空气与气体动力学

张科

回顾：

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T dP+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P dT$$

1.理想流体、流体可压缩性、热膨胀性、完全气体

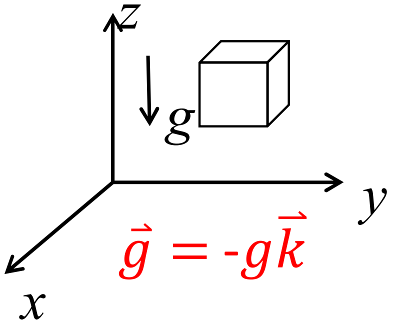
2.流体受力分类、量纲与单位

3.静平衡微分方程$\frac{dp}{dz}$=-ρg、均质流体平衡方程$(p_2-p_1)=-\rho g(z_2-z_1)$、大气压强变化

4.测压计应用、绝对压强、计示压强、真空压强

2.5非惯性系中均质流体的相对平衡（刚体运动）

惯性系（$\vec{a}=0$ static fluid）



$\vec{g}=-g\vec{k}$

$$\boxed{\begin{matrix}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial p}{\partial z}\end{matrix}} \begin{matrix}=\\=\\=\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}0\\ 0\\ -\rho g\end{matrix}}$$

单位体积压力p.u.v　　单位体积重力

向量方程：$\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}=-\rho g\vec{k}=\rho\vec{g}$

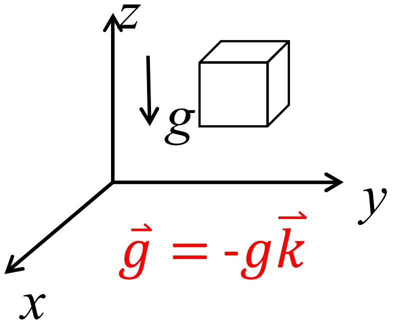
$\vec{\nabla}$　$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)}p=\rho\vec{g}$

单位体积压力　$\vec{\nabla}p=\rho\vec{g}$　单位体积重力

$$\boxed{\sum\vec{F}=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}=0}$$

2.5非惯性系中均质流体的相对平衡（刚体运动）

惯性系（$\vec{a} = 0$ static fluid）



$\vec{g} = -g\vec{k}$

$$\boxed{\begin{matrix}\dfrac{\partial p}{\partial x}\\ \dfrac{\partial p}{\partial y}\\ \dfrac{\partial p}{\partial z}\end{matrix}}\begin{matrix}=\\ =\\ =\end{matrix}\boxed{\begin{matrix}0\\ 0\\ -\rho g\end{matrix}}$$

单位体积压力p.u.v　　单位体积重力

向量方程：$\dfrac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = -\rho g\vec{k} = \rho\vec{g}$

$\vec{\nabla}$ $\boxed{\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)}p = \rho\vec{g}$

单位体积压力 $\vec{\nabla}p = \rho\vec{g}$ 单位体积重力

$$\boxed{\sum\vec{F} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = 0}$$

非惯性系（$\vec{a} \neq 0$ rigid body motion）

$$\sum\vec{F} = M\vec{a}$$

单位体积力 $-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}$

x方向：$-\dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = \rho a_x$

y方向：$-\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \rho a_y$

z方向：$-\dfrac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = \rho a_z$

笛卡尔坐标系：$\vec{\nabla}=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

圆柱体坐标系：$\vec{\nabla}=\dfrac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

投票(匿名) 最多可选1项

设置

是否理解惯性系、非惯性系下流体平衡微分方程表述及各项含义？

！需要深刻理解掌握！

A 是

B 否

C 还需课后复习

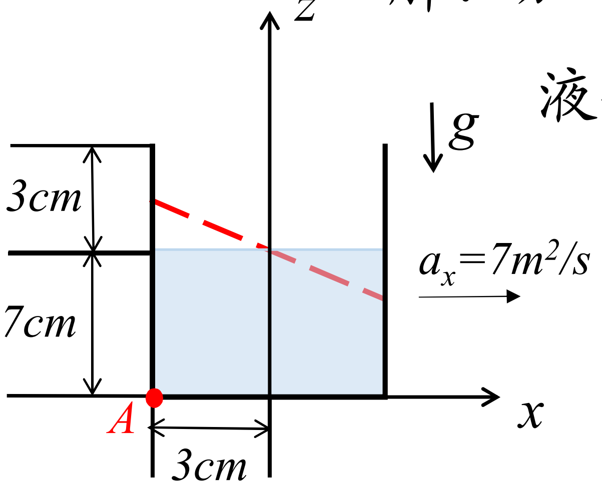
提交

2.5非惯性系中均质流体的相对平衡（刚体运动）

例 题 1. 方形容器内为水，容器高10cm，宽6cm，水原高7cm。先容器以$7m^2/s$向x正向加速。问：

$$-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}=\rho\vec{a}$$

(1)水是否会溢出？（2）求点A压强p_A。紧扣方程（物理定理）！



解：加速后水面变为虚线所示，和原液面交与中心点。

液体内，x方向：$-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x=\rho a_x$ ，

$$g_x=0 \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x}=\rho a_x \quad ①$$

z方向：$-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z=\rho a_z$,

$$g_z=-g,\ a_z=0 \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z}=\rho g \quad ②$$

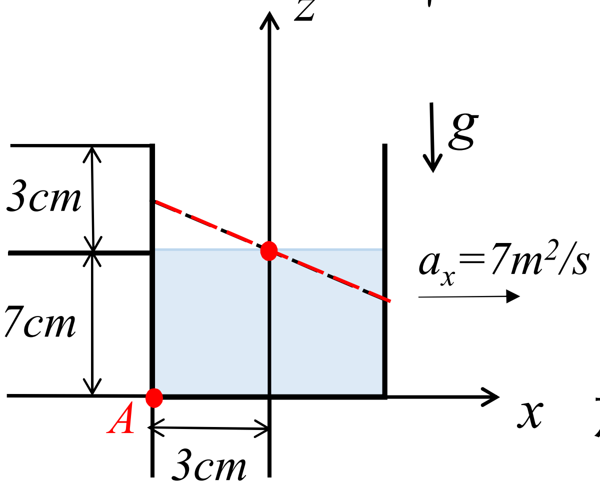
$$①+② \rightarrow dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial z}dz=-\rho a_x dx-\rho g dz$$

2.5非惯性系中均质流体的相对平衡（刚体运动）

例 题 1. 方形容器内为水，容器高10cm，宽6cm，水原高7cm。先容器以$7m^2/s$向x正向加速。问：

$$-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}=\rho\vec{a}$$

(1)水是否会溢出？（2）求点A压强p_A。



解：

$$dp=-\rho a_x dx-\rho g dz$$

$$\int_{p_{ref}}^{p} dp=\int_{x_{ref}}^{x}-\rho a_x dx-\int_{z_{ref}}^{z}\rho g dz$$

$$ref@x=0,z=h_0=7cm,p=p_{atm}:$$

$$p-p_{atm}=-\rho a_x x-\rho g(z-h_0)$$ 任意点压强！

加速后$\boxed{\text{液面上}: p=p_{atm}}\rightarrow$

$$0=-\rho a_x x-\rho g(z-h_0)$$

$$z=h_0-\frac{a_x}{g}x$$ 液面曲线方程！

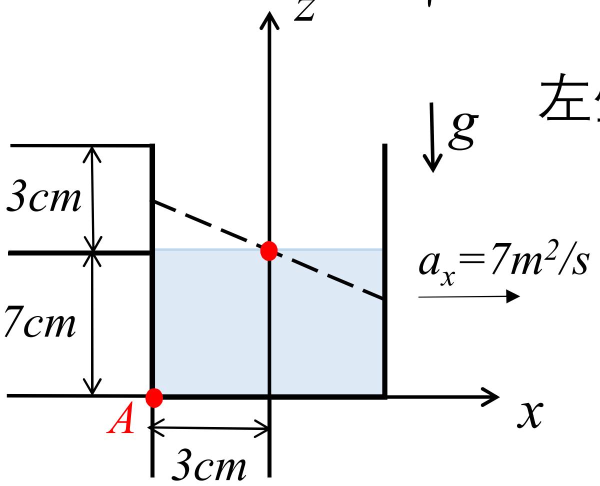
2.5非惯性系中均质流体的相对平衡（刚体运动）

例题1. 方形容器内为水，容器高10cm，宽6cm，水原高7cm。先容器以$7m^2/s$向x正向加速。问：

(1)水是否会溢出？ （2）求点A压强p_A。

$-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}=\rho\vec{a}$

a_x=??刚好溢出？



解：

$$z=h_0-\frac{a_x}{g}x$$ 液面曲线方程！

不溢出！

左壁$x=-3cm$处：$z_{\max}=7cm-\frac{a_x}{g}(-3cm)=9.14cm<10cm$

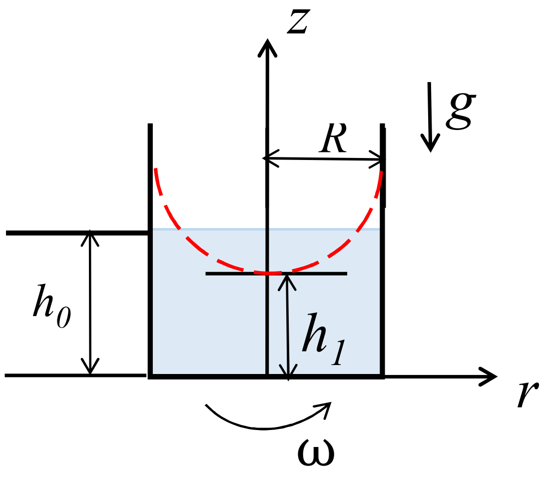
$$p-p_{atm}=-\rho a_x x\text{-}-\rho g(z-h_0)$$ 任意点压强！

A点：$x=-3cm,z=0$

$$\begin{aligned}p&=p_{atm}-\rho a_x x-\rho g(z-h_0)\\&=p_{atm}-\rho a_x(-3)-\rho g(0-7)\\&=694(Pa)\end{aligned}$$

2.5非惯性系中均质流体的相对平衡（刚体运动）

等角速度旋转. 已知：h_0, ω, R 。求：h_1，曲面表达式。



解：$$-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},\ \ \vec{g} = -g\vec{k},\ \ \vec{a} = -\omega^2 r\overrightarrow{e_r}$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) - \rho g\vec{k} = -\rho\omega^2 r\overrightarrow{e_r}$$

r方向：$-\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\omega^2 r$, $\quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r$ ①

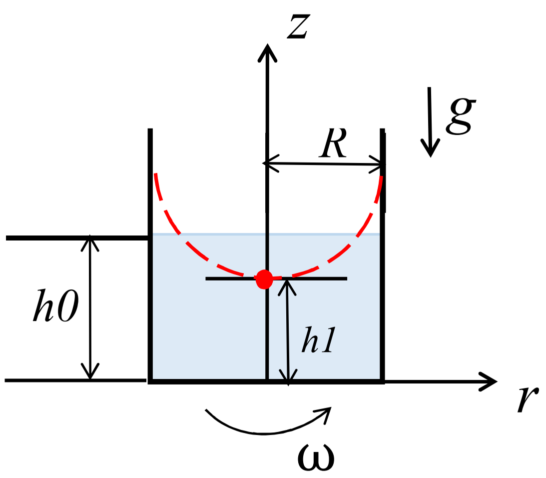
θ方向：$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, $\quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ ②

z方向：$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0$, $\quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ ③

①+②+③→ $$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial \theta}d\theta=\rho\omega^2 r dr - \rho g dz$$

2.5非惯性系中均质流体的相平衡(刚体运动)

等角速度旋转. 已知：h_0, ω, R。求：h_1，曲面表达式。



解： $$dp = \rho\omega^2 r dr - \rho g dz$$

$$\int_{p_{ref}}^{p} dp = \int_{r_{ref}}^{r} \rho\omega^2 r dr - \int_{z_{ref}}^{z} \rho g dz$$

$$p - p_{ref} = \rho\omega^2/2\,(r^2 - r_{ref}{}^2) - \rho g(z - z_{ref})$$

$ref@r = 0, z = h_1, p = p_{atm}$（曲面最低点）：

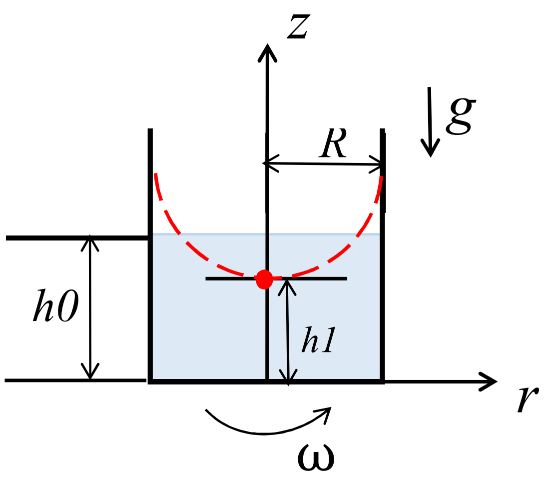
$$p - p_{atm} = \rho\omega^2 r^2/2 - \rho g(z - h_1)$$ ① 液体内压强分布$p(r,z)$

自由面上$p = p_{atm}$： $$0 = \rho\omega^2 r^2/2 - \rho g(z - h_1)$$

$$z = h_1 + \omega^2 r^2/2g$$ ② 自由面表达式 h_1？？

2.5非惯性系中均质流体的相平衡(刚体运动)

等角速度旋转. 已知：h_0, ω, R 。求：h_1, 曲面表达式。



解： $z = h_1 + \omega^2 r^2/2g$ ② 自由面表达式 h_1？？

$$V_{\text{before}} = V_{\text{after}}$$

$$\pi R^2 h_0 = \int_0^R 2\pi r z dr$$

$$= \int_0^R 2\pi r \left(h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) dr$$

$$= 2\pi \left(h_1 \frac{r^2}{2} + \frac{\omega^2 r^4}{8g}\right)\Bigg|_0^R$$

$$= \pi R^2 h_1 + \frac{\pi \omega^2 R^4}{4g}$$

$$-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$$

$$h_1 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad ③$$

②+③ → $z = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{2g}\left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{R^2}\right)$

投票(匿名) 最多可选1项

设置

是否理解掌握微分方程求解，及含义？

A 是

B 否

C 还需课后复习

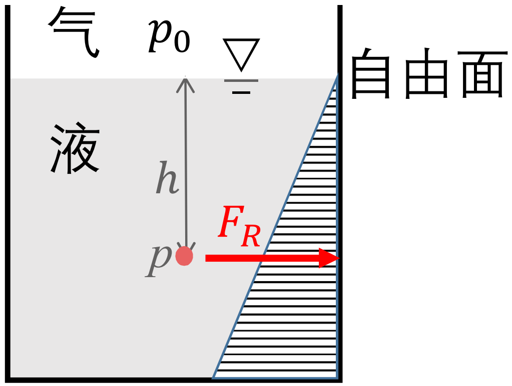
提交

作业：

P68 . 2.26，2.28

多多练习！

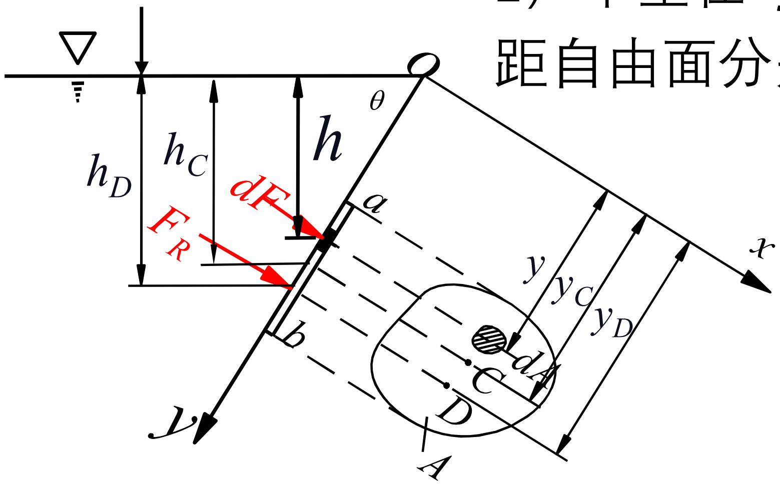
2.6流体对平壁作用力



液体中任一点压强：　$p_{abs} = p_0 + \rho g h$

若 $p_0 = p_{atm}$，　$pgage = \rho g h$

壁面受力？合力大小，方向，作用点？



1）平壁在xy平面，几何中心为$C(x_c, y_c)$，合力作用点$D(x_d, y_d)$，距自由面分别问h_C, h_D.

取微元面$dA(dx, dy)$,距自由面h.

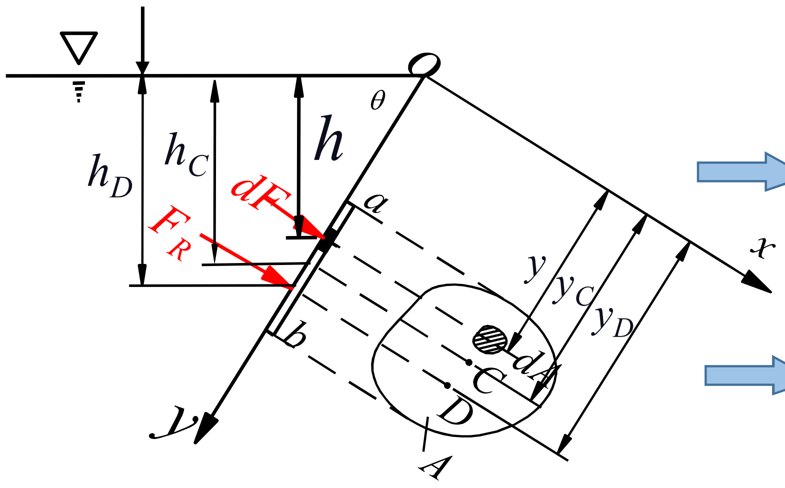
$$dF = pdA = (p_0 + \rho g h)dA$$

$$F_R = \int_A dF = \int_A (p_0 + \rho g h)dA$$

$$= \int_A p_0 dA + \int_A \rho g h dA$$

$$= p_0 A + \int_A \rho g h dA$$

2.6流体对平壁作用力



F_R=$p_0A + \int_A \rho g h dA$　　h =$y sin\theta$

F_R=$p_0A + \int_A \rho g y sin\theta\, dA$

=$p_0A + \rho g sin\theta \int_A y dA$　　$\int_A y dA = y_c A$

面积A对ox轴的静矩

y_c为形心y坐标

F_R=$p_0A + \rho g sin\theta y_c A$

=$\boxed{(p_0 + \rho g h_c)}A$　　h_c =$y_c sin\theta$

=$p_c A$

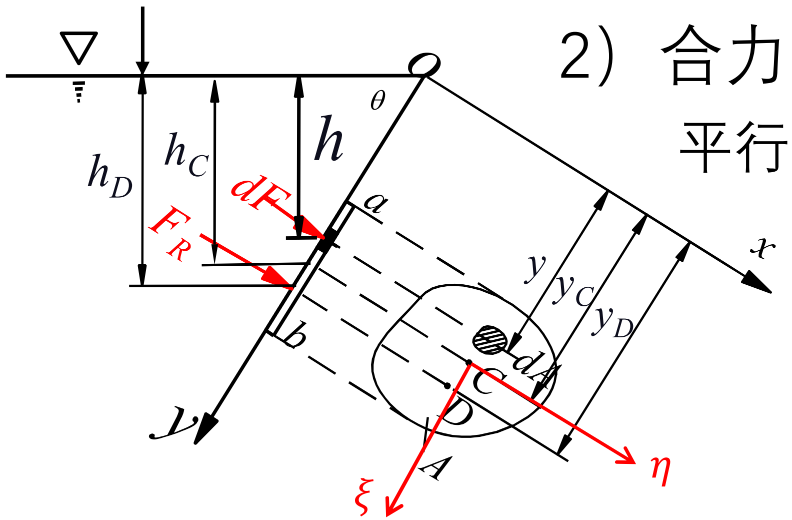
形心处压强：p_c= $p_0 + \rho g h_c$

F_R =$p_c A$

若p_0=p_{atm}作用于平壁两侧，

则p_c= $\rho g h_c$

2.6流体对平壁作用力



2）合力作用点$D(x_d, y_d)$？？

平行力系对某轴静力矩之和等于合力对同一轴静力矩。

对x轴静力矩：

$$F_R y_D = \int_A y dF$$

$$= \int_A y(p_0 + \rho g y \sin\theta) dA$$

$$= \int_A p_0 y dA + \int_A \rho g \sin\theta y^2 dA$$

$$= p_0 y_c A + \rho g \sin\theta \int_A y^2 dA$$

$$= p_0 y_c A + \rho g \sin\theta (I_{xC} + y_c{}^2 A)$$

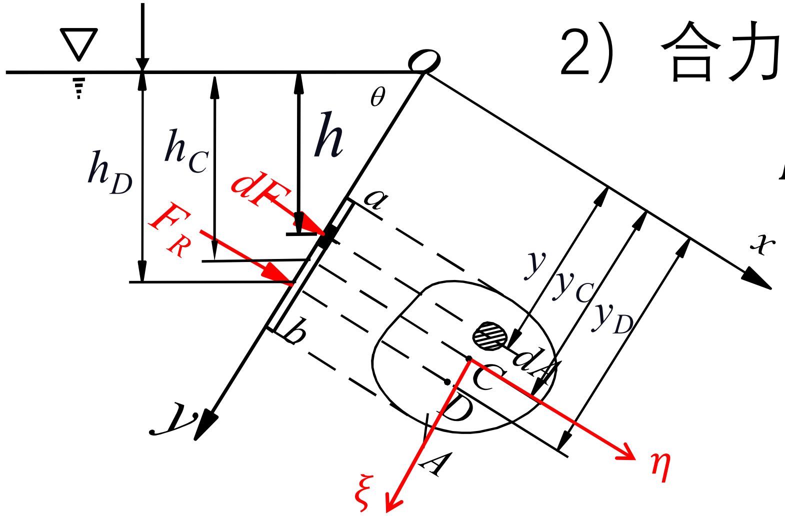
面积A对ox轴的静矩：$\int_A y dA = y_c A$

面积A对ox轴的惯性矩：$I_x = \int_A y^2 dA$

$$= I_{xC} + y_c{}^2 A$$

$I_{xC} = \int_A \xi^2 dA$：面积A对过形心C，且平行x轴的轴η的惯性矩

2.6流体对平壁作用力



$F_R = p_c A$

$p_c = p_0 + \rho g y_c sin\theta$

2）合力作用点$D(x_d, y_d)$？？

$$F_R y_D = p_0 y_c A + \rho g sin\theta (I_{xC} + y_c^2 A)$$

$$p_c A y_D = p_0 y_c A + \rho g sin\theta (I_{xC} + y_c^2 A)$$

$$p_c A y_D = \boxed{(p_0 + \rho g y_c sin\theta)} y_c A + \rho g sin\theta I_{xC}$$

$$p_c A y_D = p_c y_c A + \rho g sin\theta I_{xC}$$

$I_{xC} = \int_A \xi^2 dA$

由形状确定

$$y_D = y_c + \frac{I_{xC} \rho g sin\theta}{p_c A} = y_c + \frac{I_{xC} \rho g sin\theta}{(p_0 + \rho g y_c sin\theta)A}$$

若$p_0 = p_{atm}$ 作用于两侧：$p_c = \rho g y_c sin\theta$

$\Rightarrow$ $y_D = y_c + \dfrac{I_{xC}}{y_c A}$ $y_D > y_c$作用点在形心以下！

投票(匿名) 最多可选1项

设置

是否理解面积静距，惯性矩？

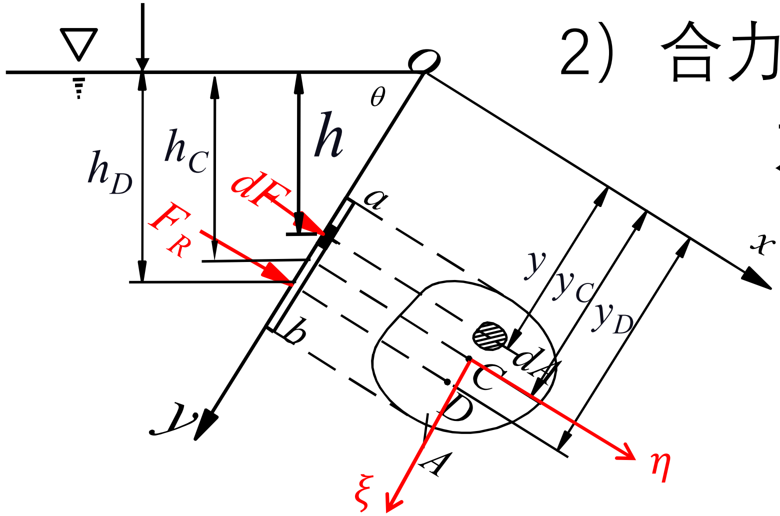
A 是

B 否

C 还需课后复习

提交

2.6流体对平壁作用力



2）合力作用点$D(x_d, y_d)$？？

对y轴静力矩：

$$F_R x_D = \int_A x dF$$

$$= \int_A x(p_0 + \rho g y \sin\theta) dA$$

$$= \int_A p_0 x dA + \int_A \rho g \sin\theta x y dA$$

$$= p_0 x_c A + \rho g \sin\theta \int_A x y dA$$

$$= p_0 x_c A + \rho g \sin\theta (I_{xyC} + x_c y_c A)$$

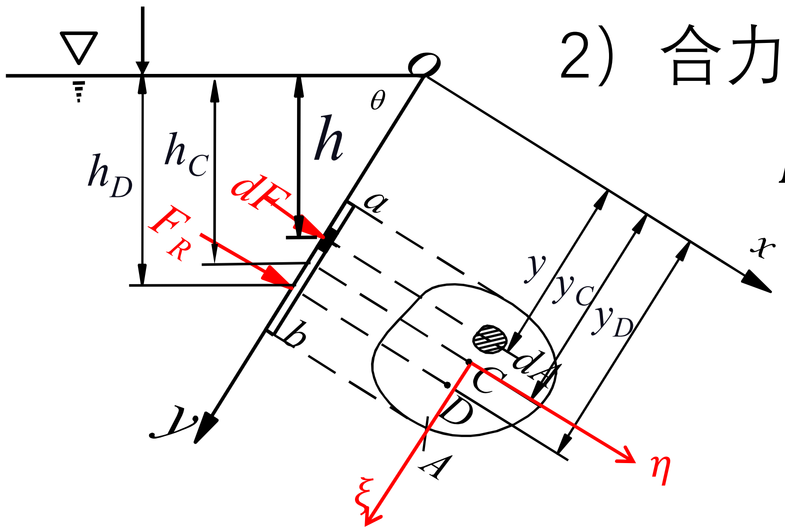
面积A对oy轴的静矩：$\int_A x dA = x_c A$

面积A对x, y轴的离心矩：$I_{xy} = \int_A x y dA$

$$= I_{xyC} + x_c y_c A$$

$I_{xyC} = \int_A \xi\eta dA$：面积A对过形心$C, \eta$、$\xi$轴的离心矩

2.6流体对平壁作用力



2）合力作用点$D(x_d, yd)$？？

$F_R = p_c A$

$p_c = p_0 + \rho g y_c sin\theta$

$$F_R x_D = p_0 x_c A + \rho g sin\theta (I_{xyC} + x_c y_c A)$$

$$p_c A x_D = p_0 x_c A + \rho g sin\theta (I_{xyC} + x_c y_c A)$$

$$p_c A x_D = (p_0 + \rho g y_c sin\theta) x_c A + \rho g sin\theta I_{xyC}$$

$$p_c A x_D = p_c x_c A + \rho g sin\theta I_{xyC}$$

$$x_D = x_c + \frac{I_{xyC} \rho g sin\theta}{p_c A} = x_c + \frac{I_{xyC} \rho g sin\theta}{(p_0 + \rho g y_c sin\theta\ )A}$$

若$p_0 = p_{atm}$ 作用于两侧：$p_c = \rho g y_c sin\theta$

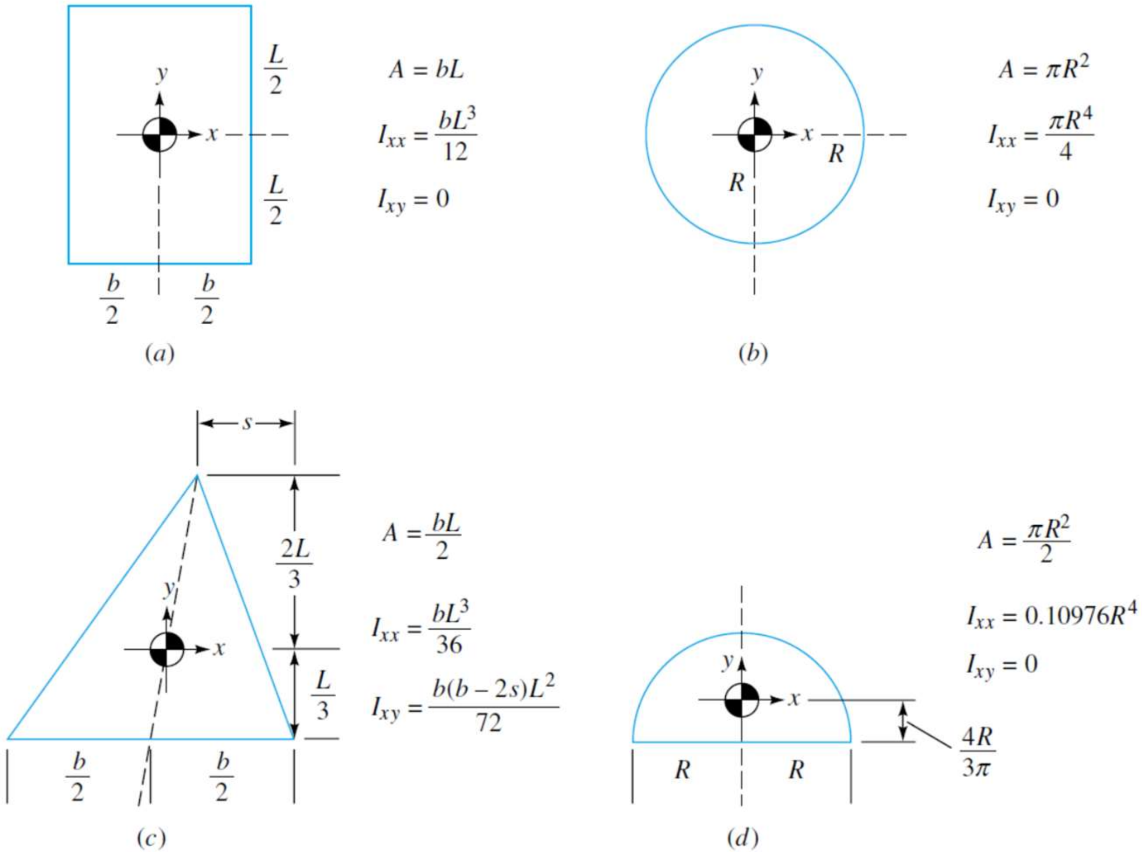
$$\Rightarrow x_D = x_c + \frac{I_{xyC}}{y_c A}$$

$I_{xyC} = \int_A \xi\eta dA$

若面积A关于ξ或η对称，则$I_{xyC}=0$，$x_D = x_c$，作用点D在$x=x_c$上。

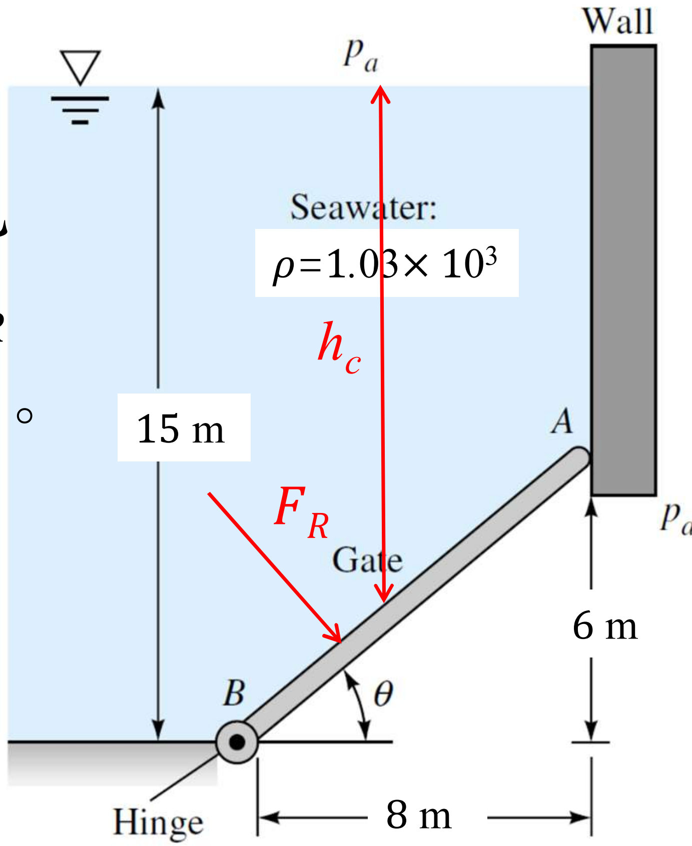
2.6流体对平壁作用力

几种简单形状的惯性矩和离心矩(p.51)：



2.6流体对平壁作用力

例 1. 阀门宽W=5m，铰链链于B处，和右侧壁面光滑接触于A点。求：(1)海水对阀门作用力F_R （2）壁面对A点作用力（3）阀门在B点受力。



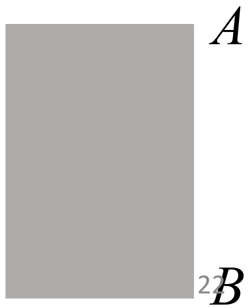
解：(1) L_{AB}=10m

$$p_c = \rho g h_c$$

$$F_R = p_c A = p_c L_{AB} W = \rho g h_c L_{AB} W$$

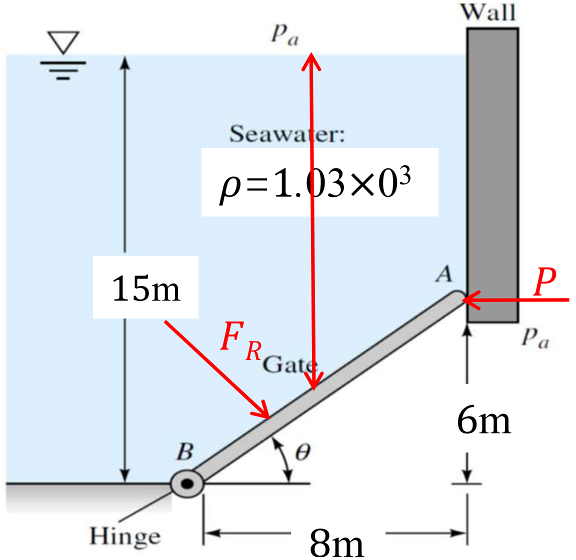
$$h_c = 15m - 3m = 12m$$

$$F_R = 1.03 \times 10^3 \times 9.8 \times 12 \times 10 \times 5$$
$$= 6.0564 \times 10^6 \mathrm{N}$$



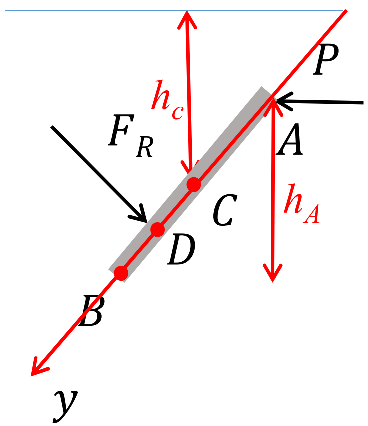
2.6流体对平壁作用力

例 1. 阀门宽W=5m，铰链链于B处，和右侧壁面光滑接触于A点。求：(1)海水对阀门作用力F_R （2）壁面对A点作用力P（3）阀门在B点受力。



解: (2) $\sum M_B=0$

$$y_D=y_c+\frac{I_{xC}}{y_cA}$$



$$F_R L_{DB}\text{-}Ph_A=0$$

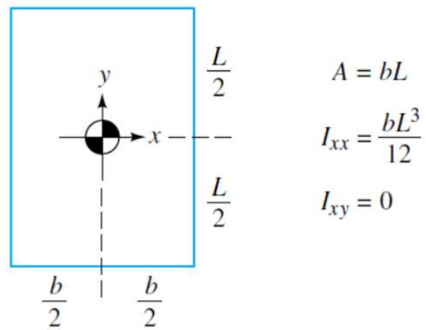
$$L_{DB}=L_{CB}-L_{CD}$$

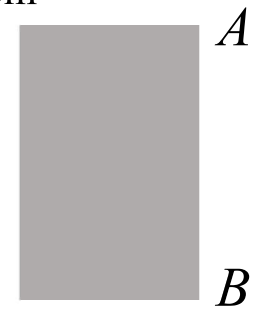
$$F_R(5-0.417)\text{-}P\cdot 6=0$$

$$L_{CD}=\frac{I_{xc}}{y_cA}=\frac{41}{20\times10\times5}=0.417m$$

$$P=F_R(5-0.417)/6$$

$$=4.626\times10^6N$$



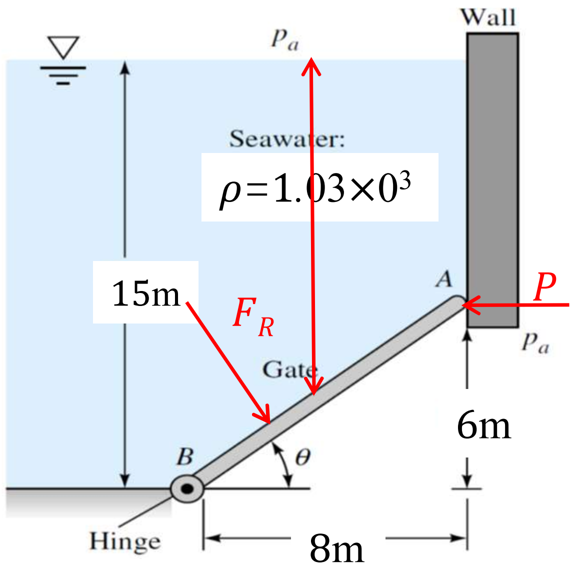


$$I_{xc}=\frac{1}{12}WL^3{}_{AB}=\frac{5\times10^3}{12}=417\text{m}^3$$

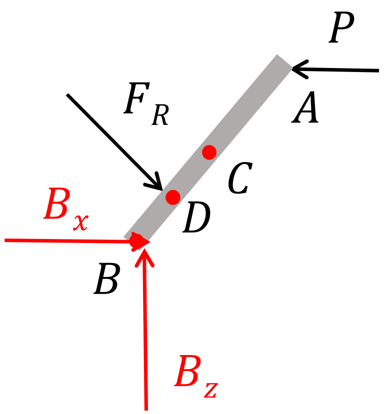
$$y_c=h_c/\sin\theta=12/\frac{6}{10}=20\text{m}$$

2.6流体对平壁作用力

例 1. 阀门宽W=5m，铰链链于B处，和右侧壁面光滑接触于A点。求：(1)海水对阀门作用力F_R（2）壁面对A点作用力P（3）阀门在B点受力。



解:



(3) $\sum F_x=0= B_x+ F_R\ sin\theta$-P

$B_x=3.9\times10^5$N

$B_z= F_R\ \cos\theta\ = 4.8\times10^6$N

作业：

复习笔记！

P68 . 2.26，2.28

P65 . 2.14，2.15,

学习p51-57,例2.5~2.7！

多多练习！（2.29）

回顾：

1.流体平衡微分方程$-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}=\rho\vec{a}$**（熟记、理解、应用），非惯性系应用（笛卡尔坐标，圆柱体坐标）；**

2.平面受力$F_R=p_cA \quad y_D=y_c+\frac{I_{xC}}{y_cA} \quad x_D=x_c+\frac{I_{xyC}}{y_cA}$ **（应用）**

3.曲面受力：水平和竖直方向分量F_x，F_y，F_z，压力体**（应用）**