空气与气体动力学

张科

3. P25 习题1.4 粘度 $\mu=0.048\ Pa\cdot s$ 的流体流过两平行平板的间隙，间隙宽 $\delta=4\ mm$，流体在间隙内的速度分布为 $u=\frac{cy(\delta-y)}{\delta^2}$，其中c为待定常数，y为垂直于平板的坐标。设最大速度 $v_{max}=4\ m/s$，试求最大速度在间隙中的位置及平板壁面上的切应力.

解：将 $\delta=4mm$ 代入公式，得 $u=\frac{cy(4-y)}{16}=-\frac{c}{16}(y-2)^2+\frac{c}{4}$ 故当 $y=2$ 时 $u\ max$.

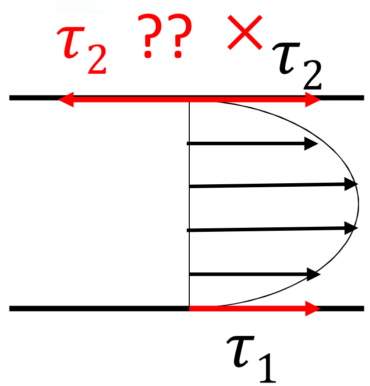
且 $\frac{c}{4}=4m/s$ 故 $y=2mm$，$c=16m/s$，$u=(-y^2+0.004y)\times10^6\ m/s$

切应力 $\tau_1=\mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=0}=192Pa$

$\tau_2=\mu\frac{du}{dy}\Big|_{y=0.004}=-192Pa.$

答：最大速度在两板正中间处.
平板壁面上切应力为192Pa.

Q1: 体积弹性模量和热膨胀系数不变吗？



1.19 20°C 的海水在 $1.013\times10^5 Pa$ 时密度为 $1.02478\times10^3 kg/m^3$. 在同样的温度和压强下的热膨胀系数和体积弹性模量 $\beta=2.57\times10^{-4}K^{-1}$ 和 $E_v=2.147\times10^9 Pa$，求在10°C 和 $1.013\times10^7 Pa$ 时的海水密度

解：$\frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{1}{E_v}\delta p-\beta\delta T$

$\Rightarrow \int\frac{d\rho}{\rho}=\int\frac{1}{E_v}dp-\beta dT.=\int\frac{1}{E_v}dp-\int\beta dT$

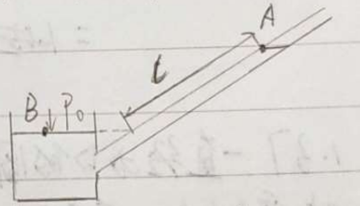
$\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\rho}=\int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{E_v}dp-\int_{T_1}^{T_2}\beta$

$\ln\rho_2-\ln\rho_1=\frac{p_2-p_1}{E_v}-\beta(T_2-T_1).$

$\rho_2=\exp\left[\frac{p_2-p_1}{E_v}-\beta(T_2-T_1)+\ln\rho_1\right]$

$=1.03222\times10^3 kg/m^3.$

2.8 有一微压计，其结构如图，倾斜管与水平夹角为30°，斜管的开口端与大气相通，微压计容器内的指示液是酒精，其密度$\rho=843kg/m^3$，试求$l=30cm$时容器内压强p_0



~~解：~~ $\cancel{p_A - p_0 = \rho g(z_A - z_B)}$.

$\cancel{= -\rho g\, l \cdot \sin 30^\circ}$

$\cancel{= -843 \times 9.8 \times 0.3 \times \frac{1}{2}\,Pa}$

$\cancel{p_0 = p_A + \rho g l \sin 30^\circ}$

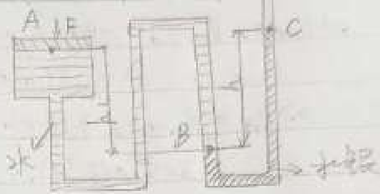
$\cancel{= 101330\,Pa + 843 \times 9.8 \times 0.3 \times \frac{1}{2}\,Pa}$

$\cancel{= 102.5\,kPa}$

解：$p_0 = \rho g l \cdot \sin 30^\circ$

$= 1239.21\,Pa.$

解：设C处空气压强为p_c



对于BC. $p_c - p_B = -\rho_{水银} g \cdot (z_c - z_B)$，

$= -\rho_{水银} g \cdot h$

$\Rightarrow p_B = p_c + \rho_{水银} g h.$

对于AB.

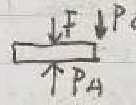
$p_A - p_B = -\rho_{水} g (z_A - z_B)$.

$= -\rho_{水} g h_1$

$\Rightarrow p_A = p_B - \rho_{水} g h_1$

$= p_c + \rho_{水银} g h - \rho_{水} g h_1$

对于活塞 $p_A \cdot A = F + p_c \cdot A$



$\Rightarrow F = A(p_A - p_c)$

$= A \cdot (\rho_{水银} g h - \rho_{水} g h_1)$.

$= 0.07 \times (13600 \times 9.8 \times 0.1 - 1000 \times 9.8 \times 0.06)$.

$= 891.8N$

$$p_{gage}$$

$$p_{abs} = p_{atm} + p_{gage}$$

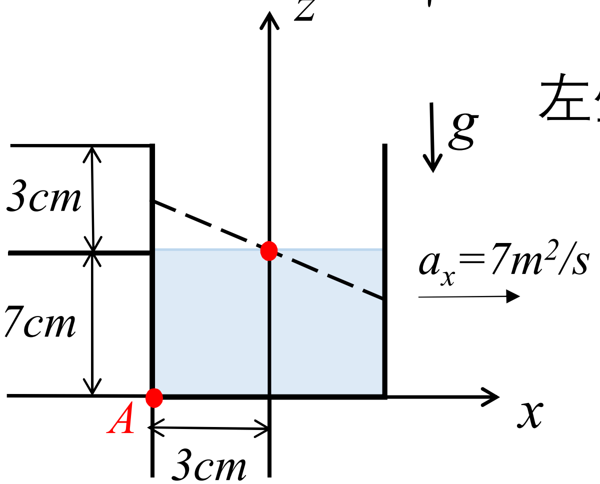
2.5非惯性系中均质流体的相对平衡（刚体运动）

例题1. 方形容器内为水，容器高10cm，宽6cm，水原高7cm。先容器以$7m^2/s$向x正向加速。问：

$$-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}=\rho\vec{a}$$

(1)水是否会溢出？（2）求点A压强p_A。

$a_x=??$刚好溢出？



解：$z=h_0-\frac{a_x}{g}x$　液面曲线方程！

不溢出！

左壁$x=-3cm$处：$z_{\max}=7cm-\frac{a_x}{g}(-3cm)=9.14cm<10cm$

$p-patm=-\rho a_x x\text{-}-\rho g(z-h_0)$ 任意点压强！

A点：$x=-3cm, z=0$

$$p-p_{atm}=-\rho a_x x-\rho g(z-h_0)$$

$$p-p_{atm}=-\rho a_x(-3cm)-\rho g(0-7cm)$$

$$p-p_{atm}=910(Pa)$$

回顾：

1.曲面受力、应用：F_x，F_y，F_z，压力体；

2.描述流体运动的两种方法：拉格朗日、欧拉；

3.物质导数（随体导数）$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot v+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot w+\frac{\partial F}{\partial t}=(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})F+\frac{\partial F}{\partial t}$

4.迹线、流线、脉线、时间线、流管

应用？？

四. 流体动力学积分方程（6.1–6.5）

流体动力学
- 积分方程：有限体积内整体与外界质量、动量、能量交换，力、功、压降等；
- 微分方程：微元体控制方程，求物理量的空间分布

四. 流体动力学积分方程（6.1-6.5）

流体运动的基本物理定律？

1. 质量守恒定律；
2. 动量转换和守恒定律；
3. 能量转换和守恒定律（热力学第一定律）；
4. 热力学第二定律。

流体力学基本方程

质量输运
动量输运
能量输运

耗散效应

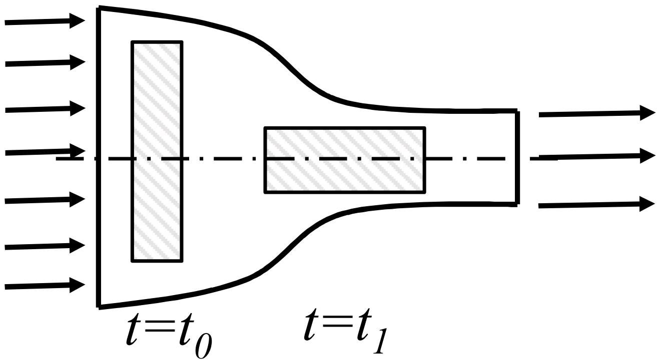
方程对象？？

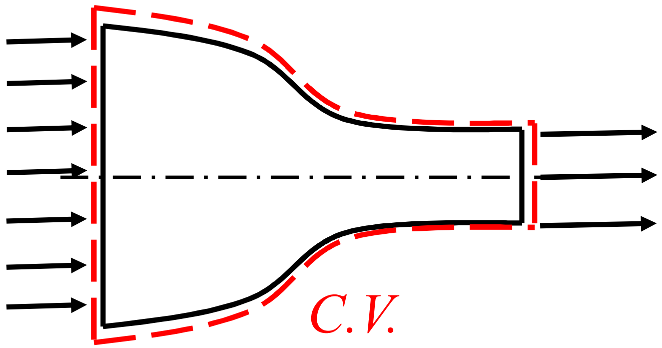
4.1 系统和控制体 ：

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot v+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot w+\frac{\partial F}{\partial t} \qquad \frac{df}{dt}$$

系统（ system）	控制体（ control volume， C.V.）
确定流体质点集合	特定空间区域
拉格朗日描述	欧拉描述
形状大小可变	形状大小不变
与外界无质量交换	与外界有质量交换
与外界有动量、能量交换	与外界有动量、能量交换

C.V.内守恒定律如何表述？





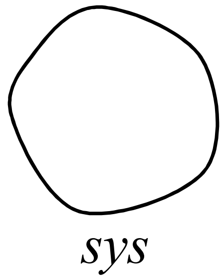
4.2 雷诺输运定理：

$$\frac{df}{dt}$$

系统内物理量的变化如何用控制体来描述？

N——物理量: $M,\vec{P},E$ （质量，动量，能量）

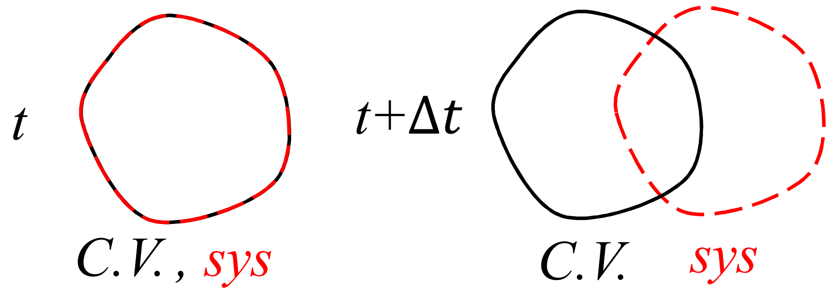
η ——单位质量的物理量:$1,\vec{V},e$



对系统：$N_{sys}=\int_M \eta dm = \int_{\mathcal{V}} \eta\rho d\mathcal{V}$

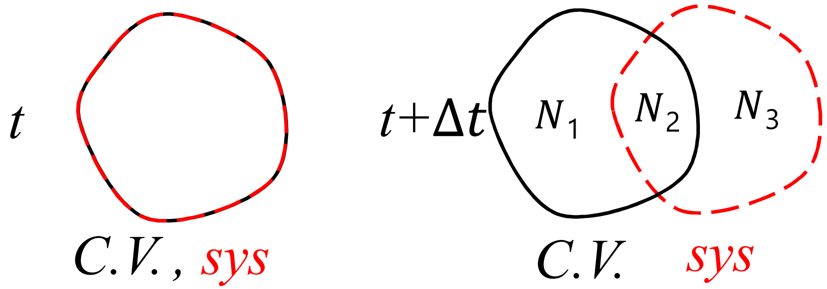
系统物理量的变化率：$\frac{dN}{dt}_{sys}=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \eta\rho d\mathcal{V}$

用控制体来描述：



4.2 雷诺输运定理：

$$\frac{dN}{dt}_{sys} = \frac{d}{dt}\int_{\forall} \eta\rho d\forall$$



$$N_{sys}(t) = N_{CV}(t)$$

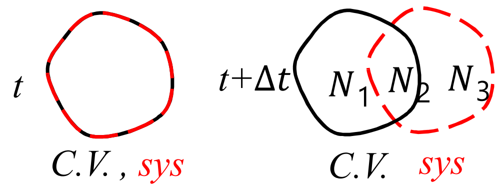
$$N_{sys}(t+\Delta t) = N_{CV}(t+\Delta t) - N_1 + N_3$$

$$\frac{dN}{dt}_{sys} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{sys}(t+\Delta t) - N_{sys}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{N_{CV}(t+\Delta t) - N_{CV}(t)}{\Delta t} + \frac{N_3 - N_1}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{CV}(t+\Delta t) - N_{CV}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_3 - N_1}{\Delta t}$$

4.2 雷诺输运定理：



$$\frac{dN}{dt}_{sys}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{CV}(t+\Delta t)-N_{CV}(t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_3-N_1}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\eta\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}\eta\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

I. 控制体内N_{CV}变化率　II. 流出$C.V.$的静流率

I. 控制体内N_{CV}变化率: $\frac{\partial N_{CV}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\eta\rho d\mathcal{V}$

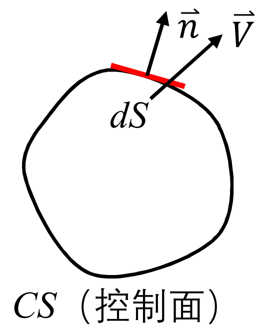
II. 流出$C.V.$的静流率: 微元面：$d\vec{S}=\vec{n}dS$

单位时间体积流量：$dQ=\vec{V}\cdot d\vec{S}=(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

单位时间质量流量：$dm=\rho dQ=\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

$\vec{V}\cdot\vec{n}>0$: 流出

$\vec{V}\cdot\vec{n}<0$: 流入



N流出$C.V.$流率：$\int_{CS}\eta dm=\int_{CS}\eta\rho dQ=\int_{CS}\eta\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

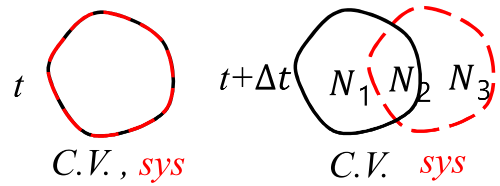
4.2 雷诺输运定理：

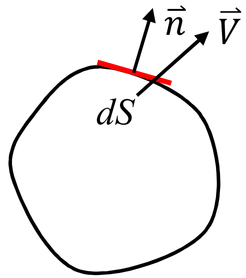
$$\frac{dN}{dt}_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\eta\rho d\cancel{V} + \int_{CS}\eta\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

系统物理量的变化率 = 控制体内物理量的变化率 + 流出控制体表面的静流率

Note：1. $\vec{V}$相对与$C.S.$

2. $C.V.$固定于坐标系





CS（控制面）

$$Q = \int_{CS}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

$$\dot{M} = \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

投票 最多可选1项

设置

是否理解雷诺输运定理各项物理含义？

$$\frac{dN}{dt}_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\eta\rho d\forall + \int_{CS}\eta\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

A 是

B 否

C 还需课后复习

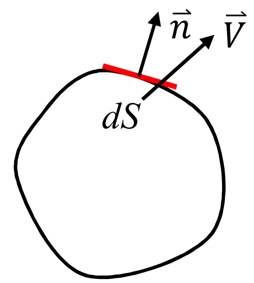
提交

投票 最多可选1项

设置

是否掌握体积流率、质量流率面积分公式？

- A 是
- B 否
- C 还需课后复习



CS（控制面）

$$Q = \int_{CS} \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\dot{M} = \int_{CS} \rho\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right) dS$$

提交

4.3 基本方程：

1. 质量守恒定律(M): $\left.\frac{dM}{dt}\right|_{sys}=0$

2. 动量转换和守恒定律($\vec{P}$): $\sum\vec{F}=\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{sys}$, $\sum\vec{T}=\left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right|_{sys}$ (力矩，动量矩)

3. 能量转换和守恒定律(E): $\dot{Q}-\dot{W}=\left.\frac{dE}{dt}\right|_{sys}$

(热力学第一定律)

4. 热力学第二定律: $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{sys}\geq\frac{\dot{Q}}{T}$

如何对控制体应用基本方程？

4.4 连续性方程（质量守恒）：

$$\frac{dM}{dt}_{sys} = 0 \quad ①$$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt}_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta\rho d\forall + \int_{CS} \eta\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS \\ N = M, \eta=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt}_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall + \int_{CS} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS \quad ②$$

$$① + ② \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall + \int_{CS} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall}_{\text{C.V.内质量变化率}} = - \underbrace{\int_{CS} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}_{\text{流入C.V.的质量流率}}$$

要求：
写出连续性方程；
理解各项物理含义；
应用解决问题。

4.4 连续性方程（质量守恒） $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\cancel{V}+\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

特例：1. 不可压，均质：ρ=constant

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}d\cancel{V}+\rho\int_{CS}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}d\cancel{V}+\int_{CS}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$$

$\int_{CV}d\cancel{V}=\cancel{V}$ ⇨ $\frac{\partial\cancel{V}}{\partial t}+\int_{CS}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

$\cancel{V}=C\ \frac{\partial\cancel{V}}{\partial t}=0$ ⇨ $\int_{CS}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$ 流出C.S.的静体积流率为零。

4.4 连续性方程（质量守恒） $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

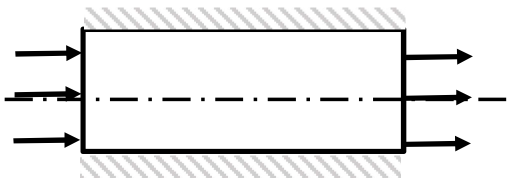
特例： 2. 定常流动： $\dfrac{\partial}{\partial t}=0$

$$\Rightarrow \quad \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$$

$$\dot{m}=\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$$

流出C.S.的静质量流率为零。

均匀流，1D，$\vec{V}\perp\vec{n}$



$$\dot{m}=\int_{CS}\rho\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)dS=\pm\rho|V||A|=0$$

$+$: $\vec{V}\cdot\vec{n}>0$, 流出

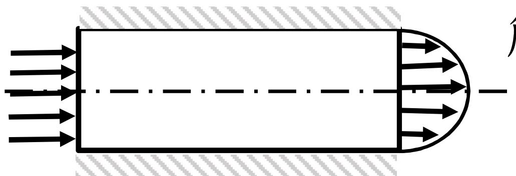
$-$: $\vec{V}\cdot\vec{n}<0$, 流入

$$\sum\dot{m}_{out}=\sum\dot{m}_{in}$$

$$\rho|V||A|_{out}=\rho|V||A|_{in}$$

4.4 连续性方程（质量守恒）$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\cancel{V}+\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

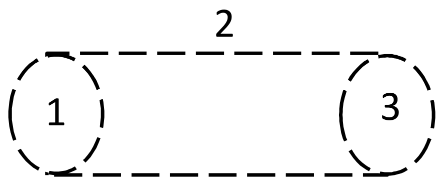
例 题 1. 已知R=30cm, U_{max}=10cm/s，水流。求：入口速度U？



U

解：假设定常（$\frac{\partial}{\partial t}$=0）、不可压（$\rho=$ c)、入口均匀、轴对称。

$u=U_{max}(1-\frac{r^2}{R^2})$ ① 选$C.V.$如图所示，C.S.如图。



② 连续性方程+定常、不可压：

$$\int_{CS}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$$

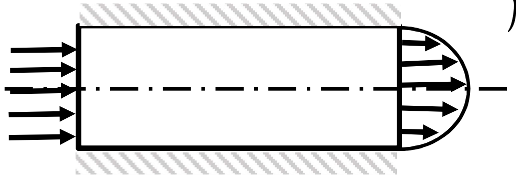
$$\int_{CS1}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS+\cancel{\int_{CS2}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}+\int_{CS3}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0 \quad ①$$

$$\int_{CS1}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=-\int_{CS1}UdS=-U\pi R^2 \quad ②$$

$$\int_{CS2}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=\int_{CS2}udS=\int_0^R U_{max}(1-\frac{r^2}{R^2})2\pi rdr=2\pi U_{max}\int_0^R(1-\frac{r^2}{R^2})rdr$$

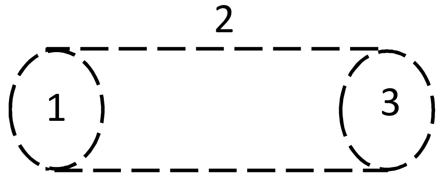
4.4 连续性方程（质量守恒） $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\cancel{V} + \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$

例 题 1. 已知R=30cm, U_{max}=10cm/s， 水流。求： 入口速度U？



U $\quad u = U_{max}(1-\frac{r^2}{R^2})$

解：$\int_{CS2}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 2\pi U_{max}\int_0^R(1-\frac{r^2}{R^2})\,rdr$



$$= 2\pi U_{max}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2})\Big|_0^R$$

$$= \frac{\pi}{2}U_{max}R^2 \qquad ③$$

① + ② + ③ ⟹ $-U\pi R^2 + \frac{\pi}{2}U_{max}R^2 = 0$

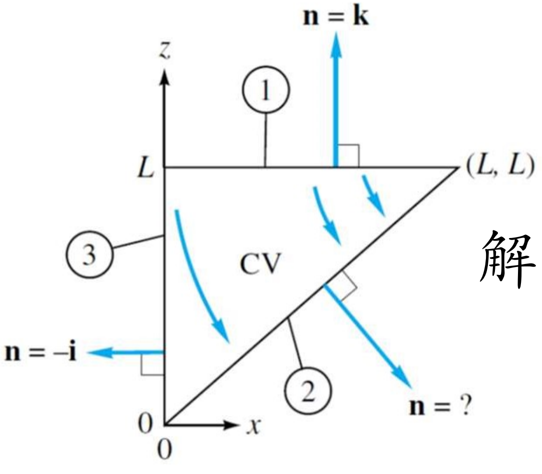
$\int_{CS1}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS + \int_{CS3}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$

$\int_{CS}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = -U\pi R^2$

$$U = \frac{U_{max}}{2} = 5\ cm/s$$

4.4 连续性方程（质量守恒） $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

例 题 2. 已知均质，速度场：$u=\frac{V_0x}{L}, v=0, w=-\frac{V_0z}{L}$，宽$b$。求：



Depth b into paper

1.通过面①②③的体积流率Q；

2.是否满足质量守恒?

解： 1. $Q=\int_{CS}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$ 其中，$\vec{V}=\frac{V_0x}{L}\vec{\imath}-\frac{V_0z}{L}\vec{k}$

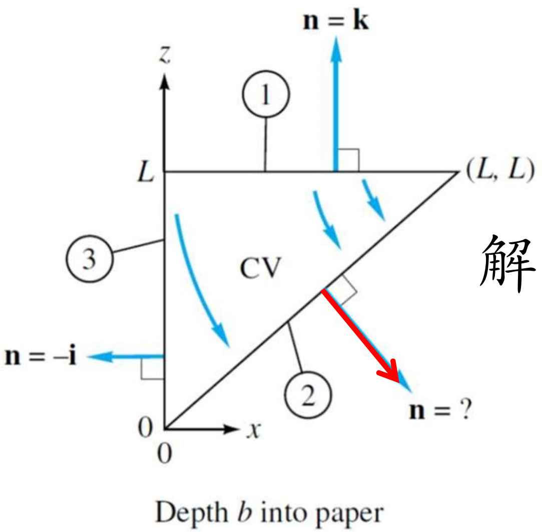
面①： $z=L,\quad \vec{V}=\frac{V_0x}{L}\vec{\imath}-V_0\vec{k}$，$\vec{n}=\vec{k}$, $dS=bdx$

$Q_1=\int_{S_1}\vec{V}\cdot\vec{n}dS \qquad \vec{V}\cdot\vec{n}=-V_0$

$=\int_0^L -V_0(bdx)=-V_0bL$

4.4 连续性方程（质量守恒） $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\cancel{V}+\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

例 题 2. 已知均质， 速度场： $u=\frac{V_0 x}{L}, v=0, w=-\frac{V_0 z}{L}$， 宽$b$。求：



1.通过面①②③的体积流率Q；

2.是否满足质量守恒?

解： 1. 面③: $x=0$, $\vec{V}=-\frac{V_0 z}{L}\vec{k}$, $\vec{n}=-\vec{\imath}$, $\vec{V}\cdot\vec{n}=0$

$$Q_3=\int_{S_3}\vec{V}\cdot\vec{n}dS=0$$

面②: $x=z$, $\vec{V}=\frac{V_0 x}{L}(\vec{\imath}-\vec{k})$, $\vec{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{\imath}-\vec{k}\right)$, $dS=\sqrt{2}bdx$

$$Q_2=\int_{S_2}\vec{V}\cdot\vec{n}dS=\int_{S_2}\frac{V_0 x}{L}(\vec{\imath}-\vec{k})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{\imath}-\vec{k}\right)\sqrt{2}bdx$$

$Q_1=-V_0 bL$

$$=\int_0^L\frac{V_0 b}{L}\left(\vec{\imath}-\vec{k}\right)^2 xdx=\frac{2V_0}{L}b\frac{x^2}{2}\Big|_0^L=V_0 bL$$

2. $Q_1+Q_2+Q_3=0$

均质，质量守恒！

投票 最多可选1项

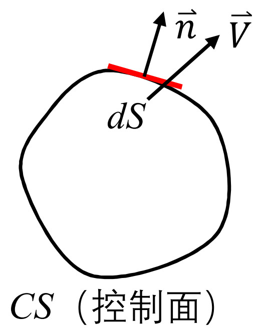
设置

是否掌握体积流率、质量流率面积分的应用？

A 是

B 否

C 还需课后复习



$$Q = \int_{CS} \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$$\dot{M} = \int_{CS} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

提交

作业：

复习笔记！

P241 . 6.3，6.6，6.7

学习课本例题：例6.1~6.3

多多练习！

回顾：

1.系统、控制体；

2.雷诺输运定理： $\frac{dM}{dt}_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\mathit{V\!\!\!-} + \int_{CS} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

3.连续性方程（质量守恒）：$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\mathit{V\!\!\!-} + \int_{CS} \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$

5.应用。