附录A 截面图形的几何性质

- 概述
- 静矩和形心
- 惯性矩和惯性积
- 平行移轴公式
- 转轴公式(自学)、主惯矩与主惯轴

学前问题：

- 为何研究?
- 哪些几何性质?
- 如何计算?

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

A-0 概述

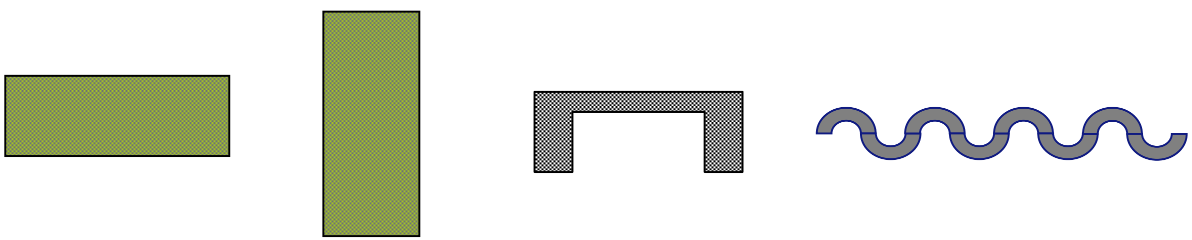
问题的提出：

1、材料力学任务中包含合理的截面形状及尺寸；

2、拉压应力、变形与截面面积相关，扭转应力、变形与截面的极惯性矩相关；

3、空心截面圆杆扭转比实心圆杆好，省材料；

4、受弯梁截面比较。



截面形状与构件强度、变形有直接关系！

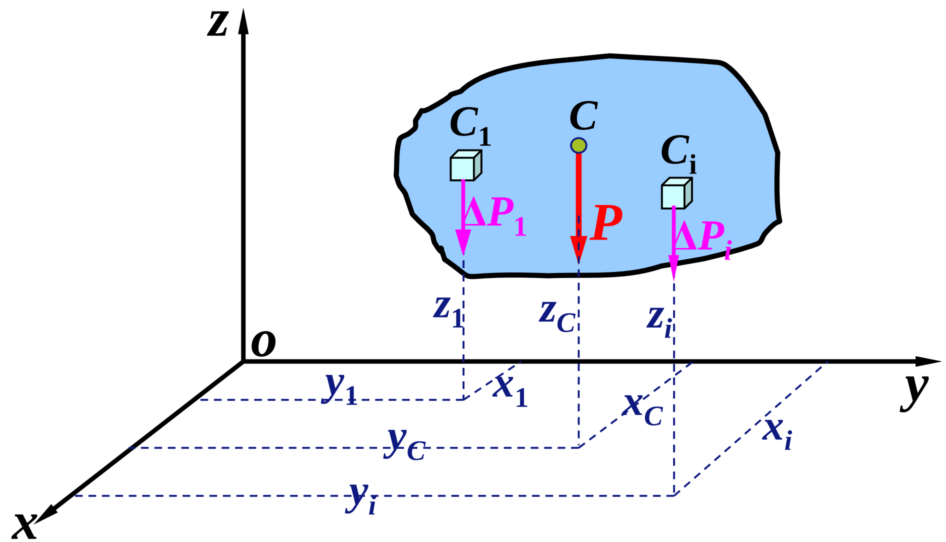
A-1 静矩和形心

以前学过，重心的计算：

$$x_C = \frac{\sum \Delta P_i \cdot x_i}{P}$$

$$y_C = \frac{\sum \Delta P_i \cdot y_i}{P}$$

$$z_C = \frac{\sum \Delta P_i \cdot z_i}{P}$$



均质等厚薄板的重心：
（即平面图形的形心）

$$y_C = \frac{\int_A y \mathrm{d}A}{A}$$

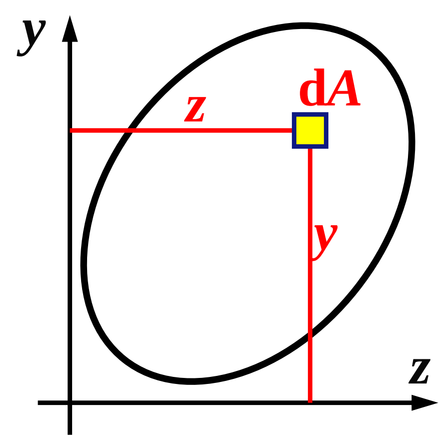
$$z_C = \frac{\int_A z \mathrm{d}A}{A}$$

A-1 静矩和形心

一、静矩的定义
(First Moment)

$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A$$

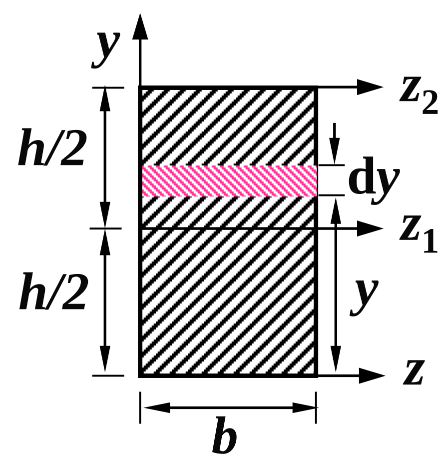
$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A$$



静矩的性质：

- 同一截面对不同坐标轴的静矩不同；
- 静矩的数值可为正，可为负，可为零；
- 静矩的量纲为m^3。

例A-1 已知图示截面，求：S_z, S_{z1}, S_{z2}



解：

$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A = \int_0^h yb\mathrm{d}y = \frac{1}{2}bh^2$$

$$S_{z1} = \int_{-h/2}^{h/2} yb\mathrm{d}y = 0$$

$$S_{z2} = \int_{-h}^{0} yb\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}bh^2$$

A-1 静矩和形心

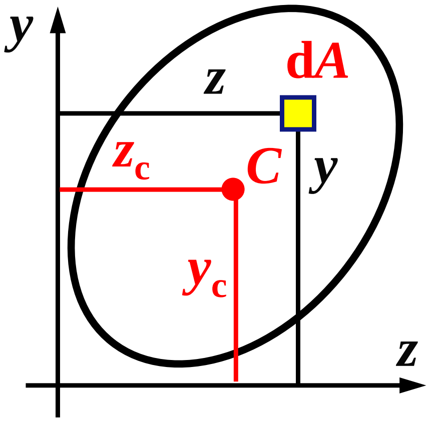
二、形心 (Centroid) 的定义

$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A = y_C A$$

$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A = z_C A$$

$$y_C = S_z / A$$

$$z_C = S_y / A$$



利用上式：

1、若已知截面面积和形心坐标，可以计算截面对坐标轴的静矩；

2、若已知截面面积及其对坐标轴的静矩，可以确定截面的形心坐标。

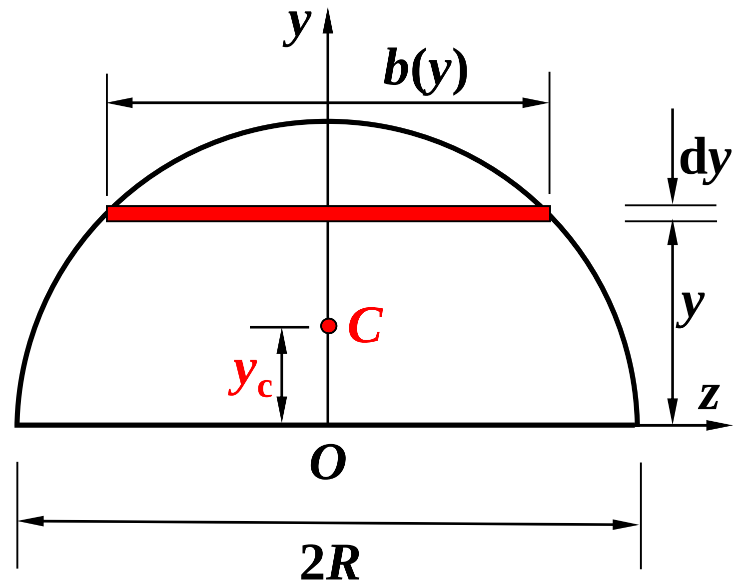
形心的性质：

1、截面对某轴的静矩为零，则该轴必通过截面的形心；

2、截面对通过其形心的坐标轴，其静矩必等于零。

A-1 静矩和形心

例A-2　求图示半圆形的形心位置。



解：取如图的微面积（积分法）

$$b(y)=2\sqrt{R^2-y^2}$$

$$\mathrm{d}A=b(y)\,\mathrm{d}y=2\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$S_z=\int_A y\,\mathrm{d}A$$

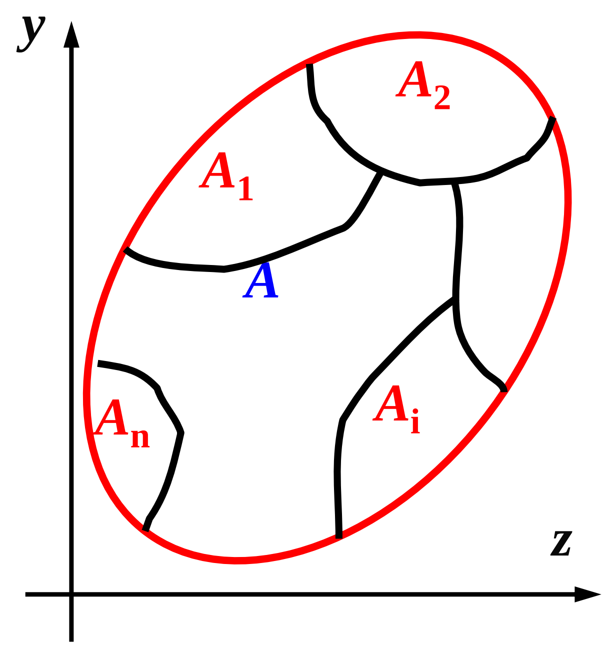
$$=\int_0^R 2y\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}(R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R=\frac{2}{3}R^3$$

$$y_C=\frac{S_z}{A}=\frac{4R}{3\pi}$$

$$z_C=0$$

三、组合图形的形心位置

组合图形A由若干基本图形A_i组成，若已知每一个基本图形的形心坐标及面积，则组合图形的静矩为：



$$S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{zi} = \sum_{i=1}^{n} A_i y_{Ci}$$

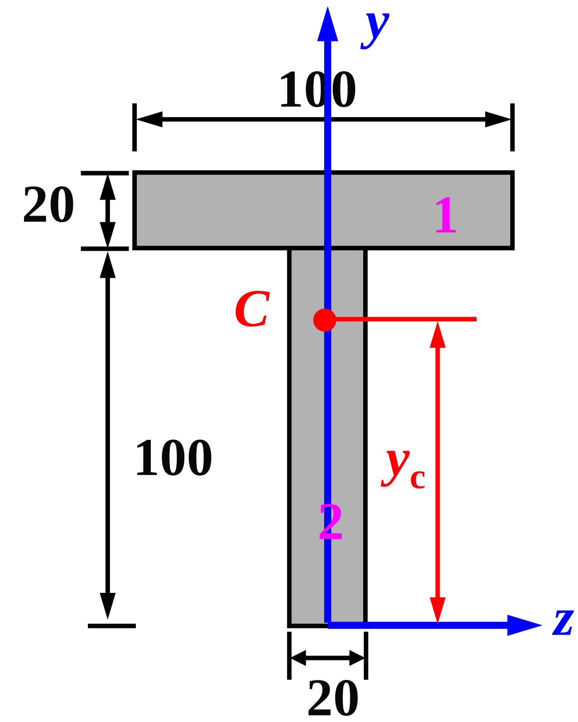
$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{yi} = \sum_{i=1}^{n} A_i z_{Ci}$$

组合图形的形心坐标为：

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i z_{Ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

A-1 静矩和形心

例A-3 求图示T形截面的形心坐标。



解： 建参考坐标系，y 轴为对称轴。

将T形截面看成由两个矩形组成。

$$A=A_1+A_2=20\times100+100\times20=4000\text{mm}^2$$

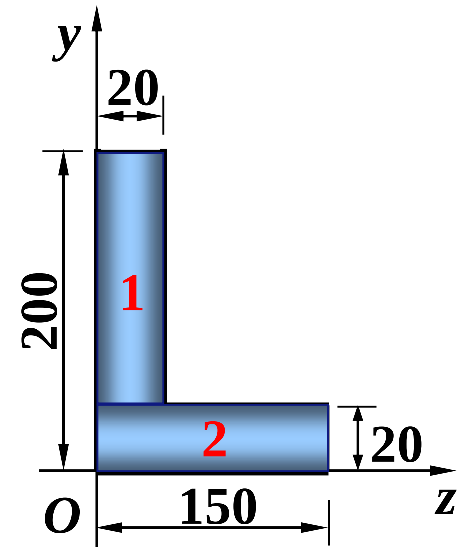
$$S_{z1}=A_1\times y_{c1}=2000\times(100+10)=2.2\times10^5\text{mm}^3$$

$$S_{z2}=A_2\times y_{c2}=2000\times(100/2)=1\times10^5\text{mm}^3$$

$$S_z=S_{z1}+S_{z2}=3.2\times10^5\text{mm}^3$$

$$y_C=S_z/A=80\text{mm} \qquad z_C=0$$

例A-4 **角钢截面的尺寸如图所示，试求其形心位置。**



解：将角钢分割成两个矩形（组合法）

$A_1=(200-20)\times 20=3600\ \text{mm}^2$

$z_1= 10\ \text{mm}$ $y_1=110\ \text{mm}$

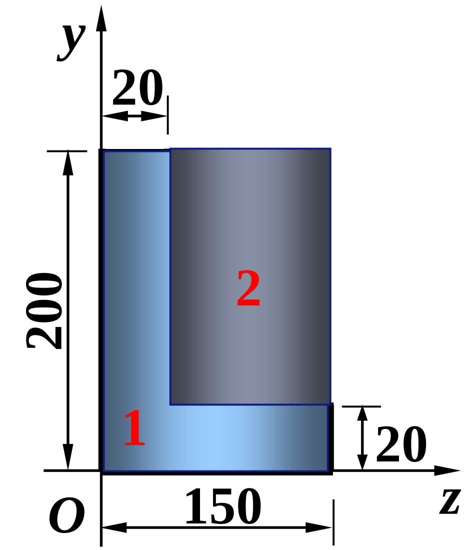
$A_2 = 150\times 20=3000\ \text{mm}^2$

$z_2= 75\ \text{mm}$ $y_2=10\ \text{mm}$

$$z_C=\frac{A_1z_1+A_2z_2}{A_1+A_2}=39.5\text{mm}$$

$$y_C=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2}=64.5\text{mm}$$

例A-4 **角钢截面的尺寸如图所示，试求其形心位置。**



解法二：负面积法（组合法）

$A_1=200\times150=30000\ \text{mm}^2$

$z_1=75\ \text{mm}$ $y_1=100\ \text{mm}$

$A_2=-(150\text{-}20)\times(200\text{-}20)=-23400\ \text{mm}^2$

$z_2=85\ \text{mm}$ $y_2=110\ \text{mm}$

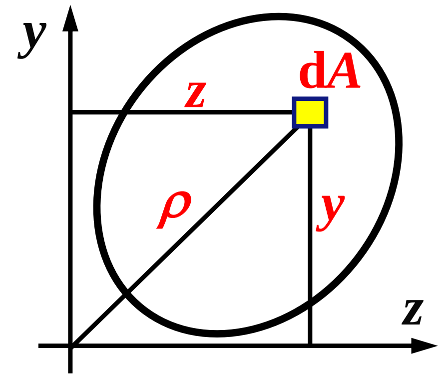
$$z_C=\frac{A_1z_1+A_2z_2}{A_1+A_2}=39.5\text{mm}$$

$$y_C=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2}=64.5\text{mm}$$

A-2 惯性矩和惯性积

定义：

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$ 截面图形面积A对坐标原点的**极惯性矩**(polar moment of inertia)；



$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A$$ 截面图形面积A对y轴的**惯性矩**(moment of inertia)；

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A$$ 截面图形面积A对z轴的**惯性矩**；

$$I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A$$ 截面图形面积A对正交坐标轴y、z的**惯性积**(product of inertia)；

性质：

- 同一截面对不同坐标轴的I_p、I_y、I_z、I_{yz}不同；
- $I_p>0$，$I_y>0$，$I_z>0$，I_{yz}可为正，可为负，可为零；
- I_p、I_y、I_z、I_{yz}的量纲为m^4；
- $I_p = I_y + I_z$；
- 若有一个轴为对称轴，则$I_{yz}=0$。 **如何证明?**

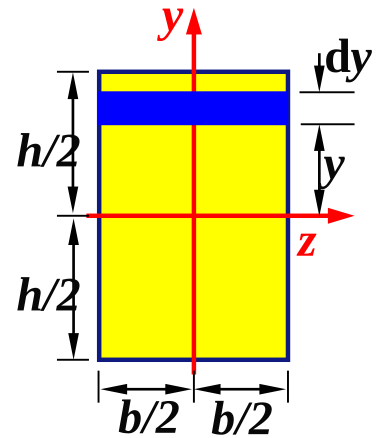
A-2 惯性矩和惯性积

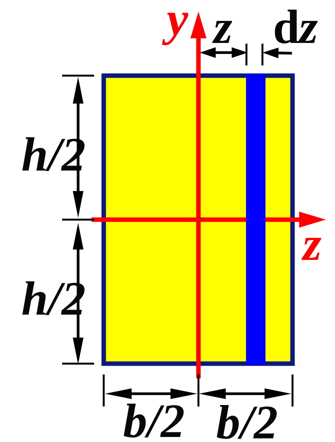
例A-5 计算矩形对形心轴的惯性矩。

解：

$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A=\int_{-h/2}^{h/2} y^2\cdot b\mathrm{d}y=\frac{bh^3}{12}$$

$$I_y=\int_A z^2\mathrm{d}A=\int_{-b/2}^{b/2} z^2\cdot h\mathrm{d}z=\frac{hb^3}{12}$$

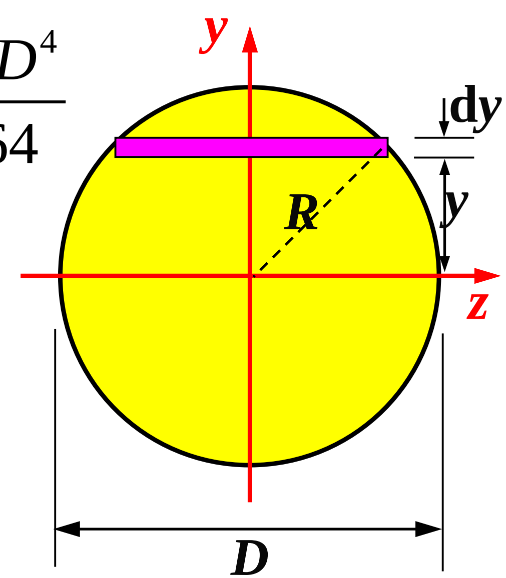




例A-6 计算圆形对形心轴的惯性矩。

解：

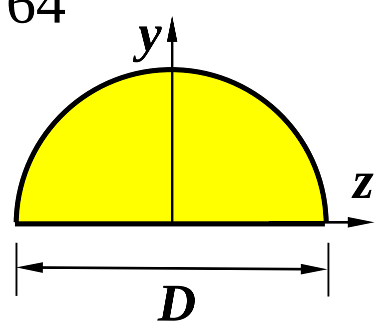
$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A=\int_{-R}^{R} y^2\cdot 2\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi R^4}{4}=\frac{\pi D^4}{64}$$



或者 $I_\mathrm{p}=\dfrac{\pi D^4}{32}$ $\quad I_y=I_z=\dfrac{I_\mathrm{p}}{2}=\dfrac{\pi D^4}{64}$

讨论：半圆的惯性矩呢?

$$I_y=I_z=\frac{\pi D^4}{128}$$



例A-7 计算T形截面的惯性矩I_{zc}、 I_z。

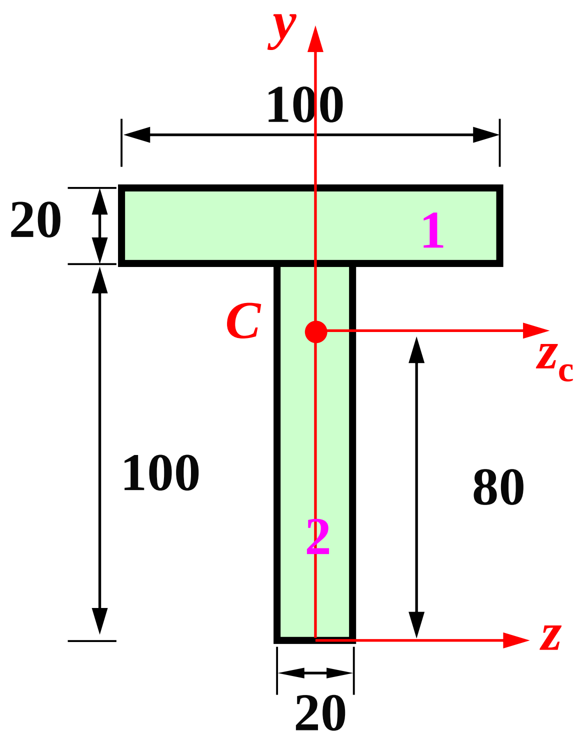
解：形心坐标已求出，为（0，80）

$$I_{zc}=\int_{100-80}^{100-80+20}y^2 100\mathrm{d}y+\int_{-80}^{100-80}y^2 20\mathrm{d}y$$

$$=5.333\times10^6\mathrm{mm}^4$$

$$I_z=\int_{100}^{100+20}y^2 100\mathrm{d}y+\int_{0}^{100}y^2 20\mathrm{d}y$$

$$=30.933\times10^6\mathrm{mm}^4$$



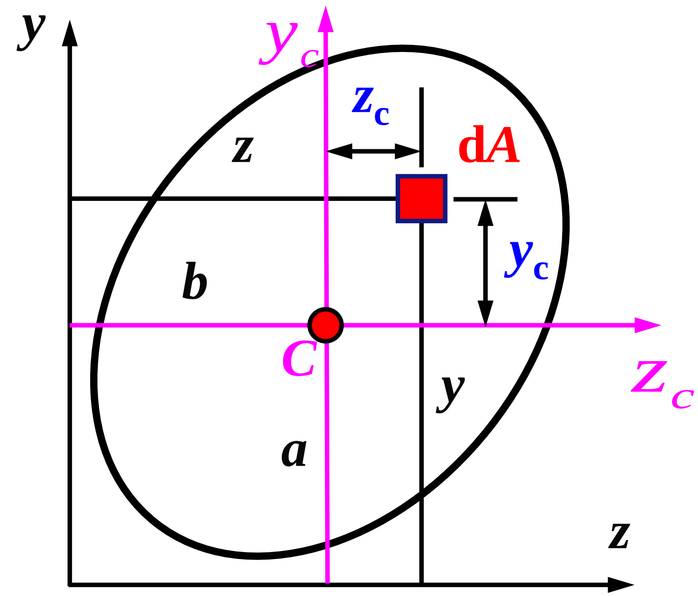
A-3 平行移轴公式

$$I_{zc}=\int_A y_c^2\mathrm{d}A$$

$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A \qquad y=y_c+a$$

$$I_z=\int_A (y_c+a)^2\mathrm{d}A$$

$$=\underbrace{\int_A y_c^2\mathrm{d}A}_{=I_{zc}}+2a\underbrace{\int_A y_c\mathrm{d}A}_{=0}+a^2A$$



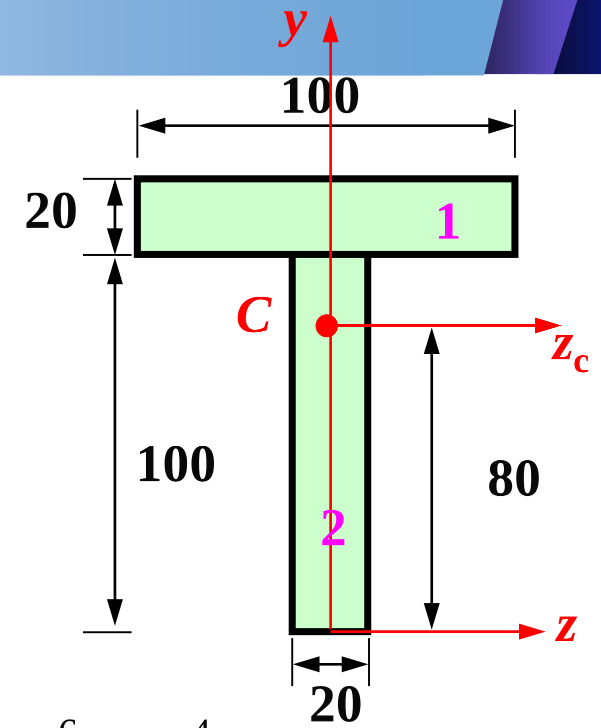
$$I_z=I_{zc}+a^2A \qquad I_y=I_{yc}+b^2A \qquad I_{yz}=I_{yczc}+abA$$

运用平行移轴公式应注意以下两点：

（1）轴y_c、z_c过截面形心；

（2）轴y，z分别与轴y_c、z_c平行。

例A-8 计算T形截面的惯性矩I_{zc}、I_z。



解：形心坐标已求出，为（0，80）

利用公式： $I_z = \dfrac{bh^3}{12}$

$$I_{zc} = \left(\frac{100\times 20^3}{12} + 30^2\times 100\times 20\right) + \left(\frac{20\times 100^3}{12} + 30^2\times 20\times 100\right) = 5.333\times 10^6\,\mathrm{mm}^4$$

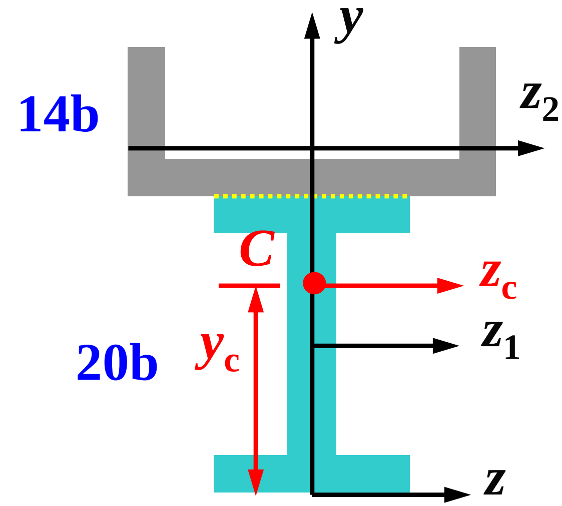
$$I_z = \left(\frac{100\times 20^3}{12} + 110^2\times 100\times 20\right) + \left(\frac{20\times 100^3}{12} + 50^2\times 20\times 100\right)$$

$$= 30.933\times 10^6\,\mathrm{mm}^4$$

或者： $I_z = I_{zc} + 80^2\times(2\times 20\times 100) = 30.933\times 10^6\,\mathrm{mm}^4$

A-3 平行移轴公式

例A-9 计算图示两型钢（20b工字钢和14b槽钢）组合后，截面的形心和对形心轴的惯性矩。



解：建立坐标系，查表得

工字钢：$A_1 = 39.5\text{cm}^2, h_1 = 20\text{cm}$

$$I_{z1} = 2500\text{cm}^4, I_{y1} = 169\text{cm}^4$$

槽钢：$A_2 = 21.3\text{cm}^2, y_0 = 1.67\text{cm}$

$$I_{z2} = 61.1\text{cm}^4, I_{y2} = 609.4\text{cm}^4$$

$$S_z = A_1 y_1 + A_2 y_2 = 39.5\times 10 + 21.3\times(20+1.67) = 856.6\text{cm}^3$$

$$y_c = \frac{S_z}{A_1 + A_2} = 14.1\text{cm} \qquad I_y = I_{y1} + I_{y2} = 169 + 609.4 = 778.4\text{cm}^4$$

$$I_{zc} = I_{zc}' + I_{zc}'' = I_{z1} + A_1(y_c - y_1)^2 + I_{z2} + A_2(y_2 - y_c)^2$$

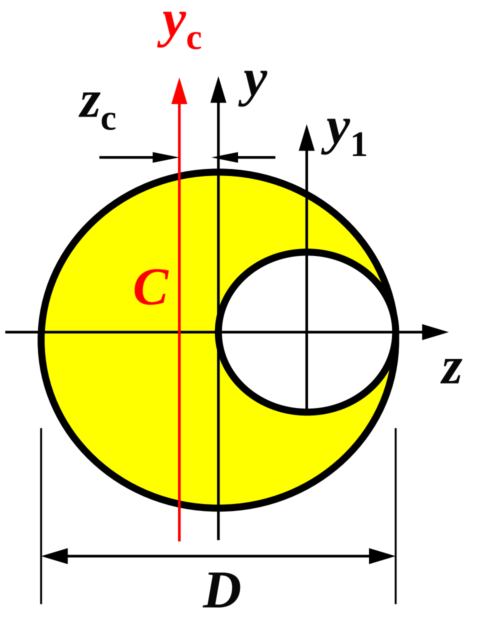
$$= 2500 + 39.5\times(14.1-10)^2 + 61.1 + 21.3\times(20+1.67-14.1)^2$$

$$= 2500 + 664 + 61.1 + 1221 = 4446\text{cm}^4$$

A-3 平行移轴公式

例A-10 计算图示圆孔截面的形心和对形心轴的惯性矩。

解：用负面积法



$$S_y = S_{y1} + S_{y2} = 0 - \frac{\pi}{4}(\frac{D}{2})^2 \times \frac{D}{4} = -\frac{\pi D^3}{64}$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{-\pi D^3 / 64}{\pi D^2 / 4 - \pi D^2 / 16} = \frac{-D}{12}$$

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi}{64}(\frac{D}{2})^4 = \frac{\pi D^4}{64} \times \frac{15}{16} = \frac{15\pi D^4}{1024}$$

$$I_{yc} = I_y + A_1 z_c^2 - I_{y1} - A_2 (D/4 - z_c)^2$$

$$= \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^2}{4} \times \frac{D^2}{144} - \frac{\pi D^4}{1024} - \frac{\pi D^2}{16} \times \frac{D^2}{9} = \frac{119\pi D^4}{9216}$$

A-4 转轴公式、主惯矩与主惯轴

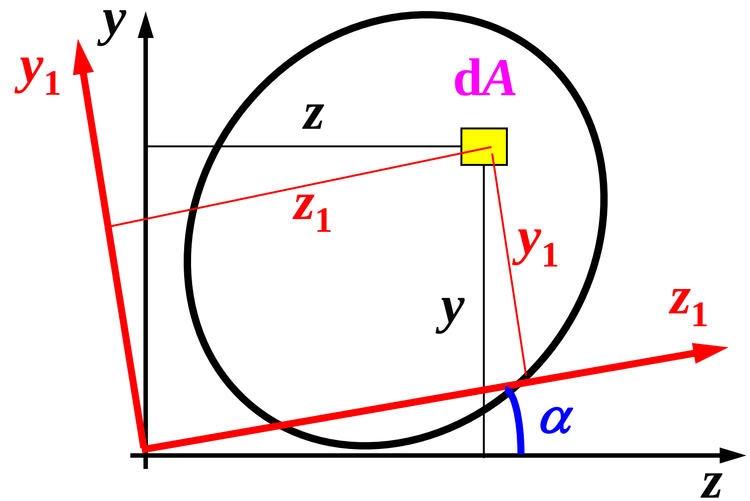
$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A \qquad I_{z1} = \int_A y_1^2 \mathrm{d}A$$

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A$$

$$I_{yz} = \int_A yz \mathrm{d}A$$

$$y_1 = y\cos\alpha - z\sin\alpha$$

$$z_1 = z\cos\alpha + y\sin\alpha$$



$$I_{z1} = \int_A y_1^2 \mathrm{d}A = I_z \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{z1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{y1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{y1z1} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha$$

$$I_{y1} + I_{z1} = I_y + I_z = C$$

截面图形对互相垂直的两轴的惯性矩之和恒为一常数。

A-4 转轴公式、主惯矩与主惯轴

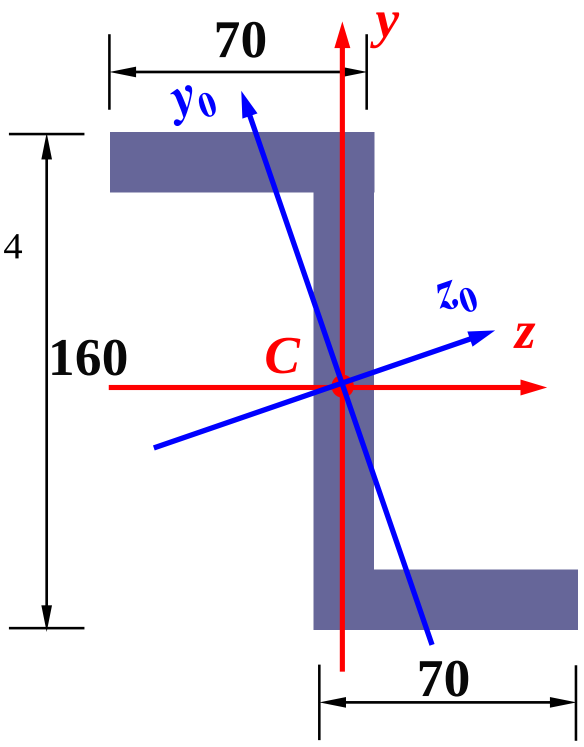
- 使$I_{y0z0}=0$的一对坐标轴称为**主惯轴** (Principal Axes)。
- 此时的I_{y0}，I_{z0} 称为**主惯矩**(Principal Moment of Inertia) 。

$$I_{y0z0}=\frac{I_z-I_y}{2}\sin 2\alpha+I_{yz}\cos 2\alpha=0 \qquad \tan 2\alpha_0=-\frac{2I_{yz}}{I_z-I_y}$$

$$\begin{matrix} I_{y0} \\ I_{z0} \end{matrix}=\frac{I_z+I_y}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{(I_z-I_y)^2+4I_{yz}}$$

- 过形心的主惯轴称为**形心主惯轴**，其惯性矩为**形心主惯矩**。
- **主惯矩**是所有通过O点的各轴惯性矩的最大、最小值。
- **形心主惯轴和形心主惯矩的确定：** 1、确定形心位置；2、建平行于原坐标轴的形心轴，并利用平行移轴公式计算对形心轴的惯性矩和惯性积；3、令惯性积为零，计算转角，确定形心主惯轴的方向；4、计算形心主惯矩。
- **本节只要求了解概念，计算不要求。**

例A-12 计算图示截面的形心主惯矩（厚度 t =11mm）。



解： 1、确定形心，建立坐标系

2、计算对 y，z 轴的惯性矩和惯性积

$$I_y = 198\text{cm}^4 \quad I_z = 1097\text{cm}^4 \quad I_{yz} = -338\text{cm}^4$$

3、确定主轴方位

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{yz}}{I_z - I_y} = 0.752 \qquad \alpha_0 = 18.5$$

4、建立形心主轴坐标系

5、计算形心主惯矩

$$I_{y0} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha = 85\text{cm}^4$$

$$I_{z0} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha = 1210\text{cm}^4$$

附录A的基本要求

1. 明确静矩、形心的概念，掌握组合图形的形心求法。

2. 明确极惯性矩、惯性矩和惯性积的概念。

3. 熟练掌握平行移轴公式的使用。

4. 了解转轴公式的使用。

5. 明确主惯轴 、主惯矩、形心主惯轴 、形心主惯矩的概念。

今 日 作 业

A-3、A-6