第六章 弯曲变形

- 概述
- 直接积分法
- 查表叠加法
- 梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施
- 变形比较法求解超静定梁

学前问题：

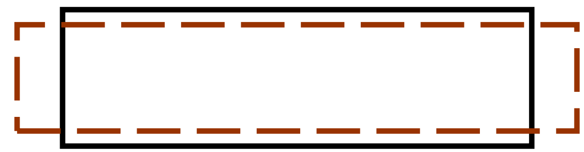
- 弯曲变形如何度量？
- 直接积分法？

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

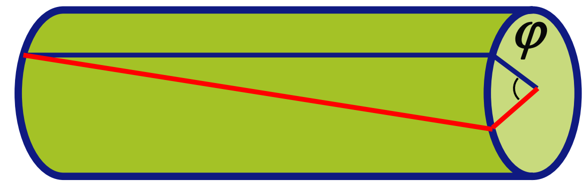
航天航空学院--力学中心

6-1 概述

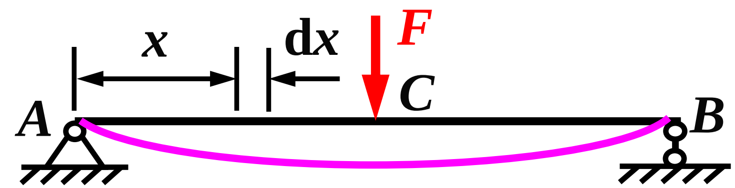
拉压变形 $$\Delta l = \frac{F_{\mathrm{N}}L}{EA}$$

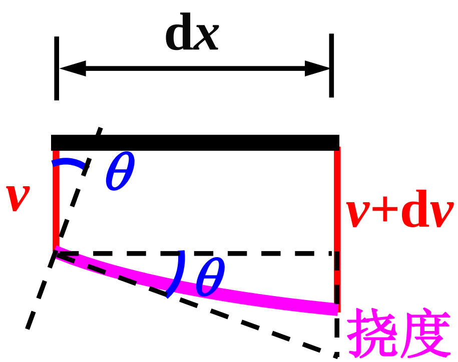


扭转变形 $$\varphi = \frac{TL}{GI_{\mathrm{p}}}$$



弯曲变形





挠度曲线
(Deflection Curve)

挠度(Deflection)： 截面形心的竖向位移，用 v 表示；

转角(Slope)： 截面绕中性轴的转角，用 θ 表示。

转角与挠度的关系：$\theta \approx \tan\theta = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v'(x)$ （小变形条件下）

6-1 概述

纯弯曲正应力公式推导时得：$\dfrac{1}{\rho(x)}=\dfrac{M(x)}{EI_z}$

$\dfrac{1}{\rho(x)}$ 曲率 **(Curvature)**

EI_z 抗弯刚度 **(Bending Stiffness)**

由数学关系得：$\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}}\approx v''$　　$\theta(x)\approx v'(x)$

进一步推导得：挠曲线近似微分方程

$$v''(x)=\theta'(x)=\frac{M(x)}{EI_z}$$

$v(x)$：挠度曲线方程

$\theta(x)$：转角方程

公式的适用条件：

1) 材料在线弹性范围内；

2) 小变形；

3) 忽略剪力对挠度的影响。

6-2 直接积分法

- **积分法(Integration Method)：对挠曲线微分方程进行积分**

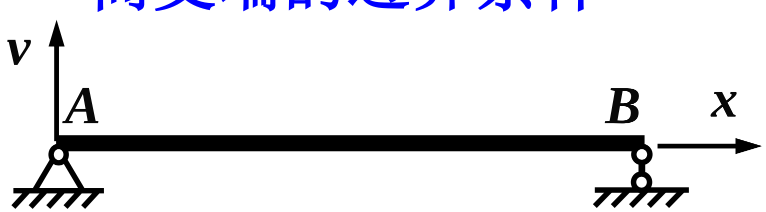
$$\theta(x)=v'(x)=\int\frac{M(x)}{EI_z}\mathrm{d}x+C \qquad v(x)=\iint\frac{M(x)}{EI_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}x+Cx+D$$

- **若为等直梁：**

$$EI_z\theta(x)=\int M(x)\mathrm{d}x+C \qquad EI_zv(x)=\iint M(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+Cx+D$$

其中，C、D为积分常数，由边界条件确定。

简支端的边界条件

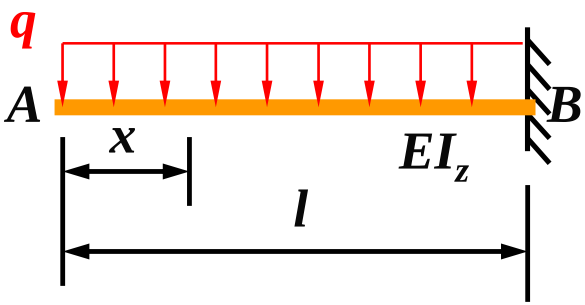


$$\begin{cases}x=0 & v=0\\ x=l & v=0\end{cases}$$

悬臂端的边界条件

$$\begin{cases}x=0 & v=0\\ x=0 & \theta=0\end{cases}$$

6-2 直接积分法



例6-1 已知：q、EI_z、l，

求挠曲线方程及最大挠度和转角。

解： 弯矩方程：$M(x) = -\dfrac{q}{2}x^2$

$$EI_z\theta(x) = -\int \frac{q}{2}x^2\mathrm{d}x + C = -\frac{qx^3}{6} + C$$

$$EI_z v(x) = \int \frac{-q}{6}x^3\mathrm{d}x + Cx + D = -\frac{qx^4}{24} + Cx + D$$

边界条件：

$$x = l: v = 0, \theta = 0$$

$$C = \frac{ql^3}{6}, \quad D = -\frac{ql^4}{8}$$

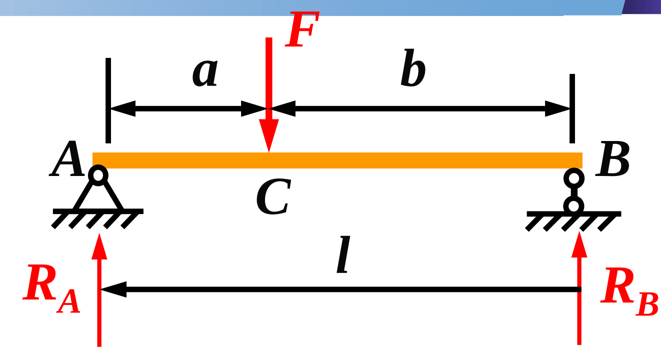
$$\theta(x) = \frac{q}{6EI_z}(l^3 - x^3) \qquad v(x) = \frac{-q}{24EI_z}(3l^4 - 4l^3x + x^4)$$

$$|v|_{\max} = \frac{ql^4}{8EI_z}(\downarrow) \qquad |\theta|_{\max} = \frac{ql^3}{6EI_z}(\circlearrowright)$$

6-2 直接积分法

例6-2 已知：F、EI_z、a、b；

求挠曲线方程及最大挠度和转角。



解： $R_A = Fb/l \quad R_B = Fa/l$

$$M_1(x) = \frac{Fb}{l}x \quad (0 \le x \le a)$$

$$M_2(x) = \frac{Fb}{l}x - F(x-a) \quad (a \le x \le l)$$

$$EI_z\theta_1 = \frac{Fb}{2l}x^2 + C_1$$

$$EI_z\theta_2 = \frac{Fb}{2l}x^2 - \frac{F}{2}(x-a)^2 + C_2$$

$$EI_z v_1 = \frac{Fb}{6l}x^3 + C_1 x + D_1$$

$$EI_z v_2 = \frac{Fb}{6l}x^3 - \frac{F}{6}(x-a)^3 + C_2 x + D_2$$

边界条件：

$$x = 0 : v_1 = 0,\ x = l : v_2 = 0$$

连续条件：

$$x = a : \theta_1 = \theta_2,\ v_1 = v_2$$

得： $D_1 = D_2 = 0$

$$C_1 = C_2 = \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

继续……

上节课内容回顾

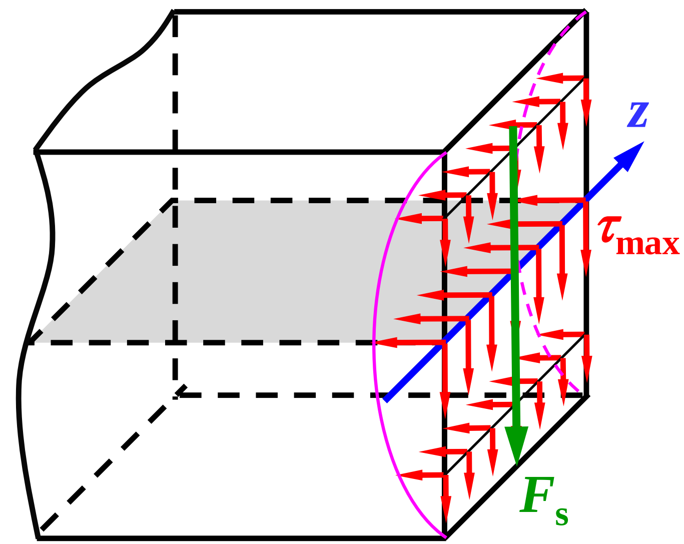
- 弯曲切应力：

对于矩形截面：$\tau = \dfrac{F_s S_z^*}{b I_z}$　　$\tau_{\max} = \dfrac{3F_s}{2A}$

对于工字形截面：$\tau_{\max} = \dfrac{F_s S_{z,\max}^*}{d\, I_z} \approx \dfrac{F_s}{A_{腹}}$

对于实心圆截面：$\tau_{\max} = \dfrac{4F_s}{3A}$

对于薄壁圆环截面：$\tau_{\max} = \dfrac{2F_s}{A}$



- 弯曲切应力强度条件：

$$\tau_{\max} = k\frac{F_s}{A} \le [\tau]$$

- 提高梁静强度的措施

- 弯曲变形：曲率、转角、挠度

$$\frac{1}{\rho(x)} = v''(x) = \theta'(x) = \frac{M(x)}{E I}$$

- 直接积分法：

$$EI_z\theta(x) = \int M(x)\mathrm{d}x + C$$

$$EI_z v(x) = \iint M(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x + Cx + D$$

第六章 弯曲变形

- 概述
- 直接积分法
- 查表叠加法
- 梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施(部分自学)
- 变形比较法求解超静定梁

学前问题：

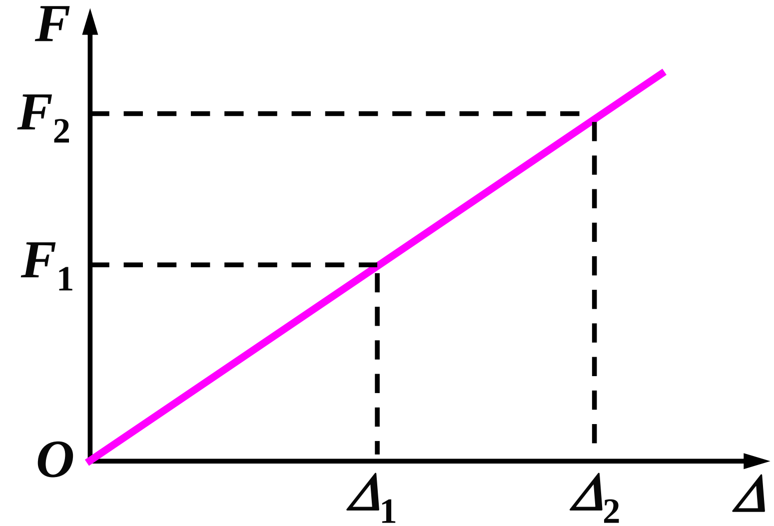
- 查表叠加法?
- 弯曲刚度条件?
- 弯曲超静定问题?

西安交通大学 XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

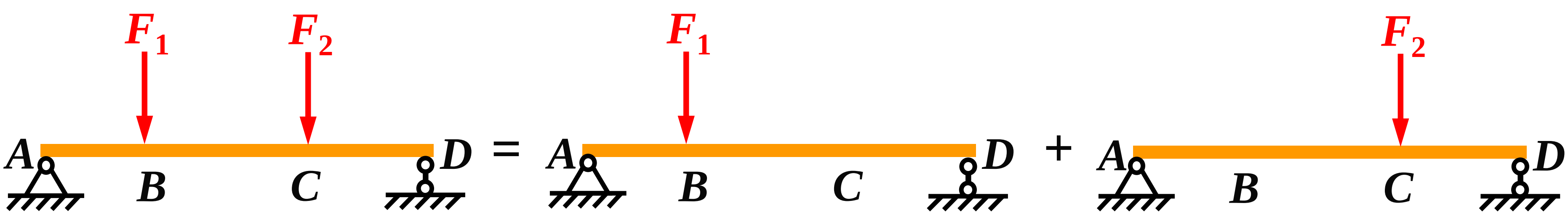
航天航空学院--力学中心

6-3 查表叠加法

- 变形是载荷的**线性函数**；



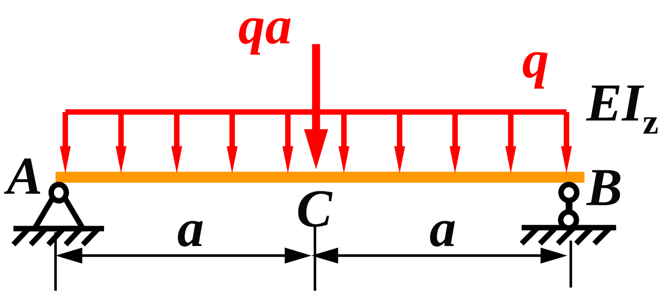
- 当梁上有多个载荷同时作用时，总的变形等于每个载荷单独作用时变形之和，此方法称为**叠加法(Superpositon Method)**。



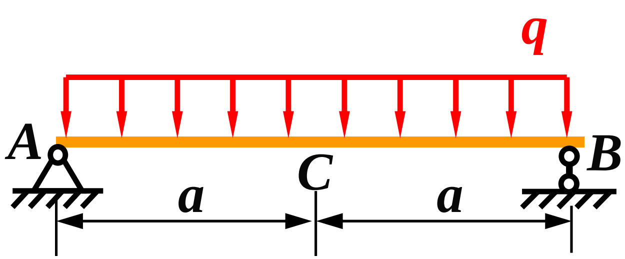
- 为提高效率，可以将几类梁在几种常见载荷作用下引起的转角、挠度以及挠曲线方程等，事先求出，列成表格（附录B），以供查用。

6-3 查表叠加法

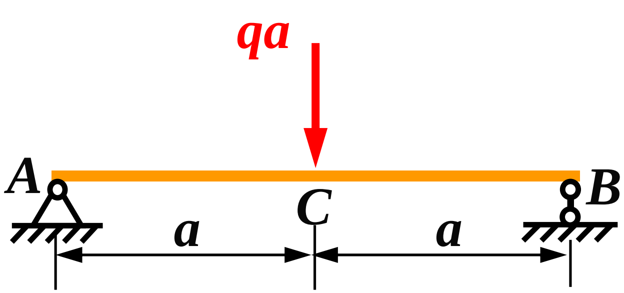
例6-3 求下梁C截面的挠度和A截面的转角。



1



2



解：

$$v_{C1}=\frac{5q(2a)^4}{384EI_z}=\frac{5qa^4}{24EI_z}(\downarrow)$$

$$v_{C2}=\frac{qa(2a)^3}{48EI_z}=\frac{qa^4}{6EI_z}(\downarrow)$$

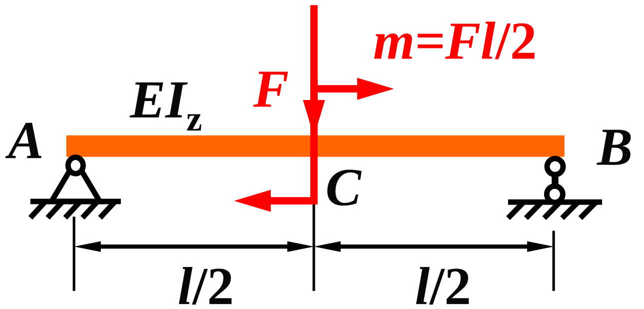
$$v_C=v_{C1}+v_{C2}=\frac{3qa^4}{8EI_z}(\downarrow)$$

$$\theta_{A1}=\frac{q(2a)^3}{24EI_z}=\frac{qa^3}{3EI_z}(\circlearrowright)$$

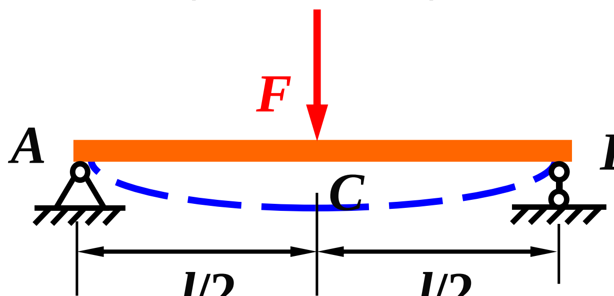
$$\theta_{A2}=\frac{qa(2a)^2}{16EI_z}=\frac{qa^3}{4EI_z}(\circlearrowright)$$

$$\theta_A=\theta_{A1}+\theta_{A2}=\frac{7qa^3}{12EI_z}(\circlearrowright)$$

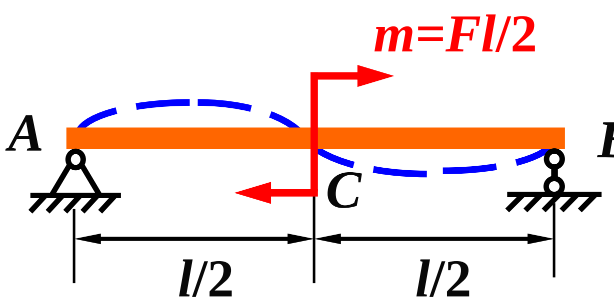
例6-4 求C截面的挠度和A截面的转角。



1



2



解：

$$v_C = v_C(F) + v_C(m)$$

$$= v_C(F) = \frac{Fl^3}{48EI_z}(\downarrow)$$

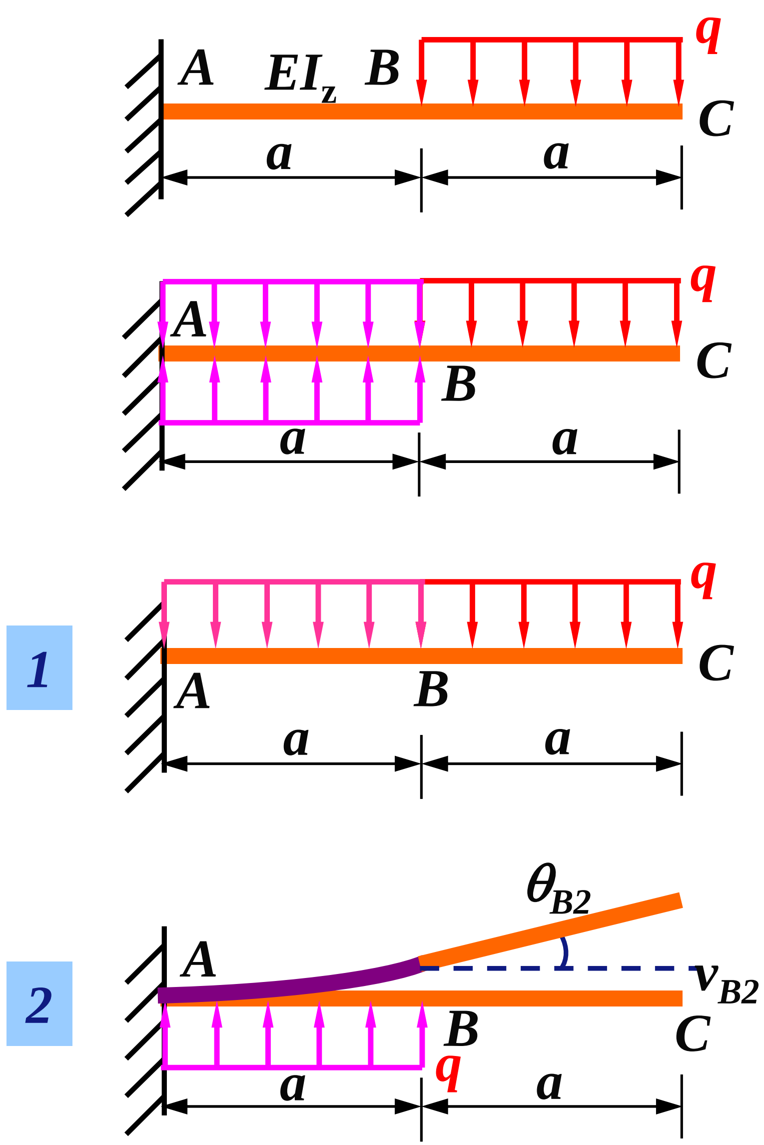
$$\theta_A(F) = \frac{Fl^2}{16EI_z}(\;)$$

$$\theta_A(m) = \frac{Fl^2}{48EI_z}(\;)$$

$$\theta_A = \theta_A(F) + \theta_A(m)$$

$$= \frac{Fl^2}{EI_z}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\right) = \frac{Fl^2}{24EI_z}(\;)$$

6-3 查表叠加法



例6-5 求图示悬臂梁C点的挠度。

解法一：查表叠加法

$$v_C = v_{C1} + v_{C2}$$

$$v_{C1} = \frac{q(2a)^4}{8EI_z}(\downarrow)$$

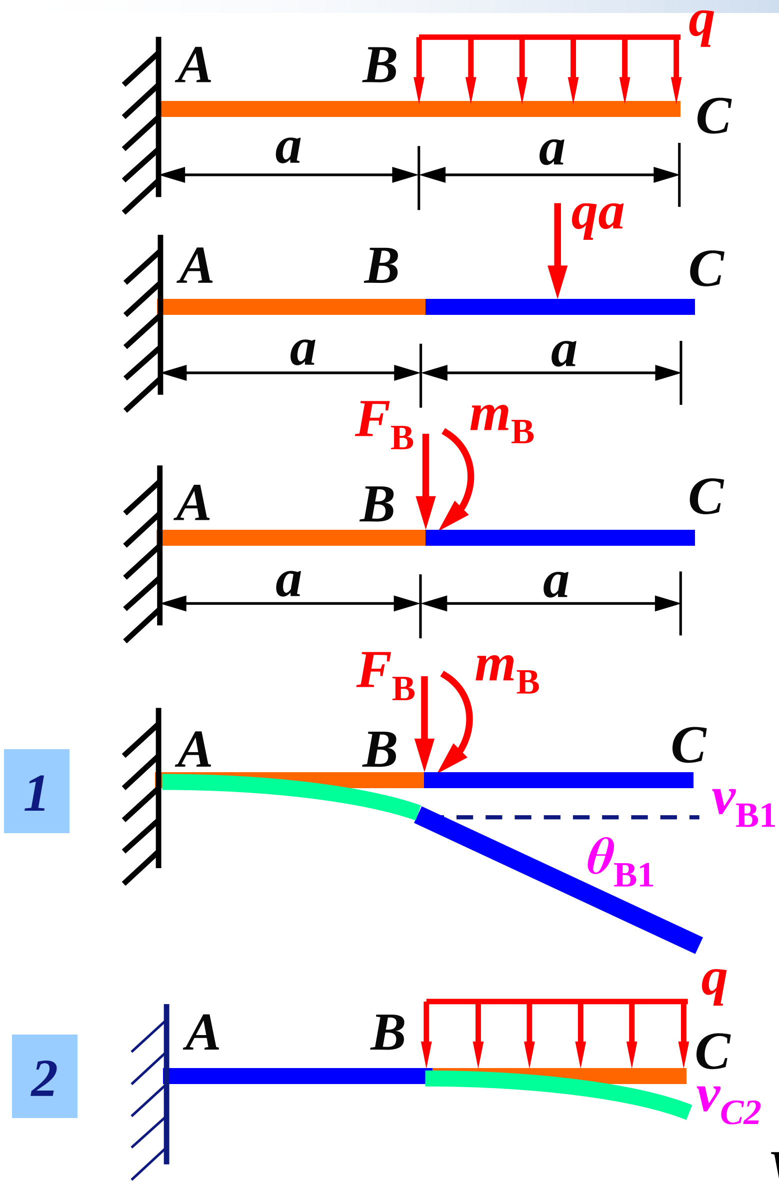
$$v_{C2} = v_{B2} + \theta_{B2}a = \frac{7qa^4}{24EI_z}(\uparrow)$$

$$v_{B2} = \frac{qa^4}{8EI_z}(\uparrow) \qquad \theta_{B2} = \frac{qa^3}{6EI_z}(\circlearrowleft)$$

$$v_C = v_{C1} + v_{C2}$$

$$= \frac{2qa^4}{EI_z} - \frac{7qa^4}{24EI_z} = \frac{41qa^4}{24EI_z}(\downarrow)$$

6-3 查表叠加法



解法二：逐段刚化法

1、先将 *BC* 段刚性，让*AB* 段变形

$$F_B = qa\,,\quad m_B = \frac{1}{2}qa^2$$

$$v_{C1} = v_{B1} + \theta_{B1}a$$

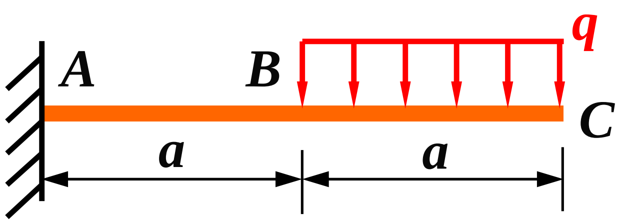
$$v_{B1} = \frac{F_B a^3}{3EI_z} + \frac{m_B a^2}{2EI_z} = \frac{7qa^4}{12EI_z}(\downarrow)$$

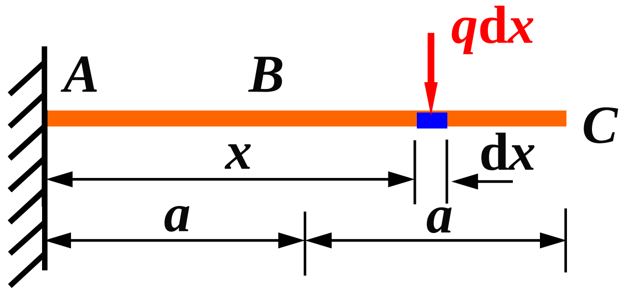
$$\theta_{B1} = \frac{F_B a^2}{2EI_z} + \frac{m_B a}{EI_z} = \frac{qa^3}{EI_z}(\curvearrowright)$$

$$v_{C1} = v_{B1} + \theta_{B1}a = \frac{19qa^4}{12EI_z}(\downarrow)$$

2、再将 *AB* 段刚性，让*BC* 段变形

$$v_{C2} = \frac{qa^4}{8EI_z}(\downarrow) \qquad v_C = v_{C1} + v_{C2} = \frac{41qa^4}{24EI_z}(\downarrow)$$





解法三：微段积分法

1、在x处取微段dx

$$\mathrm{d}v_C = \mathrm{d}v_x + \mathrm{d}\theta_x \cdot (2a - x)$$

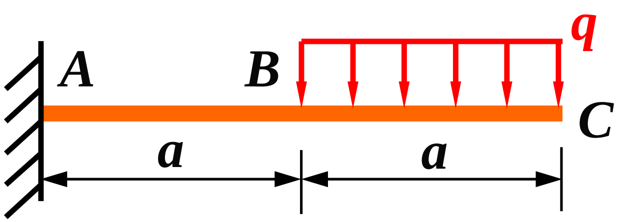
$$= \frac{q\mathrm{d}x}{3EI_z}x^3 + \frac{q\mathrm{d}x}{2EI_z}x^2(2a - x)$$

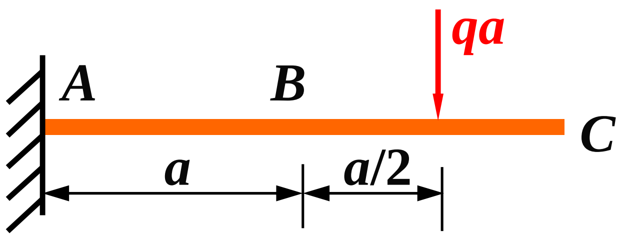
$$= \frac{q\mathrm{d}x}{6EI_z}x^2(6a - x)(\downarrow)$$

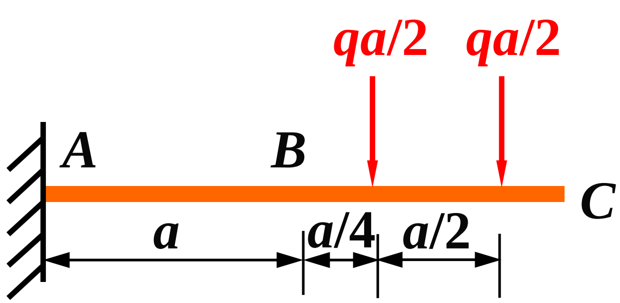
2、积分：从 a 到 $2a$

$$v_C = \int_a^{2a} \mathrm{d}v_C = \frac{41qa^4}{24EI_z}(\downarrow)$$

6-3 查表叠加法







解法四：等效载荷法（近似）

$$\bar{v}_C = \frac{qa(\frac{3a}{2})^3}{3EI_z} + \frac{qa(\frac{3a}{2})^2}{2EI_z}\cdot\frac{a}{2} = \frac{27qa^4}{16EI_z}(\downarrow)$$

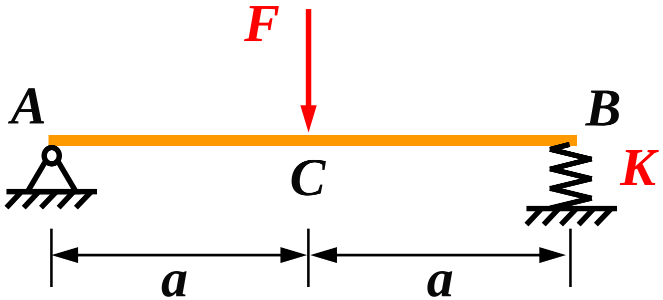
误差 $\delta = 1-(\frac{27}{16})/(\frac{41}{24}) = \frac{1}{81} = 1.2\%$

$$\bar{v}_C = \frac{\frac{qa}{2}(\frac{5a}{4})^3}{3EI_z} + \frac{\frac{qa}{2}(\frac{5a}{4})^2}{2EI_z}(\frac{3a}{4})$$

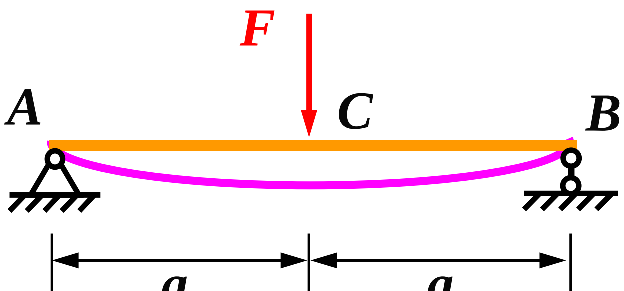
$$+\frac{\frac{qa}{2}(\frac{7a}{4})^3}{3EI_z} + \frac{\frac{qa}{2}(\frac{7a}{4})^2}{2EI_z}(\frac{a}{4}) = \frac{109qa^4}{64EI_z}(\downarrow)$$

误差 $\delta = 1-(\frac{109}{64})/(\frac{41}{24}) = \frac{1}{328} = 0.3\%$

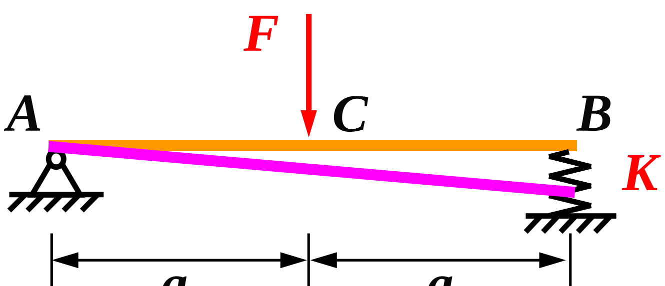
6-3 查表叠加法



1



2



例6-6 已知：F、a、K、EI

求：v_C

解： 先将弹簧刚化

$$v_{C1}=\frac{Fa^3}{6EI}(\downarrow)$$

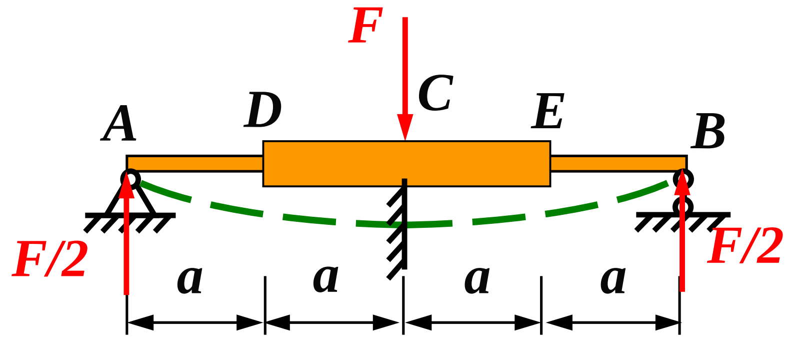
再将AB梁刚化

$$v_{C2}=\frac{1}{2}\times\frac{F/2}{K}=\frac{F}{4K}(\downarrow)$$

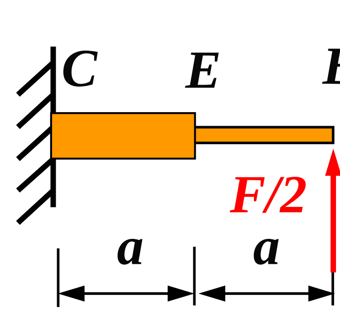
叠加求和

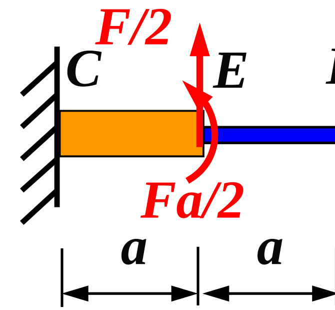
$$v_C=v_{C1}+v_{C2}=\frac{Fa^3}{6EI}+\frac{F}{4K}(\downarrow)$$

例6-7 已知：F、a，AD和EB段截面抗弯刚度为EI，DE段为$2EI$。求：v_C。



解： 根据对称性，转化为求悬臂梁B点的挠度





刚化CE段 $$v_{B1}=\frac{Fa^3}{6EI}\ (\uparrow)$$

刚化EB段 $$v_{B2}=v_E+\theta_E a\ (\uparrow)$$

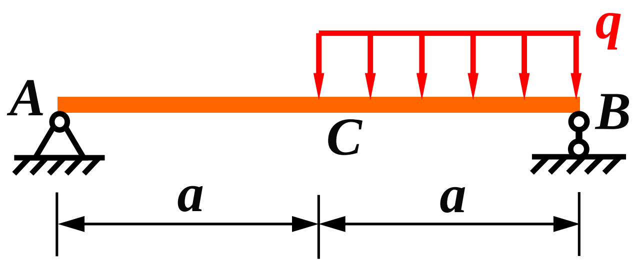
$$v_E=\frac{Fa^3}{12EI}+\frac{Fa^3}{8EI}=\frac{5Fa^3}{24EI}(\uparrow)$$

$$v_{B2}=\frac{5Fa^3}{24EI}+\frac{3Fa^3}{8EI}=\frac{7Fa^3}{12EI}(\uparrow)$$

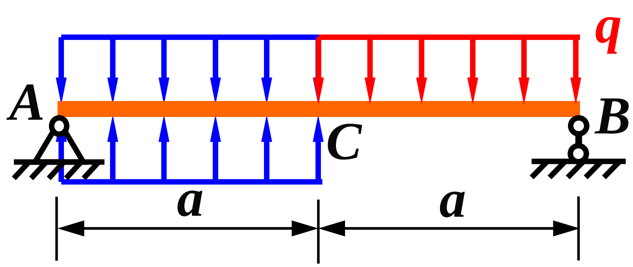
$$\theta_E=\frac{Fa^2}{8EI}+\frac{Fa^2}{4EI}=\frac{3Fa^2}{8EI}$$

$$v_B=\frac{Fa^3}{6EI}+\frac{7Fa^3}{12EI}=\frac{9Fa^3}{12EI}(\uparrow)=v_C(\downarrow)$$

6-3 查表叠加法



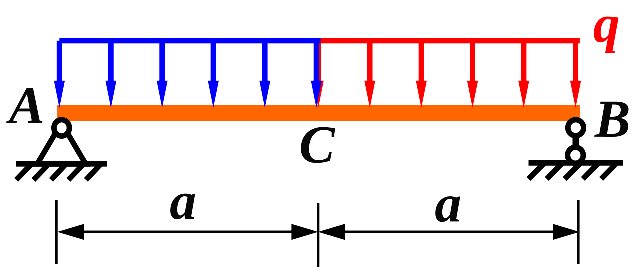
例6-8 试确定C截面的挠度，梁的抗弯刚度为EI_z。



解法一：

$$v_C = v_{C1} + v_{C2}$$

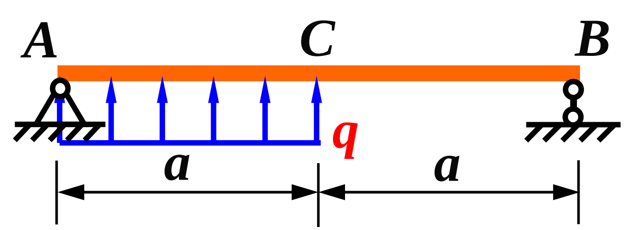
1



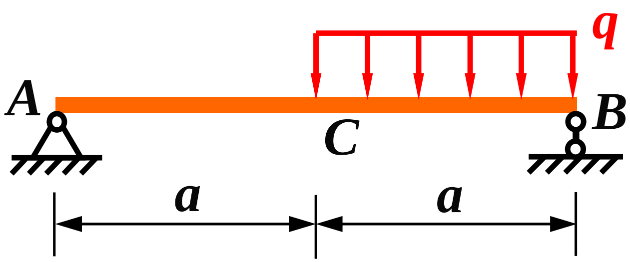
$$v_C = -v_{C2}$$

$$v_C = \frac{1}{2} v_{C1} = \frac{5qa^4}{48EI_z} (\downarrow)$$

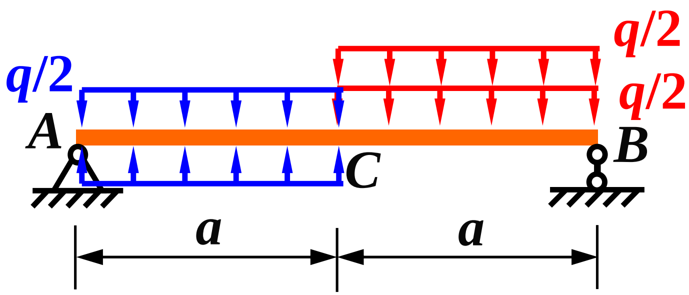
2



6-3 查表叠加法



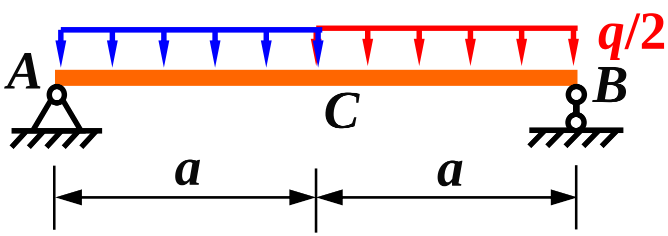
解法二：



$$v_C = v_{C1} + v_{C2}$$

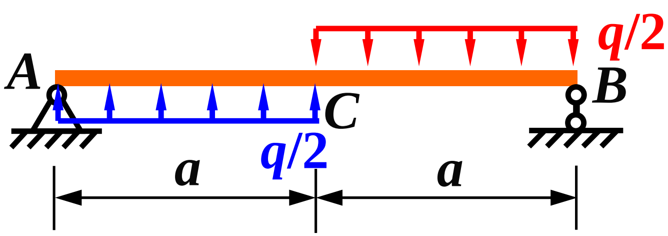
$$v_{C2} = 0$$

1



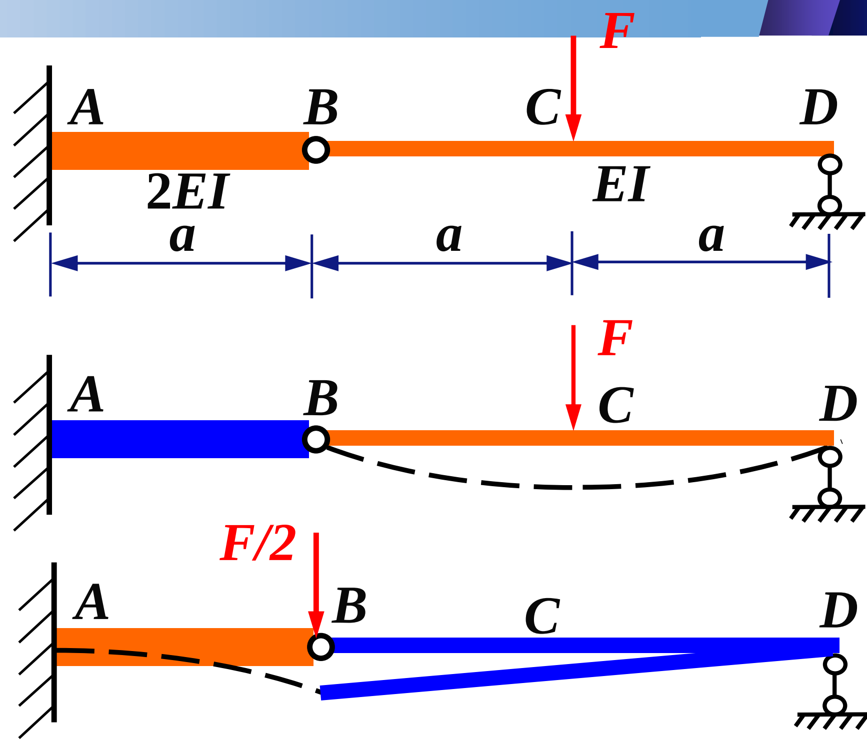
$$v_C = v_{C1} = \frac{5qa^4}{48EI_z}(\downarrow)$$

2



6-3 查表叠加法

例6-9 求组合梁C截面的挠度和D截面的转角。AB梁的抗弯刚度为$2EI$，BD梁的抗弯刚度为EI。



解：1）刚化AB梁

$$v_{C1}=\frac{F(2a)^3}{48EI}=\frac{Fa^3}{6EI}\ (\downarrow)$$

$$\theta_{D1}=\frac{F(2a)^2}{16EI}=\frac{Fa^2}{4EI}\ (\circlearrowleft)$$

2）刚化BD梁

$$v_{C2}=\frac{v_{B2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(F/2)a^3}{3(2EI)}=\frac{Fa^3}{24EI}\ (\downarrow)$$

$$\theta_{D2}=\frac{v_{B2}}{2a}=\frac{Fa^2}{24EI}\ (\circlearrowleft)$$

3）叠加求和

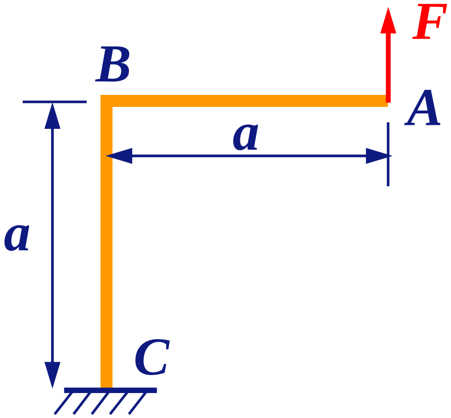
$$v_C=v_{C1}+v_{C2}=\frac{5Fa^3}{24EI}\ (\downarrow)$$

$$\theta_D=\theta_{D1}+\theta_{D2}=\frac{7Fa^2}{24EI}\ (\circlearrowleft)$$

6-3 查表叠加法

例6-10 已知：F、a、EA、EI

求： Δx_A (水平)和Δy_A(铅垂)



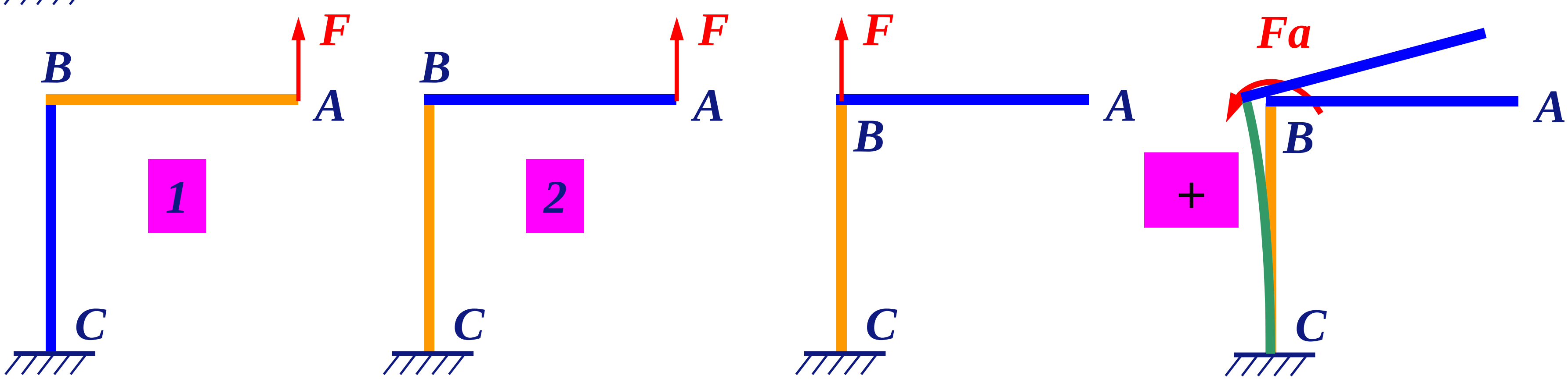
解： 先将BC刚化：$\Delta y_{A1} = \dfrac{Fa^3}{3EI}\ (\uparrow)$

再将AB刚化： $\Delta x_{A2} = \dfrac{Fa^3}{2EI}\ (\leftarrow)$

$$\Delta y_{A2} = \frac{Fa}{EA} + \frac{Fa^2}{EI} \times a\ (\uparrow)$$

忽略

叠加求和：$\Delta x_A = \dfrac{Fa^3}{2EI}\ (\leftarrow)$ $\quad \Delta y_A = \dfrac{4Fa^3}{3EI} + \cancel{\dfrac{Fa}{EA}}\ (\uparrow)$

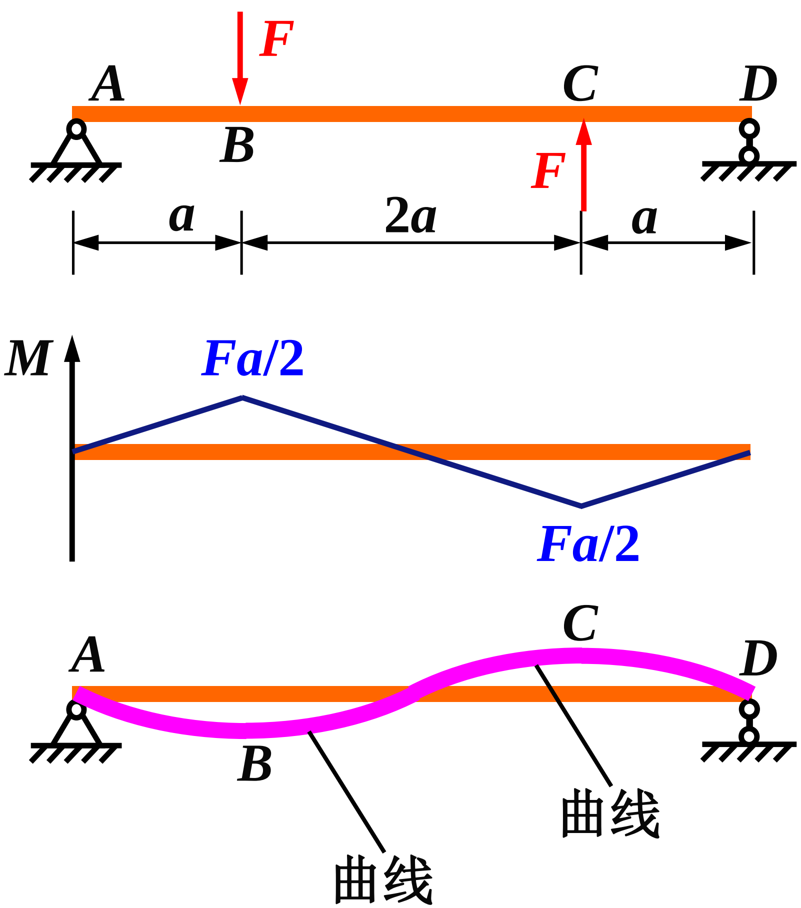


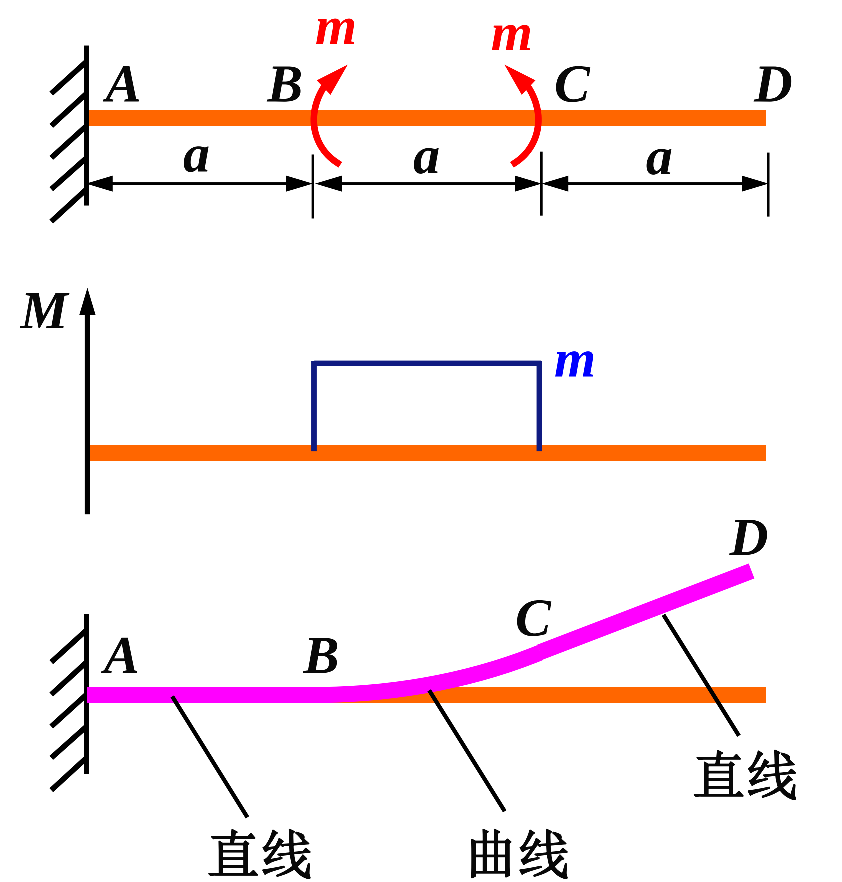
工程上，对于一般细长杆，拉压变形相对于弯曲变形可忽略。

6-3 查表叠加法

例6-11 画出下列梁的挠度曲线大致形状。

解： 综合考虑边界条件、对称性和弯矩的正负来判断

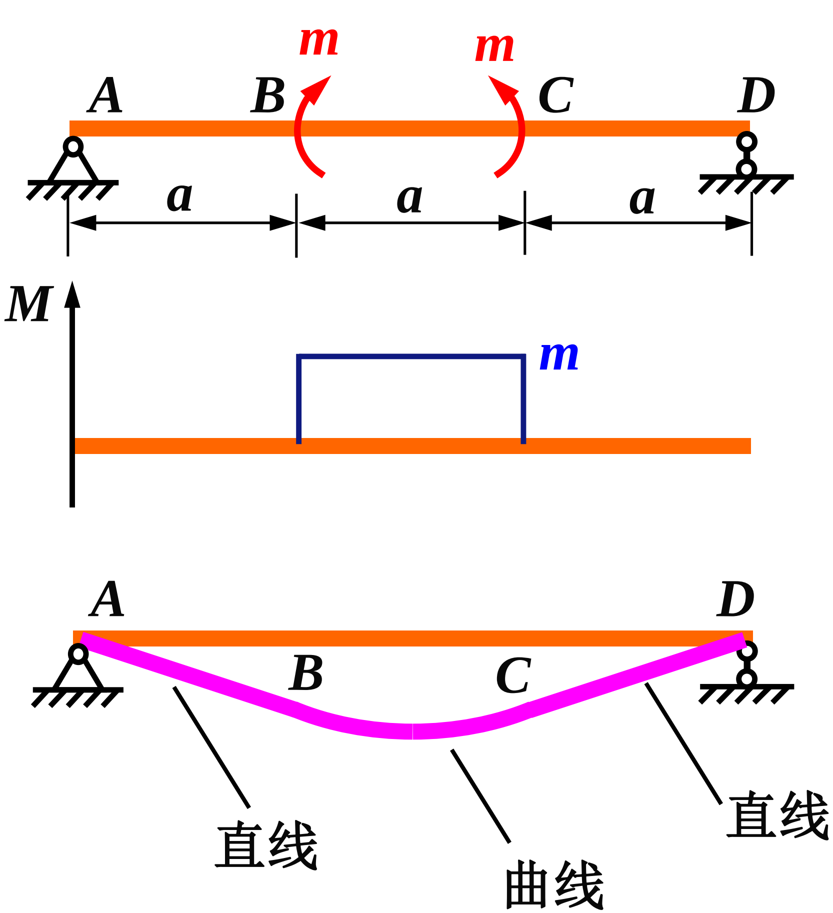


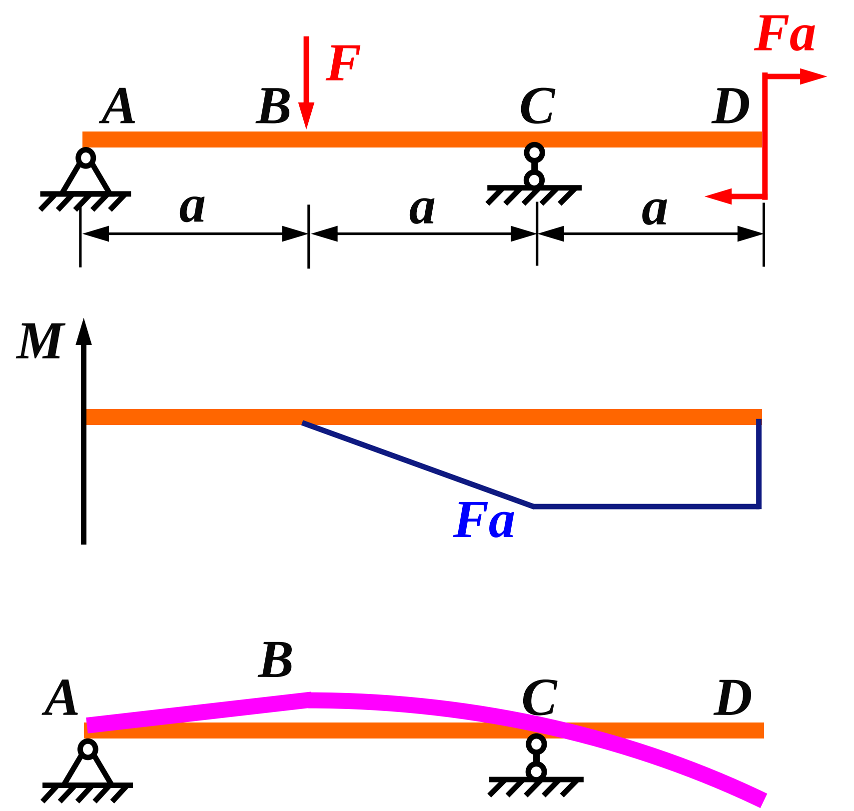


6-3 查表叠加法

例6-11 画出下列梁的挠度曲线大致形状。

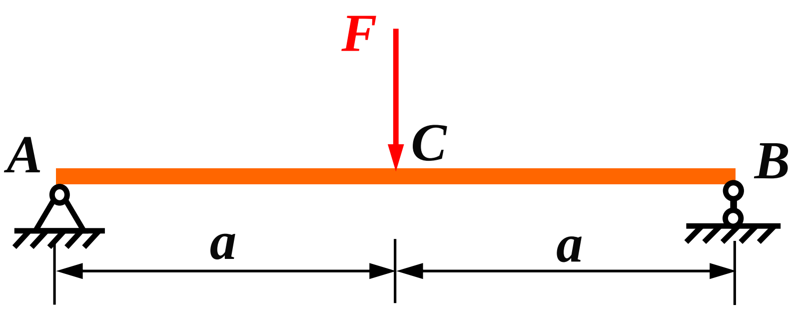
解： 综合考虑边界条件、对称性和弯矩的正负来判断

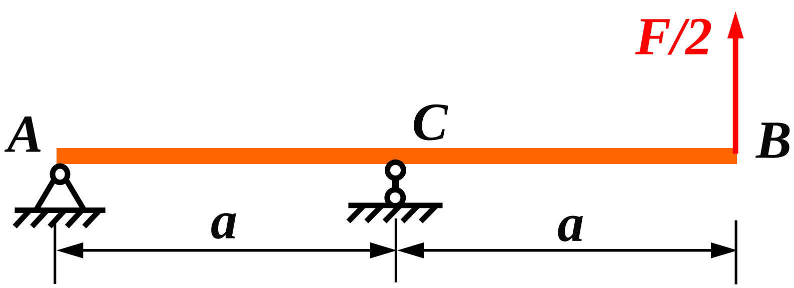




6-3 查表叠加法

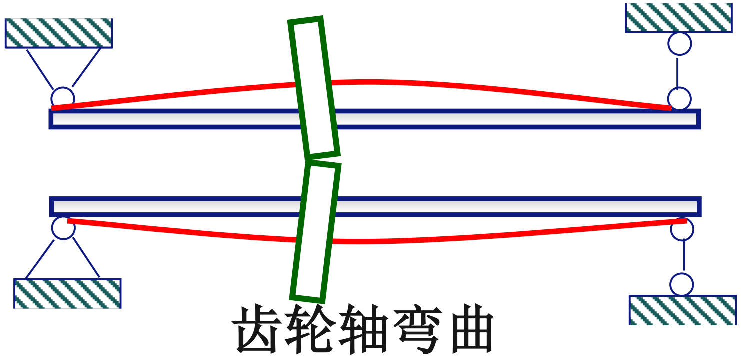
思考题： 讨论下面两根梁，其受力、内力是否相同？变形是否相同？



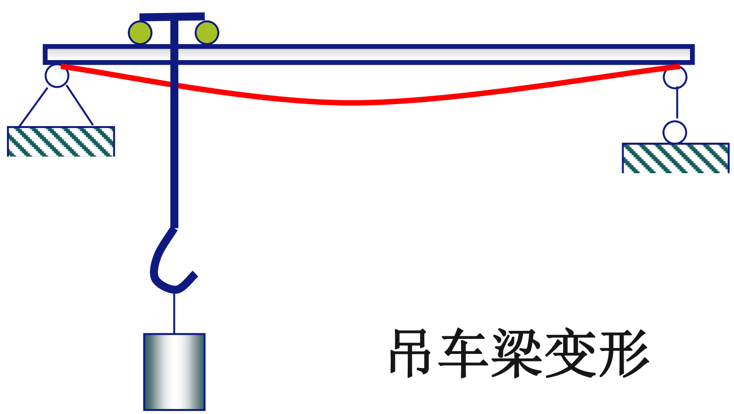


6-4 梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施

一、梁的刚度条件：



齿轮轴弯曲变形过大，就要影响齿轮的正常啮合，加速齿轮的磨损，加速轴承的磨损，同时产生较大的噪音。



吊车梁若变形过大，一方面会使吊车在行驶过程中发生较大的振动，另一方面使得吊车出现下坡和爬坡现象。

所以：要使梁正常安全的工作，一方面梁不仅要满足强度条件，另一方面梁还必须满足一定的刚度条件。

6-4 梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施

$$v_{\max} \le [v]$$

$$\theta_{\max} \le [\theta]$$

[v]：许用挠度

[θ]：许用转角

机床主轴

$$[v] = (0.0001 \sim 0.0005)l$$

$$[\theta] = (0.001 \sim 0.005)\text{rad}$$

起重机大梁

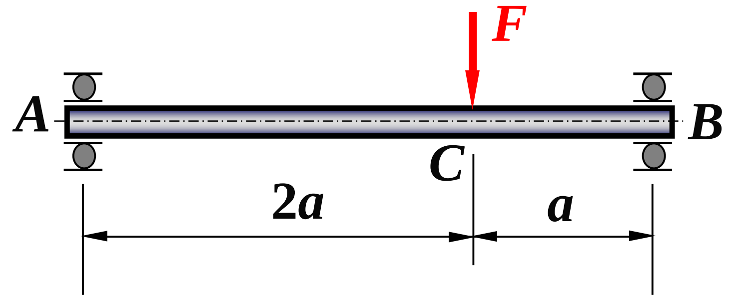
$$[v] = (0.001 \sim 0.005)l$$

发动机凸轮轴

$$[v] = (0.05 \sim 0.06)\text{mm}$$

对于梁的弯曲，强度条件和刚度条件同等重要，一般在梁的设计中，先采用**强度条件**设计梁的截面尺寸，再用**刚度条件**进行校核。

例6-12 轴承许用转角[θ]= 0.05 rad，F = 20 kN，a =200 mm，E =200GPa。[σ] = 60MPa，[τ] = 30MPa，确定轴的直径d。



解: (1) 内力计算 $|M|_{\max}=\dfrac{2Fa}{3}=2.67\text{kNm}$ $\quad |F_{\text{s}}|_{\max}=\dfrac{2F}{3}=13.33\text{kN}$

(2) 强度计算 $\sigma_{\max}=\dfrac{|M|_{\max}}{W_z}\le[\sigma]$ $\qquad d\ge\sqrt[3]{\dfrac{32|M|_{\max}}{\pi[\sigma]}}=76.8\text{mm}$

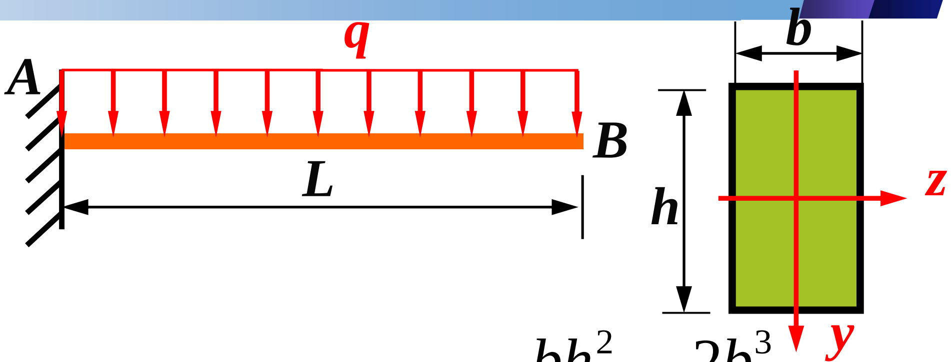
$$\tau_{\max}=\frac{4}{3}\frac{|F_{\text{s}}|_{\max}}{A}=3.84\text{MPa}\le[\tau]$$ (可忽略)

(3) 刚度校核

$$\theta_{\max}=\theta_B=\frac{F2a\cdot a(3a+2a)}{6(2a+a)EI}=\frac{10Fa^3\cdot 64}{18aE\pi d^4}=0.0013\le[\theta]$$ 刚度足够！

(4)最终取d =76.8mm 或d =77mm

例6-13 矩形截面的悬臂梁，q=100kN/m, L=3m, $[\sigma]$=120MPa, $[\tau]$=50MPa, E=200GPa, $[v]=L/350$, $h=2b$。设计截面尺寸b, h。



解: (1)内力计算 $|M|_{\max}=\dfrac{qL^2}{2}$ $\quad |F_s|_{\max}=qL$ $\quad W_z=\dfrac{bh^2}{6}=\dfrac{2b^3}{3}$

(2)强度计算 $\sigma_{\max}=\dfrac{|M|_{\max}}{W_z}\le[\sigma]$ $\quad b\ge\sqrt[3]{\dfrac{3|M|_{\max}}{2[\sigma]}}=178\text{mm}$

$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{|F_s|_{\max}}{A}=\frac{3}{2}\frac{qL}{bh}=7.10\text{MPa}\le[\tau]$$ **(可忽略)**

(3)刚度校核 $I_z=\dfrac{bh^3}{12}=\dfrac{2}{3}b^4$ $\quad [v]=\dfrac{L}{350}=8.57\text{mm}$

$$v_{\max}=\frac{qL^4}{8EI_z}=7.57\text{mm}\le[v]$$ **刚度足够！**

(4)最终取 b =178mm , h=356mm

6-4 梁的刚度条件和提高弯曲刚度的措施

二、提高弯曲刚度的措施

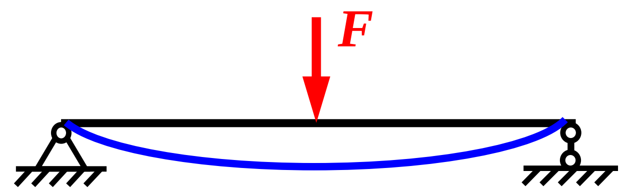
$$变形 \propto \frac{载荷\times(长度)^n}{抗弯刚度}$$

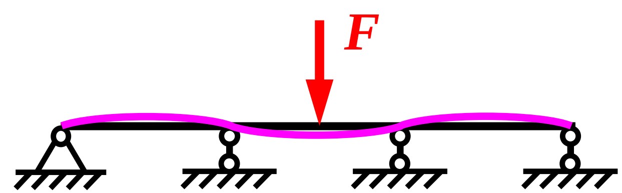
- 合理安排载荷，改变载荷的作用方式、位置和分布情况，减小弯矩；

- 合理设计截面，提高抗弯刚度*EI*；

- 缩短梁的跨度，或增加支座，是提高梁刚度的最显著方法。

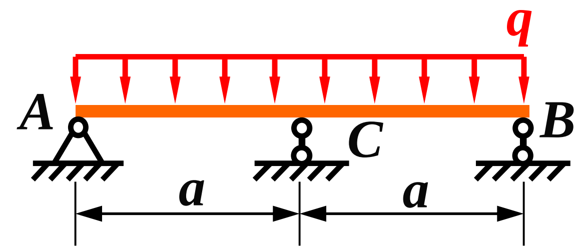
	集中力偶	集中力	均布力
转角$\propto$	L	L^2	L^3
挠度$\propto$	L^2	L^3	L^4



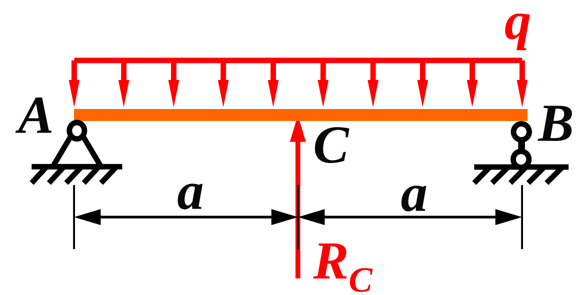


6-5 变形比较法求解超静定梁

例6-14 求下列超静定梁的支反力。



解：1、解除C处约束，代之约束力

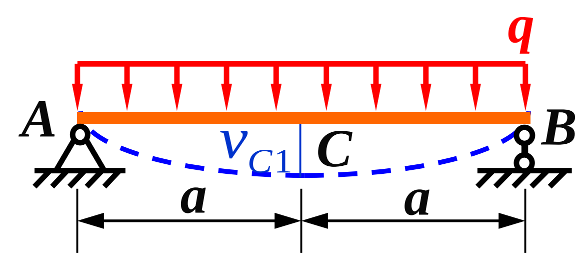


2、几何方程 $v_C = v_{C1} + v_{C2} = 0$

3、物理方程

$$v_{C1} = \frac{5q(2a)^4}{384EI_z} = \frac{5qa^4}{24EI_z}(\downarrow)$$

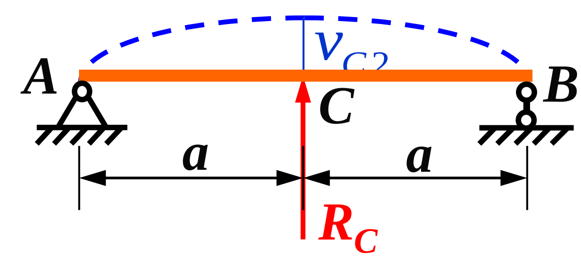
1



$$v_{C2} = \frac{R_C(2a)^3}{48EI_z} = \frac{R_C a^3}{6EI_z}(\uparrow)$$

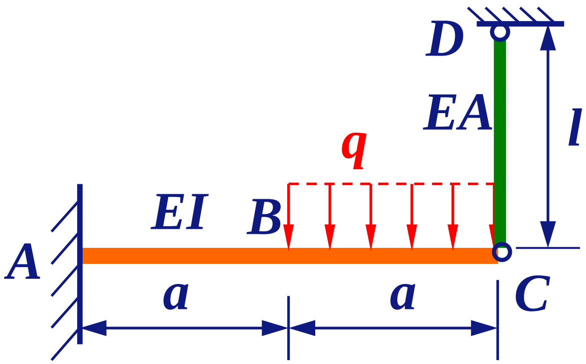
4、补充方程 $$\frac{5qa^4}{24EI_z} - \frac{R_C a^3}{6EI_z} = 0$$

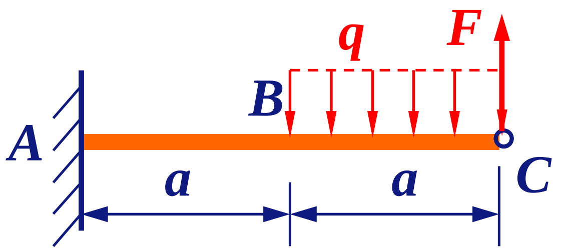
2

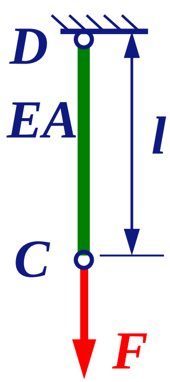


5、解得

$R_C = 5qa/4(\uparrow)$ $\quad$ $R_A = R_B = 3qa/8(\uparrow)$







例6-15 求解图示结构的支反力。

解： 解除C点约束，代之以约束反力

几何条件 $v_C = \Delta l_{CD}$

$$\Delta l_{CD} = \frac{Fl}{EA} \qquad v_C = v_C(F) + v_C(q)$$

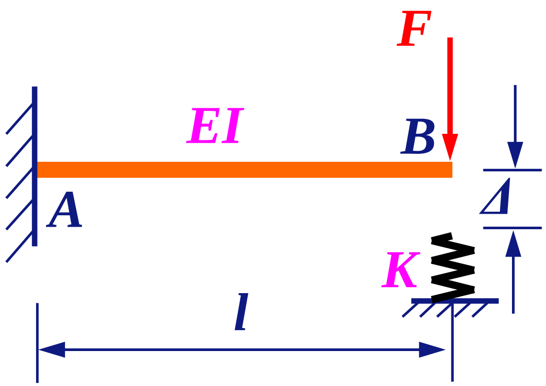
$$v_C(F) = \frac{F(2a)^3}{3EI}(\uparrow) \qquad v_C(q) = \frac{41qa^4}{24EI}(\downarrow)$$

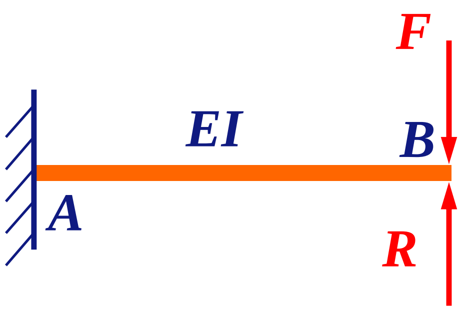
代入几何条件

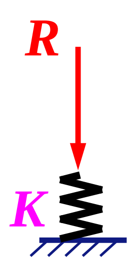
$$\frac{41qa^4}{24EI} - \frac{8Fa^3}{3EI} = \frac{Fl}{EA}$$

可解得 F 及所有支反力。

6-5 变形比较法求解超静定梁







例6-16 求图示结构当 F 力作用后，弹簧的压缩量 (F力足够大)。

解： 用约束反力R 代替弹簧

几何条件 $v_B - \Delta l = \Delta$

$$v_B = \frac{(F-R)l^3}{3EI}(\downarrow) \qquad \Delta l = \frac{R}{K}$$

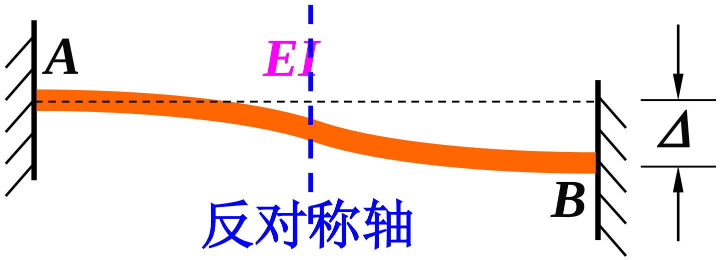
代入几何条件

$$R = \frac{KFl^3 - 3\Delta KEI}{Kl^3 + 3EI}$$

$$\Delta l = \frac{Fl^3 - 3\Delta EI}{Kl^3 + 3EI}$$

6-5 变形比较法求解超静定梁

例6-17 图示结构，由于地基垂直沉降，B端低于A端Δ。作梁的弯矩图。



解： 1、解除B端约束，代之约束反力

2、几何方程 $v_B = \Delta \quad \theta_B = 0$

3、物理方程

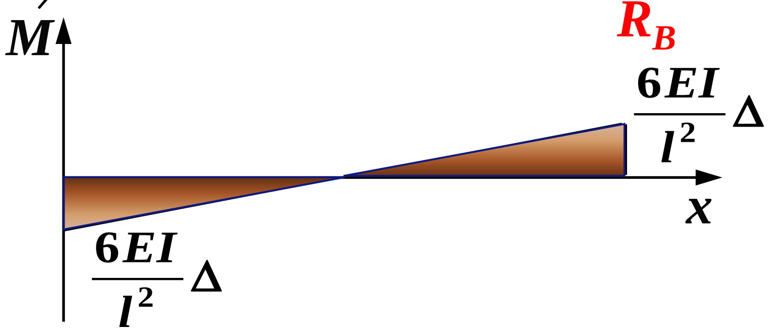
$$v_B = \frac{R_B l^3}{3EI} - \frac{M_B l^2}{2EI}$$

$$\theta_B = \frac{R_B l^2}{2EI} - \frac{M_B l}{EI}$$

4、联立求解

$$R_B = \frac{12EI}{l^3}\Delta$$

$$M_B = \frac{6EI}{l^2}\Delta$$



5、讨论：利用对称性

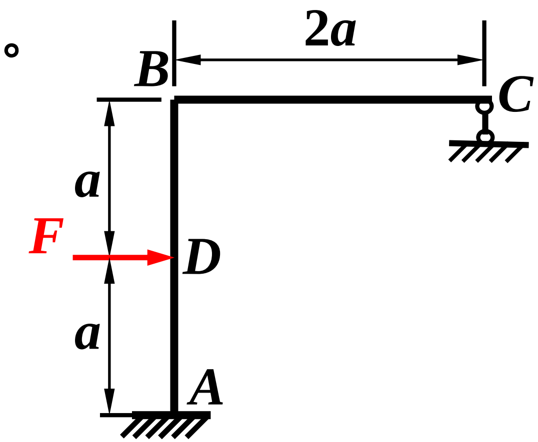
◆反对称轴通过的截面弯矩为零，
正对称轴通过的截面剪力为零。

$$M_C = 0$$

$$v_C = \Delta / 2$$

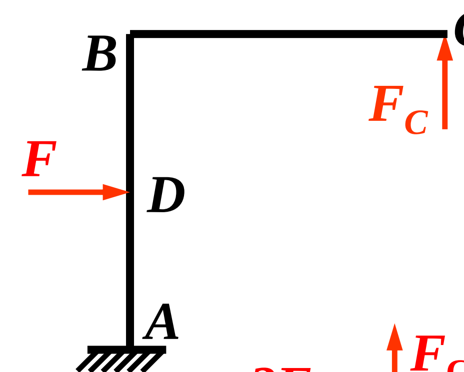
6-5 变形比较法求解超静定梁

例6-18 画出图示等截面刚架弯矩图（EI 为常数）。



解： 解除多余约束，代之约束反力

变形协调方程 $\Delta_C = 0$



采用逐段刚化法：

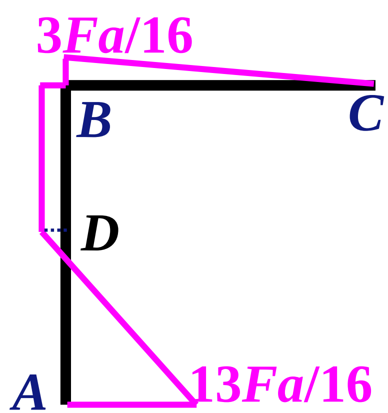
$$\Delta_C{}^1 = \frac{F_C(2a)^3}{3EI} = \frac{8F_C a^3}{3EI}(\uparrow)$$

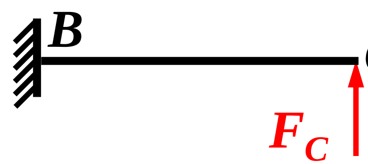
$$\Delta_C{}^2 = \theta_B \cdot l_{BC} = [\frac{(2F_C a)(2a)}{EI} - \frac{Fa^2}{2EI}] \cdot 2a$$

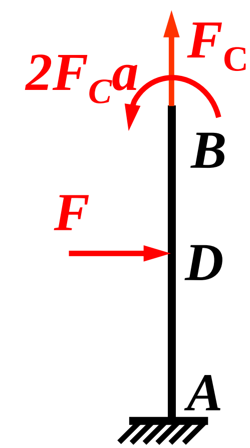
$$= \frac{8F_C a^3}{EI} - \frac{Fa^3}{EI}(\uparrow)$$

$$\Delta_C = \Delta_C{}^1 + \Delta_C{}^2 = 0$$

$$\boxed{F_C = \frac{3}{32}F}$$







基本解题思路

静定结构：

外力 $\xrightarrow[\text{作图规律}]{\text{截面法}}$ 内力（弯矩M，剪力F_s）$\longrightarrow$

应力
$$\sigma = \frac{M}{I_z} y \qquad \tau = \frac{F_s S_z^*}{b I_z}$$
$\longrightarrow$ 强度条件
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \le [\sigma] \qquad \tau_{\max} = k\frac{F_s}{A} \le [\tau]$$

变形
$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \qquad v''(x) = \theta'(x) = \frac{M(x)}{EI}$$
$\longrightarrow$ 刚度条件
$$v_{\max} \le [v] \qquad \theta_{\max} \le [\theta]$$

直接积分法、查表叠加法（逐段刚化法）

第六章的基本要求

1．明确挠曲线、挠度、转角等概念，了解梁挠曲线近似微分方程的建立过程；

2．掌握利用积分法和叠加法计算梁的变形，掌握如何建立梁的刚度条件；

3．掌握利用变形比较法求解超静定问题；

4．了解提高弯曲刚度的一些措施。

今日作业

6-4、6-5、6-10 (a)

6-4题提示：水平面内的折杆，*AB*段受弯，*AC*段受扭。

请预习

第七章“应力状态分析”