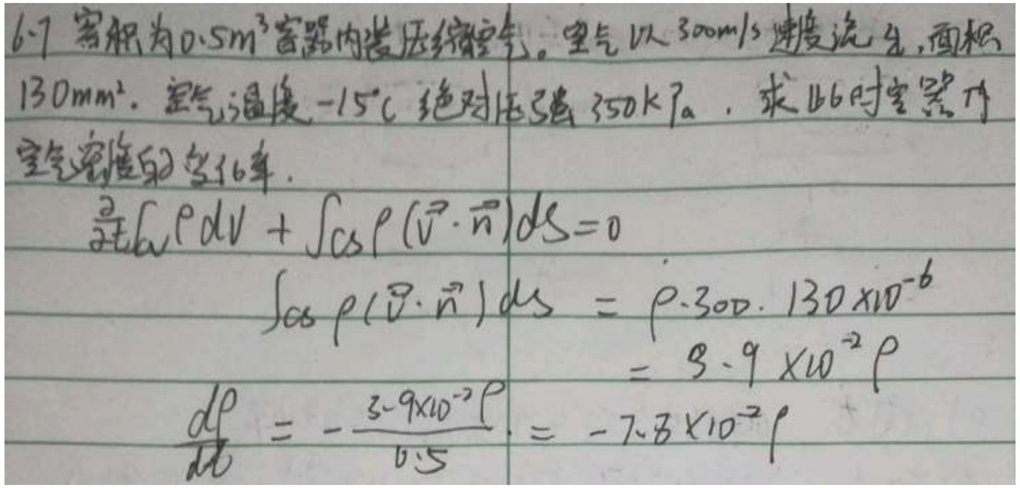
空气与气体动力学

张科

截至3.16日前四次作业提交情况，请未完成还想完成的同学尽快向助教提交！！

学号	作业1	作业2	作业3	作业4			笔记3	笔记4
2171210257								
2174213847								
2174311753	A	A-	A	A-			A	
2174111002	A-	A-	A-	A-				
2173611853	A	A-						
2176112380								
2176112644								
2176113388	A+	A	A	A			A+	A+
2174410445								
2176413395								
2176112227								
2185312387	A	A	A-				A	
2184411049	A-	A-	A-				A-	
2186123902	A-	A-	A-	A-				
2185110606	A-	A-	A					
2181110959	A	A-	A-	A			A	A
2186214277	A-	A-	A+	A			A+	A+
2184411006	A	A-	A	A-			A-	
2185311266	A+	A-	A	A			A+	A
2186124115	A+	A-	A	A-				
2185312388	A+	A-	A				A	
2185112314	A-	A-	A	A				
2183713418	A+	A-	A	A				A+
2184214237	A-	A-	A	A-				
2184224449	A-	A-	A	A				
2186214287	A	A-	A				A+	
2184224473	A+	A-	A	A			A+	A+
2186114023	A+	A-	A	A				
2181411931	A+	A-	A-	A			A+	A+
2183713430	A	A-	A-					
2186110912	A	A-	A	A				
2185011786	A+	A-	A	A			A+	A+
2181312183	A	A-	A-	A			A	
2183511636	A	A-	A-				A	
2186412631	A	A-	A	A				A
2186114102	A-	A-	A	A-			A+	A+
2186113887	A+	A-	A-					
2160506141	A-	A	A					
2186512514	A	A-	A	A+			A	A
2181312177	A+	A-	A-	A-			A+	A+
2183612014	A-	A-	A-				A+	

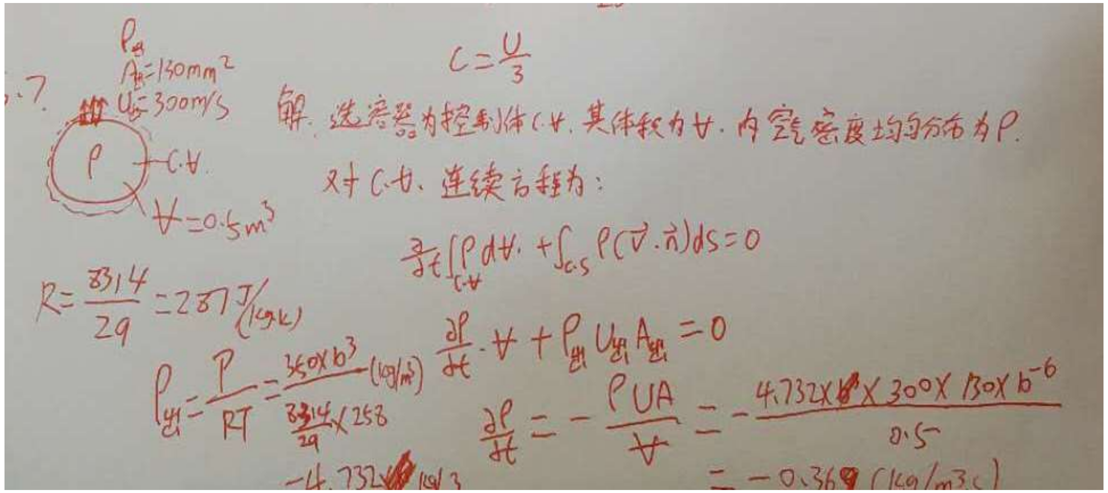


6.7 容积为0.5m³容器内装压缩空气。空气以300m/s速度流出，面积130mm². 空气温度-15°C 绝对压强350kPa. 求此时容器内空气密度的变化率.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho dV+\int_{cs}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dS=0$$

$$\int_{cs}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dS=\rho\cdot 300\cdot 130\times10^{-6}=3.9\times10^{-2}\rho$$

$$\frac{d\rho}{dt}=-\frac{3.9\times10^{-2}\rho}{0.5}=-7.8\times10^{-2}\rho$$



$c=\frac{U}{3}$

6.7 解. 选容器为控制体C.V. 其体积为V. 内空气密度均匀分布为ρ.

对C.V. 连续方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho dV+\int_{C.S}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\cdot V+\rho_出 U_出 A_出=0$$

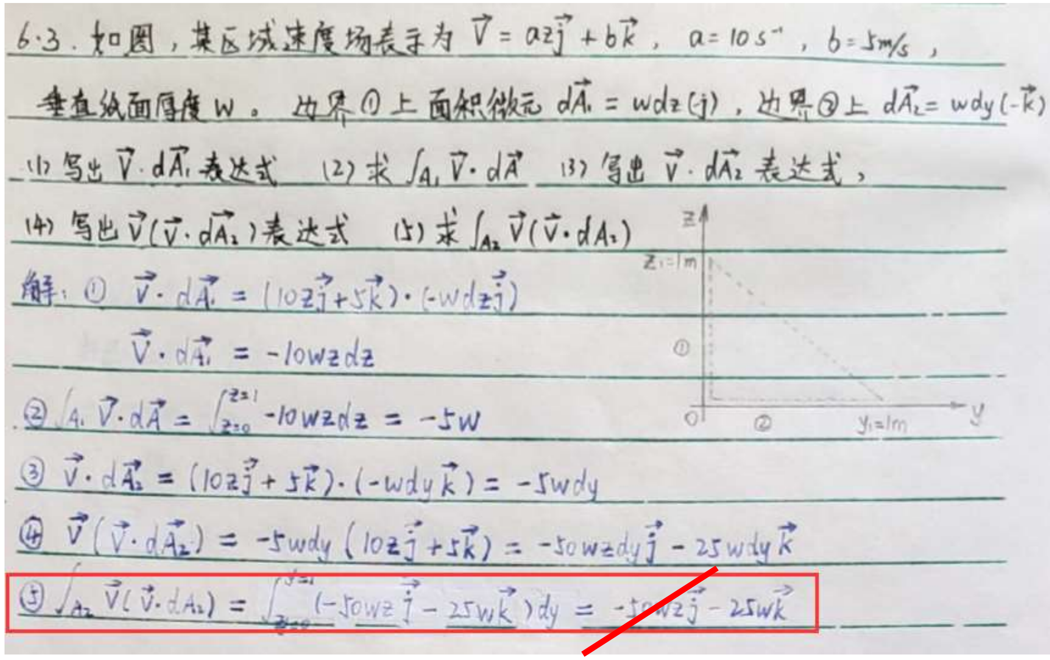
$$R=\frac{8314}{29}=287\,J/(kg\cdot K)$$

$$\rho_出=\frac{P}{RT}=\frac{350\times10^3}{\frac{8314}{29}\times258}(kg/m^3)=4.732\,kg/m^3$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\rho UA}{V}=-\frac{4.732\times300\times130\times10^{-6}}{0.5}=-0.369\,(kg/m^3s)$$

存在问题：

1. 密度数值可能算错，应给出计算过程；



6.3. 如图，某区域速度场表示为 $\vec V = az\vec j + b\vec k$，$a=10s^{-1}$，$b=5m/s$，
垂直纸面厚度 w。边界①上面积微元 $d\vec A_1 = wdz(-\vec j)$，边界②上 $d\vec A_2 = wdy(-\vec k)$
(1) 写出 $\vec V\cdot d\vec A_1$ 表达式 (2) 求 $\int_{A_1}\vec V\cdot d\vec A$ (3) 写出 $\vec V\cdot d\vec A_2$ 表达式，
(4) 写出 $\vec V(\vec V\cdot d\vec A_2)$ 表达式 (5) 求 $\int_{A_2}\vec V(\vec V\cdot dA_2)$

解：① $\vec V\cdot d\vec A_1 = (10z\vec j+5\vec k)\cdot(-wdz\vec j)$

$\vec V\cdot d\vec A_1 = -10wzdz$

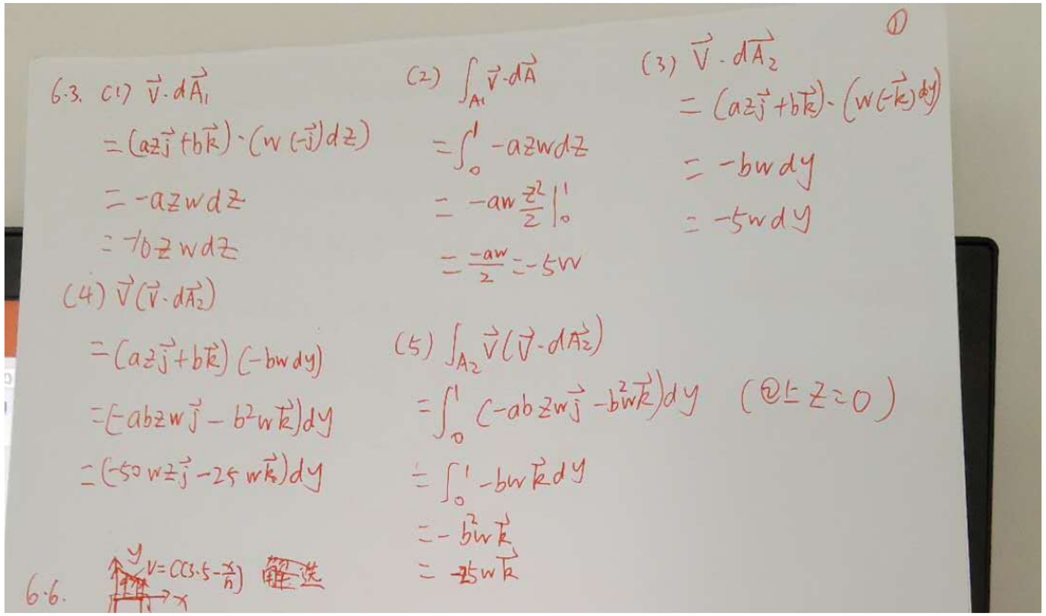
② $\int_{A_1}\vec V\cdot d\vec A = \int_{z=0}^{z=1} -10wzdz = -5w$

③ $\vec V\cdot d\vec A_2 = (10z\vec j+5\vec k)\cdot(-wdy\vec k) = -5wdy$

④ $\vec V(\vec V\cdot d\vec A_2) = -5wdy(10z\vec j+5\vec k) = -50wzdy\vec j - 25wdy\vec k$

⑤ $\boxed{\int_{A_2}\vec V(\vec V\cdot dA_2) = \int_{y=0}^{y=1}(-50wz\vec j - 25w\vec k)dy = \cancel{-50wz\vec j} - 25w\vec k}$

存在问题：A_2上z=0



①

6.3. (1) $\vec V\cdot d\vec A_1$

$=(az\vec j+b\vec k)\cdot(w(-\vec j)dz)$

$=-azwdz$

$=-10zwdz$

(2) $\int_{A_1}\vec V\cdot d\vec A$

$=\int_0^1 -azwdz$

$=-aw\frac{z^2}{2}\Big|_0^1$

$=\frac{-aw}{2}=-5w$

(3) $\vec V\cdot d\vec A_2$

$=(az\vec j+b\vec k)\cdot(w(-\vec k)dy)$

$=-bwdy$

$=-5wdy$

(4) $\vec V(\vec V\cdot d\vec A_2)$

$=(az\vec j+b\vec k)(-bwdy)$

$=(-abzw\vec j - b^2w\vec k)dy$

$=(-50wz\vec j-25w\vec k)dy$

(5) $\int_{A_2}\vec V(\vec V\cdot d\vec A_2)$

$=\int_0^1(-abzw\vec j - b^2w\vec k)dy$ （②上 $z=0$）

$=\int_0^1 -bw\vec k dy$

$=-b^2w\vec k$

$=-25w\vec k$

6.6. $v=C(3.5-\frac{x}{h})$ 解选

6.23 一液体火箭消耗燃料 80kg/s，氧化剂 32kg/s，燃烧产物从直径为 0.60m 的尾部喷管以 180m/s 的速度喷出，出口压强 110kPa。试计算火箭发动机在标准海平面大气压下在静止的测试台上产生的升力。

取火箭为控制体

解：$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\vec{v}\rho d\forall + \int_{cs}\vec{v}\rho(\vec{v}_r\cdot\vec{n})ds$

对流体有向下的力 F. 则 $-F + P'A = -\dot{m}V$. 其中 $P' = P_{atm} - P$

解得 $F = (P_{atm} - P)A + \dot{m}V = 17.3kN$

存在问题：

1. 画图、控制体选择及受力分析不细致，参考答案！
2. 出口压强理解有误！！
3. 没有详细过程和各项具体数值，不可以只有公式和最后答案！！

请参考答案。

6.23 解. 选 C.V. 如图. 向下为正向

对 C.V.，火箭对流体作用力为 F，流体对火箭作用力为 F'

$D = 0.6m$

$\dot{m}_1 = 80kg/s$

$\dot{m}_2 = 32kg/s$

$V_{out} = 180m/s$

$P_{out} = 110kPa$

对C.V. 动量方程：$\sum \vec{F} = \int_{c.s.}\vec{v}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})ds$

$F - (P_{out} - P_{atm})\frac{\pi}{4}D^2 = \dot{m}_{out}V_{out}$

$F = (P_{out} - P_{atm})\frac{\pi}{4}D^2 + (\dot{m}_1 + \dot{m}_2)V_{out}$

$= 9\times10^3\times\frac{3.14}{4}\times0.6^2 + 112\times180$

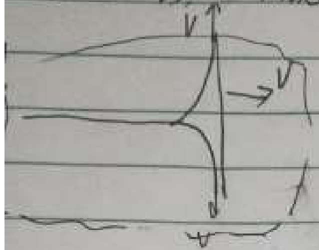
$= 22703.4N$

$= 22.7kN$

6.11 $\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = -181kJ/kg$ $P_2 = 200kPa$

6.26 水流喷出 v，平板以 V=0.6m/s 沿射流移动. D=24cm

Q=0.2m³/s 求水流对平板作用力.



选整体的控制体 ∴ 水平分量

$F = \int_{cs} v\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,ds$

$= -v\rho vA + 2\cancel{v\rho vA}\ \cancel{v\rho vA}$

$\cancel{= 6.6 \cdot 0.6\cdot 10^3 \cdot 0.6 \pi\ 0.12^2}$

$\cancel{=29}$

$\cancel{P=FV=29\times0.6=17.4W}$

$Q = V_x A$

$V_x = \dfrac{0.2}{\times 3.14\times 0.12^2}$

$= 4.4$

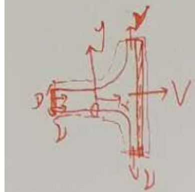
$P=FV = 6.6\times10^3\times 4.4\times3.14\times0.12^2 - 4.4^2\times10^3\times 3.14\times0.12^2\times0.6$

$=(119.4 - 875.4)\times 0.6$

$=453.6W$

②

6.26 解. 选固定于平板上的坐标系 xoy, 以 V=0.6m/s 匀速运动



控制体 C.V. 如图在坐标系内.

C.V. 内水流入口速度为 $V_r = v - V$

其中 $Q=\frac{\pi}{4}D^2 v \Rightarrow v=4.423$ m/s

控制体与平板间作用力为F

对 C.V. 动量方程为

$-F=\int_{C.S.} V_r\,\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dS$

$-F = V_r\rho\cdot(-V_r)\cdot\frac{\pi}{4}D^2$

$F=\frac{\pi}{4}D^2\rho V_r^2$

$=\frac{1}{4}\times3.14\times0.24^2\times10^3\times(4.423-0.6)^2$

$=0.661$ (N)

$P=F\cdot V=0.396$ (kW)

存在问题：

1. 画图、控制体选择及受力分析不细致，参考答案！
2. 没有用移动坐标系！！

回顾：

1.伯努利方程，皮托管、文丘里管；

2.连续性方程： $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$　　$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right) = 0$

3.特例： 定常：$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$　　不可压：$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

① 加速度： $\vec{a}=\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{V}$

当地加速度　　位变加速度

例．$\vec{V}=xy^2\vec{i}-\frac{1}{3}y^3\vec{j}+xy\vec{k}$。

求：(1)流动是否可压？　（2）$\vec{a}$（1,2,3)。

解：（2）$\vec{a}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}=y^2\vec{i}+y\vec{k},\quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}=2xy\vec{i}-y^2\vec{j}+x\vec{k},\quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}=0$$

$$\vec{a}=0+xy^2(y^2\vec{i}+y\vec{k})+(-\frac{1}{3}y^3)(2xy\vec{i}-y^2\vec{j}+x\vec{k})+(xy)0$$

$$=\frac{xy^4}{3}\vec{i}+\frac{y^5}{3}\vec{j}+\frac{2xy^3}{3}x\vec{k}$$

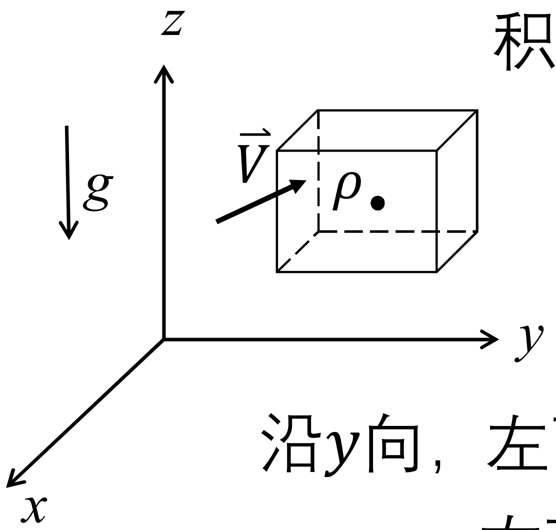
5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

单位体积受力

② 动量方程： 流体为团：$\sum\vec{F} = M\vec{a}$ 刚体运动：$\boxed{-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}}$

$$-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + ?\ ? = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt}$$

$$\sum\vec{F} = M\vec{a}$$



积分方程：$\sum\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec{V}\rho d\forall + \boxed{\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}$

对微元体C.V.：$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec{V}\rho d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\vec{V}\right)dxdydz$

$$\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = \sum(\dot{m}\vec{V})_{out} - \sum(\dot{m}\vec{V})_{in}$$

沿y向，左面流入动量：$(\dot{m}\vec{V})_1 = \vec{V}(\rho v dxdz)$

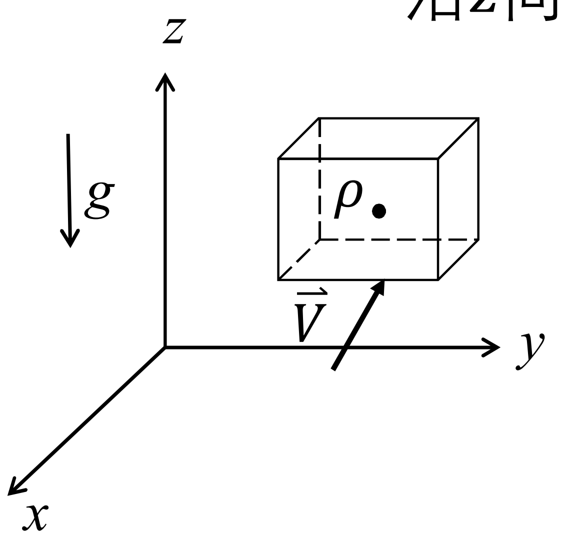
右面流出动量：$\left(\dot{m}\vec{V}\right)_2 = [\left(\rho v\vec{V}\right) + \frac{\partial\left(\rho v\vec{V}\right)}{\partial y}dy$+HOT$]\, dxdz$

沿y向静流出动量流率： $\left(\dot{m}\vec{V}\right)_2 - (\dot{m}\vec{V})_1 = \frac{\partial\left(\rho v\vec{V}\right)}{\partial y}dy\, dxdz$

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

② 动量方程： 积分方程：$\sum\vec{F}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec{V}\rho d\forall+\boxed{\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}$

$$\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=\sum(\dot{m}\vec{V})_{out}-\sum(\dot{m}\vec{V})_{in}$$



沿z向，

下面流入动量：$(\dot{m}\vec{V})_3=\vec{V}(\rho w dxdy)$

上面流出动量：$(\dot{m}\vec{V})_4=[(\rho w\vec{V})+\frac{\partial(\rho w\vec{V})}{\partial z}dz+\text{HOT}]\,dxdy$

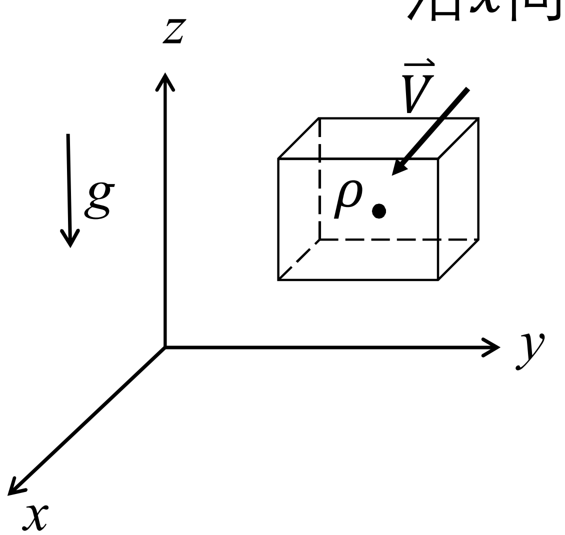
沿z向静流出动量流率：

$$(\dot{m}\vec{V})_4-(\dot{m}\vec{V})_3=\frac{\partial(\rho w\vec{V})}{\partial z}dz\,dxdy$$

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

② 动量方程： 积分方程：$\sum\vec{F}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec{V}\rho d\forall+\boxed{\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}$

$$\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS=\sum(\dot{m}\vec{V})_{out}-\sum(\dot{m}\vec{V})_{in}$$



沿x向，

后面流入动量：$(\dot{m}\vec{V})_5=\vec{V}(\rho u dydz)$

前面流出动量：$(\dot{m}\vec{V})_6=[(\rho u\vec{V})+\frac{\partial(\rho u\vec{V})}{\partial x}dx+\text{HOT}]\,dxdz$

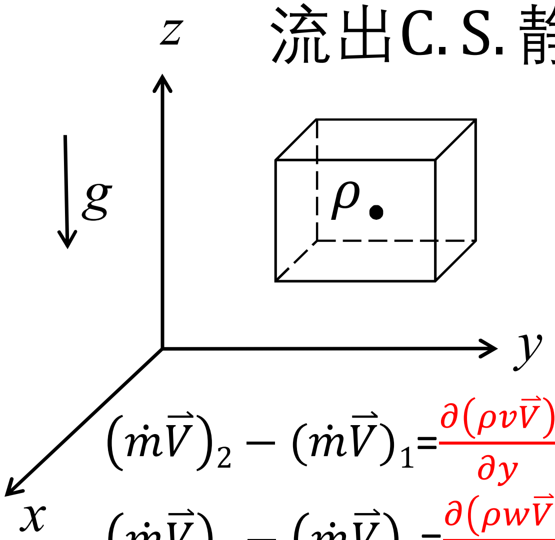
沿x向静流出动量流率：

$$(\dot{m}\vec{V})_6-(\dot{m}\vec{V})_5=\frac{\partial(\rho u\vec{V})}{\partial x}dx\,dydz$$

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

② 动量方程：积分方程：$\sum\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec{V}\rho d\mathcal{V} + \boxed{\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS}$

$$\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS = \sum(\dot{m}\vec{V})_{out} - \sum(\dot{m}\vec{V})_{in}$$



流出C. S. 静动量流率：$\int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

$$= (\dot{m}\vec{V})_6 - (\dot{m}\vec{V})_5 + (\dot{m}\vec{V})_4 - (\dot{m}\vec{V})_3 - (\dot{m}\vec{V})_2 - (\dot{m}\vec{V})_1$$

$$=\left[\frac{\partial(\rho u\vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w\vec{V})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v\vec{V})}{\partial y}\right] dxdydz$$

$$(\dot{m}\vec{V})_2 - (\dot{m}\vec{V})_1 = \frac{\partial(\rho v\vec{V})}{\partial y}dy\, dxdz$$

$$(\dot{m}\vec{V})_4 - (\dot{m}\vec{V})_3 = \frac{\partial(\rho w\vec{V})}{\partial z}dz\, dxdy$$

$$(\dot{m}\vec{V})_6 - (\dot{m}\vec{V})_5 = \frac{\partial(\rho u\vec{V})}{\partial x}dx\, dydz$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec{V}\rho d\mathcal{V} + \int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \frac{\partial(\rho u\vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w\vec{V})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v\vec{V})}{\partial y}\right] dxdydz$$

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

流体为团：$\sum\vec{F} = M\vec{a}$

② 动量方程：积分方程：$\sum\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec{V}\rho d\mathcal{V} + \int_{CS}\vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})dS$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \frac{\partial(\rho u\vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\vec{V})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\vec{V})}{\partial z}\right] dxdydz$$

$$=\left[\boxed{\vec{V}\frac{\partial\rho}{\partial t}} + \rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \boxed{\vec{V}\frac{\partial\rho u}{\partial x}} + \rho u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + \boxed{\vec{V}\frac{\partial\rho v}{\partial y}} + \rho v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + \boxed{\vec{V}\frac{\partial\rho w}{\partial z}} + \rho w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\right] dxdydz$$

$$=\left[\vec{V}\cancel{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z}\right)} + \rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\right)\right] dxdydz$$

$$=\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}dxdydz$$

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z}=0$,连续性方程

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

➡ 动量方程：$\sum\vec{F} = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt}dxdydz$

$$\sum\vec{F} = \sum\vec{F}_B + \sum\vec{F}_S$$

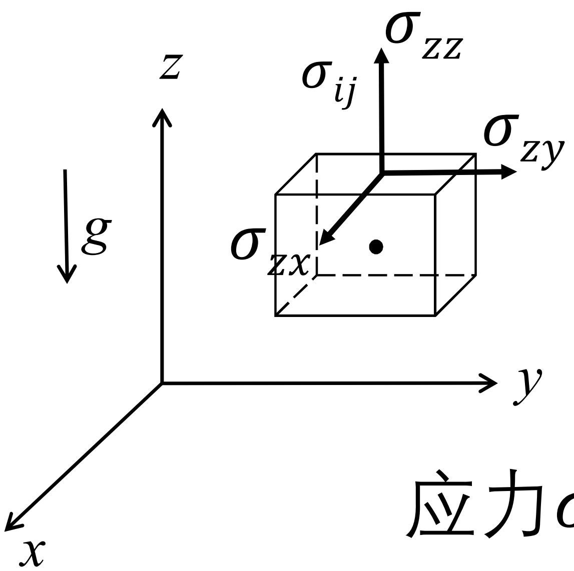
5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

$\sum \vec{F} = M\vec{a}$

② 动量方程： $\sum \vec{F} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dxdydz$

刚体运动： $-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_B + \sum \vec{F}_S$$



$d\vec{F}_B = \rho \vec{g} d\forall$ $\quad d\vec{F}_S = ??$

σ_{ij}：表面应力张量，作用在与i垂直平面上，沿j方向。

$d\vec{F}_S = \sigma_{ij} d\vec{A}$ $\qquad \sigma_{zz} \quad \sigma_{zy} \quad \sigma_{zx}$

应力σ_{ij}：压力p(正应力)，粘性应力τ_{ij}(切应力？)

σ_{xx} $\qquad \tau_{xx} \quad \tau_{yx} \quad \tau_{zx}$

σ_{yy} $\qquad \tau_{xy} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zy}$

σ_{zz} $\qquad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zz}$

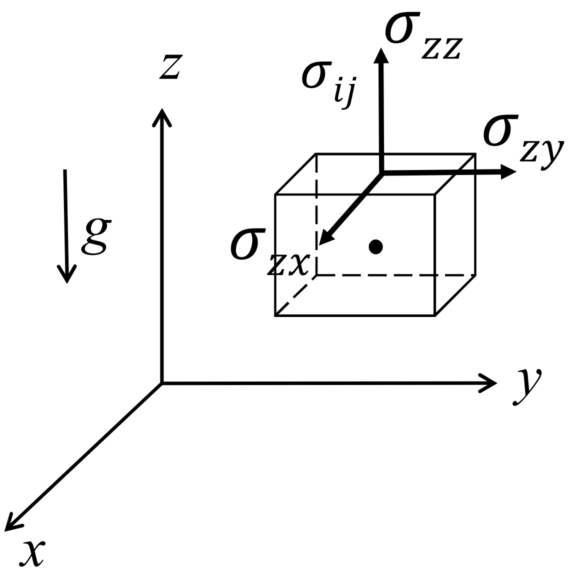
粘性应力τ_{ij}：
切向、法向都有！

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

$\sum\vec{F}=\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}dxdydz$

② 动量方程： $d\vec{F}_S=\sigma_{ij}d\vec{A}$

σ_{ij}：表面应力张量, 作用在与i垂直平面上，沿j方向。



应力σ_{ij}：压力p ＋ 粘性应力τ_{ij}

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} -p+\tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p+\tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p+\tau_{zz} \end{bmatrix}$$

沿x方向

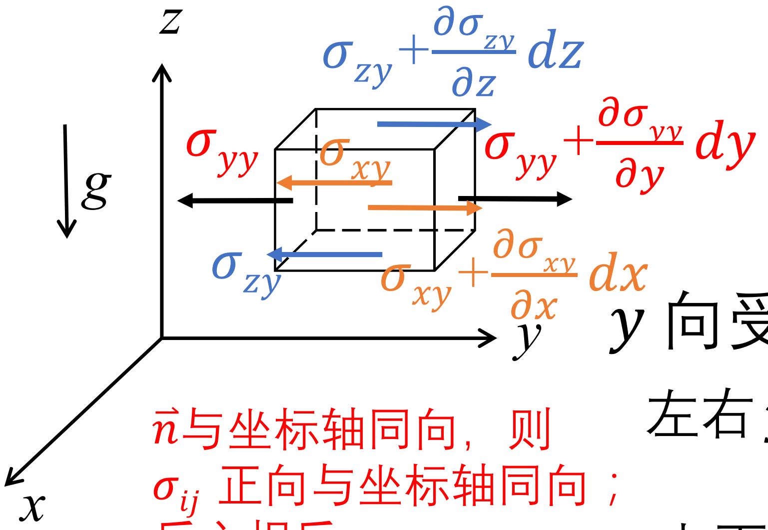
作用在与x垂直平面上

微元体表面力合力=？？

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

$$d\vec{F}_S = \sigma_{ij} d\vec{A}$$

② 动量方程：σ_{ij}：表面应力张量，作用在与i垂直平面上，沿j方向。



$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} -p+\tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p+\tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p+\tau_{zz} \end{bmatrix} \leftarrow \text{沿}y\text{方向}$$

$\vec{n}$与坐标轴同向，则 σ_{ij} 正向与坐标轴同向；反之相反。

y 向受力:

左右 y 面：$-\sigma_{yy}+(\sigma_{yy}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}dy)=\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}dy \cdot dxdz$

上下 z 面：$-\sigma_{zy}+(\sigma_{zy}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}dz)=\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}dz \cdot dxdy$

前后 x 面：$-\sigma_{xy}+(\sigma_{xy}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}dx)=\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}dx \cdot dydz$

y 向静合力：

$$dF_{s,y}=(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z})dxdydz$$

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} -p+\tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p+\tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p+\tau_{zz} \end{bmatrix}$$

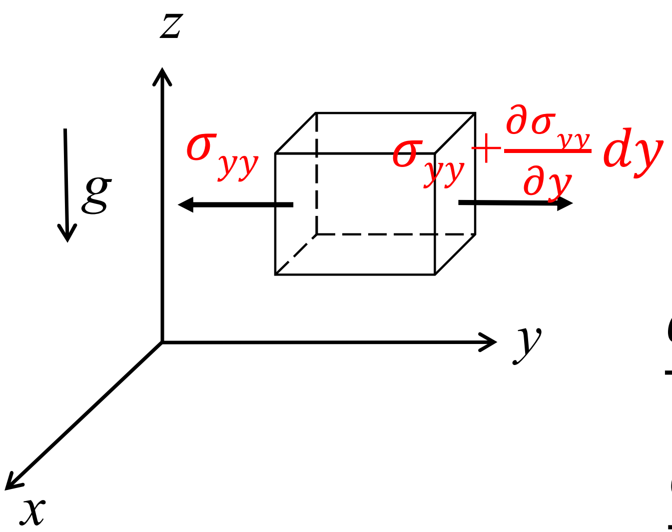
② 动量方程：

y 向静合力: $$\frac{dF_{s,y}}{d\forall}=\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\frac{dF_s}{d\forall}=-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\tau_{ij}$$



$$\frac{dF_{s,x}}{d\forall}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\frac{dF_{s,z}}{d\forall}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}$$

$$\frac{dF_s}{d\forall}=-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\tau_{ij}$$

单位体积压力　　　　单位体积粘性力

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix} -p+\tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p+\tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p+\tau_{zz} \end{bmatrix}$$

② 动量方程：
$$\frac{dF_s}{d\forall} = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\tau_{ij}$$

$$\sum\vec{F} = \sum\vec{F}_B + \sum\vec{F}_S \qquad d\vec{F}_B = \rho\vec{g}d\forall$$

$$d\vec{F} = d\vec{F}_B + d\vec{F}_s = (\rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\tau_{ij})d\forall$$

对微元，动量方程：$\sum\vec{F} = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt}dxdydz$

$$(\rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\tau_{ij})d\forall = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt}dxdydz$$

微分动量方程：
$$\underbrace{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\text{单位体积惯性力}} = (\underbrace{\rho\vec{g}}_{\text{重力}} - \underbrace{\vec{\nabla}p}_{\text{压力}} + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\tau_{ij}}_{\text{粘性力}})$$

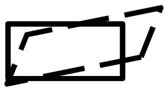
5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

② 动量方程：$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\tau_{ij}$　　刚体运动：$-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}=\rho\vec{a}$

特例：1.无粘：　τ_{ij}=0 ⟹ $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p$　欧拉方程

2.牛顿流体：$\tau_{ij}\propto\frac{\partial u_i}{\partial xj}$　粘性力正比速度梯度

角变形率 $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{du}{dy}$



$$\tau_{yx}=\tau_{xy}=\mu(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial uy}{\partial x})\qquad \tau_{xx}=2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\cancel{-\frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{V}}$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial uz}{\partial x})\qquad \tau_{yy}=2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}\cancel{-\frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{V}}$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial uz}{\partial y})\qquad \tau_{zz}=2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\cancel{-\frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{V}}$$

本构方程

不可压：$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$=0，μ=C ⟹ $\vec{\nabla}\cdot\tau_{ij}=\mu\nabla^2\vec{V}$

$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$
（拉普拉斯算子）

Navier-Stokes方程：$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{V}$

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

② 动量方程： $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\tau_{ij}$

特例：1.无粘： $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p$ 欧拉方程

2.不可压、牛顿流体：$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{V}$ N-S方程

x方向： $\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$

y方向： $\rho\frac{Dv}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y+\mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})$

z方向： $\rho\frac{Dw}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z+\mu(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2})$

5.2 微分形式动量方程（5.1~5.2）

连续性方程： $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$ （不可压 ）

N-S方程： $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{V}$ （不可压、牛顿流体）

能量方程： $$\rho\frac{D\hat{u}}{Dt}+p(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})=\vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T)+\phi$$

$\rho, p, \vec{V}, \hat{u}, T$ 7个未知量，5方程 ＋ $p=\rho RT$，$\hat{u}=\hat{u}(p,T)$

求解偏微分耦合方程。 数值方法！

作业:

复习笔记!

P183. 5.8，5.9（粘性应力）

P130. 5.10（伯努利，欧拉，N-S方程）

回顾：

1.连续性方程： $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0$ $\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)=0$

2.特例： 定常：$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0$ 不可压： $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$

3.动量方程： $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\tau_{ij}$

4.N-S方程： $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{V}$

5.欧拉方程： $\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}p$

6.流体变形、涡量、环量

沿流线：$\frac{\rho V^2}{2}+p_k$ =C

n向：$\frac{\partial p_k}{\partial n}=\frac{\rho V^2}{R}$