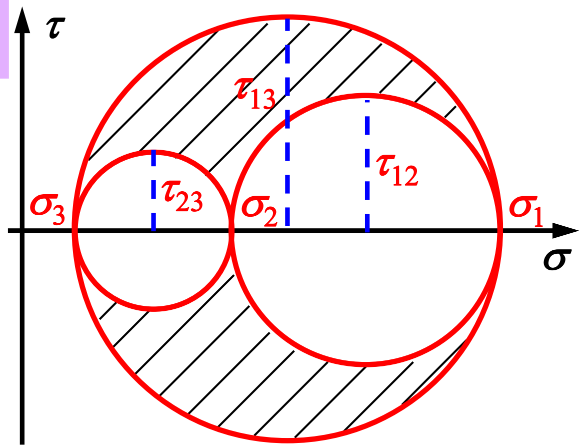
上节课内容回顾

三向应力状态



$$\sigma_{\min}^{\max} = \begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_3\end{matrix}$$

$$\tau_{\min}^{\max} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{\tau_{12}^{\ 2} + \tau_{23}^{\ 2} + \tau_{13}^{\ 2}}{3}}$$

广义胡克定律：

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

电阻应变测量法：

$$\varepsilon_{读} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

第八章 强度理论

- 强度理论的概念
- 常用强度理论
- 其他强度理论简介(部分自学)
- 强度理论的应用

学前问题：

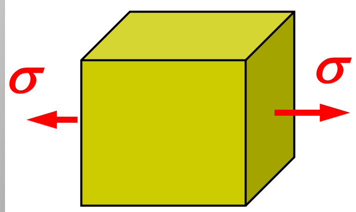
- 何为强度理论?
- 为何要研究强度理论?
- 四个经典强度理论?

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

8-1 强度理论的概念

拉伸的强度条件

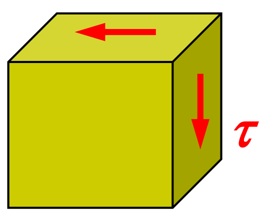


$$\sigma = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} \le [\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}$$

$$\sigma^0 = \begin{cases} \sigma_{\mathrm{s}} \\ \sigma_{\mathrm{b}} \end{cases}$$

单次拉伸实验确定

扭转的强度条件

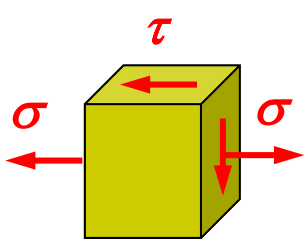


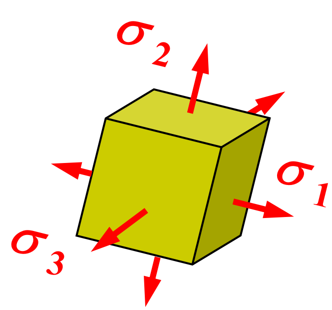
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \le [\tau] = \frac{\tau^0}{n}$$

$$\tau^0 = \begin{cases} \tau_{\mathrm{s}} \\ \tau_{\mathrm{b}} \end{cases}$$

单次扭转实验确定

拉伸和扭转组合变形的强度条件?





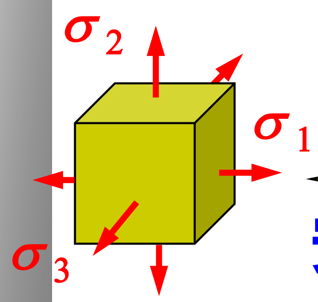
对于复杂应力状态，破坏与主应力的大小和它们的比值相关，无法通过有限次实验得到破坏应力！

8-1 强度理论的概念

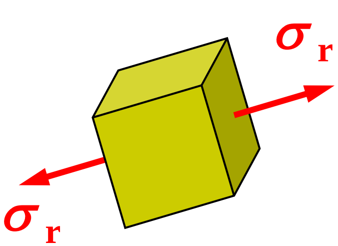
分清破坏形式
分析破坏原因
分离破坏因素

→ **总结破坏规律** → 提出破坏假设
通过实验验证 → **强度理论**

强度理论 (Strength Theory)：
关于材料破坏原因的一种假说



强度理论
⟷
安全程度相同



单次拉伸实验
⟷
安全因数

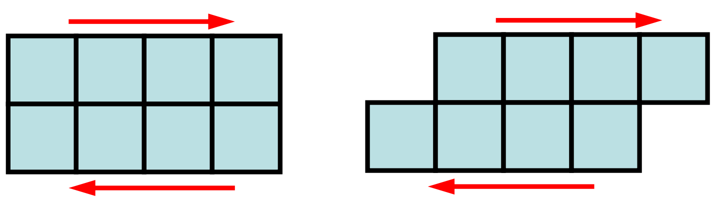
$$\sigma_r \le [\sigma]$$

8-1 强度理论的概念

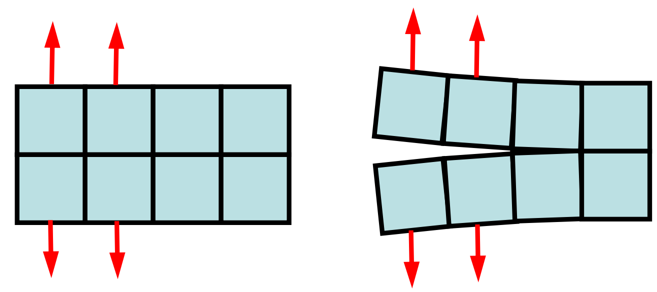
强度理论的基本观点：

- 宏观破坏现象 塑性屈服 脆性断裂 破坏原因 剪切应力 拉伸应力

微观破坏现象



晶格滑移



晶格断裂

- 形式相同的破坏，其原因与应力状态无关。

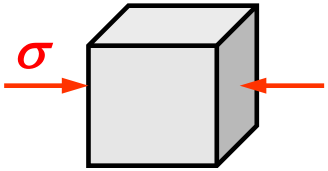
8-2 常用强度理论

（一）第一强度理论（最大拉应力理论）

● 材料发生脆性断裂的主要原因是**最大拉应力**；

● 在复杂应力状态下，只要最大拉应力σ_1达到了简单拉伸试验所确定的极限应力σ_b时，材料就会发生脆性断裂。

● 断裂判据： $\sigma_1 = \sigma_b$



● 强度条件： $\sigma_1 \leq \dfrac{\sigma_b}{n} = [\sigma]$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -\sigma$

●最大拉应力强度理论在17世纪由伽利略提出，可以很好地解释脆性材料拉断的现象，但没有考虑另外两个主应力的影响，**无法应用于只有压应力的情况。**

8-2 常用强度理论

（二）第二强度理论（最大拉应变理论）

● 材料发生脆性断裂的主要原因是最大拉应变；

● 在复杂应力状态下，只要最大拉应变ε_1达到了简单拉伸试验所确定的极限应变ε_b时，材料就会发生脆性断裂。

● 断裂判据：$\varepsilon_1=\varepsilon_b \quad \Rightarrow \sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_b$

$$\because \varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)],\varepsilon_b=\frac{\sigma_b}{E}$$

● 强度条件：$\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)\le\frac{\sigma_b}{n}=[\sigma]$

●最大拉应变理论最早由马略特在17世纪后期提出。这一理论能较好地解释石料、混凝土等脆性材料，受轴向压缩而沿纵向截面开裂的现象。

(三)第三强度理论(最大切应力理论)

- 材料发生塑性屈服的主要原因是**最大切应力**;
- 在复杂应力状态下,只要最大切应力τ_{max}达到了简单拉伸试验所确定的极限切应力τ_s时,材料就会发生塑性屈服。
- 屈服判据: $\tau_{max}=\tau_s \quad \Rightarrow \sigma_1-\sigma_3=\sigma_s$

$$\because \tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3),\tau_s=\frac{\sigma_s}{2}$$

- 强度条件: $\sigma_1-\sigma_3\le\frac{\sigma_s}{n}=[\sigma]$

- 最大切应力理论最早由**库伦**提出,后经**屈雷斯卡**完善。这个理论很好地解释了塑性材料的屈服现象,但它没有考虑中间主应力σ_2的影响,与实验相比,**理论计算偏于安全**。

8-2 常用强度理论

$$\tau_{\mathrm{m}}=\sqrt{\frac{\tau_{12}{}^{2}+\tau_{23}{}^{2}+\tau_{13}{}^{2}}{3}}$$

(四)第四强度理论(均方根切应力理论)

- 材料发生屈服的主要原因是**均方根切应力**;
- 在复杂应力状态下,只要均方根切应力τ_{m}达到了简单拉伸试验所确定的极限均方根切应力$\tau_{\mathrm{m}}{}^{0}$时,材料就会发生塑性屈服。
- **屈服判据:** $\tau_{\mathrm{m}}=\tau_{\mathrm{m}}{}^{0}$

$$\tau_{\mathrm{m}}=\sqrt{\frac{1}{12}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2]},\quad \tau_{\mathrm{m}}{}^{0}=\frac{\sqrt{6}}{6}\sigma_{\mathrm{s}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2]}=\sigma_{\mathrm{s}}$$

- **强度条件:** $\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2]}\le\frac{\sigma_{\mathrm{s}}}{n}=[\sigma]$

- 均方根切应力理论最早由**胡贝尔**和**米塞斯**以不同形式提出,后经亨奇用**形状改变比能**进一步解释与论证,所以也称为形状改变比能理论。这一理论**比第三强度理论更符合实验结果**。

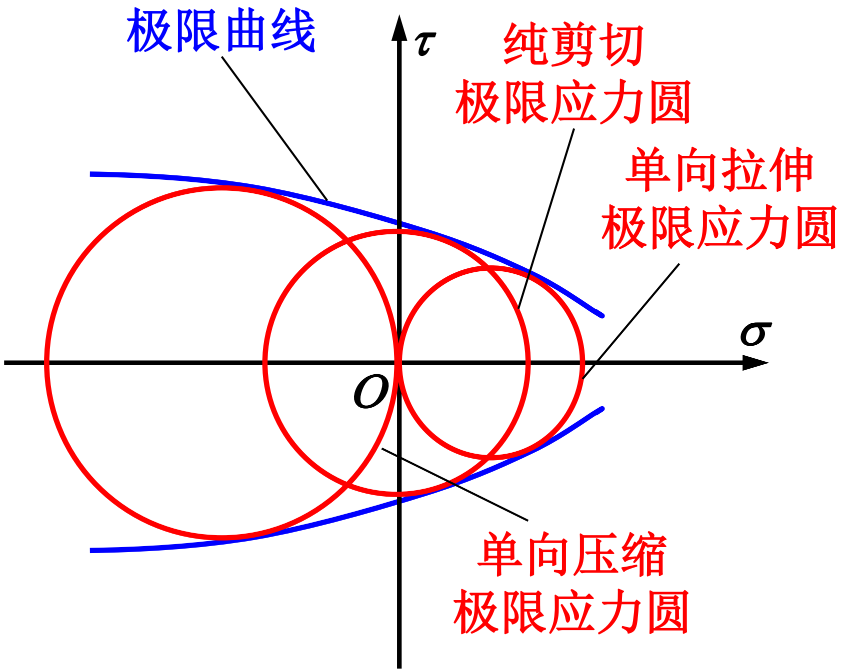
8-3 其他强度理论简介

莫尔强度理论(Mohr Strength Theory)

◆ 某些拉压强度不等的脆性材料，在某些应力状态下，也可能发生屈服或剪断，其实验结果与第三、第四强度理论不符。

◆ 德国工程师莫尔在1900年提出了新的破坏假说，称为莫尔强度理论。

◆ 这一强度理论是建立在试验基础上的，通过莫尔应力圆来表述。

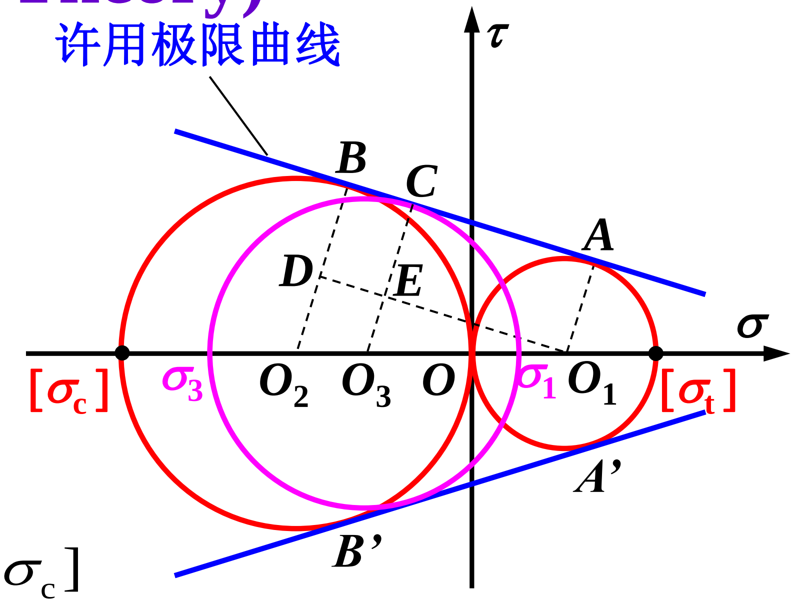


◆ 极限曲线与材料的性质有关，不同的材料极限曲线也不同。

◆ 任何应力状态下所对应的应力圆，与上述极限曲线相切时，则表明这一应力状态已经达到失效状态。

8-3 其他强度理论简介

莫尔强度理论(Mohr Strength Theory)



◆ 通常用**单向拉伸极限应力圆**和**单向压缩极限应力圆**，代替上述一组极限应力圆；

◆ 用这两个圆的**公切线**，代替包络线作为极限曲线。

几何关系 $\dfrac{O_1O_3}{O_1O_2}=\dfrac{O_3E}{O_2D}$

$$O_1O_3=\frac{[\sigma_t]}{2}-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} \qquad O_1O_2=\frac{[\sigma_t]}{2}+\frac{[\sigma_c]}{2}$$

$$O_3E=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}-\frac{[\sigma_t]}{2} \qquad O_2D=\frac{[\sigma_c]}{2}-\frac{[\sigma_t]}{2}$$

$[\sigma_t]$：抗拉许用应力

$[\sigma_c]$：抗压许用应力

破坏判据 $\sigma_1-\dfrac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3=[\sigma_t]$

强度条件 $\sigma_1-\dfrac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}\sigma_3\le[\sigma_t]$

若抗拉、抗压能力相同：

$$[\sigma_t]=[\sigma_c]\Rightarrow\sigma_1-\sigma_3\le[\sigma]$$

8-3 其他强度理论简介

双剪强度理论(Double Shear Strength Theory)

- 三个主应力都对塑性材料屈服有影响（第三强度理论有缺陷）。
- 三个极值切应力只用两个是独立的（第四强度理论有缺陷）。
- 塑性材料屈服的主要因素是两个较大的极值切应力之和。

$$\sigma_{yu} = \begin{cases} \tau_{13} + \tau_{12} = \sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) & (\tau_{12} \geq \tau_{23}) \\ \tau_{13} + \tau_{23} = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 & (\tau_{23} \geq \tau_{12}) \end{cases}$$

$$\sigma_{yu} = \begin{cases} \tau_{13} + \tau_{12} = \sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \dfrac{\sigma_s}{n} = [\sigma] & (\tau_{12} \geq \tau_{23}) \\ \tau_{13} + \tau_{23} = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 \leq \dfrac{\sigma_s}{n} = [\sigma] & (\tau_{23} \geq \tau_{12}) \end{cases}$$

- 能够更充分地发挥材料的承载能力（节约材料）；更好地符合很多材料的实验结果。
- 双剪强度理论由西安交通大学俞茂鋐教授于1961年提出。

8-4 强度理论的应用

（一）相当应力

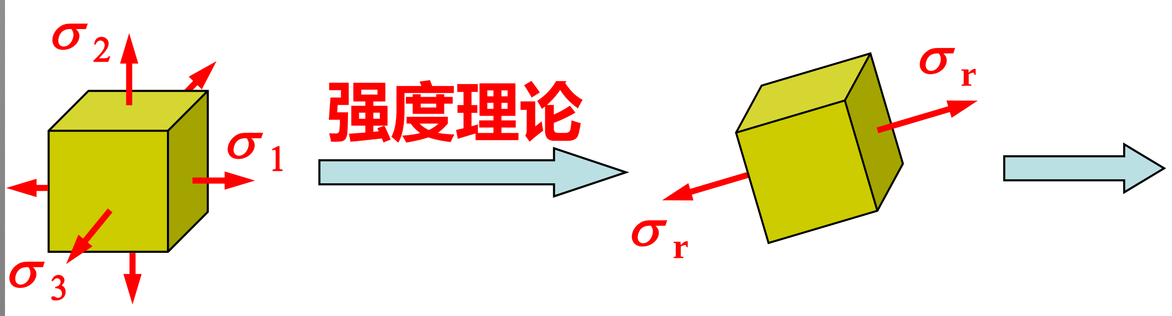
$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

统一写成 $\sigma_r \leq [\sigma]$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$



$$\sigma_r \leq [\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}$$

8-4 强度理论的应用

（二）强度理论的选用

（1）材料性质的影响

脆性材料　　第一、第二强度理论

塑性材料　　第三、第四强度理论

（2）应力状态、温度，加载速率的影响

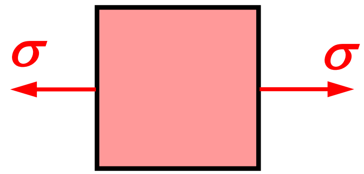
塑性材料　　三向等拉状态　　脆性断裂

脆性材料　　三向等压状态　　塑性屈服

在实际应用中，应根据材料可能发生的的破坏形式，或者结合断口分析，选择适合的强度理论进行计算。

8-4 强度理论的应用

例8-1 已知单向应力状态，求各相当应力。



单向拉伸

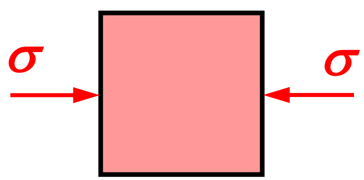
解： **主应力：** $\sigma_1=\sigma\,,\sigma_2=0\,,\sigma_3=0$

第一强度理论： $\sigma_{r1}=\sigma_1=\sigma$

第二强度理论： $\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)=\sigma$

第三强度理论： $\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sigma$

第四强度理论： $\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma^2+\sigma^2)}=\sigma$



单向压缩

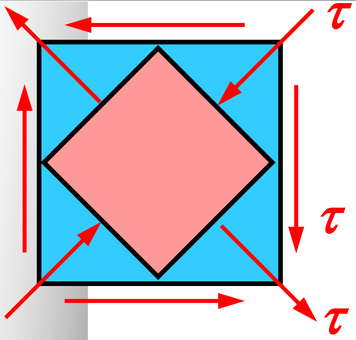
主应力： $\sigma_1=0\,,\sigma_2=0\,,\sigma_3=-\sigma$

第二强度理论： $\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)=\mu\sigma$

第三强度理论： $\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sigma$

第四强度理论： $\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma^2+\sigma^2)}=\sigma$

8-4 强度理论的应用



例8-2 已知纯剪切应力状态，求各相当应力。

解： 求主应力 $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$

第一强度理论： $\sigma_{r1} = \sigma_1 = \tau$

第二强度理论： $\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = (1+\mu)\tau$

第三强度理论： $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau$

第四强度理论： $\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}(\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2)} = \sqrt{3}\tau$

讨论： 许用切应力与许用拉应力之间的关系 $\sigma_r \le [\sigma], \tau = [\tau]$

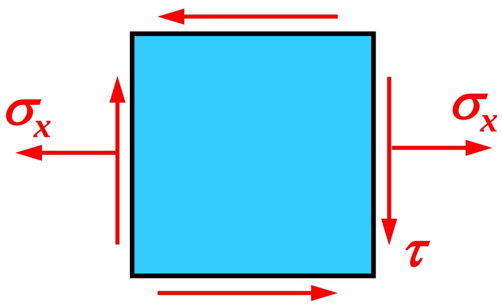
脆性材料 $\mu = 0.2 \sim 0.25$

通常取 $[\tau] = (0.8 \sim 1)[\sigma]$

塑性材料

通常取 $[\tau] = (0.5 \sim 0.6)[\sigma]$

8-4 强度理论的应用



例8-3 已知拉剪应力状态如图，求 $\sigma_{\mathrm{r}i}$ $(i=3,4)$

解：求主应力

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_x}{2})^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

(可以当公式使用)

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x}{2})^2 + \tau^2}$$

第三强度理论

$$\sigma_{\mathrm{r}3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x{}^2 + 4\tau^2}$$

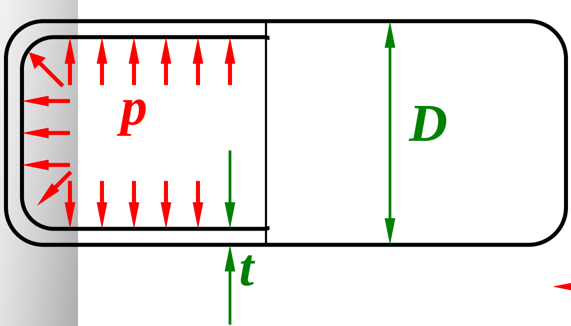
第四强度理论

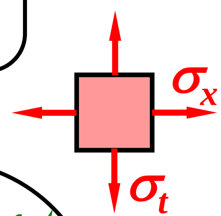
(可以当公式使用)

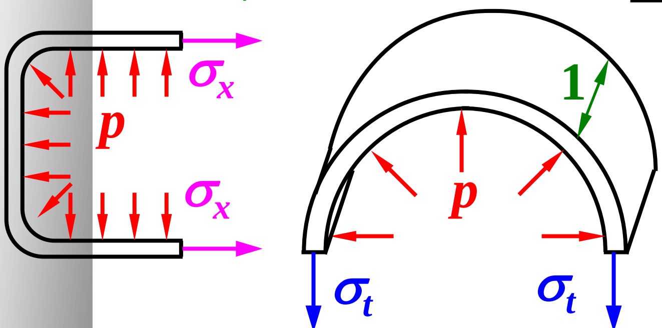
$$\sigma_{\mathrm{r}4} = \sqrt{\sigma_x{}^2 + 3\tau^2}$$

8-4 强度理论的应用

例8-4 已知圆柱形锅炉，D=1m，t=10mm，p=3.5MPa，$[\sigma]$=160MPa，试校核其强度。







解：轴向应力 $\sigma_x = \dfrac{p \cdot \pi D^2}{4 \cdot \pi D t} = \dfrac{pD}{4t}$

环向应力 $\sigma_t = \dfrac{1}{2t}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{pD\cos\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \dfrac{pD}{2t}$

$$\sigma_x = 87.5\text{MPa} \qquad \sigma_t = 175\text{MPa}$$

$$\sigma_1 = 175\text{MPa}, \sigma_2 = 87.5\text{MPa}, \sigma_3 \approx 0$$

按第三强度理论： $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 175\text{MPa}$ ***强度不足！***

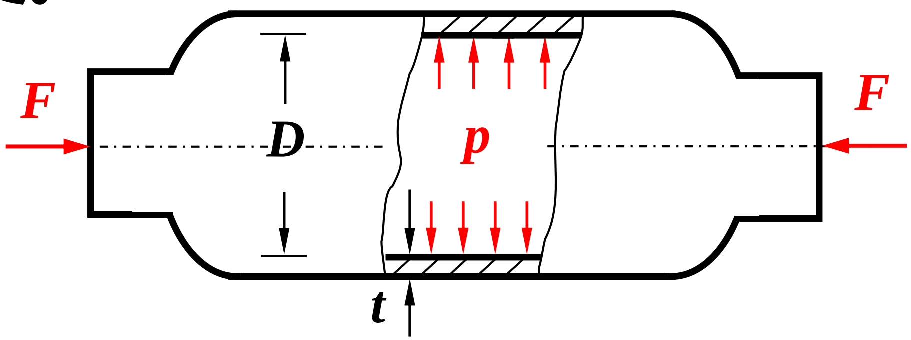
按第四强度理论： $\sigma_{r4} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(87.5^2 + 87.5^2 + 175^2)} = 151.6\text{MPa}$

强度足够！

按双剪强度理论： $\sigma_{yu} = \sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = 131.25\text{MPa}$

8-4 强度理论的应用

例8- 5　两端封闭钢管，内径D=200mm，厚度t=4mm，承受内压p=3MPa及轴向压力F=200kN，许用应力[σ]=120MPa。试按第三强度理论校核钢管的强度。



解：1、圆筒轴向应力

$$\sigma_x = \frac{pD}{4t} - \frac{F}{\pi D t} = -42.1\text{MPa}$$

2、圆筒周向应力

$$\sigma_x = \frac{pD}{2t} = 75\text{MPa}$$

3、主应力

$$\sigma_1 = 75\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -42.1\text{MPa}$$

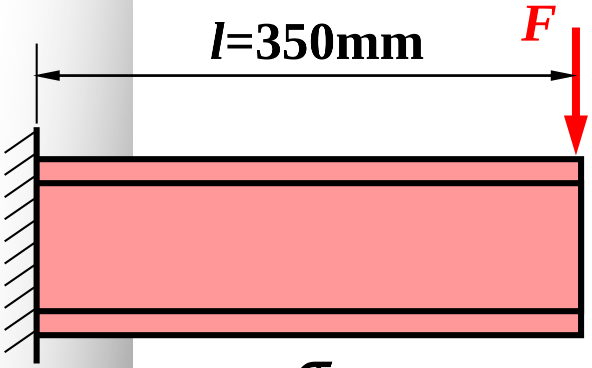
4、强度校核

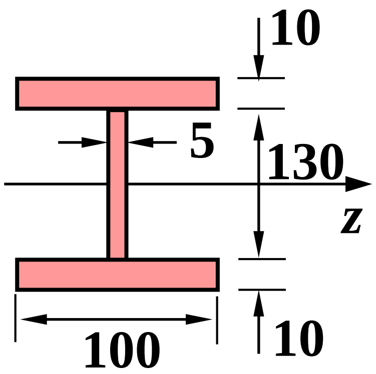
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$= 117.1\text{MPa} \le [\sigma]$$

钢管强度足够！

8-4 强度理论的应用

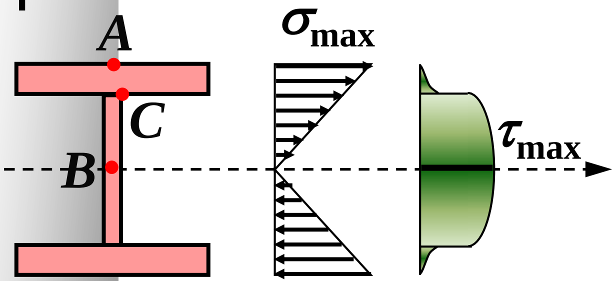




例8-6 $[\sigma]$=160MPa，F=50kN，I_z=1073cm^4，试按第四强度理论进行强度校核。

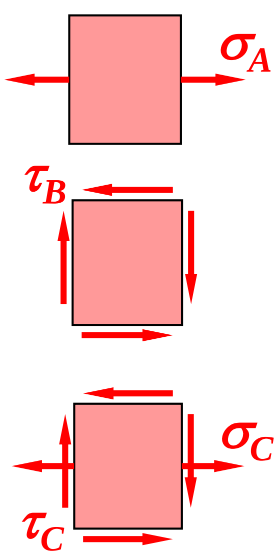
解： 1、危险截面：固定端

$|F_s|_{max}$=50kN　　$|M|_{max}$=17.5 kNm



2、危险点：A、B、C 三点

3、校核 *A* 点强度：$\sigma_A = \dfrac{|M|_{max}\, y_A}{I_z} = 122.3\text{MPa} \le [\sigma]$



4、校核 *B* 点强度：　$\tau_B = \dfrac{|F_s|_{max}\, S_z^{*max}}{dI_z} = 75.1\text{MPa}$

或者：$\tau_B \approx \dfrac{|F_s|_{max}}{A_{腹板}} = 76.9\text{MPa}$　　$\sigma_{r4} = \sqrt{3}\tau_B = 133.2\text{MPa} \le [\sigma]$

5、校核 *C* 点强度：

$\sigma_C = \dfrac{|M|_{max}\, y_C}{I_z} = 106\text{MPa}$　　　$\tau_C = \dfrac{|F_s|_{max}\, S_z^{*}}{dI_z} = 65.2\text{MPa}$

$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_C^2 + 3\tau_C^2} = 154.9\text{MPa} \le [\sigma]$　**强度足够！**

第八章的基本要求

1．理解强度理论的概念；

2．熟练掌握四个经典强度理论的概念和相当应力的计算。

今 日 作 业

8-4、8-6