上节课内容回顾

- 低碳钢在拉伸和压缩时的机械性质
- 灰铸铁在拉伸和压缩时的机械性质
- 极限应力，安全因数，许用应力 $[\sigma]=\sigma^{0}/n$
- 应力集中现象

第三章 扭转

- 概述
- 外力偶矩、扭矩和扭矩图
- 圆轴扭转的应力
- 圆轴扭转的强度条件
- 圆轴扭转的破坏分析
- 圆轴扭转的变形与刚度条件
- 非圆截面杆和薄壁杆扭转
- 受扭构件的合理设计
- 扭转超静定问题

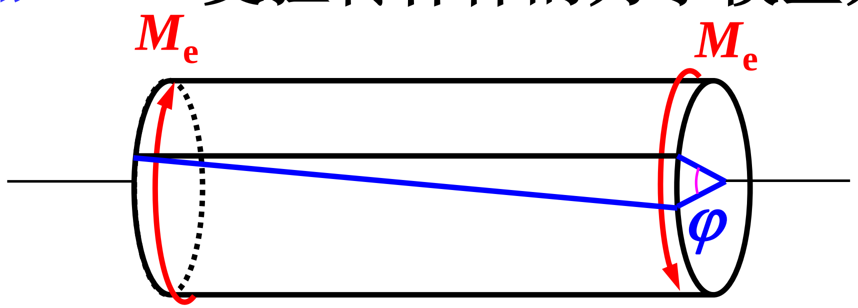
学前问题：

- 扭转应力、强度？
- 扭转变形、刚度？
- 与拉压比较？

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
航天航空学院--力学中心

3-1 概述

- 扭转的概念： 受扭转杆件的力学模型为:



模型的特征： 1) 构件多为圆截面等直杆；

2) 外力偶的矢量方向与杆轴线平行；

3) 横截面之间绕杆轴线产生相对角位移。

- 具有上述特征的变形称为扭转(Torsion)变形。
  工程上，把承受扭转变形的杆件称为"轴(Shaft)"。
- 横截面之间的相对角位移，称为扭转角(Angle of Twist)。

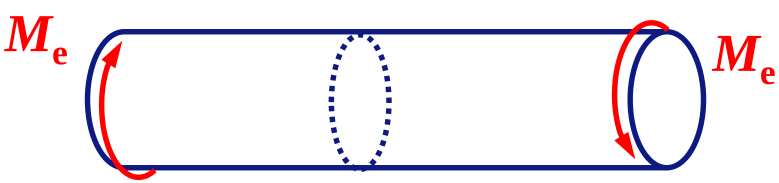
3-2 外力偶矩、扭矩和扭矩图

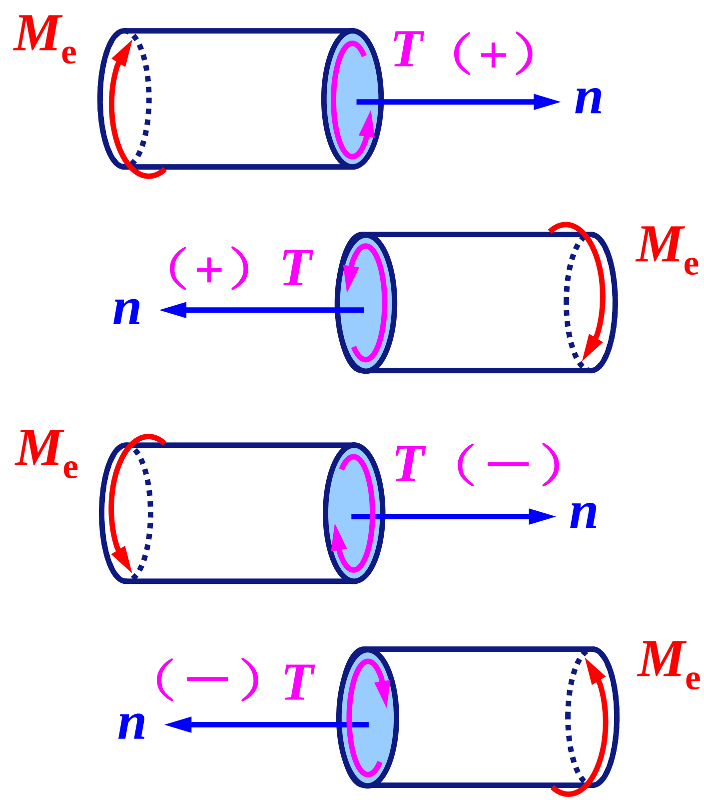
● 外力偶矩（即转矩M_e）的计算

若功率P的单位为千瓦： $$M_e = 9549\frac{P}{n} \quad (\mathrm{N\,m})$$

若功率P的单位为马力： $$M_e = 7024\frac{P}{n} \quad (\mathrm{Nm})$$

● 内力偶矩（即扭矩T）的计算



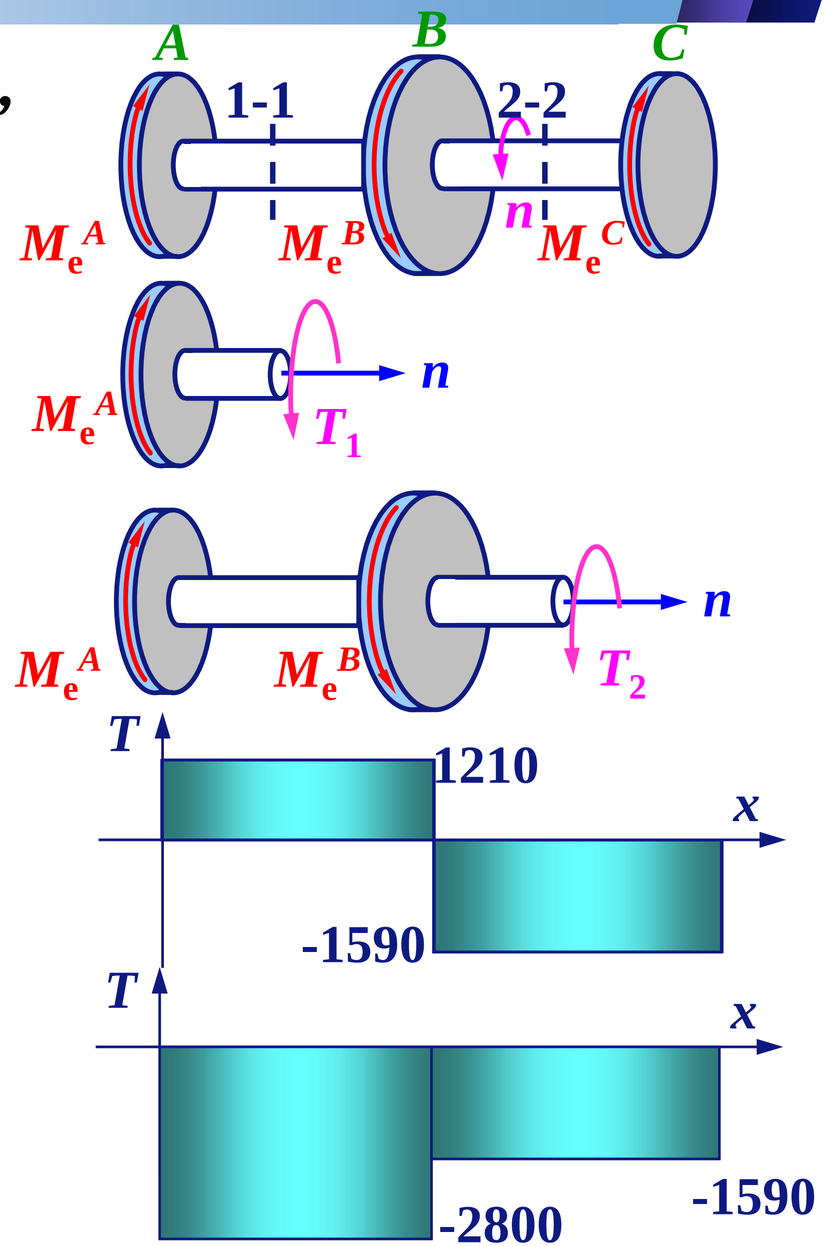


扭矩的符号规则：

按右手螺旋法则，其矢量方向与横截面外法线方向一致时为正。反之，则为负。

3-2 外力偶矩、扭矩和扭矩图

例3-1 B 轮为主动轮，A、C为从动轮，已知P_A=19kW, P_B=44kW, P_C=25kW, n=150rpm。作图示传动轴的扭矩图。



解：1. 求外力偶

$$M_e^A = 9549\frac{19}{150} = 1210\text{Nm}$$

同理 M_e^B=2800Nm, M_e^C=1590Nm

2. 截面法求内力(设正法)

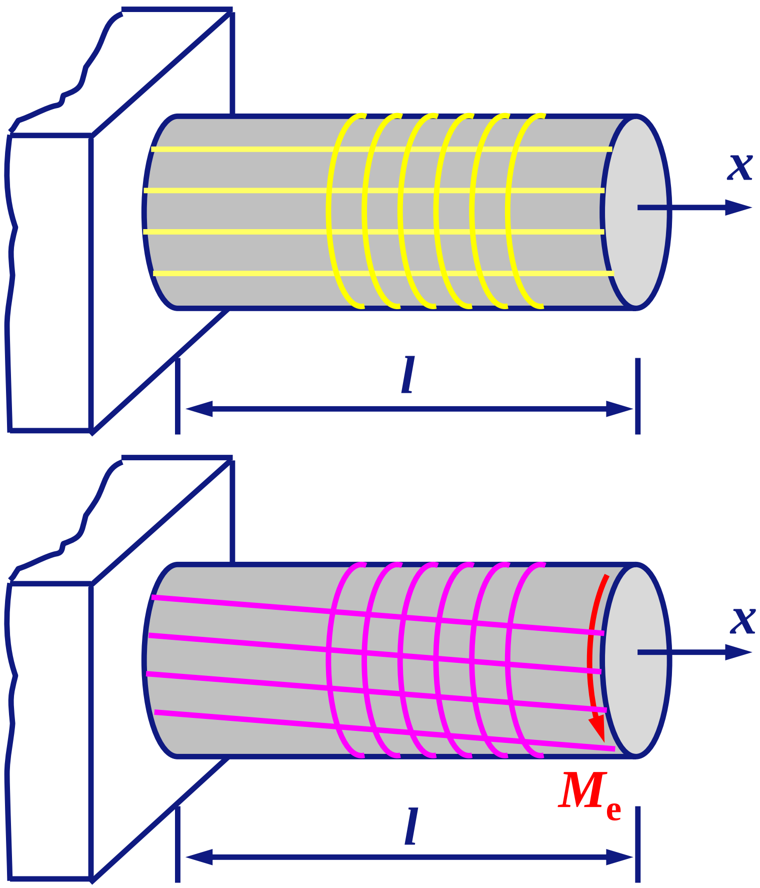
$$T_1 - M_e^A = 0 \rightarrow T_1 = 1210 \text{ Nm}$$

$$T_2 - M_e^A + M_e^B = 0 \rightarrow T_2 = -1590 \text{ Nm}$$

3. 作扭矩图

4. 讨论：若交换A、B两轮的位置，扭矩将如何变化？

3-3 圆轴扭转的应力



一、实验观察：

A. 各纵向线倾斜角度相同；

B. 各圆周线的形状、大小和间距不变，只是绕轴线作相对转动；

C. 正方形网格,加外力偶后变成同样大小的平行四边形。

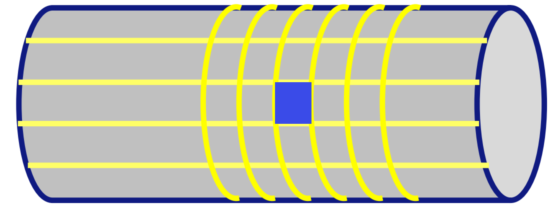
二、假设：圆杆的横截面变形后仍保持为平面

三、推理：

由现象A、 C →横截面上有切应力；

由现象B→横截面上无正应力。

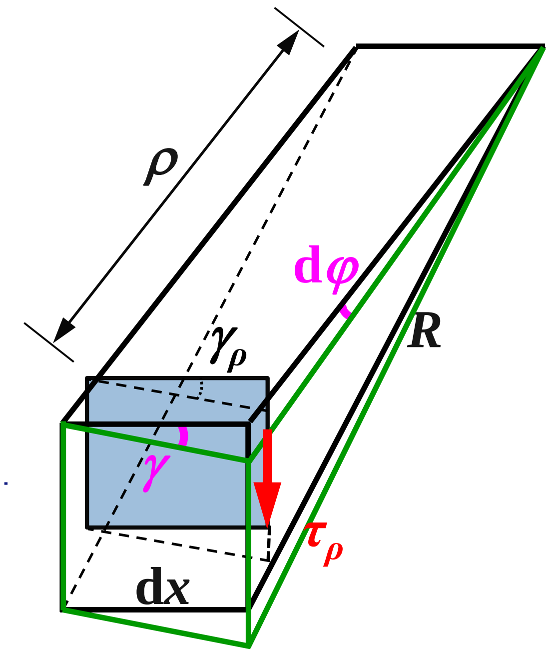
3-3 圆轴扭转的应力



四、扭转切应力公式推导

1、变形几何关系：

$$\gamma \mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi R \qquad \gamma_\rho \mathrm{d}x = \rho \mathrm{d}\varphi \qquad \gamma_\rho = \frac{\rho \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

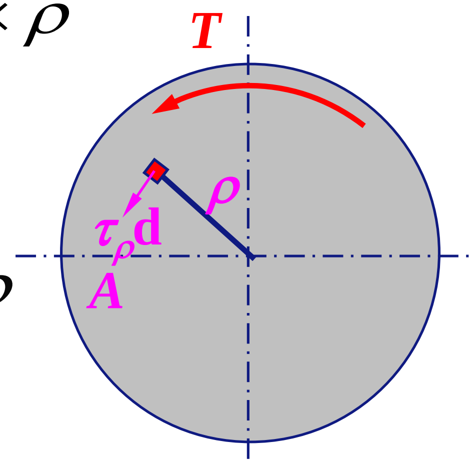


2、物理条件：

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

3、平衡条件：

$$\mathrm{d}T = \tau_\rho \mathrm{d}A \times \rho$$



$$T = \int \mathrm{d}T = \int_A \tau_\rho \mathrm{d}A \times \rho$$

$$= \int_A G \times \rho \times \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \times \mathrm{d}A \times \rho$$

$$= G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$

$$= G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} I_\mathrm{p}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{G I_\mathrm{p}} \qquad \tau_\rho = \frac{T}{I_\mathrm{p}}\rho$$

3-3 圆轴扭转的应力

$$\boxed{\tau_{\rho} = \frac{T}{I_{\mathrm{p}}}\rho}$$

$$I_{\mathrm{p}} = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$ 极惯性矩

实心圆轴

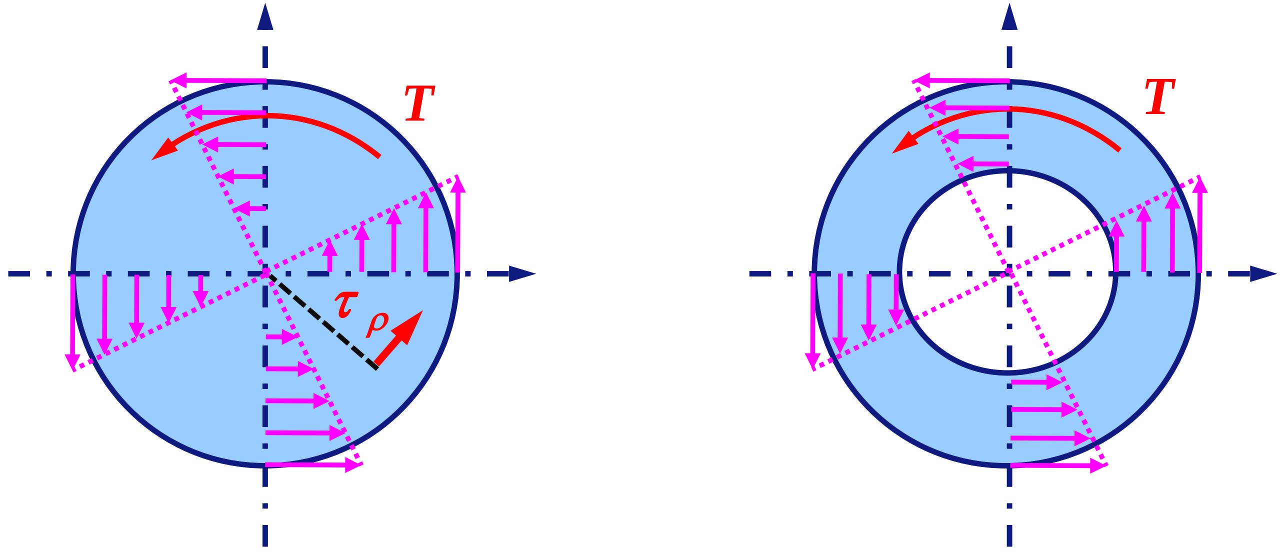
$$I_{\mathrm{p}} = \frac{\pi D^4}{32}$$

空心圆轴

$$I_{\mathrm{p}} = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right)$$

$$(\alpha = d/D)$$

五、扭转切应力在横截面上的分布规律



3-4 圆轴扭转的强度条件

一、扭转横截面上最大的切应力：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_{\mathrm{p}}} R = \frac{T}{W_{\mathrm{p}}}$$

W_{p}抗扭截面系数

实心圆轴

$$W_{\mathrm{p}} = \frac{\pi D^3}{16}$$

空心圆轴

$$W_{\mathrm{p}} = \frac{\pi}{32R}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)$$

二、扭转强度条件：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_{\mathrm{p}}} \le [\tau] = \frac{\tau^0}{n}$$

注意：强度条件中的应力只考虑大小！

三、扭转强度条件的应用：

1、校核强度； 定性
2、设计截面； 定形
3、确定许可载荷。 定载

四、扭转强度条件适应条件：

1、适用于圆截面直杆；
2、材料处在线弹性范围内。

3-4 圆轴扭转的强度条件

例3-2 1956年下线的解放CA10汽车，传动主轴D=90mm, d=85mm，$[\tau]$=60MPa，M_e=1.5kNm。校核轴的强度。

解： $T = M_e = 1.5\ \text{kNm}$ $\quad \alpha = d/D = 0.944$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \le [\tau]$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right) = 29\times10^{-6}\,\text{m}^3$$

$$\tau_{\max} = T/W_p = 51.7\text{MPa} < [\tau]$$

强度足够。

讨论： 1）用实心轴，最大应力不变时确定轴直径：$D' = 53\text{mm}$

2）比较重量：$W'/W = D'^2/(D^2 - d^2) = 3.2$ 空心轴优于实心轴！

解题思路：外力→内力→应力→强度条件→结果或结论

3-6 圆轴扭转的变形和刚度条件

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T}{GI_\mathrm{p}} \qquad \varphi=\int \mathrm{d}\varphi=\int_l \frac{T}{GI_\mathrm{p}}\mathrm{d}x$$

单位：弧度

GI_p：抗扭刚度

对于两端作用力偶的等直轴：$$\varphi=\frac{Tl}{GI_\mathrm{p}}$$

单位长度扭转角：$$\Phi=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T}{GI_\mathrm{p}}\times\frac{180^\circ}{\pi}\ (^\circ/\mathrm{m})$$

刚度条件：$$\Phi=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T}{GI_\mathrm{p}}\times\frac{180^\circ}{\pi}\leq[\Phi]$$

许用单位长度扭转角[Φ]：

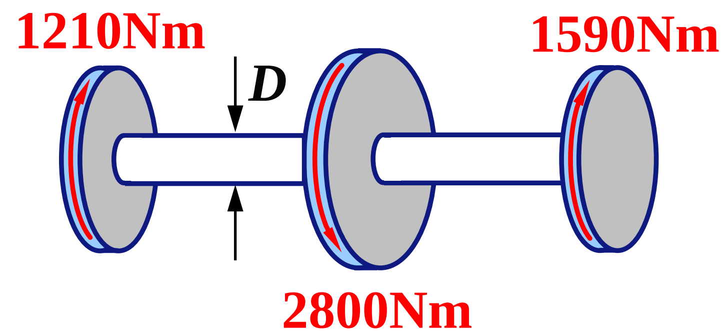
0.25～0.5 °/m 精密轴

0.50～1.0 °/m 一般轴

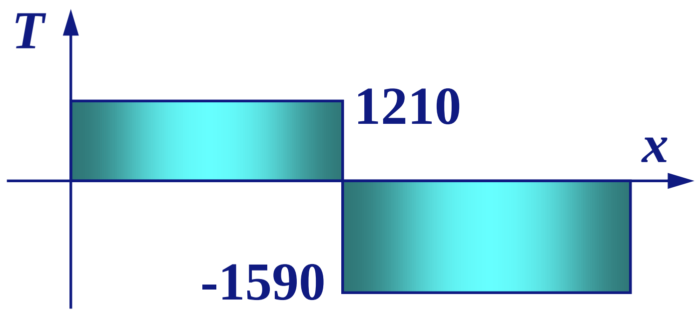
1.0 ～3.0 °/m 粗糙轴

3-6 圆轴扭转的变形和刚度条件

例3-3 已知：$[\tau]=40\text{MPa}$，$G=80\text{GPa}$，$[\Phi]=0.8^{\circ}/\text{m}$，确定圆轴的直径$D$。



解： $|T|_{max}=1590\text{Nm}$



1、按强度条件：

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_p}\le[\tau] \qquad W_p=\frac{\pi D^3}{16}\ge\frac{T}{[\tau]}$$

$$D\ge\sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}=58.7\text{mm}$$

2、按刚度条件：

$$\Phi=\frac{T}{GI_p}\times\frac{180^{\circ}}{\pi}\le[\Phi]$$

$$I_p=\frac{\pi D^4}{32}\ge\frac{T\times180^{\circ}}{G\pi[\Phi]} \qquad D\ge\sqrt[4]{\frac{32}{\pi}\times\frac{T\times180^{\circ}}{G\pi[\Phi]}}=61.7\text{mm}$$

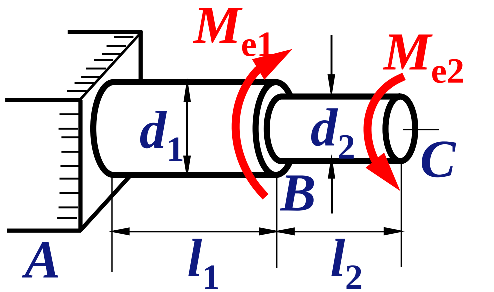
所以 D=62mm

3、讨论：优化设计

解题思路：外力→内力→变形→刚度条件→结果或结论

3-6 圆轴扭转的变形和刚度条件

例3-4 图示一阶梯圆轴，转矩M_{e1}＝1.8kNm，M_{e2}＝0.6kNm， l_1= 750mm，l_2= 500mm，d_1 = 75mm，d_2 = 50mm，G = 80GPa。试求：（1）圆轴的最大切应力；（2）C截面对A截面的相对扭转角；（3）圆轴的最大单位长度扭转角。



解：$T_1=M_{e2}-M_{e1}= -1.2\text{kNm}$　　$T_2=M_{e2}=0.6\text{kNm}$

(1) 计算最大切应力

$$\tau_{\max 1}=\frac{T_1}{W_{p1}}=14.5\,\text{MPa}\qquad \tau_{\max 2}=\frac{T_2}{W_{p2}}=24.4\,\text{MPa}$$

最大切应力$\tau_{\max}$＝24.4 MPa

(2)求扭转角 $$\varphi_{CA}=\varphi_{BA}+\varphi_{CB}=\frac{T_1 l_1}{GI_{p1}}+\frac{T_2 l_2}{GI_{p2}}=-0.0036+0.0061=0.0025\,\text{rad}=0.143^\circ$$

(3)最大单位长度扭转角 $$\Phi_{\max}=\frac{\varphi_{CB}}{l_2}=\frac{0.0061}{0.5}=0.0122\,\text{rad/m}=0.7^\circ/\text{m}$$

基本解题思路

轴向拉压

轴向力$\boldsymbol{F}$ ⟶ 轴力$\boldsymbol{F}_{\mathbf{N}}$ ⟶

- 应力$\sigma = \dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A}$ ⟶ 强度条件 $\sigma_{\max} \le [\sigma] = \dfrac{\sigma^0}{n}$
- 变形 $\Delta l = \dfrac{F_{\mathrm{N}} l}{EA}$

扭转

转矩$\boldsymbol{M}_{\mathbf{e}}$ ⟶ 扭矩$\boldsymbol{T}$ ⟶

- 应力 $\tau = \dfrac{T}{I_{\mathrm{p}}}\rho$ ⟶ 强度条件 $\tau_{\max} = \dfrac{T}{W_{\mathrm{p}}} \le [\tau] = \dfrac{\tau^0}{n}$
- 变形 $\varphi = \dfrac{Tl}{GI_{\mathrm{p}}}$ ⟶ 刚度条件 $\Phi = \dfrac{T}{GI_{\mathrm{p}}} \times \dfrac{180^\circ}{\pi} \le [\Phi]$

$$M_{\mathrm{e}} = 9549\frac{P}{n} \qquad I_{\mathrm{p}} = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right) \qquad W_{\mathrm{p}} = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)$$

今日作业

3-8、3-11

上节课内容回顾

- 外力偶矩M_e和扭矩T 的计算： $$M_e = 9549\frac{P}{n}$$

- 扭转切应力： $$\tau_\rho = \frac{T}{I_p}\rho \qquad I_p = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right)$$

- 扭转角： $$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

- 扭转强度条件和刚度条件：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \le [\tau] \qquad \Phi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \le [\Phi]$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right)$$

第三章 扭转

- 概述
- 外力偶矩、扭矩和扭矩图
- 圆轴扭转的应力
- 圆轴扭转的强度条件
- 圆轴扭转的破坏分析
- 圆轴扭转的变形与刚度条件
- 非圆截面杆和薄壁杆扭转(自学)
- 受扭构件的合理设计(自学)
- 扭转超静定问题(自学)

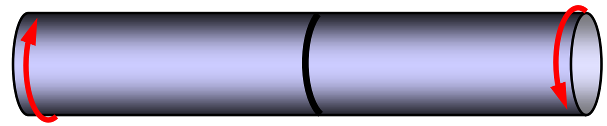
学前问题：

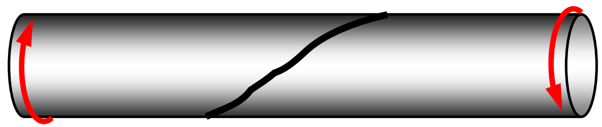
- 扭转如何破坏？
- 矩形截面杆扭转的特点？
- 扭转超静定？

航天航空学院--力学中心

3-5 圆轴扭转破坏分析

一、扭转破坏实验断口

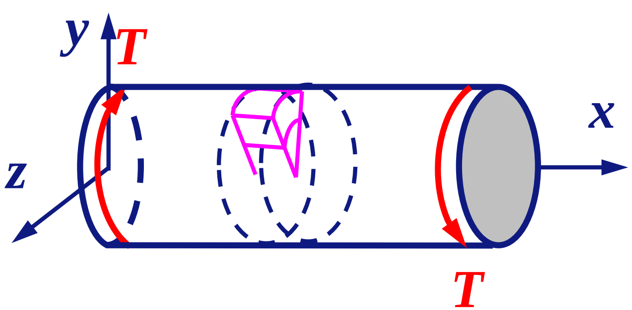
低碳钢  沿横截面

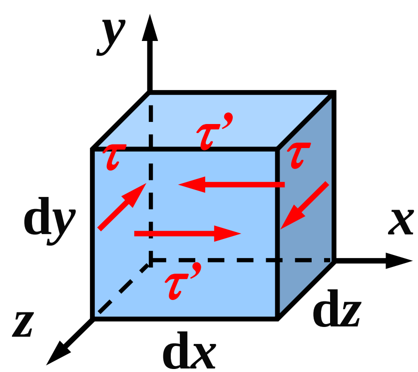
灰铸铁  沿45°螺旋面

竹、木材  沿纤维、木纹方向

二、切应力互等定理

$$(\tau \mathrm{d}z\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = (\tau' \mathrm{d}x\mathrm{d}y)\mathrm{d}z$$



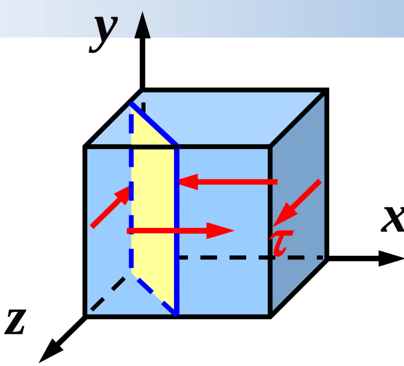


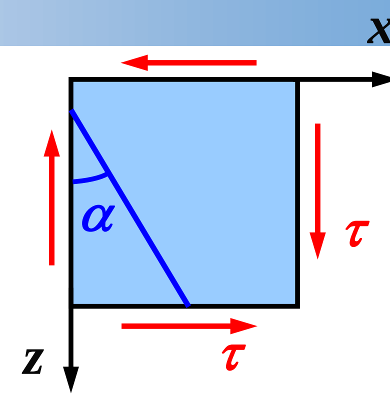
单元体

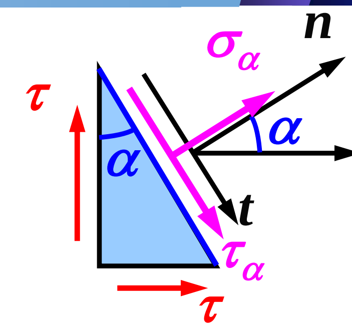
$$\tau = \tau'$$

3-5 圆轴扭转破坏分析

三、斜截面上的应力分析







$\sum F_n = 0 \qquad \sigma_\alpha \mathrm{d}A + \tau \mathrm{d}A \cos\alpha \sin\alpha + \tau \mathrm{d}A \sin\alpha \cos\alpha = 0$

$\sum F_t = 0 \qquad \tau_\alpha \mathrm{d}A - \tau \mathrm{d}A \cos\alpha \cos\alpha + \tau \mathrm{d}A \sin\alpha \sin\alpha = 0$

$\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha$

$\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha$

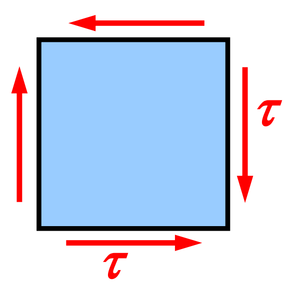
讨论

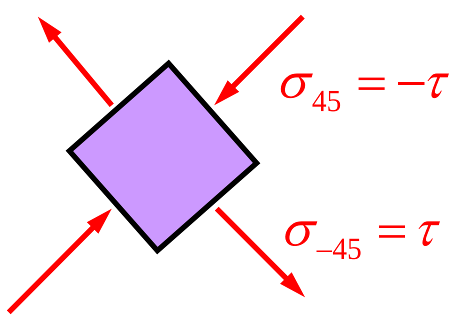
$\alpha = 0^\circ \quad \tau_{0^\circ} = \tau_{\max} = \tau \quad \sigma_{0^\circ} = 0$

$\alpha = 90^\circ \quad \tau_{90^\circ} = \tau_{\min} = -\tau \quad \sigma_{90^\circ} = 0$

$\alpha = -45^\circ \quad \sigma_{-45^\circ} = \sigma_{\max} = \tau \quad \tau_{-45^\circ} = 0$

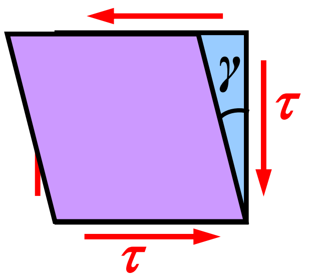
$\alpha = 45^\circ \quad \sigma_{45^\circ} = \sigma_{\min} = -\tau \quad \tau_{45^\circ} = 0$





3-5 圆轴扭转破坏分析

四、剪切胡克定律



$$\tau = G\gamma$$

材料的三个常数

E：弹性模量

G：切变模量

μ：泊松比

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

G：切变模量

γ：切应变（直角的变化量）

切应力的符号规定：截面外法线顺时针转90度后，其方向与切应力方向相同为正，相反为负。

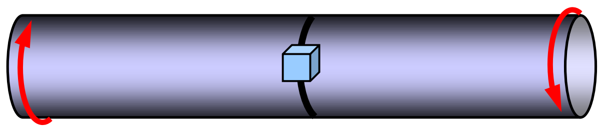
材料名称	G（GPa）
碳钢	78~80
灰铸铁	44~45
球墨铸铁	60~63
铜及铜合金	39~45
铝	25~26

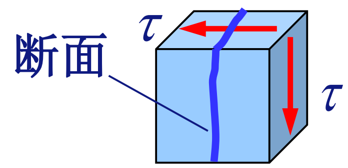
3-5 圆轴扭转破坏分析

五、破坏分析

低碳钢：　抗拉强度=抗压强度＞抗剪强度

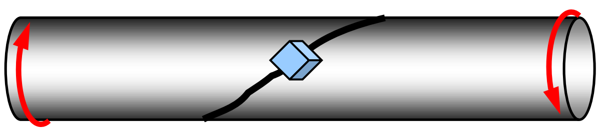
剪切破坏

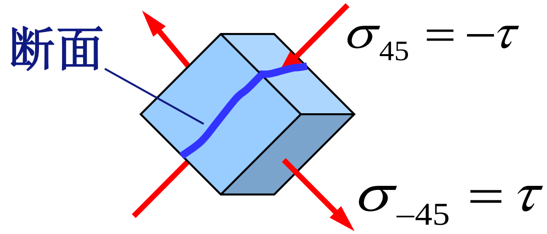




灰铸铁：　抗压强度＞ 抗剪强度＞抗拉强度

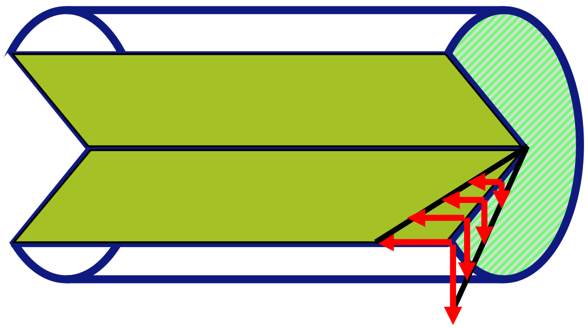
拉伸破坏





竹、木材：　横向抗剪强度＞纵向抗剪强度

纵向剪切破坏



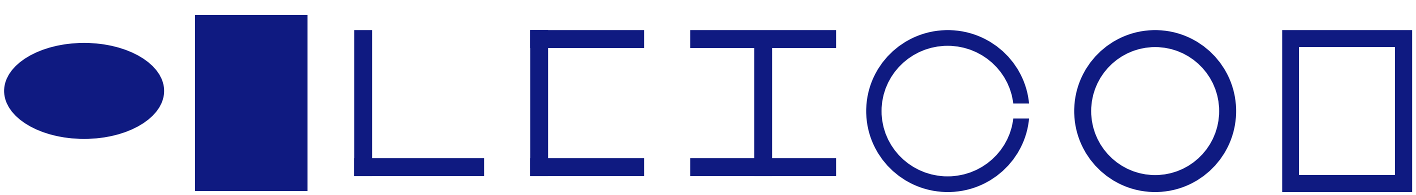
3-7 非圆截面杆和薄壁杆扭转

- 实验和弹性理论分析表明：非圆截面扭转时，横截面不再保持平面，横截面将发生翘曲变形，切应力不再与各点到形心的距离成正比。

- 非圆截面扭转时，端面或其他部位不受任何约束，各横截面可以自由翘曲，且翘曲形状相同，横截面上只有切应力，称为**自由扭转(Free torsion)**。

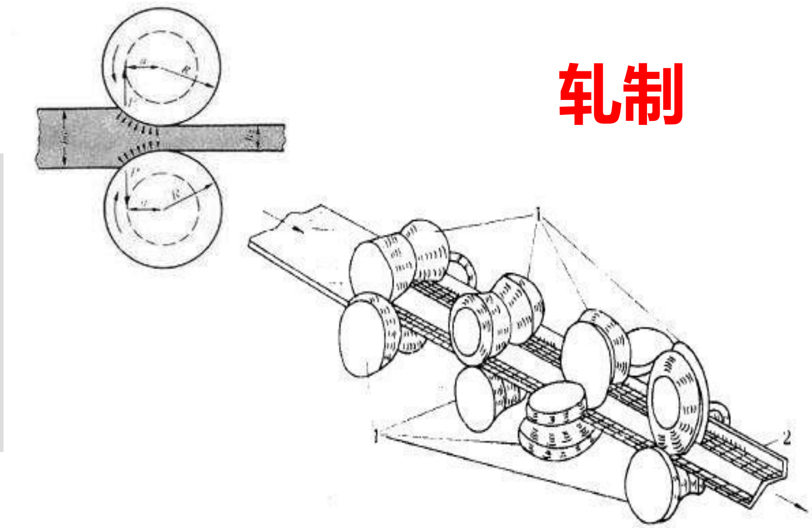
- 非圆截面扭转时，端面或其他部位受约束作用，各横截面不能自由翘曲，翘曲形状将不相同，横截面上将不仅有切应力，还有正应力，称为**约束扭转(Restrictive torsion)**。

- 常见截面类型：椭圆截面、矩形截面、开口薄壁、闭口薄壁。



3-7 非圆截面杆和薄壁杆扭转

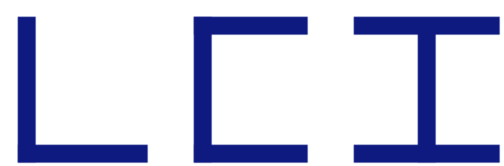
薄壁杆的定义



轧制

- 工程中常用到各种轧制型钢，如工字钢、T型钢或槽钢，或薄壁管状杆件，称之为**薄壁杆**。

- 杆件截面的中线为一条不封闭的折线或曲线，称为**开口薄壁杆**。



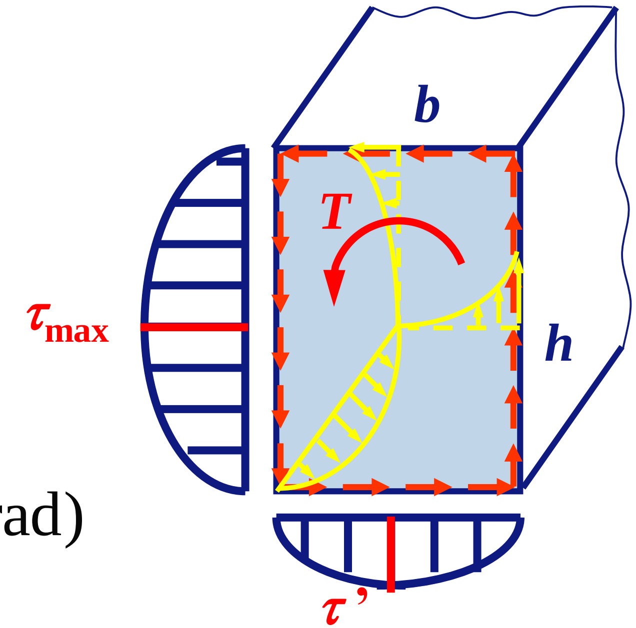
- 杆件截面的中线为一条封闭的折线或曲线，称为**闭口薄壁杆**。

3-7 非圆截面杆和薄壁杆扭转

一、矩形截面杆扭转

周边上的切应力与周边平行，角点上的切应力为零 (由切应力互等定理得) 。

切应力大小沿对称轴、对角线、周边按复杂函数分布，极值点出现在长边和短边中点。



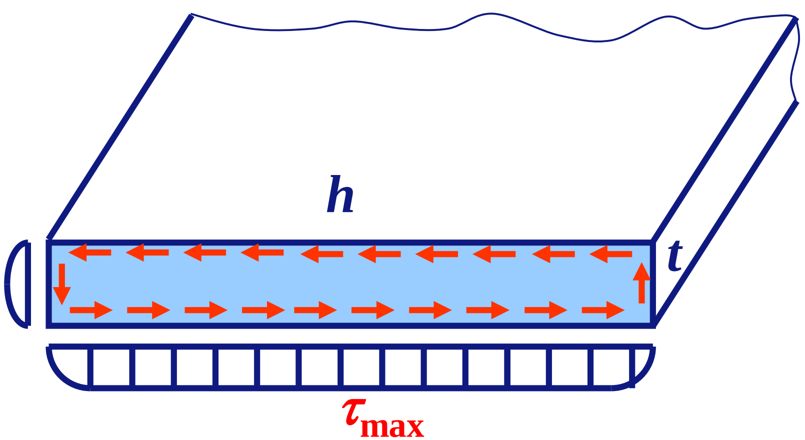
$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha hb^2} \qquad \tau' = \psi\tau_{\max} \qquad \varphi = \frac{Tl}{\beta Ghb^3}\ (\mathrm{rad})$$

α、β、Ψ与h/b有关，通过查表得到。

对于狭长矩形截面：即 $h / t > 10$时

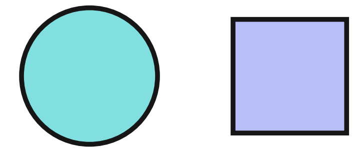
$$\alpha = \beta = 1/3$$

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{ht^2} \qquad \varphi = \frac{3Tl}{Ght^3}\ (\mathrm{rad})$$



3-7 非圆截面杆和薄壁杆扭转

例3-4 材料、截面面积和长度相同的杆，一为圆形截面（直径为d），另一为正方形截面（边长为a）。若两杆受到的扭矩 T 相同，试比较这两根杆的最大切应力和扭转角大小。



解： 两横截面面积相等可得： $a=\sqrt{\pi}d/2$

圆形截面杆： $\tau_{\max}=\dfrac{16T}{\pi d^3}$ ， $\varphi=\dfrac{32Tl}{G\pi d^4}$

正方形截面杆：$\alpha=0.208,\quad \beta=0.141$

$$\tau'_{\max}=\frac{T}{\alpha a^3}=\frac{T}{0.208a^3}\ ,\quad \varphi'=\frac{Tl}{G\beta a^4}=\frac{Tl}{0.141Ga^4}$$

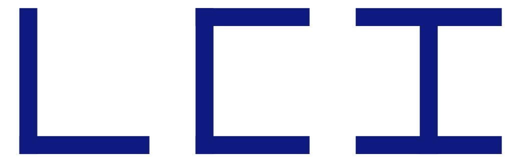
两者之比：

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau'_{\max}}=\frac{16\times0.208}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^3=0.737\qquad \frac{\varphi}{\varphi'}=\frac{32\times0.141}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^4=0.866$$

圆截面杆优于相同截面面积的正方形或矩形截面杆。

3-7 非圆截面杆和薄壁杆扭转

二、开口薄壁杆自由扭转



对于狭长矩形

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{ht^2}$$

$$\varphi = \frac{3Tl}{Ght^3}$$

开口薄壁杆可看成由若干狭长矩形组成，扭转时所有狭长矩形扭转角相同。

几何方程： $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_i = \ldots = \varphi_n = \varphi$

平衡方程： $T_1 + T_2 + \ldots + T_i + \ldots + T_n = T$

物理方程： $\varphi_i = \dfrac{3T_i l}{Gh_i t_i^3} = \varphi \qquad T_i = \varphi \dfrac{Gh_i t_i^3}{3l}$

$$\varphi = \frac{3Tl}{G\sum h_i t_i^3}$$

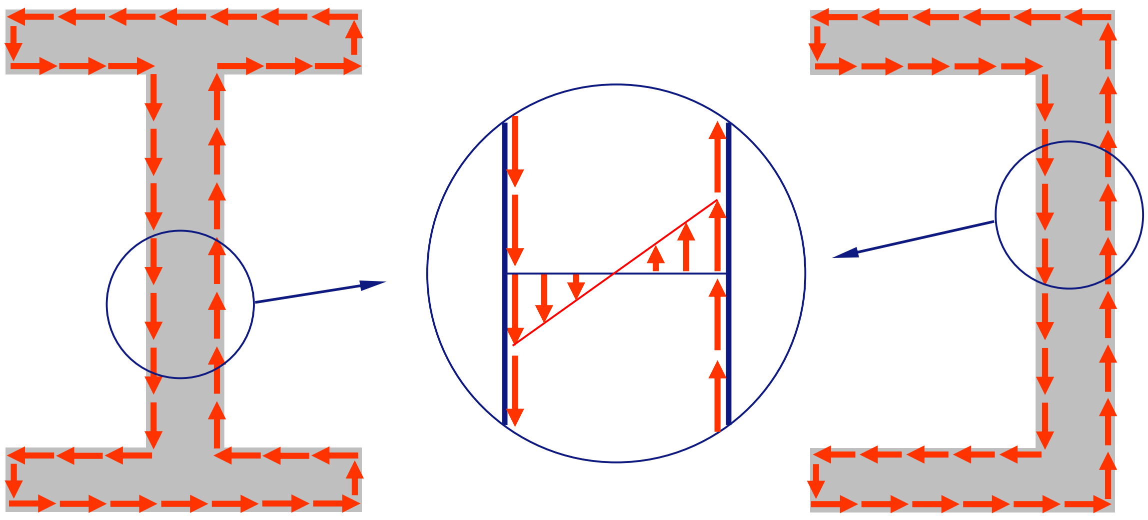
$$T_i = T\frac{h_i t_i^3}{\sum h_i t_i^3}$$

$$\tau_{i\max} = \frac{3T_i}{h_i t_i^2} = \frac{3Tt_i}{\sum h_i t_i^3}$$

特点：壁厚大处，切应力大。

3-7 非圆截面杆和薄壁杆扭转

二、开口薄壁杆自由扭转



沿截面的边缘，切应力与边界平行，形成顺流。
在同一厚度的两边，切应力大小相等，方向相反。

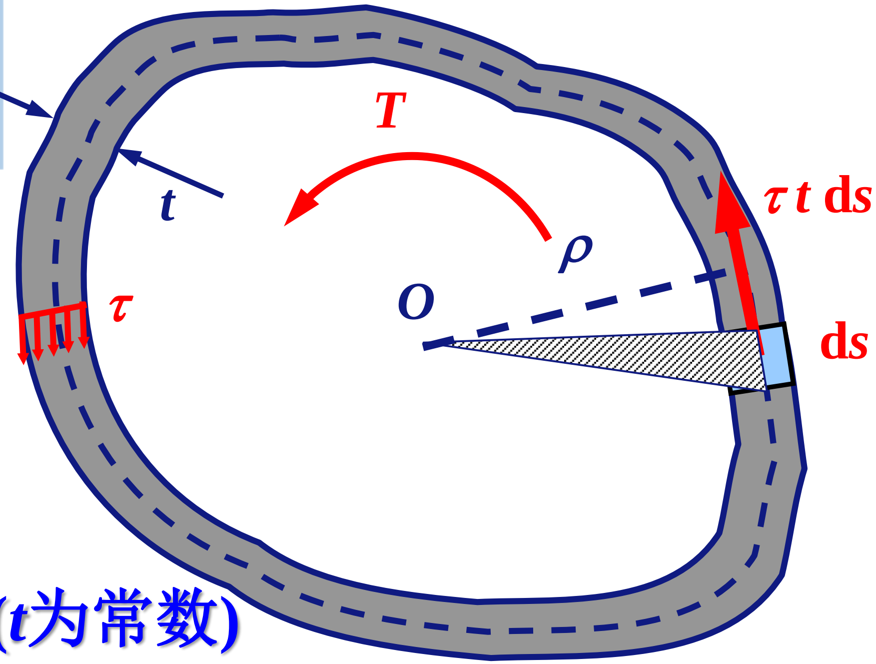
3-7 非圆截面杆和薄壁杆扭转

三、闭口薄壁杆自由扭转

假设：闭口薄壁杆横截面切应力沿壁厚均匀分布，其方向平行于该处中线的切线。

$\tau t = c$

（剪力流常数）



$$\mathrm{d}T = \tau t \mathrm{d}s \cdot \rho$$

$$T = \int_s \tau t \rho \mathrm{d}s = \tau t \int_s \rho \mathrm{d}s = 2A_0 \tau t$$

其中：A_0为中线围成的面积

$$\tau = T / 2A_0 t \qquad \varphi = Tsl / 4GA_0^2 t$$ （t为常数）

其中：l 为杆长，s 为中线周长

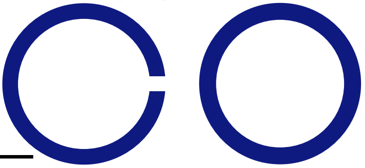
特点：壁厚小处，切应力大。

薄壁圆管扭转

$$\tau = \frac{T}{2A_0 t} = \frac{2T}{\pi D^2 t}$$

3-7 非圆截面杆和薄壁杆扭转

例3-5 两受扭薄壁杆，一为开口圆环，一为闭口圆环。两杆材料相同，尺寸相同，平均直径 D = 40 mm，壁厚 t =2 mm。当两杆受到的扭矩 T 相同时，试求两者最大切应力之比及相对扭转角之比。



解:

开口圆环：$\tau_{\max}=\dfrac{T}{\frac{1}{3}hb^2}=\dfrac{T}{\frac{1}{3}\pi Dt^2}$ $\qquad \varphi=\dfrac{Tl}{G\frac{1}{3}hb^3}=\dfrac{Tl}{G\frac{1}{3}\pi Dt^3}$

闭口圆环：$\tau'_{\max}=\dfrac{T}{2At}=\dfrac{T}{2\times\frac{1}{4}\pi D^2t}$ $\qquad \varphi'=\dfrac{Tsl}{4GA^2t}=\dfrac{T\pi Dl}{4G\left(\frac{1}{4}\pi D^2\right)^2t}=\dfrac{4Tl}{G\pi D^3t}$

两者之比：

$$\tau_{\max}:\tau'_{\max}=\frac{3D}{2t}=30 \qquad \varphi:\varphi'=\frac{3D^2}{4t^2}=300$$

受扭时，闭口薄壁杆优于开口薄壁杆

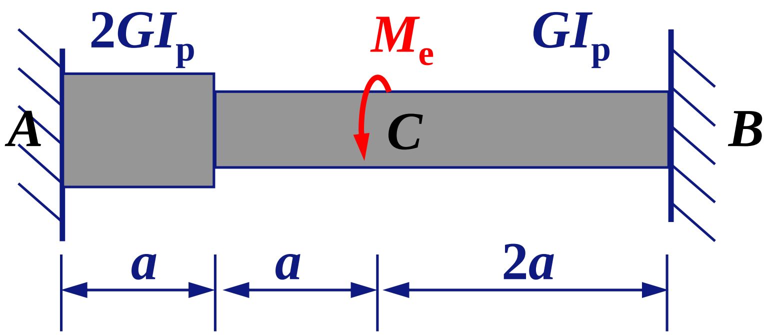
3-8 受扭杆件的合理设计

- 前提：经济、安全
- 目的：节省材料、提高强度和刚度
- 途径： $\tau_{\max}=\dfrac{T}{W_{\mathrm{p}}}$ $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\dfrac{T}{GI_{\mathrm{p}}}$
- 措施：
  1、合理选择截面形状
  - 空心截面较实心截面好
  - 不宜过薄，体型增大，会发生皱折现象
  - 圆形较其他形状好
  - 闭口截面较开口截面好

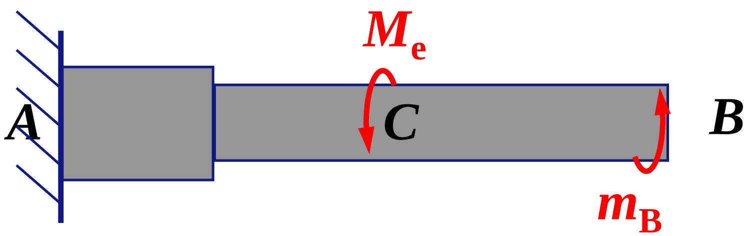
  2、合理选择材料
  - 不宜选取抗拉强度和抗压强度不等的材料
  - 不宜选取抗剪强度横向和纵向不等的材料
  - 剪切弹性模量*G*大的材料，刚度好

3-9 扭转超静定问题

例3-6 两端固定的阶梯圆截面杆，在C处受一力偶M_e，求支反力偶。



解： 解除B端约束，以m_B代替



平衡条件：$T_{BC}=-m_B \quad T_{CA}=M_e-m_B$

变形条件：$$\varphi_{BA}=\varphi_{BC}+\varphi_{CA}=0$$

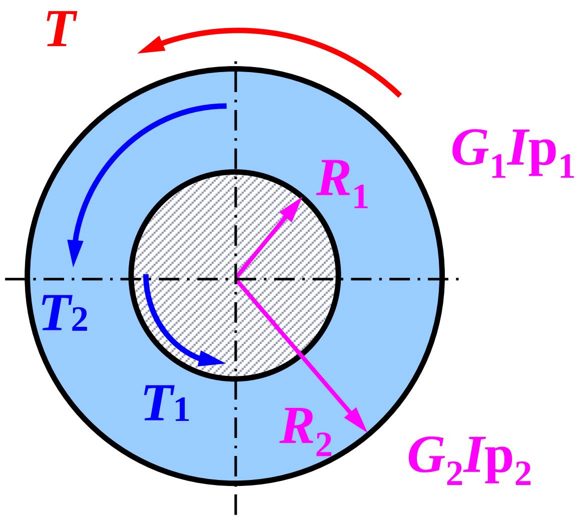
物理条件：$$\varphi_{BC}=\frac{T_{BC}2a}{GI_p} \qquad \varphi_{CA}=\frac{T_{CA}a}{GI_P}+\frac{T_{CA}a}{2GI_P}$$

将物理条件代入变形条件，并与平衡条件联立求解。

$$m_A=\frac{4}{7}M_e \quad m_B=\frac{3}{7}M_e$$

3-9 扭转超静定问题

例3-7 由实心杆 1 和空心杆 2 组成的组合轴，受扭矩 T 作用，两轴之间无相对滑动，求各点切应力。



解：设实心杆和空心杆承担的扭矩分别为T_1、T_2。

平衡方程 $T_1+T_2=T$

几何方程 $\Phi_1=\Phi_2$

物理方程 $\Phi_1=\dfrac{T_1}{G_1I_{p1}}$ $\Phi_2=\dfrac{T_2}{G_2I_{p2}}$

联立求解

$$T_1=\frac{G_1I_{p1}}{G_1I_{p1}+G_2I_{p2}}T \quad T_2=\frac{G_2I_{p2}}{G_1I_{p1}+G_2I_{p2}}T$$

$$\boxed{\tau=\frac{T}{I_p}\rho}$$

$$\tau_1=\frac{TG_1\rho}{G_1I_{p1}+G_2I_{p2}} \quad (0\le\rho\le R_1)$$

$$\tau_2=\frac{TG_2\rho}{G_1I_{p1}+G_2I_{p2}} \quad (R_1\le\rho\le R_2)$$

3-9 扭转超静定问题

讨论：界面上的切应力 $(\rho = R_1)$

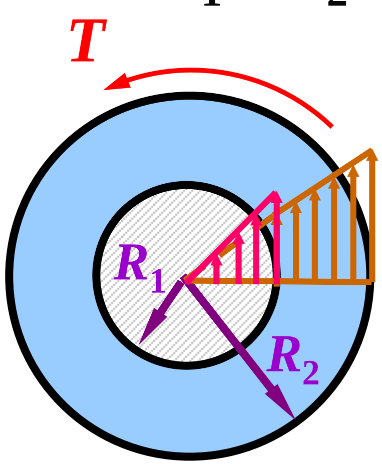
$$\tau_1(R_1) = \tau_{1\max} = \frac{G_1 R_1 T}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}}$$

$$\tau_2(R_1) = \tau_{2\min} = \frac{G_2 R_1 T}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}}$$

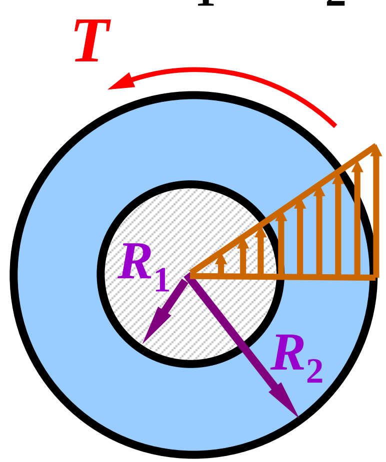
$$\frac{\tau_1(R_1)}{\tau_2(R_1)} = \frac{G_1}{G_2}$$

切应力分布情况：

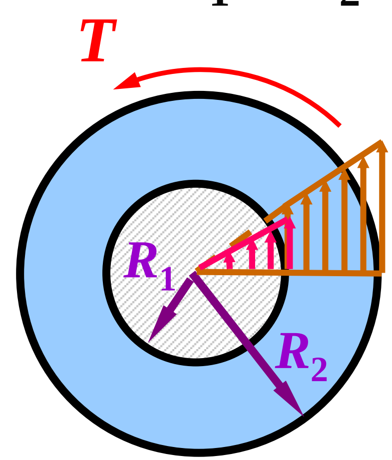
（1）$G_1 > G_2$



（2）$G_1 = G_2$



（3）$G_1 < G_2$



第三章的基本要求

1．掌握根据轴的传递功率和转速计算外力偶矩；

2．掌握扭转时内力（即扭矩）的计算以及扭矩图的画法；

3．了解圆轴扭转时横截面上切应力的推导过程，掌握切应力的计算方法；

4．掌握圆轴扭转时扭转角的计算方法；

5．熟练掌握圆轴扭转时强度条件和刚度条件的建立，并利用强度条件和刚度条件进行安全校核和设计。

6．了解不同材料圆轴扭转的破坏分析，明确纯剪切应力状态的概念，掌握切应力互等定理；

7．了解非圆截面杆扭转时的应力和变形；

8．掌握扭转超静定问题的计算方法。