上节课内容回顾

- 弯矩、剪力和分布载荷之间的微分和积分关系

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{s}}(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)$$

$$F_{\mathrm{s}2}-F_{\mathrm{s}1}=\int_{x_1}^{x_2}q(x)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_{\mathrm{s}}(x)$$

$$M_2-M_1=\int_{x_1}^{x_2}F_{\mathrm{s}}(x)\mathrm{d}x$$

- 作图规律：利用微分关系、积分关系和突跳关系
- 利用作图规律作梁的弯曲内力图
- 刚架和曲杆的内力图（轴力F_{N}、剪力F_{s}和弯矩M）

第五章 弯曲应力

- ✓ 概述
- ✓ 弯曲正应力
- ✓ 弯曲正应力强度计算
- ✓ 弯曲切应力及其强度条件
- ✓ 提高弯曲强度的措施
- ✓ 剪切中心简介

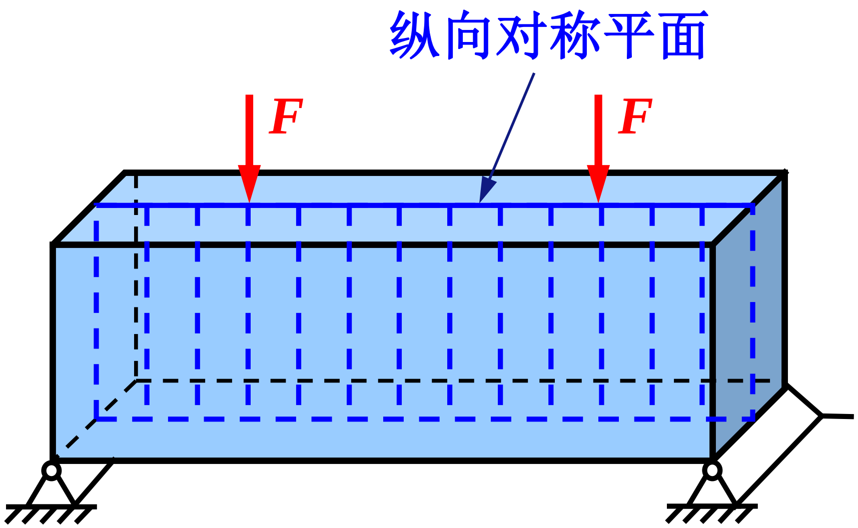
学前问题：

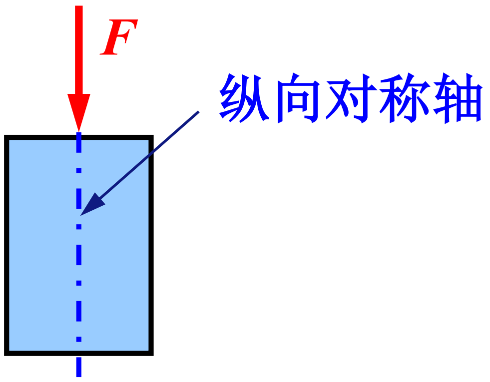
- ■ 弯曲正应力如何分布?
- ■ 弯曲正应力如何计算?
- ■ 正应力强度条件?

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
航天航空学院--力学中心

5-1 概述

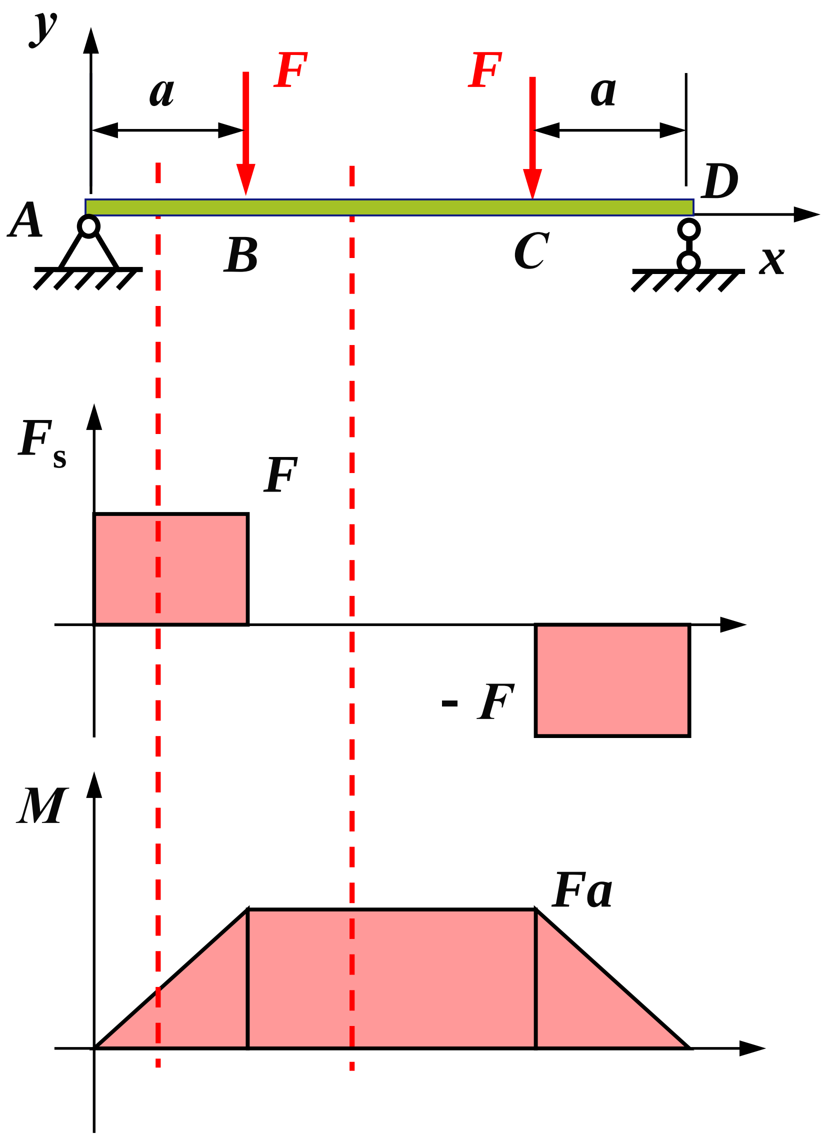
- **本章研究范围：平面弯曲下的直梁**





- **平面弯曲(Plane Bending)：梁的横截面具有纵向对称线，所有对称线组成纵向对称平面(Longitudinal Symmetric Plane)，外载荷作用在纵向对称平面内，梁的轴线在纵向对称平面内弯曲成一条平面曲线。**

5-1 概述



- *AB*(或*CD*）段:

$$F_s \neq 0\,,\, M \neq 0$$

剪切（横力）弯曲
(Transverse Bending)

- *BC*段:

$$F_s = 0\,,\, M \neq 0$$

纯弯曲(Pure Bending)

- **先研究纯弯曲时的应力，再研究剪切弯曲时的应力。**

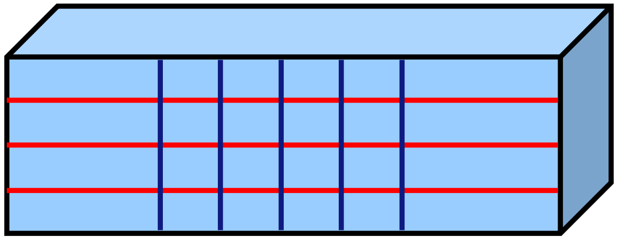
5-2 弯曲正应力

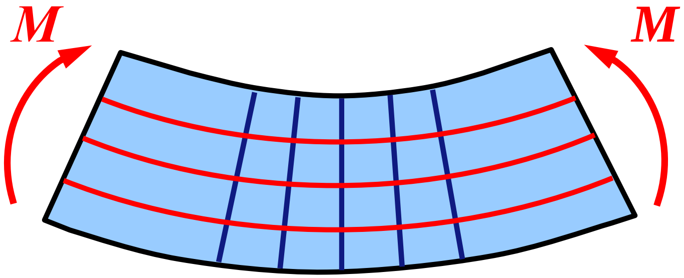
一、变形观察

1. 横向线仍为直线，但相对转动；

2. 纵向线由直线变成曲线，有些伸长，有些缩短;

3. 纵向线与横向线仍然互相垂直。





二、平截面假设

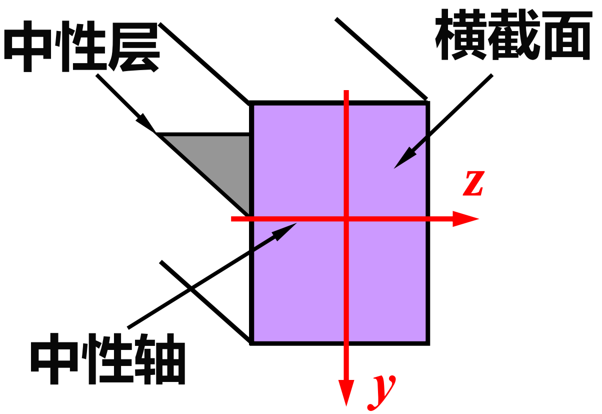
横截面在弯曲变形后仍然保持平面。

三、推理

1. 横截面上无切应力;

2. 横截面上存在正应力;

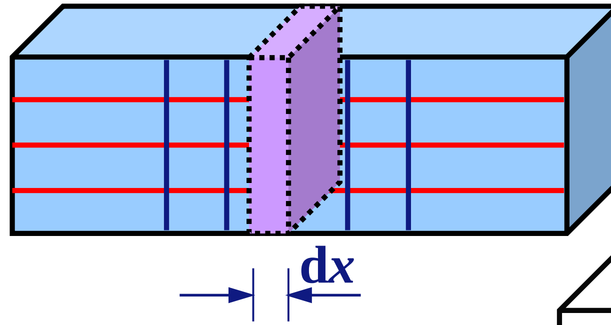
3. 既不伸长又不缩短的那一层，称为中性层(Neutral Surface)。



中性层与横截面的交线，称为中性轴(Neutral Axis)，用z表示。

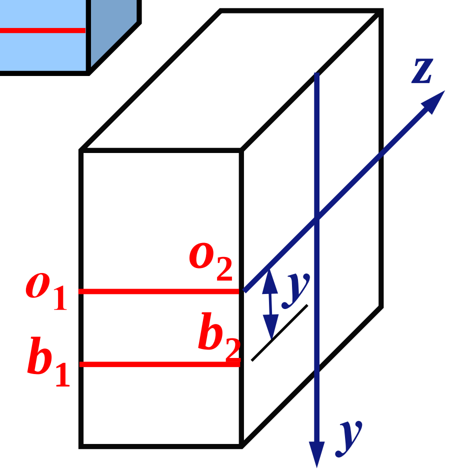
5-2 弯曲正应力

四、正应力公式推导



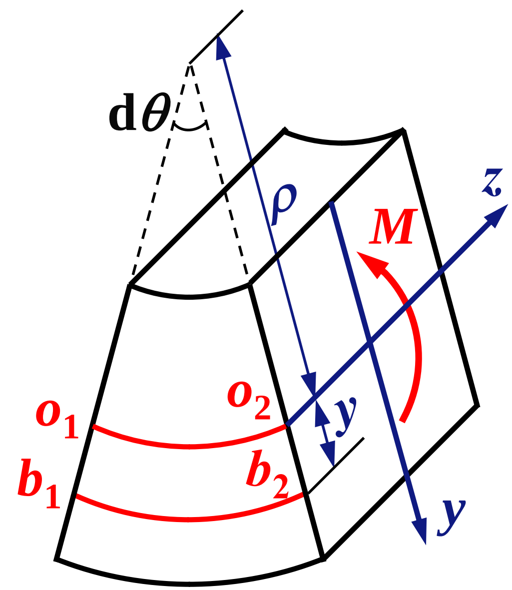
1、几何关系（看b_1b_2的变化）

$$\overline{b_1b_2} = \overline{o_1o_2} = o_1o_2 = \rho\,\mathrm{d}\theta$$



$$b_1b_2 = (\rho + y)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\varepsilon = \frac{b_1b_2 - \overline{b_1b_2}}{\overline{b_1b_2}} = \frac{(\rho + y)\mathrm{d}\theta - \rho\,\mathrm{d}\theta}{\rho\,\mathrm{d}\theta} = \frac{y}{\rho}$$



2、物理关系：

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon = Ey / \rho}$$

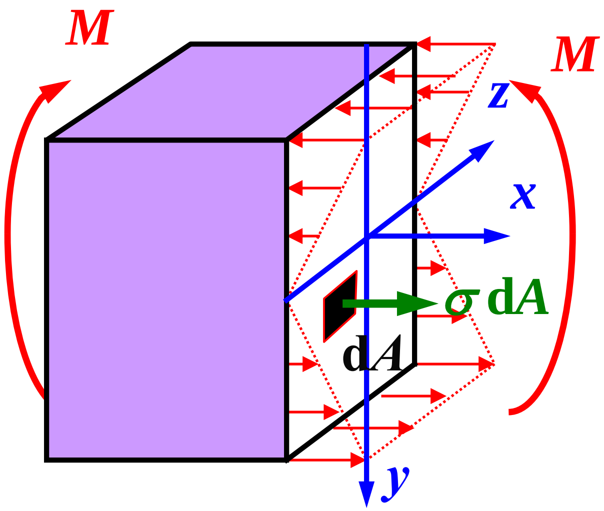
问题1：中性层 (y 的起点) 在哪里?

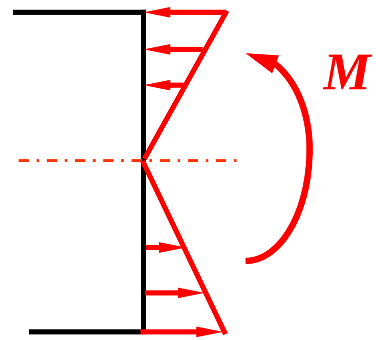
问题2： ρ怎样得到?

5-2 弯曲正应力

3、正应力分布规律：

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$





横截面上的微内力组成一个与横截面垂直的空间平行力系，此力系可等效为三个内力分量。

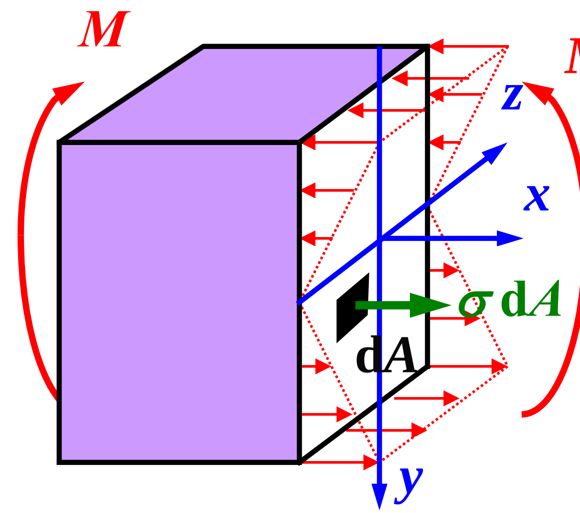
4、平衡条件：

$\left\{\begin{array}{l} F_x \text{——平行于}x\text{轴的轴力} \\ m_y\text{——对}y\text{轴的力矩} \\ m_z\text{——对}z\text{轴的力矩} \end{array}\right.$

其中：$\left\{\begin{array}{l} F_x = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0 \\ m_y = \int_A z\sigma \mathrm{d}A = 0 \\ m_z = \int_A y\sigma \mathrm{d}A = M \end{array}\right.$

5-2 弯曲正应力

$$\sigma = E\frac{y}{\rho}$$



1) $\sum F_x = 0$

$$\int_A \sigma\,\mathrm{d}A = \int_A E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A y\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}S_z = 0$$

中性轴 z 通过截面形心。

2) $\sum m_y = 0$

$$\int_A z\sigma\,\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A z\,y\,\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}I_{yz} = 0$$

yz 轴为形心主惯轴。

3) $\sum m_z = M$

$$\int_A y\sigma\,\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A y^2\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}I_z = M$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\sigma = \frac{M}{I_z}y$$

公式适用条件：

1. 在线弹性范围和小变形；
2. 材料 $E^+ = E^-$；
3. 纯弯曲与剪切弯曲均适用；
4. 平面弯曲。

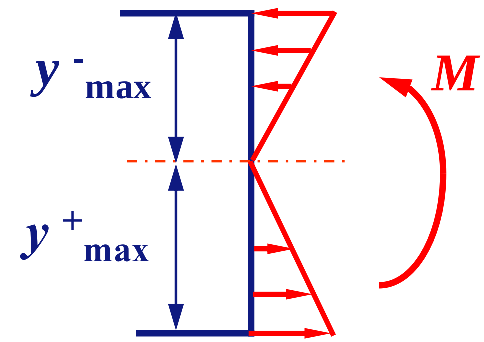
5-3 弯曲正应力强度计算

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I_z} y}$$

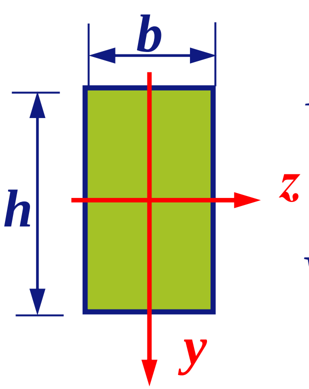
一、最大应力

$$\sigma_{\max}^{+} = \frac{M}{I_z} y_{\max}^{+} \qquad W_z^{+} = I_z / y_{\max}^{+}$$

$$\sigma_{\max}^{-} = \frac{M}{I_z} y_{\max}^{-} \qquad W_z^{-} = I_z / y_{\max}^{-}$$

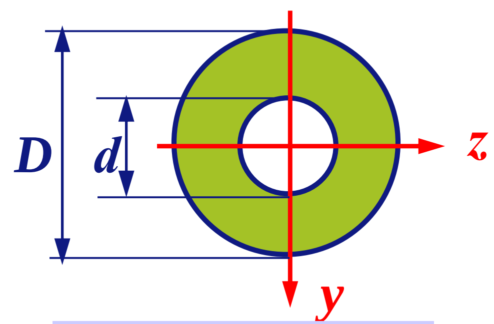


W_z^{+}、 W_z^{-}为抗弯截面模量(Section Modulus of Bending)



$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$



$$I_z = \frac{\pi D^4 (1-\alpha^4)}{64}$$

$$W_z = \frac{\pi D^3 (1-\alpha^4)}{32}$$

$$I_p = \frac{\pi D^4 (1-\alpha^4)}{32}$$

$$W_p = \frac{\pi D^3 (1-\alpha^4)}{16}$$

5-3 弯曲正应力强度计算

二、弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max}^{+} = \frac{M}{W_z^{+}} \leq [\sigma^{+}]$$

$$\sigma_{\max}^{-} = \frac{M}{W_z^{-}} \leq [\sigma^{-}]$$

三、梁弯曲正应力强度的计算步骤

1. 梁的外力分析，确定约束力；

2. 梁的内力分析，作弯矩图，确定危险截面；

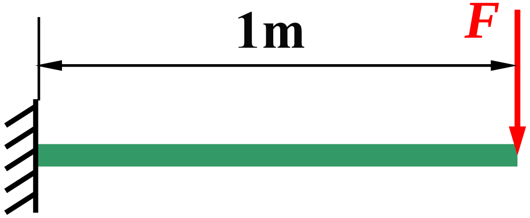
3. 在危险截面上确定危险点，确定抗弯截面模量；

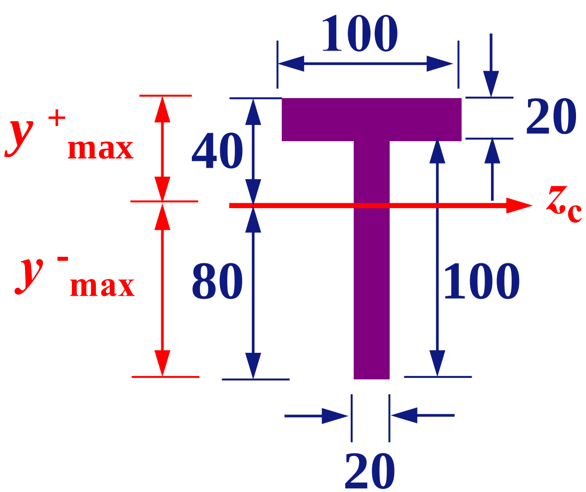
4. 确定危险点的正应力，判断其为拉应力还是压应力，代入正应力强度条件中进行相应计算或设计。

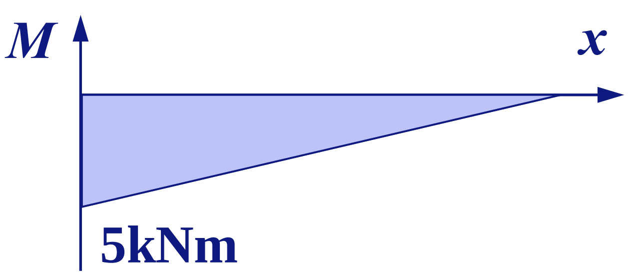
注意：内力最大截面未必是危险截面，离中性轴最远未必是危险点，需综合考虑材料和截面的特性。

例5-1 图示悬臂梁, F=5kN, $[\sigma^+]$=40MPa, $[\sigma^-]$=90MPa,

试校核该梁的正应力强度。







解: $\left|M\right|_{\max} = 5\text{kNm} \qquad I_{zc} = 533\,\text{cm}^4$

哪受拉哪受压?　弯矩图画在受压一侧!

$$y^+_{\max} = 40\text{mm}\ ,\ y^-_{\max} = 80\text{mm}$$

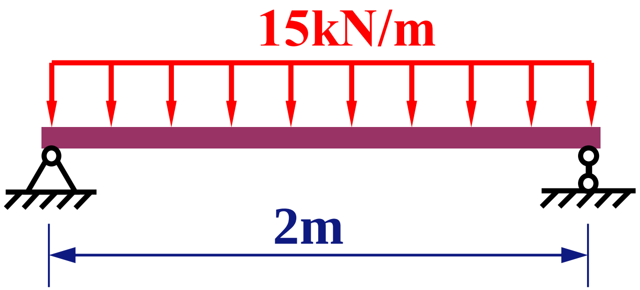
$$\sigma^+_{\max} = \frac{\left|M\right|_{\max}}{I_{zc}} y^+_{\max} = 37.5\text{MPa}$$

$$\sigma^-_{\max} = \frac{\left|M\right|_{\max}}{I_{zc}} y^-_{\max} = 75\text{MPa}$$

$\sigma^+_{\max} \le [\sigma^+] \quad \sigma^-_{\max} \le [\sigma^-]$　**构件安全!**

讨论：若将截面倒置，结果如何?

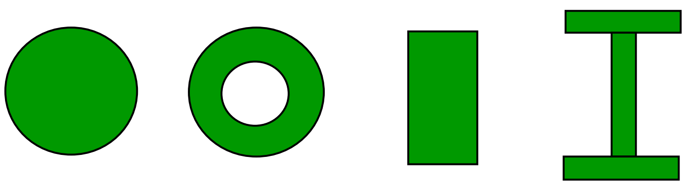
5-3 弯曲正应力强度计算



例5-2 已知简支梁的[σ]=160MPa,

求：按正应力强度条件选择下列截面的尺寸，并比较其重量。

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \le [\sigma]$$



$D/d = 2$　　$h/b = 2$　　工字钢

解： $|M|_{\max} = 7.5\text{kNm}$

1、圆形　$D_1 = \sqrt[3]{\dfrac{M_{\max} \times 32}{[\sigma]\pi}} = 78.2\text{mm}$

2、圆环　$D_2 = \sqrt[3]{\dfrac{M_{\max} \times 32}{[\sigma]\pi \times (1 - 0.5^4)}} = 79.9\text{mm}$

3、矩形　$b = \sqrt[3]{\dfrac{M_{\max} \times 6}{[\sigma] \times 4}} = 41.3\text{mm}$

4、工字钢　$W_z = \dfrac{M_{\max}}{[\sigma]} = 46.9\text{cm}^3$

取№10工字钢　$W_z = 49\text{cm}^3$

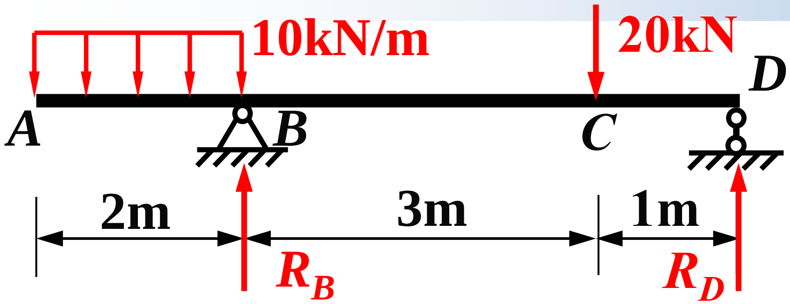
$A_1 = 48\text{cm}^2$　$A_2 = 37.6\text{cm}^2$

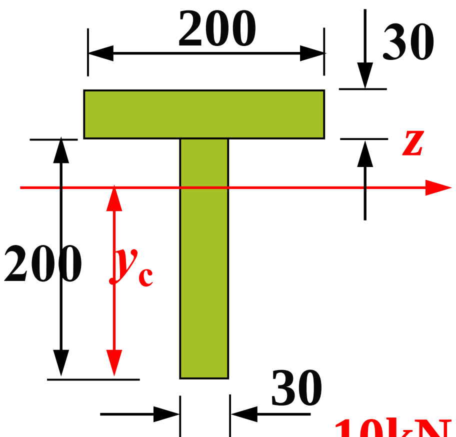
$A_3 = 34\text{cm}^2$　$A_4 = 14\text{cm}^2$

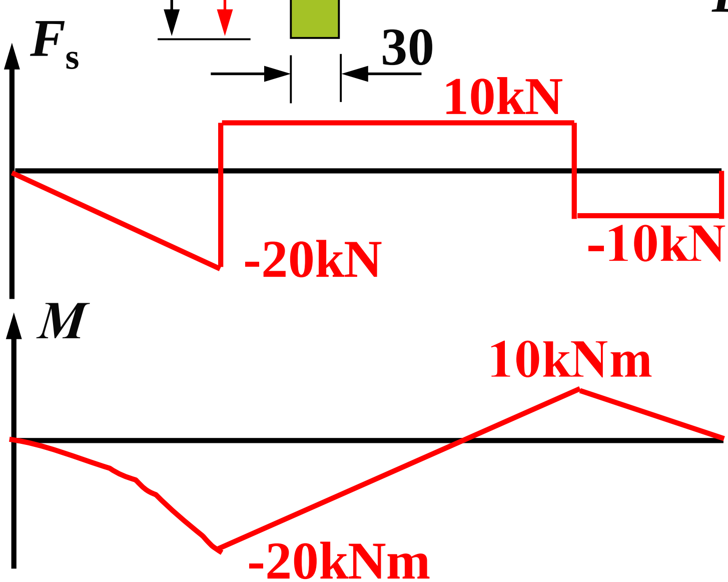
面积之比3.43 : 2.69 : 2.43 : 1

受弯构件工字形或矩形截面较好

5-3 弯曲正应力强度计算

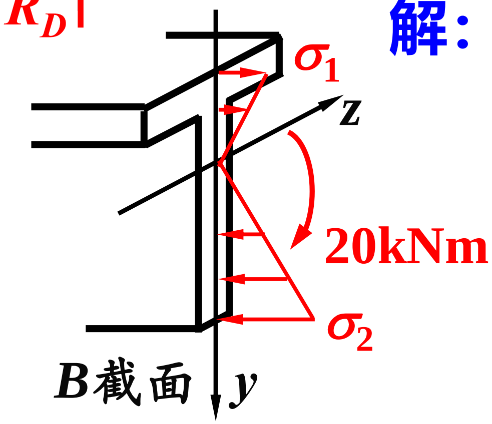


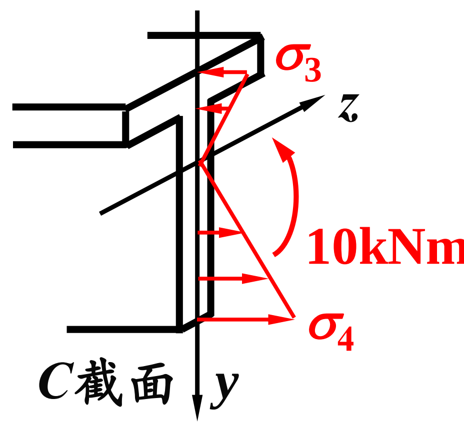




例5-3 已知某脆性材料制成的梁，y_c=15.75cm, I_z=6012.5cm^4,

求：横截面上最大拉、压应力。





解：1、R_B=30kN, R_D=10kN

2、作内力图

3、应力计算: $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$

*B*截面有 $\left|M_{\max}^{-}\right| = 20\text{kNm}$

$$\sigma_1^{+} = 24.1\text{MPa}$$

$$\sigma_2^{-} = 52.4\text{MPa}$$

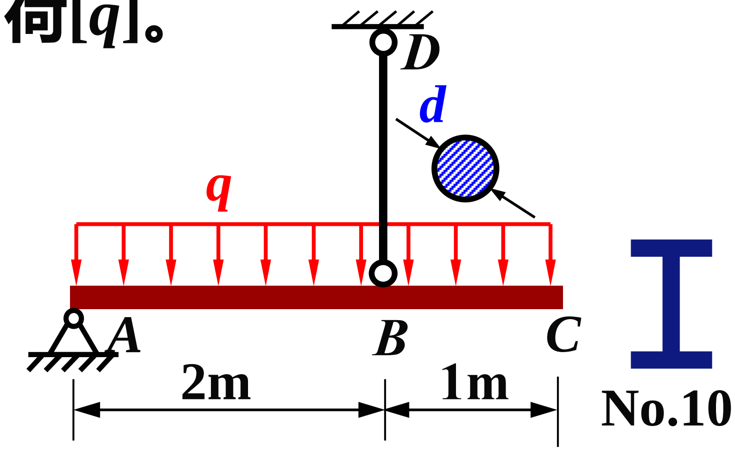
*C*截面有 $\left|M_{\max}^{+}\right| = 10\text{kNm}$

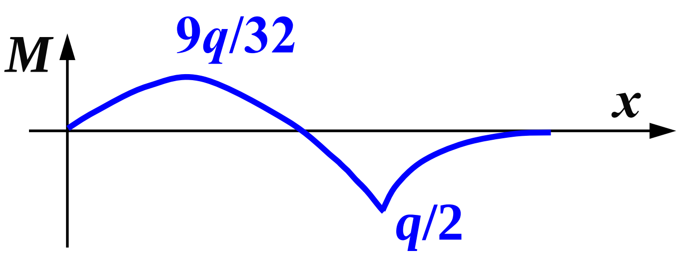
$$\sigma_3^{-} = 12.05\text{MPa}$$

$$\sigma_4^{+} = 26.2\text{MPa}$$

$$\left|\sigma_{\max}^{+}\right| = 26.2\text{MPa} \qquad \left|\sigma_{\max}^{-}\right| = 52.4\text{MPa}$$

例5-4 AC为10号工字钢梁，B处用直径$d=15\text{mm}$的圆截面杆悬吊，梁与杆许用应力为$[\sigma]$=160MPa，按正应力强度求结构的许可载荷$[q]$。





解：1. 求约束力 $F_A=3q/4$， $F_B=9q/4$

2. 按梁的弯曲正应力强度条件求解

$$|M|_{\max}=q/2 \qquad \sigma_{\max}=\frac{|M|_{\max}}{W_z}=\frac{q/2}{W_z}\le[\sigma]$$

查型钢表10号工字钢： $W_z=49\text{cm}^3$

$$q\le 2W_z[\sigma]=15.68\text{kN/m}$$

3. 按杆的拉伸正应力强度条件求解

$$F_{\rm N}^{BD}=F_B=9q/4$$

$$\sigma=\frac{F_{\rm N}^{BD}}{A}=\frac{9q/4}{\pi d^2/4}\le[\sigma]$$

$$q\le\frac{\pi d^2[\sigma]}{9}=\frac{\pi\times15^2\times160}{9}=12.57\text{kN/m}$$

$[q]=12.57\text{kN/m}$

今 日 作 业

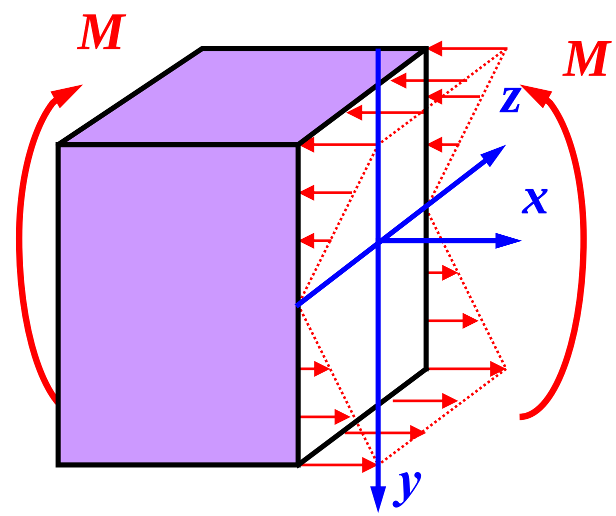
5-6、5-7

上节课内容回顾

- 平面弯曲的概念；

- 弯曲正应力：

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I_z} y}$$



$$I_z = \frac{bh^3}{12} \qquad I_z = \frac{\pi D^4 (1-\alpha^4)}{64}$$

- 弯曲正应力强度条件：

$$\boxed{\sigma_{\max}^{+} = \frac{M}{W_z^{+}} \le [\sigma^{+}]} \qquad \boxed{\sigma_{\max}^{-} = \frac{M}{W_z^{-}} \le [\sigma^{-}]}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \qquad W_z = \frac{\pi D^3 (1-\alpha^4)}{32}$$

第五章 弯曲应力

- ✓ 概述
- ✓ 弯曲正应力
- ✓ 弯曲正应力强度计算
- ✓ 弯曲切应力及其强度条件
- ✓ 提高弯曲强度的措施(自学)
- ✓ 剪切中心简介(自学)

学前问题：

- ■ 弯曲切应力如何确定?
- ■ 切应力强度条件?
- ■ 提高弯曲强度? 等强度梁?

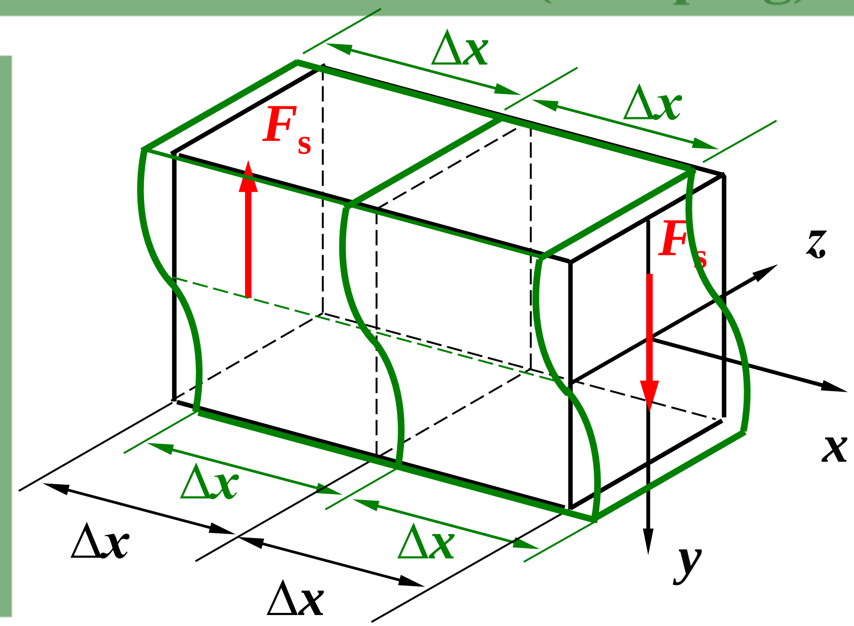
西安交通大學 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

5-4 弯曲切应力及其强度条件

●剪切弯曲时，横截面不再保持为平面而发生翘曲(Warping)。

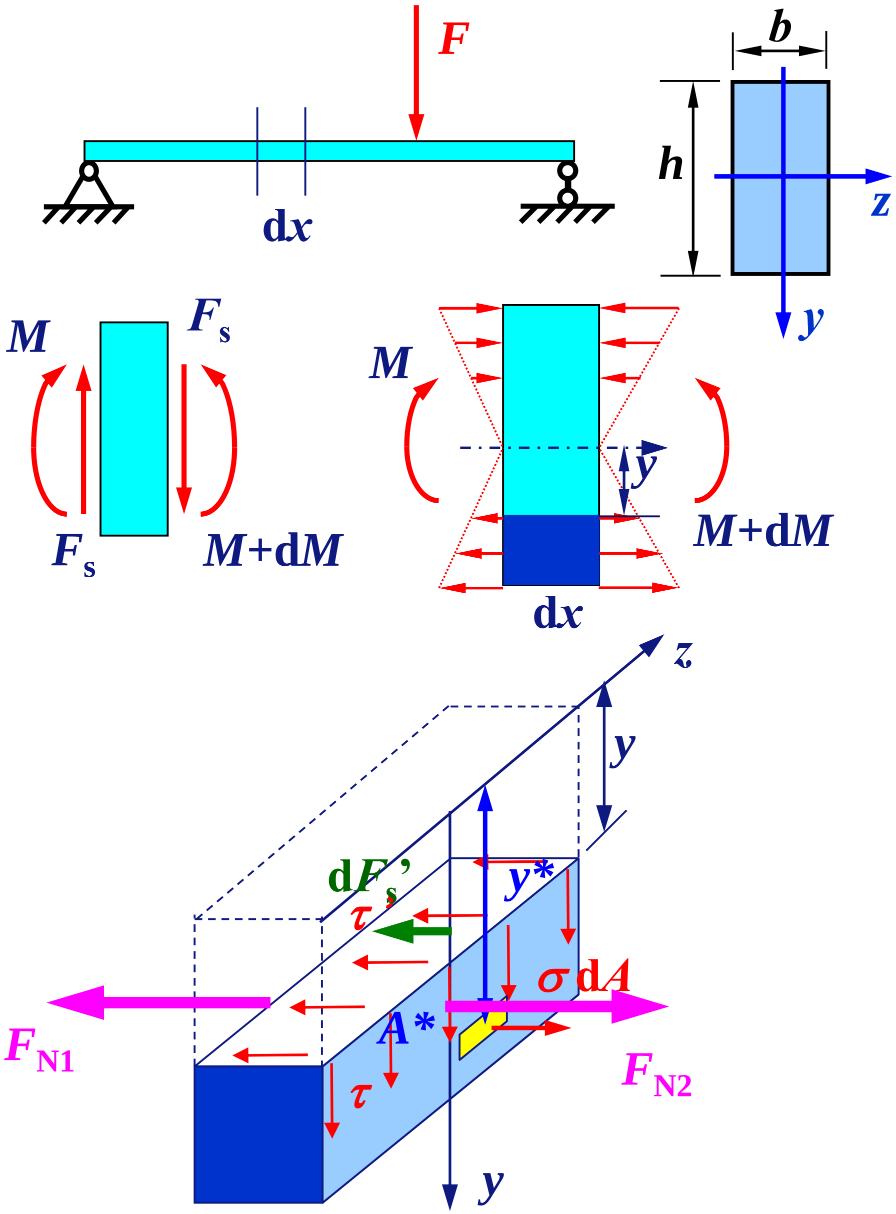
● 如果相邻横截面间的剪力相同，则其翘曲程度也相同，相邻横截面间的长度无变化，因此这种翘曲并不影响到弯矩引起的轴向线应变，所以在纯弯曲中所建立的弯曲正应力公式仍然成立。



● 若有分布载荷作用，相邻横截面间的剪力将不再相等，其翘曲程度也不相同，相邻横截面间的长度将发生变化。但是对于细长梁，这种变化很小，对弯曲正应力的影响可忽略。

● 根据切应力互等定律，剪切弯曲不仅在横截面上产生切应力，在纵向截面上也存在切应力。

5-4 弯曲切应力及其强度条件



一、矩形截面梁：$b<h$

假设所有的τ都平行于y；

假设同一高度y处τ相等。

$$\mathrm{d}F_s' = \tau' b\mathrm{d}x = \tau b\mathrm{d}x$$

$$F_{N2} = \int_{A^*} \sigma \mathrm{d}A = \int_{A^*} \frac{M+\mathrm{d}M}{I_z} y^* \mathrm{d}A$$

$$= \frac{M+\mathrm{d}M}{I_z} S_z^* \qquad F_{N1} = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

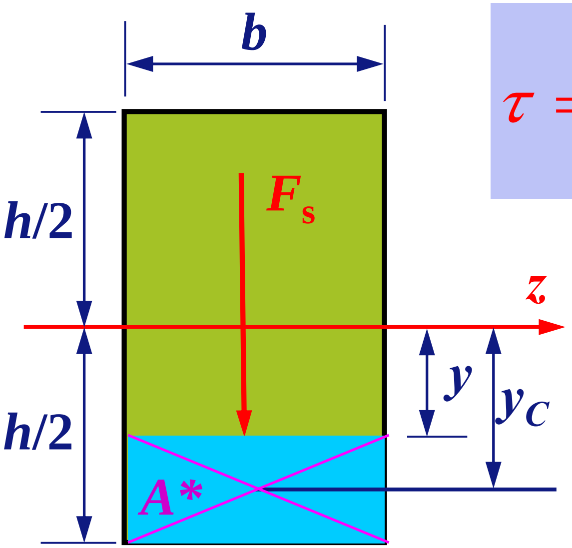
$$\sum F_x = 0 \qquad F_{N2} - F_{N1} = \mathrm{d}F_s'$$

$$\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \frac{S_z^*}{bI_z} \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_s$$

$$\boxed{\tau = \frac{F_s S_z^*}{b\,I_z}}$$

难点：理解S_z^*的含义！

5-4 弯曲切应力及其强度条件



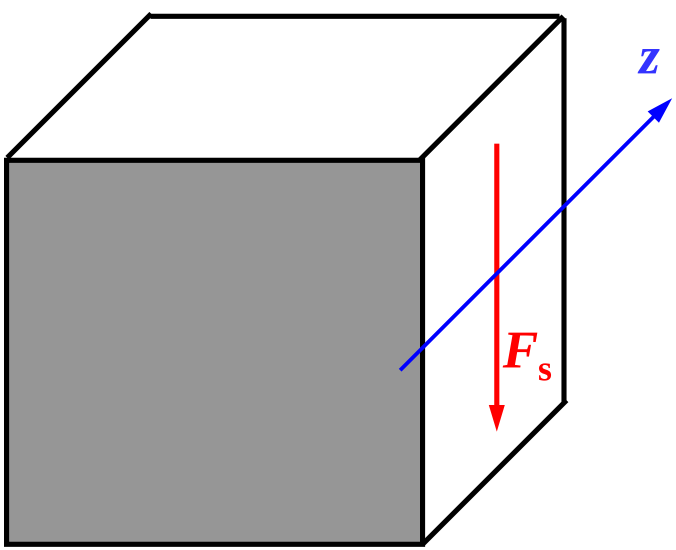
$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{b I_z}$$

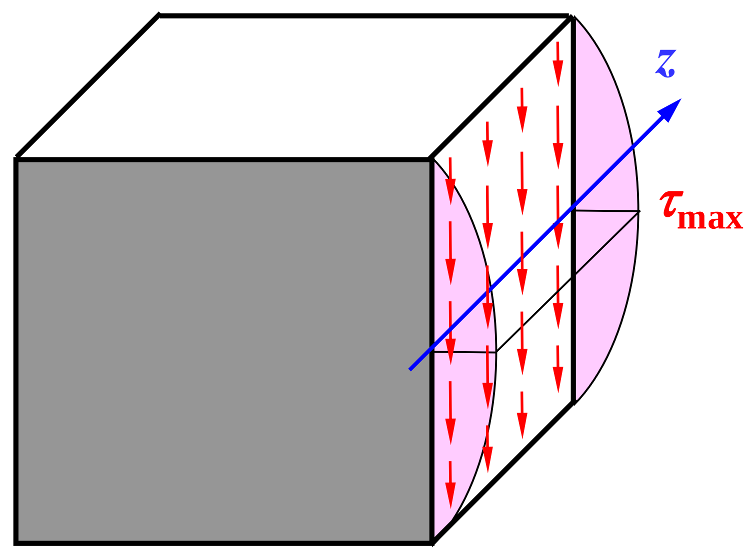
$$S_z^* = A^* y_C = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{\frac{h}{2}+y}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau = \frac{F_s \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b\frac{bh^3}{12}} = \frac{6F_s}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$y = \pm\frac{h}{2} \Rightarrow \tau_{\min} = 0$$

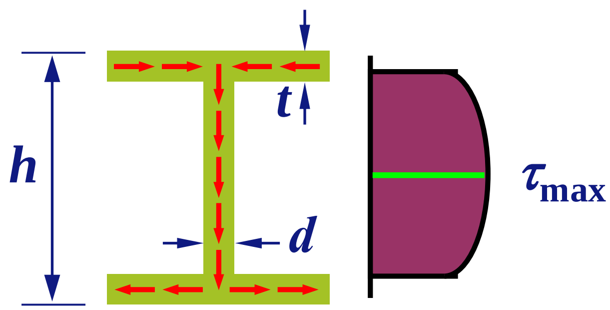
$$y = 0 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{3F_s}{2bh} = \frac{3F_s}{2A}$$

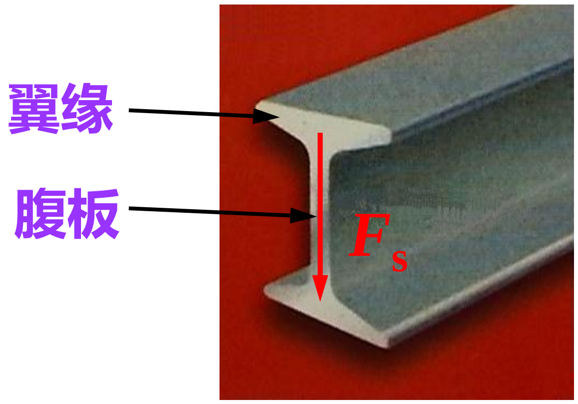




5-4 弯曲切应力及其强度条件

二、工字形截面梁：





腹板上： $$\tau = \frac{F_s S^*_z}{d\,I_z}$$ **沿高度按平坦抛物线分布**

翼缘上： 分布较复杂，一般较小，可忽略

综上：工字形截面上的剪力，绝大多数由腹板承担，且在腹板上的切应力接近均匀分布。最大切应力在中性轴上。

$$\tau_{max} = \frac{F_s S^{*\,max}_z}{d\,I_z} \approx \frac{F_s}{A_{腹板}} = \frac{F_s}{d(h-2t)}$$

在型钢表中可查出工字钢的I_z / S_z^{*max}

槽形、回字形截面梁与工字形截面梁类似。

三、圆截面梁：

***AB*两点：切应力方向与圆周相切；**

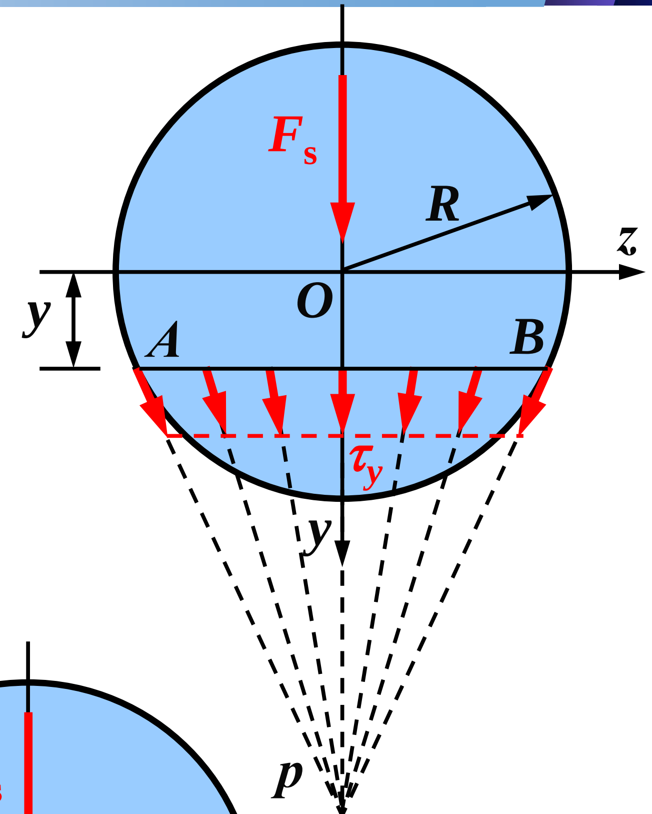
***AB*弦上各点：切应力的垂直分量 τ_y 都相等，作用线相交于*p*点；**

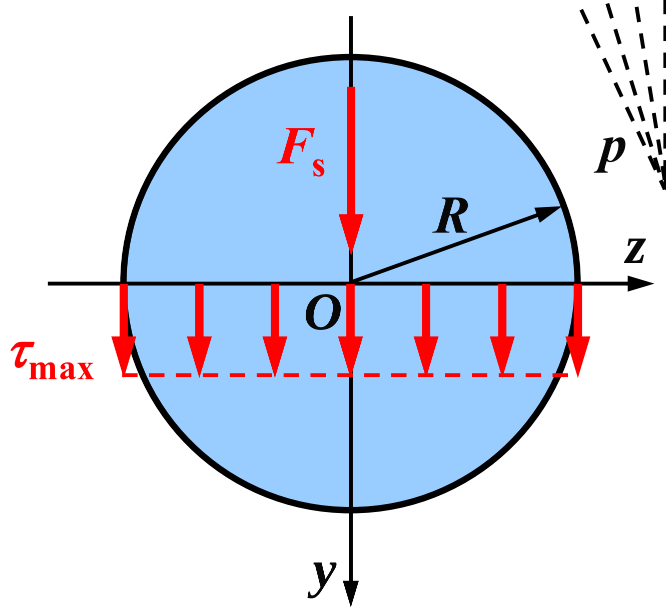
***AB*弦中点：切应力的方向沿铅垂。**

$$\tau_y = \frac{F_s S^*_z}{b_{AB} I_z}$$

最大切应力在中性轴上。

$$S^{*\max}_z = \frac{2R^3}{3} \qquad \tau_{\max} = \frac{4}{3}\frac{F_s}{A}$$





5-4 弯曲切应力及其强度条件

四、薄壁圆环截面梁：

切应力沿壁厚均匀分布；

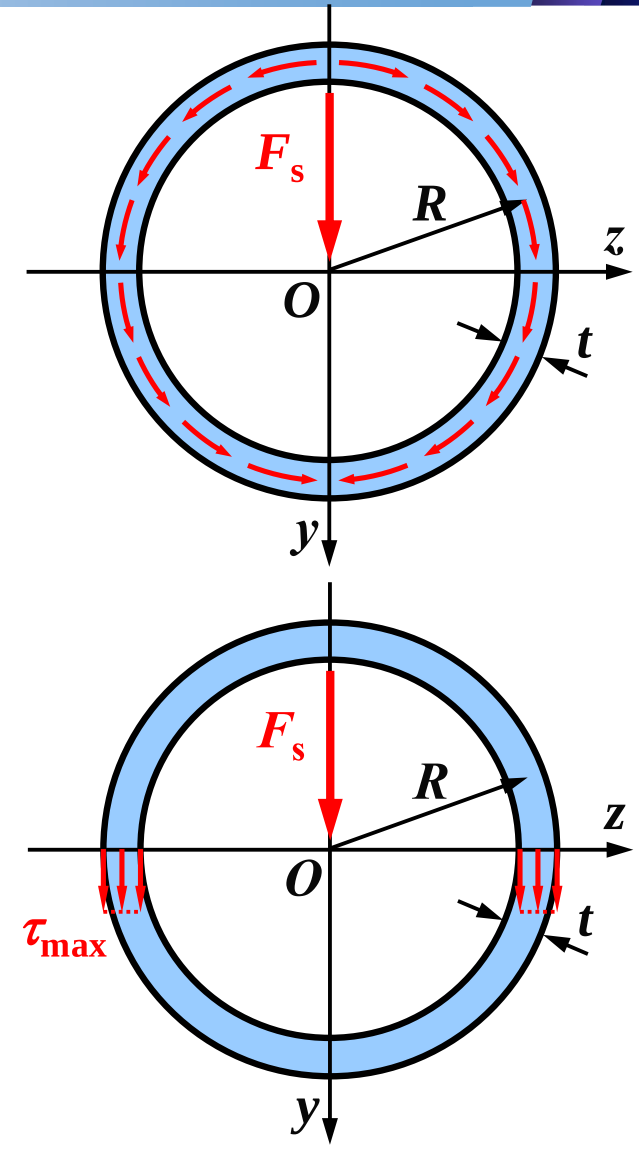
任意一点的切应力方向与圆周相切；

$$\tau = \frac{F_s S^*_z}{2t\, I_z}$$

最大切应力在中性轴上。

$$\tau_{\max} = \frac{F_s S^{*\max}_z}{2t\, I_z} = 2\frac{F_s}{A}$$

$$A = 2\pi R t$$



5-4 弯曲切应力及其强度条件

五、切应力强度条件

$$\tau_{\max} = k\frac{F_s}{A} \le [\tau]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \le [\sigma]$$

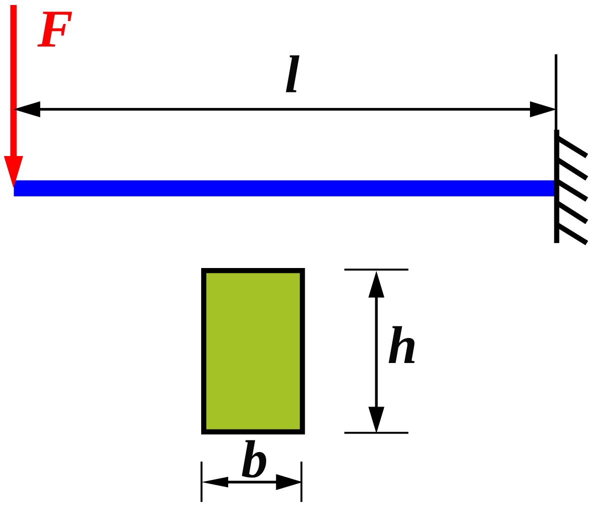
$k=3/2$	$k=1$	$k=4/3$	$k=2$
$A=bh$	$A=d\cdot I_z/S_z^*$ $\approx A_{腹板}$	$A=\pi R^2$	$A=2\pi Rt$

（1）一般细长梁受弯曲变形，只校核正应力强度条件，切应力可以忽略；

（2）其他受弯曲变形的构件，一般采用正应力强度条件进行设计，再采用切应力强度条件进行校核。

（3）抗剪性能较差材料制成的梁，采用切应力强度条件进行设计或校核。

例5-5 比较矩形截面悬臂梁的最大正应力和最大切应力。



解： $\left|M\right|_{\max}=Fl,\quad \left|F_{\mathrm{s}}\right|_{\max}=F$

$$\sigma_{\max}=\frac{6Fl}{bh^2},\quad \tau_{\max}=\frac{3F}{2bh}$$

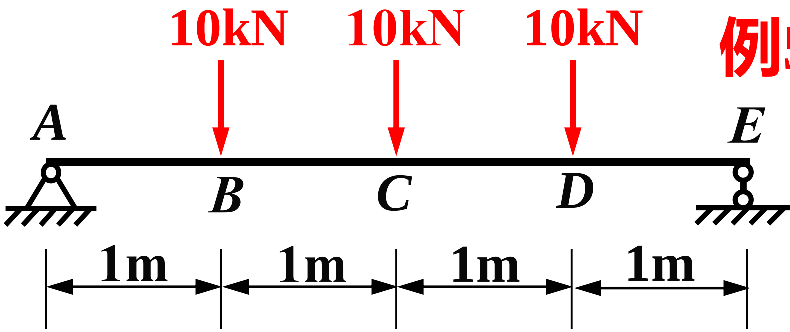
$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}}=\frac{4l}{h}$$

故：对于一般细长梁切应力可以忽略不计。

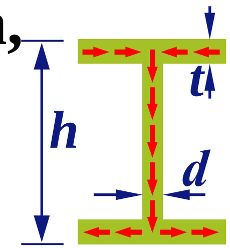
但以下一些梁，切应力不能忽略：

- **木梁、焊接梁、粘接梁；**
- **粗短梁；**
- **有较大集中力作用在支座附近。**

5-4 弯曲切应力及其强度条件

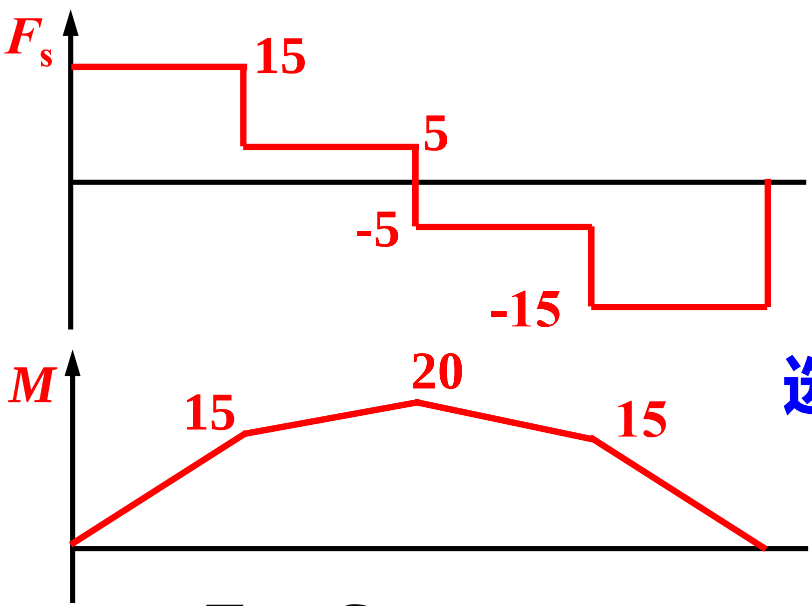


例5-6 $[\sigma]=160\text{MPa}$, $[\tau]=40\text{MPa}$, 试选择截面工字钢型号。



解：1、作内力图

$$|M|_{\max}=20\text{kNm},\quad |F_s|_{\max}=15\text{kN}$$



2、强度计算

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\le[\sigma]\qquad W_z\ge\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=125\text{cm}^3$$

选No.16工字钢： $W_z=141\text{cm}^3\quad d=6\text{mm}$

$$\frac{I_z}{S_z}=13.8\text{cm}\quad h=160\text{mm}\quad t=9.9\text{mm}$$

$$\tau_{\max}=\frac{F_{s\max}S_z}{d\,I_z}=18.1\text{MPa}<[\tau]$$

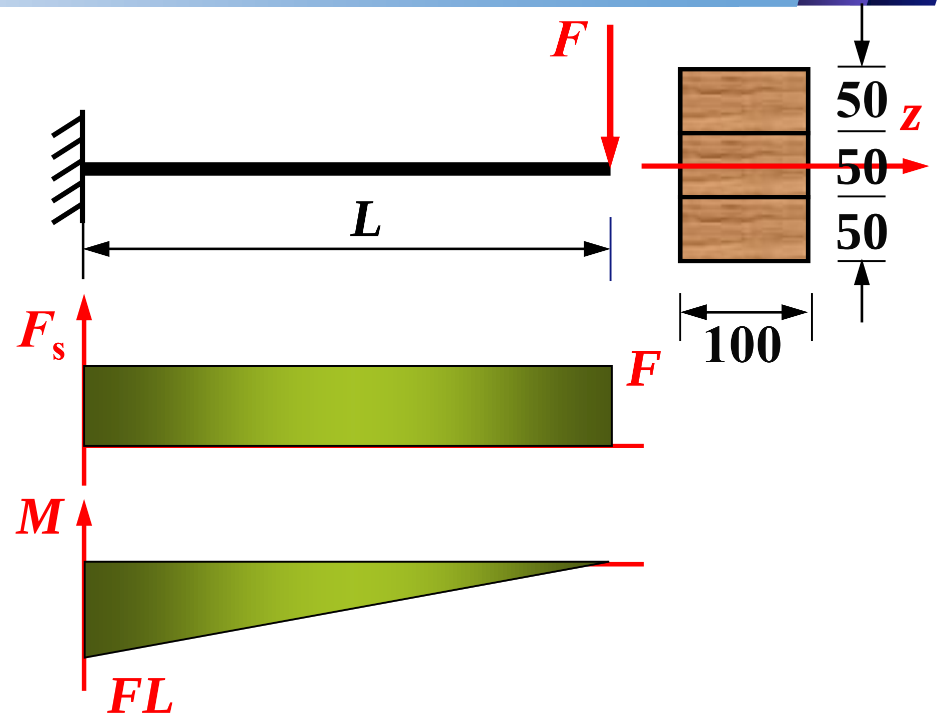
或$$\tau_{\max}=\frac{F_{s\max}}{d\,(h-2t)}=17.8\text{MPa}<[\tau]$$

最终：选No.16工字钢！

例5-7 L=1m的胶合板，胶面上的$[\tau]$=3.4MPa，求：$[F]$，σ_{max}。

解：1、作内力图

$$|F_s|_{max}=F\ ,\ |M|_{max}=FL$$



2、弯曲切应力

$$\tau=\frac{F_s S^*_z}{b\,I_z}\le[\tau]$$

$$S^*_z=100\times50\times50$$

$$=2.5\times10^5\,\text{mm}^3$$

$$I_z=\frac{bh^3}{12}=2.81\times10^7\,\text{mm}^4$$

$$[F]=\frac{bI_z[\tau]}{S^*_z}=38.2\text{kN}$$

3、最大弯曲正应力

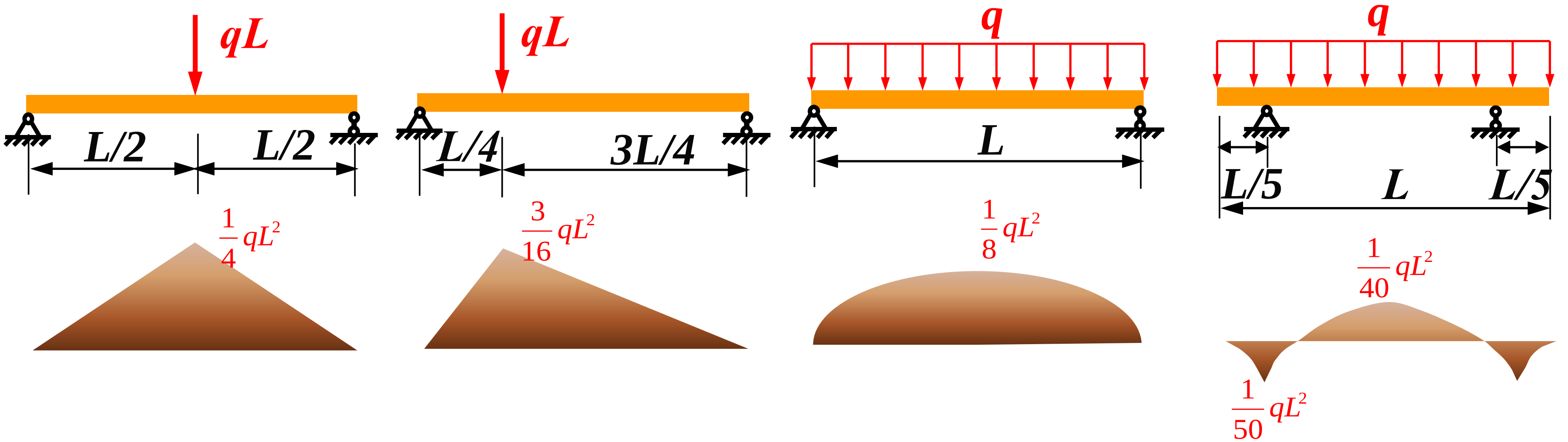
$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}y_{max}}{I_z}=102\text{MPa}$$

4、讨论：

为何不用二、四合板?

5-5 提高弯曲强度的途径

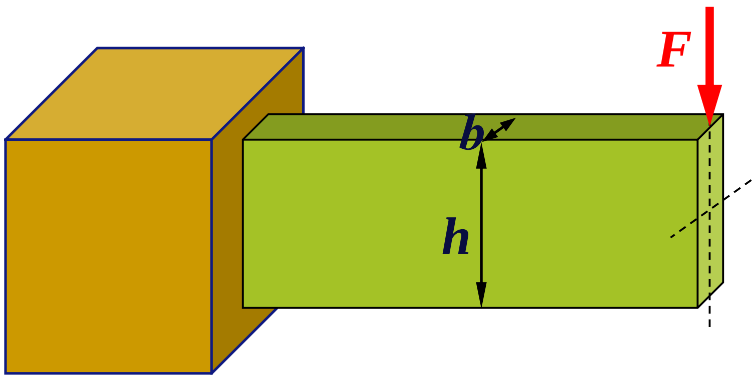
- **目的：** 保证静强度的前提下，尽可能地节省材料
- **思路：** 重点考虑正应力的强度 $$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}\le[\sigma]$$
- **措施：** 一、支承和载荷的合理安排，使 M 减小；
  - 集中力尽量作用在支座附近；
  - 支承点不要设在梁的两端；
  - 将集中载荷分解为多个小载荷或分布载荷。

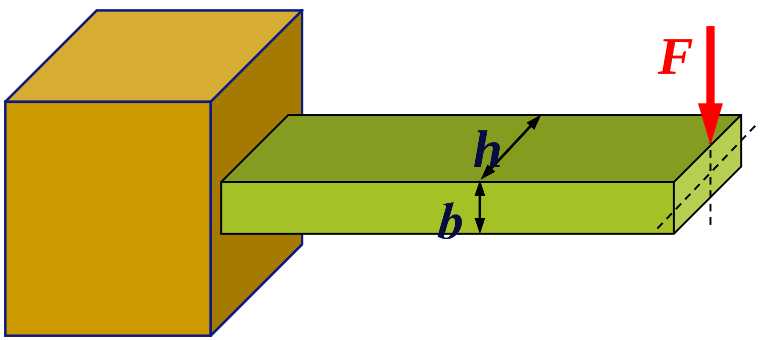


5-5 提高弯曲强度的途径

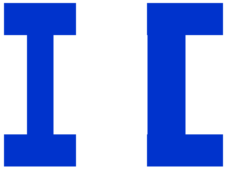
二、截面形状的合理设计，使 W / A 增大；

- 截面形状：

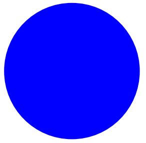




矩形截面梁竖放的弯曲强度比横放高


优于

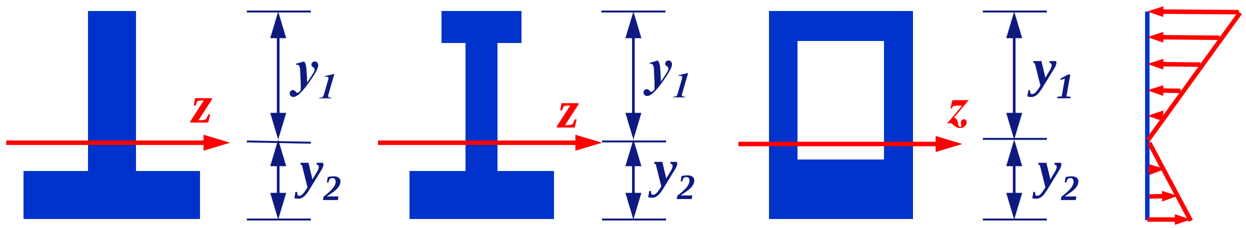


优于


5-5 提高弯曲强度的途径

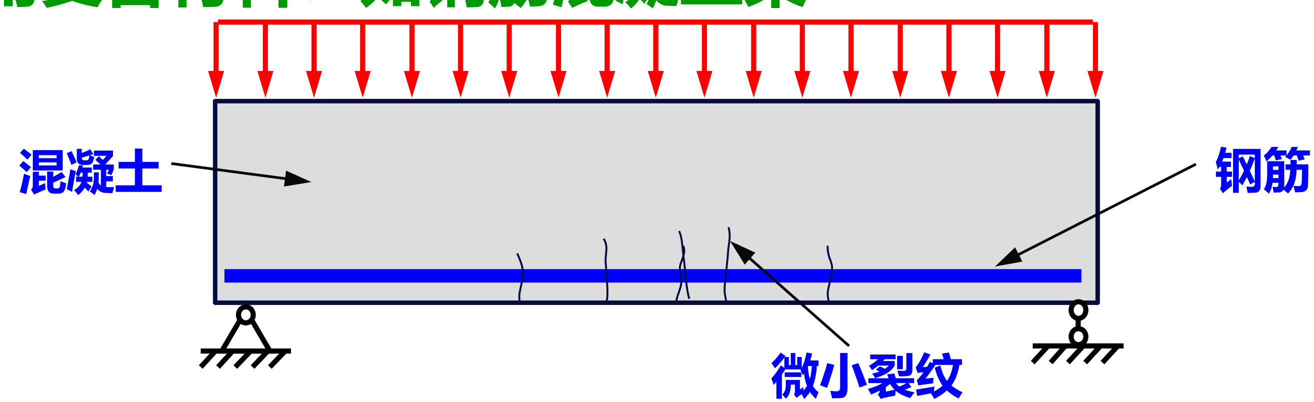
二、截面形状的合理设计，使 W/A 增大；

- 当外载荷方向不确定时，圆截面最佳；
- 若使用塑性材料：$[\sigma^+]=[\sigma^-]$，宜采用上下对称的截面；
- 若使用脆性材料：$[\sigma^+]<[\sigma^-]$，宜采用上下不对称的截面；



$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{[\sigma^+]}{[\sigma^-]}$$

- 使用复合材料：如钢筋混凝土梁



5-5 提高弯曲强度的途径

三、等强度梁的使用

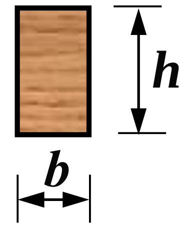
- 当梁发生剪切弯曲时， M 随截面位置而变化，若采用等截面梁，即抗弯截面模量W_z为常数，此时只有 $|M|_{max}$ 位置的横截面上应力达到许用应力$[\sigma]$，而其它截面上应力均小于许用应力$[\sigma]$ 。不科学!

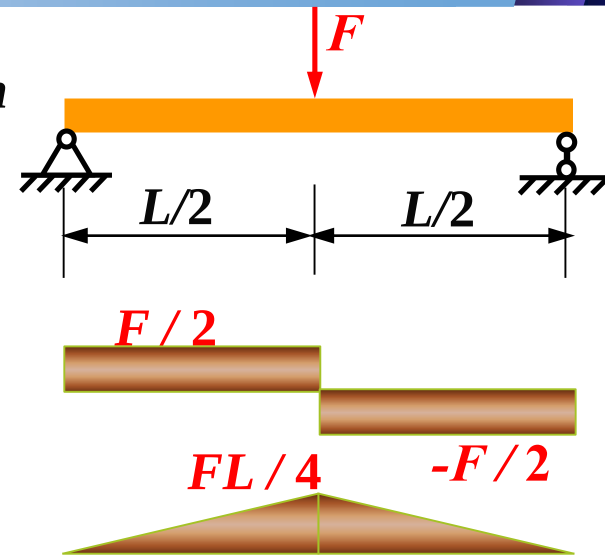
- 可以采用变截面梁，即 W_Z随截面位置而变化：弯矩M大时，抗弯截面模量W_z亦大；反之亦然。

- 等强度梁：梁所有截面上的最大正应力均相等，都等于许用应力$[\sigma]$。

$$\sigma(x)=\frac{|M(x)|}{W_z(x)}=[\sigma] \quad\Longrightarrow\quad W_z(x)=\frac{|M(x)|}{[\sigma]}$$

例5-8 已知：F，L，$[\sigma]$，$[\tau]$，试设计等强度梁的截面尺寸。



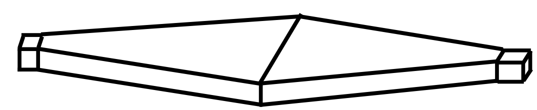


解： $M(x)=\dfrac{Fx}{2}\quad(0\le x\le\dfrac{l}{2})$　　$F_s=\dfrac{F}{2}$

一、若截面高度 h 不变：

$$W(x)=b(x)h^2/6 \qquad b(x)=\frac{3F}{[\sigma]h^2}x$$

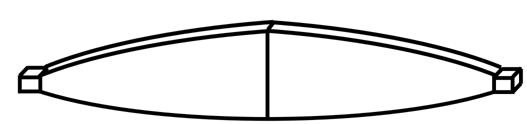
$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{F_s}{A}=\frac{3}{2}\frac{F/2}{bh}\le[\tau] \qquad b\ge\frac{3F}{4[\tau]h}$$



二、若截面宽度 b 不变：

$$W(x)=bh(x)^2/6 \qquad h(x)=\sqrt{\frac{3F}{[\sigma]b}x}$$

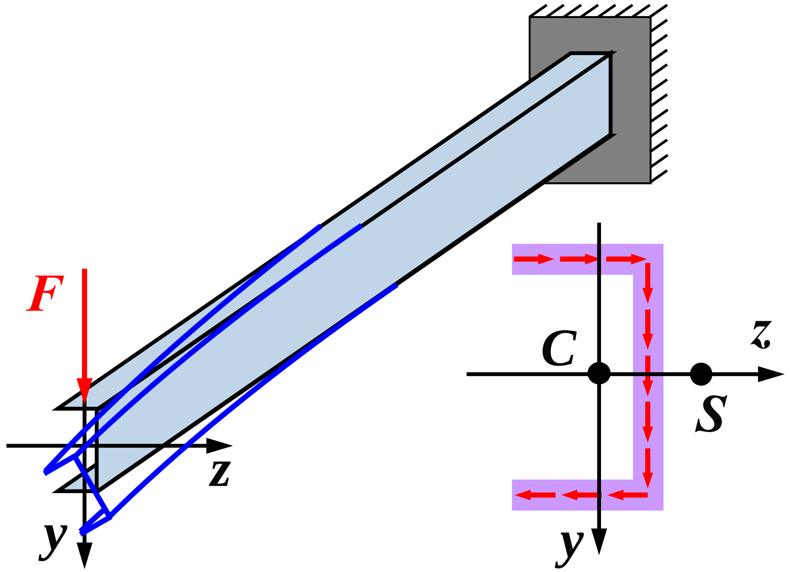
$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{F_s}{A}=\frac{3}{2}\frac{F/2}{bh}\le[\tau] \qquad h\ge\frac{3F}{4[\tau]b}$$



5-6 剪切中心简介*

对于薄壁截面，切应力方向必须与平行于截面周边的切线方向。

以薄壁槽形截面为例，当横向力 F 作用在截面形心 C 时，由于与切应力的合力方向不一致，会产生一个力偶，此时梁除了发生弯曲变形外，还将发生扭转变形。



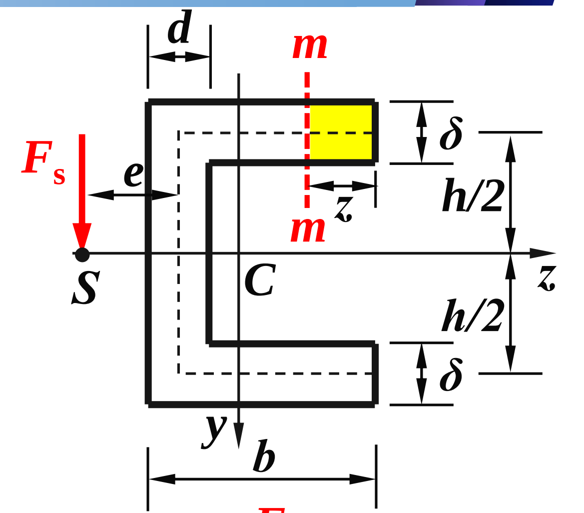
保证梁只发生弯曲变形而不发生扭转变形的载荷作用点 S，称为**剪切中心**或**弯曲中心**。

对称结构剪切中心与形心重合。对于**非对称实心截面**，剪切中心与形心很接近，且抗扭刚度大，故可不考虑其扭转变形。

对于**非对称薄壁截面**，因其**抗扭刚度较小**，确定其剪切中心 S，并使外力作用线尽可能靠近剪切中心，是很有意义的。

5-6 剪切中心简介*

例5-9 槽型截面梁，在垂直方向上受外力作用发生平面弯曲，试确定剪切中心的位置。

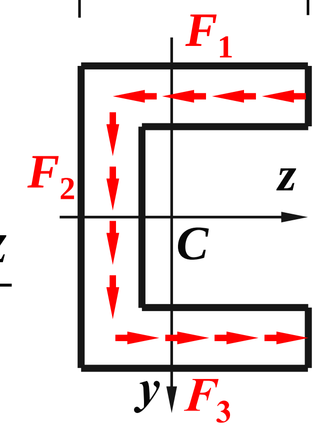


解：剪切中心位于 z 轴，假设F_s通过剪切中心S

根据S的定义，三个合力对S的合力偶矩应为零，故有

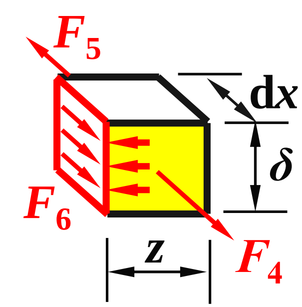
$$F_2 e - F_1\frac{h}{2} - F_3\frac{h}{2} = 0 \qquad F_1 = F_3 \qquad e = \frac{hF_1}{F_2}$$

上下翼缘上的切应力



$$F_4 = \int_{A^*}\sigma \mathrm{d}A = \int_{A^*}\frac{M\xi}{I_z}\mathrm{d}A = \frac{MS_z^*}{I_z} \qquad F_5 = \frac{(M+\mathrm{d}M)S_z^*}{I_z}$$

$$F_6 = \tau_z\delta\mathrm{d}x \qquad F_4 + F_6 = F_5 \Rightarrow \boxed{\tau_z = \frac{F_s S_z^*}{\delta I_z}} = \frac{F_s}{\delta I_z}\cdot\frac{h}{2}z\delta = \frac{F_s hz}{2I_z}$$



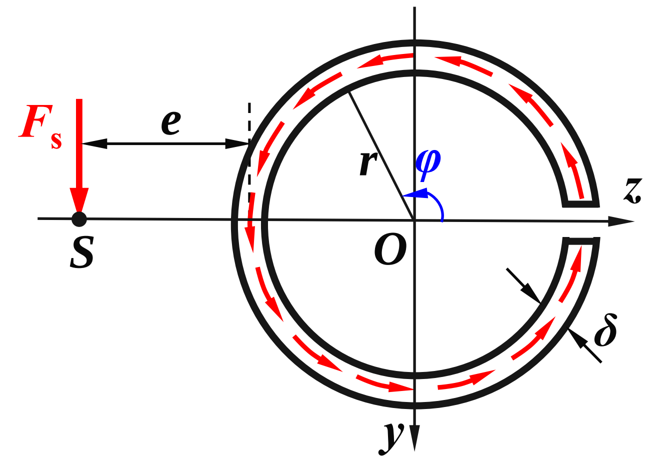
上下翼缘切应力的合力 $\quad F_1 = \int_0^b \tau_z\delta\mathrm{d}z = \dfrac{F_s\delta hb^2}{4I_z}$

腹板上切应力的合力 $\quad F_2 = F_s$

剪切中心的位置 $\quad e = \dfrac{hF_1}{F_2} = \dfrac{\delta h^2 b^2}{4I_z}$

5-6 剪切中心简介*

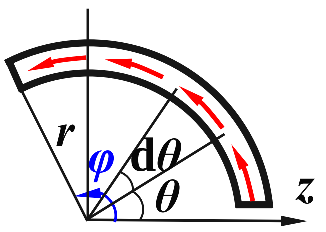
例5-10 开口薄壁圆环截面梁，在垂直方向上受外力作用发生平面弯曲，试确定剪切中心的位置。



解：剪切中心位于 z 轴，假设F_s通过剪切中心S

圆心角为φ处的切应力 $\boxed{\tau_\varphi = \dfrac{F_s S_z^*}{\delta I_z}}$

$$I_z = \frac{1}{2}I_p = \frac{1}{2}\int \rho^2 \mathrm{d}A = \frac{1}{2}\int_{r-\delta/2}^{r+\delta/2} \rho^2 2\pi r \mathrm{d}\rho = \pi r^3 \delta$$



$$S_z^* = \int_{A^*} y\mathrm{d}A = \int_0^\varphi r\sin\theta \cdot \delta r \mathrm{d}\theta = r^2\delta(1-\cos\varphi)$$

$$\tau_\varphi = \frac{F_s(1-\cos\varphi)}{\pi r \delta}$$

剪切中心的位置

$$F_s(e+r) = \sum f \cdot r = \int_l \tau_\varphi \mathrm{d}A \cdot r = 2\int_0^\pi \tau_\varphi \cdot \delta r \mathrm{d}\varphi \cdot r = 2\int_0^\pi \frac{F_s r(1-\cos\varphi)}{\pi}\mathrm{d}\varphi = 2F_s r$$

最终得到 $e = r$

基本解题思路

外力 $\xrightarrow[\text{作图规律}]{\text{截面法}}$ 内力（弯矩M，剪力F_s）$\longrightarrow$

应力

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y$$

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{b I_z}$$

$\longrightarrow$ 强度条件

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} \le [\sigma]$$ 主要

$$\tau_{max} = k \frac{F_s}{A} \le [\tau]$$ 次要

变形（下节课介绍）

圆形

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right)$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right)$$

矩形

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

第五章的基本要求

1．明确平面弯曲、纯弯曲和剪切弯曲的概念；

2．了解梁弯曲正应力和切应力计算公式的推导过程，明确中性轴，中性层等概念；

3．熟练掌握梁弯曲正应力的计算，建立弯曲正应力强度条件，并利用强度条件进行有关计算；

4．掌握矩形截面、其它常见截面梁切应力的计算及切应力在横截面上的分布规律，掌握如何建立相应的强度条件；

5．了解提高梁强度的一些主要措施。

今 日 作 业

5-16、5-18

5-16题提示：先计算下边缘正应力、线应变，再积分得到伸长量。