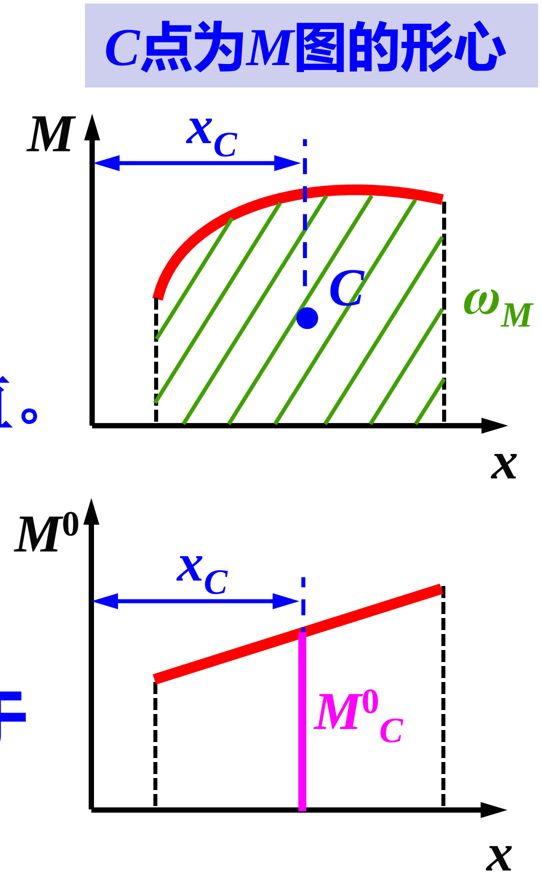
上节课内容回顾

图形互乘法

$$\Delta = \frac{\omega_M}{EI} M_C^0$$

ω_M为$M(x)$图的面积；

M_C^0为$M(x)$图形心C对应的$M^0(x)$图纵坐标值。



功的互等定理

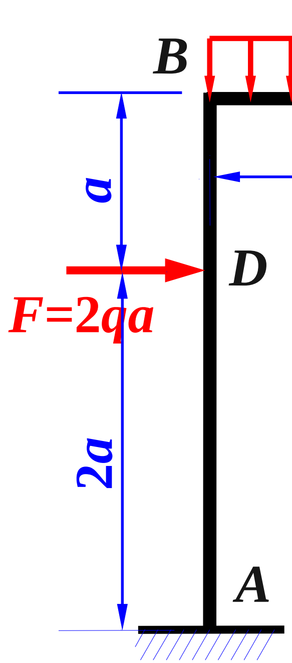
$$F_1\Delta_{12}=F_2\Delta_{21}$$

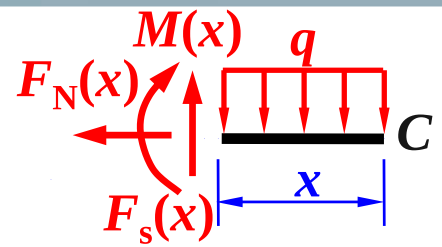
F_1在由于F_2引起的位移Δ_{12}上所作的功，等于F_2在由于F_1引起的位移Δ_{21}上所作的功。

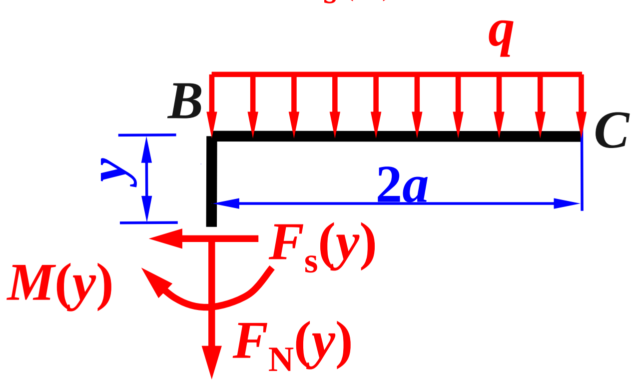
位移互等定理

$$\Delta_{12}=\Delta_{21}$$

刚架如何作内力图?







例：作内力图。

解：分段求解

> M：凹面向外为正；
> F_s：外法线顺时针90度为正；
> F_N：外法线方向为正。

CB段： $F_N(x)=0$ $\quad F_s(x)=qx$

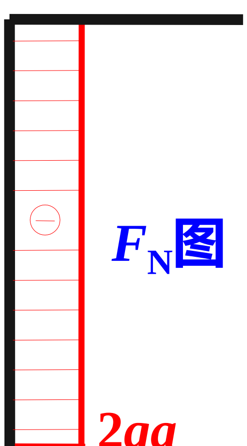
$$M(x)=-\frac{qx^2}{2} \quad (0\le x\le 2a)$$

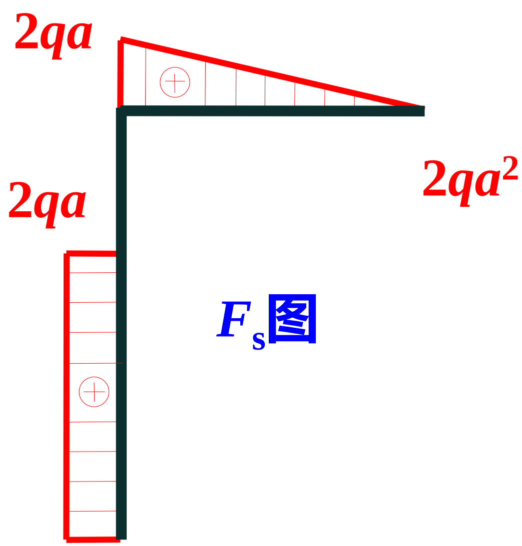
BD段： $F_N(y)=-2qa$ $\quad F_s(y)=0$

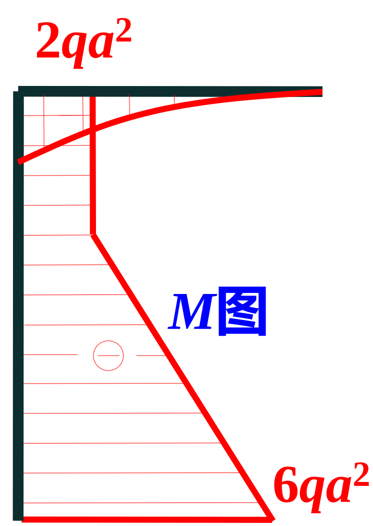
$$M(y)=-2qa^2 \quad (0\le y\le a)$$

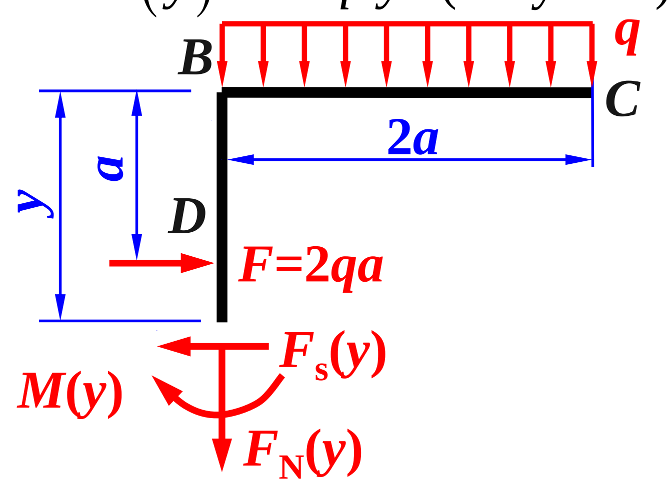
DA段： $F_N(y)=-2qa$ $\quad F_s(y)=2qa$

$$M(y)=-2qay \quad (a\le y\le 3a)$$









第十一章 超静定系统

- 静定基与相当系统
- 力法正则方程
- 结构的对称性及其利用

学前问题：

- 静定基与相当系统?
- 力法正则方程?
- 如何求解超静定?

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

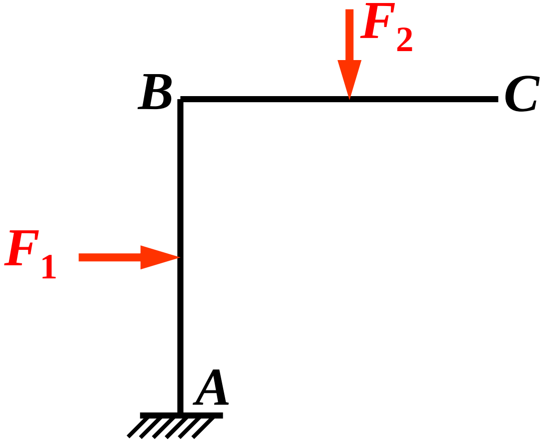
11-1 静定基与相当系统

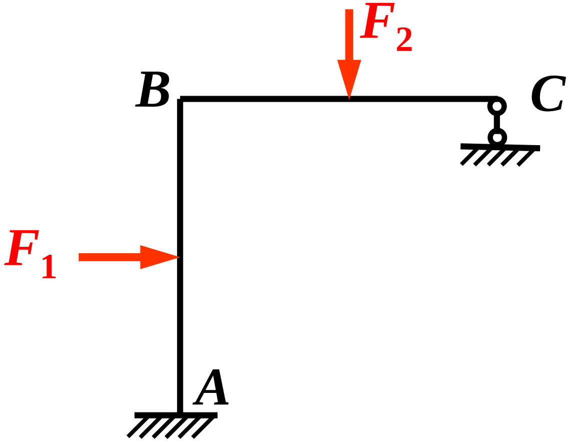
拉压、扭转、弯曲超静定问题前面已经讨论，本章将讨论较为复杂的超静定问题，如桁架、刚架、曲杆等，多为组合变形或多杆系。

一、基本概念

静定结构：几何不变，没有多余约束的结构，其约束反力及内力可用静力学平衡方程直接求得；

超静定结构：具有多余约束的结构，或其内力不能直接用静力学平衡方程求得。

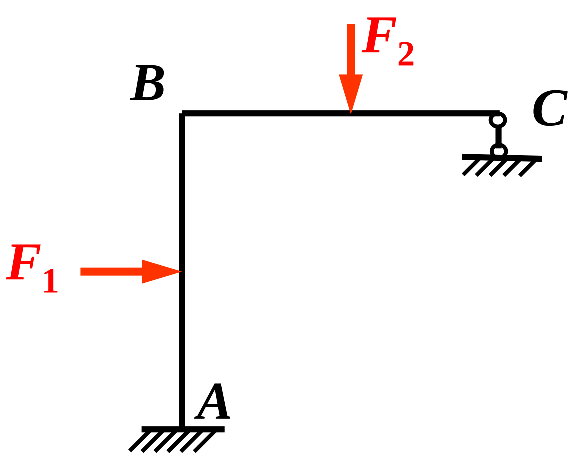


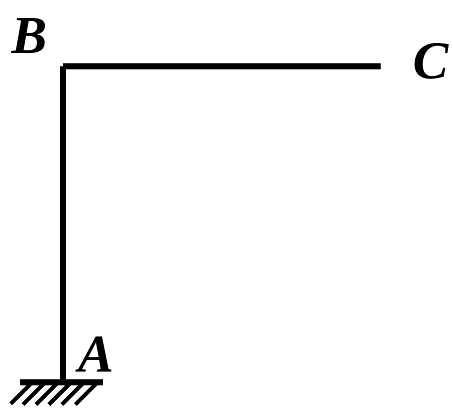


11-1 静定基与相当系统

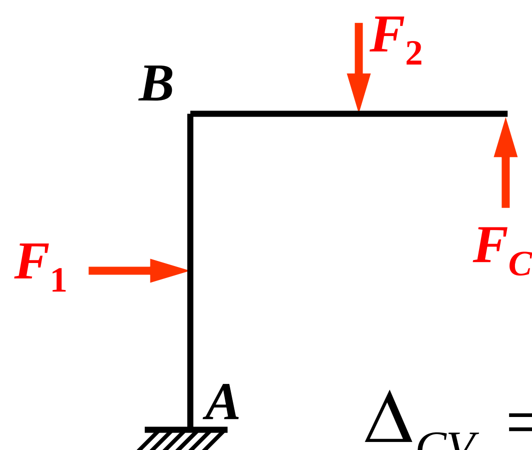
静定基：解除多余约束后，得到的静定基本系统；

相当系统：在静定基上施加原载荷和多余约束力（未知），考虑变形协调条件，得到与原超静定结构完全等效的静定系统。





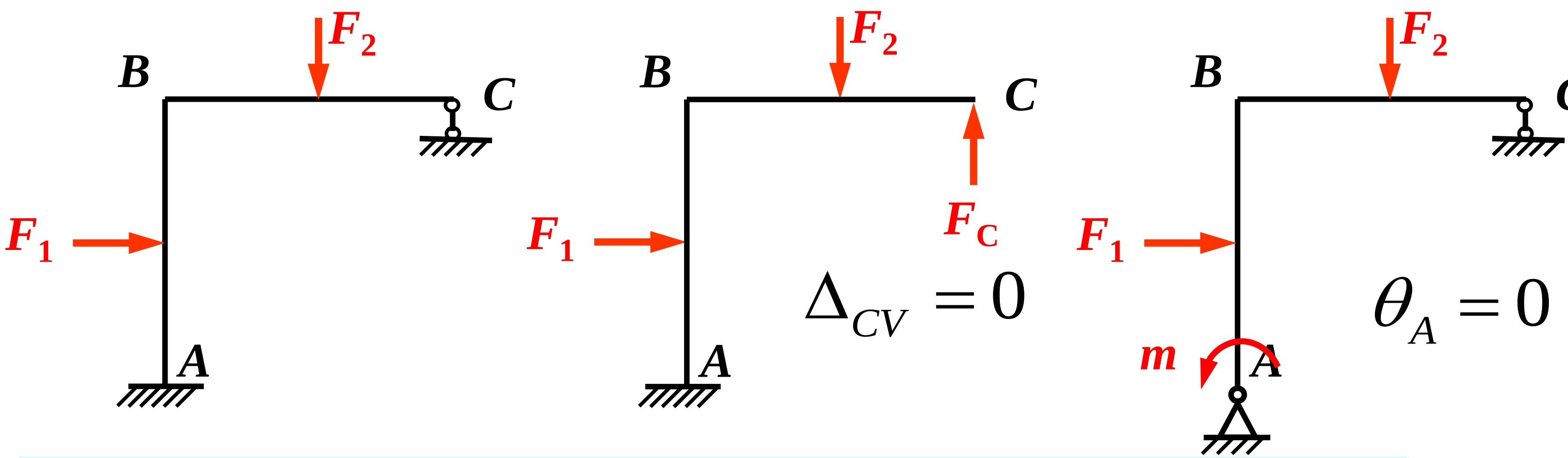
静定基



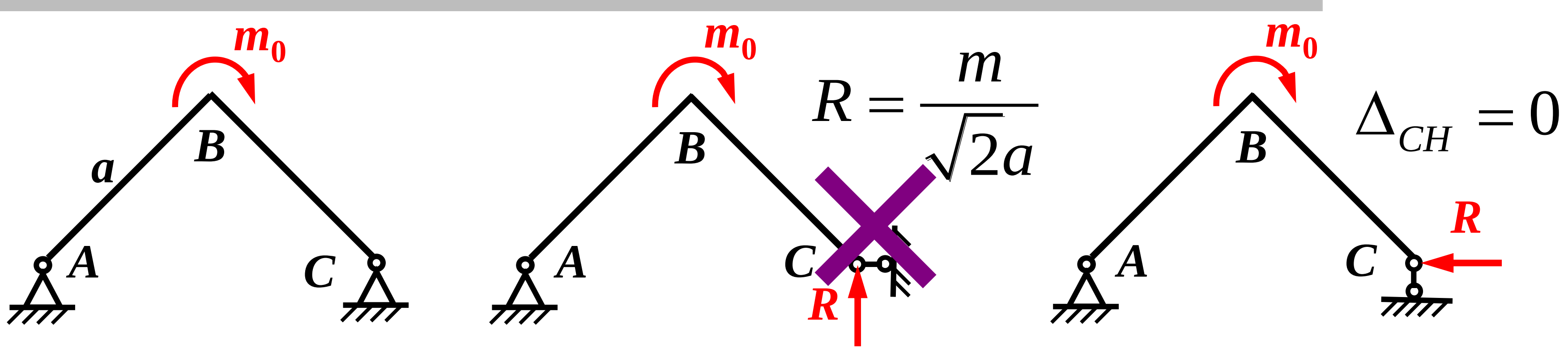
$$\Delta_{CV}=0$$

相当系统

性质一：静定基不是唯一的！



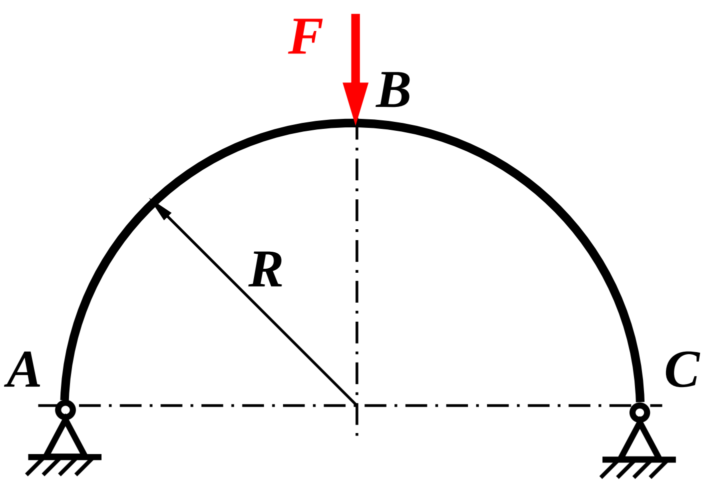
性质二：静定基解除的约束必须是多余的。

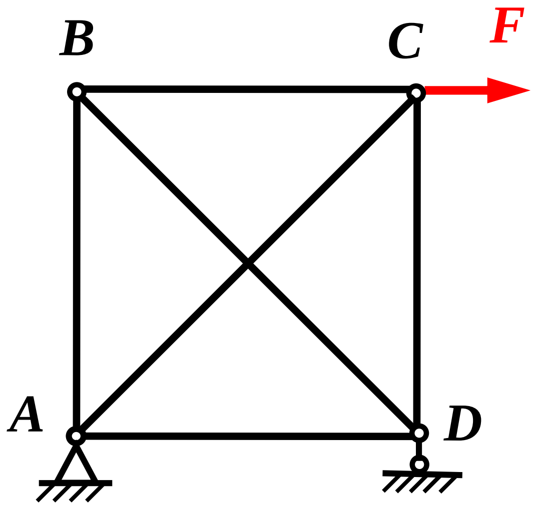


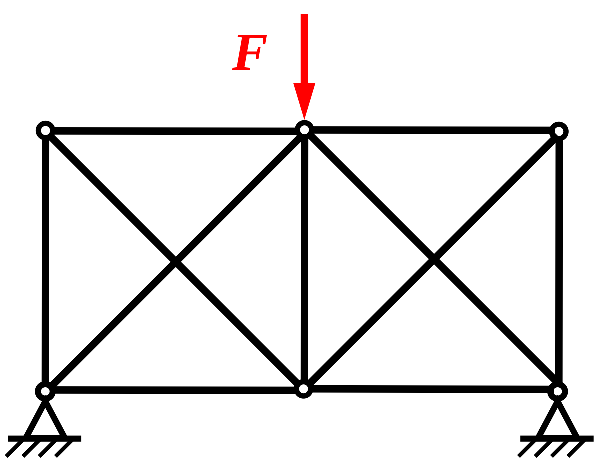
11-1 静定基与相当系统

超静定系统分成三大类：

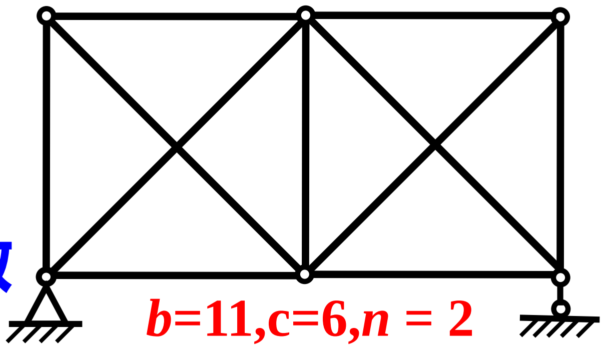
- 外力超静定
- 内力超静定
- 混合超静定





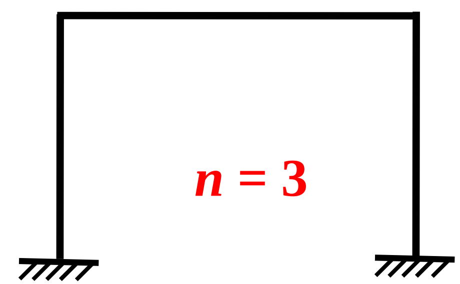


二、超静定次数的判断



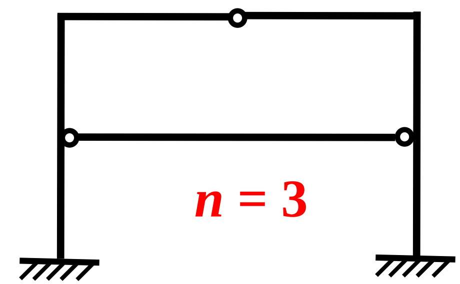
超静定次数：未知力的个数 - 独立平衡方程数

1、外力超静定：约束力个数 - 独立平衡方程数



2、内力超静定：

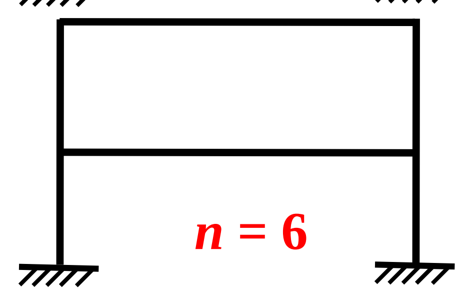
桁架 (b 个杆，c 个节点)：$n = b - 2c + 3$



刚架：一个封闭刚架为三次超静定；

增加一个铰接杆，增加一次超静定；

增加一个铰链，减少一次超静定。



3、混合超静定：两者之和

11-1　静定基与相当系统

一般解题步骤：

1、判断超静定类型，超静定次数；

2、解除多余约束，代之以未知的约束力，建立相当系统；

3、建立变形协调条件（在解除约束处）；

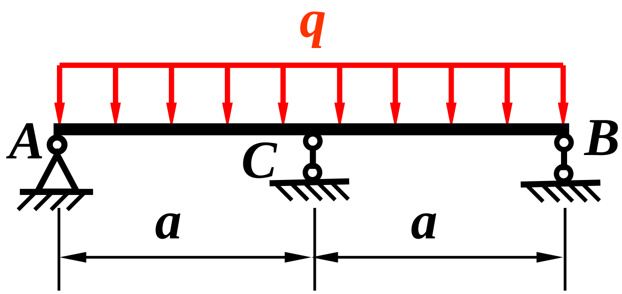
4、求解变形（传统方法或能量法）；

5、求出多余约束力；

6、求出其他约束或内力，进而可以作内力图，求解相当系统的强度和刚度问题。

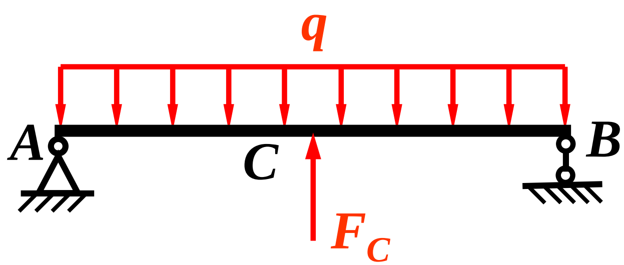
11-1　静定基与相当系统

例11-1　求图示超静定梁的支反力 (EI为常数)。



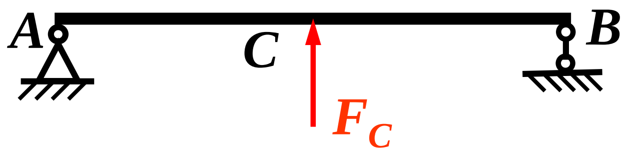
解：　解除多余约束，施加多余约束力 F_C

变形协调方程为　$\Delta_C = \Delta_C^{F_C} + \Delta_C^{q} = 0$

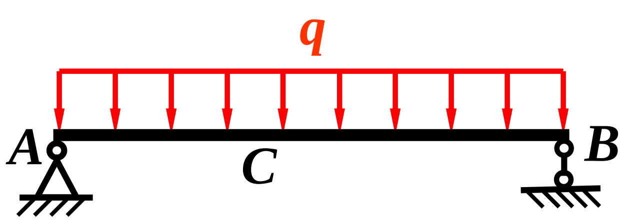


利用**查表叠加法**

$$\Delta_C^{F_C} = \frac{F_C(2a)^3}{48EI} = \frac{F_C a^3}{6EI}$$



$$\Delta_C^{q} = -\frac{5q(2a)^4}{384EI} = -\frac{5qa^4}{24EI}$$

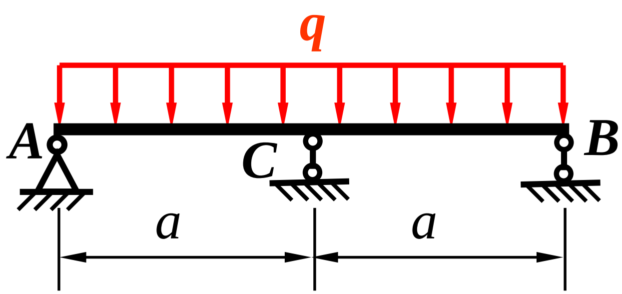


代入上式，解得：　$F_C = \dfrac{5}{4}qa$

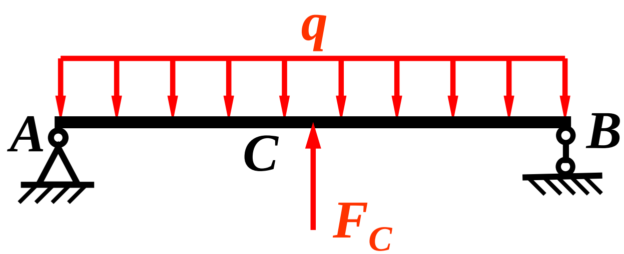
其余支反力：　$F_A = F_B = \dfrac{3}{8}qa$

11-1 静定基与相当系统

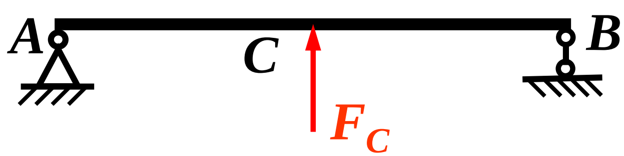
例11-1 求图示超静定梁的支反力 (EI为常数)。



解法二: 解除多余约束，施加多余约束力 F_C



变形协调方程为 $\Delta_C = \Delta_C{}^{F_C} + \Delta_C{}^{q} = 0$

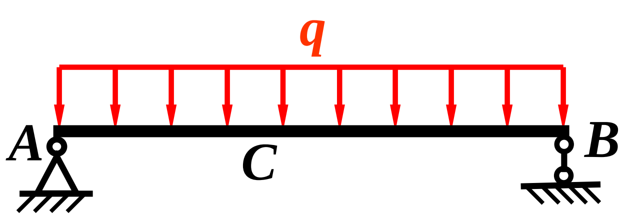


利用**单位载荷法**

$$M^{F_C} = -F_C x/2$$

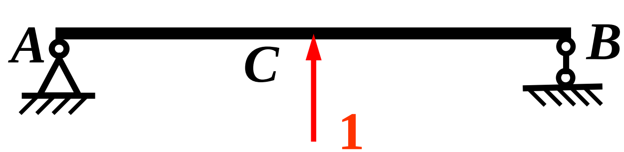
$$M^{q} = qax - qx^2/2$$

$$M^{0} = -x/2$$



$$\Delta_C{}^{F_C} = 2\int_0^a \frac{M^{F_C} M^0}{EI}\mathrm{d}x = \frac{F_C a^3}{6EI}$$

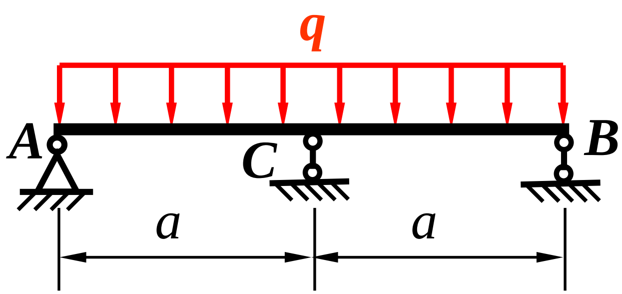
$$\Delta_C{}^{q} = 2\int_0^a \frac{M^{q} M^0}{EI}\mathrm{d}x = -\frac{5qa^4}{24EI}$$



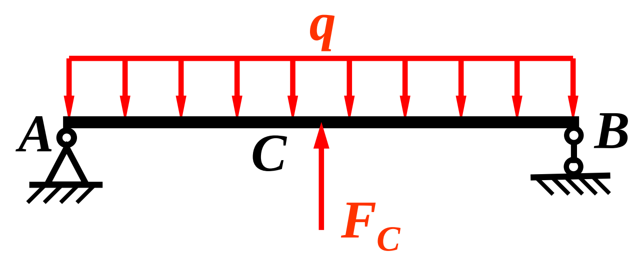
$$F_C = \frac{5}{4}qa \qquad F_A = F_B = \frac{3}{8}qa$$

11-1 静定基与相当系统

例11-1 求图示超静定梁的支反力 (EI为常数)。



解法三： 解除多余约束，施加多余约束力 F_C



变形协调方程为 $\Delta_C = \Delta_C^{F_C} + \Delta_C^{q} = 0$

利用**图形互乘法**

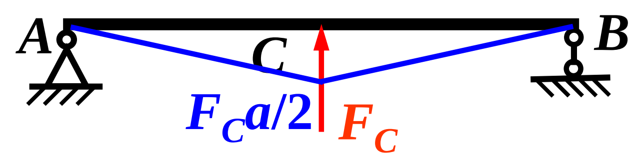
$$\Delta_C^{F_C} = 2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{F_C a}{2}\times a\right)\times\frac{a}{3} = \frac{F_C a^3}{6EI}$$

$$\Delta_C^{q} = 2\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{ql^2}{2}\times a\right)\times\left(-\frac{5a}{16}\right)$$

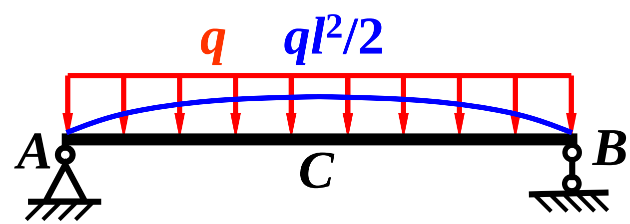
$$= -\frac{5qa^4}{24EI}$$

$$F_C = \frac{5}{4}qa \qquad F_A = F_B = \frac{3}{8}qa$$

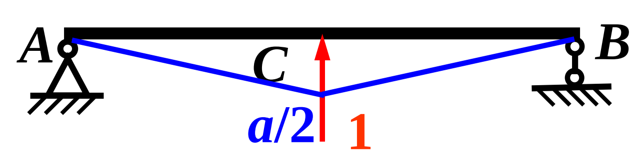
M_{FC} 图



M_q 图

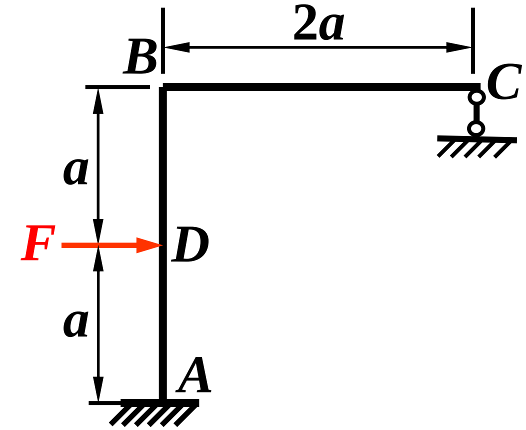


M^0 图



11-1 静定基与相当系统

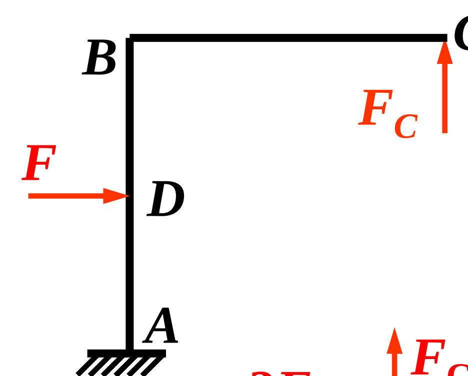
例11-2 画出图示等截面刚架弯矩图（EI 为常数）。



解： 解除多余约束，建立相当系统

变形协调方程为 $\Delta_C = 0$

采用**逐段刚化法**

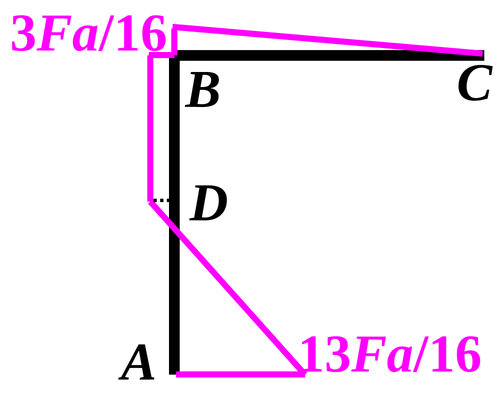


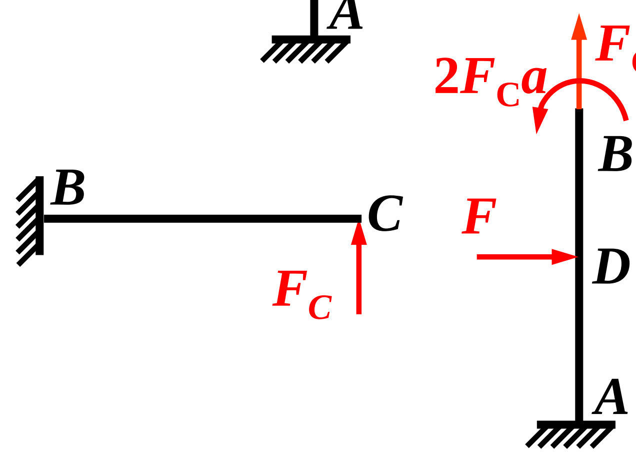
$$\Delta_C^{\ 1} = \frac{F_C(2a)^3}{3EI} = \frac{8F_Ca^3}{3EI}$$

$$\Delta_C^{\ 2} = [\frac{(2F_Ca)(2a)}{EI} - \frac{Fa^2}{2EI}]\cdot 2a = \frac{8F_Ca^3}{EI} - \frac{Fa^3}{EI}$$

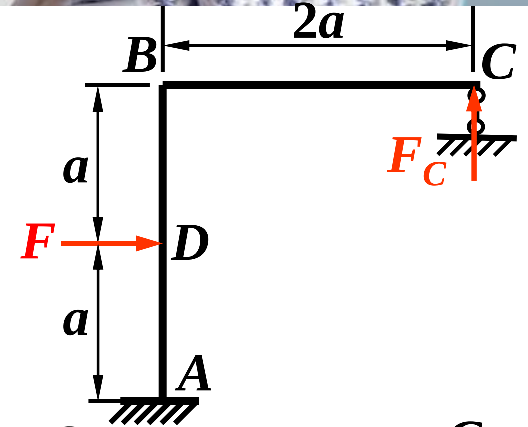
$$\Delta_C = \Delta_C^{\ 1} + \Delta_C^{\ 2} = 0$$

$$\boxed{F_C = \frac{3}{32}F}$$





例11-2 画出图示等截面刚架弯矩图（EI 为常数）。



解法二：解除多余约束，建立相当系统

变形协调方程为 $\Delta_C = \Delta_C^F + \Delta_C^{F_C} = 0$

采用**单位载荷法**

$CB: M^F = 0 \qquad M^{F_C} = F_C x \qquad M^0 = x$

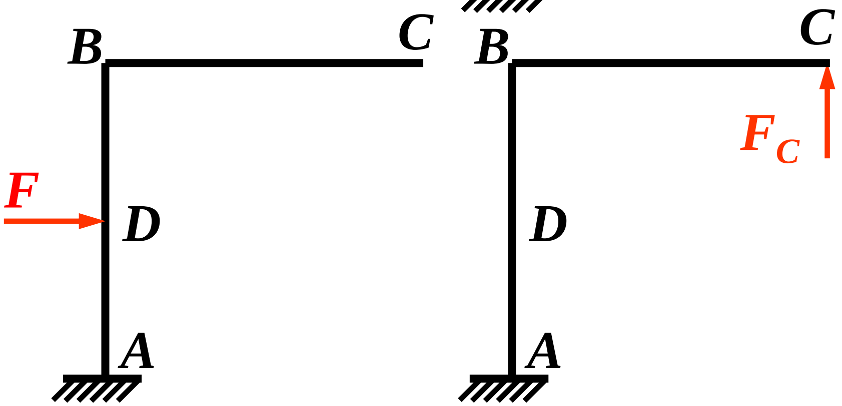
$BD: M^F = 0 \qquad M^{F_C} = 2F_C a \qquad M^0 = 2a$

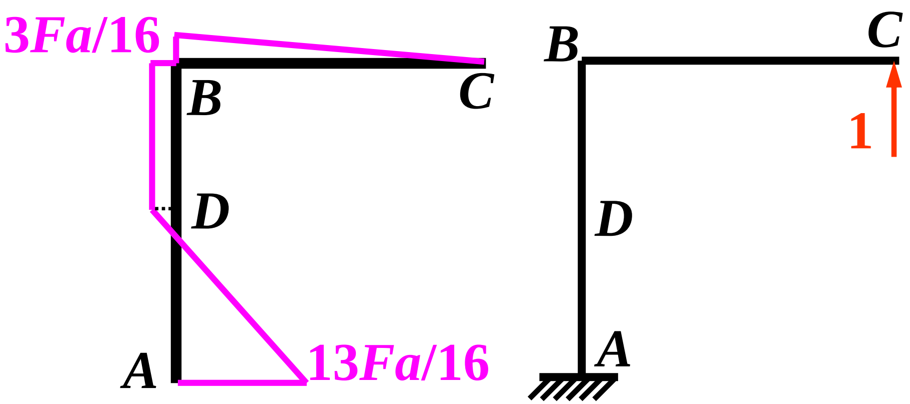
$DA: M^F = -Fx \qquad M^{F_C} = 2F_C a \qquad M^0 = 2a$

$$\Delta_C = \int_l \frac{M^F M^0}{EI}\mathrm{d}x + \int_l \frac{M^{F_C} M^0}{EI}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{Fa^3}{EI} + \frac{32F_C a^3}{3EI}$$

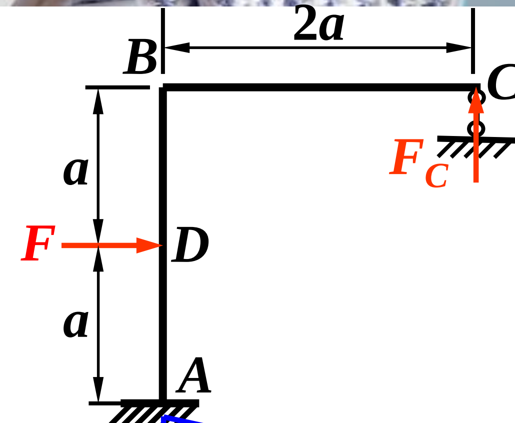
$$\boxed{F_C = \frac{3}{32}F}$$





例11-2 画出图示等截面刚架弯矩图（EI 为常数）。

解法三： 解除多余约束，建立相当系统

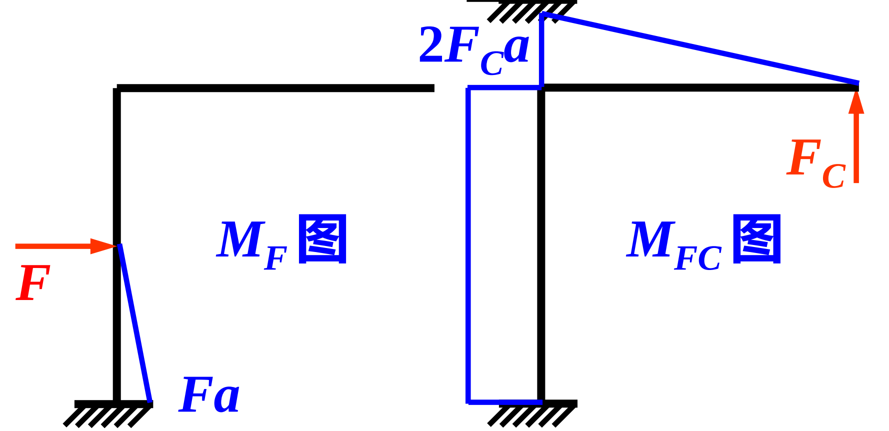


变形协调方程为 $\Delta_C = \Delta_C^F + \Delta_C^{F_C} = 0$

采用**图形互乘法**

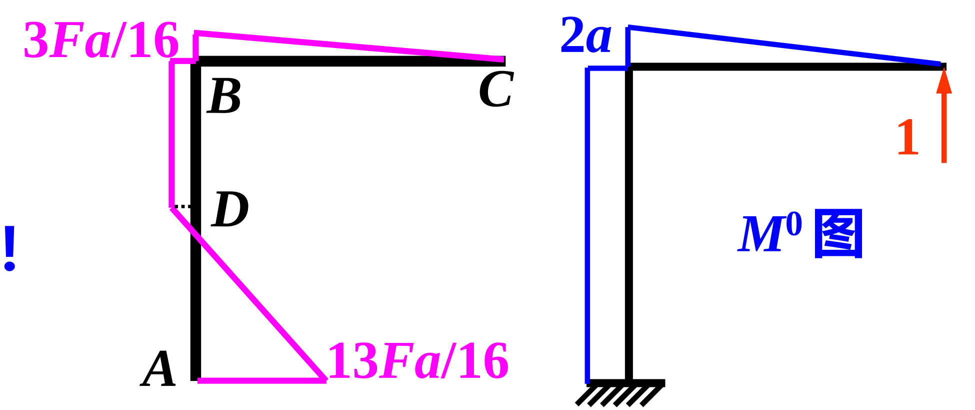
$$\Delta_C^F = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}\times Fa\times a\right)\times 2a = -\frac{Fa^3}{EI}$$

$$\Delta_C^{FC} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times 2F_C a\times 2a\right)\times\frac{4a}{3} + \frac{1}{EI}(2F_C a\times 2a)\times 2a = \frac{32F_C a^3}{3EI}$$



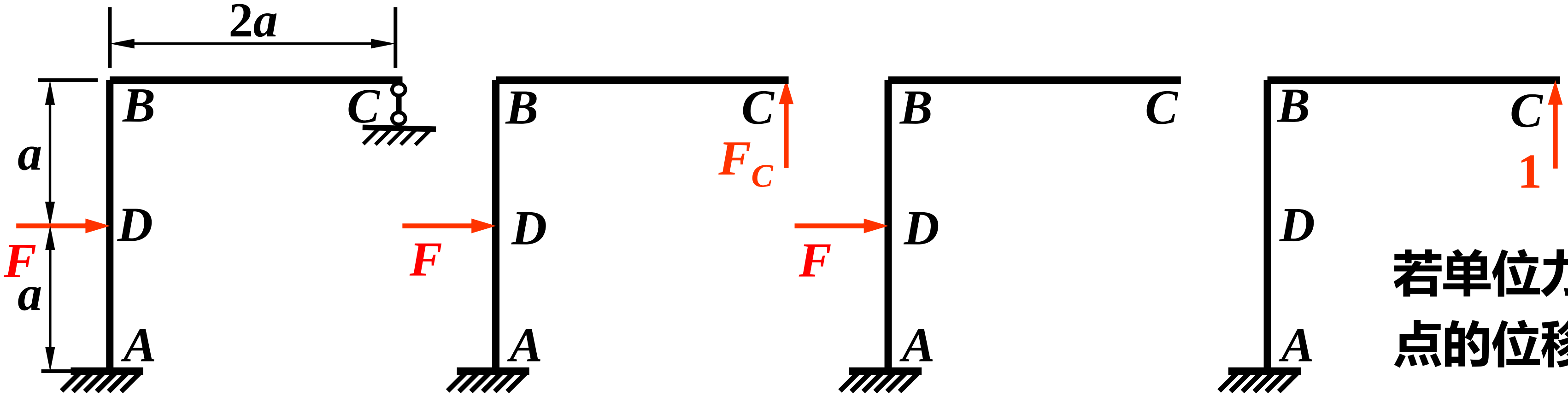
$$\boxed{F_C = \frac{3}{32}F}$$

图形互乘法最快捷！



11-2 力法正则方程

- 以多余约束力作为未知量，通过变形协调条件建立补充方程，求解超静定问题的方法，称为力法(Force Method)。
- 上述例题看出，变形协调条件各异，不利于复杂超静定问题的求解。是否有统一的方法或形式？ 可引入单位载荷！



若单位力下C点的位移为δ_C

变形协调方程为 $\Delta_C^F + \Delta_C^{F_C} = 0 \Longrightarrow \Delta_C^F + F_C\delta_C = 0$

$$\Longrightarrow F_C = -\frac{\Delta_C^F}{\delta_C}$$

那么，对于高阶超静定问题呢？

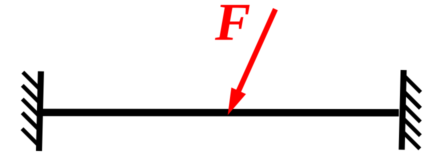
11-2　力法正则方程

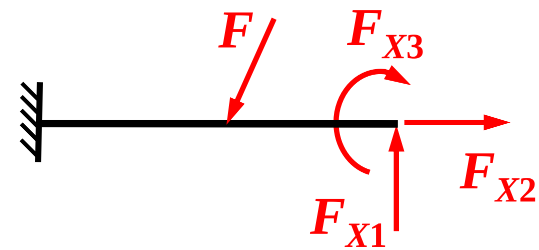
利用叠加法，得变形协调条件为：

$$\Delta_1=\Delta_{1F_{X1}}+\Delta_{1F_{X2}}+\Delta_{1F_{X3}}+\Delta_{1F}=0$$

$$\Delta_2=\Delta_{2F_{X1}}+\Delta_{2F_{X2}}+\Delta_{2F_{X3}}+\Delta_{2F}=0$$

$$\Delta_3=\Delta_{3F_{X1}}+\Delta_{3F_{X2}}+\Delta_{3F_{X3}}+\Delta_{3F}=0$$



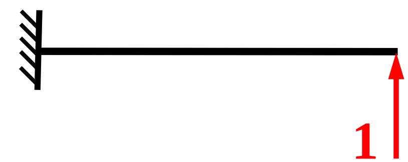


设在三个广义单位力的单独作用下，沿着F_{X1}方向的广义位移分别为δ_{11}、δ_{12}和δ_{13}，则有：

$$\Delta_{1F_{X1}}=\delta_{11}F_{X1}$$

$$\Delta_{1F_{X2}}=\delta_{12}F_{X2}$$

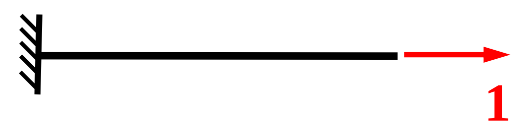
$$\Delta_{1F_{X3}}=\delta_{13}F_{X3}$$



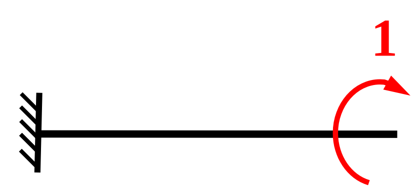
$$\Delta_1=\delta_{11}F_{X1}+\delta_{12}F_{X2}+\delta_{13}F_{X3}+\Delta_{1F}=0$$

$$\Delta_2=\delta_{21}F_{X1}+\delta_{22}F_{X2}+\delta_{23}F_{X3}+\Delta_{2F}=0$$

$$\Delta_3=\delta_{31}F_{X1}+\delta_{32}F_{X2}+\delta_{33}F_{X3}+\Delta_{3F}=0$$



注意：δ_{ij}的第一个下标i是发生广义位移的方向，第二个下标j是使之发生位移的广义单位力。



11-2 力法正则方程

若是 n 次超静定问题：

$$\begin{Bmatrix}\Delta_1\\\Delta_2\\\vdots\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\cdots\\\delta_{21}&\delta_{22}&\cdots\\\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}F_{X1}\\F_{X2}\\\vdots\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\Delta_{1F}\\\Delta_{2F}\\\vdots\end{Bmatrix}=0$$

力法正则方程
(Regular Equation of Force Method)

$$[\delta]\{F_X\}+\{\Delta_F\}=0$$

$[\delta]$为对称矩阵（根据位移互等定理）

- Δ_i 为各多余约束作用方向的约束位移（已知）；
- δ_{ij} 为影响系数，为沿F_{Xj}方向的广义单位力作用下，在F_{Xi}方向的广义位移（可求）；
- F_{Xi} 为各多余约束力（待求）；
- Δ_{iF} 为原载荷（不包括各多余约束力），在F_{Xi}方向的广义位移（可求）。

单位载荷法

$$\Delta_{iF}=\int_l\frac{M_F M_i^0}{EI}\mathrm{d}x$$

$$\delta_{ij}=\int_l\frac{M_i^0 M_j^0}{EI}\mathrm{d}x$$

或图形互乘法

δ_{ij}、Δ_{iF} 的两个下角标：前为果，后为因！

11-2 力法正则方程

利用力法正则方程求解超静定问题的解题步骤：

1、判断超静定类型，超静定次数；

2、解除多余约束，代之以多余约束力F_{Xi}，建立静定基和相当系统；

3、用广义单位力替代各多余约束力F_{Xi}，以及原载荷，均单独作用在静定基上；

4、考虑变形协调关系（在解除约束处），建立正则方程；

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{X2} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0$$

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{M_i^0 M_j^0}{EI} \mathrm{d}x$$

$$\Delta_{iF} = \int_l \frac{M_F M_i^0}{EI} \mathrm{d}x$$

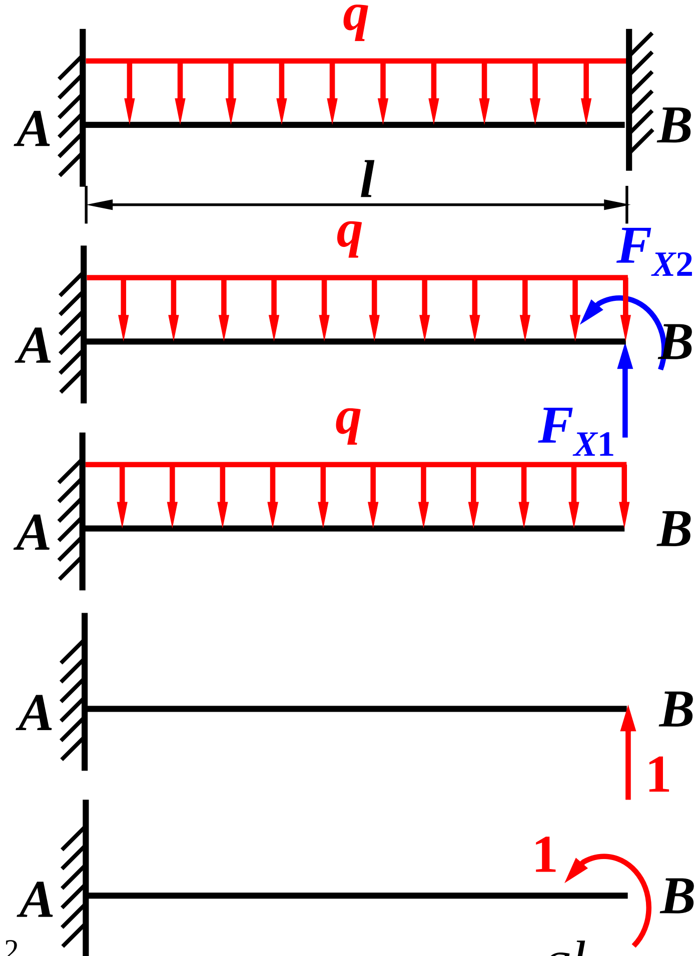
5、利用能量法计算正则方程中的系数δ_{ij}和Δ_{iF}；

6、联立正则方程，求出各多余约束力F_{Xi}；

7、求出其他约束或内力，进而可以作内力图，求解相当系统的强度和刚度问题。

11-2　力法正则方程

例11-3　求图示超静定梁的支反力(EI 为常数) 。



解：建立正则方程

$$\Delta_1 = \delta_{11}F_{X1} + \delta_{12}F_{X2} + \Delta_{1q} = 0$$

$$\Delta_2 = \delta_{21}F_{X1} + \delta_{22}F_{X2} + \Delta_{2q} = 0$$

用单位载荷法

$$M_q(x) = -qx^2/2 \qquad M^0{}_1(x) = x \qquad M^0{}_2(x) = 1$$

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{M_1^0 M_1^0}{EI}\mathrm{d}x = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \int_0^l \frac{M_2^0 M_2^0}{EI}\mathrm{d}x = \frac{l}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^l \frac{M_1^0 M_2^0}{EI}\mathrm{d}x = \frac{l^2}{2EI}$$

$$\Delta_{1q} = \int_0^l \frac{M_1^0 M_q}{EI}\mathrm{d}x = -\frac{ql^4}{8EI}$$

$$\Delta_{2q} = \int_0^l \frac{M_2^0 M_q}{EI}\mathrm{d}x = -\frac{ql^3}{6EI}$$

代入正则方程

$$\frac{l}{3}F_{X1} + \frac{1}{2}F_{X2} - \frac{l^2}{8}q = 0$$

$$\frac{l}{2}F_{X1} + F_{X2} - \frac{l^2}{6}q = 0$$

联立求解

$$F_{X1} = \frac{ql}{2}$$

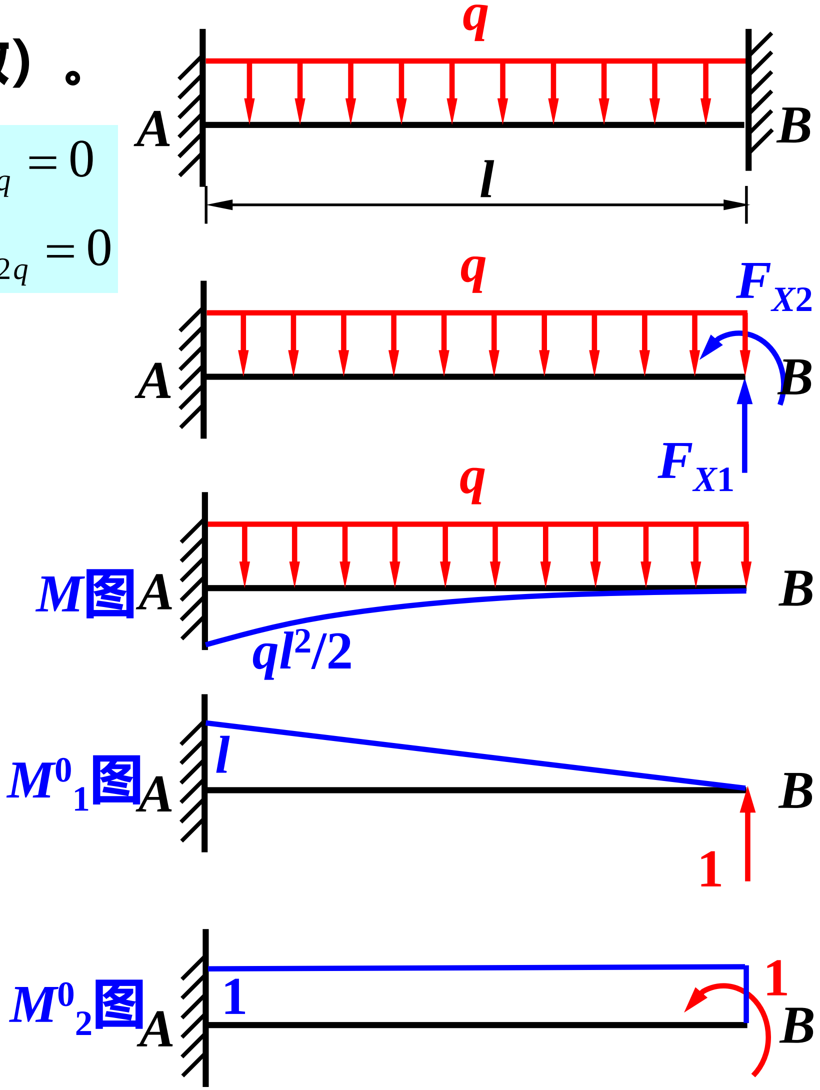
$$F_{X2} = -\frac{ql^2}{12}$$

11-2 力法正则方程

例11-3 求图示超静定梁的支反力(EI 为常数) 。

解法二：建立正则方程

$$\Delta_1=\delta_{11}F_{X1}+\delta_{12}F_{X2}+\Delta_{1q}=0$$
$$\Delta_2=\delta_{21}F_{X1}+\delta_{22}F_{X2}+\Delta_{2q}=0$$



用图形互乘法

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2l}{3}\right)=\frac{l^3}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}(1\times l\times 1)=\frac{l}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times l\times l\times 1\right)=\frac{l^2}{2EI}$$

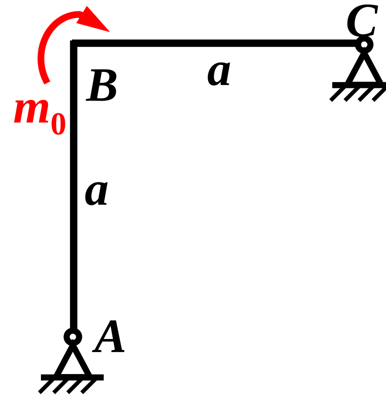
$$\Delta_{1q}=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{3}\times\frac{ql^2}{2}\times l\times\frac{3l}{4}\right)=-\frac{ql^4}{8EI}$$

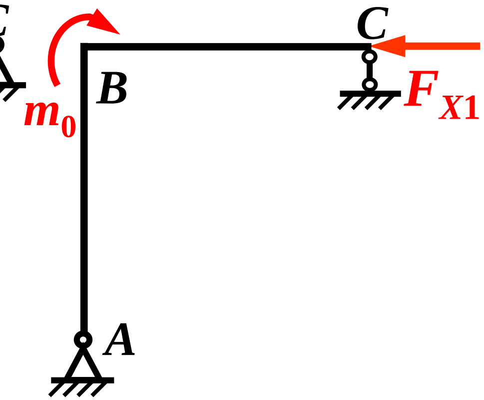
$$\Delta_{2q}=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{3}\times\frac{ql^2}{2}\times l\times 1\right)=-\frac{ql^3}{6EI}$$

代入正则方程，解得 $F_{X1}=\dfrac{ql}{2}$， $F_{X2}=-\dfrac{ql^2}{12}$

11-2 力法正则方程

例11-4 求图示刚架C点的支反力，已知刚架的EI为常数，边长为 a 。





解：解除多余约束，用约束力代替

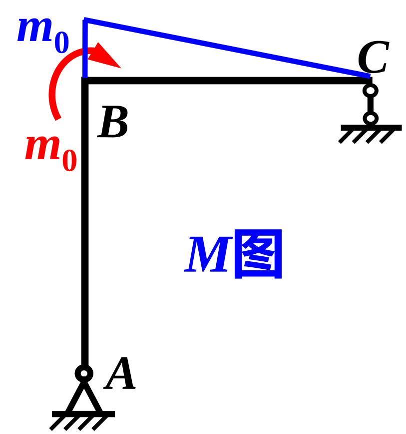
变形协调方程 $\Delta_C^H = 0$

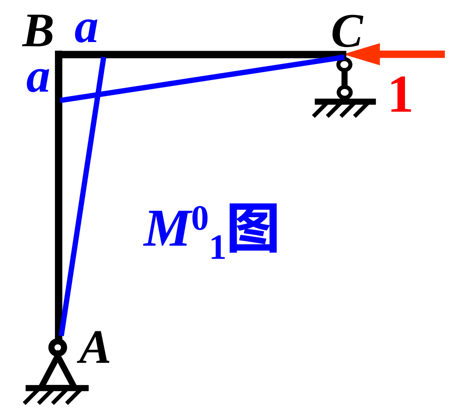
建立正则方程 $\Delta_C^H = \delta_{11} F_{X1} + \Delta_{1m} = 0$

用图形互乘法

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI}[(-\frac{1}{2}\times a \times a)\times(-\frac{2a}{3})] = \frac{2a^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1m} = \frac{1}{EI}[(\frac{1}{2}\times m_0 \times a)\times(-\frac{2a}{3})] = -\frac{m_0 a^2}{3EI}$$

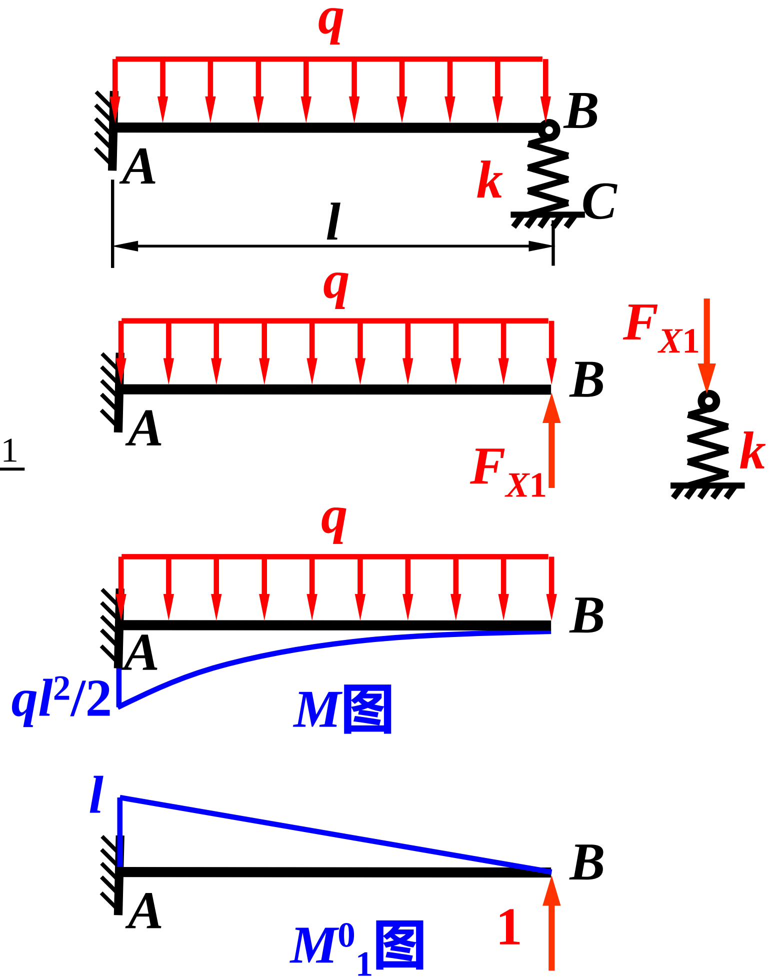




代入正则方程，解得 $F_{X1} = \dfrac{m_0}{2a}$

C点铅垂方向支反力： $R_C = \dfrac{m_0}{2a}(\uparrow)$

例11-5 求图示弹性支承梁B端支反力。已知梁EI为常数，梁长为l，弹簧刚度为k。



解：解除B处的约束，用约束力代替

变形协调方程 $\Delta_B = -\dfrac{F_{X1}}{k}$

建立正则方程 $\Delta_B = \delta_{11}F_{X1} + \Delta_{1q} = -\dfrac{F_{X1}}{k}$

用图形互乘法

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}[(\frac{1}{2}\times l\times l)\times\frac{2l}{3}] = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1q} = \frac{1}{EI}[(-\frac{1}{3}\times\frac{ql^2}{2}\times l)\times\frac{3l}{4}] = -\frac{ql^4}{8EI}$$

解得 $F_{X1} = \dfrac{3kql^4}{24EI + 8kl^3}$

学前问题：

- 静定基与相当系统?
- 力法正则方程?
- 如何求解超静定?

今 日 作 业

11-8 (a)、(b)、(c)

11-8题提示：(a)用单位载荷法
(b)、(c)用图形互乘法

上节课内容回顾

静定基，相当系统；判断超静定的次数；

力法正则方程：

$$[\delta]\{F_X\}+\{\Delta\}=0$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \vdots\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}F_{X1}\\ F_{X2}\\ \vdots\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\Delta_{1F}\\ \Delta_{2F}\\ \vdots\end{Bmatrix}=0$$

δ_{ij} 为沿F_{Xj}方向的广义单位力作用下，在F_{Xi}方向的广义位移；Δ_{iF} 为原载荷作用下，在F_{Xi}方向的广义位移。

δ_{ij}、Δ_{iF} 的两个下角标：**前为果，后为因！**

单位载荷法

(或图形互乘法)

$$\delta_{ij}=\int_l \frac{M_i^0 M_j^0}{EI}\mathrm{d}x \qquad \Delta_{iF}=\int_l \frac{M_F M_i^0}{EI}\mathrm{d}x$$

第十一章 超静定系统

- □ 静定基与相当系统
- □ 力法正则方程
- □ 结构的对称性及其利用

学前问题：

- ■ 各种对称有何特点?
- ■ 如何运用对称性?

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

11-3　结构对称性的利用

- 高次超静定问题，需要联立方程组求解，比较繁琐。
- 很多结构具有对称性，外载荷或正对称或反对称，可利用其特性，减少未知力个数，达到简化求解的目的。
- 基本概念：

对称结构：对称轴一侧的结构，绕此轴线旋转180度后，与另一侧的结构完全重合；

正对称载荷：对称轴一侧的载荷，绕此轴线旋转180度后，与另一侧的载荷作用点重合，大小相等，方向相同；

反对称载荷：对称轴一侧的载荷，绕此轴线旋转180度后，与另一侧的载荷作用点重合，大小相等，但方向相反。

11-3 结构对称性的利用

□ 对称结构承受正对称载荷时的特性

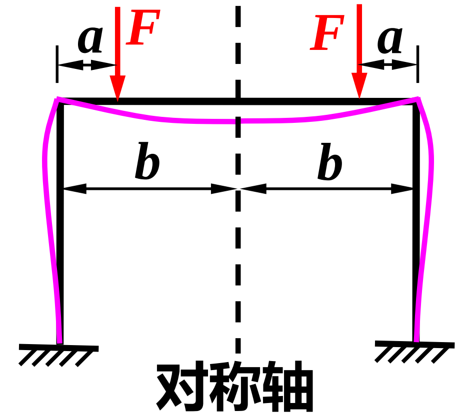
1、变形、内力、约束力均正对称；

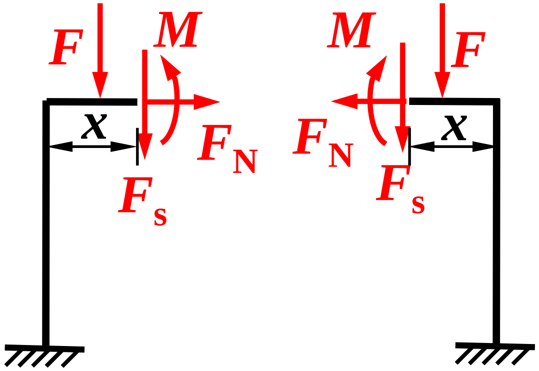
2、轴力图、弯矩图正对称，剪力图反对称；

3、在对称轴通过的截面上，剪力F_s为零，而弯矩M，轴力F_N均不为零；

4、在对称轴通过的截面上，垂直于对称轴的线位移为零，转角为零，沿着对称轴的线位移不为零；

5、若是超静定结构，沿对称轴将结构切开，可将超静定问题的阶数降低一阶。





当x=b时，左右为同一截面，内力还应满足作用力和反作用力的关系！

11-3 结构对称性的利用

□ 对称结构承受反对称载荷时的特性

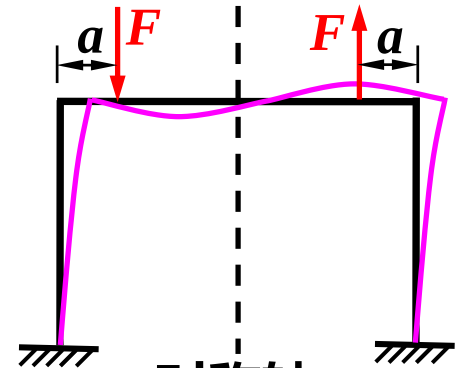
1、变形、内力、约束力均反对称；

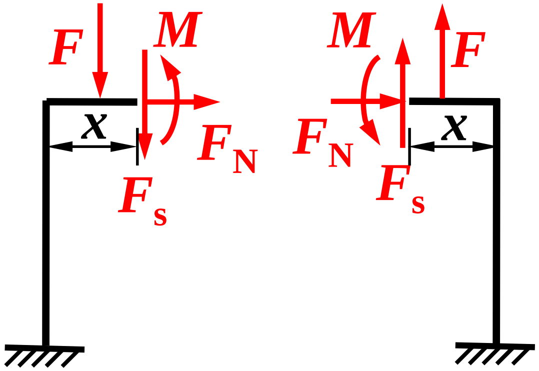
2、剪力图正对称，轴力图、弯矩图反对称；

3、在对称轴通过的截面上，弯矩M，轴力F_N均为零，而剪力F_s不为零；

4、在对称轴通过的截面上，沿着对称轴的线位移为零，垂直于对称轴的线位移不为零，转角不为零；

5、若是超静定结构，沿对称轴将结构切开，可将超静定问题的阶数降低两阶。





当$x=b$时，左右为同一截面，内力还应满足作用力和反作用力的关系！

11-3 结构对称性的利用

例11-3 求图示超静定梁的支反力(EI 为常数）。

解法三： 解除对称截面上的内力约束

根据对称性，得 $F_{X2}=0$

为一次超静定，正则方程为：

$$\Delta_1=\delta_{11}F_{X1}+\Delta_{1q}=0$$

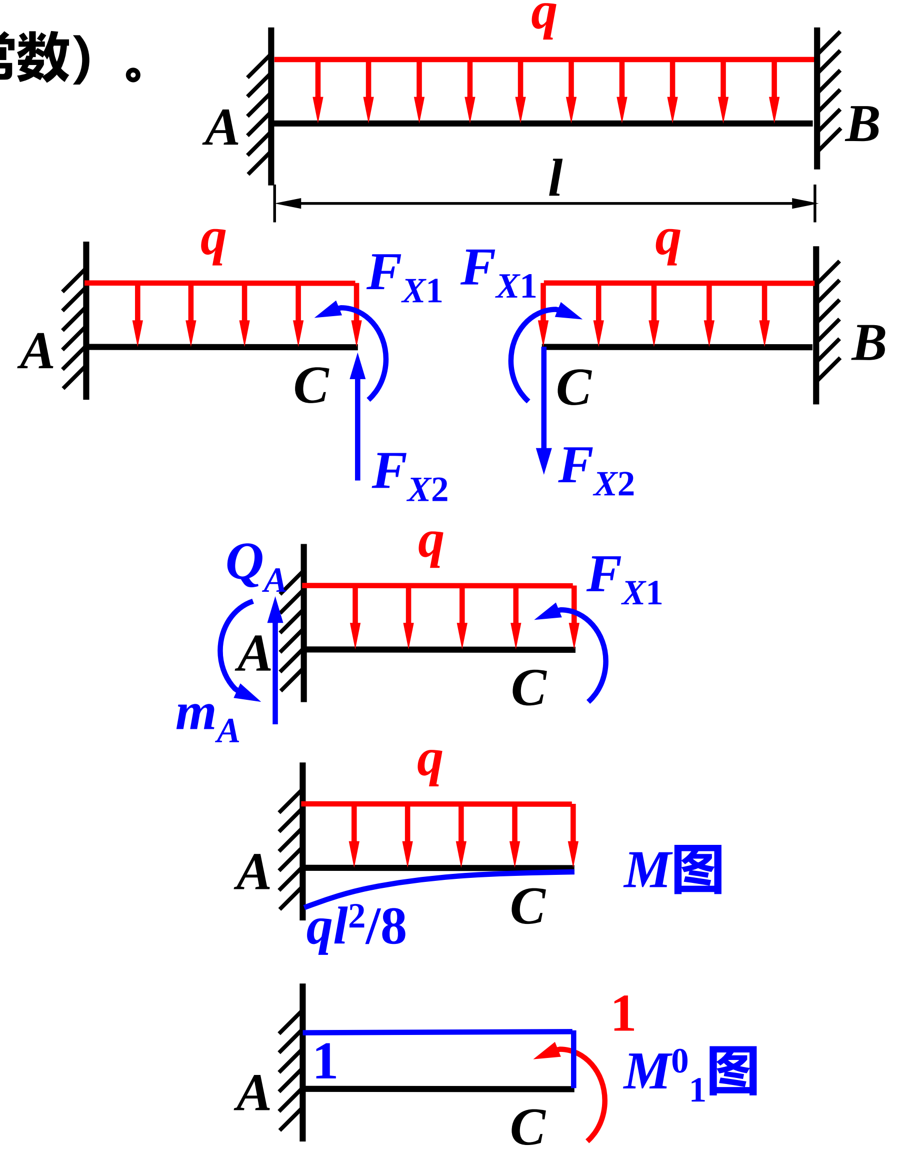
用图形互乘法

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}(\frac{l}{2}\times 1\times 1)=\frac{l}{2EI}$$

$$\Delta_{1q}=\frac{1}{EI}[(-\frac{1}{3}\times\frac{ql^2}{8}\times\frac{l}{2})\times 1]=-\frac{ql^3}{48EI}$$

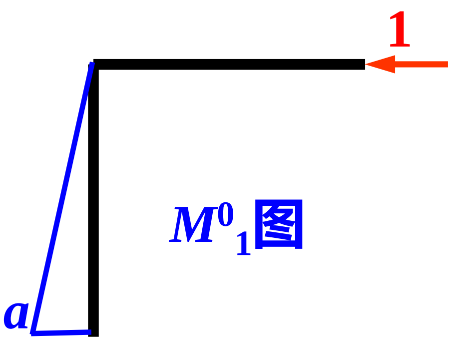
代入正则方程得 $F_{X1}=\dfrac{ql^2}{24}$

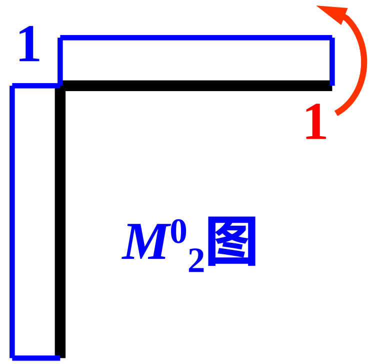
进一步可得 $Q_A=\dfrac{ql}{2}$ $\quad m_A=\dfrac{ql^2}{12}$

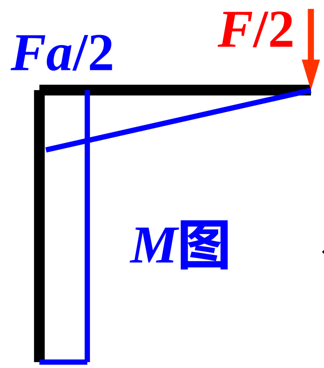


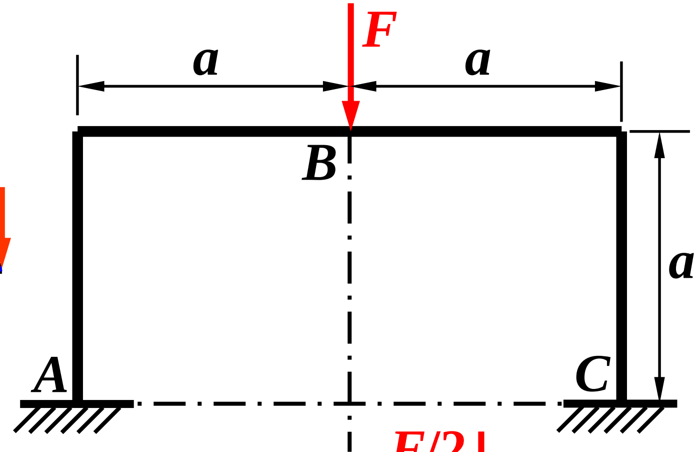
例11-6 作图示等截面刚架弯矩图（EI为常数）。

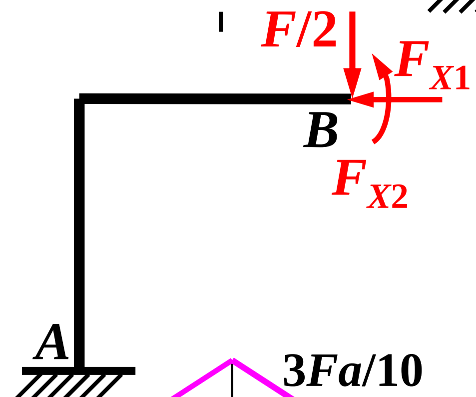
解：利用对称性，解除多余约束











建立正则方程

$$\delta_{11}F_{X1}+\delta_{12}F_{X2}+\Delta_{1F}=0$$
$$\delta_{21}F_{X1}+\delta_{22}F_{X2}+\Delta_{2F}=0$$

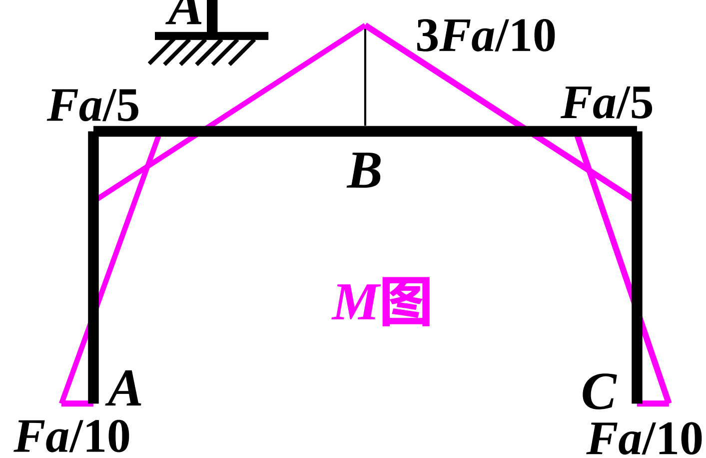
$$\delta_{11}=\frac{a^3}{3EI}\qquad \Delta_{1F}=-\frac{Fa^3}{4EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{2a}{EI}\qquad \Delta_{2F}=-\frac{3Fa^2}{4EI}$$

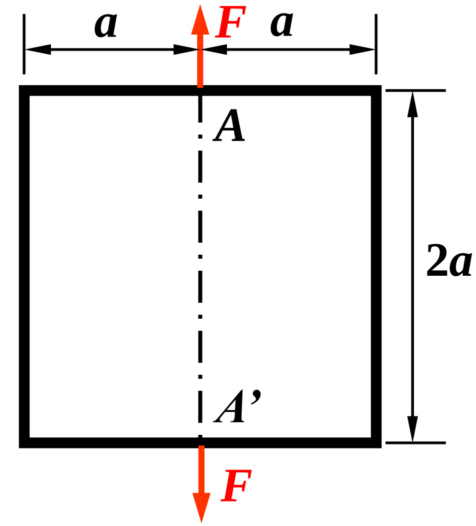
$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{a^2}{2EI}$$

代入正则方程

$$F_{X1}=\frac{3}{10}F$$
$$F_{X2}=\frac{3}{10}Fa$$



例11-7 求正方形刚架的*AA'*的位移（*EI*为常数）。

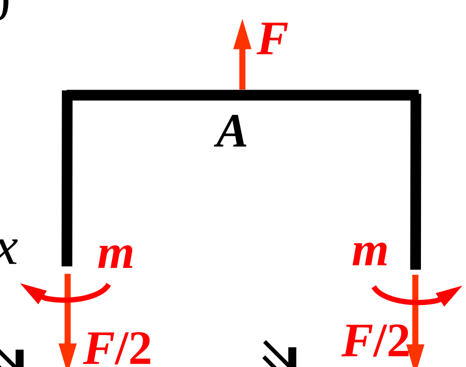


解：利用对称性，建立相当系统 $\theta_B = 0$

外载荷下*BC*、*CA*段弯矩方程 $M_{BC} = m \qquad M_{CA} = m - \dfrac{Fx}{2}$

单位力偶下*BC*、*CA*段弯矩方程 $M^0{}_{BC} = 1 \qquad M^0{}_{CA} = 1$

$$\theta_B = \int_l \frac{MM^0}{EI}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{m}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^a \frac{m - \frac{Fx}{2}}{EI}\mathrm{d}x = \frac{ma}{EI} + \frac{ma}{EI} - \frac{Fa^2}{4EI} = 0$$

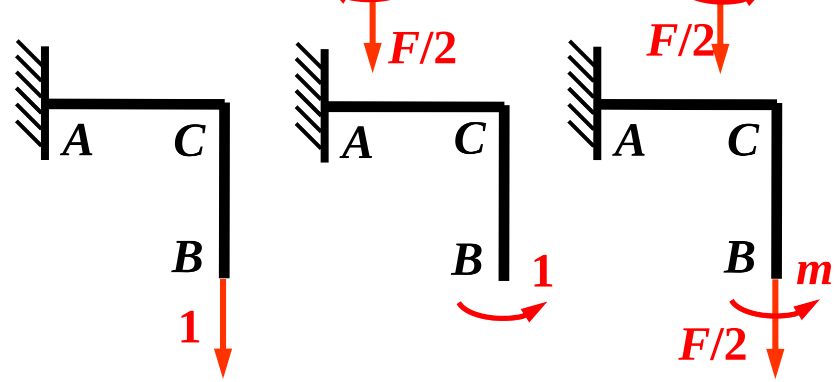


求得 $m = \dfrac{Fa}{8}$

铅垂单位力下*BC*、*CA*段弯矩方程 $M^{0'}{}_{BC} = 0 \qquad M^{0'}{}_{CA} = -x$

$$\Delta_B = \int_l \frac{MM^{0'}}{EI}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{(\frac{Fa}{8} - \frac{Fx}{2})(-x)}{EI}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5Fa^3}{48EI} \qquad \Delta_{AA'} = 2\Delta_B = \frac{5Fa^3}{24EI}$$



11-3 结构对称性的利用

例11-7 求正方形刚架的*AA'*的位移（*EI*为常数）。

解法二：利用对称性，建立相当系统 $\theta_B = 0$

建立正则方程 $\theta_B = \delta_{11}F_{X1} + \Delta_{1F} = 0$

用单位载荷法 $M_{BC} = 0 \quad M_{CA} = -\dfrac{Fx}{2}$

$M^0{}_{BC} = 1 \quad M^0{}_{CA} = 1$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M^0 M^0}{EI}\mathrm{d}x = \frac{2a}{EI}$$

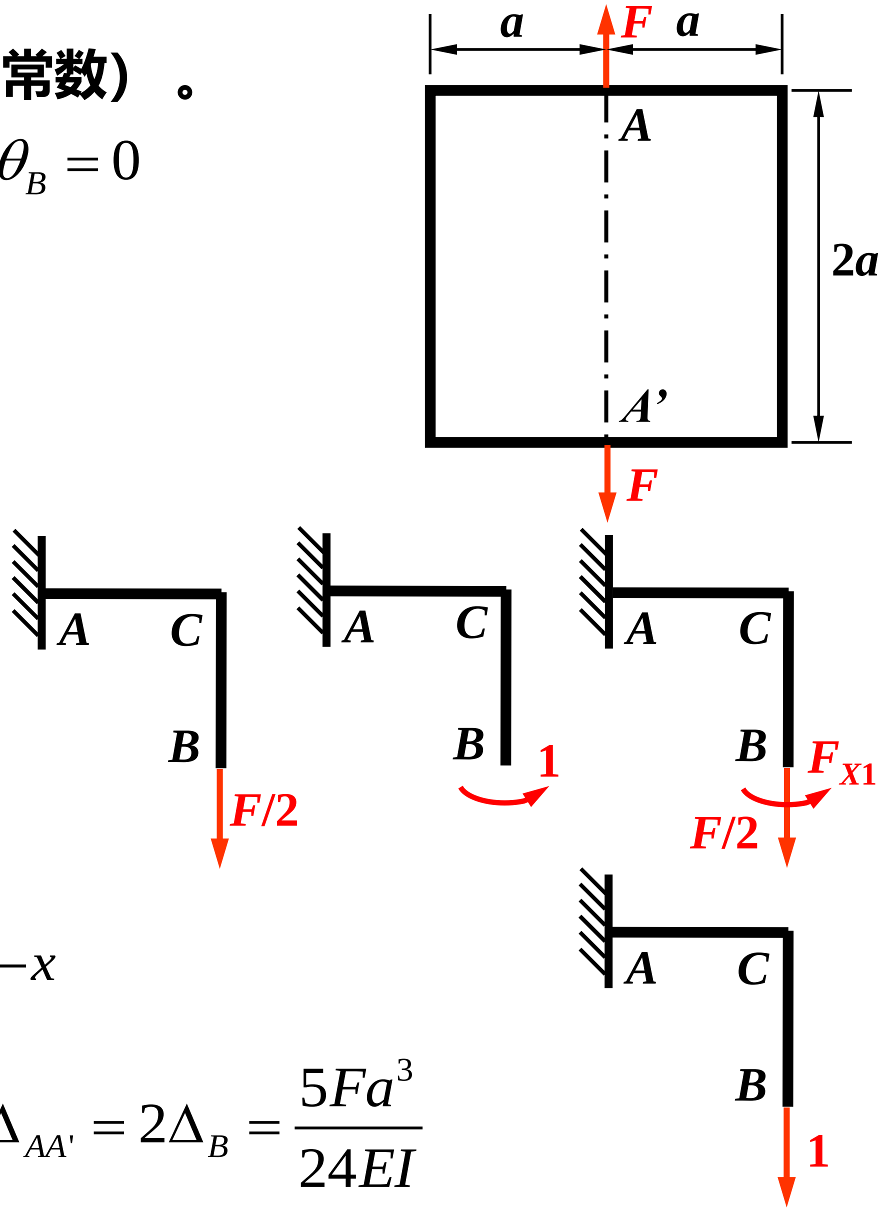
$$\Delta_{1F} = \int_l \frac{MM^0}{EI}\mathrm{d}x = -\frac{Fa^2}{4EI}$$

代入正则方程得 $F_{X1} = \dfrac{Fa}{8}$

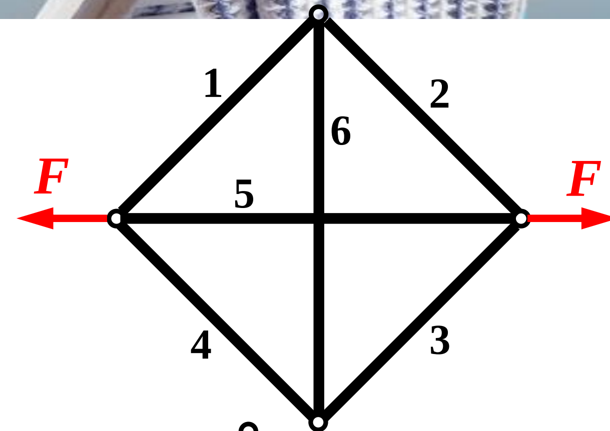
求*B*点的铅垂位移 $M^{0'}{}_{BC} = 0 \quad M^{0'}{}_{CA} = -x$

$$\Delta_B = \int_l \frac{(M + F_{X1}\cdot M^0)M^{0'}}{EI}\mathrm{d}x = \frac{5Fa^3}{48EI}$$

$$\Delta_{AA'} = 2\Delta_B = \frac{5Fa^3}{24EI}$$



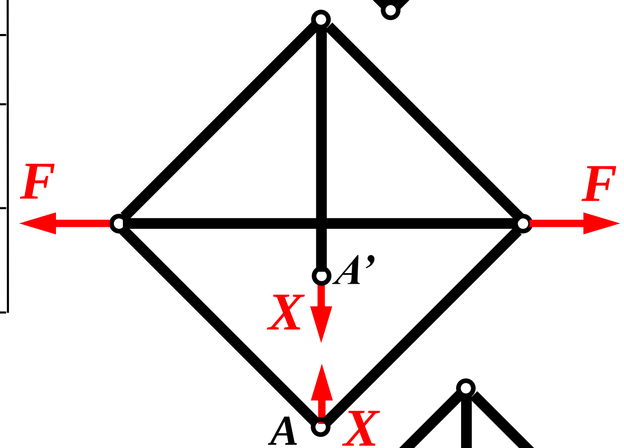
例11-8 求边长为a的正方形桁架内力（EA为常数）。



解： 为一阶内力超静定，**将6号杆下端节点打开**

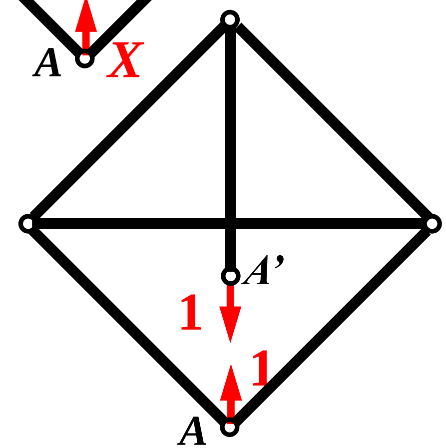
$$\Delta_{AA'}=\Delta_{AA'}{}^{F}+\Delta_{AA'}{}^{X}=0$$

i	1	2	3	4	5	6
l_i	a	a	a	a	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{2}a$
$F_{\mathrm{N}i}{}^{F}$	0	0	0	0	F	0
$F_{\mathrm{N}i}{}^{X}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}X$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}X$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}X$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}X$	X	X
$F_{\mathrm{N}i}{}^{0}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1



$$\Delta_{AA'}{}^{F}=\sum_{i=1}^{6}\frac{F_{\mathrm{N}i}{}^{F}F_{\mathrm{N}i}{}^{0}l_i}{EA}=\frac{\sqrt{2}Fa}{EA}$$

$$\Delta_{AA'}{}^{X}=\sum_{i=1}^{6}\frac{F_{\mathrm{N}i}{}^{X}F_{\mathrm{N}i}{}^{0}l_i}{EA}=\frac{2Xa}{EA}(1+\sqrt{2})$$



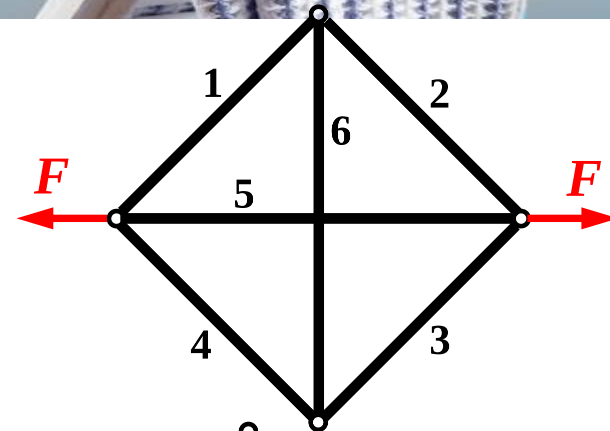
$$F_{\mathrm{N6}}=X=\frac{\sqrt{2}-2}{2}F$$

$$F_{\mathrm{N1-4}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}F$$

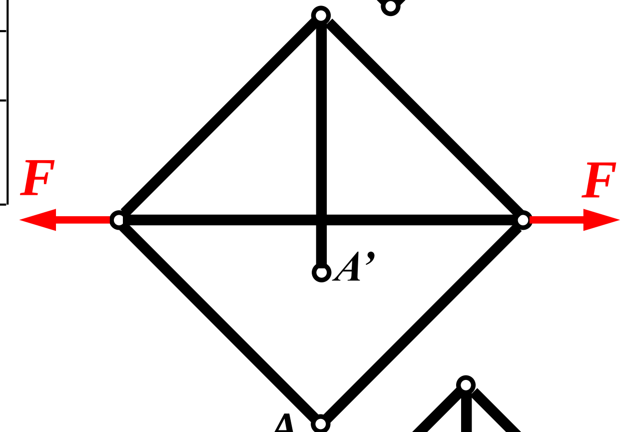
$$F_{\mathrm{N5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

11-3 结构对称性的利用

例11-8 求边长为a 的正方形桁架内力（EA为常数）。



解法二： 为一阶内力超静定，将6号杆下端节点打开

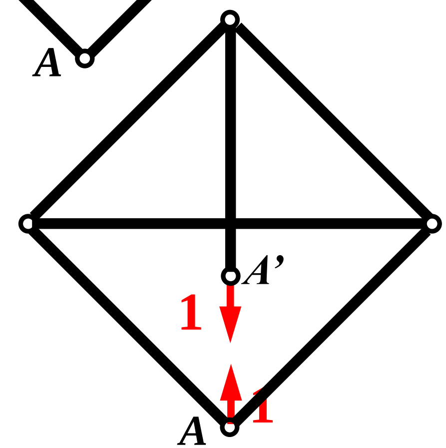


建立正则方程 $\Delta_1 = \delta_{11} F_{X1} + \Delta_{1F} = 0$

i	1	2	3	4	5	6
l_i	a	a	a	a	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{2}a$
$F_{\mathrm{N}i}^{\ F}$	0	0	0	0	F	0
$F_{\mathrm{N}i}^{\ 0}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{6} \frac{F_{\mathrm{N}i}^{\ 0} F_{\mathrm{N}i}^{\ 0} l_i}{EA} = \frac{(2+2\sqrt{2})a}{EA}$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^{6} \frac{F_{\mathrm{N}i}^{\ F} F_{\mathrm{N}i}^{\ 0} l_i}{EA} = \frac{\sqrt{2}Fa}{EA}$$

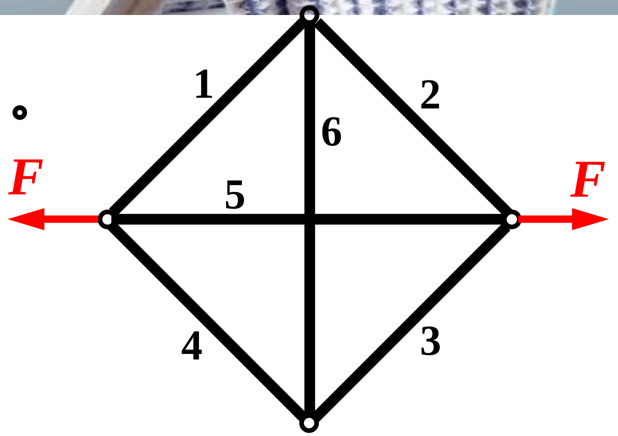


代入正则方程得 $F_{X1} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}F$ $\quad F_{\mathrm{N}i} = F_{X1} \cdot F_{\mathrm{N}i}^{\ 0} + F_{\mathrm{N}i}^{\ F}$

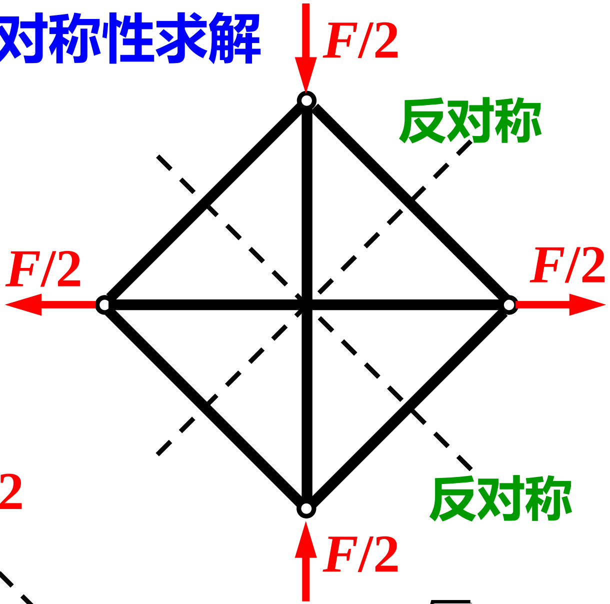
$$F_{\mathrm{N}1-4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}F \qquad F_{\mathrm{N}5} = \frac{\sqrt{2}}{2}F \qquad F_{\mathrm{N}6} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}F$$

11-3 结构对称性的利用

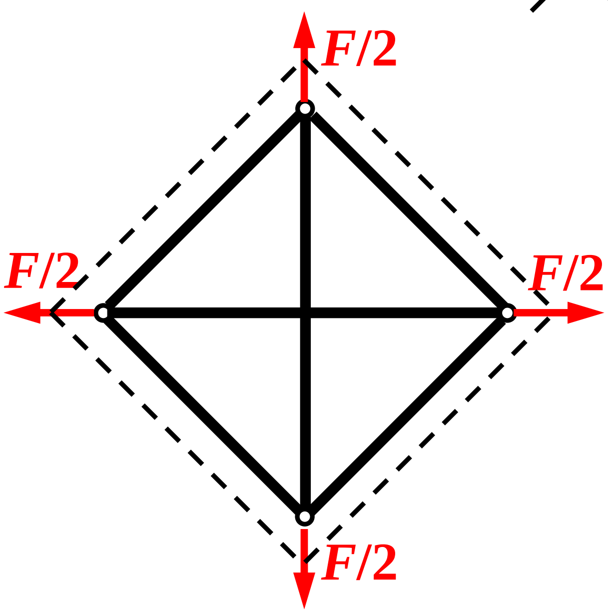
例11-8 求边长为a 的正方形桁架内力（EA为常数）。

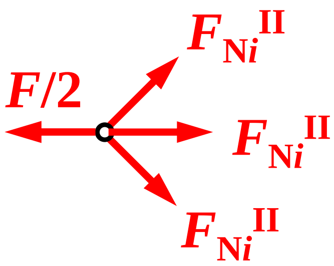


解法三：利用对称性求解



$$F_{N1-4}^{\mathrm{I}}=0 \qquad F_{N5}^{\mathrm{I}}=\frac{F}{2} \qquad F_{N6}^{\mathrm{I}}=-\frac{F}{2}$$





$$F_{Ni}^{\mathrm{II}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}F$$

$$\Delta_6=\sqrt{2}\Delta_1$$

$$\Delta_6=\frac{F_{N6}^{\mathrm{II}}\sqrt{2}a}{EA}$$

$$\Delta_1=\frac{F_{N1}^{\mathrm{II}}a}{EA}$$

$$F_{N6}^{\mathrm{II}}=F_{N1}^{\mathrm{II}}=F_{Ni}^{\mathrm{II}}$$

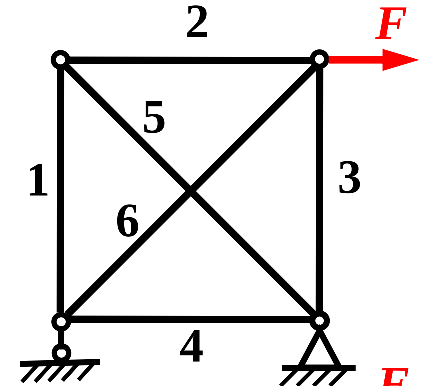
I,II叠加

$$F_{N1-4}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}F$$

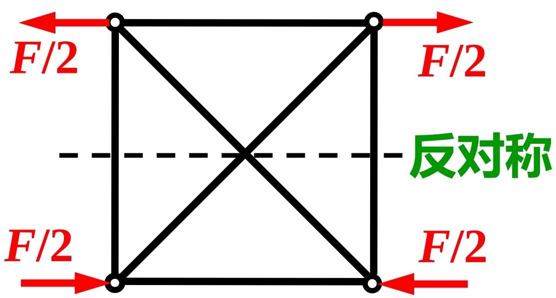
$$F_{N5}=\frac{\sqrt{2}}{2}F \qquad F_{N6}=\frac{\sqrt{2}-2}{2}F$$

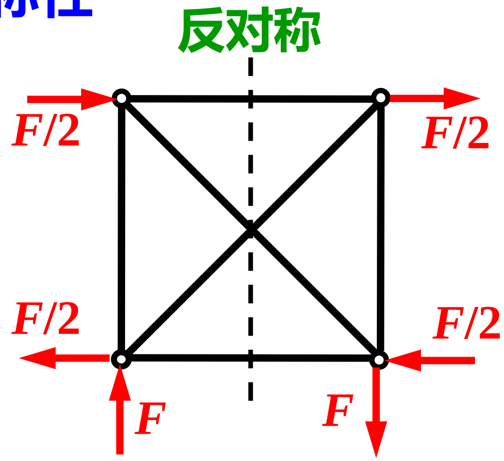
11-3 结构对称性的利用

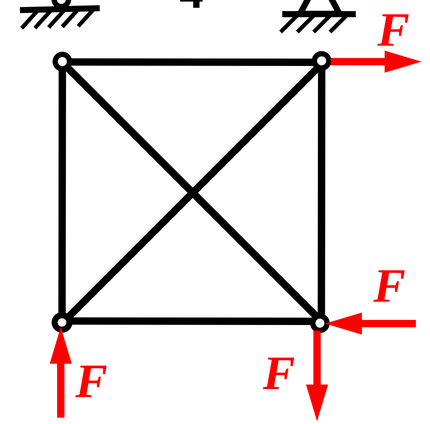
例11-9 求边长为a 的正方形桁架内力（EA为常数）。



解：求支反力，利用对称性







$$F_{N1}=F_{N3}=0$$

$$F_{N5}=F_{N6}=0$$

$$F_{N2}=F/2$$

$$F_{N4}=-F/2$$

$$F_{N2}=F_{N4}=0$$

$$F_{N5}=-\sqrt{2}F/2$$

$$F_{N6}=\sqrt{2}F/2$$

$$F_{N1}=F/2$$

$$F_{N3}=-F/2$$

叠加

$$F_{N1}=F_{N2}=F/2$$

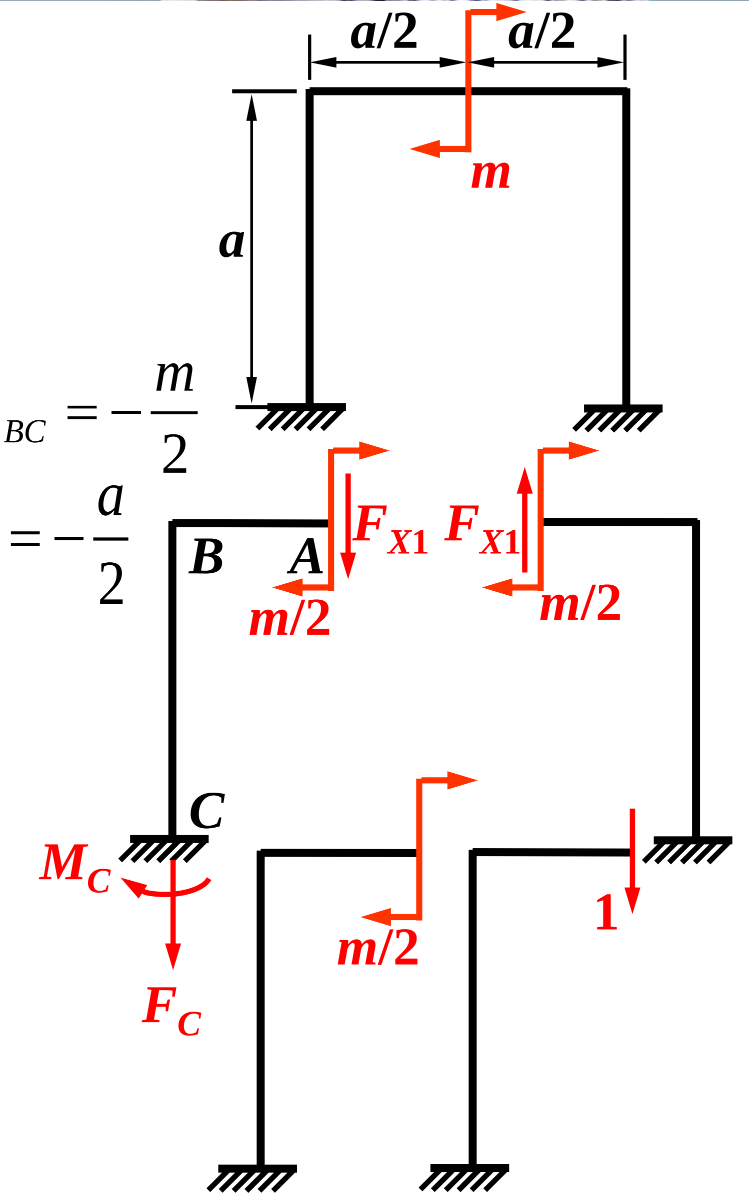
$$F_{N3}=F_{N4}=-F/2$$

$$F_{N5}=-\sqrt{2}F/2$$

$$F_{N6}=\sqrt{2}F/2$$

11-3　结构对称性的利用

例11-10　求图示钢架的支反力（EI为常数）。



解：利用对称性，变形协调方程 $\Delta_{AV}=0$

建立正则方程 $\Delta_{AV}=\delta_{11}F_{X1}+\Delta_{1m}=0$

原载荷下AB、BC段弯矩方程 $M_{mAB}=-\dfrac{m}{2}$　$M_{mBC}=-\dfrac{m}{2}$

单位力下AB、BC段弯矩方程 $M^0{}_{AB}=-x$　$M^0{}_{BC}=-\dfrac{a}{2}$

$$\delta_{11}=\int_l \frac{M^0M^0}{EI}\mathrm{d}x=\frac{7a^3}{24EI}$$

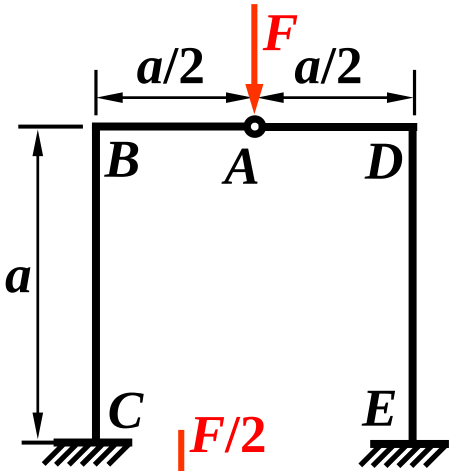
$$\Delta_{1m}=\int_l \frac{M_mM^0}{EI}\mathrm{d}x=\frac{5ma^2}{16EI}$$

代入正则方程得 $F_{X1}=-\dfrac{15m}{14a}$

C端支反力 $F_C=\dfrac{15m}{14a}$　$M_C=\dfrac{m}{28}$

11-3 结构对称性的利用

例11-11 求图示钢架*A*点铅垂位移（*EI*为常数）。



解：利用对称性，变形协调方程 $\Delta_A^H = 0$

建立正则方程 $\Delta_A^H = \delta_{11} F_{X1} + \Delta_{1F} = 0$

原载荷下*AB*、*BC*段弯矩方程 $M_{F\,AB} = -\dfrac{Fx}{2}$ $\quad M_{F\,BC} = -\dfrac{Fa}{4}$

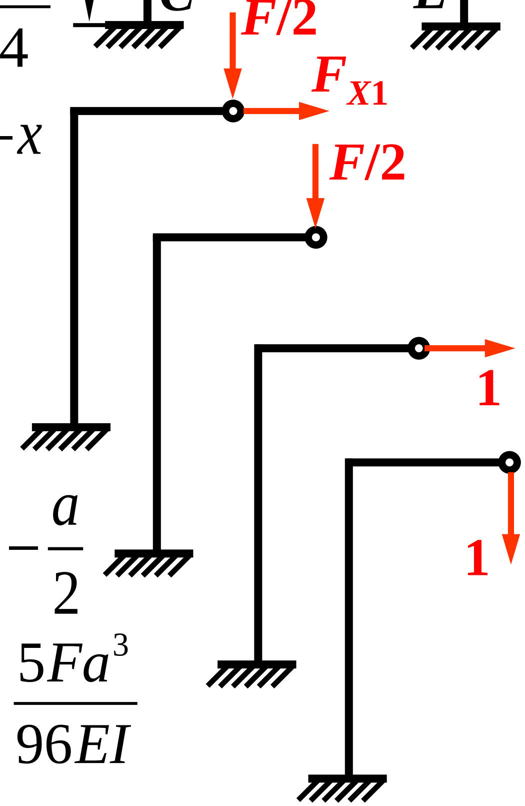
水平单位力下*AB*、*BC*段弯矩方程 $M^0{}_{AB} = 0$ $\quad M^0{}_{BC} = -x$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M^0 M^0}{EI} \mathrm{d}x = \frac{a^3}{3EI} \qquad \Delta_{1F} = \int_l \frac{M_F M^0}{EI} \mathrm{d}x = \frac{Fa^3}{8EI}$$

代入正则方程 $F_{X1} = -\dfrac{3F}{8}$

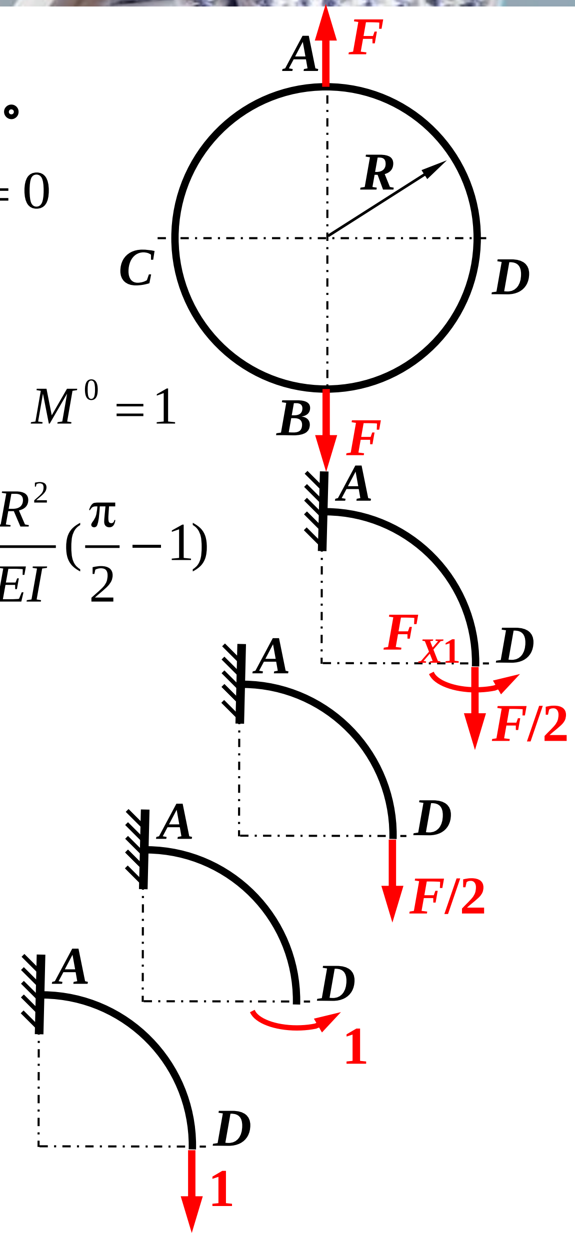
铅垂单位力下*AB*、*BC*段弯矩方程 $M^{0'}{}_{AB} = -x$ $\quad M^{0'}{}_{BC} = -\dfrac{a}{2}$

$$\Delta_A^V = \int_l \frac{(M_F + M_{F_{X1}}) M^{0'}}{EI} \mathrm{d}x = \int_l \frac{(M_F + F_{X1} \cdot M^0) M^{0'}}{EI} \mathrm{d}x = \frac{5Fa^3}{96EI}$$



11-3　结构对称性的利用

例11-12　求图示圆环*AB*两点的相对位移（*EI*为常数）。



解：利用对称性，建立相当系统，变形协调方程 $\theta_D = 0$

建立正则方程　$\theta_D = \delta_{11} F_{X1} + \Delta_{1F} = 0$

原载荷、单位力偶下的弯矩方程　$M_F = -\dfrac{FR}{2}(1-\cos\theta)$　$M^0 = 1$

$$\delta_{11} = \int_0^{\pi/2} \frac{M^0 M^0}{EI} R\mathrm{d}\theta = \frac{\pi R}{2EI} \qquad \Delta_{1F} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_F M^0}{EI} R\mathrm{d}\theta = \frac{FR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

代入正则方程　$F_{X1} = FR\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\right)$

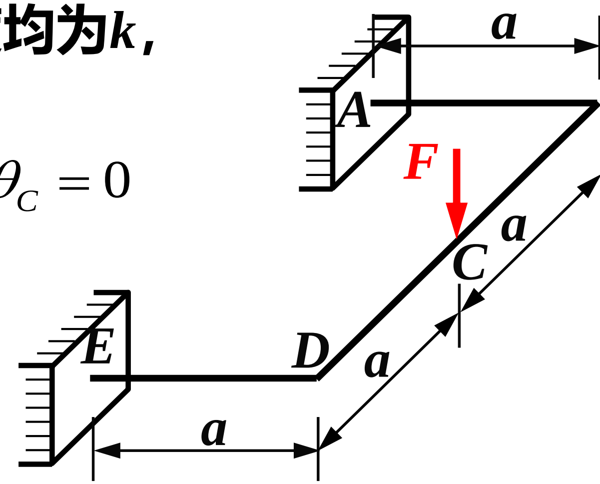
铅垂单位力下的弯矩方程　$M^{0\prime} = -R(1-\cos\theta)$

$$\Delta_{AB} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{(M_F + M_{F_{X1}})M^{0\prime}}{EI} R\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{(M_F + F_{X1}\cdot M^0)M^{0\prime}}{EI} R\mathrm{d}\theta = \frac{FR^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right)$$

11-3　结构对称性的利用

例11-13　图示折杆截面为圆形，抗弯刚度和抗扭刚度均为k，中面C上作用集中力F，试求C点的铅垂位移。

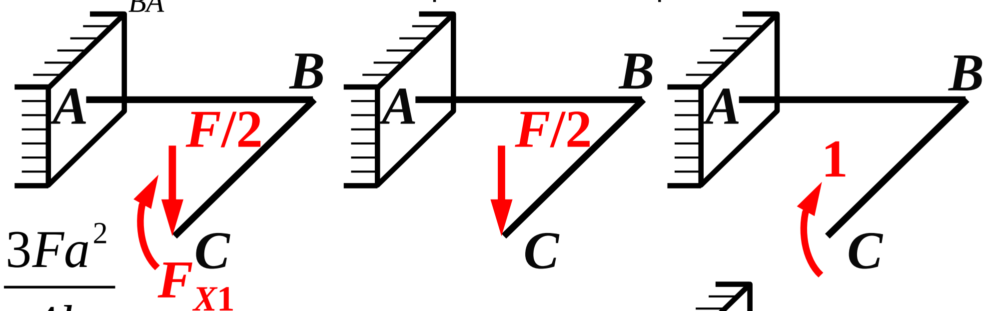


解：利用对称性，建立相当系统，变形协调方程　$\theta_C = 0$

建立正则方程　$\theta_C = \delta_{11} F_{X1} + \Delta_{1F} = 0$

CB段：　$M_{FCB} = -\dfrac{Fx}{2}$　　$M^0_{CB} = 1$

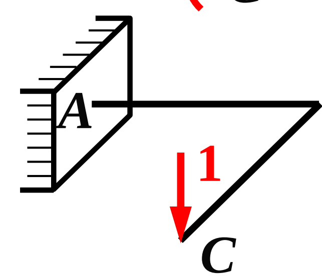
BA段：　$M_{FBA} = -\dfrac{Fx}{2}$　$T_{FBA} = \dfrac{Fa}{2}$　$M^0_{BA} = 0$　$T^0_{BA} = -1$



$$\delta_{11} = \int_{CB} \frac{M^0_{CB} M^0_{CB}}{k} dx + \int_{BA} \frac{T^0_{BA} T^0_{BA}}{k} dx = \frac{2a}{k}$$

$$\Delta_{1F} = \int_{CB} \frac{M_{FCB} M^0_{CB}}{k} dx + \int_{BA} \frac{T_{FBA} T^0_{BA}}{k} dx = -\frac{3Fa^2}{4k}$$

代入正则方程　$F_{X1} = \dfrac{3Fa}{8}$　　**欲求C点铅垂位移，C点作用单位力**

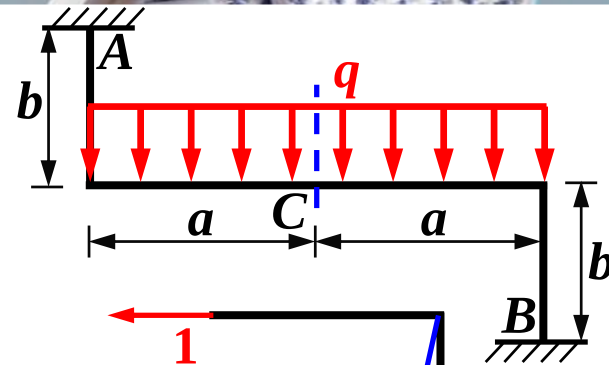


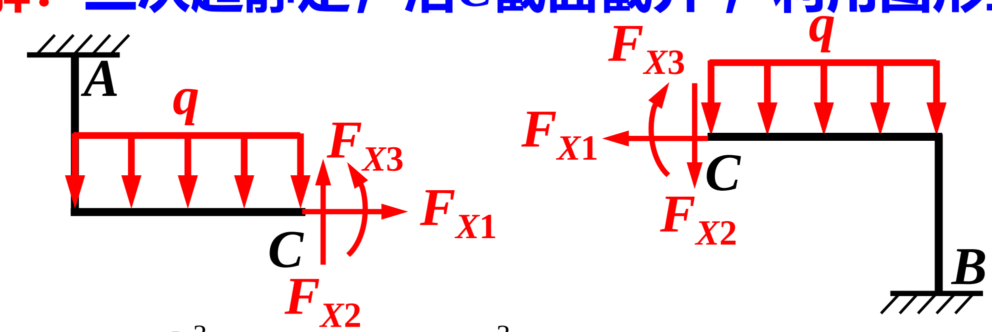
CB段：$M^{0\prime}_{CB} = -x$　　**BA段：**$M^{0\prime}_{BA} = -x$　$T^{0\prime}_{BA} = a$

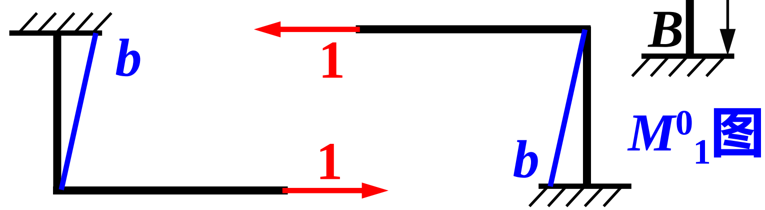
$$\theta_C = \int_{CB} \frac{M_{FCB} M^{0\prime}_{CB}}{k} dx + \int_{BA} \frac{M_{FBA} M^{0\prime}_{BA}}{k} dx + \int_{BA} \frac{T_{FBA} T^{0\prime}_{BA}}{k} dx + \int_{CB} \frac{F_{X1} M^0_{CB} M^{0\prime}_{CB}}{k} dx + \int_{BA} \frac{F_{X1} T^0_{BA} T^{0\prime}_{BA}}{k} dx = \frac{13Fa^3}{48k}$$

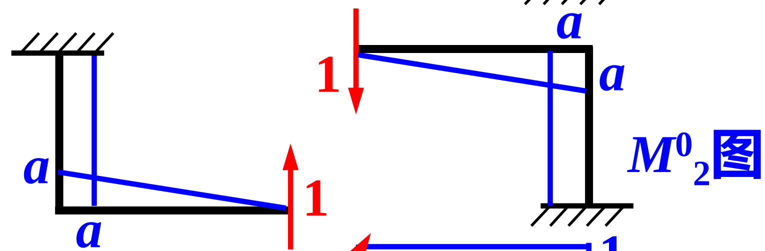
例11-14 图示刚架抗弯刚度为EI，试确定对称中心C截面的内力。

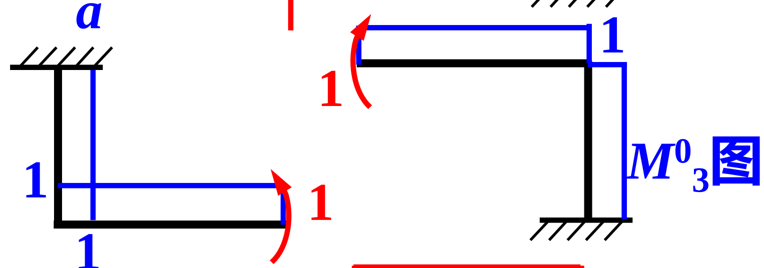
解：三次超静定，沿C截面截开，利用图形互乘法

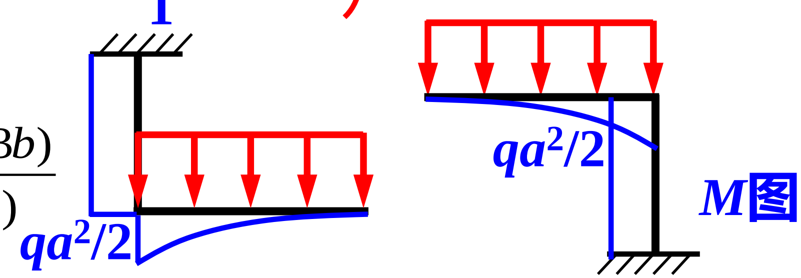












$$EI\delta_{11}=\frac{2b^3}{3}\qquad EI\delta_{22}=\frac{2a^3}{3}+2a^2b\qquad EI\delta_{33}=2a+2b$$

$$EI\delta_{12}=ab^2\qquad EI\delta_{13}=0\qquad EI\delta_{23}=0$$

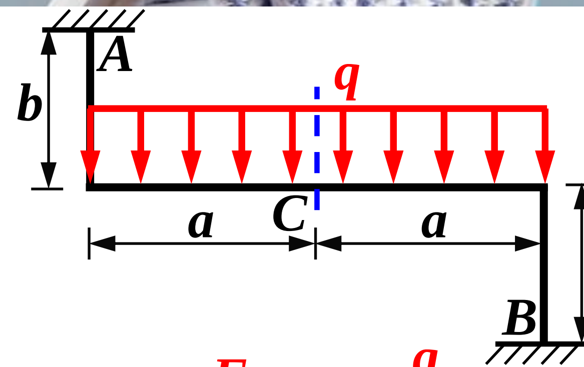
$$EI\Delta_{1F}=0\qquad EI\Delta_{2F}=0\qquad EI\Delta_{3F}=-\frac{qa^3}{3}-qa^2b$$

代入正则方程

$$\begin{cases}\dfrac{2b^3}{3}F_{X1}+ab^2F_{X2}=0\\ ab^2F_{X1}+(\dfrac{2a^3}{3}+2a^2b)F_{X2}=0\\ (2a+2b)F_{X3}+(-\dfrac{qa^3}{3}-qa^2b)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_{X1}=0\\ F_{X2}=0\\ F_{X3}=\dfrac{qa^2(a+3b)}{6(a+b)}\end{cases}$$

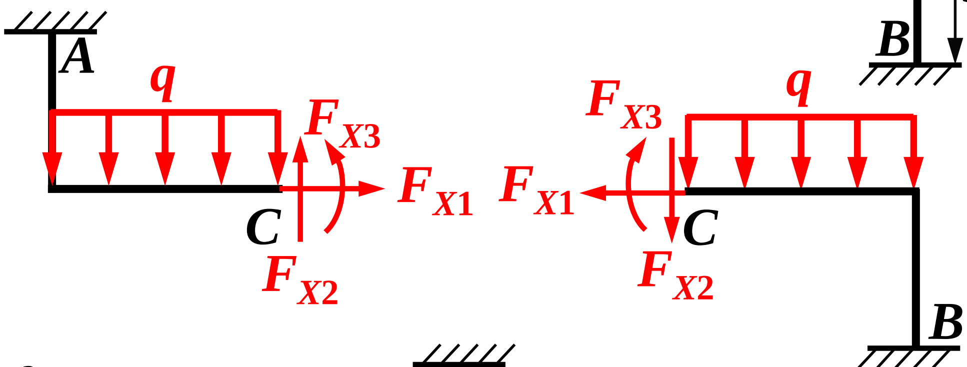
11-3　结构对称性的利用

例11-14　图示刚架抗弯刚度为EI，试确定对称中心C截面的内力。



解法二：沿C截面截开，利用结构关于C点中心反对称

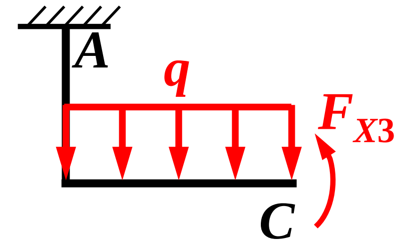
$$F_{X1}=0 \qquad F_{X2}=0 \qquad F_{X3}\neq 0$$



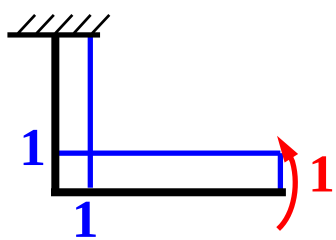
变形协调方程　$\theta_C=0$

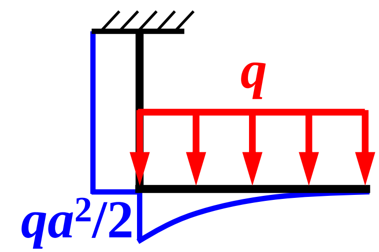
建立正则方程　$\delta_{33}F_{X3}+\Delta_{3F}=0$

利用图形互乘法



$$EI\delta_{33}=a+b \qquad EI\Delta_{3F}=-\frac{qa^3}{6}-\frac{qa^2b}{2}$$





代入正则方程得

$$(a+b)F_{X3}+(-\frac{qa^3}{6}-\frac{qa^2b}{2})=0$$

$$F_{X3}=\frac{qa^2(a+3b)}{6(a+b)}$$

学前问题：

- 各种对称有何特点?
- 如何运用对称性?

第十一章的基本要求

1．掌握超静定问题的基本概念；

2．掌握力法正则方程的概念；

3．熟练掌握利用单位载荷法或图乘法求解超静定问题；

4．掌握利用对称性求解超静定问题。

今 日 作 业

11-13 、11-15、11-19(c)

请预习

第十四章“压杆的稳定性”