第三部分 专题

第十章　能量法计算位移
第十一章　超静定系统
第十四章 压杆的稳定
第十五章 联接件的强度
第十二章 动载荷
第十三章 疲劳强度

航天航空学院--力学中心

第十章 能量法计算位移

- 概述
- 外力功与变形能
- 单位载荷法
- 图形互乘法
- 互等定理

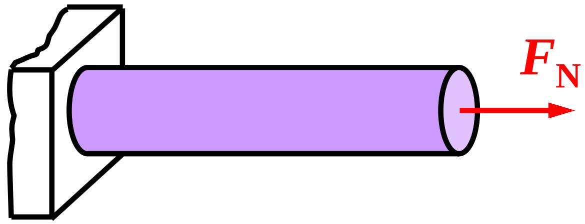
学前问题：

- 变形能的性质?
- 单位载荷法?

航天航空学院--力学中心

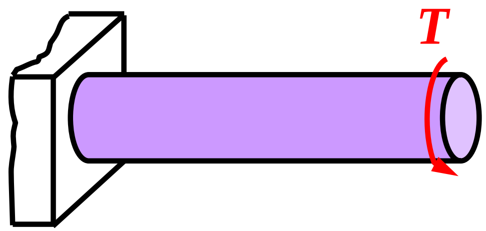
10-0　概述

拉压变形



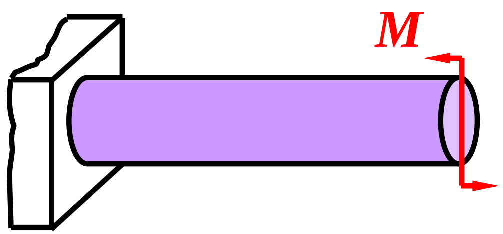
$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

扭转变形



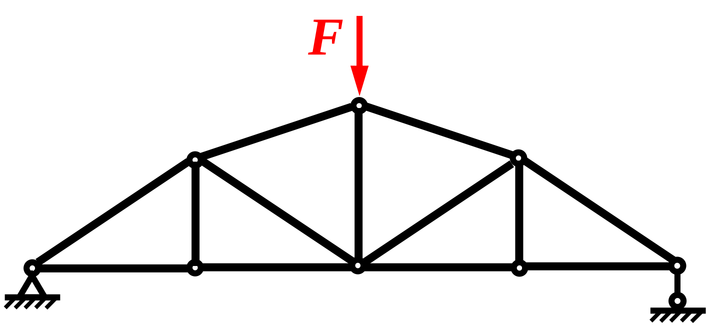
$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

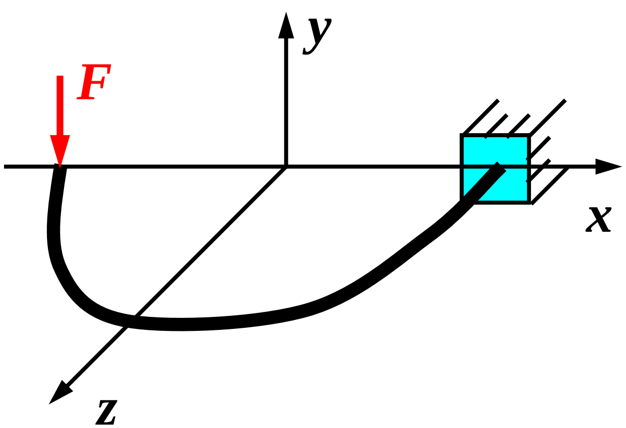
弯曲变形



$$\theta = \frac{Ml}{EI}$$

对于复杂变形，组合变形呢?





10-0　概述

- **能量法(Energy Method)**：应用能量的概念，计算构件或结构的变形，及与变形相关的其他问题。

- **外力功(External Work)**：载荷在其相应位移上作的功。

- **变形能(Strain Energy)**：不计能量损失，外力功将以能量的形式储存于弹性体中，称为弹性变形能，简称变形能。

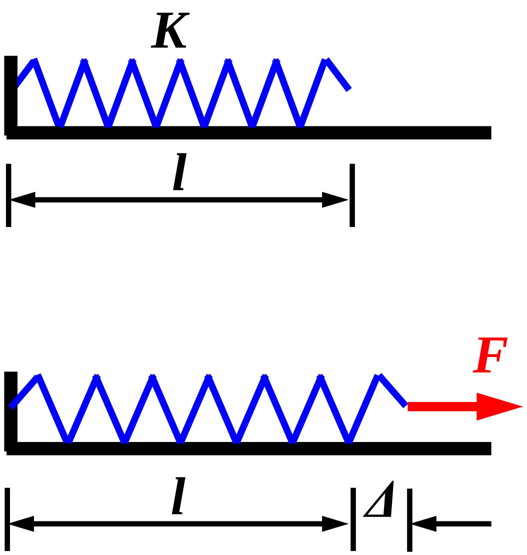
- **功能原理(Principle of Energy-work)**：外力功全部转化为杆件的变形能，是能量法中的最基本的原理。

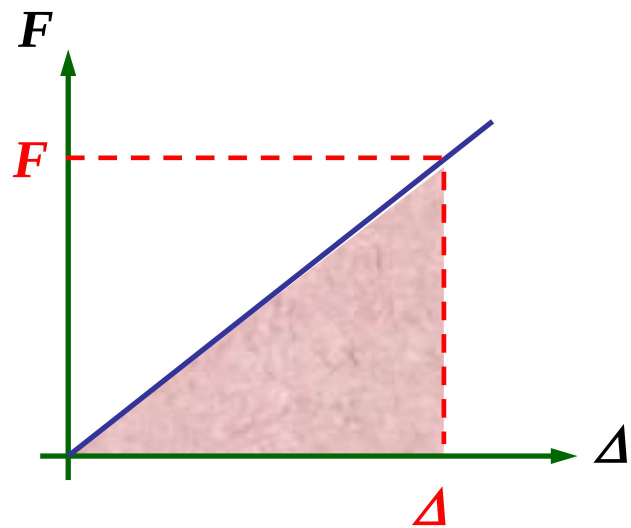
$$W = U$$

- **线弹性系统**：材料符合胡克定律，即载荷与变形、应力与应变成线性关系。

10-1　外力功与变形能

一、外力功



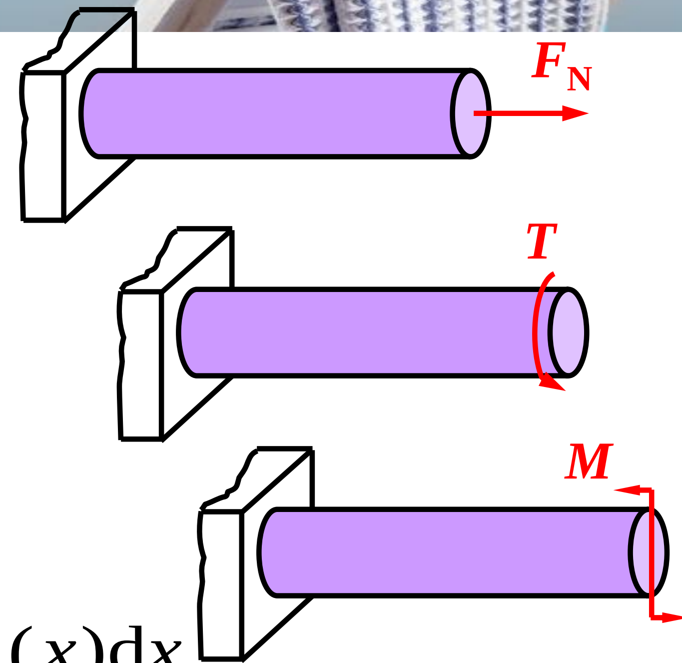


$$W = \frac{1}{2} F\Delta$$

在线弹性范围内，当载荷与其相应位移由零缓慢增加至最终值时，载荷所作的功等于载荷与相应位移乘积的一半。

10-1　外力功与变形能

二、杆件基本变形的变形能



1、轴向拉伸或压缩

$$U=W=\frac{1}{2}F_N\Delta l$$

若杆的轴力和截面不变化：

$$\Delta l=\frac{F_N l}{EA}\qquad U=\frac{F_N^{\,2}l}{2EA}$$

若杆的轴力和截面变化：

$$U=\int_l \frac{F_N^{\,2}(x)\mathrm{d}x}{2EA(x)}$$

2、扭转

$$U=W=\frac{1}{2}T\varphi\qquad U=\frac{T^2 l}{2GI_p}\qquad U=\int_l \frac{T^2(x)\mathrm{d}x}{2GI_p(x)}$$

3、弯曲

$$U=W=\frac{1}{2}M\theta\qquad U=\frac{M^2 l}{2EI}\qquad U=\int_l \frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI(x)}$$

注意：对于一般细长梁，剪切变形能相对于弯曲变形能可以忽略。

三、广义力与广义位移

广义力	广义位移
集中力	力作用点沿力方向的线位移
集中力偶	力偶作用面沿力偶方向的转角
一对等值反向的集中力	两力作用点的相对位移
一对等值反向的力偶	两力偶作用面的相对转角

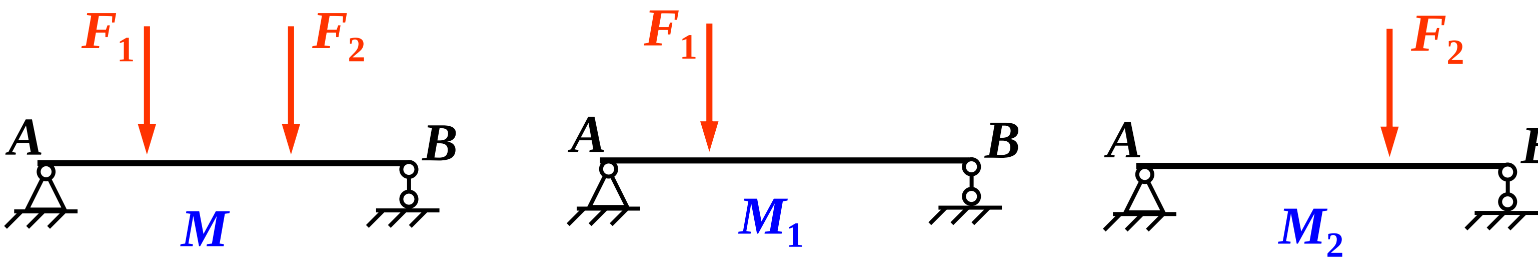
$$W=\frac{1}{2}F_i\Delta_i$$

广义力和相应广义位移的乘积具有功的量纲！

10-1 外力功与变形能

四、变形能的基本性质

1、变形能只与构件受力和变形的最终状态有关，与加载顺序无关；



同时加 F_2 和 F_1 $\quad M = M_1 + M_2$

先加 F_1 后加 F_2 $\quad M = M_1 + M_2$

先加 F_2 后加 F_1 $\quad M = M_1 + M_2$

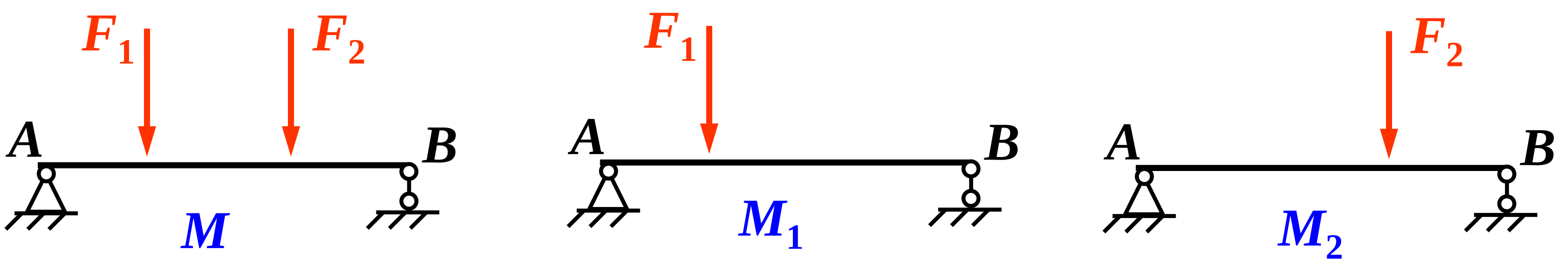
$$U = \int_l \frac{M^2 \mathrm{d} x}{2EI}$$

内力不因加载顺序而改变，变形能也不变。

10-1 外力功与变形能

四、变形能的基本性质

2、几个载荷共同产生一种基本变形时，不等于各个载荷产生的变形能之和（基本变形能不满足叠加原理）；

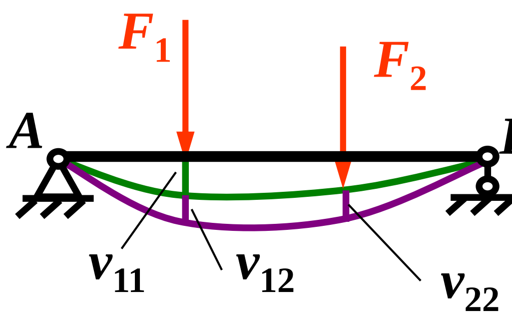


$$U=\int_l \frac{(M_1+M_2)^2\mathrm{d}x}{2EI}\neq\int_l \frac{M_1{}^2\mathrm{d}x}{2EI}+\int_l \frac{M_2{}^2\mathrm{d}x}{2EI}=U_1+U_2$$

先作用F_1，再作用F_2，作的总功为：

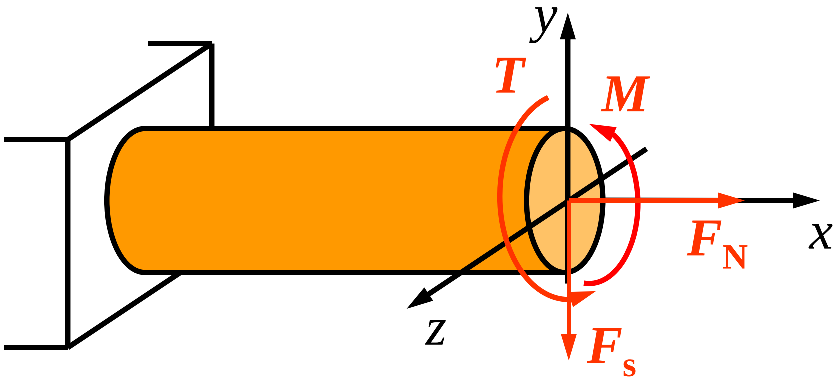
$$W=\frac{1}{2}F_1v_{11}+\frac{1}{2}F_2v_{22}+F_1v_{12}$$

(附加功)



四、变形能的基本性质

3、当杆内有两种或两种以上的内力（基本变形）时，总变形能等于各个基本变形的变形能之和。



$$U=\int_l \frac{F_N^2(x)\mathrm{d}x}{2EA(x)}+\int_l \frac{T^2(x)\mathrm{d}x}{2GI_p(x)}+\int_l \frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI(x)}$$

五、功能原理

当杆件有多个载荷作用，引起组合变形时：

$$W=\frac{1}{2}F_1\Delta_1+\frac{1}{2}F_2\Delta_2+\frac{1}{2}F_3\Delta_3+\ldots$$

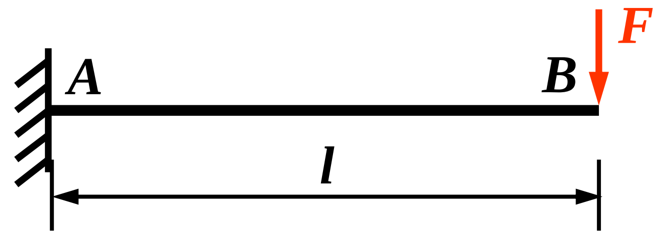
$$U=\int_l\frac{F_{\mathrm{N}}^2(x)\mathrm{d}x}{2EA(x)}+\int_l\frac{T^2(x)\mathrm{d}x}{2GI_{\mathrm{p}}(x)}+\int_l\frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI(x)}$$

忽略动能、热能、声能等其他它能量!

功能原理： $W=U$

例10-1：悬臂梁受力如图，抗弯刚度为EI，求B点的挠度v_B。

解： **弯矩方程**　$M(x) = -Fx$



变形能

$$U = \int_l \frac{M^2(x)\,\mathrm{d}x}{2EI} = \int_0^l \frac{F^2x^2\,\mathrm{d}x}{2EI} = \frac{F^2l^3}{6EI}$$

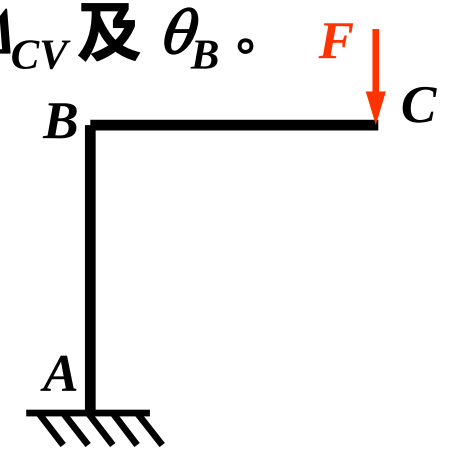
外力功　$W = \dfrac{Fv_B}{2}$

功能原理　$W = U$　　$\dfrac{F^2l^3}{6EI} = \dfrac{Fv_B}{2}$

解得　$v_B = \dfrac{Fl^3}{3EI}(\downarrow)$

10-1 外力功与变形能

例10-2： 已知折杆边长为a，抗弯刚度为EI，求Δ_{CV}及 θ_B。

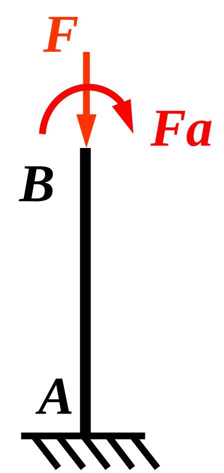


解法一：逐段刚化法　忽略了拉压变形

刚化AB段　$\theta^{1}{}_{B}=0$　　$\Delta^{1}{}_{CV}=\dfrac{Fa^{3}}{3EI}(\downarrow)$

刚化BC段　$\theta^{2}{}_{B}=\dfrac{Fa\cdot a}{EI}(\circlearrowright)$

$$\Delta^{2}{}_{CV}=\theta_{B}\cdot a=\frac{Fa\cdot a}{EI}\cdot a\,(\downarrow)$$

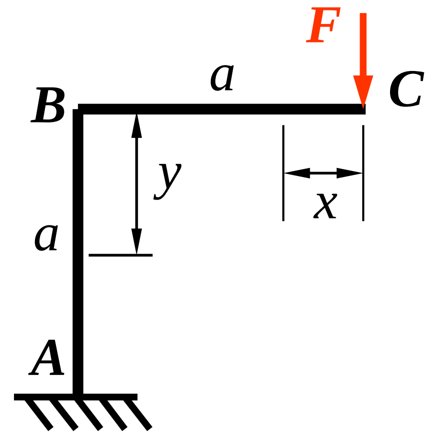


叠加　$\Delta_{CV}=\Delta^{1}{}_{CV}+\Delta^{2}{}_{CV}=\dfrac{4Fa^{3}}{3EI}(\downarrow)$

$$\theta_{B}=\theta^{1}{}_{B}+\theta^{2}{}_{B}=\frac{Fa^{2}}{EI}(\circlearrowright)$$

10-1 外力功与变形能

例10-2： 已知折杆边长为a，抗弯刚度为EI，求Δ_{CV}及 θ_B。



解法二：功能原理 $W=U$ **忽略了拉压变形**

外力功 $W=\dfrac{1}{2}F\Delta_{CV}$ **变形能** $U=\displaystyle\int_l \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$

弯矩方程 $M(x)=-Fx \quad M(y)=-Fa$

$$U=\frac{1}{2EI}\left[\int_0^a(-Fx)^2\mathrm{d}x+\int_0^a(-Fa)^2\mathrm{d}y\right]=\frac{2F^2a^3}{3EI}$$

解得 $\Delta_{CV}=\dfrac{4Fa^3}{3EI}(\downarrow)$ θ_B**无法求解** **设** $i^2=I/A$

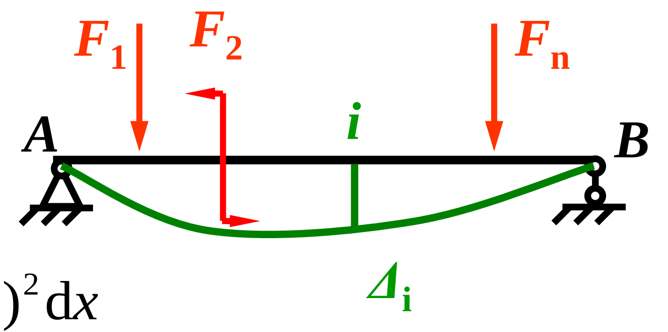
讨论1：考虑拉压变形 $U=\dfrac{2F^2a^3}{3EI}+\dfrac{F^2a}{EA}=\dfrac{2F^2a^3}{3EI}+\dfrac{F^2a^3}{EI}\left(\dfrac{i^2}{a^2}\right)$

一般细长杆 $i<<l$，故拉压变形能相对于弯曲变形能可忽略。

讨论2：此法局限于只作用一个广义力，且所求位移为该广义力所对应的广义位移的简单情况。

10-2　单位载荷法

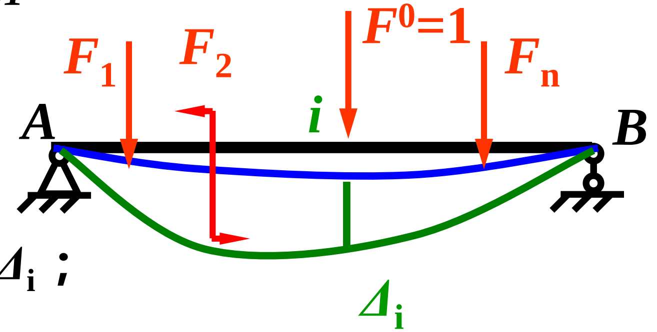
以梁弯曲为例，推导单位载荷法：



1、一梁上有多个广义载荷作用；

2、需确定在梁的 *i* 点产生广义位移$\varDelta_{\rm i}$；

3、此时梁的弯矩为 $M(x)$；变形能为 $W = U = \int_l \frac{M(x)^2 \mathrm{d}x}{2EI}$



4、若在梁 *i* 点先单独作用一单位力F^0， 梁变形能为：

$$W^0 = U^0 = \int_l \frac{[M^0(x)]^2 \mathrm{d}x}{2EI}$$

5、此时再将原载荷作用于梁上，在 *i* 点产生了广义位移$\varDelta_{\rm i}$；

6、总外力功为： $W^{all} = W^0 + W + F^0 \cdot \Delta_i = U^0 + U + \Delta_i$

7、总变形能为： $U^{all} = \int_l \frac{[M^0(x) + M(x)]^2 \mathrm{d}x}{2EI} = U^0 + U + \int_l \frac{2M^0(x)M(x)\mathrm{d}x}{2EI}$

8、总外力功与总变形能相等，得： $\boxed{\Delta_i = \int_l \frac{M(x)M^0(x)\mathrm{d}x}{EI}}$

单位载荷法
(Unit load method)
莫尔积分

10-2　单位载荷法

单位载荷法的基本步骤：

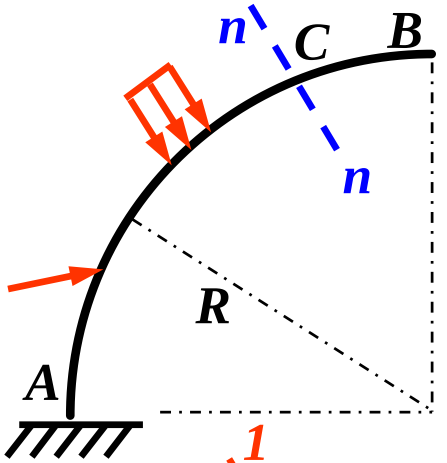
1. 列内力方程，如弯矩方程 $M(x)$ 等；

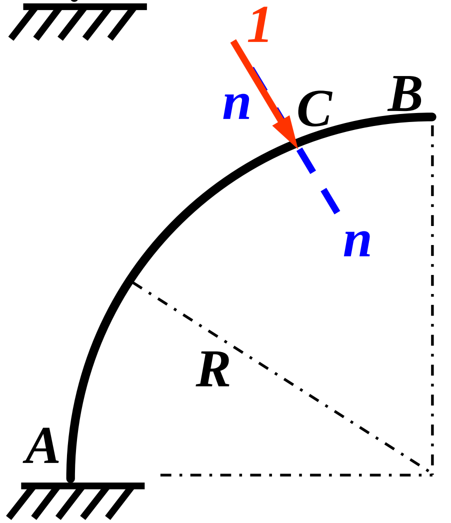
2. 拟求任一点C 沿任意方向 n-n的 广义位移$\varDelta$；

3. 在结构上单独施加广义单位力 $F^0=1$(与广义位移$\varDelta$对应)；

4. 列出对应的内力方程，如 $M^0(x)$， **注意：$M^0(x)$必须和$M(x)$ 用统一的坐标和符号规则；**

5. 代入积分公式计算变形。结果若为正，表示所求广义位移$\varDelta$与施加的广义单位力F^0方向一致。



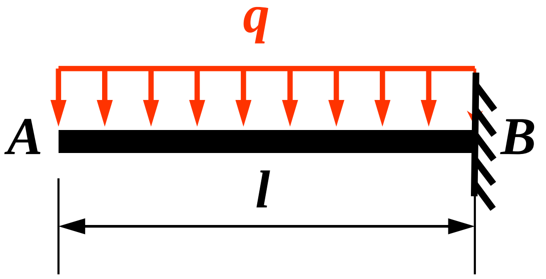


$$\Delta=\int_l \frac{M(x)M^0(x)}{EI}\mathrm{d}x+\int_l \frac{F_N(x)F_N^{\,0}(x)}{EA}\mathrm{d}x+\int_l \frac{T(x)T^0(x)}{GI_p}\mathrm{d}x$$

注意：$\varDelta$为所求位移，F_N，M，T 为外载荷作用下的真实内力，F_N^0，M^0，T^0为单位力作用下的内力，所求位移与单位力需对应。

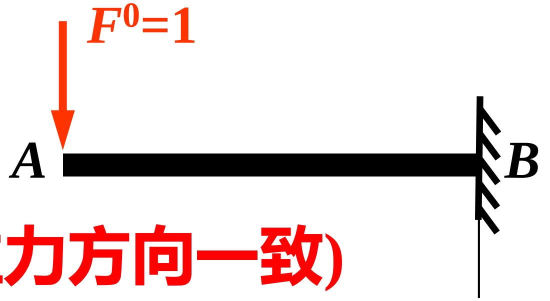
10-2 单位载荷法

例10-3：梁的抗弯刚度为EI，求A截面铅垂位移和转角。



解：单位载荷法 $\Delta = \int_l \dfrac{MM^0}{EI}\mathrm{d}x$

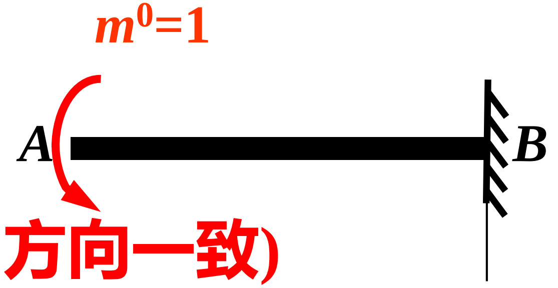
原载荷作用下的弯矩方程 $M(x) = -\dfrac{1}{2}qx^2$



单位力作用下的弯矩方程 $M^0(x) = -x$

A截面铅垂位移 $v_A = \int_0^l \dfrac{-qx^2}{2EI}(-x)\mathrm{d}x = \dfrac{ql^4}{8EI}(\downarrow)$

(结果为正，说明位移方向与单位力方向一致)



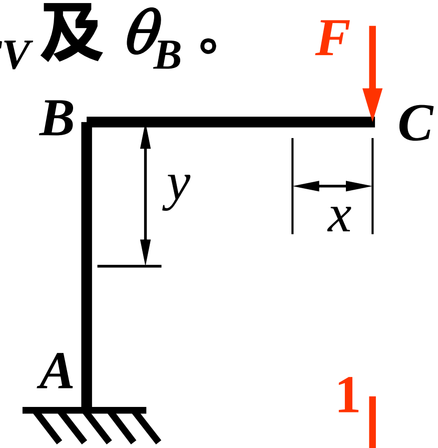
单位力作用下的弯矩方程 $M^{0\prime}(x) = -1$

A截面转角 $\theta_A = \int_0^l \dfrac{-qx^2}{2EI}(-1)\mathrm{d}x = \dfrac{ql^3}{6EI}(\circlearrowleft)$

(结果为正，说明转角方向与单位力方向一致)

10-2　单位载荷法

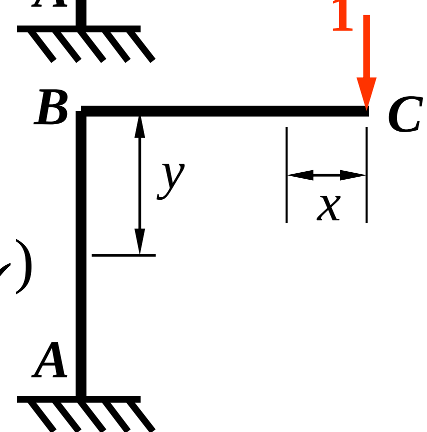
例10-2：已知折杆边长为a，抗弯刚度为EI，求Δ_{CV}及 θ_B。



解法三：单位载荷法

$$\Delta = \int_l \frac{MM^0}{EI}\mathrm{d}x$$

1、求C点铅垂位移

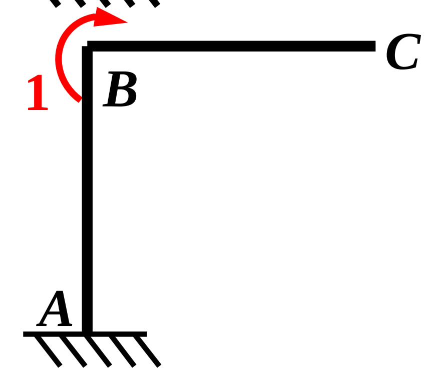


$$CB\text{段}: M(x) = -Fx \qquad M^0(x) = -x$$

$$BA\text{段}: M(y) = -Fa \qquad M^0(y) = -a$$

$$\Delta_{CV} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a(-Fx)(-x)\mathrm{d}x + \int_0^a(-Fa)(-a)\mathrm{d}y\right] = \frac{4Fa^3}{3EI}(\downarrow)$$

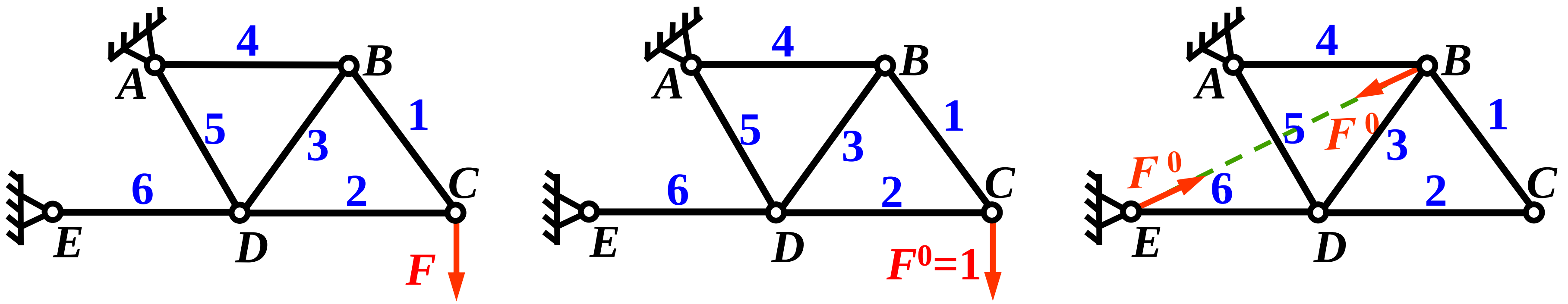
2、求B截面转角



$$CB\text{段}: M^{0\prime}(x) = 0 \qquad BA\text{段}: M^{0\prime}(y) = -1$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\int_0^a(-Fa)(-1)\mathrm{d}y = \frac{Fa^2}{EI}(\curvearrowright)$$

例10-4 求桁架C点的铅垂位移（各杆的EA、l为常数）。



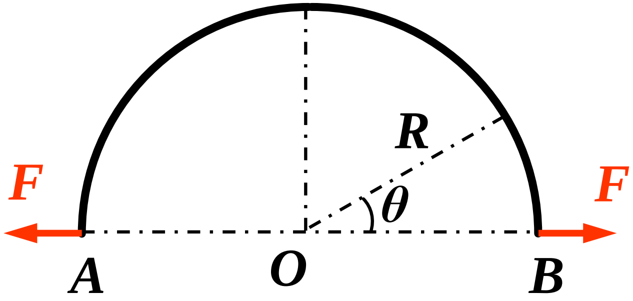
解：单位载荷法 $\Delta = \int_l \frac{F_N(x)F_N^0(x)}{EA}dx = \sum_i \frac{F_{Ni}F_{Ni}^0 l_i}{EA}$ $\Delta_C = \frac{26Fl}{3EA}$ (↓)

杆号	1	2	3	4	5	6
F_{Ni}	$2F/\sqrt{3}$	$-F/\sqrt{3}$	$-2F/\sqrt{3}$	$2F/\sqrt{3}$	$2F/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}F$
F_{Ni}^0	$2/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

讨论：如何求 B、E 两点之间的相对位移？

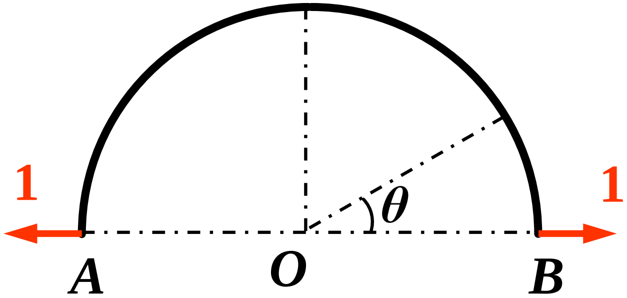
10-2 单位载荷法

例10-5 半圆曲梁的受力如图，求A、B截面的相对位移和转角 。已知抗弯刚度为EI，半圆半径为R。



解： 原载荷下的弯矩方程 $M(\theta) = FR\sin\theta$

单位力下的弯矩方程 $M^0(\theta) = R\sin\theta$

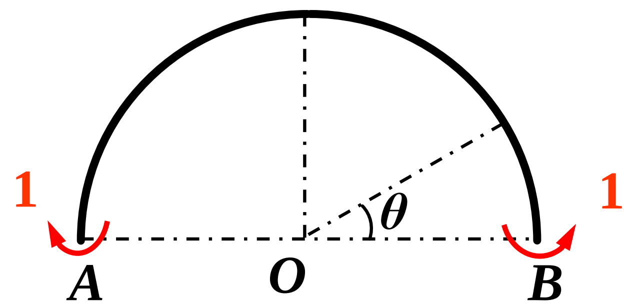


A、B截面相对位移

$$\Delta_{AB} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi} FR^2\sin^2\theta\, R\mathrm{d}\theta = \frac{\pi FR^3}{2EI}(\leftrightarrow)$$

单位力下的弯矩方程 $M^{0\prime}(\theta) = 1$

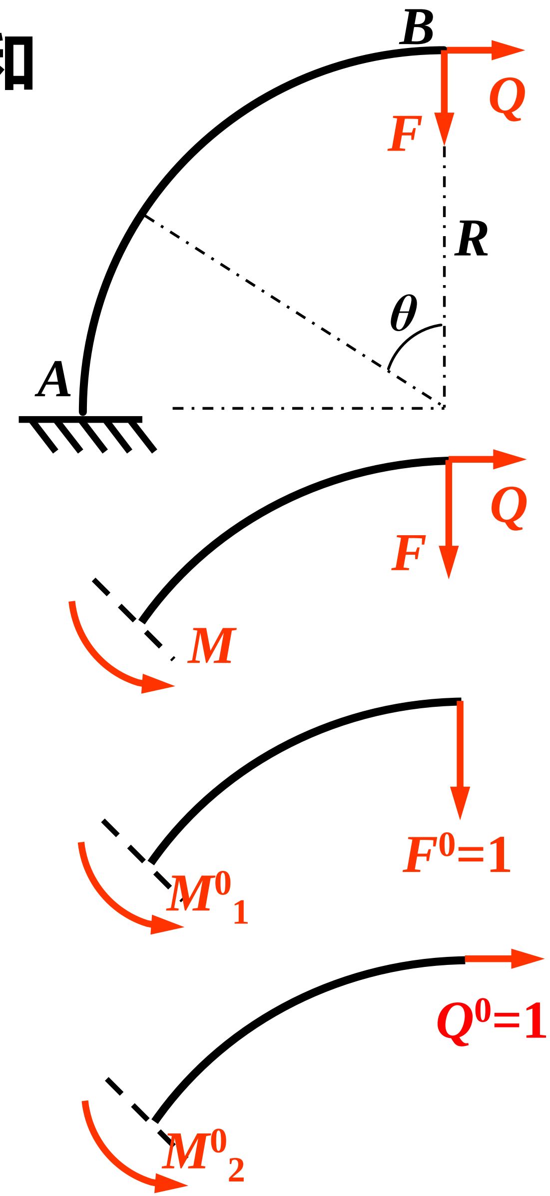
A、B截面相对转角



$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi} FR\sin\theta\, R\mathrm{d}\theta = \frac{2FR^2}{EI}(\curvearrowleft\ \curvearrowright)$$

10-2 单位载荷法

例10-6 已知曲杆的EI，求B点的铅垂位移$\varDelta_{BV}$和水平位移$\varDelta_{BH}$。



解：取分离体，列弯矩方程

$$M(\theta)=FR\sin\theta+QR(1-\cos\theta)$$

$$M_1^0(\theta)=R\sin\theta \qquad M_2^0(\theta)=R(1-\cos\theta)$$

利用单位载荷法计算位移

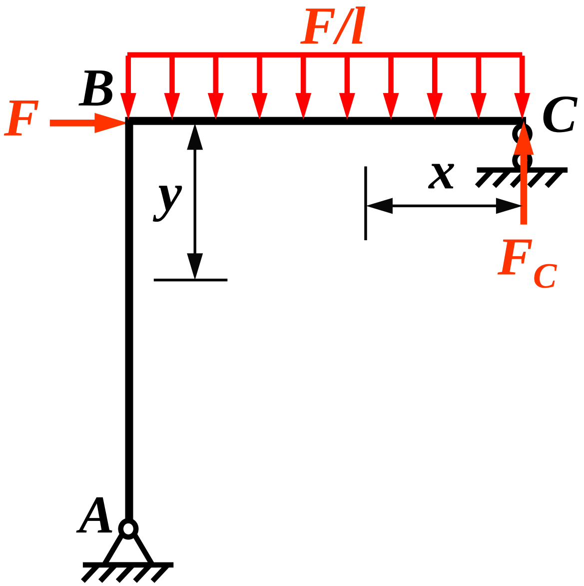
$$\Delta_{BV}=\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}[FR\sin\theta+QR(1-\cos\theta)]R\sin\theta\,Rd\theta$$

$$=\frac{\pi FR^3}{4EI}+\frac{QR^3}{EI}\ (\downarrow)$$

$$\Delta_{BH}=\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}[FR\sin\theta+QR(1-\cos\theta)]R(1-\cos\theta)\,Rd\theta$$

$$=\frac{FR^3}{2EI}+\left(\frac{3\pi}{4}-2\right)\frac{QR^3}{EI}\ (\rightarrow)$$

例10-7 图示刚架边长为 l，抗弯刚度EI已知，试求B点水平位移。



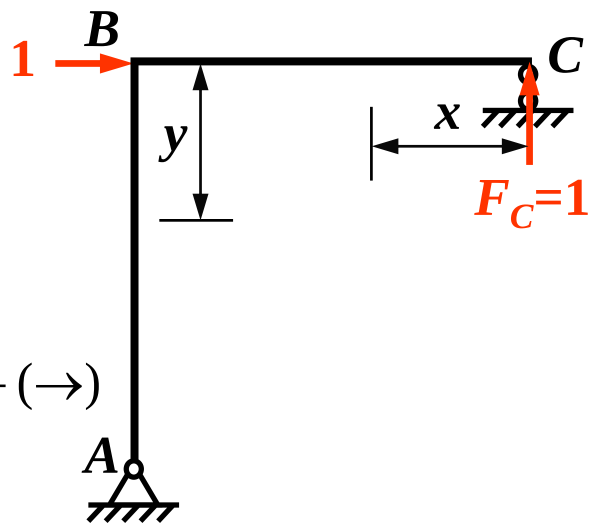
解：C点的支反力 $F_C = F + \frac{1}{2}ql = \frac{3}{2}F$

原载荷下的弯矩方程

$$M(x) = F_C x - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{3Fx}{2} - \frac{Fx^2}{2l}$$

$$M(y) = F_C l - \frac{1}{2}ql^2 - Fy = F(l-y)$$

单位力下的弯矩方程



$$M^0(x) = x \qquad M^0(y) = l - y$$

B点水平位移

$$\Delta_{BH} = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(\frac{3Fx}{2} - \frac{Fx^2}{2l}\right)x\mathrm{d}x + \frac{1}{EI}\int_0^l F(l-y)^2\mathrm{d}y = \frac{17Fl^3}{24EI}(\rightarrow)$$

学前问题：

- 变形能的性质?
- 单位载荷法?

今 日 作 业

10-6 、10-8

上节课内容回顾

外力功：

$$W=\frac{1}{2}F_1\Delta_1+\frac{1}{2}F_2\Delta_2+\frac{1}{2}F_3\Delta_3+\ldots$$

变形能：

$$U=\int_l\frac{F_N{}^2(x)\mathrm{d}x}{2EA(x)}+\int_l\frac{T^2(x)\mathrm{d}x}{2GI_p(x)}+\int_l\frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI(x)}$$

功能原理：

$$\boxed{W=U}$$

单位载荷法：

$$\Delta=\int_l\frac{F_N(x)F_N{}^0(x)}{EA}\mathrm{d}x+\int_l\frac{T(x)T^0(x)}{GI_p}\mathrm{d}x+\int_l\frac{M(x)M^0(x)}{EI}\mathrm{d}x$$

第十章 能量法计算位移

- □ 概述
- □ 外力功与变形能
- □ 单位载荷法
- □ 图形互乘法
- □ 互等定理

学前问题：

- ■ 图形互乘法?
- ■ 互等定理?

西安交通大學 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

西安交通大学航天航空学院 SCHOOL OF AEROSPACE · XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

航天航空学院--力学中心

10-3 图形互乘法

以弯曲为例说明

C点为M图的形心

$$\boxed{\Delta=\int_l \frac{MM^0}{EI}\mathrm{d}x}$$

若为等截面直梁

$$M^0=kx+a$$

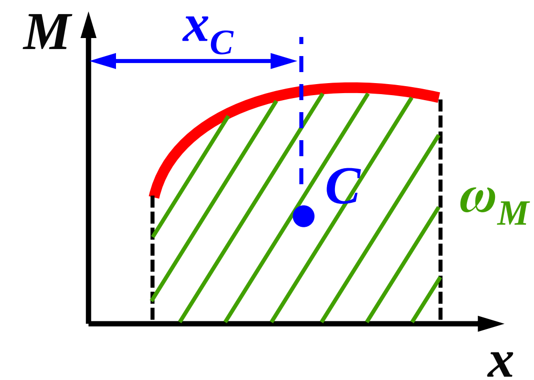
$$=\frac{1}{EI}\int_l M(x)(kx+a)\mathrm{d}x$$

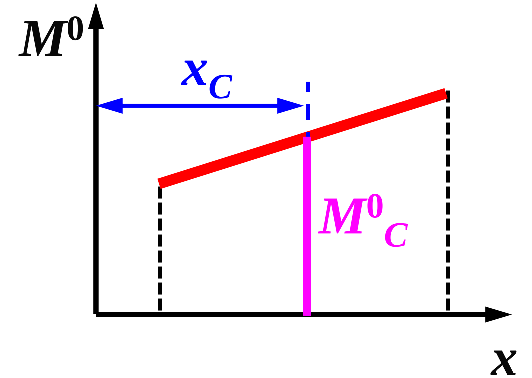
静矩S_M 面积ω_M

$$=\frac{k}{EI}\int_l M(x)x\mathrm{d}x+\frac{a}{EI}\int_l M(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{kS_M}{EI}+\frac{a\omega_M}{EI}=\frac{k\omega_M x_C}{EI}+\frac{a\omega_M}{EI}$$

$$=\frac{\omega_M}{EI}(kx_C+a)=\frac{\omega_M}{EI}M_C^0$$



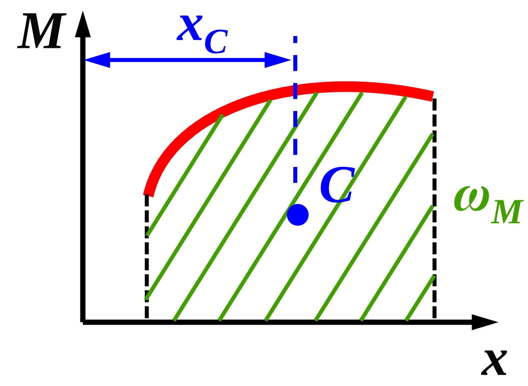


10-3　图形互乘法

图形互乘法
(简称图乘法)

$$\Delta=\int_l \frac{MM^0}{EI}\mathrm{d}x=\frac{\omega_M}{EI}M_C^0$$

C点为M图的形心



ω_M为$M(x)$图的面积；

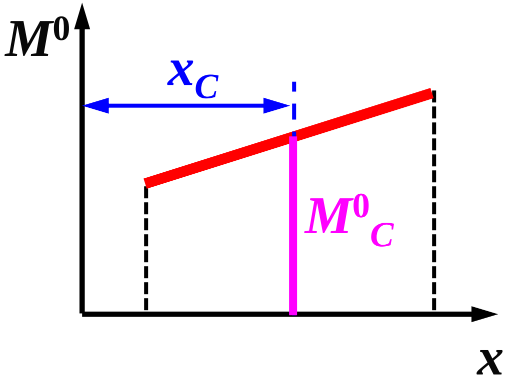
M_C^0为$M(x)$图形心C对应的$M^0(x)$图纵坐标值。

若M^0图为一组折线时：

$$\Delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{\omega_{Mi}}{EI}M_{Ci}^0$$

若杆件发生组合变形：

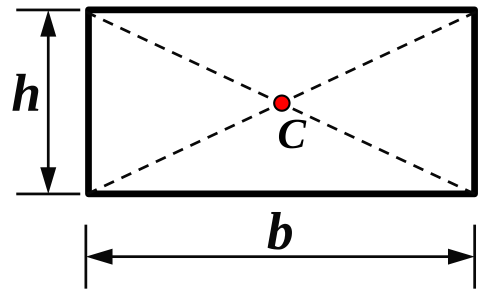
$$\Delta=\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\omega_{F_{Ni}}F_{NC_i}^0}{EA}+\sum_{i=1}^{m_2}\frac{\omega_{T_i}T_{C_i}^0}{GI_\mathrm{p}}+\sum_{i=1}^{m_3}\frac{\omega_{M_i}M_{C_i}^0}{EI}$$



注意： 1、适用于等截面直杆、桁架或刚架，曲杆不适用；2、弯矩图最好是直线；3、两个弯曲图应采用相同符号规则；4、复杂载荷时可采用叠加法；5、特别注意弯矩图的正负。

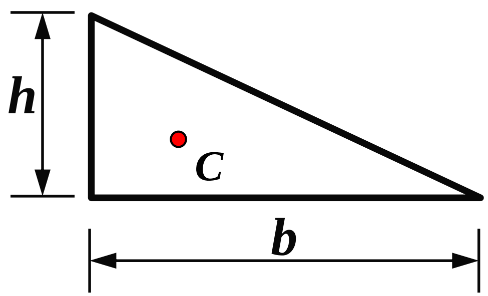
10-3　图形互乘法

常用图形的面积和形心位置



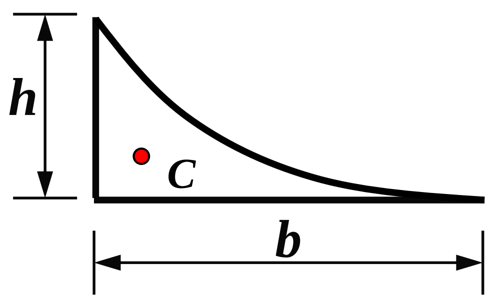
矩形

面积为bh，形心位置为$b/2$



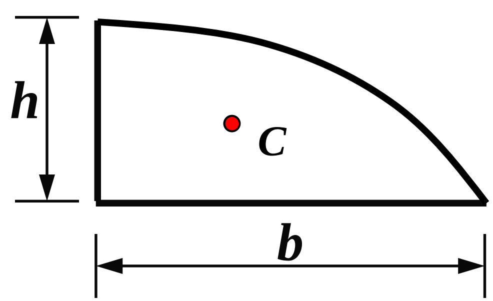
直角三角形

面积为$bh/2$，形心位置为$b/3$



二次抛物线

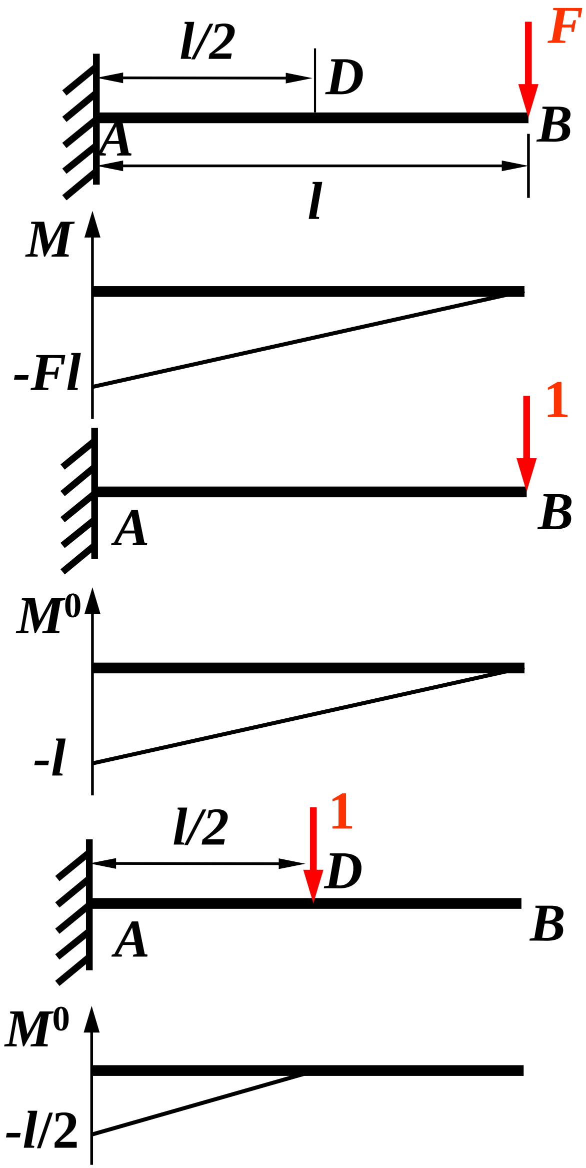
面积为$bh/3$，形心位置为$b/4$



二次抛物线

面积为$2bh/3$，形心位置为$3b/8$

10-2　单位载荷法



例10-8：梁的抗弯刚度*EI*，求v_B、v_D。

解法一：单位载荷法

原载荷下的弯矩 $M(x) = -Fx$

1、计算v_B

单位力下的弯矩 $M^0(x) = -x$

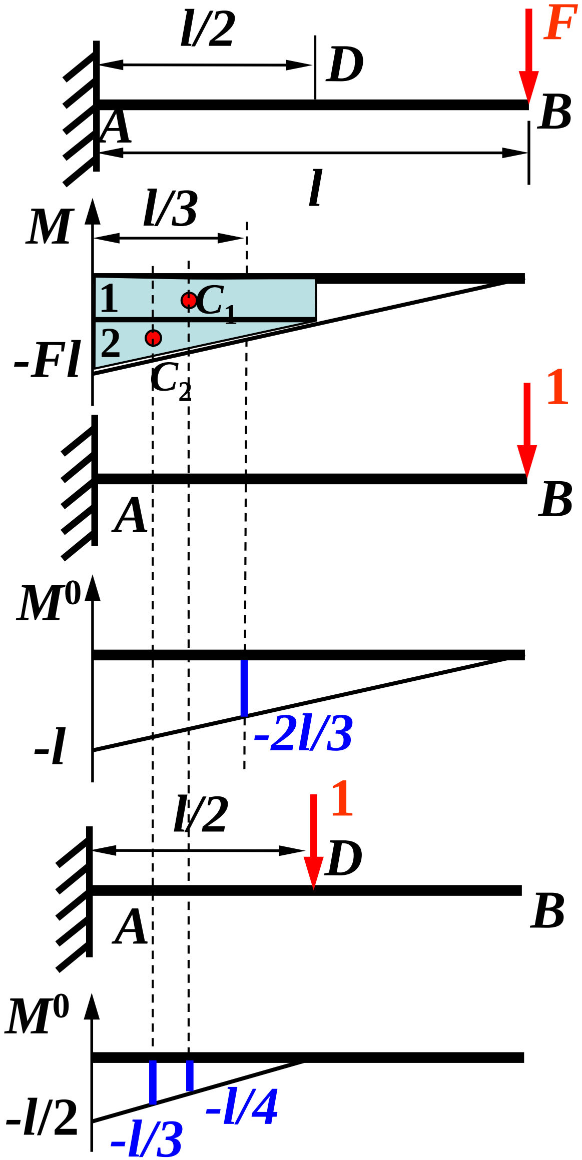
$$v_B = \int_0^l \frac{(-Fx)(-x)}{EI}\mathrm{d}x = \frac{Fl^3}{3EI}(\downarrow)$$

2、计算v_D

单位力下的弯矩 $M^{0\prime}(x) = -(x - \frac{l}{2})$ **(注意坐标)**

$$v_D = \int_{l/2}^l \frac{(-Fx)(l/2 - x)}{EI}\mathrm{d}x = \frac{5Fl^3}{48EI}(\downarrow)$$

10-2 单位载荷法



例10-8：梁的抗弯刚度EI，求v_B、v_D。

解法二：图形互乘法

$$\Delta = \frac{\omega_M}{EI} M_C^0$$

1、计算v_B

$$\omega_M = \frac{1}{2}(-Fl)l \qquad M_C^0 = -\frac{2l}{3}$$

$$v_B = \frac{\omega_M}{EI} M_C^0 = \frac{Fl^3}{3EI}(\downarrow)$$

2、计算v_D

$$\boxed{\omega_M = \frac{1}{2}(-Fl)l \qquad M_C^0 = -\frac{l}{6}} \quad \times$$

$$\omega_{M1} = (-\frac{Fl}{2})\frac{l}{2} = -\frac{Fl^2}{4} \qquad M_{C1}^0 = -\frac{l}{4}$$

$$\omega_{M2} = \frac{1}{2}(-\frac{Fl}{2})\frac{l}{2} = -\frac{Fl^2}{8} \qquad M_{C2}^0 = -\frac{l}{3}$$

$$v_D = \frac{\omega_{M1}}{EI} M_{C1}^0 + \frac{\omega_{M2}}{EI} M_{C2}^0 = \frac{5Fl^3}{48EI}(\downarrow)$$

例10-2：已知折杆边长为a，抗弯刚度为EI，求Δ_{CV}及 θ_B。

解法四：图形互乘法

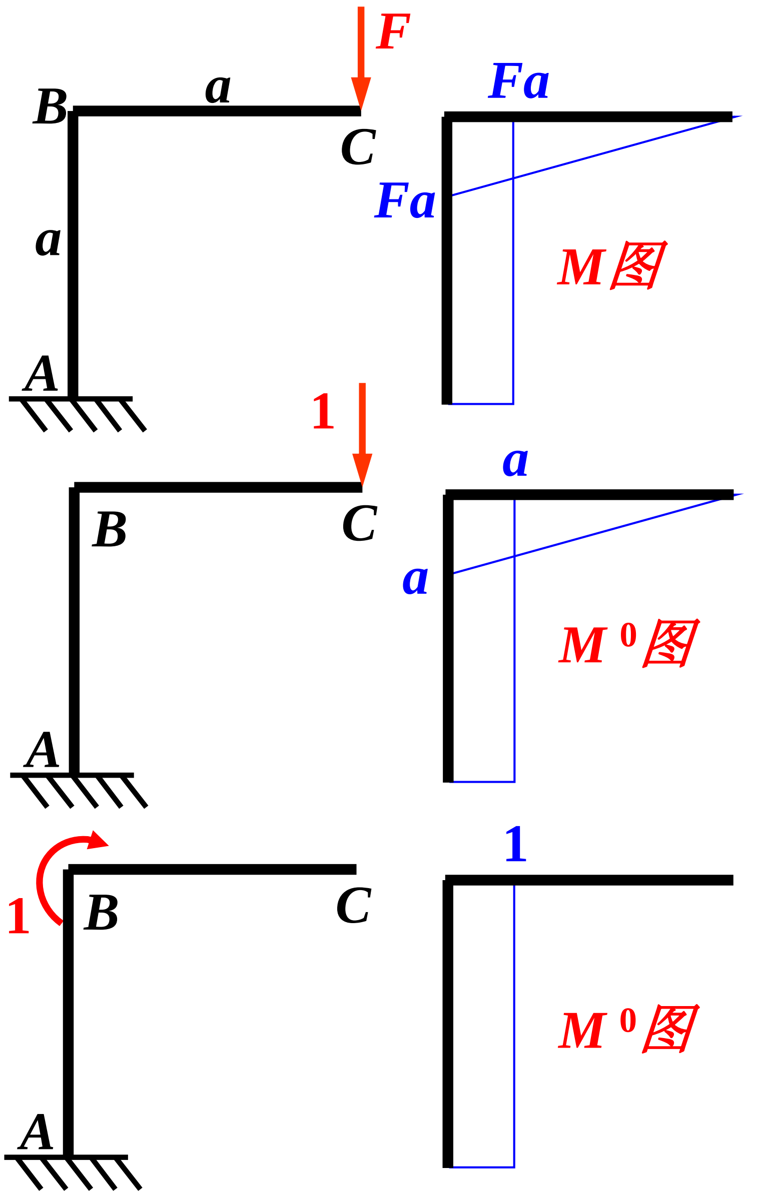
1、求C点铅垂位移

$$\Delta_{CV}=\frac{1}{EI}\left[\frac{Fa^2}{2}\times\frac{2a}{3}+Fa^2\times a\right]$$

$$=\frac{1}{EI}\left[\frac{Fa^3}{3}+Fa^3\right]=\frac{4Fa^3}{3EI}\ (\downarrow)$$

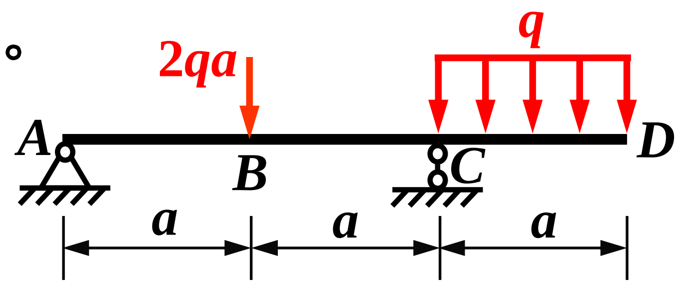
2、求B截面转角

$$\theta_B=\frac{1}{EI}\left[Fa^2\times 1\right]=\frac{Fa^2}{EI}\ (\circlearrowright)$$



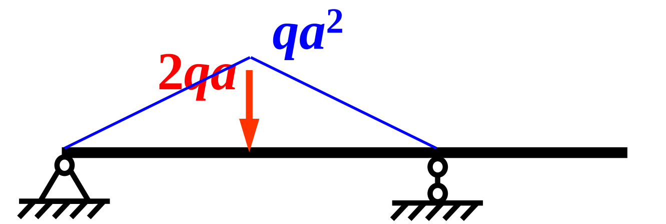
10-3　图形互乘法

例10-9：已知外伸梁的EI，求D点挠度Δ_D。



解法一：图形互乘法

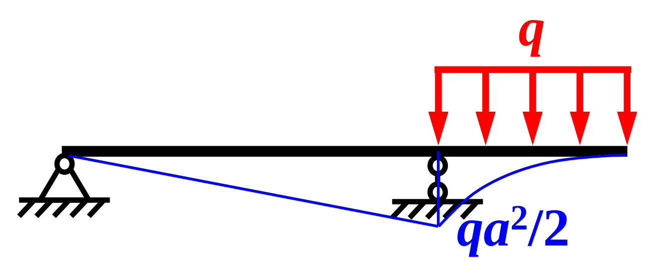
1、用叠加法作弯矩图



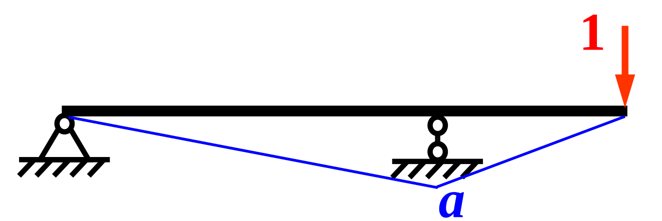
$$\omega_{M1}=\frac{1}{2}\times qa^2\times 2a=qa^3$$

$$\omega_{M2}=-\frac{1}{2}\times\frac{qa^2}{2}\times 2a=-\frac{qa^3}{2}$$

$$\omega_{M3}=-\frac{1}{3}\times\frac{qa^2}{2}\times a=-\frac{qa^3}{6}$$



2、施加单位力，作弯矩图



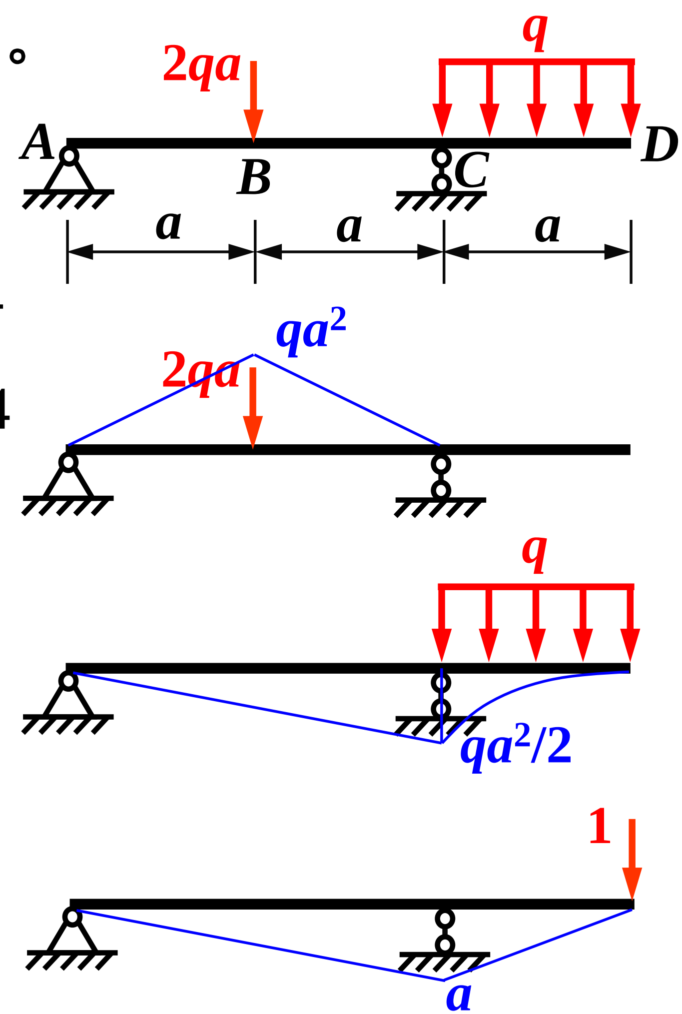
$$M_{C1}^0=-\frac{a}{2}\qquad M_{C2}^0=-\frac{2a}{3}\qquad M_{C3}^0=-\frac{3a}{4}$$

3、代入图乘法的计算公式

$$\Delta_D=\frac{\omega_M}{EI}M_C^0=-\frac{qa^4}{24EI}(\uparrow)$$ (结果为负，实际挠度向上)

例10-9：已知外伸梁的EI，求D点挠度Δ_D。

解法二：单位载荷法



1、用叠加法列弯矩方程

AB段： $M_{AB1} = qax_1$ $M_{AB2} = -qax_1/4$

BC段： $M_{BC1} = -qax_2 + 2qa^2$ $M_{BC2} = -qax_2/4$

DC段： $M_{DC1} = 0$ $M_{DC2} = -qx_3^{\ 2}/2$

2、施加单位力，列弯矩方程

AB段： $M^0_{AB} = -x_1/2$

BC段： $M^0_{BC} = -x_2/2$

DC段： $M^0_{C3} = -x_3$

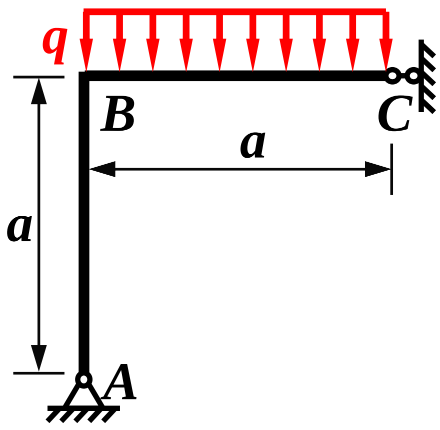
3、代入莫尔积分公式

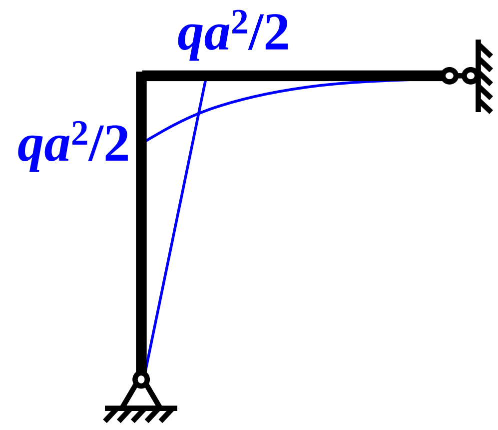
$$\Delta_D = \int_l \frac{MM^0}{EI}\mathrm{d}x = -\frac{qa^4}{24EI}(\uparrow)$$ **(结果为负，实际挠度向上)**

10-3 图形互乘法

例10-10：已知刚架的EI，求C截面的转角和铅垂位移。

解：图形互乘法



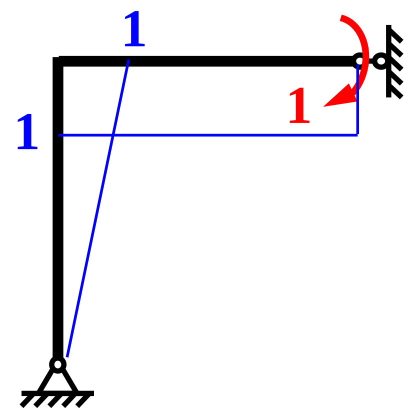


1、作弯矩图

$$\omega_{M1}=-\frac{1}{2}\times\frac{qa^2}{2}\times a=-\frac{qa^3}{4}$$

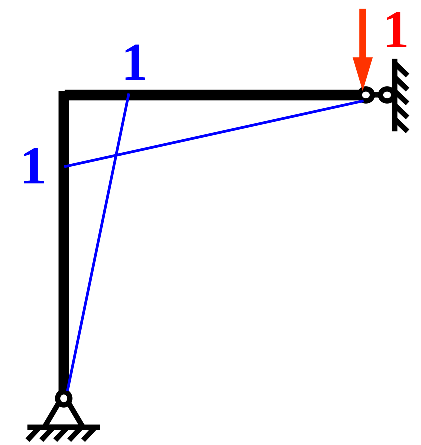
$$\omega_{M2}=-\frac{1}{3}\times\frac{qa^2}{2}\times a=-\frac{qa^3}{6}$$

2、施加单位力偶，作弯矩图



$$M_{C1}^{0}=-\frac{2}{3}\qquad M_{C2}^{0}=-1$$

3、施加单位力，作弯矩图



$$M_{C1}'^{0}=-\frac{2}{3}\qquad M_{C2}'^{0}=-\frac{3}{4}$$

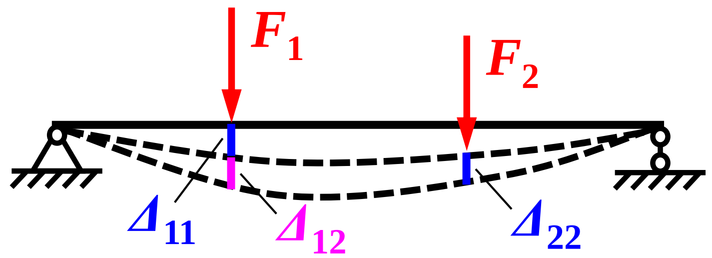
4、代入图乘法的计算公式

$$\theta_C=\frac{\omega_M}{EI}M_C^0=\frac{qa^3}{3EI}(\circlearrowright)\qquad \Delta_{CV}=\frac{\omega_M}{EI}M_C'^0=\frac{7qa^4}{24EI}(\downarrow)$$

10-4 互等定理

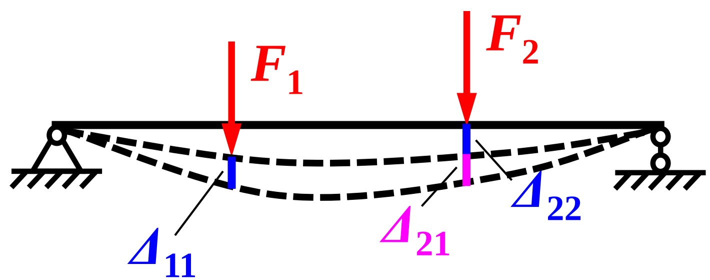
第一次在梁上先施加F_1，再施加F_2：

$$W=\frac{1}{2}F_1\Delta_{11}+\frac{1}{2}F_2\Delta_{22}+F_1\Delta_{12}$$



第二次在梁上先施加F_2，再施加F_1：

$$W'=\frac{1}{2}F_2\Delta_{22}+\frac{1}{2}F_1\Delta_{11}+F_2\Delta_{21}$$

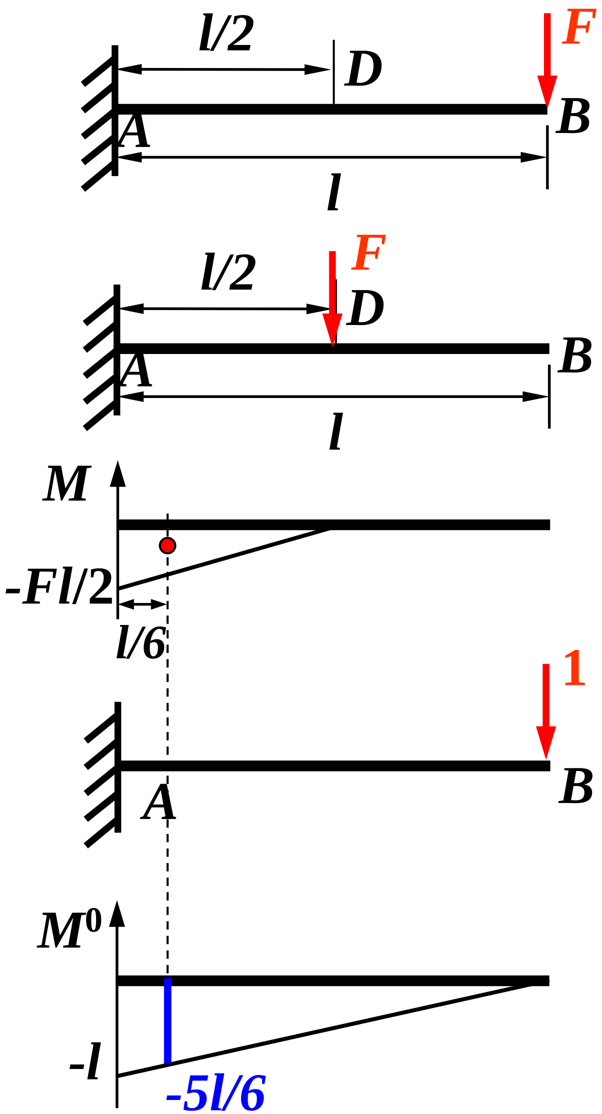


二次所做的外力功应相等： $F_1\Delta_{12}=F_2\Delta_{21}$

F_1在由于F_2引起的位移Δ_{12}上所作的功，等于F_2在由于F_1引起的位移Δ_{21}上所作的功，称为功的互等定理(Reciprocal Theorem of Work)。

若$F_1=F_2$：则$\Delta_{12}=\Delta_{21}$，称为位移互等定理(Reciprocal Theorem of Displacement)。

10-4 互等定理



例10-8：梁的抗弯刚度*EI*，求v_B、v_D。

解法三：位移互等定理

1、计算v_B

$$\omega_M = \frac{1}{2}(-Fl)l \qquad M_C^0 = -\frac{2l}{3}$$

$$v_B = \frac{\omega_M}{EI} M_C^0 = \frac{Fl^3}{3EI} (\downarrow)$$

2、计算v_D

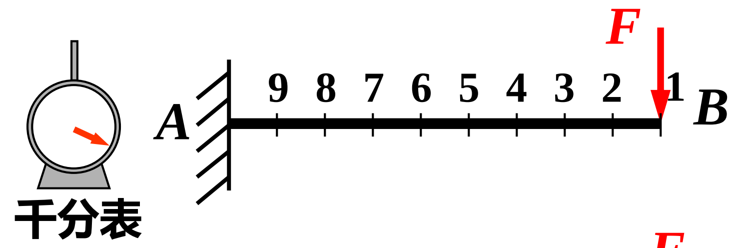
根据位移互等定理，*F*作用在*B*点引起*D*点的位移，等于*F*作用在*D*点引起*B*点的位移

$$\omega_M = \frac{1}{2}(-\frac{Fl}{2})\frac{l}{2} = -\frac{Fl^2}{8} \qquad M_C^0 = -\frac{5l}{6}$$

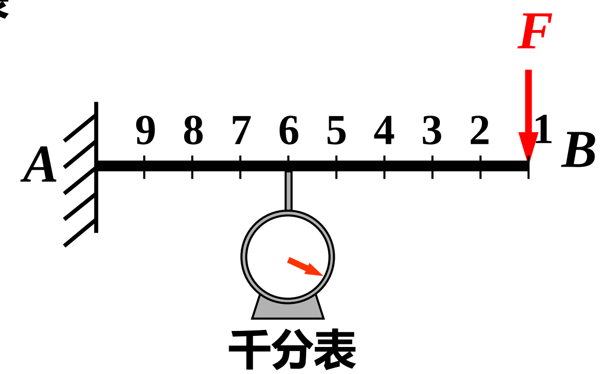
$$v_D = \frac{\omega_M}{EI} M_C^0 = \frac{5Fl^3}{48EI} (\downarrow)$$

10-4 互等定理

例10-11： 悬臂梁受力如图所示，欲用一个千分表测量9个测点的挠度。试设计测量方案，简单有效。



方法一：将千分表依次放置在1-9点进行测量。



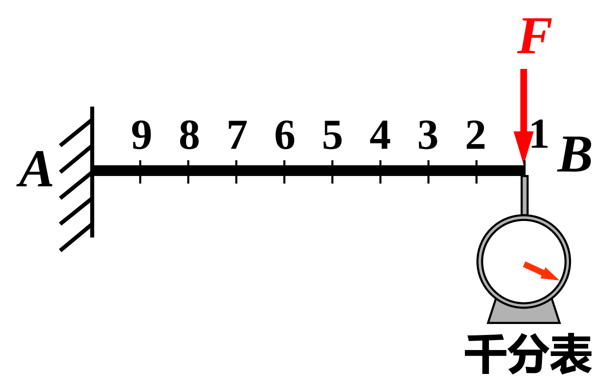
方法二：利用位移互等定理

1、将千分表安置在 B 点；

2、将载荷F 作用于1点，读表，得到1点的挠度；

3、将载荷F 作用于2点，读表，测得2点的挠度；

4、将载荷F依次作用于3-9点，读表，完成各点挠度的测量。

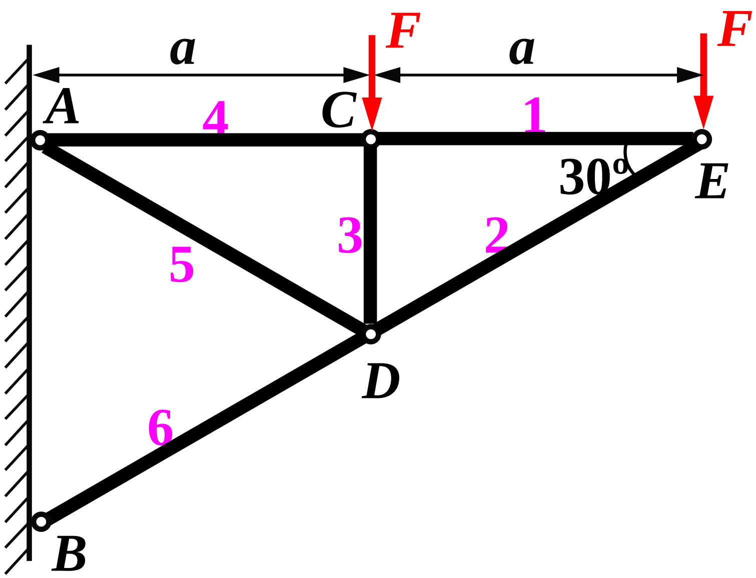


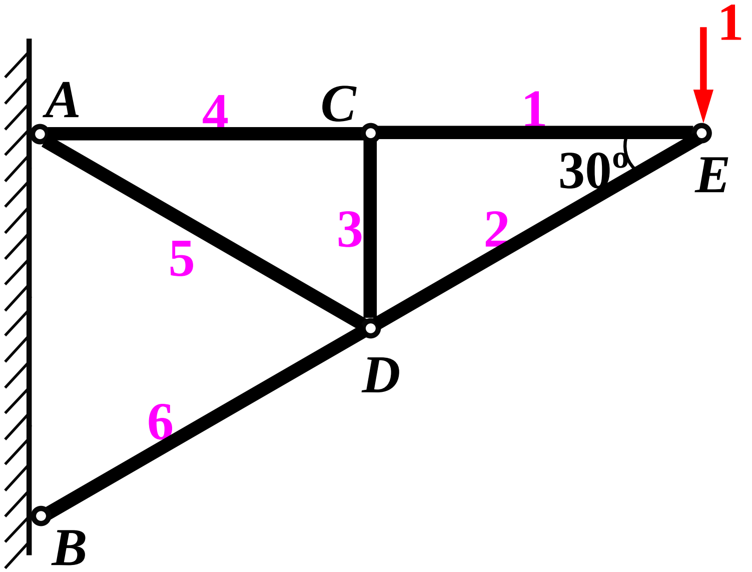
10-4　互等定理

例10-12：图示桁架各杆EA相同，求节点E的铅垂位移Δ_{Ey}。

解：单位载荷法

$$\Delta = \sum_i \frac{F_{Ni} F_{Ni}^0 l_i}{EA}$$



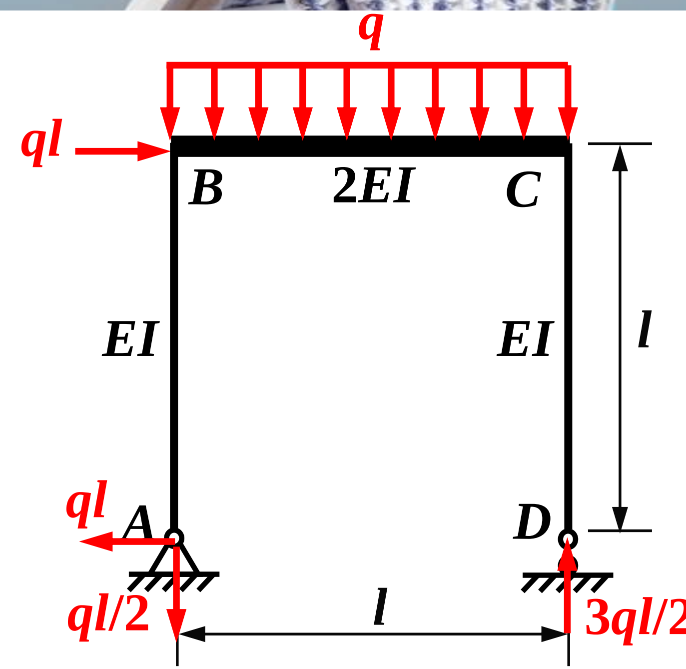


杆号	杆长 l_i	F_{Ni}	F_{Ni}^0
1	a	$\sqrt{3}F$	$\sqrt{3}$
2	$2a/\sqrt{3}$	$-2F$	-2
3	$a/\sqrt{3}$	$-F$	0
4	a	$\sqrt{3}F$	$\sqrt{3}$
5	$2a/\sqrt{3}$	F	0
6	$2a/\sqrt{3}$	$-3F$	-2

代入公式，得 $\Delta_{Ey} = \dfrac{(18+20\sqrt{3})Fa}{3EA}\ (\downarrow)$

10-4　互等定理

例10-13：图示刚架，求D端的转角θ_D。



解法一：单位载荷法

1、在B端作用一逆时针单位力偶

2、求支反力，列各段的弯矩方程

DC段： $M_{DC}=0$　　$M^0_{DC}=1$

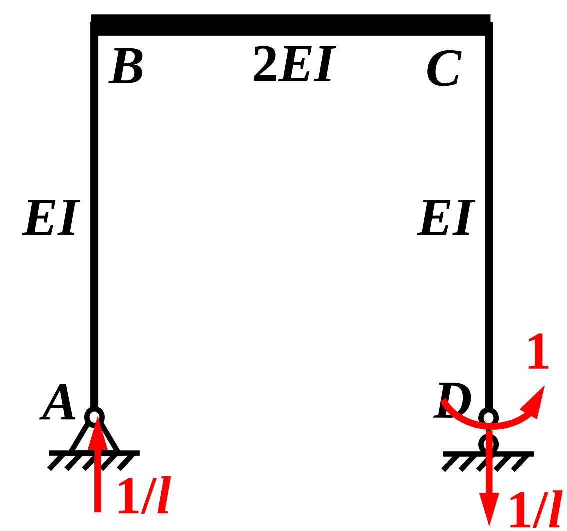
CB段： $M_{CB}=\dfrac{3qlx}{2}-\dfrac{qx^2}{2}$　　$M^0_{CB}=1-\dfrac{x}{l}$

BA段： $M_{AB}=qly$　　$M^0_{BA}=0$

3、求转角θ_D

$$\theta_D=\frac{1}{2EI}\int_0^l\left(\frac{3qlx}{2}-\frac{qx^2}{2}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x=\frac{5ql^3}{48EI}\ (\circlearrowleft)$$

(转角为逆时针)



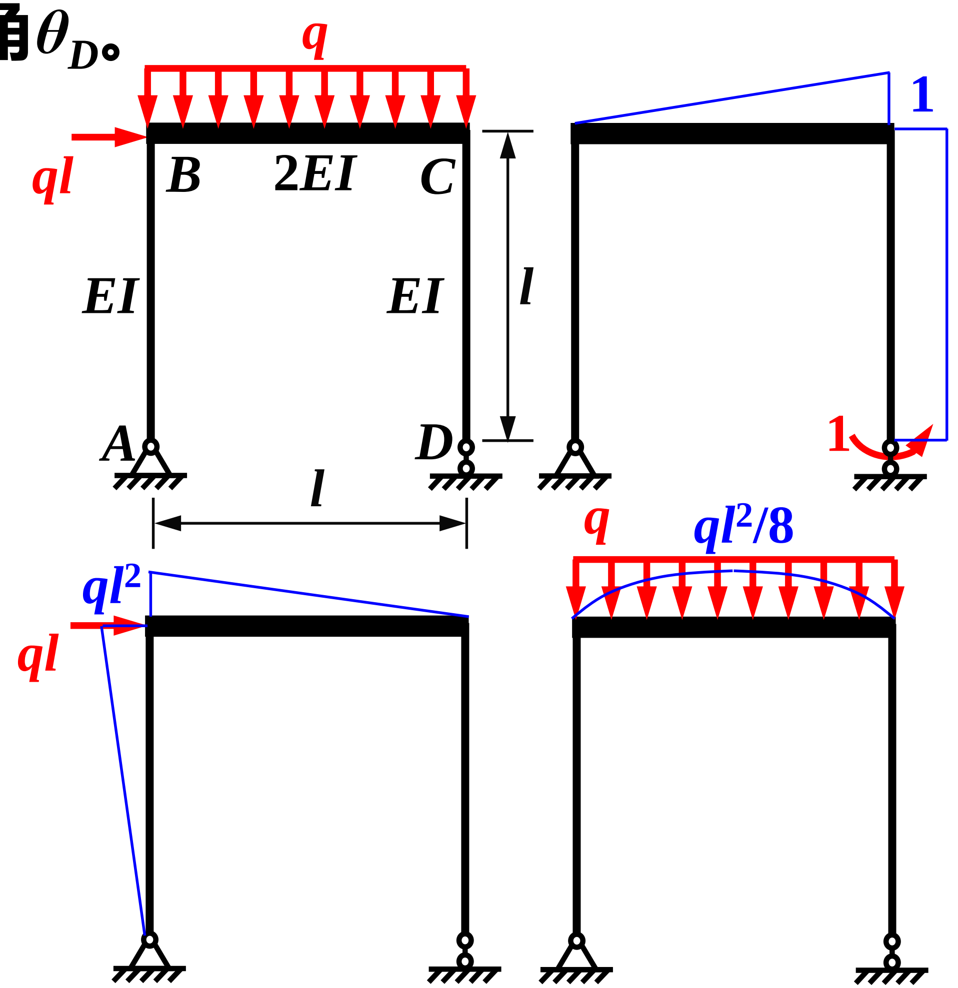
例10-13：图示刚架，求D端的转角θ_D。

解法二：图形互乘法

1、用叠加法作弯矩图

2、施加单位力偶，作弯矩图

3、求转角θ_D



BC段：

$$\omega_{M1}=\frac{1}{2}\times ql^2\times l=\frac{ql^3}{2}\qquad M_{C1}^0=\frac{1}{3}$$

$$\omega_{M2}=\frac{2}{3}\times\frac{ql^2}{8}\times l=\frac{ql^3}{12}\qquad M_{C2}^0=\frac{1}{2}$$

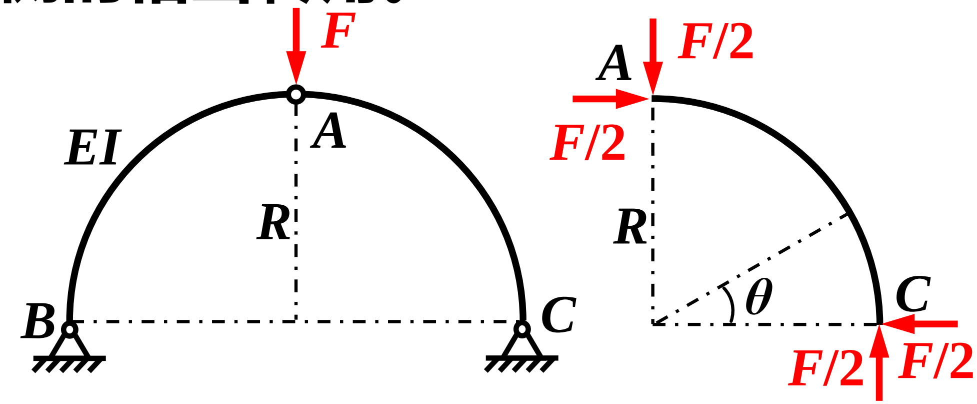
$$v_B=\frac{\omega_M}{2EI}M_C^0=\frac{ql^3}{12EI}+\frac{ql^3}{48EI}=\frac{5ql^3}{48EI}\;(\circlearrowleft)$$

(转角为逆时针)

10-4 互等定理

例10-14：计算图示圆拱铰链A两侧的相当转角。

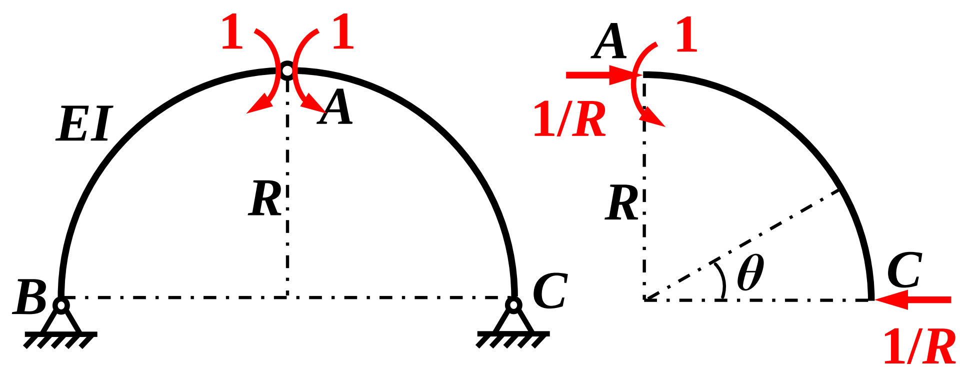
解：单位载荷法



1、利用对称性，列弯矩方程

$$M(\theta)=-\frac{F}{2}R\sin\theta+\frac{F}{2}R(1-\cos\theta)$$

2、施加单位力偶，列弯矩方程



$$M^{0}(\theta)=-\frac{1}{R}R\sin\theta$$

3、求相对转角$\theta_{A\text{-}A}$

$$\theta_{A-A}=\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}M(\theta)M^{0}(\theta)R\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{FR^2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{FR^2}{4EI}(\pi-2)\,(\quad)(\quad)$$

学前问题：

- 图形互乘法?
- 互等定理?

第十章的基本要求

1．了解能量法、外力功、变形能的基本概念；

2．掌握杆件基本变形的变形能计算，了解变形能的特点；

3．熟练掌握利用单位载荷法和图形互乘法计算杆件变形的方法；

4．掌握功互等定理和位移互等定理。

今 日 作 业

10-10 、 10-14

10-10题提示：两个载荷，可运用叠加法。

请预习

第十一章 “超静定系统”