空气与气体动力学

张科

回顾：

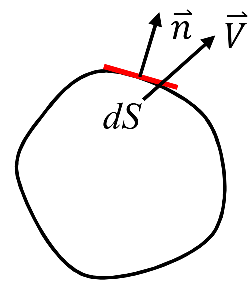
1.系统、控制体；

2.雷诺输运定理：$\dfrac{dN}{dt}_{sys} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\eta\rho d\forall + \int_{CS}\eta\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

3.连续性方程（质量守恒）：$\dfrac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\forall + \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$

4.方程熟记，熟练应用。

速度分布问题！



CS（控制面）

$$Q = \int_{CS}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$$

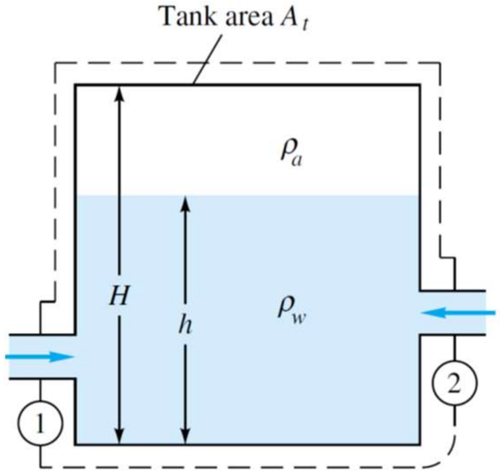
$$\dot{M} = \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

确保熟悉理论，之后再做练习，

否则只是照葫芦画瓢。

4.4 连续性方程（质量守恒） $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\cancel{V}+\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

例题3. 已知入口面积A_1, A_2，入口速度V_1, V_2。罐子底面A_t，$\boxed{\text{密封。}}$水和上方空气密度分别为ρ_w, ρ_a。求液面高度变化率dh/dt。



解：选C.V.如图所示。

连续性方程：$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\cancel{V}+\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$ ①

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\cancel{V}=\frac{\partial}{\partial t}[\rho_w hA_t+\rho_a(H-h)A_t]$$

密封 → $\rho_a(H-h)At=m_a=\text{constant}$

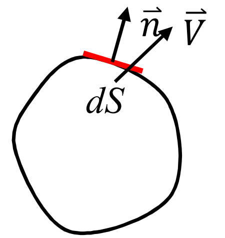
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\cancel{V}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w hA_t)=\rho_w A_t\frac{dh}{dt} \quad ②$$

若开口，
dh/dt =？？

$$\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=-\rho_w V_1A_1-\rho_w V_2A_2 \quad ③$$

① + ② + ③ ➡ $\rho_w A_t\frac{dh}{dt}-\rho_w V_1A_1-\rho_w V_2A_2=0$ ➡ $\frac{dh}{dt}=\frac{V_1A_1+V_2A_2}{A_t}$

4.5 动量方程（牛顿第二定律）：



CS（控制面）

惯性系下(坐标系固定或匀速运动)：

动量定理：$\sum \vec{F}_{sys} = \dfrac{d\vec{P}_{sys}}{dt}$

① $\begin{cases} \dfrac{dN}{dt}_{sys} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta\rho d\forall + \int_{CS} \eta\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS \\ N = \vec{P}, \eta = \vec{V} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\rho d\forall + \int_{CS} \vec{V}\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})dS \qquad ②$$

$\vec{V}_r$: 相对C.S.的速度

固定坐标系.: $\vec{V}_r = \vec{V}$

匀速移动：$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_s$

① + ② $\Rightarrow$ $\sum \vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\rho d\forall + \int_{CS} \vec{V}\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})dS$

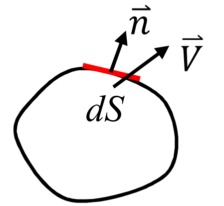
$\sum \vec{F}_{sys} = \sum \vec{F}_{C.V.}$

C.V.内动量变化率

流出C.V.的动量流率

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_B + \sum \vec{F}_S$$

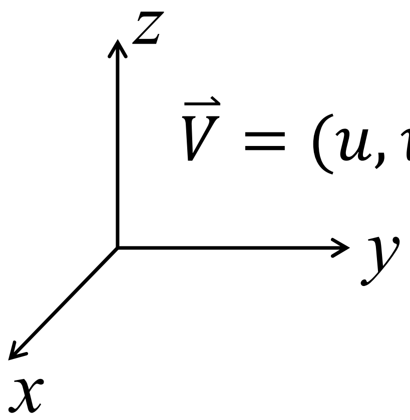
4.5 动量方程（牛顿第二定律）：



CS（控制面）

向量方程： $\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\rho d\mathcal{V} + \int_{CS} \vec{V}\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})dS$

$\vec{V}_r$: 相对C.S.的速度



$\vec{V} = (u, v, w)$

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} u\rho d\mathcal{V} + \int_{CS} u\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})dS$$

$$\sum F_y = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} v\rho d\mathcal{V} + \int_{CS} v\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})dS$$

$$\sum F_z = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} w\rho d\mathcal{V} + \int_{CS} w\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})dS$$

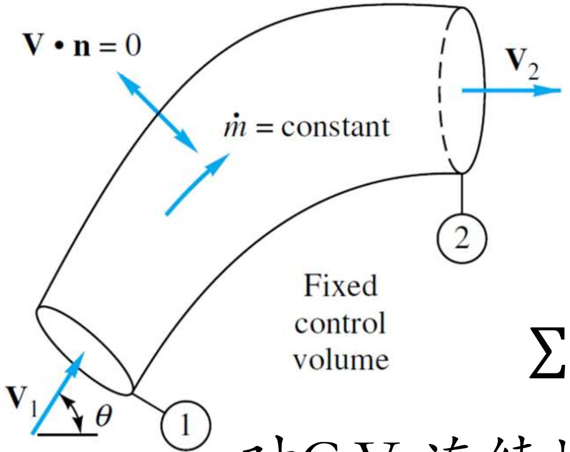
流体与外界
作用力问题！

均匀1D: $\int_{CS} \vec{V}\underbrace{\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})dS}_{\dot{m}} = \sum(\dot{m}\vec{V})_{out} - \sum(\dot{m}\vec{V})_{in}$

4.5 动量方程（牛顿第二定律）

例题1. 流管定常流动，入口ρ_1，$\vec{V}_1$，A_1，出口ρ_2，$\vec{V}_2$、A_2、 。

求：作用在C.V.上的外力$\vec{F}$。



解：选流管为控制体。

$$\sum\vec{F} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{CV}\vec{V}\rho d\cancel{V} + \int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})dS$$

定常∂/∂t=0

$$\sum\vec{F} = \int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})dS = \vec{V}_2\rho_2(V_2A_2) - \vec{V}_1\rho_1(V_1A_1)$$

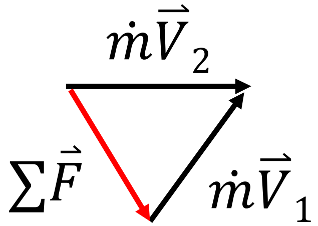
对C.V.连续性方程：

$$\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$$

$$\rho_2(V_2A_2)-\rho_1(V_1A_1) = 0$$

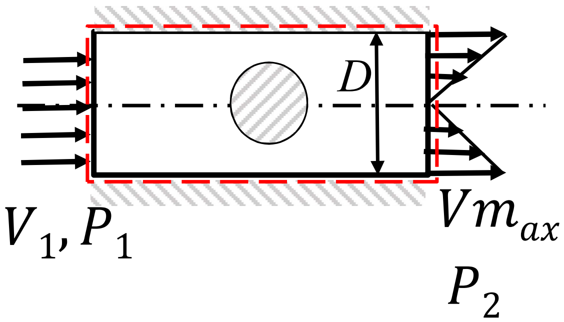
$$\dot{m}_2=\dot{m}_1=\dot{m}$$

$$\sum\vec{F} = \dot{m}\vec{V}_2-\dot{m}\vec{V}_1 = \dot{m}(\vec{V}_2-\vec{V}_1)$$



4.5 动量方程（牛顿第二定律）

例 2.　已知$D = 1m$,$P_1 = 20mmH_2O$，$P_2 = 20mmH_2O$,$V_1 = 10m/s$ $\rho_{air} = 1.225\,kg/m^3$，不计摩擦力。求：$\dot{m}$,$Vm_{ax}$,作用于圆球的阻力。



解：假设定常、不可压、重力向下。选C.V.如图。

①对C.V.连续性方程：$\int_{CS}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$　（定常不可压）

$$-V_1\pi R^2 + \int_0^R V_o 2\pi r dr = 0 \qquad V_o = V_{max} r/R$$

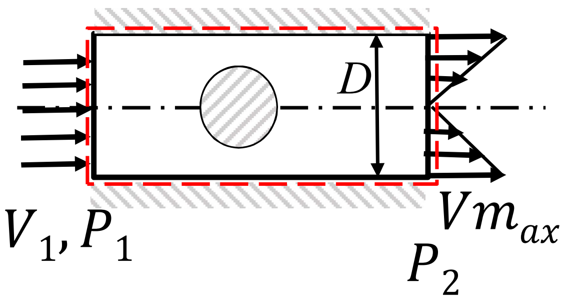
$$V_1\pi R^2 = \int_0^R V_{max} r/R\; 2\pi r dr$$

$$V_1\pi R^2 = 2\pi V_{max}\frac{r^3}{3R}\Big|_0^R = 2\pi V_{max}\frac{R^2}{3}$$

$$V_{max} = \frac{3}{2}V_1 = 15m/s$$

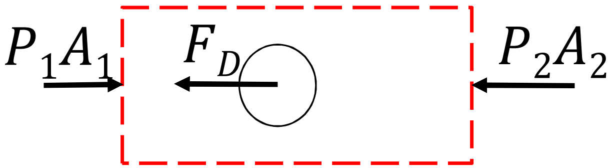
4.5 动量方程（牛顿第二定律）

例 2.　已知$D=1m$,$P_1=20mmH_2O$，$P_2=20mmH_2O$,$V_1=10m/s$　$\rho_{air}=1.225\,kg/m^3$，不计摩擦力。求：$\dot{m}$,Vm_{ax},作用于圆球的阻力。



解：②　$\dot{m}=\rho_{air}V_1\dfrac{\pi D^2}{4}=1.225\times10\times\dfrac{\pi}{4}\times1=9.621kg/s$

③ C.V.受力如图所示，假设球对流体作用力F_D向左。



x方向动量方程：$P_1A_1-P_2A_2-F_D=\int_{CS}\boxed{u}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

$$\int_{CS}u\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=\rho V_1(-V_1\frac{\pi}{4}D^2)+\int_0^R(\frac{V_{max}r}{R})\rho(\frac{V_{max}r}{R}2\pi rdr)$$

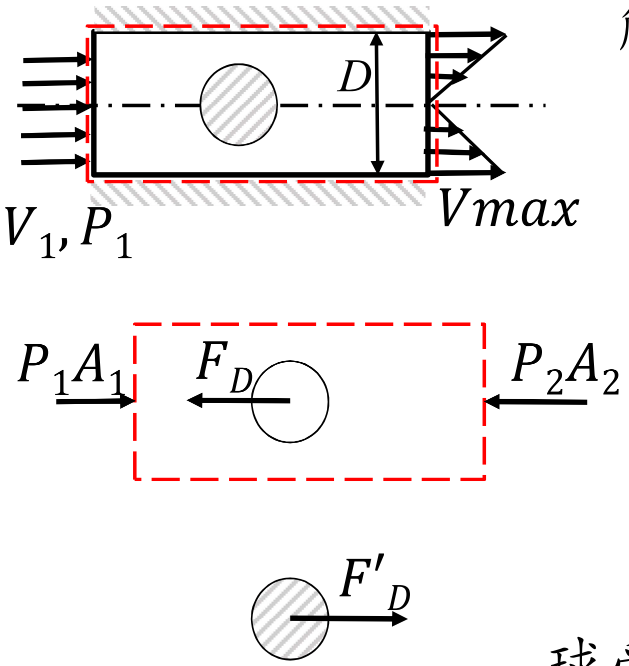
$$=-\rho V_1^2\frac{\pi D^2}{4}+2\pi\rho\frac{V^2_{max}}{R^2}\int_0^R r^3dr$$

$$=-\rho V_1^2\frac{\pi D^2}{4}+\frac{\pi}{2}\rho V^2_{max}R^2$$

⇨　$P_1A_1-P_2A_2-F_D=-\rho V_1^2\dfrac{\pi D^2}{4}+\dfrac{\pi}{2}\rho V^2_{max}R^2$

4.5 动量方程（牛顿第二定律）

例 2.　已知$D=1m$,$P_1=20mmH_2O$，$P_2=20mmH_2O$,$V_1=10m/s$　$\rho_{air}=1.225\,kg/m^3$，不计摩擦力。求：$\dot{m}$,$Vmax$,作用于圆球的阻力。



解：$P_1A_1-P_2A_2-F_D=-\rho V_1{}^2\frac{\pi D^2}{4}+\frac{\pi}{2}\rho V^2{}_{max}R^2$

$$F_D=P_1A_1-P_2A_2+\rho V_1{}^2\frac{\pi D^2}{4}-\frac{\pi}{2}\rho V^2{}_{max}R^2$$

$$=[(P_1-P_2)+\rho V_1{}^2-\frac{\rho}{2}V^2{}_{max}]\frac{\pi D^2}{4}$$

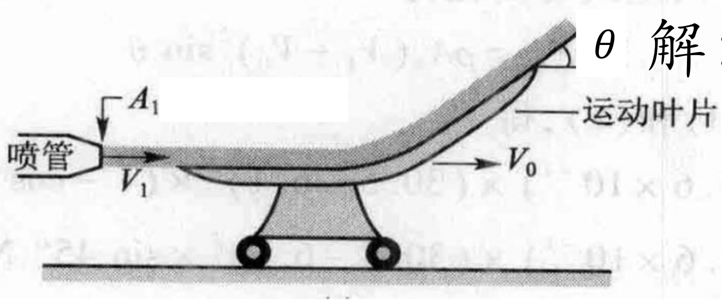
$$=[\rho_{H2O}g(h_1-h_2)+\rho V_1{}^2-\frac{\rho}{2}\left(\frac{3}{2}V_1\right)^2]\frac{\pi D^2}{4}$$

$$=[\rho_{H2O}g(h_1-h_2)-\frac{\rho}{8}V_1{}^2]\frac{\pi D^2}{4}\quad=65.02N$$

球受流体对其作用力$F'_D=-F_D$，向右。　为阻力！

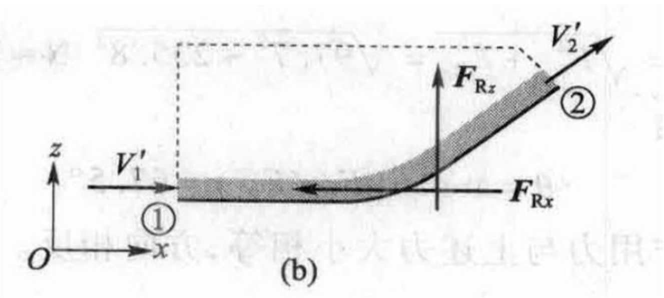
4.5 动量方程（牛顿第二定律） 坐标系匀速运动！

例 3. 如图水平射流冲击光滑叶片，喷管出口水流速度为$V_1 = 30m/s$，喷管出口截面积$A_1 = 0.003m^2$。叶片转角$\theta = 60^o$，匀速向右运动$V_0 = 10m/s$，$\rho_w = 999\,kg/m^3$。求：射流对叶片表面的作用力。



解：选坐标系xoz固定在叶片上以V_0匀速运动，在xoz内选C.V.如图。射流进入、离开C.V.速度为V'_1、V'_2

$$V'_1 = V_1 - V_0 = 20m/s \qquad V'_2??$$



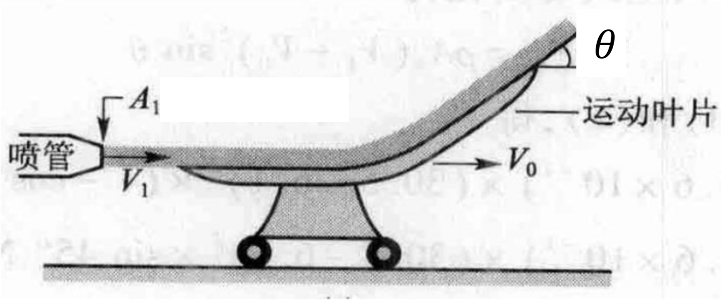
对C.V.连续性方程：$\int_{CS} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0$ （定常不可压）

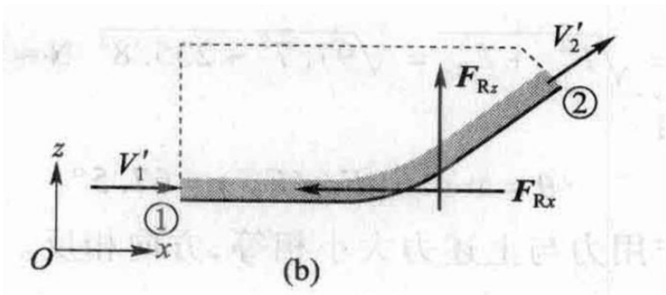
$$V'_2 A_1 = V'_1 A_1$$ 射流截面不变。

$$V'_2 = V'_1 = 20m/s$$ 移动坐标系内，$V'_2 = V'_1$

4.5 动量方程（牛顿第二定律） 坐标系匀速运动！

例 3. 如图水平射流冲击光滑叶片，喷管出口水流速度为$V_1 = 30m/s$，喷管出口截面积$A_1 = 0.003m^2$。叶片转角$\theta = 60^o$，匀速向右运动$V_0 = 10m/s$，$\rho_w = 999\,kg/m^3$。求：射流对叶片表面的作用力。





解：对C.V.，x方向动量方程：

$$-FRx = \int_{CS} u_x \rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$ （定常，射流受x方向作用力为F_{Rx}

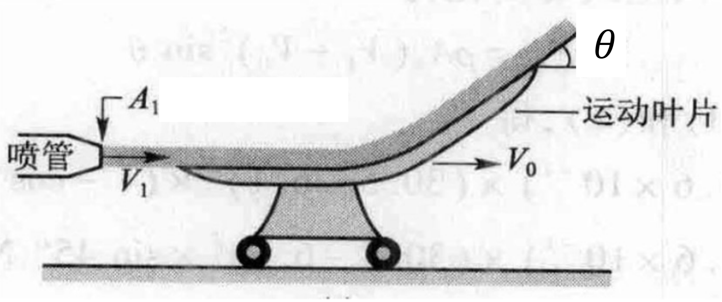
$$= V'_2\cos60°\rho V'_2 A_1 \text{-} V'_1\rho V'_1 A_1$$

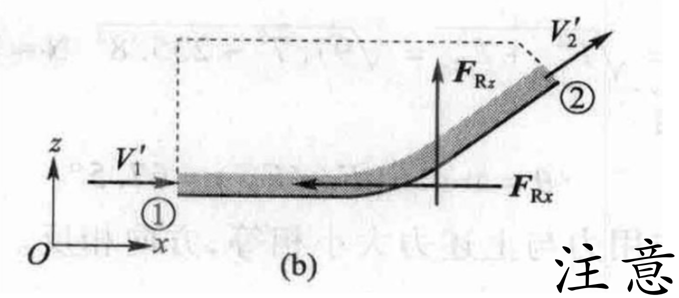
$$= \rho V_2'^2 A_1(\cos60°\text{-}1) = -599N$$

射流对叶片作用力F'_{Rx}=-$F_{Rx} = -599N$，向右。

4.5 动量方程（牛顿第二定律） 坐标系匀速运动！

例 3. 如图水平射流冲击光滑叶片，喷管出口水流速度为$V_1 = 30m/s$，喷管出口截面积$A_1 = 0.003m^2$。叶片转角$\theta = 60^o$，匀速向右运动$V_0 = 10m/s$，$\rho_w = 999\,kg/m^3$。求：射流对叶片表面的作用力。





解：对C.V.，y方向动量方程：

$$F_{Ry} = \int_{CS} u_y \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})dS$$ （定常，射流受y方向作用力为F_{Ry}）

$$= V'_2 sin60° \rho V'_2 A_1 + 0$$

$$= \rho V_2'^2 A_1 sin60° \ = 1040N$$

射流对叶片作用力$F'_{Ry} = -F_{Ry} = -1040N$，向下。

注意：1. C.V.选择时$\vec{V} \perp \vec{n}$或$\vec{V} // \vec{n}$；

2. 坐标系运动，C.V.固定于坐标系。

投票 最多可选1项

设置

是否理解移动坐标系中固定控制体？

A 是

B 否

C 还需课后复习

提交

4.6 能量方程（热力学第一定律）：

能量守恒：$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{dE}{dt}_{sys}$

$\dot{Q}$: 外界对流体传递的热量

$\dot{W}$: 外界对流体作功

① $\begin{cases} \frac{dN}{dt}_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta\rho d\forall + \int_{CS} \eta\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS \\ N = E, \eta = e \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{dE_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho d\forall + \int_{CS} e\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$ ②

① + ② $\Rightarrow \dot{Q} + \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho d\forall + \int_{CS} e\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$ $e =$ ？？

C.V.内能量变化率

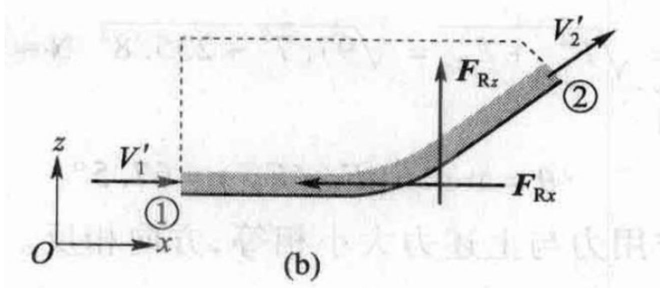
流出C.V.的静能量流率

◆ $e = \hat{u} + \frac{V^2}{2} + gz$

单位质量能量 内能 动能 势能

4.6 能量方程（热力学第一定律）：

$$\dot Q + \dot W = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho d\mathcal{V} + \int_{CS} e\rho(\vec V\cdot\vec n)dS$$

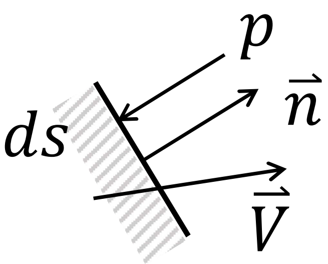


- $e = \hat u + \dfrac{V^2}{2} + gz$
- $\dot Q = \int_{CS}(\vec q\cdot\vec n)dS$， $\vec q$单位面积热流率。
- $\dot W = \dot W_{轴} + \dot W_p + \cancel{\dot W_v}$　　$\dot W_p = \int_{CS} -p(\vec V\cdot\vec n)dS$　　$\dot W_v = \int_{CS}\vec\tau\cdot\vec V\, dS$

旋转机械作功　压力作功　粘性力作功

壁面：$\vec V$=0 → $\dot W_v$ =0

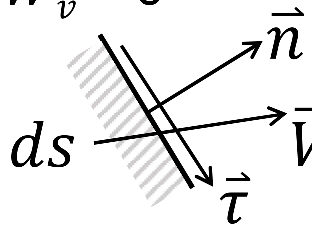
出入口：$\vec\tau \perp \vec V$ → $\dot W_v$ =0



$$\dot W = \vec F\cdot\vec V$$

$$d\dot W_p = (-p\vec n dS)\cdot\vec V = -p(\vec V\cdot\vec n)dS$$

$$d\dot W_v = (\vec\tau dS)\cdot\vec V = \vec\tau\cdot\vec V\, dS$$



4.6 能量方程（热力学第一定律）：

$$\dot{Q}+\dot{W}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}e\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

- $e=\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz$　$\dot{W}=\dot{W}_{轴}+\dot{W}_p+\dot{W}_v$　$\dot{W}_p=\int_{CS}-p(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$　$\dot{W}_v\approx 0$

$$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}\boxed{-\int_{CS}p(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\boxed{\int_{CS}e\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}$$

$$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}(e+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

$$\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}(\underbrace{\hat{u}}_{\text{内能}}+\underbrace{\frac{V^2}{2}}_{\text{动能}}+\underbrace{gz}_{\text{势能}}+\underbrace{\frac{p}{\rho}}_{\text{压力能}})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

$$\hat{u}=CvT,\quad h=\hat{u}+\frac{p}{\rho}=C_pT\quad(焓)$$

作业:

复习笔记!

P241 . 6.3，6.6，6.7

P244 . 6.16，6.20, 6.23，6.26，6.28

学习课本例题：例6.7~6.17

多多练习!

回顾：

1.系统、控制体；

2.雷诺输运定理： $\frac{dM}{dt}_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall + \int_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$

3.连续性方程（质量守恒）： $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall + \int_{CS} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0$

4.动量方程： $\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V} \rho d\forall + \int_{CS} \vec{V} \rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS$

5.能量方程： $\dot{Q} + \dot{W}_{轴} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho d\forall + \int_{CS} (\hat{u} + \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho})\rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$

6.应用。