空气与气体动力学

张科

回顾：

1.动量方程： $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau_{ij}$

2.N-S方程： $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V}$

3.欧拉方程： $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$

5.3 欧拉方程（4.1~4.2）

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{V}$$

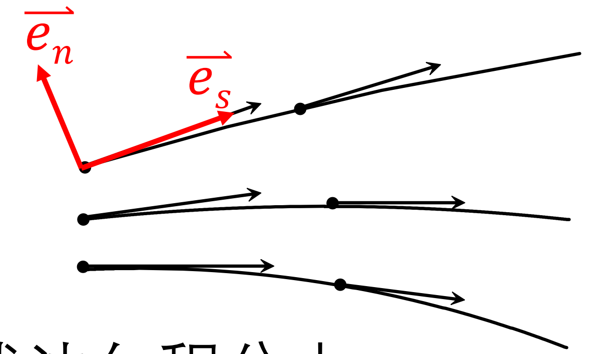
无粘流： $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p$ $\vec{g}=-g\vec{k}=-g\vec{\nabla}z$

$$=-\rho g\vec{\nabla}z-\vec{\nabla}p$$

$$=-\vec{\nabla}(\boxed{p+\rho g z})$$

广义压强：$p_k=p+\rho g z$

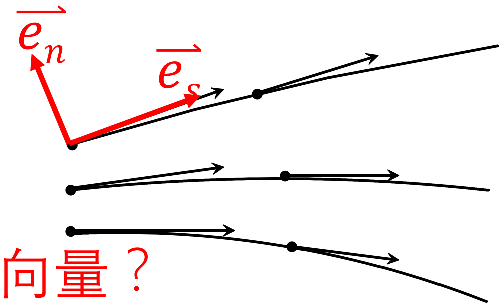
$$=-\vec{\nabla}p_k$$



欧拉方程： $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\vec{\nabla}p_k$

欧拉 方程，定常，沿 流线和流线法向积分！

5.3 欧拉方程（4.1~4.2）



欧拉方程： $\rho\dfrac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p_k$

沿流向和法向梯度向量？

$$\rho[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V}] = -\vec{\nabla}p_k$$

定常： $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V} = -\vec{\nabla}p_k$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial s}\vec{e_s} + \frac{\partial}{\partial n}\vec{e_n}$$

$$\rho V\frac{\partial(V\vec{e_s})}{\partial s} = -\frac{\partial p_k}{\partial s}\vec{e_s} + \frac{\partial p_k}{\partial n}\vec{e_n}$$

$$\vec{V} = u_s\vec{e_s} + \cancel{u_n\vec{e_n}} = V\vec{e_s}$$

$$\frac{\partial(V\vec{e_s})}{\partial s} \cancel{=} \frac{\partial V}{\partial s}\vec{e_s}\ ?\ ?$$

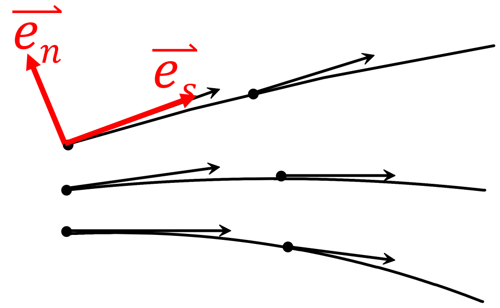
$$\vec{V}\cdot\vec{\nabla} = V\frac{\partial}{\partial s}$$

$$\frac{\partial(V\vec{e_s})}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial s}\vec{e_s} + \frac{\partial\vec{e_s}}{\partial s}V \Rightarrow \frac{\partial(V\vec{e_s})}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial s}\vec{e_s} - V\frac{\vec{e_n}}{R}$$

$$\rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V} = \rho V\frac{\partial(V\vec{e_s})}{\partial s}$$

$$\frac{\partial\vec{e_s}}{\partial s} = -\frac{\vec{e_n}}{R}$$

5.3 欧拉方程（4.1~4.2）



欧拉方程： $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p_k$

$$\rho[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{V}] = -\vec{\nabla} p_k$$

$$\frac{\partial (V\overrightarrow{e_s})}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial s}\overrightarrow{e_s} - V\frac{\overrightarrow{e_n}}{R}$$

$$\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{V} = -\vec{\nabla} p_k$$

$$\rho V \frac{\partial (V\overrightarrow{e_s})}{\partial s} = -\frac{\partial p_k}{\partial s}\overrightarrow{e_s} - \frac{\partial p_k}{\partial n}\overrightarrow{e_n}$$

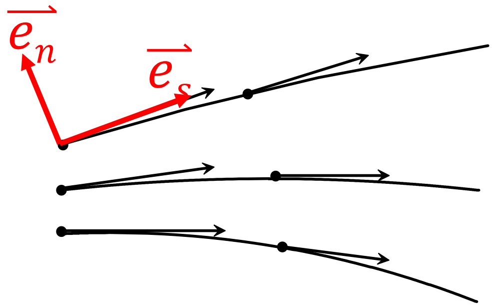
s向： $\rho V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial p_k}{\partial s}$

$$\rho V(\frac{\partial V}{\partial s}\overrightarrow{e_s} - V\frac{\overrightarrow{e_n}}{R}) = -\frac{\partial p_k}{\partial s}\overrightarrow{e_s} - \frac{\partial p_k}{\partial n}\overrightarrow{e_n}$$

n向： $\frac{\partial p_k}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{R}$

$$\rho V\frac{\partial V}{\partial s}\overrightarrow{e_s} - \frac{\rho V^2}{R}\overrightarrow{e_n} = -\frac{\partial p_k}{\partial s}\overrightarrow{e_s} - \frac{\partial p_k}{\partial n}\overrightarrow{e_n}$$

5.3 欧拉方程（4.1~4.2）



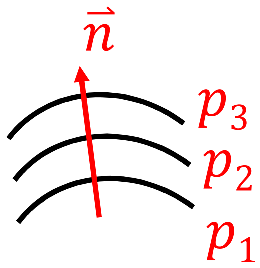
欧拉方程：$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\vec{\nabla}p_k$

定常：　s向：$\rho V\frac{\partial V}{\partial s}=-\frac{\partial p_k}{\partial s}$　　n向：$\frac{\partial p_k}{\partial n}=\frac{\rho V^2}{R}>0$

不可压：$\frac{\partial}{\partial s}[\frac{\rho V^2}{2}+p_k]$ =0

沿流线：$\frac{\rho V^2}{2}+p_k$ =C

$\frac{\rho V^2}{2}+p+\rho gz$ =C



$\frac{\partial p_k}{\partial n}>0$

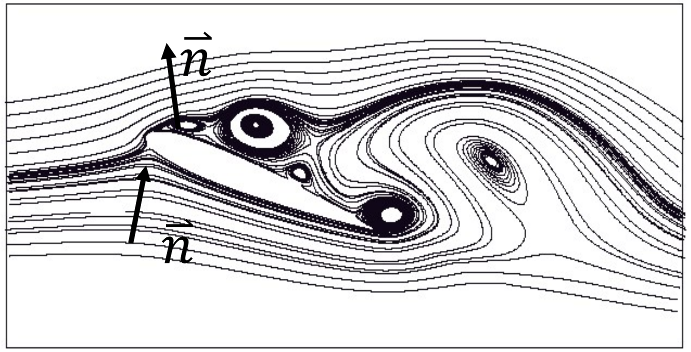
$p_3>p_2>p_1$

伯努利方程（定常、不可压、沿流线、无粘）

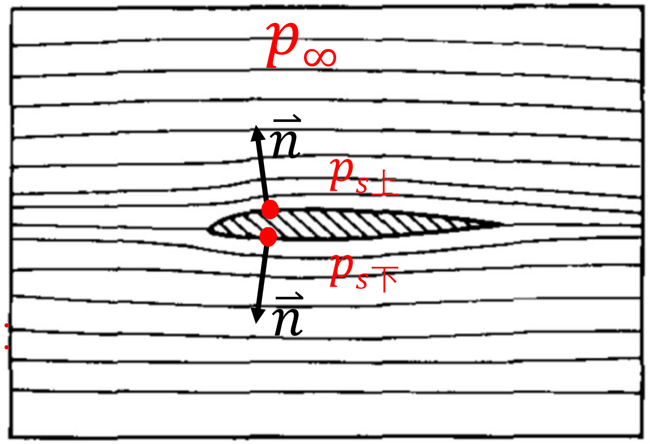
5.3 欧拉方程（4.1~4.2）

欧拉方程：$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\vec{\nabla}p_k$

n向：$\frac{\partial p_k}{\partial n}=\frac{\rho V^2}{R}>0$ $\frac{\partial p_k}{\partial n}>0$

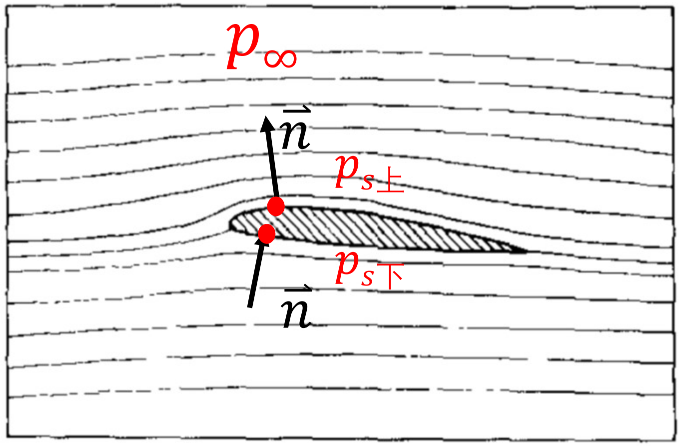


流动分离区粘性不可忽略，压力接近于0；



对称翼型，0迎角：
$p_{s下}=p_{s上}$

$p_{s上}<p_\infty$ $p_{s下}<p_\infty$



$p_{s上}<p_\infty$ $p_{s下}>p_\infty$

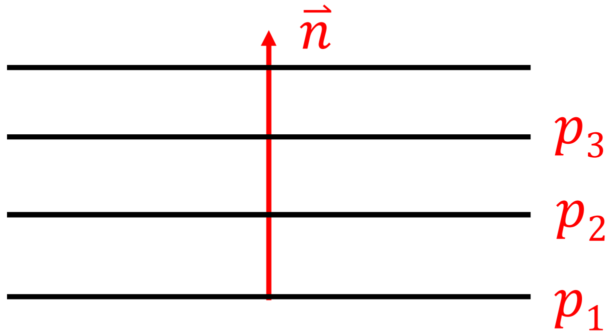
$p_{s下}>p_{s上}$

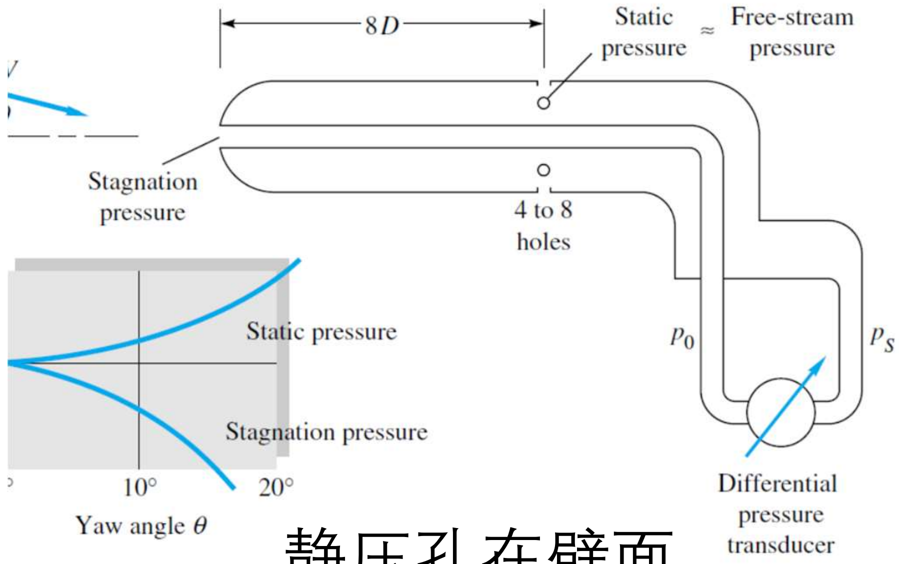
升力！

5.3 欧拉方程（4.1~4.2）

欧拉方程：$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\vec{\nabla}p_k$

n向：$\frac{\partial p_k}{\partial n}=\frac{\rho V^2}{R}>0$ $\frac{\partial p_k}{\partial n}>0$





静压孔在壁面，
平行来流

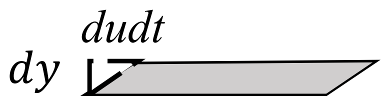
$R\rightarrow\infty$

$$\frac{\partial p_k}{\partial n}=\frac{\rho V^2}{R}\approx 0$$

$$p_3=p_2=p_1$$

垂直平行流线各处静压不变。

5.4 流体微团的运动与变形（3.4）



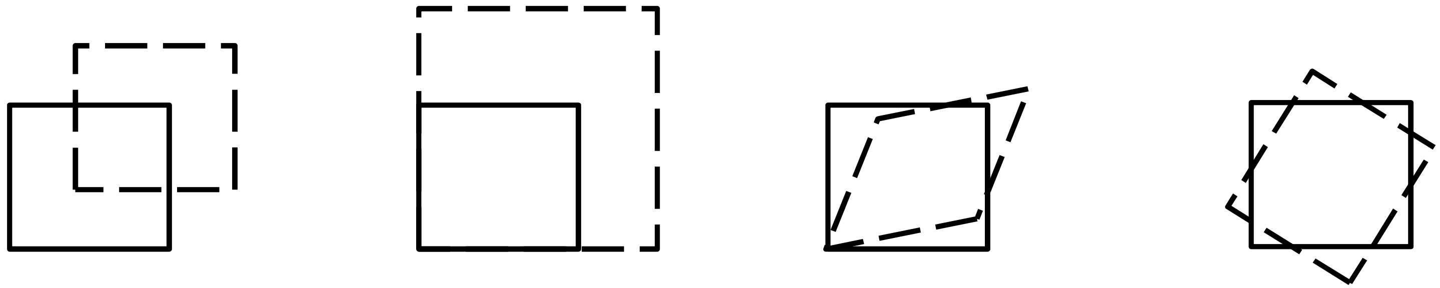
角变形率 $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\tau_{ij} \qquad \tau_{ij} \propto \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

与流体变形相关

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{V}$$

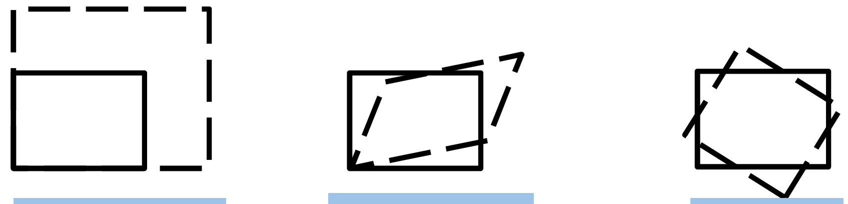
① 流体运动和变形：



平移　　线变形　　角变形　　旋转

5.4 流体微团的运动与变形（3.4）

① 流体运动和变形：

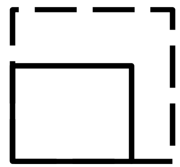


线变形　角变形　旋转

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial xj}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}_{\epsilon_{ij}\ (\text{对称})}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}_{\omega_{ij}\ (\text{反对称})}$$

ϵ_{11}、ϵ_{22}、ϵ_{33} →线性变形率

ϵ_{12}、ϵ_{23}、ϵ_{13} →角变形率



$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

流体微团的相对体膨胀率

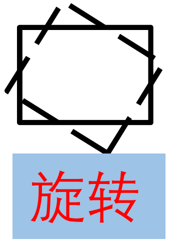
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$$

流体微团体积不变，

即不可压！

5.4 流体微团的运动与变形（3.4）

① 流体运动和变形：



$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

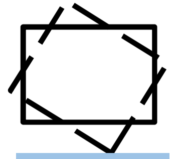
旋转角速度：$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{V}$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

5.4 流体微团的运动与变形（3.4）



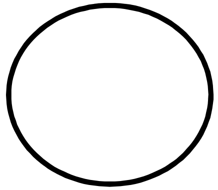
旋转

② 涡量： $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = 2\vec{\omega}$　　$\Omega_x = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})$ $\Omega_y = (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})$

反应流体质点旋转角速度。　$\Omega_z = (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$

$\vec{\Omega} = 0$，无旋流动；　$\vec{\Omega} \neq 0$，有旋流动

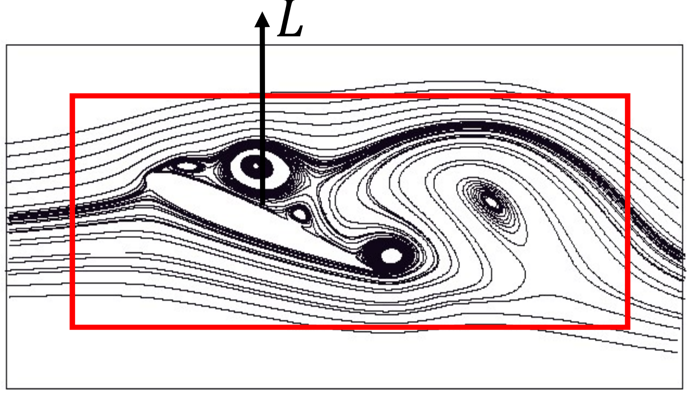
③ 环量： $\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{n} ds = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} ds$



速度环量　　涡通量

L

U_∞



$L = \rho U_\infty \Gamma$

$\vec{\Omega} = 0 \Rightarrow \Gamma = 0$

$\Gamma = 0 \not\Rightarrow \vec{\Omega} = 0$ ？？

作业：

复习笔记！

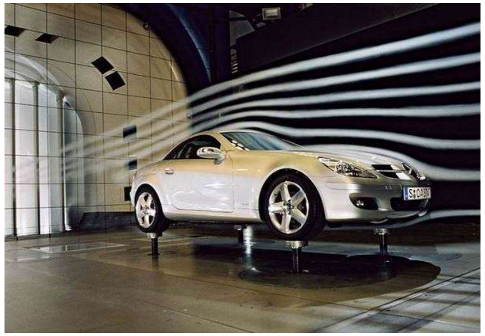
P130. 4.21，4.8，4.3

P99. 3.18，3.20

七. 量纲分析与相似原理（7.1–7.5）

1. 简介

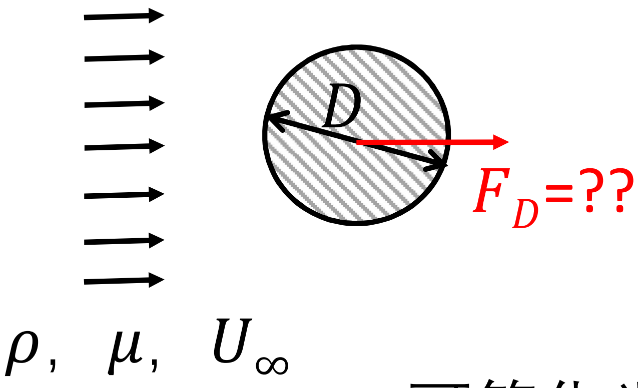
① 提供实验相似准则　　　　相似原理！



实验参数如何选择？

1.简介 量纲分析！

② 多变量组合 →减少变量→分析数据、简化实验



$F_D = f(\rho, \mu, D, U_\infty)$

10点一曲线，需10^4次实验，寻找$F_D = f(\rho, \mu, D, U_\infty)$。

可简化为:$C_D = \dfrac{F_D}{\rho D^2 U^2_\infty} = g(\boxed{\dfrac{\rho D U_\infty}{\mu}})$

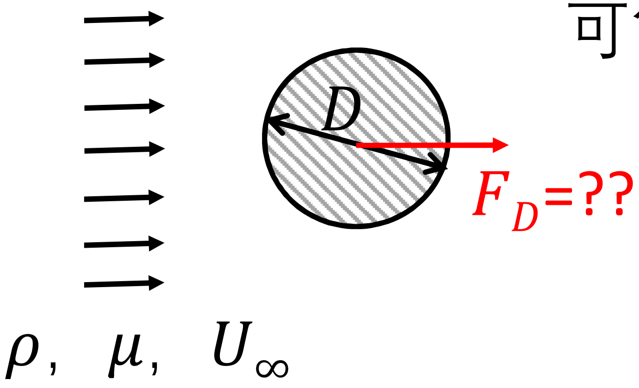
Re

无量纲参数

$C_D = g(\mathrm{Re})$，仅需10次实验！

1.简介

③ 分析各项相对重要性



可简化为: $CD = \frac{F_D}{\rho D^2 U^2{}_\infty} = g(\frac{\rho D U_\infty}{\mu})$

$$F^* \sim \mu^*$$

$$C_D{}' = \frac{\rho F_D}{\mu^2} = f(\frac{\rho D U_\infty}{\mu})$$

$$F^* \sim U_\infty{}^* (L^*)$$

2.量纲分析

量纲一致性原则：

$$F_D = f(\rho, \mu, D, U_\infty) \quad \dim(F_D) = MLT^{-2}$$

$$\frac{F_D}{\rho D^2 U^2_\infty} = g\left(\frac{\rho D U_\infty}{\mu}\right) \qquad \dim\left(\frac{F_D}{\rho D^2 U^2_\infty}\right) = 1$$

量纲 分析：组合物理量，使其成为量纲为1的组合变量，减少变量数。

量纲为一化，或无量纲化！

2.量纲分析

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=C_1 \qquad p+\frac{\rho V^2}{2}+\rho gz=C_2$$

p,V,z——有量纲变量，无量纲化目标

ρ,g——有量纲常数

无量纲化方法：①未知表达式——Π原理

②已知表达式——方程无量纲化

◆ 所有变量都用到；
◆ 不同选择，不同含义。

3. Π原理　$E. Buckingham$ 1914年

① 物理过程必须可表达为无量纲（量纲为一）参数的关系式；

② 无量纲变量为Π（有量纲变量的乘积形式）。

Π的个数=变量数-问题基本量纲数

k = n - m

$g(\phi_1, \phi_2, \dots\dots, \phi_n)$=0　n个变量，m个基本量纲

$G(\Pi_1, \Pi_2, \dots\dots, \Pi_{n\,\_\,m})$=0　k=$n-m$

Π不唯一！

3. Π原理

$g(\phi_1, \phi_2, \dots\dots, \phi_n)$=0

$G(\Pi_1, \Pi_2, \dots\dots, \Pi_{n\_m})$=0

③ 无量纲化步骤：

1）确定问题的影响参数n,（独立变量）；

2）确定问题基本变量数m;

3）确定Π个数$k = n - m$;

4）选m个变量（不能互相组成Π、包含所有量纲、含单一基本量纲）；

5）m个变量与剩余$n - m$个组成Π。

3. Π原理

例： $F_D = f(\rho, \mu, D, U_\infty)$

解： 1） 确定问题的影响参数n=5

F_D	ρ	μ	D	U_∞
MLT^{-2}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	L	LT^{-1}

2） 确定基本量纲数m =3;

3） 确定Π个数$k = n - m = 2$;　2个Π；

4） 选$D, U_\infty, \rho,$来无量纲化F_D，μ;

3. Π原理

F_D	ρ	μ	D	U_∞
MLT^{-2}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	L	LT^{-1}

例： $F_D = f(\rho, \mu, D, U_\infty)$

解： 4）选D, U_∞, ρ,来无量纲化F_D，μ;

5）m个变量与剩余$n-m$个组成Π。

$$\Pi_1 = F_D D^a U^b{}_\infty \rho^c = M^0 L^0 T^0$$

$$(MLT^{-2}) L^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c = M^0 L^0 T^0$$

$$\left.\begin{aligned} M&: 1 + c = 0 \\ L&: 1 + a + b - 3c = 0 \\ T&: -2 - b = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -2 \\ b &= -2 \\ c &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \Pi_1 &= F_D D^{-2} U^{-2}{}_\infty \rho^{-1} \\ &= F_D / (\rho U^2{}_\infty D^2) \end{aligned}$$

3. Π原理

F_D	ρ	μ	D	U_∞
MLT^{-2}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	L	LT^{-1}

例： $F_D = f(\rho, \mu, D, U_\infty)$

解： $\Pi_1 = F_D/(\rho U^2_\infty D^2)$

$$\Pi_2 = \mu D^a U^b_\infty \rho^c = M^0 L^0 T^0$$

$$(ML^{-1}T^{-1})L^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c = M^0L^0T^0$$

$$\left.\begin{aligned} M&: 1 + c = 0 \\ L&: -1 + a + b - 3c = 0 \\ T&: -1 - b = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -1 \\ c &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \Pi_2 = \mu/(\rho U_\infty D)$$

$$\Pi_1 = g(\Pi_2) \Rightarrow \frac{F_D}{\rho U^2_\infty D^2} = g\left(\frac{\mu}{\rho U_\infty D}\right)$$

作业:

复习笔记!

例7.1用Π 原理做，7.1，7.7

回顾：

1.欧拉方程： 沿流线：$\frac{\rho V^2}{2}+p_k=$C　　n向：$\frac{\partial p_k}{\partial n}=\frac{\rho V^2}{R}$

2.流体变形、涡量、环量

3. Π原理