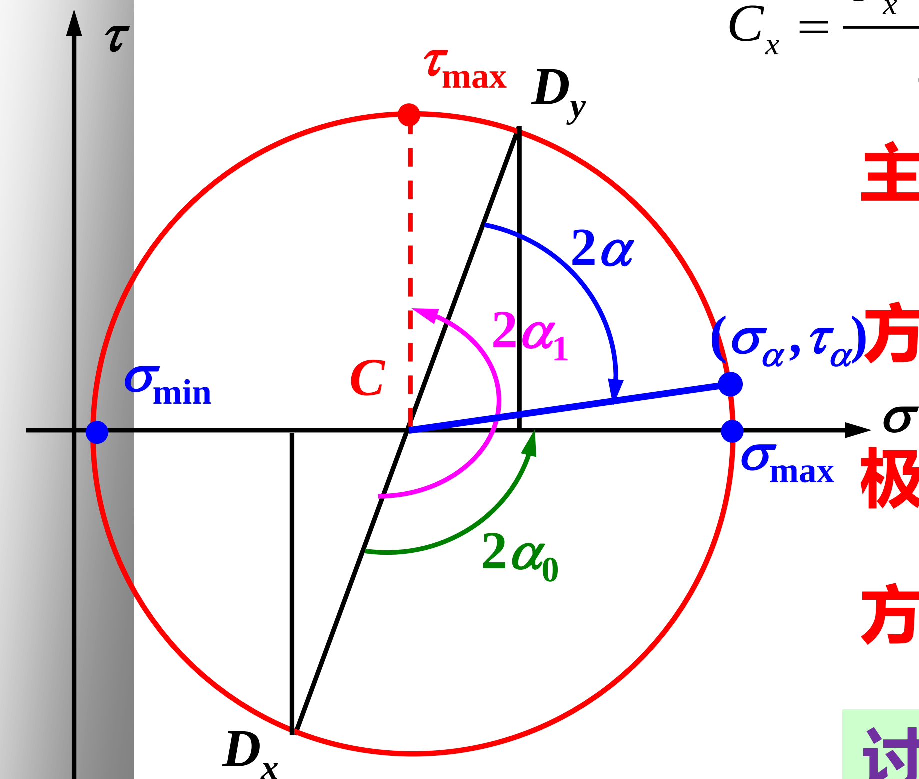
7-3 二向应力状态分析——图解解析法



例7-2 已经某单元体，试用**图解法**计算主应力、极值切应力的大小及方位 （应力单位为MPa）。

解： $\sigma_x = 30, \sigma_y = 60, \tau_x = -\tau_y = -30$ **画应力圆**

$$C_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 45 \quad R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_x{}^2} = 42.75$$



主应力： $\begin{matrix}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{matrix} = C_x \pm R = \begin{matrix}87.75 \\ 2.25\end{matrix}$

方位： $\alpha_0 = \frac{1}{2}(180^o - \arctan\frac{-2\tau_x}{\sigma_y - \sigma_x}) = 55^o$

极值切应力： $\tau_{max} = R = 42.75$

方位： $\alpha_1 = \alpha_0 + 45^o = 100^o$

讨论：如何求解斜截面上的应力?

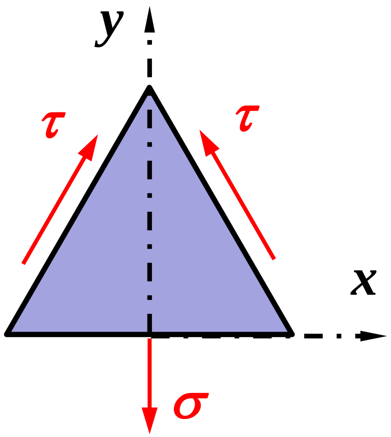
7-3 二向应力状态分析——图解解析法

讨论：运用应力圆的概念，判断下面结论是否正确。

- 正应力为零的截面上，切应力为极大或极小值；X
- 切应力为零的截面上，正应力为极大或极小值；✓
- 切应力为极大和极小值的截面上，两正应力一定大小相等，符号相同；✓
- 若两截面的切应力大小相等，符号相反，则此两截面相互垂直；X
- 切应力为极大和极小值的截面总是相互垂直的；✓
- 正应力为极大和极小值的截面总是相互垂直的。✓

7-3 二向应力状态分析——图解解析法

例7-3 某微元体（正三角形）如图所示，σ已知，试计算该点的主应力，并画主单元体。

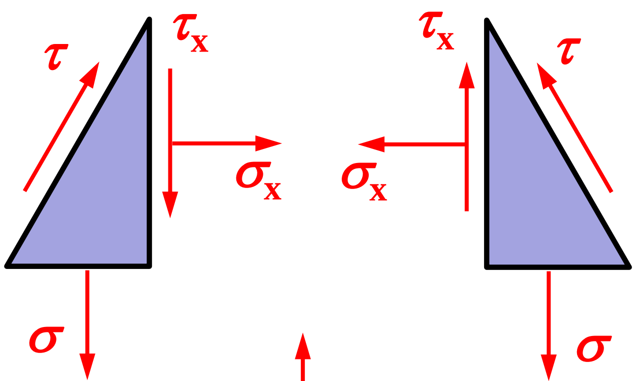


解：1、建立坐标系，先求τ：

$$\sum F_y = 0 \qquad 2\tau A\cos 30 - \sigma A = 0$$

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma$$

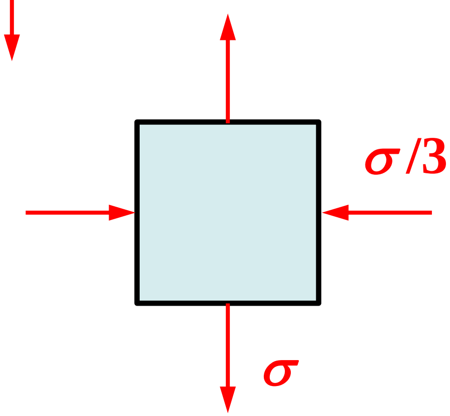
2、沿y轴切微元体：根据对称性，$\tau_x = 0$



$$\sum F_x = 0 \qquad \tau A\sin 30 + \sigma_x A\cos 30 = 0$$

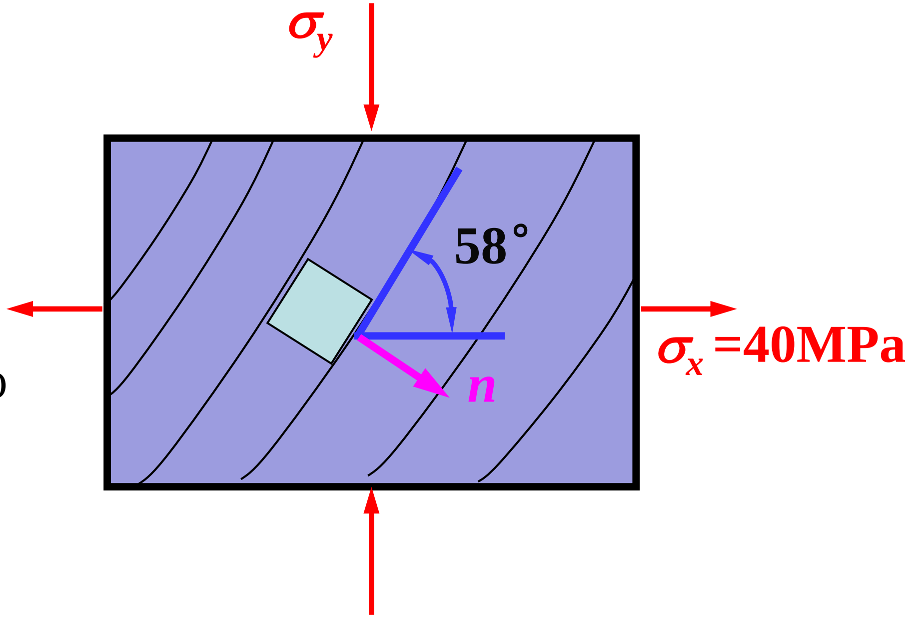
$$\sigma_x = -\frac{1}{3}\sigma$$

3、得到主单元体：



7-3 二向应力状态分析——图解解析法

例7-4 沿着木纹的切应力达到55MPa时，木块将产生裂纹。木块受力如图，问**压应力**σ_y达到多大时，木块将产生裂纹。



解：1、斜截面的切应力

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha$$

其中：

$$\sigma_x = 40\text{MPa} \qquad \alpha = -32^{\text{O}}$$

α：截面外法线 n 与 x 轴之间的夹角，x 到 n 逆针向转动为正。

2、切应力强度条件：

$$\tau_\alpha \geq 55\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha \leq -55\text{MPa}$$

3、求解：

$$\sigma_y \leq -82.4\text{MPa}$$

$$\sigma_y \geq 162.4\text{MPa}$$ **（弃）**

今 日 作 业

7-1(b)，7-3(c)

7-1(b)提示：弯曲切应力忽略，用三维单元体表示
7-3(c)提示：公式解析法和图解解析法任选

上节课内容回顾

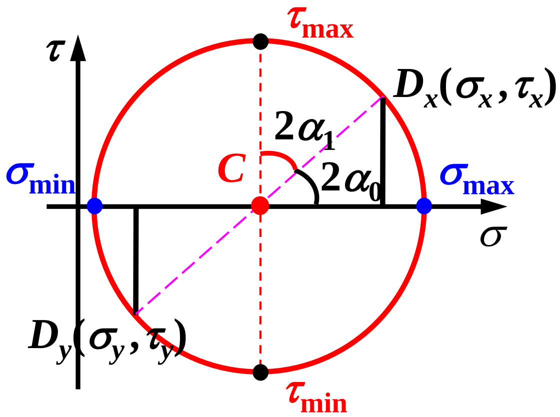
平面应力状态

公式解析法：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

图解解析法：



$$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

点面对应，
转向一致，
转角加倍.

第七章 应力状态分析

- 应力状态的概念
- 二向应力状态分析—公式解析法
- 二向应力状态分析—图解解析法
- 典型的三向应力状态(部分自学)
- 广义胡克定律
- 平面应力状态下的应变分析*(自学)

学前问题：

- 三向应力圆?
- 胡克定律&广义胡克定律?
- 广义胡克定律有何应用?

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

7-4 典型三向应力状态

- **应力状态的分类：（不严格定义）**

单向应力状态：某两对面上的应力为零

平面应力状态：某一对面上的应力为零

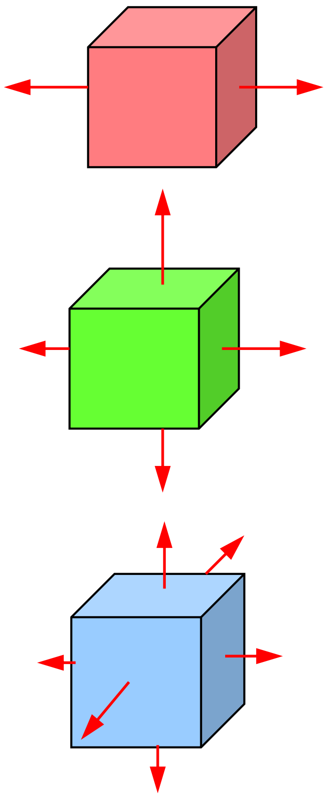
三向应力状态：各对面上的应力均不为零

- **应力状态的分类：通过主单元体定义**

单向应力状态：非零主应力的个数为1

二向应力状态：非零主应力的个数为2

三向应力状态：非零主应力的个数为3



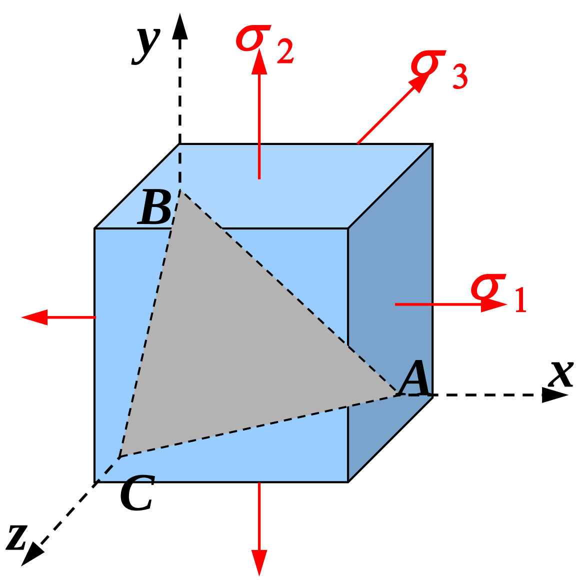
主单元体

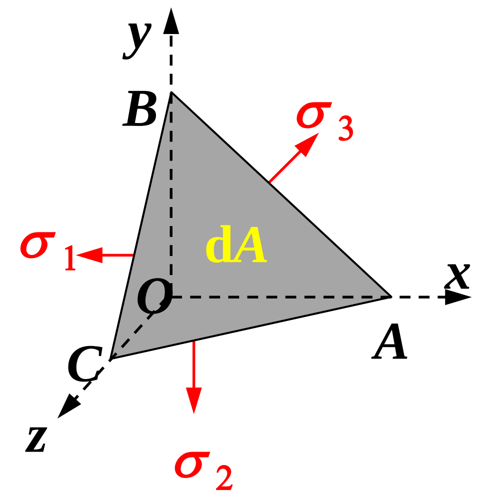
- 按代数值排列三个主应力

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

7-4 典型三向应力状态

前提：当三个主应力已知时，任意斜截面上的应力计算





设*ABC*截面法线 *n* 的三个方向余弦为 *l*、*m*和*n*，则有：

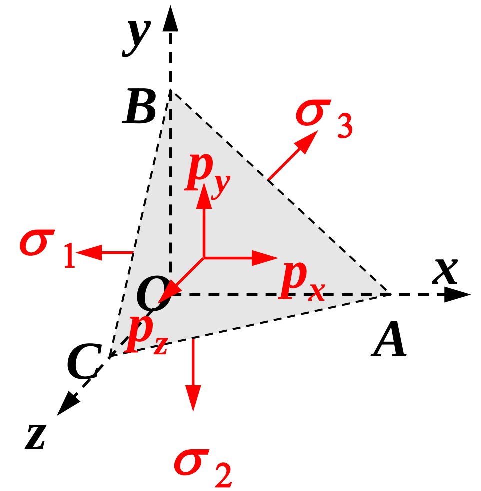
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

若 $S_{\Delta ABC} = \mathrm{d}A$，**则有** $S_{\Delta OBC} = l\mathrm{d}A, S_{\Delta OAC} = m\mathrm{d}A, S_{\Delta OAB} = n\mathrm{d}A$

7-4 典型三向应力状态

将ABC截面上的应力，分解为p_x、p_y和p_z三个分量，根据平衡有：

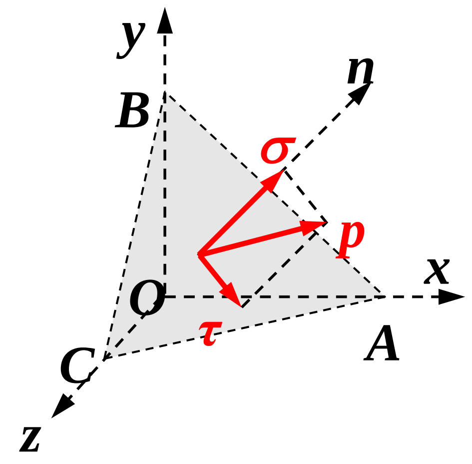
$$p=\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}\qquad \begin{cases}\sum F_x=0 & p_x=\sigma_1 l\\ \sum F_y=0 & p_y=\sigma_2 m\\ \sum F_z=0 & p_z=\sigma_3 n\end{cases}$$



将ABC截面上的应力，分解正应力σ和切应力τ：

$$p=\sqrt{\sigma^2+\tau^2}$$

$$\begin{cases}\sigma=\sigma_1 l^2+\sigma_2 m^2+\sigma_3 n^2\\ \tau^2=\sigma_1^2 l^2+\sigma_2^2 m^2+\sigma_3^2 n^2-\sigma^2\\ l^2+m^2+n^2=1\end{cases}$$



上述三式可视为含有l^2、m^2和n^2的方程组，联立求解

7-4 典型三向应力状态

$$\begin{cases} l^2=\dfrac{\tau^2+(\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)} \\ m^2=\dfrac{\tau^2+(\sigma-\sigma_3)(\sigma-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)} \\ n^2=\dfrac{\tau^2+(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sigma-\dfrac{\sigma_2+\sigma_3}{2})^2+\tau^2=(\dfrac{\sigma_2-\sigma_3}{2})^2+l^2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3) \\ (\sigma-\dfrac{\sigma_3+\sigma_1}{2})^2+\tau^2=(\dfrac{\sigma_3-\sigma_1}{2})^2+m^2(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1) \\ (\sigma-\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2})^2+\tau^2=(\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2})^2+n^2(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2) \end{cases}$$

若以σ为横坐标，τ为纵坐标，上述三式为三个圆的方程。斜截面的应力满足这三个方程，即落在这三个圆周的交点上。

所以，若已知三个主应力和斜截面的三个方向余弦，可以作出上述三个圆的任意两个，其交点坐标即为所求斜截面的应力。

上述三个方程过于复杂，也不利于分析正应力和切应力的极值，故需做如下的变化。

7-4 典型三向应力状态

$$\begin{cases} (\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2})^2+\tau^2=(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2})^2+l^2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3) \\ (\sigma-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2})^2+\tau^2=(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2})^2+m^2(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1) \\ (\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2})^2+\tau^2=(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2})^2+n^2(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2) \end{cases}$$

约定$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3$，则有：
$$\begin{cases} l^2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)\geq 0 \\ m^2(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)\leq 0 \\ n^2(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)\geq 0 \end{cases}$$

若舍弃三个方程的最后一项，则：

$$\Rightarrow\begin{cases} (\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2})^2+\tau^2=(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2})^2 & \text{将同心缩小} \\ (\sigma-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2})^2+\tau^2=(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2})^2 & \text{将同心放大} \\ (\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2})^2+\tau^2=(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2})^2 & \text{将同心缩小} \end{cases}$$

7-4 典型三向应力状态

即：以*ABC*斜截面上应力为坐标的点，必位于

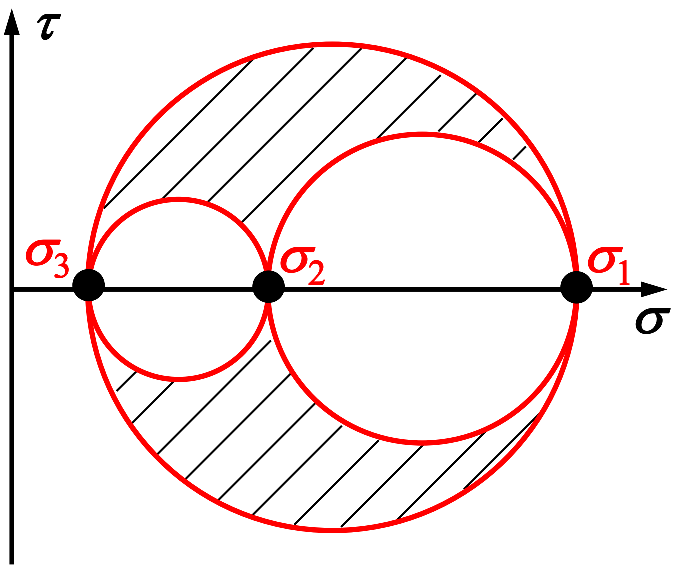
$$\begin{cases} (\sigma-\dfrac{\sigma_2+\sigma_3}{2})^2+\tau^2=(\dfrac{\sigma_2-\sigma_3}{2})^2 & \text{所表示圆周之外} \\ (\sigma-\dfrac{\sigma_3+\sigma_1}{2})^2+\tau^2=(\dfrac{\sigma_3-\sigma_1}{2})^2 & \text{所表示圆周之内} \\ (\sigma-\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2})^2+\tau^2=(\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2})^2 & \text{所表示圆周之外} \end{cases}$$

根据三个主应力，分别以(σ_1,0)、(σ_2 ,0) 和(σ_3 ,0) 三点，两两作应力圆，称为**三向应力圆**。

以斜截面上应力为坐标的点，必位于两个小圆之外，大圆之内（即阴影线部分）。

$$\sigma_{\min}^{\max}=\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}$$

$$\tau_{\min}^{\max}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

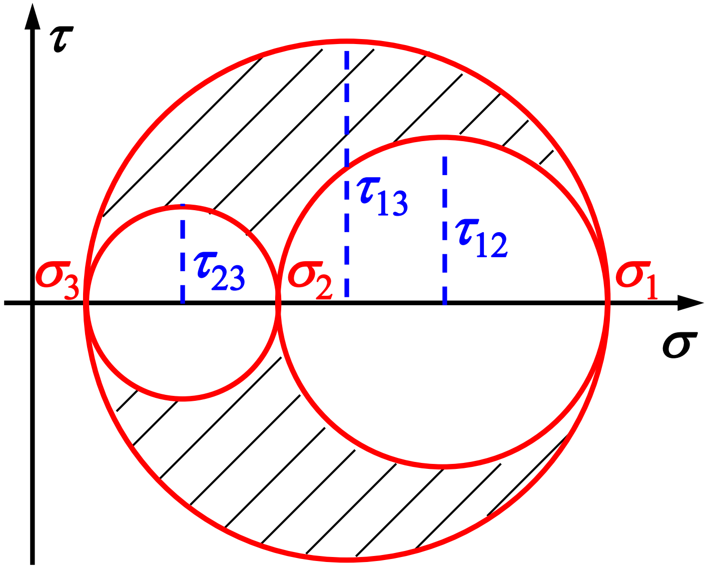


三向应力圆

7-4 典型三向应力状态

极限切应力

$$\begin{cases} \tau_{12} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_{23} = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{13} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \end{cases}$$



均方根切应力τ_m：对塑性材料的屈服有较大影响

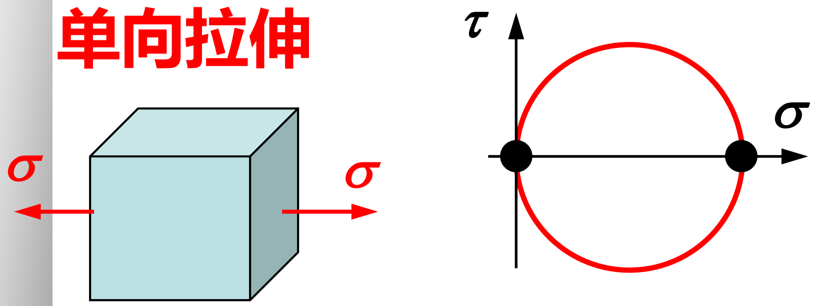
$$\tau_m = \sqrt{\frac{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{12}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

7-4 典型三向应力状态

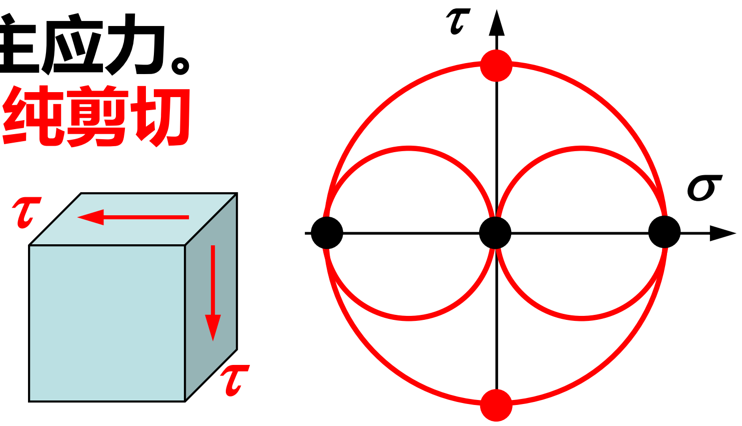
例7-5 作下列单元体的三向应力圆并求主应力。

单向拉伸



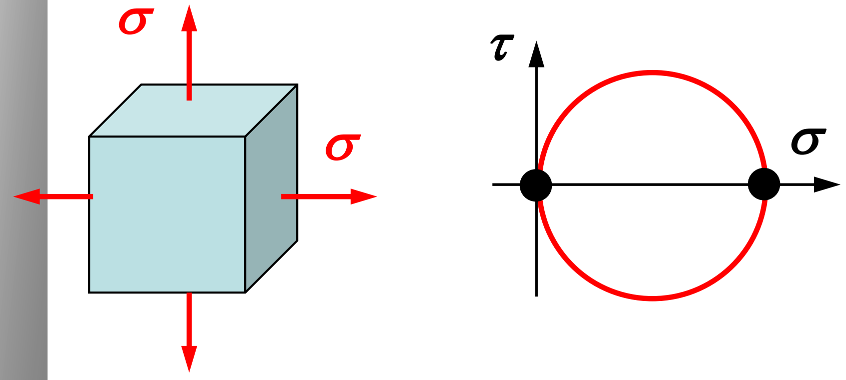
$$\sigma_1=\sigma,\sigma_2=\sigma_3=0$$

纯剪切



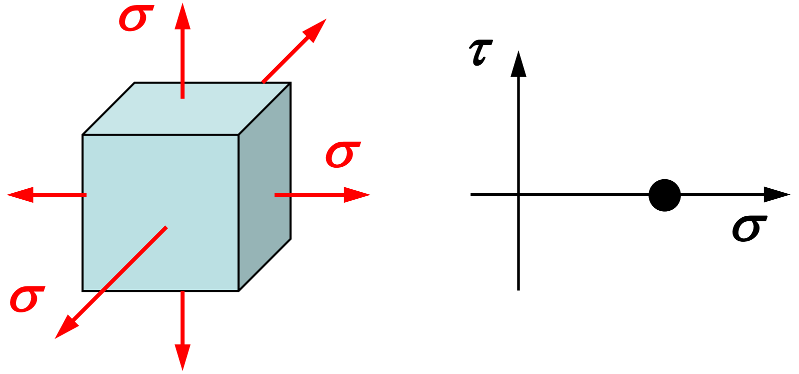
$$\sigma_1=\tau,\sigma_2=0,\sigma_3=-\tau$$

两向等拉



$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma,\sigma_3=0$$

三向等拉



$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$$

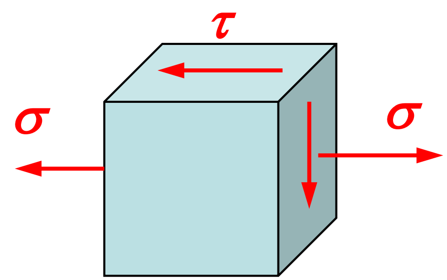
7-4 典型三向应力状态

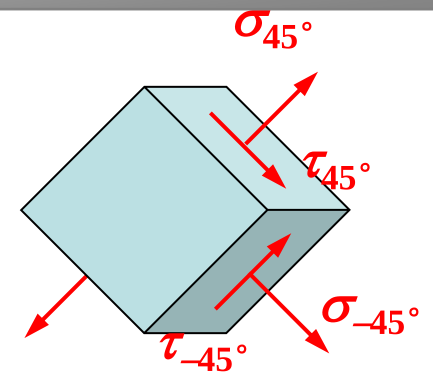
拉剪应力状态

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau^2}$$





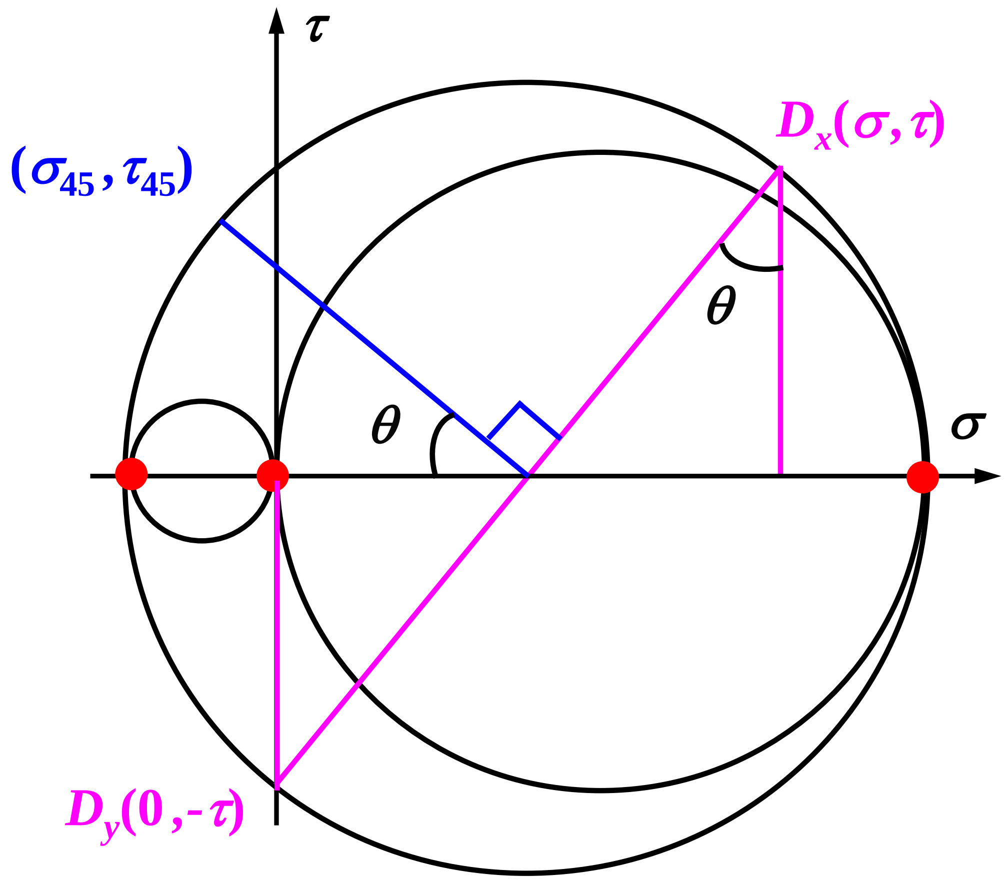
讨论:

(1)若单元体旋转45度?

$$\sigma_{45} = \frac{\sigma}{2} - R\cos\theta = \frac{\sigma}{2} - \tau$$

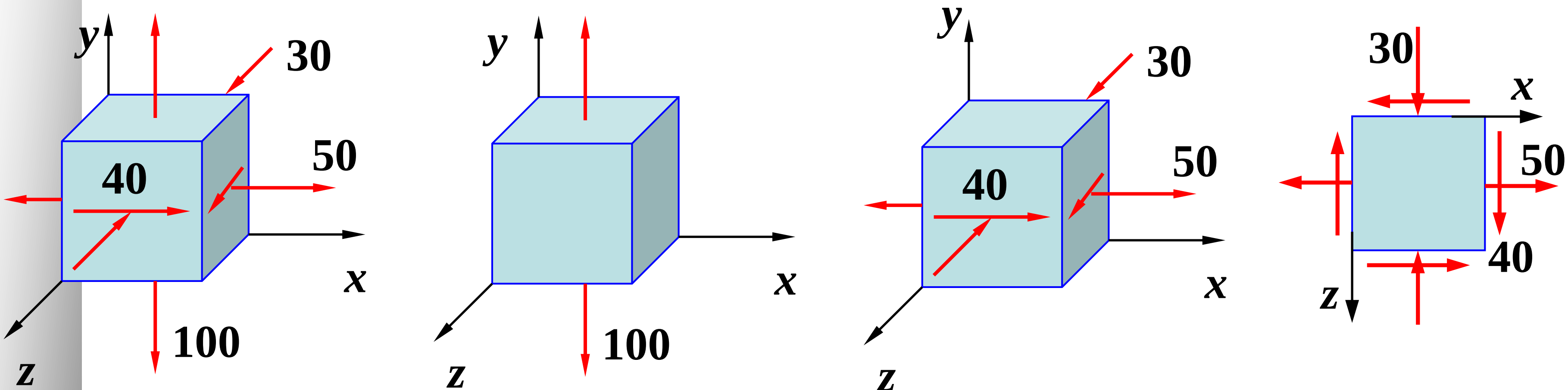
$$\tau_{45} = R\sin\theta = \frac{\sigma}{2}$$

$$\sigma_{-45} = \frac{\sigma}{2} + \tau \qquad \tau_{-45} = -\frac{\sigma}{2}$$



(2)若单元体上切应力反向?

例7-6 求下面三向应力状态的应力圆、主应力和最大切应力。



解：将三向应力状态的单元分解 $\sigma_i = 100$

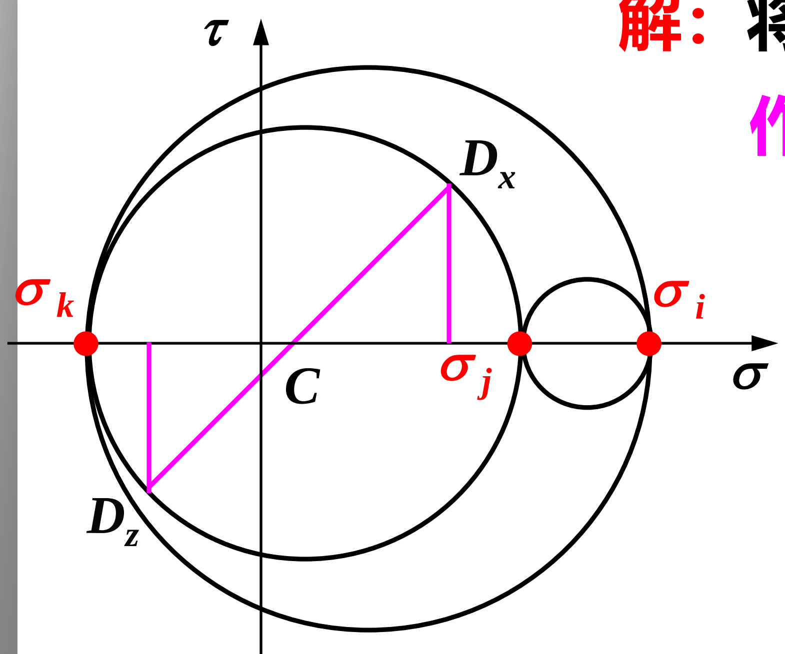
作 $x\,z$ 平面应力圆

$C(10,0) \qquad R = 40\sqrt{2} = 56$

$\sigma_j = 66 \qquad \sigma_k = -46$

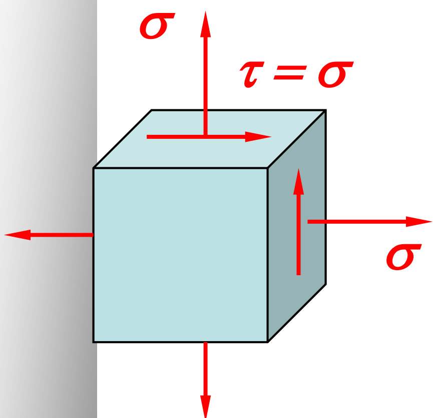
$\sigma_1 = 100, \sigma_2 = 66, \sigma_3 = -46$

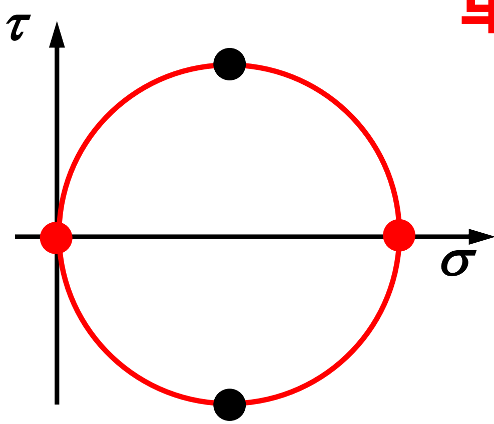
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 73$$



7-4 典型三向应力状态

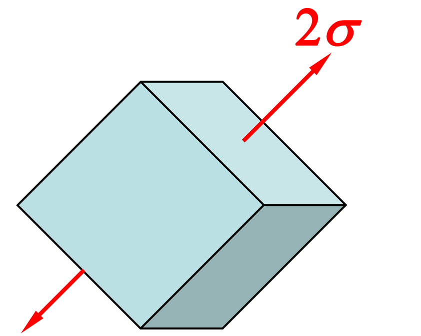
例7-7 判断下面两个单元体是几向应力状态?

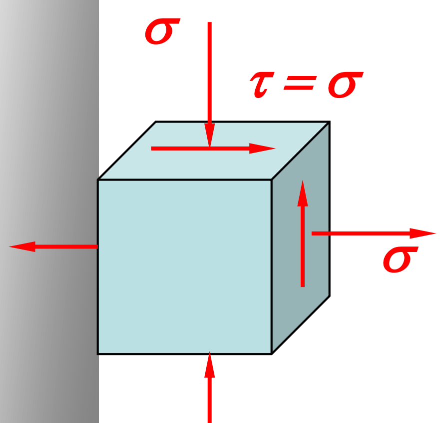


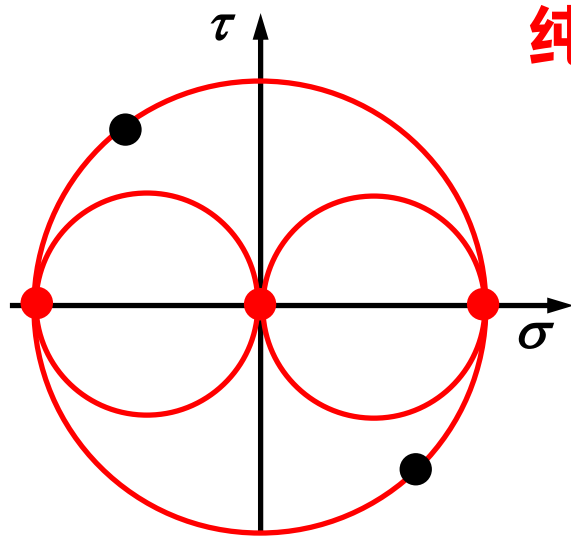


单向应力状态

$$\sigma_1 = 2\sigma$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3 = 0$$

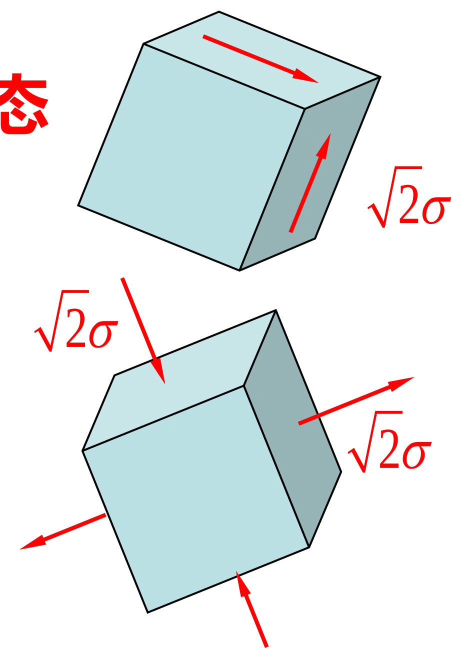






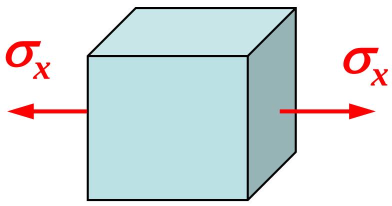
纯剪切应力状态

$$\sigma_1 = \sqrt{2}\sigma$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3 = -\sqrt{2}\sigma$$



7-5 广义胡克定律

胡克定律： $$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$



当应力不超过一定限度时，只承受单向正应力的单元体，正应力与线应变之间存在着简单的正比关系，比例常数为材料的弹性模量。

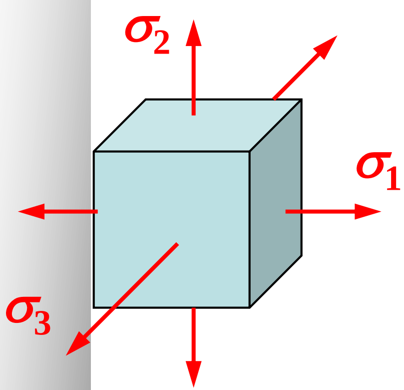
泊松比：横向应变与纵向应变的比值（取正）

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -\mu\frac{\sigma_x}{E}$$

问题：*y*、*z*方向有线应变，但是没有正应力

胡克定律 → **广义胡克定律**

7-5 广义胡克定律



主应变(Principal Strain)：主应力方向上的线应变

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \Rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_1 \ge \varepsilon_2 \ge \varepsilon_3$$

	σ_1单独作用	σ_2单独作用	σ_3单独作用
ε_1	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_2}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_3}{E}$
ε_2	$-\mu\frac{\sigma_1}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_3}{E}$
ε_3	$-\mu\frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

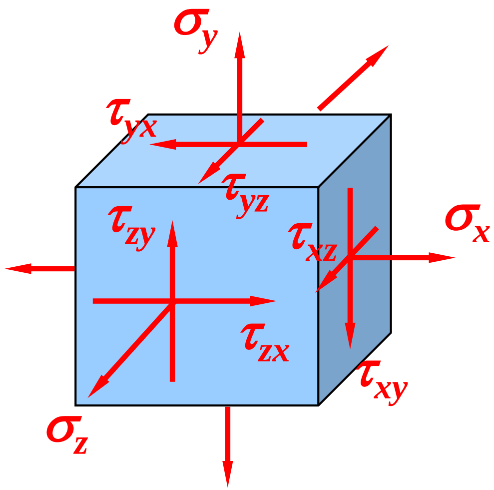
同时作用 $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + (-\mu\frac{\sigma_2}{E}) + (-\mu\frac{\sigma_3}{E}) = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

7-5 广义胡克定律

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

广义胡克定律
Generalized Hooke's Law

对于非主单元体情况，在小变形的前提下，切应力不影响单元体棱边的长度变化，所以广义胡克定律为：



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

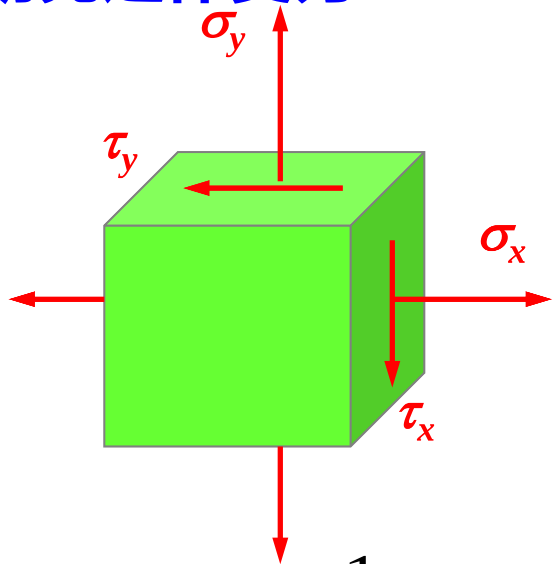
7-5 广义胡克定律

在平面应力状态下，广义胡克定律变为：

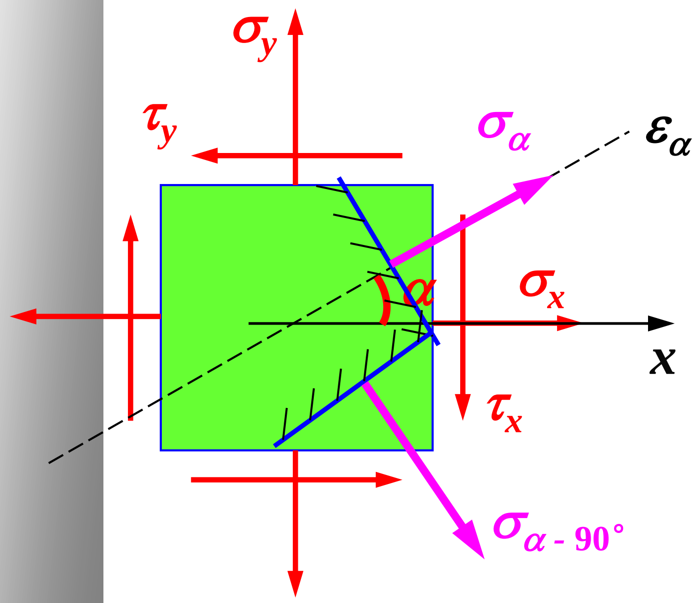
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$



注意：某方向上的应变（变形），不仅与这个方向上的应力有关，还与这个方向的两个垂直方向上的应力相关！



$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \mu\sigma_{\alpha\pm 90^\circ})$$

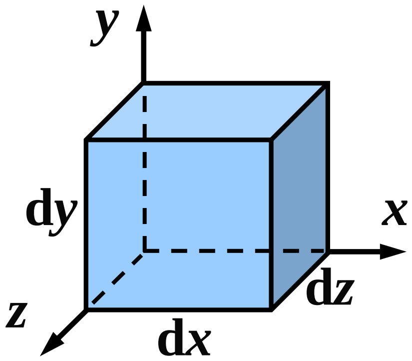
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

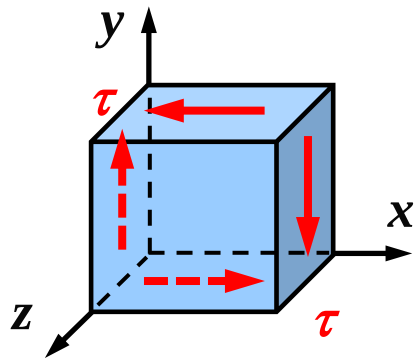
$$\sigma_{\alpha-90^\circ} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha-90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y$$

7-5 广义胡克定律

体积应变与体积弹性模量





$$V_0 = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

$$V_1 = (1+\varepsilon_x)\mathrm{d}x \cdot (1+\varepsilon_y)\mathrm{d}y \cdot (1+\varepsilon_z)\mathrm{d}z$$

$$= (1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)V_0$$

$$\theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

θ: 体积应变

$$= \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

$$\sigma_m = \frac{E}{3(1-2\mu)}\theta = K\theta$$

K: 体积弹性模量

证明纯剪切应力状态下单元体的体积不变

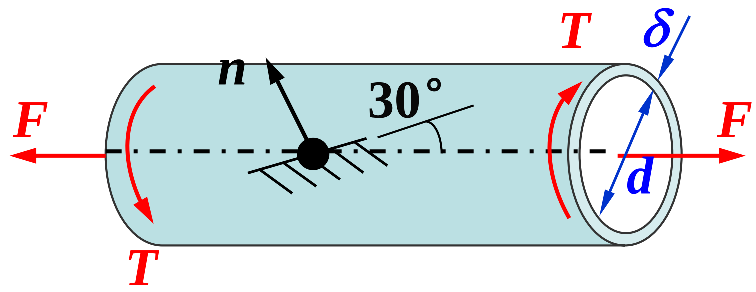
$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = 0$$

$$\theta = \frac{\sigma_m}{K} = 0$$

得证!

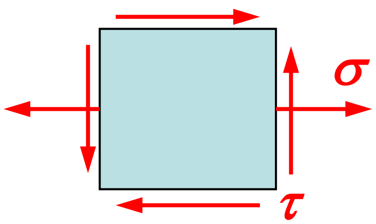
例7-8 薄壁圆筒受拉伸扭转组合变形，受力如图，$F=20\text{kN}$，$T=600\text{Nm}$，$d=50\text{mm}$，$\delta=2\text{mm}$，分析指定截面上的应力和该方向应变（$E=200\text{GPa}$，$\mu=0.3$）。



解：横截面应力： $D=54\text{mm}$

$$\sigma=\frac{F_{\text{N}}}{A}=\frac{4F}{\pi(D^2-d^2)}=61.2\text{MPa}$$

$$\tau=\frac{16T}{\pi D^3(1-\alpha^4)}=-73.2\text{MPa}$$

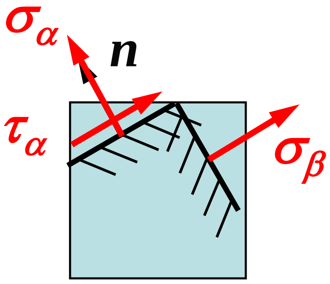


斜截面应力：(α= 120°) $\sigma_\alpha=-48.1\text{MPa}$, $\tau_\alpha=-10.1\text{MPa}$

斜截面应变： $\sigma_\alpha+\sigma_\beta=\sigma_x+\sigma_y$

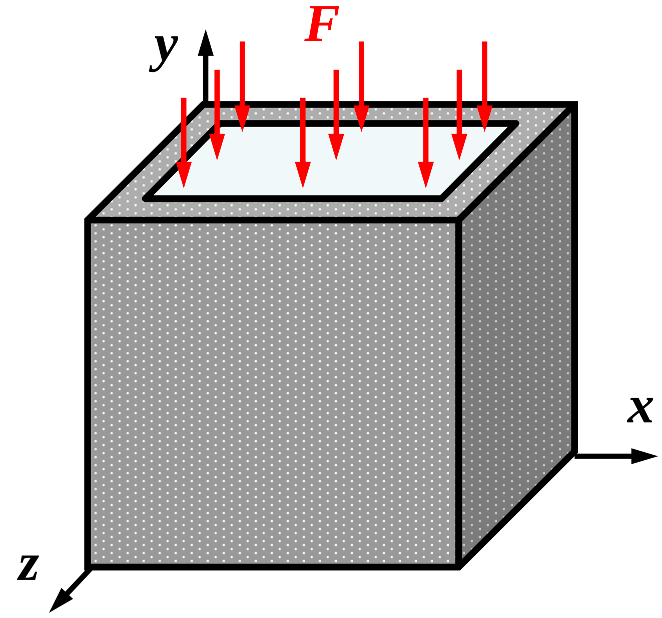
$$\sigma_\beta=\sigma_x-\sigma_\alpha=109.3\text{MPa}$$

$$\varepsilon_\beta=\frac{\sigma_\beta}{E}-\mu\frac{\sigma_\alpha}{E}=618.6\times10^{-6}$$



7-5 广义胡克定律

例题7-9 如边长为20mm的立方体，放置在刚性模具中，在立方体顶面受均匀力F=14kN，已知E=200GPa，μ=0.3。试求立方体各个面上的正应力，摩擦力忽略。



解： 1、计算y方向应力

$$\sigma_y = -\frac{F}{A} = -35\text{MPa}$$

2、x、z 方向有刚性模具限制

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$$

3、代入广义胡克定律：

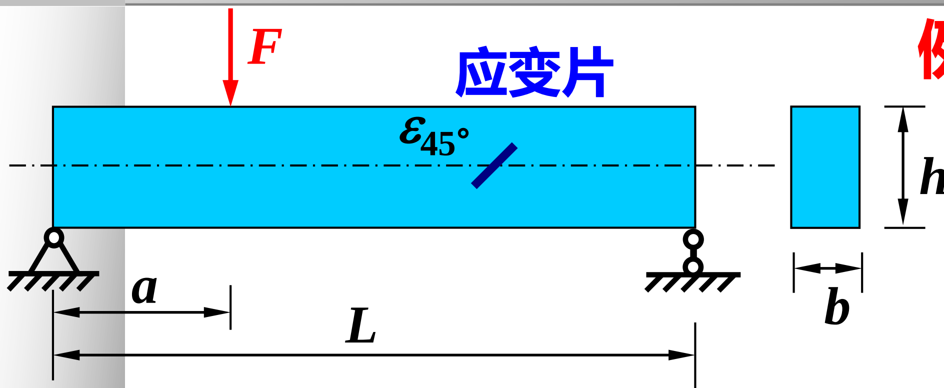
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

4、联立求解：

$$\sigma_x = \sigma_z = -15\text{MPa}$$

7-5 广义胡克定律



例7-10 已知：$L, a, b, h, E, \mu, \varepsilon_{45°}$

求：F 。

解： 1、内力分析 $F_s = -Fa/L$

2、应力分析 $|\tau_{\max}| = \dfrac{3F_s}{2A} = \dfrac{3Fa}{2bhL}$

3、应变分析 $\varepsilon_{45} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{45} - \mu\sigma_{135}]$

4、应力状态分析

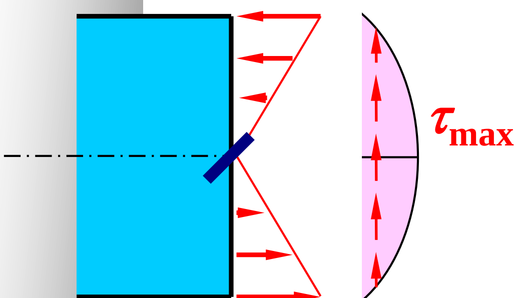
$$\sigma_{45} = |\tau_{\max}| \qquad \sigma_{135} = -|\tau_{\max}|$$

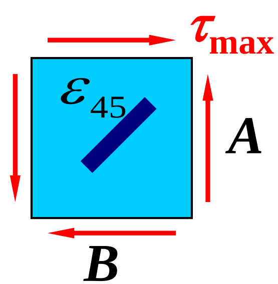
5、联立求解

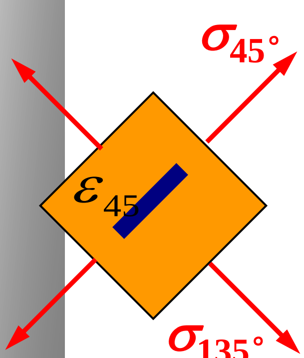
$$\varepsilon_{45} = \frac{|\tau_{\max}|}{E}(1+\mu) \qquad F = \frac{2bhL\varepsilon_{45}E}{3(1+\mu)a}$$

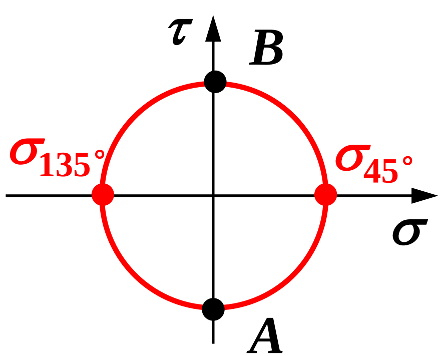
6、讨论：若应变片转90度?

7、总结：①分析应变片所在点的应力状态；②列出应变片所在方向的广义胡克定律。



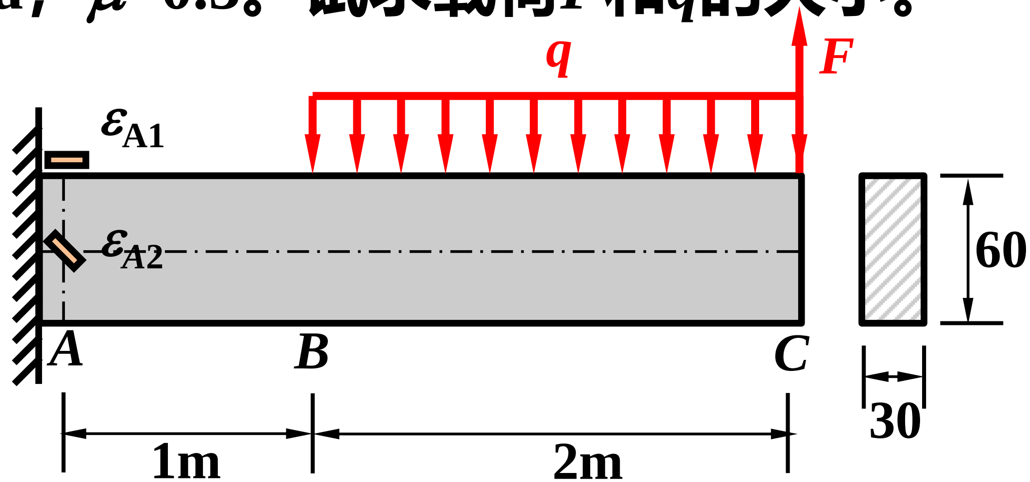






7-5 广义胡克定律

例题7-12 矩形截面悬臂梁受力如图，测得A截面顶部沿轴向线应变ε_{A1}=500e-6， A截面中性层与轴线成-45°方向的线应变ε_{A2}=300e-6，已知E=200GPa，μ=0.3。试求载荷F和q的大小。



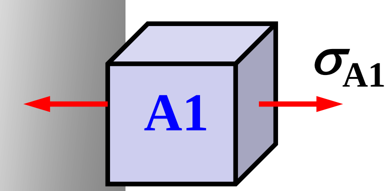
解：1、A截面的内力(设正)

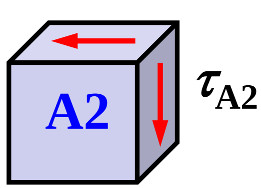
$$F_{sA}=2q-F \qquad M_A=3F-4q$$

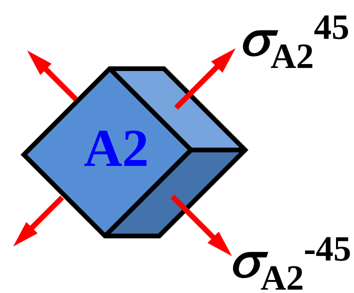
2、1点和2点的应力

$$\sigma_{A1}=-\frac{M_A}{W}=\frac{(4q-3F)\times10^6}{18}$$

$$\tau_{A2}=\frac{3F_{sA}}{2A}=\frac{(2q-F)\times10^4}{12}$$







$$\sigma_{A2}^{45^\circ}=-\tau_{A2} \qquad \sigma_{A2}^{-45^\circ}=\tau_{A2}$$

3、代入广义胡克定律

$$\varepsilon_{A1}=\frac{\sigma_{A1}}{E}$$

$$\varepsilon_{A2}=\frac{1}{E}(\sigma_{A2}^{-45}-\mu\sigma_{A1}^{45})$$

4、联立求解

$$F=109\text{kN}, q=82.2\text{kN/m}$$

7-6* 平面应力状态下的应变分析

工程中，经常需要通过**测量应变**来计算应力的问题，特别是**平面应力状态**。为了得到三个应变分量（ε_x、ε_y和γ_{xy}），需要研究通过一点沿不同方向上的应变之间的关系，称为应变分析。

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}[\sigma_\alpha - \mu\sigma_{\alpha\pm 90^\circ}]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu\sigma_y]$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu\sigma_x]$$

$$\sigma_{\alpha-90^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_x = G\gamma \qquad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha - \frac{\gamma}{2}\sin 2\alpha$$

进行平面问题的应变分析时，需要确定三个应变分量，但是**切应变难以直接测量**，所以一般选用**三个特殊角度**测量线应变$\varepsilon_{\alpha 1}$, $\varepsilon_{\alpha 2}$, $\varepsilon_{\alpha 3}$，然后联立求解方程组，即可求出应力分量，得到主应力和最大切应力。

7-6* 平面应力状态下的应变分析

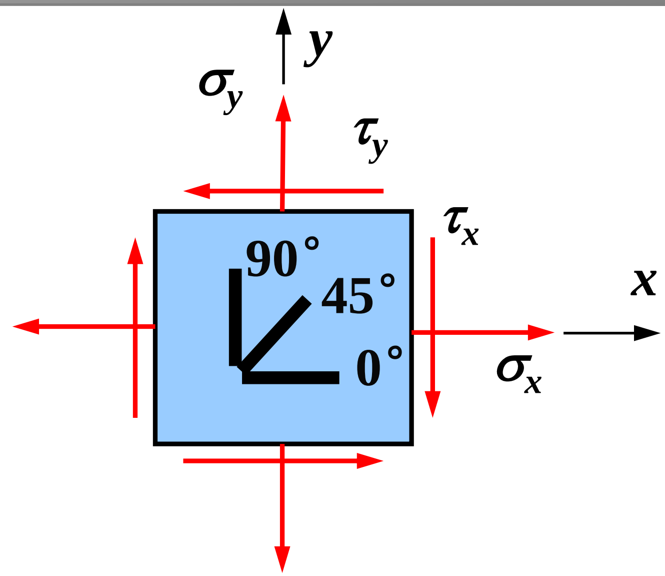
以45°应变花为例:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha - \frac{\gamma}{2}\sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{90}$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_0 + \varepsilon_{90} - 2\varepsilon_{45}$$

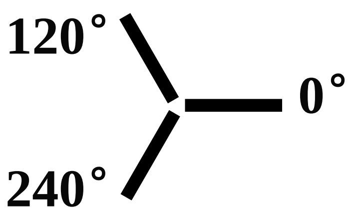


45°应变花

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_0+\mu\varepsilon_{90})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x) = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{90}+\mu\varepsilon_0)$$

$$\tau_x = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}(\varepsilon_0+\varepsilon_{90}-2\varepsilon_{45})$$



60°应变花

第七章的基本要求

1．明确一点应力状态、主应力和主平面、单元体等基本概念;

2．对于平面应力状态，熟练掌握用公式解析法和图解解析法计算任意斜截面应力、主应力和主平面方位;

3．了解三向应力状态的应力圆的画法，掌握主应力和最大切应力的计算方法;

4．掌握广义虎克定律及其应用。

今 日 作 业

7-11，7-14

电阻应变片测量法

- 概述
- 电阻应变效应与电阻应变片
- 惠斯通电桥与电阻应变仪
- 半桥电路与全桥电路
- 温度补偿
- 组合梁弯曲正应力的测定（第三个实验）

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

电阻应变片测量法

一、概述

电测法是电阻应变测量法的简称。

基本原理：以电阻应变片作为传感元件，将构件的应变转换为电阻变化，通过电阻应变仪进行测量，从而得到应变值。

优点与特点：

(1) 应变片的体积小，质量轻，能准确反映一点处的线应变；

(2) 测量精度高，抗干扰能力强，不破坏构件；

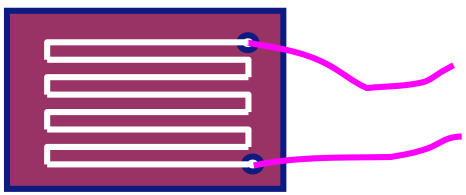
(3) 粘贴测量方便，广泛用于远距离、动静态、复杂环境等。

电阻应变片测量法

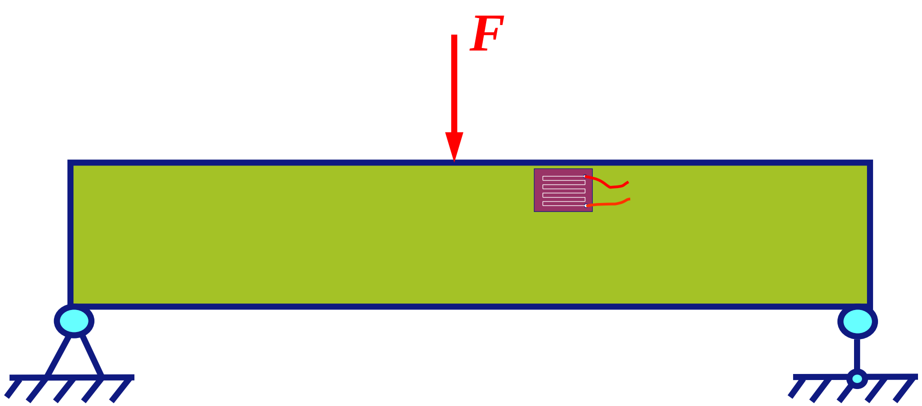
二、电阻应变效应与电阻应变片

$$\frac{\Delta R}{R}=k\frac{\Delta l}{l}=k\varepsilon$$

电阻应变效应



电阻应变片



应变片的设计要求:

(1) 体积小，电阻大;

(2) 导体横向变形小;

(3) 便于粘贴测量。

电阻应变片测量法

三、惠斯通电桥与电阻应变仪

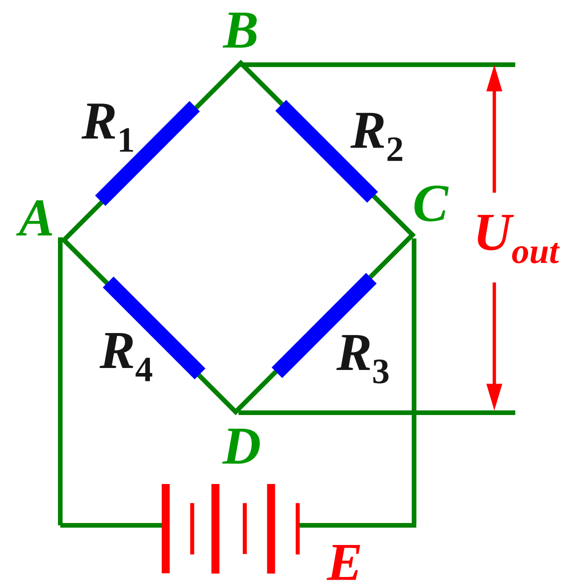
电桥平衡： $U_{out}=E\dfrac{R_1R_3-R_2R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}=0$

平衡条件： $R_1R_3=R_2R_4$

电阻改变： （当 $R_1=R_2=R_3=R_4$ 时）

$$U_{out}=\frac{E}{4}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}-\frac{\Delta R_2}{R_2}+\frac{\Delta R_3}{R_3}-\frac{\Delta R_4}{R_4}\right)$$

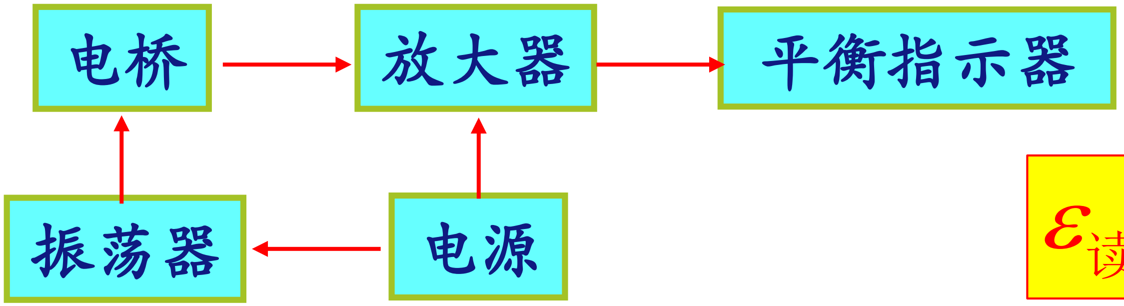
$$=K(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)$$



$$\frac{\Delta R}{R}=k\frac{\Delta l}{l}=k\varepsilon$$

K： 灵敏系数

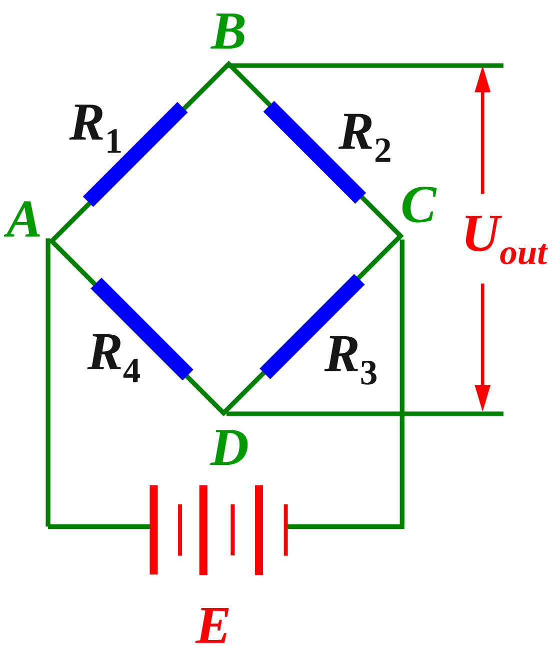
电阻应变仪的工作原理：



$$\varepsilon_{读}=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4$$

电阻应变片测量法

四、半桥电路与全桥电路



1/4桥接法： 由一个应变片R_1和三个固定电阻R构成惠斯通电桥。

$$\varepsilon_{读} = \varepsilon_1$$

半桥接法： 由两个应变片R_1、R_2和两个固定电阻R构成惠斯通电桥。

$$\varepsilon_{读} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

全桥接法： 由四个应变片R_1、R_2、R_3、R_4构成惠斯通电桥。

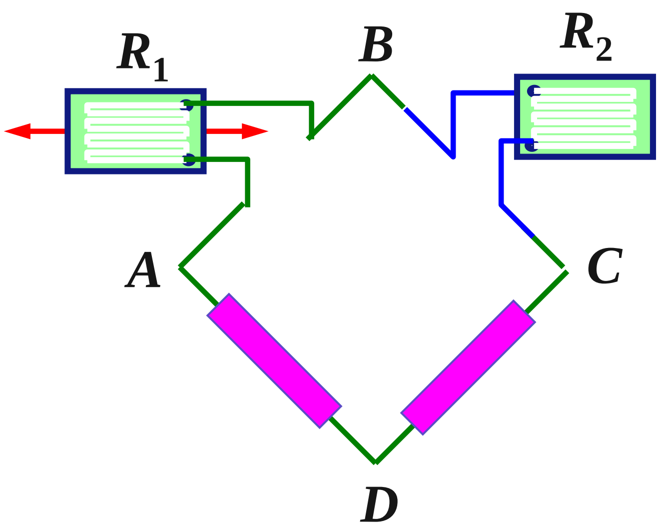
$$\varepsilon_{读} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

五、半桥与温度补偿

当被测构件所处的环境温度变化时，会引起应变片的电阻值发生变化，影响到测量结果，所以必须排除，这一过程称为温度补偿。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^F + \varepsilon_1^T \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^T$$

$$\varepsilon_{读} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_1^F + \varepsilon_1^T - \varepsilon_2^T = \varepsilon_1^F$$



对温度补偿片的要求：

1）与工作应变片相同参数；

2）处于同一温度场；

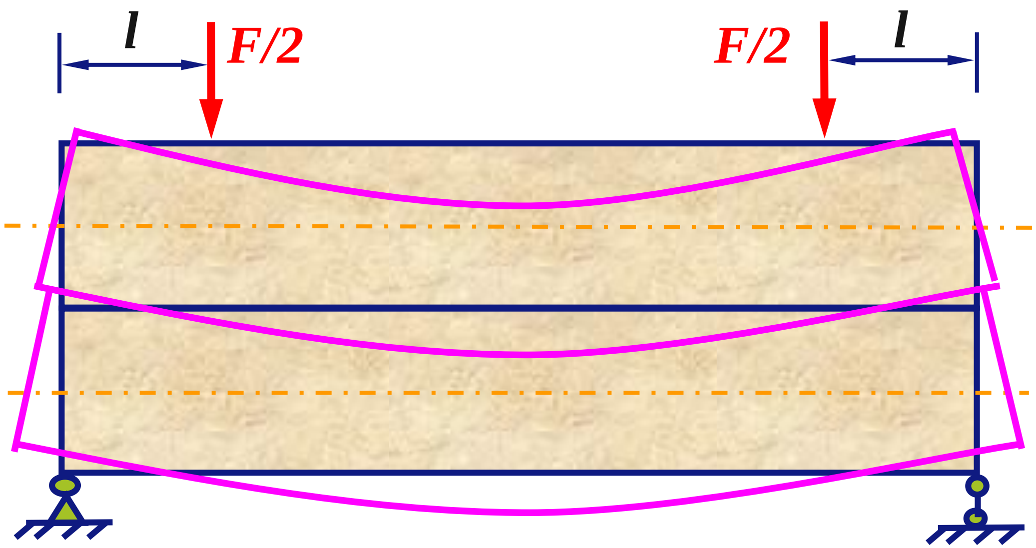
3）贴在与被测构件同样的材料上；

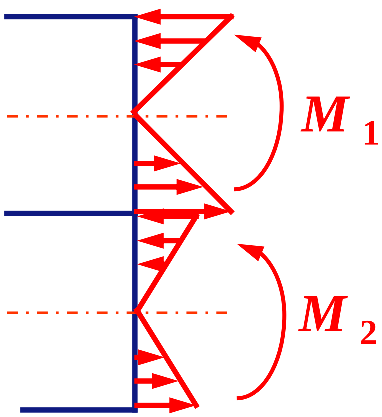
4）不受力。

电阻应变片测量法

六、组合梁弯曲正应力的测定

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y$$





$$M = \frac{Fl}{2} = M_1 + M_2 \qquad \frac{1}{\rho_i} = \frac{M_i}{E_i I_i}$$

小变形下： $\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow M_1 / M_2 = E_1 I_1 / E_2 I_2$

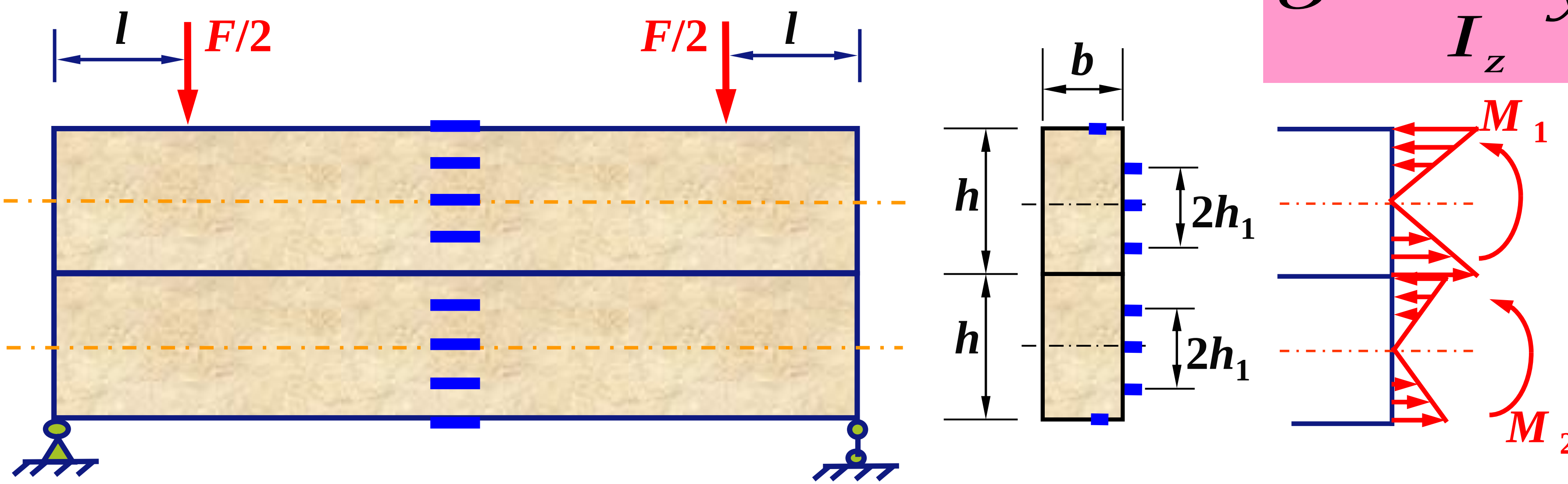
两叠梁材料相同，截面一样，则： $M_1 = M_2 = M / 2$

两叠梁材料不同，截面一样，则： $M_1 = \dfrac{E_1 M}{E_1 + E_2}, M_2 = \dfrac{E_2 M}{E_1 + E_2}$

电阻应变片测量法

六、组合梁弯曲正应力的测定

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y$$



实验步骤：

1、测量各点的轴向线应变；

2、计算得到各点轴向正应力的实验值；

3、理论计算，得到各点正应力的理论值；

4、误差分析。