

上节课内容回顾



□ 对称结构承受正对称载荷时的特性

- 变形、内力、约束力均正对称；轴力图、弯矩图正对称，剪力图反对称；
- 在对称轴通过的截面上，剪力 F_s 为零，而弯矩 M 、轴力 F_N 均不为零；
- 在对称轴通过的截面上，垂直于对称轴的线位移为零，转角为零，沿着对称轴的线位移不为零。

□ 对称结构承受反对称载荷时的特性

- 变形、内力、约束力均反对称；剪力图正对称，轴力图、弯矩图反对称；
- 在对称轴通过的截面上，弯矩 M 、轴力 F_N 均为零，而剪力 F_s 不为零；
- 对称轴通过的截面上，沿着对称轴的线位移为零，垂直于对称轴的线位移不为零，转角不为零。

第十四章 压杆的稳定

- 概述
- 细长压杆的临界力
- 压杆的临界应力
- 压杆的稳定性校核
- 提高压杆稳定性的措施

学前问题：

- 稳定性的概念？
- 压杆的分类，临界应力？



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



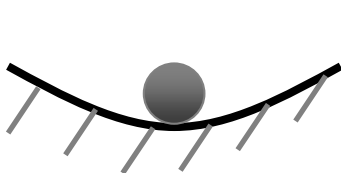
航天航空学院--力学中心

14-1 概述

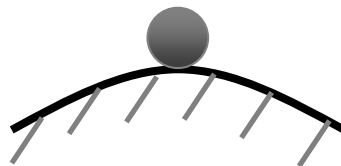


构件承载能力：强度、刚度、稳定性

刚体平衡



稳定平衡

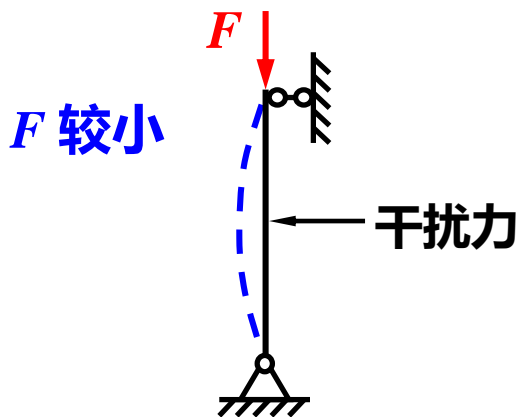


不稳定平衡

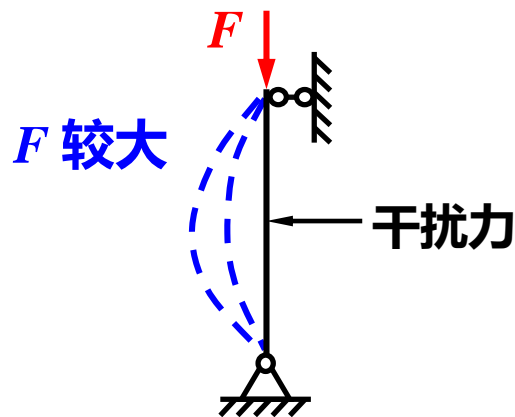


随遇平衡

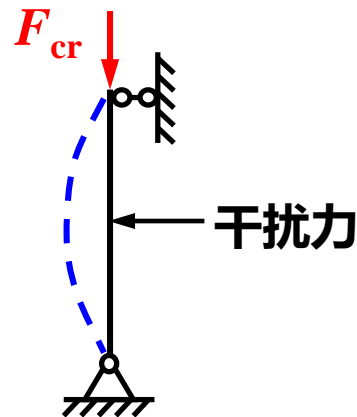
压杆平衡（如生活中的塑料扁尺受压时）



稳定平衡



不稳定平衡



随遇平衡

14-1 概述

□ 平衡系统受到干扰偏离平衡位置，若去除干扰系统能够自动恢复原有的平衡状态，则称为**稳定平衡**(Stable Equilibrium)；否则称为**不稳定平衡**(Unstable Equilibrium)。

□ **稳定性**(Stability)：弹性体保持原有平衡状态的能力。

□ **失稳**(Buckling, 屈曲)：弹性体丧失初始平衡状态的现象。

□ 压杆由稳定平衡过渡到不稳定平衡时，轴向压力的临界值成为**临界力**或**临界载荷**(Critical Load)，用 F_{cr} 表示。

□ **临界力**是压杆承载能力的指标：

$F < F_{cr}$ ，压杆稳定；

$F > F_{cr}$ ，压杆不稳定(失稳)

F_{cr} 是压杆稳定的最大压力；

F_{cr} 是压杆失稳的最小压力。

□ 压杆的失稳往往是很突然发生的，所以危害较大。

14-1 概述

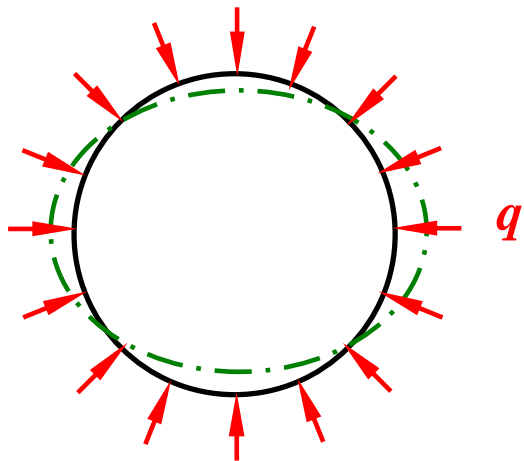


压杆稳定性与工程结构破坏事件：

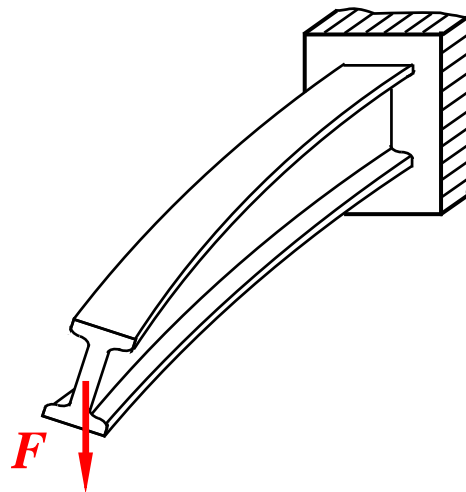
- ④ 1876年12月美国横跨阿什特比拉河上的同名桥因压杆失稳而破坏。
- ④ 1891年5月14日，瑞士明翰斯太因铁路桥的因压杆失稳而破坏。
- ④ 1875年，俄国开伏达河上的同名桥，因受压上弦杆发生了偏离桁架平面的屈曲而毁坏。
- ④ 1907年8月29日，在加拿大横跨圣劳伦斯河的大桥在施工中因时下弦杆失稳而倒塌。
- ④ 1925年2月13日，苏联流经俄罗斯和乌克兰的普里皮亚季河上的莫济里桥两侧桁架上的两根斜杆因连接问题导致失稳，几乎同时被压弯。
- ④ 1983年10月4日，中国社会科学院科研楼工地的钢管脚手架距地面5~6米处突然外弓，这座高达54.2m，长17.25m，总重56.54吨的大型脚手架轰然倒塌。

14-1 概述

□ 除了压杆外，还有一些构件也存在稳定性问题。



受压的薄壁圆筒
变椭圆形



窄而高的梁发生侧弯
(弯曲+扭转)

□ 随着结构大型化、轻型化，更多高强度材料制成的薄壁构件日益广泛使用，使得稳定性问题更加突出和重要了。

14-2 细长压杆的临界力

一、两端铰支的细长压杆

$$M(x) = -F_{\text{cr}} v(x) = EI v''(x)$$

$$v'' + k^2 v = 0 \quad k^2 = F_{\text{cr}} / EI$$

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

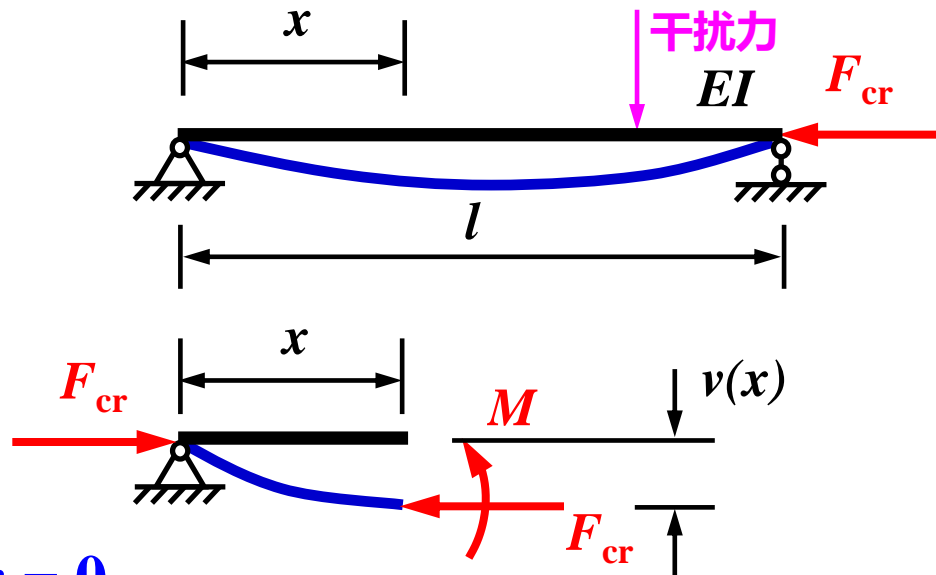
边界条件: $x = 0$ 和 $x = l$ 时, $v = 0$

$$C_2 = 0 \quad C_1 \sin kl = 0$$

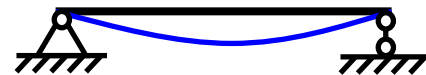
$$k = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$F_{\text{cr}} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

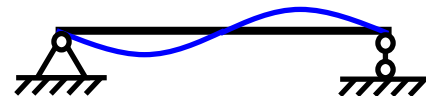
$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



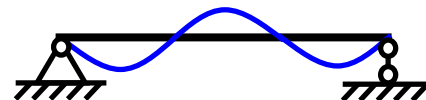
$$n = \pm 1$$



$$n = \pm 2$$



$$n = \pm 3$$



欧拉公式 (Euler, 1757)

14-2 细长压杆的临界力

□ 欧拉曾任彼得堡科学院教授，柏林科学院的创始人之一。他是**刚体力学**和**流体力学**的奠基者，**弹性系统稳定性理论**的开创人。

□ 他认为质点动力学微分方程可以应用于液体（1750）。他曾用两种方法来描述流体的运动，即分别根据空间固定点（1755）和根据确定的流体质点（1759）描述流体速度场。前者称为**欧拉法**，后者称为**拉格朗日法**。

□ 欧拉奠定了理想流体的理论基础，给出了反映质量守恒的**连续方程**（1752）和反映动量变化规律的**流体动力学方程**（1755）。

□ 欧拉在固体力学方面的著述也很多，诸如弹性压杆失稳后的形状，上端悬挂重链的振动问题，等等。

□ 欧拉的专著和论文多达800多种。



欧拉（Leonhard Euler, 1707年~1783年），瑞士数学家和物理学家。

14-2 细长压杆的临界力

二、其他约束条件下细长压杆

例如：一端固定、一端自由的压杆临界力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$M(x) = F_{cr} [\Delta - v(x)] = EI v''(x)$$

$$v''(x) + \frac{F_{cr}}{EI} v = \frac{F_{cr}}{EI} \Delta$$

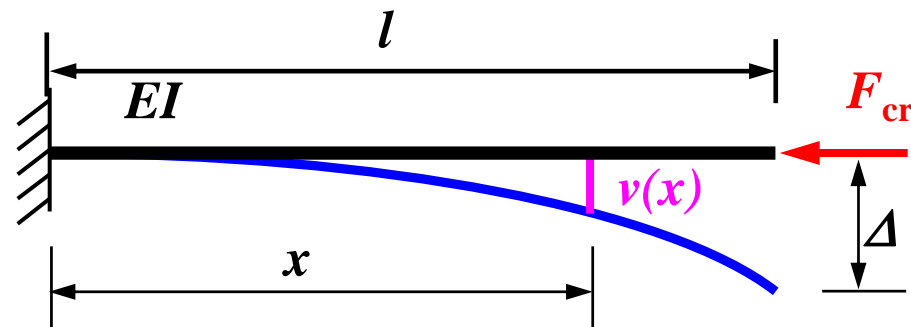
$$v = C_1 \sin \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} x + \Delta$$

边界条件：

$$x = 0 \text{ 时, } v = 0 : C_2 = -\Delta$$

$$x = 0 \text{ 时, } dv/dx = 0 : C_1 = 0$$

$$x = l \text{ 时, } v = \Delta : \Delta = -\Delta \cos \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} l + \Delta$$



$$\cos \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} l = 0$$

$$\sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} l = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

14-2 细长压杆的临界力

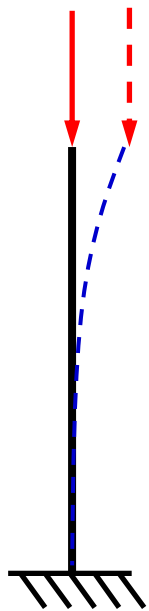


$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



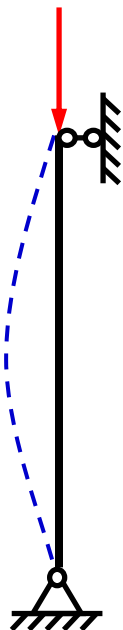
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

μ : 长度因数
(支座系数,
长度系数,
约束系数)



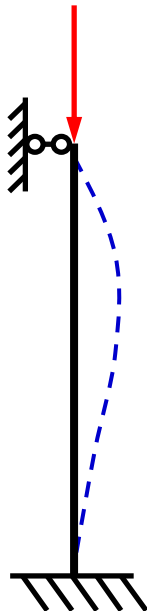
一端固定
一端自由

$$\mu = 2$$



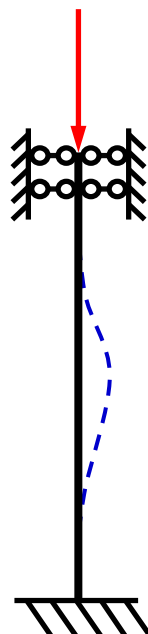
两端铰支

$$\mu = 1$$



一端固定
一端铰支

$$\mu = 0.7$$



两端固定

$$\mu = 0.5$$

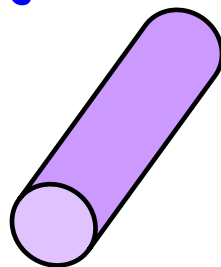
长度因数可由临界失稳后正弦半波长，与两端铰支压杆临界失稳时的正弦半波长度的比值确定。

注意：刚度越大，杆长越短，约束越强，临界力越大，压杆越不易失稳。

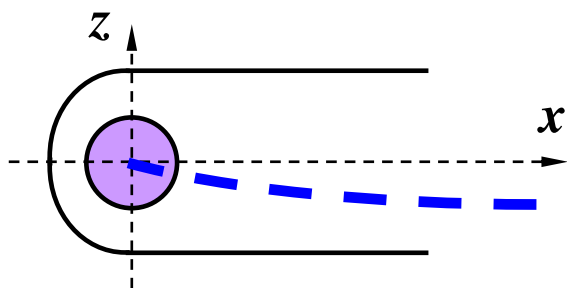
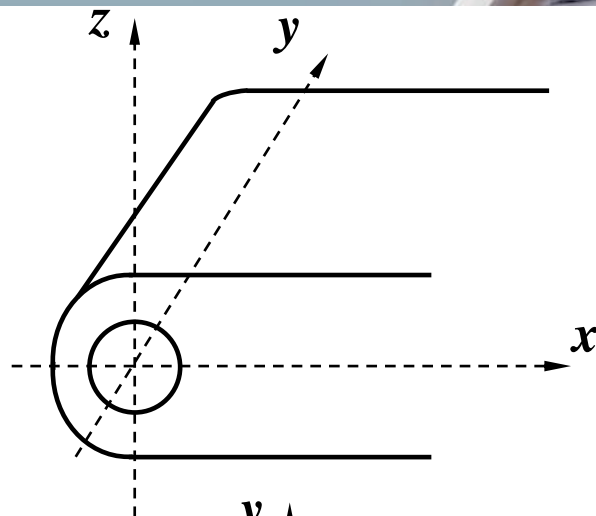
14-2 细长压杆的临界力

三、特殊约束形式

柱状铰链

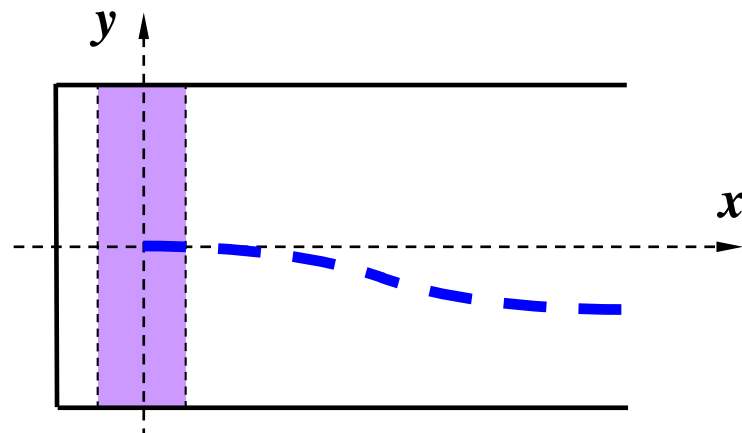


轴销



□ 在 x - z 平面内弯曲失稳---
两端铰链连接

$$\mu_y = 1$$



□ 在 x - y 平面内弯曲失稳---
两端固定

$$\mu_z = 0.5$$

14-3 压杆的临界应力



一、细长压杆的临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

惯性半径
(回转半径)

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

柔度 (长细比)

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

欧拉公式

注意1： 柔度越大，临界应力越小，压杆越易失稳。

注意2： 在计算临界应力时，压杆总是在最容易发生弯曲的方向上失稳，故轴惯矩应取最小值，柔度应取最大值。

14-3 压杆的临界应力

例14-1 两端球铰支座的细长压杆，横截面为矩形，杆长为 $L=300\text{mm}$ ，弹性模量为 $E=200\text{GPa}$ ，试求其临界力和临界应力。材料屈服极限 $\sigma_s=240\text{MPa}$ 。

解： 失稳形式的判断：

$$I_z = \frac{2 \times 10^3}{12} = 166.67 \text{mm}^4$$

$$I_y = \frac{10 \times 2^3}{12} = 6.67 \text{mm}^4$$

$I_z > I_y$ ，故将以 y 轴
为中性轴弯曲失稳

两端球铰支座： $\mu = 1$

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu L)^2} = 146 \text{N} \quad \sigma_{\text{cr}} = \frac{F_{\text{cr}}}{A} = 7.3 \text{MPa}$$

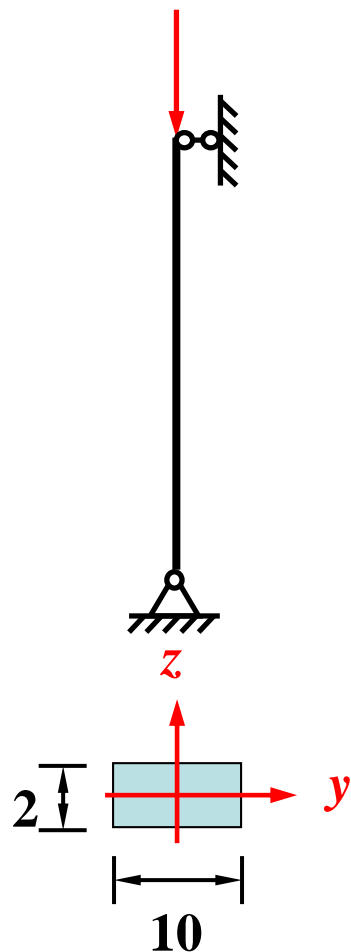
讨论1： 若与强度条件确定的许可载荷相比？

$$F_s = \sigma_s A = 240 \times 20 = 4800 \text{N}$$

稳定性条件比强度条件苛刻！

$$\frac{F_s}{F_{\text{cr}}} = 32.9$$

讨论2： 选用矩形截面的压杆，合适吗？



14-3 压杆的临界应力

例14-2 两端球铰支座的细长压杆，横截面有两种形式， $L=1.5\text{m}$ ， $E=200\text{GPa}$ ，试求其临界应力。

解：1. 实心圆截面

2. 空心圆截面

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 3.07 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = 4.30 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 1.96 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$


$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 1.88 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

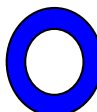
$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 119.9$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 99.2$$

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 137.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 200.6 \text{ MPa}$$

1. 
 $d = 50\text{mm}$

2. 
 $d = 25\text{mm}$
 $D = 55\text{mm}$



讨论：比较两种截面形式，哪一种好？

空心截面的压杆，其稳定性较实心截面好！

14-3 压杆的临界应力

二、欧拉公式的适用条件

$M(x) = EIv''(x)$ 材料必须处在线弹性范围内！

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \quad \longrightarrow \quad \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \lambda_p$$

(λ_p 只与材料相关，为可以使用欧拉公式的柔度最小值)

Q235 钢: $E = 206\text{GPa}$, $\sigma_p = 200\text{MPa}$, $\lambda_p \approx 100$

将 $\lambda \geq \lambda_p$ 的压杆称为**细长杆**（或**大柔度杆**）。

强调：只有细长杆（即 $\lambda \geq \lambda_p$ 时）才能使用欧拉公式来计算临界力和临界应力。

14-3 压杆的临界应力

三、经验公式及适用条件

当 $\lambda < \lambda_p$ 时，欧拉公式不再适用！如何计算临界力和临界应力？

直线公式： $\sigma_{cr} = a - b\lambda$ (a 、 b 为材料常数)

适用条件： $\sigma_p \leq \sigma_{cr} = a - b\lambda \leq \sigma_s$

$$\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \quad \lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

随着柔度的减小，临界应力增大，最大不能大于材料的破坏应力！

(只与材料相关，为能使用直线公式的柔度最小值)

Q235 钢： $a = 304\text{MPa}$, $b = 1.118\text{MPa}$, $\lambda_s = 61.7$

将 $\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$ 的压杆称为**中长杆** (或**中柔度杆**)

强调： 中长杆 (即 $\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$ 时) 使用直线公式来计算临界应力。

将 $\lambda \leq \lambda_s$ 的压杆称为**短粗杆** (或**小柔度杆**)

$$\sigma_{cr} = \sigma_s$$

14-3 压杆的临界应力

四、压杆的分类

$\lambda \geq \lambda_p$ 细长杆 $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ (欧拉公式)

$\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$ 中长杆 $\sigma_{cr} = a - b\lambda$ (直线公式)

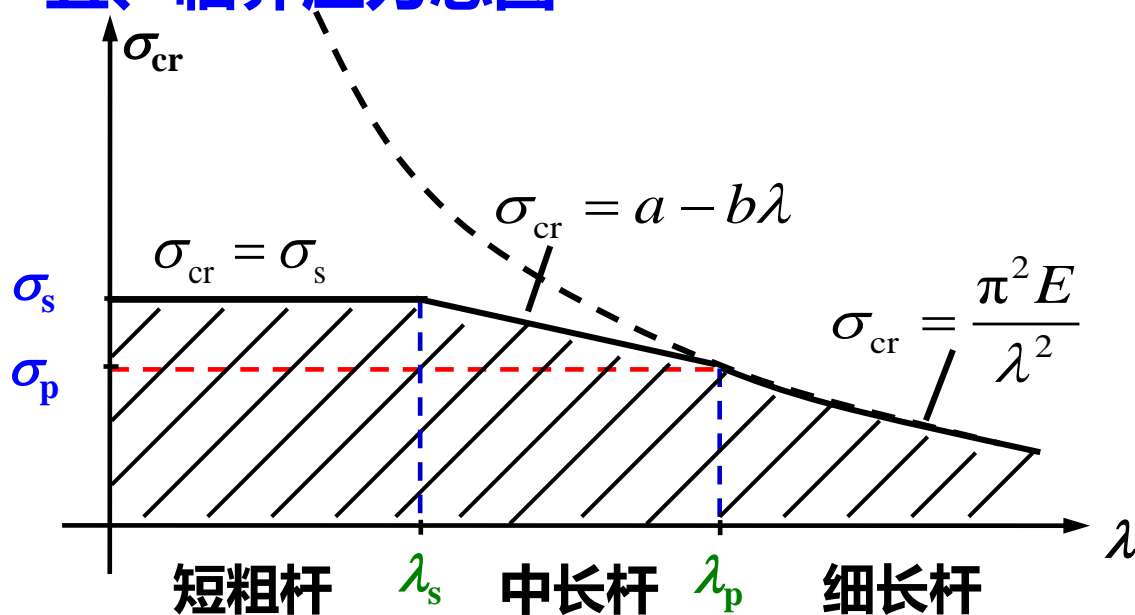
$\lambda \leq \lambda_s$ 短粗杆 $\sigma_{cr} = \sigma_s$ (强度公式)

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$

$$\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

注意：若压杆为脆性材料，上述 λ_s 换为 λ_b 、 σ_s 换为 σ_b ！

五、临界应力总图



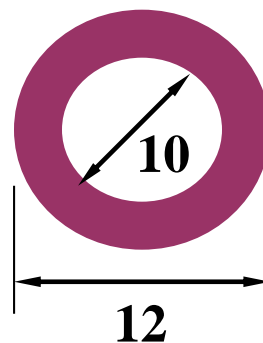
讨论 1：将中长杆当成细长杆来计算，计算结果如何？

讨论 2：压杆是稳定的，强度是否足够？

14-3 压杆的临界应力

例14-3 计算图示压杆的临界载荷。已知：材料为Q 235钢， $E = 210\text{GPa}$ 。

解：



$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4) / 64}{\pi D^2 (1 - \alpha^2) / 4}} = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2} = 3.9 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 97.4 \quad \lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p \quad \text{中柔度杆}$$

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 195 \text{ MPa} \quad F_{cr} = \sigma_{cr} A = 6.739 \text{ kN}$$

讨论：如果误认为是大柔度杆，会怎样？

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi D^2 (1 - \alpha^2)}{4} = 7.55 \text{ kN}$$

偏于危险

14-3 压杆的临界应力

例14-4 矩形截面压杆长 $l = 2\text{m}$ ，材料为Q235钢， $E = 210\text{GPa}$ ，求此杆的临界力。 $h=80\text{mm}$ ， $b=50\text{mm}$ 。

解：在xoy平面内： $\mu_z = 1$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = 23.1\text{mm}$$

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = 86.6$$

在xoz平面内： $\mu_y = 0.5$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = 14.4\text{mm}$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = 69.3$$

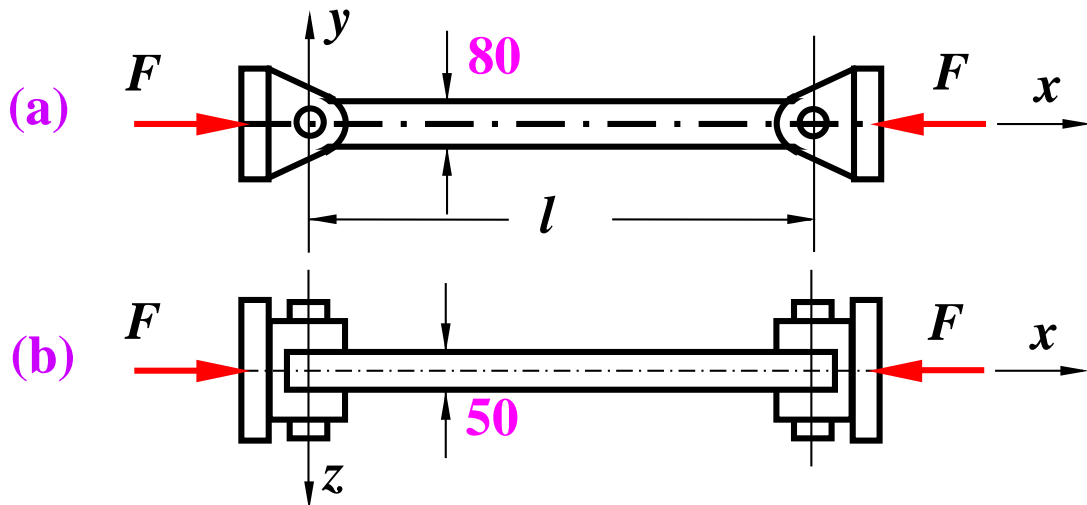
$\lambda_z > \lambda_y$ **压杆失稳发生在xoy平面内**

$\lambda_s \leq \lambda_z \leq \lambda_p$ **中长杆**

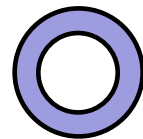
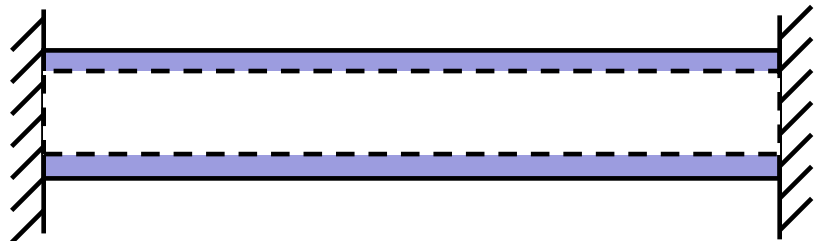
临界力

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = (a - b\lambda_{\max}) \cdot bh$$

$$= (304 - 1.12 \times 86.6) \times 80 \times 50 = 828\text{kN}$$



14-4 压杆稳定性的校核



例14-5 已知某暖气管，问最大温升多少时会失稳。已知：
 $D=10\text{cm}$, $d=8\text{cm}$, $L=7\text{m}$,
 $\alpha=12.5\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$, $E=210\text{GPa}$,
 $\sigma_p=200\text{MPa}$ 。

解：1、计算柔度

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{64} D^4 (1 - \alpha^4)}{\frac{\pi}{4} D^2 (1 - \alpha^2)}} = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2} = 3.2\text{cm} \quad \mu = 0.5$$

$$\lambda = \frac{\mu L}{i} = 109$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 101.8$$

大柔度杆

2、计算临界应力

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 174\text{MPa}$$

3、计算热应力

$$\sigma_{\text{温}} = E\varepsilon = E \frac{\alpha L \Delta t}{L} \geq \sigma_{cr} \quad \Delta t \geq 66^{\circ}\text{C}$$

讨论：此类问题称为热屈曲问题。如何避免？

学前问题：

- **稳定性的概念？**
- **压杆的分类，临界应力？**



今日作业

14-3、14-7



上节课内容回顾

压杆的分类

$$\lambda \geq \lambda_p$$

细长杆

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{欧拉公式})$$

$$\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$$

中长杆

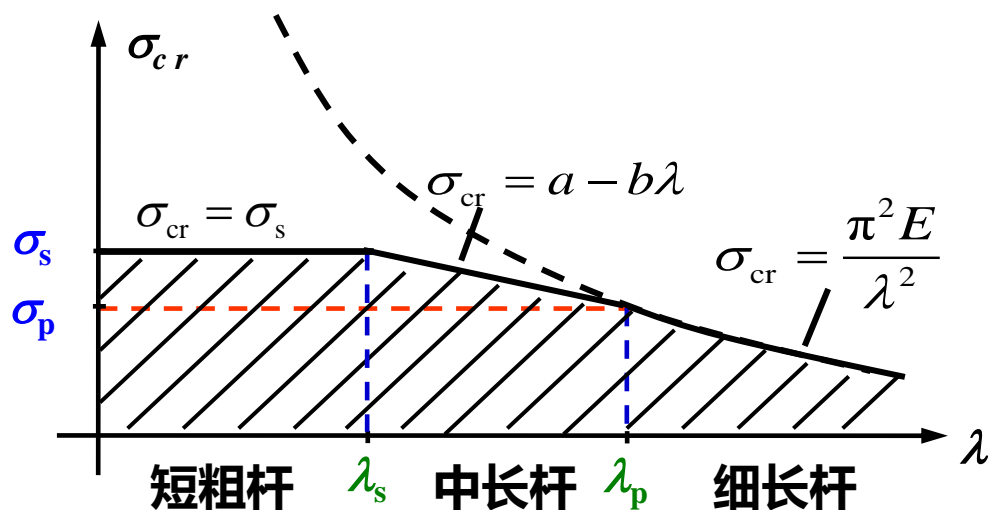
$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \quad (\text{直线公式})$$

$$\lambda \leq \lambda_s$$

短粗杆

$$\sigma_{cr} = \sigma_s \quad (\text{强度公式})$$

临界应力总图



$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \quad \lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

第十四章 压杆的稳定

- 概述
- 细长压杆的临界力
- 压杆的临界应力
- 压杆的稳定性校核
- 提高压杆稳定性的措施(自学)

学前问题:

- 稳定性的校核?
- 如何提高稳定性?



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



航天航空学院--力学中心

14-4 压杆稳定性的校核

一、安全因数法（常用）

$[n_{st}]$ 规定稳定安全因数

$$|\sigma| \leq \frac{\sigma_{cr}}{[n_{st}]} \quad |F_N| \leq \frac{F_{cr}}{[n_{st}]} \quad n_{st} = \frac{F_{cr}}{|F_N|} = \frac{\sigma_{cr}}{|\sigma|} \geq [n_{st}] \quad n_{st} \text{ 实际稳定安全因数}$$

$[n_{st}] = 1.8 \sim 3.0$ 钢材

$[n_{st}] = 5.0 \sim 5.5$ 铸铁

$[n_{st}] = 2.8 \sim 3.2$ 木材

稳定安全因数一般大于强度安全因数，这是因为工程实际中载荷的偏心、压杆的初曲率、材料的不均匀、支座的缺陷等因素是不可避免。

二、折减系数法

$$\frac{\sigma_{cr}}{[n_{st}]} = [\sigma_{st}] \quad [\sigma_{st}] = \varphi[\sigma]$$

$$|\sigma| = \frac{|F_N|}{A} \leq \varphi[\sigma] \quad \varphi \text{ 为折减系数，与柔度和材料相关，查表得到。}$$

$$|F_N| \leq \varphi[\sigma]A$$

压杆的稳定性是对压杆整体而言的，因此截面有局部削弱对压杆的稳定性影响很小，但是此时需校核局部削弱处的压缩强度！

14-4 压杆稳定性的校核

稳定问题的求解步骤：

1、结构分析，确定受压杆的压力（轴力 F_N ），若为超静定结构，先解超静定问题；

2、计算压杆惯性半径 i ，确定柔度 λ （最大柔度 λ_{\max} ）；

I、安全因数法（已知规定稳定安全因数）：

3、查表或计算 λ_p 和 λ_s ，与最大柔度比较，确定压杆类型；

4、选用适当的临界应力公式计算 σ_{cr} 及 F_{cr} ；

5、代入稳定性条件。
$$|\sigma| = \frac{|F_N|}{A} \leq \frac{\sigma_{cr}}{[n_{st}]} \quad n_{st} = \frac{F_{cr}}{|F_N|} = \frac{\sigma_{cr}}{|\sigma|} \geq [n_{st}]$$

II、折减系数法（已知材料的静强度--许用应力）：

3、根据材料和柔度，查表得到折减系数 φ ；

4、代入稳定性条件。
$$|\sigma| = \frac{|F_N|}{A} \leq \varphi[\sigma] \quad |F_N| \leq \varphi[\sigma]A$$

14-4 压杆稳定性的校核

例14-6 校核图示结构的稳定性。已知: $d_1 = d_2 = 48\text{mm}$, $F = 100\text{kN}$, 材料为Q 235钢, $E = 200\text{ GPa}$, $[n_{st}] = 3.0$ 。

解: 1. 结构分析, 压杆的轴力:

$$F_{N1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F = -86.6\text{ kN} \quad F_{N2} = -\frac{F}{2} = -50\text{ kN}$$

2. 计算柔度 λ :

$$\mu_1 = \mu_2 = 1 \quad i_1 = i_2 = d/4 = 12\text{mm}$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 l_1}{i_1} = 83.3 \quad \text{中长杆}$$

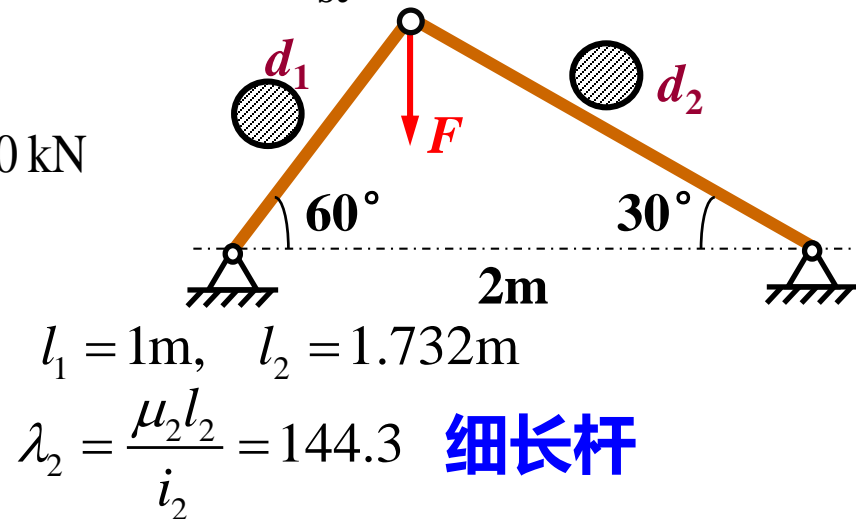
3. 计算临界应力和临界力:

$$\sigma_{cr1} = a - b\lambda_1 = 210.7\text{ MPa}$$

$$F_{cr1} = \sigma_{cr1} A_1 = 381.3\text{ kN}$$

4. 稳定性校核:

$$n_{st1} = \frac{F_{cr1}}{|F_{N1}|} = 4.4 > [n_{st}]$$



$$l_1 = 1\text{m}, \quad l_2 = 1.732\text{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_2 l_2}{i_2} = 144.3 \quad \text{细长杆}$$

$$\sigma_{cr2} = \pi^2 E / \lambda_2^2 = 94.8\text{ MPa}$$

$$F_{cr2} = \sigma_{cr2} A_2 = 171.5\text{ kN}$$

$$n_{st2} = \frac{F_{cr2}}{|F_{N2}|} = 3.43 > [n_{st}]$$

结构是稳定的!

14-4 压杆稳定性的校核

例14-7 图示结构中 CD 为刚性，试确定许可载荷 $[F]$ 。已知：材料为Q235钢， $E=200\text{ GPa}$ ， $[n_{st}]=5$ 。

解：1. 结构分析，压杆的轴力：

$$|F_{NAB}| \sin 30^\circ \times 1.5 = 2 \times F \quad |F_{NAB}| = 8F/3$$

2. 计算柔度 λ ： $i_{\min} = \sqrt{I_z / A} = 2.09\text{cm}$

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}} = 82.87 \quad \text{中长杆}$$

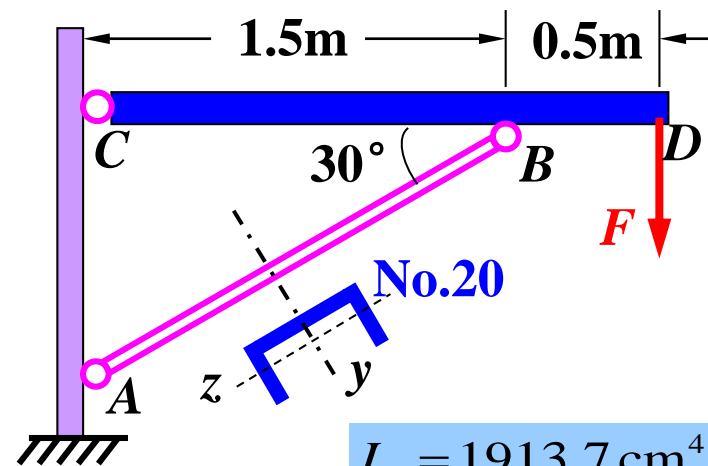
3. 计算临界应力：

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda_{\max} = 211\text{MPa}$$

4. 稳定性条件：

$$n_{st} = \frac{F_{cr}}{|F_{NAB}|} = \frac{\sigma_{cr} A}{|F_{NAB}|} \geq [n_{st}]$$

$$[F] = \frac{3|F_{NAB}|}{8} = 52\text{kN}$$



$$I_y = 1913.7\text{cm}^4$$

$$I_z = 143.6\text{cm}^4$$

$$A = 32.83\text{cm}^2$$

$$|F_{NAB}| \leq \frac{\sigma_{cr} A}{[n_{st}]} = 138.5\text{kN}$$

讨论：1、槽钢截面是否合理？

2、如何提高安全性？

14-4 压杆稳定性的校核

例14-8 托架结构, $q=40 \text{ kN/m}$, CD 梁和 AB 杆材料相同, CD 梁为18号工字钢, AB 杆为圆截面, $d=100\text{mm}$, $E=200\text{GPa}$, $\sigma_s=306\text{MPa}$, $\lambda_p=100$, $\lambda_s=60$, $[n_{st}]=3$, $[n]=1.8$, 试校核托架是否安全?

解: 1、结构受力分析:

$$|F_{NAB}| = \frac{q \cdot CD^2 / 2}{BC \sin \alpha} = 142.2 \text{ kN (压)}$$

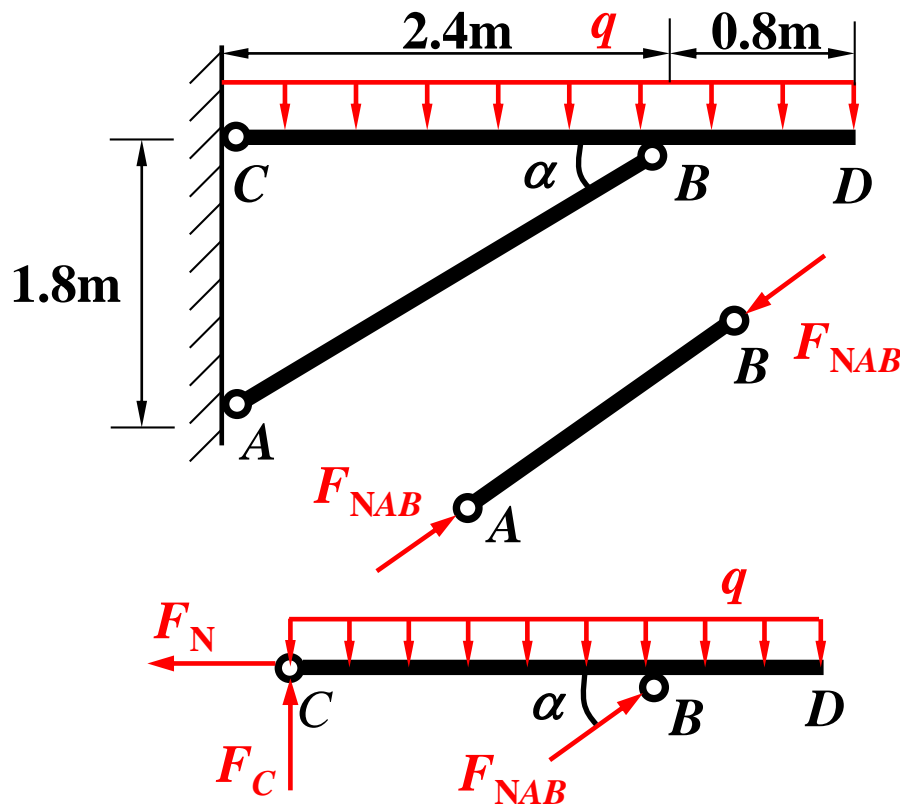
2、压杆 AB 的稳定校核:

$$\mu = 1 \quad i = d / 4$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 120 > \lambda_p \quad \text{AB为细长杆}$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 441 \text{ kN}$$

$$n_{st} = \frac{F_{cr}}{|F_{NAB}|} = 3.1 > [n_{st}]$$



AB杆稳定性足够!

14-4 压杆稳定性的校核

续 3、梁CD的强度校核:

$$|F_{NAB}| = 142.2 \text{ kN}$$

$$F_B = F_{NAB} \sin \alpha = 85.3 \text{ kN}$$

$$F_C = q \cdot CD - F_B = 42.7 \text{ kN}$$

$$F_N = F_{NAB} \cos \alpha = 113.8 \text{ kN}$$

$$M_{\max} = 22.79 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{拉伸+弯曲}$$

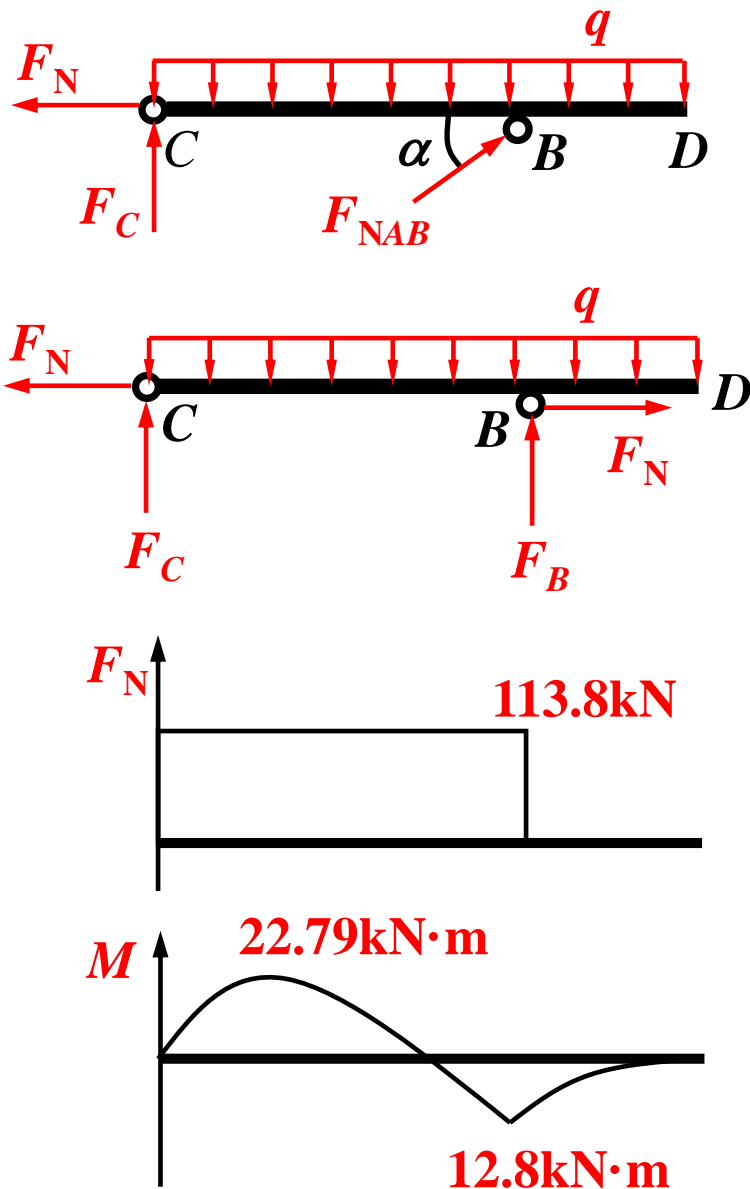
$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W} = 160.4 \text{ MPa}$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{[n]} = 170 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} < [\sigma]$$

CD梁强度足够!

综合以上, 托架是安全的!



14-4 压杆稳定性的校核

例4-9 圆截面压杆由AC和BC构成, $d = 80 \text{ mm}$, $l = 3.4 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$, $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$, $a = 304 \text{ MPa}$, $b = 1.12 \text{ MPa}$, $[n_{st}] = 3$ 。试求许可载荷 $[F]$ 。

解: 1、柔度计算

$$i = \frac{d}{4} = 20 \text{ mm}$$

$$\mu_{AC} = 0.7$$

$$\mu_{BC} = 1$$

$$\lambda = \frac{\mu_{\max} l / 2}{i} = 85$$

$$\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b} = 57$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 99.3$$

中长杆

2、临界力计算

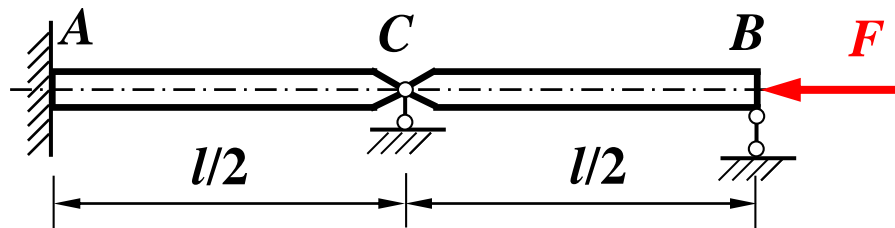
$$F_{cr} = (a - b\lambda)A = 1050.4 \text{ kN}$$

3、稳定性条件: $n_{st} = \frac{F_{cr}}{F} \geq [n_{st}]$

$$[F] = \frac{F_{cr}}{[n_{st}]} = 350 \text{ kN}$$

4、讨论: C支座的最佳位置?

$$l_{AC} : l_{BC} = \frac{10}{7}$$

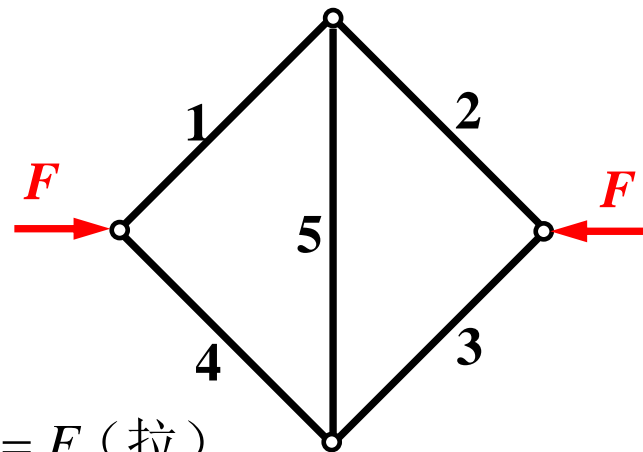


14-4 压杆稳定性的校核

例14-10 正方形桁架，求许可载荷。

$$d = 20\text{mm}, \quad l_{1,2,3,4} = 0.6\text{m}, \quad [n] = [n_{\text{st}}] = 3$$

$$E = 200\text{GPa} \quad \sigma_p = 200\text{MPa} \quad \sigma_s = 300\text{MPa}$$



解：1、内力分析

$$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} = F_{N4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \text{ (压)} \quad F_{N5} = F \text{ (拉)}$$

2、压杆稳定性分析

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 120 \quad \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 99 \quad \text{大柔度杆}$$

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 43.1\text{kN} \quad n_{\text{st}} = \frac{F_{\text{cr}}}{|F_{N1}|} \geq [n_{\text{st}}] \quad [F] = 20.3\text{kN}$$

3、拉杆强度分析

$$\frac{4F_{N5}}{\pi d^2} \leq \frac{\sigma_s}{[n]} \quad [F] = 31.4\text{kN}$$

4、综上，许可载荷为20.3kN

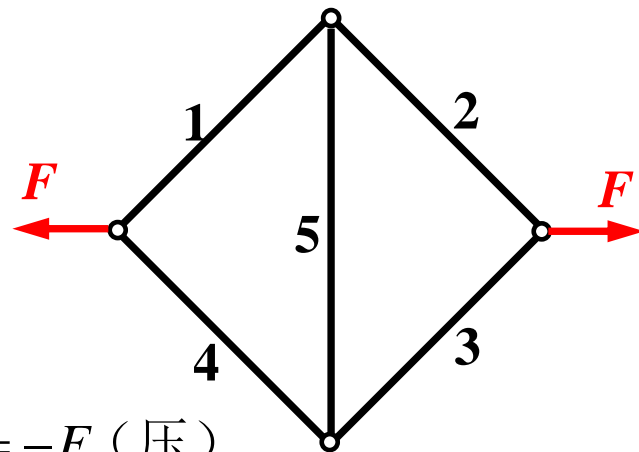
讨论：若将外载荷反向，桁架的承载能力将提高还是下降？

14-4 压杆稳定性的校核

例14-10(续) 正方形桁架，求许可载荷。

$$d = 20\text{mm}, \quad l_{1,2,3,4} = 0.6\text{m}, \quad [n] = [n_{\text{st}}] = 3$$

$$E = 200\text{GPa} \quad \sigma_p = 200\text{MPa} \quad \sigma_s = 300\text{MPa}$$



解：1、内力分析

$$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} = F_{N4} = \frac{\sqrt{2}}{2} F \text{ (拉)} \quad F_{N5} = -F \text{ (压)}$$

2、压杆稳定性分析

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 170 \quad \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 99 \quad \text{大柔度杆}$$

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 21.5\text{kN} \quad n_{\text{st}} = \frac{F_{\text{cr}}}{|F_{N5}|} \geq [n_{\text{st}}] \quad [F] = 7.15\text{kN}$$

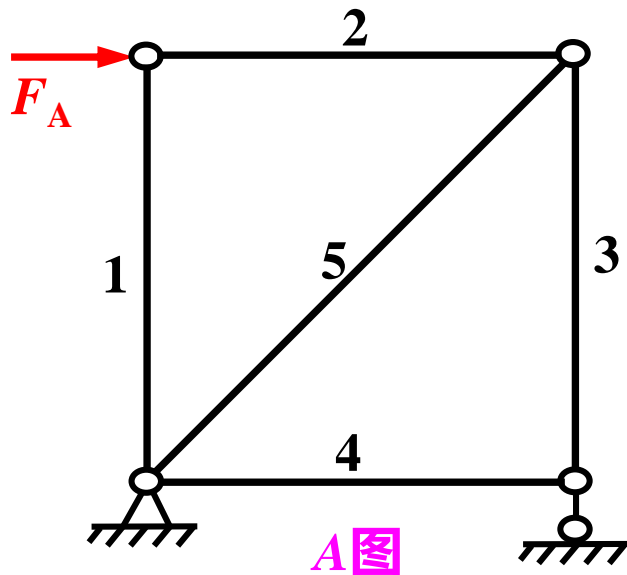
3、拉杆强度分析

$$\frac{4F_{N1}}{\pi d^2} \leq \frac{\sigma_s}{[n]} \quad [F] = 44.4\text{kN}$$

4、综上，许可载荷为7.15kN。承载能力下降！

14-4 压杆稳定性的校核

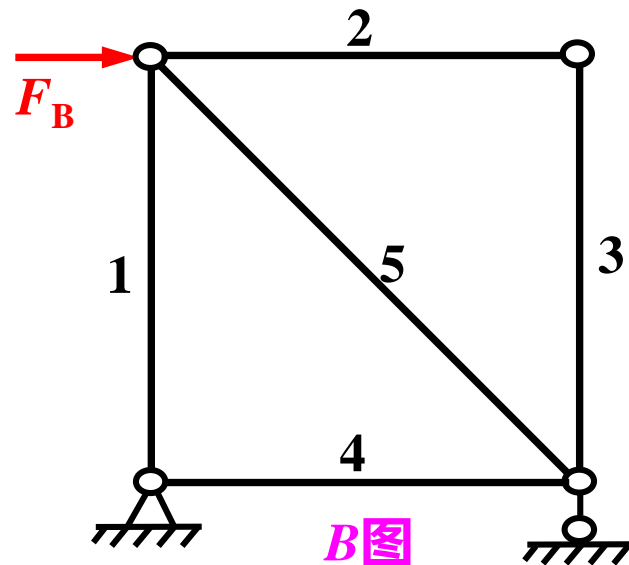
例14-11 边长为 a 的两个正方形桁架，各杆的材料和截面面积均相同，试比较其承载能力（假设各压杆均为细长杆）。



解：A结构

$$|F_{N2}| = F_A = \frac{\pi^2 EI}{a^2}$$

$$F_A = \frac{\pi^2 EI}{a^2}$$



B结构

$$|F_{N5}| = \sqrt{2} F_B = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}a)^2}$$

$$F_B = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\pi^2 EI}{a^2}$$

A 结构较B 结构的承载能力好!

14-4 压杆稳定性的校核

例14-12 $ABCD$ 杆为刚性, BE 杆和 CG 杆材料均为 $Q235$, 截面均为 $d=12\text{mm}$ 的圆截面, 已知 $F=10\text{kN}$, $[n]=[n_{\text{st}}]=2$, $l=200\text{mm}$, $E=200\text{GPa}$, 试校核结构的安全性。

解: 1、结构分析 (为超静定结构)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_N^{BE} + 2F_N^{CG} - 3F = 0 \quad 4\Delta l_{BE} = \sqrt{3}\Delta l_{CG} \quad \Delta l_{BE} = \frac{F_N^{BE} \cdot 2l}{EA} \quad \Delta l_{CG} = \frac{F_N^{CG} \cdot 2l}{EA}$$

$$F_N^{CG} = \frac{24}{19} F = 12.63\text{kN} \text{ (拉)} \quad F_N^{BE} = \frac{6\sqrt{3}}{19} F = 5.47\text{kN} \text{ (压)}$$

2、CG杆的强度分析

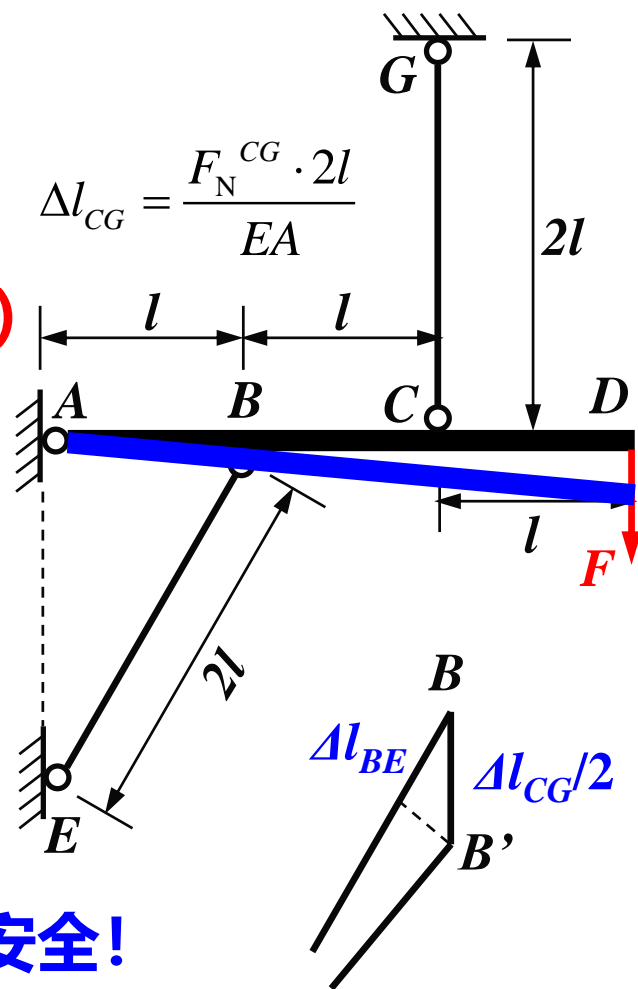
$$\sigma^{CG} = \frac{F_N^{CG}}{A} = 111.7\text{MPa} \leq [\sigma] = \frac{235}{[n]} = 117.5\text{MPa}$$

3、BE杆的稳定性分析

$$\lambda = \frac{\mu \cdot 2l}{d/4} = 133.3 \text{ 大柔度杆} \quad \sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 111.1\text{MPa}$$

$$n_{\text{st}} = \frac{\sigma_{\text{cr}} A}{F_N^{BE}} = 2.3 \geq [n_{\text{st}}] = 2$$

4、综上分析, 结构安全!



14-4 压杆稳定性的校核

例14-13 两杆的材料和截面面积相同，均为细长杆，确定使载荷 F 最大的 θ 角（设 $0 < \theta < \pi/2$ ）。

解：1、内力分析

$$F_{N1} = -F \cos \theta, \quad F_{N2} = -F \sin \theta$$

2、两杆临界力

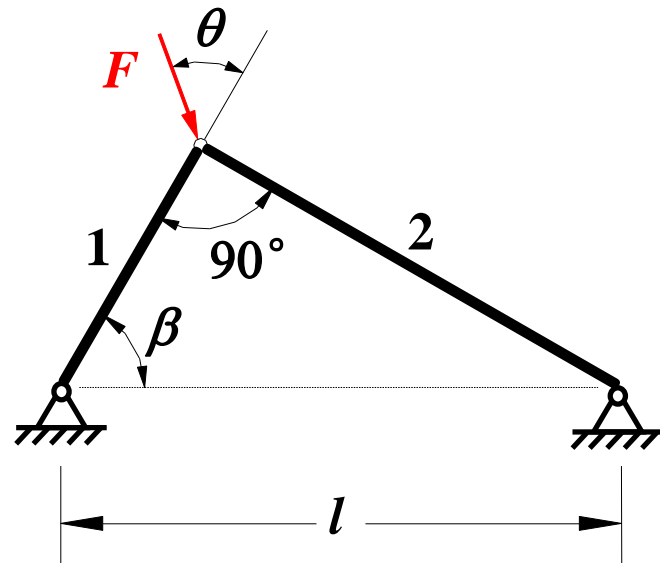
$$F_{cr1} = \frac{\pi^2 E I}{l_1^2}, \quad F_{cr2} = \frac{\pi^2 E I}{l_2^2}$$

3、 F 最大时，两杆内力均达到临界力

$$F \cos \theta = \frac{\pi^2 E I}{l_1^2}, \quad F \sin \theta = \frac{\pi^2 E I}{l_2^2}$$

$$\tan \theta = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 = \cot^2 \beta$$

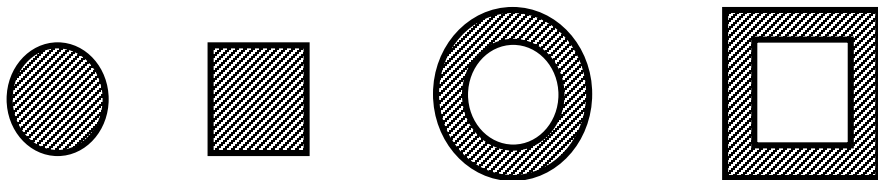
$$\theta = \arctan(\cot^2 \beta)$$



14-5 提高压杆稳定性的措施

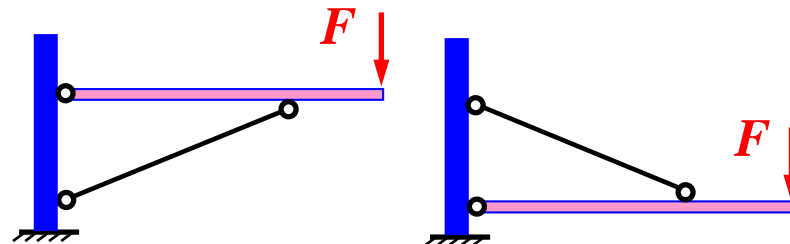
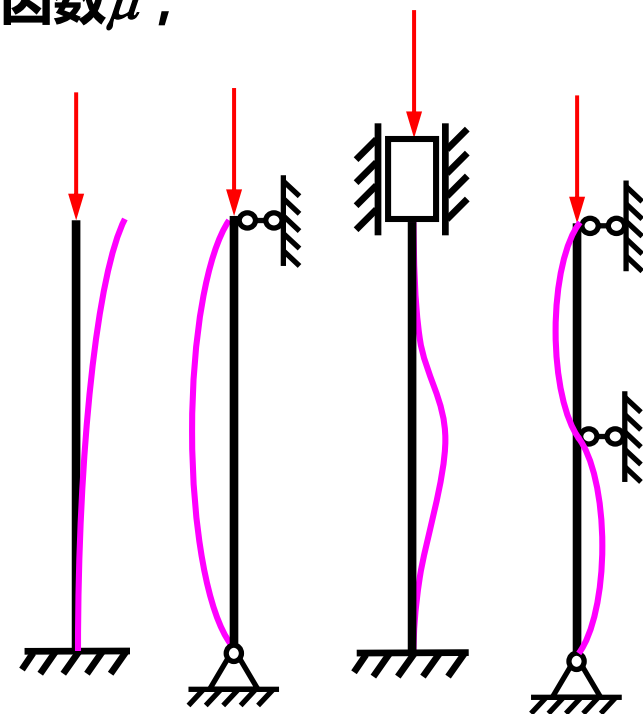
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \sigma_{cr} = a - b\lambda \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

- 改善支座形式，增加压杆的约束，减小长度因数 μ ；
- 缩短压杆长度，或增加中间支座；
- 合理选择截面形状，增大惯性半径 i ；



- 采用等稳定性结构，使 $\lambda_y = \lambda_z$ ；
- 改变结构布局，或者变压杆为拉杆；
- 选择合适的材料：

细长杆：高弹性模量材料
中长杆：高强度材料



学前问题：

- 稳定性的校核？
- 如何提高稳定性？



第十四章的基本要求



1. 了解弹性平衡稳定性的概念；
2. 熟练掌握几种常见杆端约束的长度因数，熟练掌握惯性半径、柔度的计算；
3. 熟练掌握三种类型压杆的判断，掌握其稳定性计算；
4. 了解提高压杆稳定性的措施。

今日作业

14-10、14-15

14-15题提示：该结构为超静定结构。



请预习

第十五章 “联接件的强度”

