# 空气与气体动力学

张科

## 回顾：

**1.能量方程：** $\dot{Q}+\dot{W}_{轴}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e\rho d\cancel{V}+\int_{CS}(\hat{u}+\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

定常、不可压、$\dot{Q}=\dot{W}_{轴}=0$：$Losses+\int_{CS}(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho})\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

$Losses=\int_{CS}\hat{u}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=\dot{m}\frac{V^2}{2}K=\dot{m}gh_L$

定常、不可压、无粘、沿流线、$\dot{Q}=\dot{W}_{轴}=0$: $\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)=constant$

伯努利方程 Bernoulle’s Equation

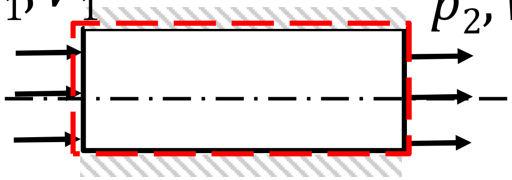
**2.方程熟记，理解物理含义，熟练应用（例4.5-4.10）。**

# 4.6 能量方程：

定常、不可压、$\dot{Q}=\dot{W}_{轴}=0$：

$$Losses+\int_{CS}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$$

例. 直径为$D$的圆管内流，空气，上下游压降为$\Delta p=p_1-p_2=1000Pa$。表面绝热，求$\Delta T$。




解：假设1D，定常，不可压。$\dot{Q}=\dot{W}_{轴}=0$。选控制体C.V.如图。

$$\Rightarrow\quad Losses+\int_{CS}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$$

1 D：$$Losses+\dot{m}\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_2-\dot{m}\left(\frac{V2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)_1=0$$

水平直管$D$不变：$V_1=V_2$，$z_1=z_2$。 $\Rightarrow$ $$Losses=\dot{m}\left(\frac{p_1}{\rho}-\frac{p_2}{\rho}\right)=\dot{m}\left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)\qquad ①$$

$$Losses=\dot{m}\ (\hat{u}_2-\hat{u}_1)=\dot{m}C_v\Delta T\qquad ②$$

① + ② $\Rightarrow$ $$\Delta T=\frac{\Delta p}{\rho C_v}=\frac{1000}{1.2\times 712}=1.17℃$$

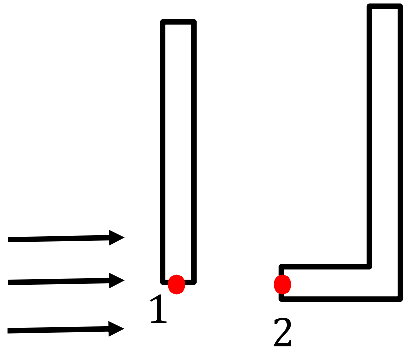
# 4.6 能量方程：

伯努利方程：$\left(\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = constant$

应用：1. 皮托管测速。

1点：$P_1, V_1, Z;$

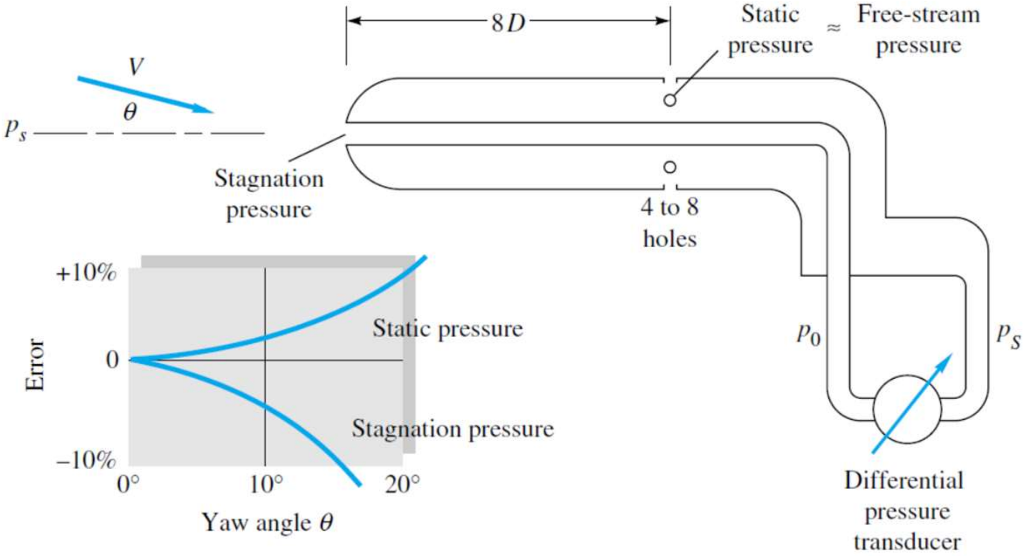
2点：$P_2, V_2, Z;$ 滞止点$V_2=0$




1-2间：$\frac{V_1^2}{2} + \cancel{gz} + \frac{p_1}{\rho} = \cancel{\frac{V_2^2}{2}} + \cancel{gz} + \frac{p_2}{\rho}$

$$\underbrace{p_2}_{\text{总压}p_T} = \underbrace{p_1}_{\text{静压}p_S} + \underbrace{\rho\frac{V_1^2}{2}}_{\text{动压}}$$

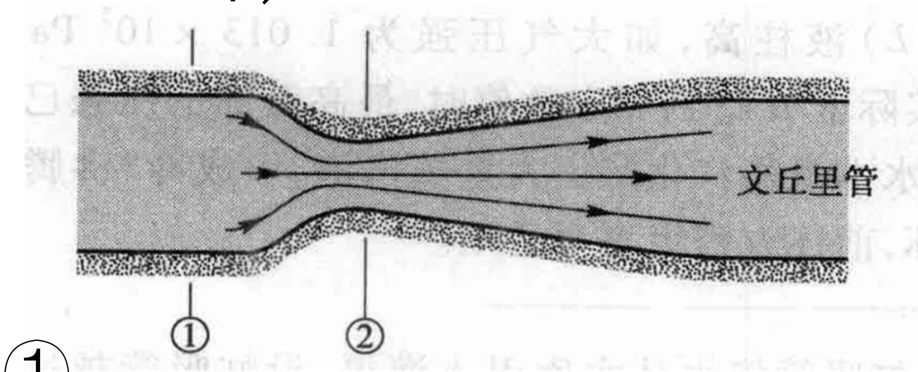
$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(p_T - p_S)}{\rho}}$$




# 4.6 能量方程：

伯努利方程：$\left(\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)=constant$

应用：2. 文丘里流量计。




1-2间：$\frac{V_1^{\ 2}}{2}+\cancel{gz}+\frac{p_1}{\rho}=\frac{V_2^{\ 2}}{2}+\cancel{gz}+\frac{p_2}{\rho}$

$$V_2^{\ 2}-V_1^{\ 2}=\frac{2\Delta p}{\rho},\ \Delta p=p_1-p_2 \qquad ①$$

连续方程：$A_1V_1=A_2V_2,\ V_1=(A_2/A_1)V_2=\beta^2V_2,\ \beta=D_2/D_1 \qquad ②$

① + ② ➡ $V_2=\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(1-\beta^4)}}$

$\boxed{\Delta p,\beta,A_2\rightarrow\dot{m}}$

质量流量：$\dot{m}=\rho V_2A_2=A_2\sqrt{\frac{2\rho\Delta p}{(1-\beta^4)}}$

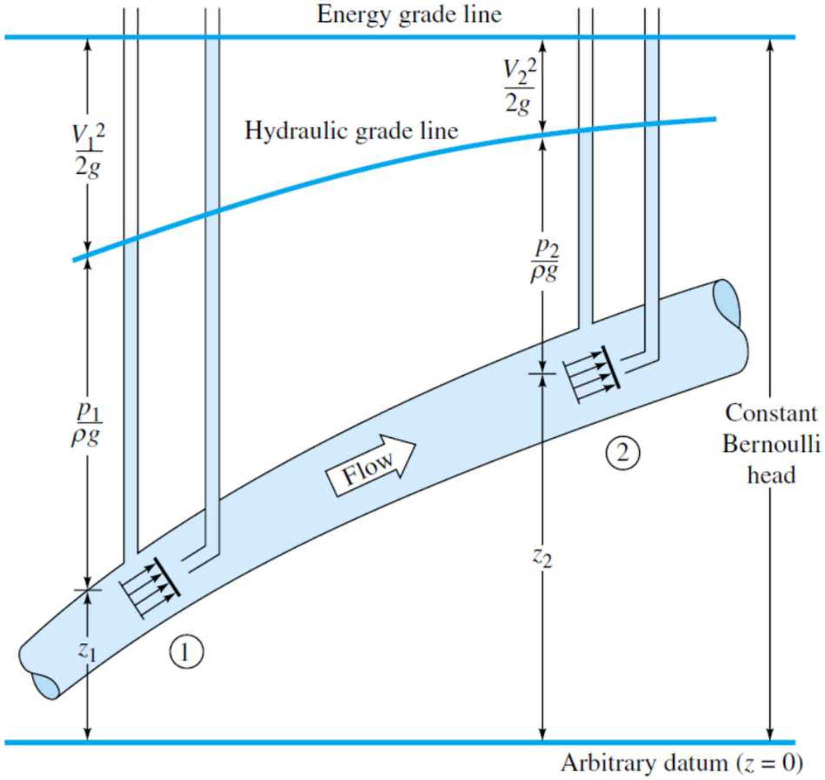
实际：$\dot{m}_{actual}=C_d\dot{m}_{ideal}$

$C_d$: discharge coefficient 流量系数

理想无粘流动！

# 4.6 能量方程：

伯努利方程：$\left(\frac{V^2}{2}\ \ +gz\ \ +\frac{p}{\rho}\right)=constant$

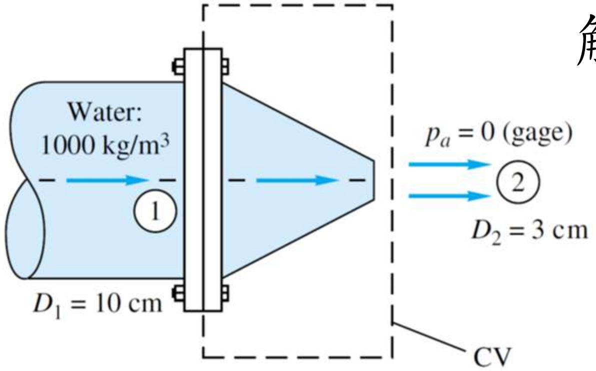


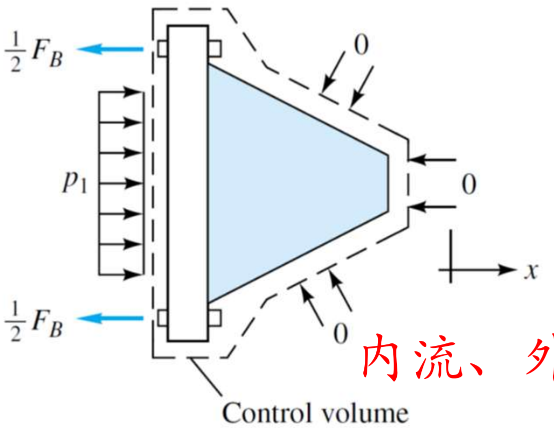

$$\frac{V^2}{2g}\ \ +z\ \ +\frac{p}{\rho g}=c$$ 长度量纲

用水头高度表示能量！

# 4.6 能量方程：

例．消防喷水管直径$D_1 = 10cm$，喷嘴出口直径$D_2 = 3cm$，以流量$Q = 1.5m^3/\min$向大气喷水。求使喷嘴固定螺栓所需施加的力。（无粘）




解：选控制体C.V.如图。假设定常，不可压。

连续性方程: $Q = A_1V_1 = A_2V_2 = 1.5m^3/\min$

$$V_2 = 35.4m/s \quad V_1 = 3.2m/s$$

控制体受力分析如图所示,大气压作用于整个C.V.合力为零，$p_1$为计示压强。

动量方程: $-F_B + p_1A_1 = \int_{CS} \vec{V}\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})dS$

$$= \dot{m}(V_2\text{-}V_1)$$

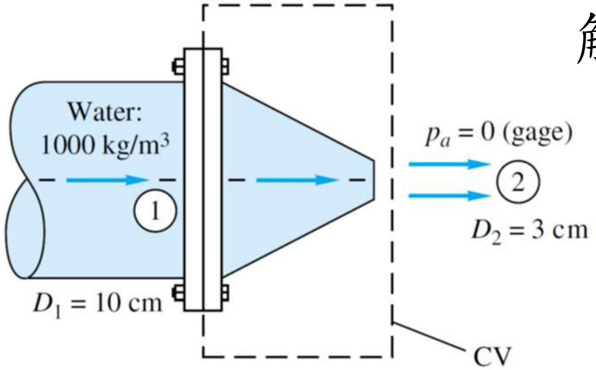
内流、外流区别

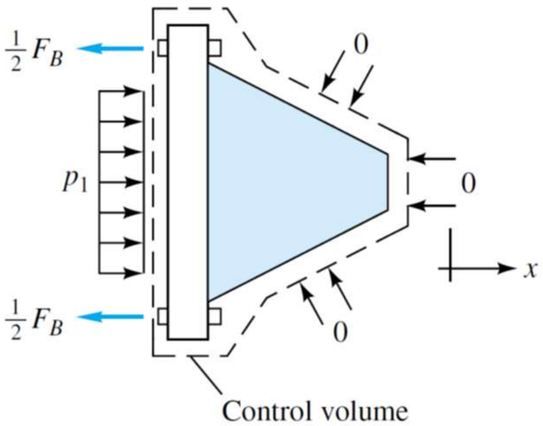
$$F_B = \boxed{p_1A_1} - \dot{m}(V_2 - V_1)$$

？？

# 4.6 能量方程：

例. 消防喷水管直径$D_1 = 10cm$，喷嘴出口直径$D_2 = 3cm$，以流量$Q = 1.5m^3/\text{min}$向大气喷水。求使喷嘴固定螺栓所需施加的力。（无粘)




解：能量方程（伯努利方程）：

$$\frac{V_1^{\ 2}}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^{\ 2}}{2} + \frac{p_2}{\rho} \qquad p_2 = 0$$

质量、动量、能量联合求解，综合问题！

$$p_1 = \frac{\rho}{2}(V_2^{\ 2} - V_1^{\ 2}) = 620kPa$$

$$F_B = p_1 A_1 - \dot{m}(V_2 - V_1)$$
$$= 620 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4}(0.1)^2 - 10^3 \times$$
$$3.2 \times \frac{\pi}{4}(0.1)^2 \times 3.2(35.42 - 3.22)$$
$$= 4067N$$

# 五. 流体动力学微分方程（3. 4, 3. 5, 4. 1–5. 2）

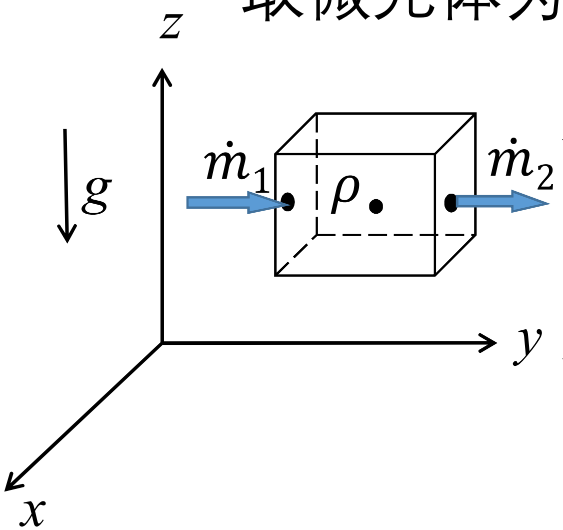
流体动力学
- 积分方程　有限体积内整体与外界质量、动量、能量交换，力、功、压降等；
- 微分方程　微元体控制方程，求物理量的空间分布

1. 质量守恒定律；
2. 动量定律；
3. 能量转换（热力学第一定律）；
4. 热力学第二定律。

# 5.1 微分形式连续性方程（质量守恒，3.5）

① 连续性方程： 积分方程： $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\mathcal{V}+\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$

取微元体为C.V.，边长$dx, dy, dz$，中心处密度$\rho$，三方向速度$u, v, w$。




对C.V.： $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\mathcal{V}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho dxdydz)=\frac{\partial\rho}{\partial t}(dxdydz)$

$$\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=\sum\dot{m}_{out}-\sum\dot{m}_{in}$$

沿$y$向，左面流入质量：$\dot{m}_1=\rho v dxdz$

右面流出质量：$\dot{m}_2=[\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy+\mathrm{H.O.T.}]dxdz$

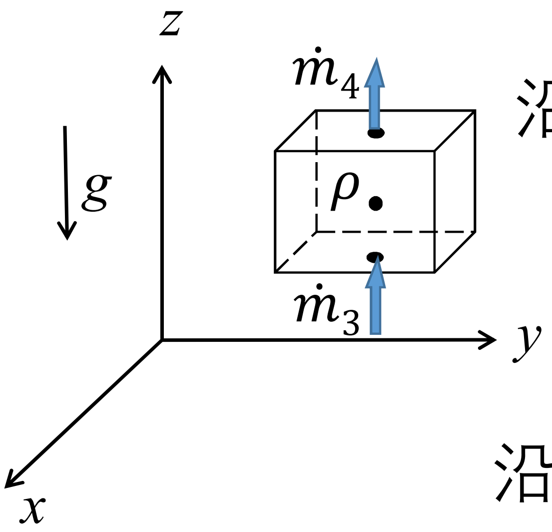
沿$y$向静流出质量流率：

$$\dot{m}_2-\dot{m}_1=\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\,dxdz$$

# 5.1 微分形式连续性方程（质量守恒，3.5）

① 连续性方程：积分方程： $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\forall + \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$

$$\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = \sum\dot{m}_{out} - \sum\dot{m}_{in}$$




沿$z$向，

下面流入质量：$\dot{m}_3 = \rho w dxdy$

上面流出质量：$\dot{m}_4 = [\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dz + \mathrm{H.O.T.}]dxdy$

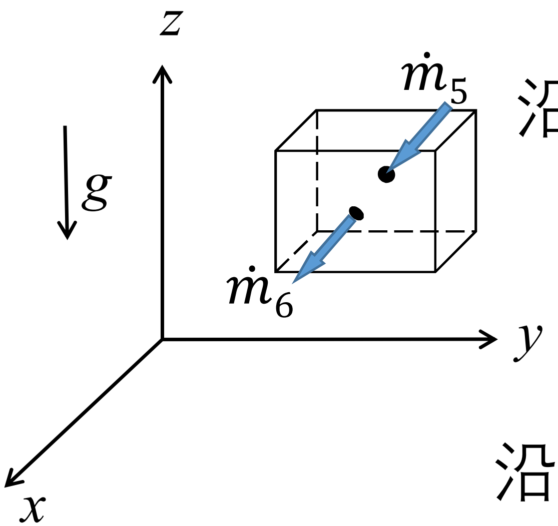
沿$z$向静流出质量流率：

$$\dot{m}_4 - \dot{m}_3 = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dz\,dxdy$$

## 5.1 微分形式连续性方程（质量守恒，3.5）

① 连续性方程：积分方程：$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\mathcal{V} + \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$

$$\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = \sum\dot{m}_{out} - \sum\dot{m}_{in}$$




沿$x$向，

后面流入质量：$\dot{m}_5 = \rho u dydz$

前面流出质量：$\dot{m}_6 = [\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx + \mathrm{H.O.T.}]dydz$

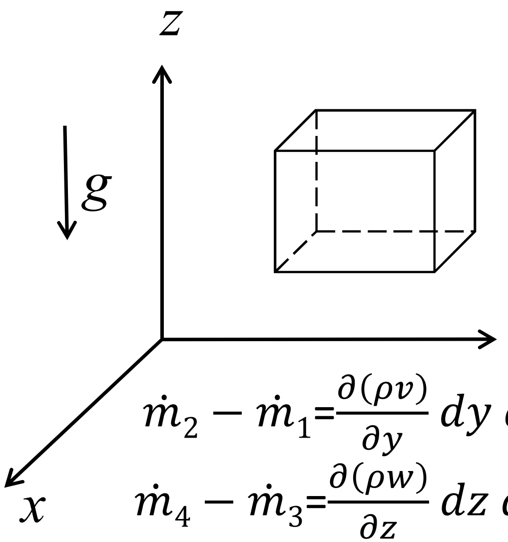
沿$x$向静流出质量流率：

$$\dot{m}_6 - \dot{m}_5 = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\, dydz$$

# 5.1 微分形式连续性方程（质量守恒，3.5）

① 连续性方程：积分方程：$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\forall + \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$

$$\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = \sum\dot{m}_{out} - \sum\dot{m}_{in}$$




流出C. S. 静流率：

$$\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = \dot{m}_2 - \dot{m}_1 + \dot{m}_4 - \dot{m}_3 + \dot{m}_6 - \dot{m}_5$$

$$=[\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}]\,dxdydz$$

$$=[\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})}]dxdydz$$

（$\vec{\nabla}\phi$，$\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi}$区别？？）

流出单位体积质量流率

$$\dot{m}_2 - \dot{m}_1 = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\,dxdz$$

$$\dot{m}_4 - \dot{m}_3 = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dz\,dxdy$$

$$\dot{m}_6 - \dot{m}_5 = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\,dydz$$

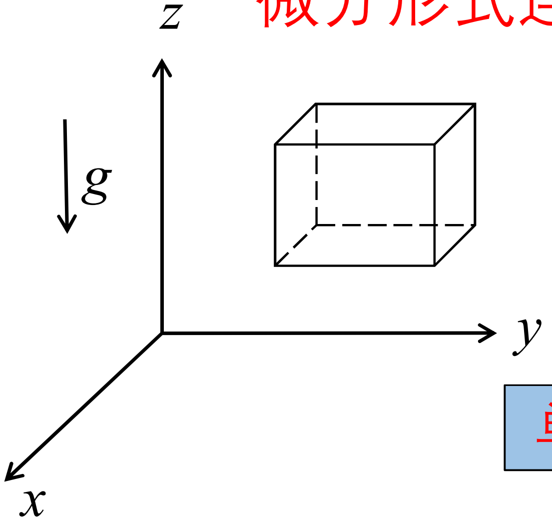
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\forall + \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = [\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}]dxdydz = 0$$

# 5.1 微分形式连续性方程（质量守恒，3.5）

① 连续性方程：积分方程： $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV + \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = 0$

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right]dxdydz = 0$$

微分形式连续性方程：




$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$ (直角坐标系下)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = 0$$

单位体积内质量增长率

流出单位体积质量流率

$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})$：流出单位体积质量流率； $\rho V_{\perp}$：流出单位面积质量流率； $\dot{m} = \int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{V})$：流出单位体积体积流率； $V_{\perp}$：流出单位面积体积流率； $Q = \int_{CS}(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

# 5.1 微分形式连续性方程（质量守恒，3.5）

② 连续性方程变形：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = \rho\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) + \vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\,\rho)$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\,\rho)} + \rho\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) = 0 \Leftarrow = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\,\rho)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$$

$$= \rho\frac{\partial(v)}{\partial y} + \rho\frac{\partial(w)}{\partial z} + \rho\frac{\partial(u)}{\partial x}$$

$$+ v\frac{\partial(\rho)}{\partial y} + w\frac{\partial(\rho)}{\partial z} + u\frac{\partial(\rho)}{\partial x}$$

③ 特例：

定常：$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = 0$

不可压：$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$

（均质不可压：$\rho = Constant$ ）

$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$→不可压，$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{1}{2}Ma^2$，$Ma=\frac{V}{C}<0.3$，不可压

# 5.1 微分形式连续性方程（质量守恒，3.5）

③ 特例： $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0$ $\qquad$ $\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)=0$

定常： $\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0$ $\qquad$ 不可压： $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$

柱坐标： $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{V}=V_r\overrightarrow{e_r}+V_\theta\overrightarrow{e_\theta}+V_z\vec{k}$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho V_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\rho V_r}{r}+\frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}=0$$

# 5.1 微分形式连续性方程（质量守恒，3.5）

③ 特例： $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0$ $\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)=0$

定常： $\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0$ 不可压： $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$

例. 已知$u=2xy, v=-x^2y, w=0$。问：流动是否可压？

解：若不可压，则: $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{\partial(u)}{\partial x}+\frac{\partial(v)}{\partial y}+\frac{\partial(w)}{\partial z}$$

$$=2y-x^2+0$$

$$\neq 0$$

$\Rightarrow$ 可压！

# 5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

① 加速度：$\vec{a}=\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$

当地加速度　　位变加速度

例. $\vec{V}=xy^2\vec{i}-\frac{1}{3}y^3\vec{j}+xy\vec{k}$。

求：(1)流动是否可压？（2）$\vec{a}$（1,2,3)。

解：（1）若不可压，则：$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{\partial(u)}{\partial x}+\frac{\partial(v)}{\partial y}+\frac{\partial(w)}{\partial z}$$

$$=y^2+(-\frac{1}{3}3y^2)+0$$

$$=0$$

满足$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$，流动不可压！

# 5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

① 加速度： $\vec{a}=\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{V}$

当地加速度　位变加速度

例. $\vec{V}=xy^2\vec{i}-\frac{1}{3}y^3\vec{j}+xy\vec{k}$。

求：(1)流动是否可压？ （2） $\vec{a}$ （1,2,3)。

解：（2） $\vec{a}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}=y^2\vec{i}+y\vec{k},\quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}=2xy\vec{i}-y^2\vec{j}+x\vec{k},\quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}=0$$

$$\vec{a}=0+xy^2(y^2\vec{i}+y\vec{k})+(-\frac{1}{3}y^3)(2xy\vec{i}-y^2\vec{j}+x\vec{k})+(xy)0$$

$$=\frac{xy^4}{3}\vec{i}+\frac{y^5}{3}\vec{j}+\frac{2xy^3}{3}x\vec{k}$$

作业:

复习笔记!

P100 . 3.23， 3.29

**回顾：**

**1.皮托管测速原理；**

**2.连续性方程：** $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0$ $\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)=0$

**3.特例：** 定常：$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0$ 不可压：$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$