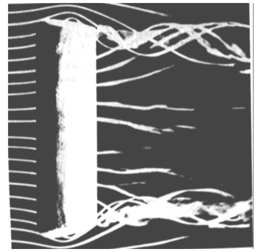
空气与气体动力学

张科

回顾：

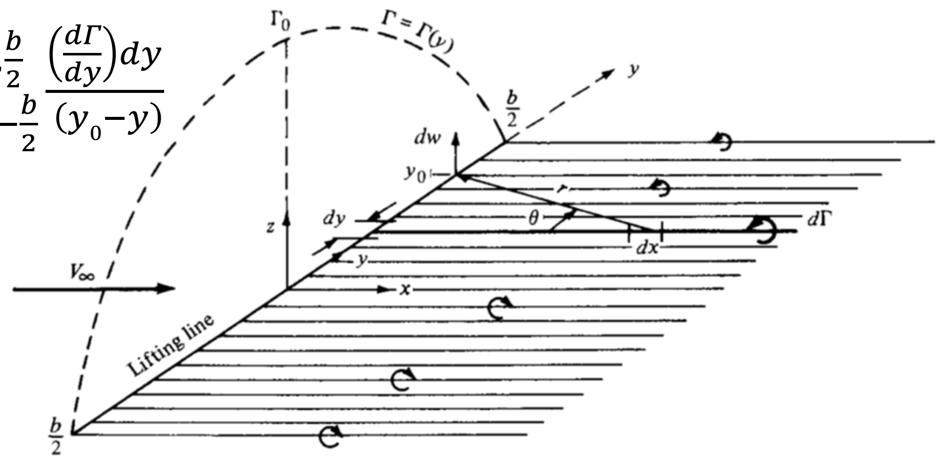
1.机翼几何(展弦比、根梢比、后掠角、扭转角)、气动参数；



2.翼间涡、下洗、诱导阻力；$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ $D'_i = L' sin\alpha_i$ $C_D = C_d + C_{Di}$

3.曲线涡丝；

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0 - y)}$$



4.普朗特经典升力线理论；

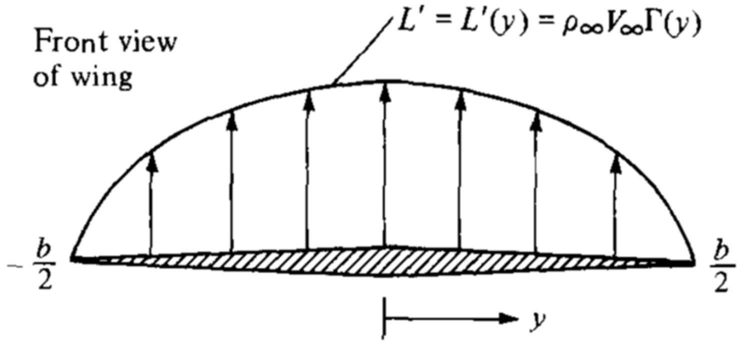
$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} + \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0 - y)}$$

5.椭圆升力分布。

$$\Gamma(y) = \Gamma_0\sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

$$\boxed{\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}} \qquad \boxed{C_{D,i} = \frac{{C_L}^2}{\pi AR}}$$

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)



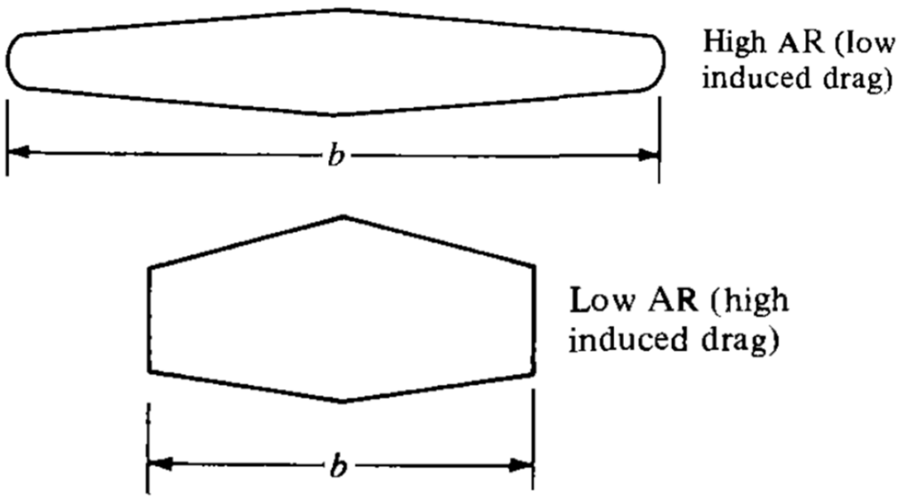
4. 椭圆升力分布：

$$\boxed{\Gamma(y) = \Gamma_0\sqrt{1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2}}$$ 环量沿展向呈椭圆变化。

$$\boxed{w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}} \quad \boxed{\alpha_i = -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}} \quad \boxed{\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}}$$

AR = b^2/S

$$\boxed{C_{D,i} = \frac{C_L{}^2}{\pi AR}} \begin{cases} ① \ C_{D,i} \propto C_L{}^2 \ \text{升致阻力} \\ ② \ C_{D,i} \propto \frac{1}{\pi AR}, \quad AR\uparrow \ C_{D,i}\downarrow \end{cases}$$

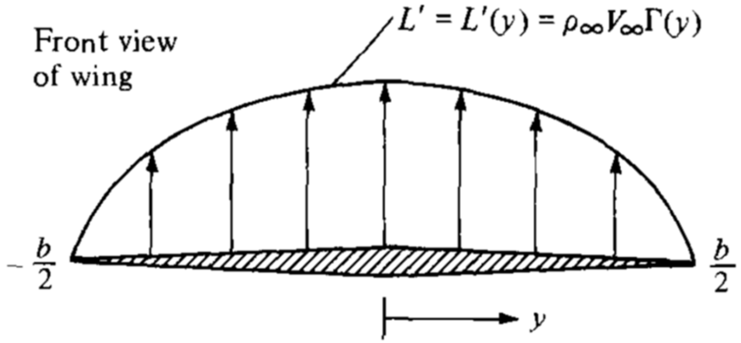


$$C_D = C_d + C_{D,i}$$

C_L大时$C_{D,i}$占C_D比大，
巡航时一般$C_{D,i}$占C_D25%

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

4. 椭圆升力分布：



$\boxed{\Gamma(y) = \Gamma_0\sqrt{1-(\frac{2y}{b})^2}}$ 环量沿展向呈椭圆变化。

$\boxed{w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}}$ $\boxed{\alpha_i = -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}}$ $\boxed{\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}}$ $\boxed{C_{D,i} = \frac{C_L{}^2}{\pi AR}}$

$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ 无几何扭转α为常数, 椭圆升力分布：α_i为常数→α_{eff} 为常数。

任意翼剖面$C_l(y)= a_0(\alpha_{eff} - \alpha_{L=0})$ 无气动扭转 a_0，$\alpha_{L=0}$ 为常数。

➡ 任意翼剖面$C_l(y)=$ 常数

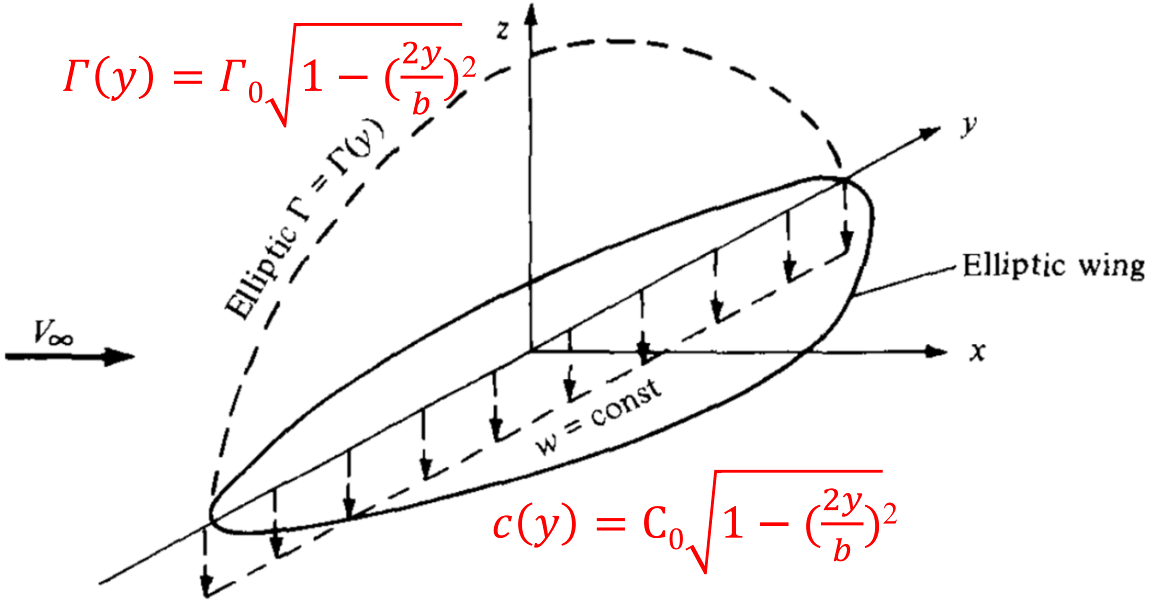
$C_l(y)= \frac{L'(y)}{\frac{1}{2}\rho V^2{}_\infty c(y)} = \frac{\rho V_\infty \Gamma(y)}{\frac{1}{2}\rho V^2{}_\infty c(y)} =$ 常数 ➡ $\boxed{c(y) = C_0\sqrt{1-(\frac{2y}{b})^2}}$

无几何气动扭转时，椭圆环量分布机翼，弦长沿展向呈椭圆分布。

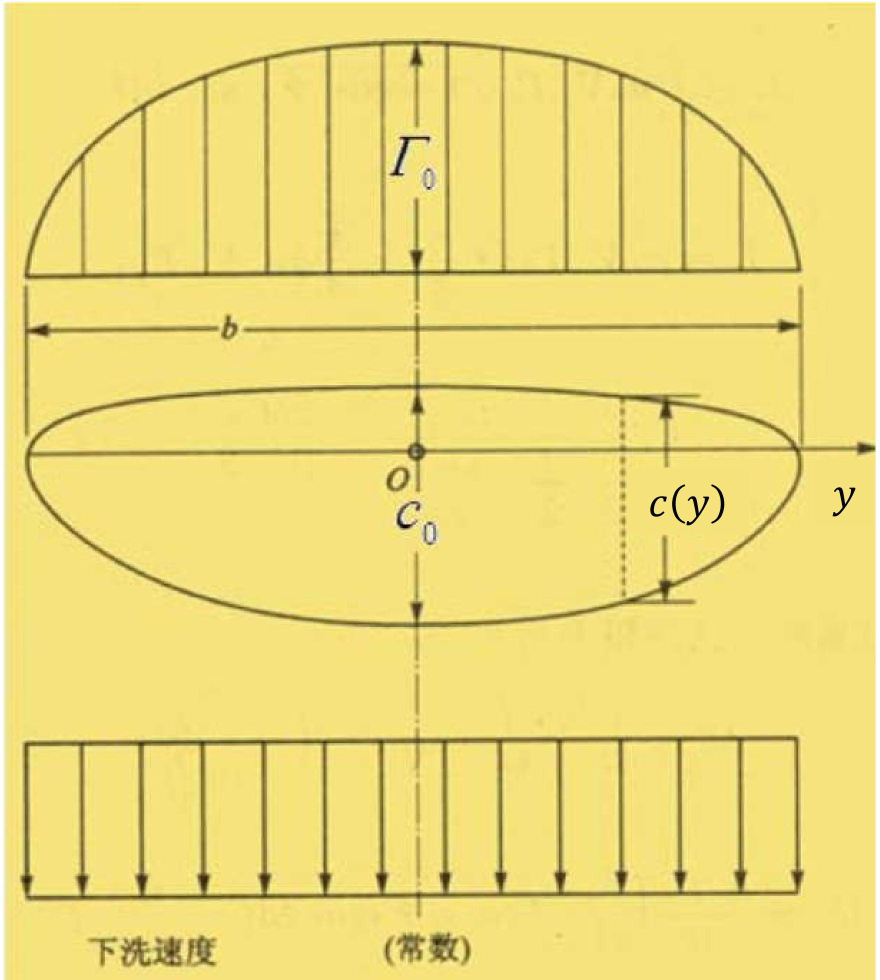
10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

4. 椭圆升力分布：

$$\Gamma(y) = \Gamma_0\sqrt{1-(\frac{2y}{b})^2}$$



$$c(y) = C_0\sqrt{1-(\frac{2y}{b})^2}$$



椭圆机翼有最佳升阻比，但工艺复杂，常用矩形、梯形翼。

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

$\Gamma(y) = \Gamma_0\sqrt{1-(\frac{2y}{b})^2}$

5. 一般升力分布：

椭圆升力分布：$\Gamma(\theta)= \Gamma_0 sin\theta$ （$y = -\frac{b}{2}cos\theta, 0 \le \theta \le \pi$)

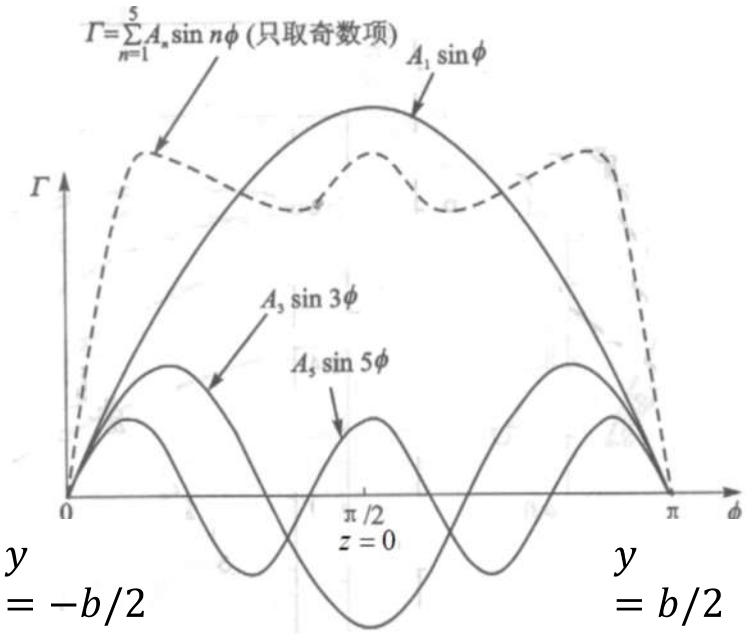
一般升力分布：$\boxed{\Gamma(\theta)= 2bV_\infty \sum_{n=1}^{N} A_n\, sinn\theta}$

任意有限翼展机翼沿展向环量分布

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} + \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0-y)}$$

普朗特升力线理论基本方程→ A_n

→α_i，C_L，$C_{D,i}$等气动特性



$y = -b/2$

$y = b/2$

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

5. 一般升力分布：

一般升力分布：$\Gamma(\theta)= 2bV_\infty \sum_{n=1}^{N} A_n \sin n\theta$ 求A_n

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} + \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0-y)}$$

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \frac{d\Gamma}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} = 2bV_\infty \sum_{n=1}^{N} nA_n \cos n\theta \frac{d\theta}{dy}$$

关于$\pi/2$对称→仅含奇数项$A_1 A_n$…

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)}\sum_{n=1}^{N} A_n \sin n\theta + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \sum_{n=1}^{N} nA_n \frac{\sin n\theta_0}{\sin\theta_0}$$

n个θ_0位置，列n个方程，联立→A_n

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

5. 一般升力分布：

一般升力分布：$\Gamma(\theta)= 2bV_\infty \sum_{n=1}^{N} A_n \sin n\theta$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2{}_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)dy = A_1\pi\frac{b^2}{S} = \boxed{A_1\pi AR}$$

C_L仅与A_1有关。

$$C_{D,i} = \frac{2}{V_\infty S}\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma(y)\alpha_i(y)dy$$

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy}\right)dy}{(y_0-y)} = \sum_{n=1}^{N} nA_n\frac{\sin n\theta_0}{\sin\theta_0}$$

$$C_{D,i} = \frac{2b^2}{S}\left(\sum_{n=1}^{N} nA^2{}_n\right)\frac{\pi}{2}$$
$$= \pi AR\left(\sum_{n=1}^{N} nA^2{}_n\right)$$
$$= \boxed{\pi ARA^2{}_1}\left[1+\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{A_n}{A_1}\right)^2\right]$$

$$C_{D,i} = \frac{C_L{}^2}{\pi AR}(1+\delta) \quad \delta = \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{A_n}{A_1}\right)^2$$

$\delta \geq 0$诱导阻力修正因子

$$\boxed{C_{D,i} = \frac{C_L{}^2}{\pi eAR}}$$

($e = \frac{1}{1+\delta}$，机翼有效系数，$e \leq 1$; 椭圆$\delta = 0$， $e = 1$)

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

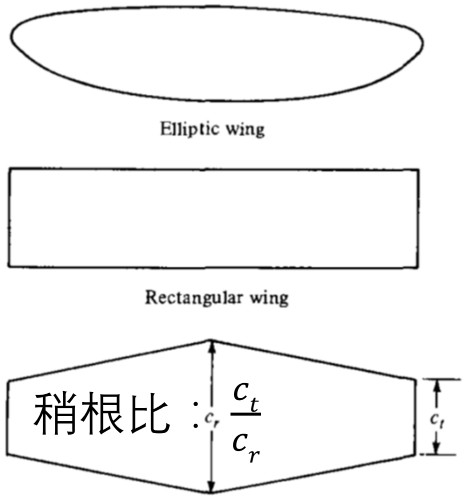
$\boxed{\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}}$ $\boxed{C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}}$

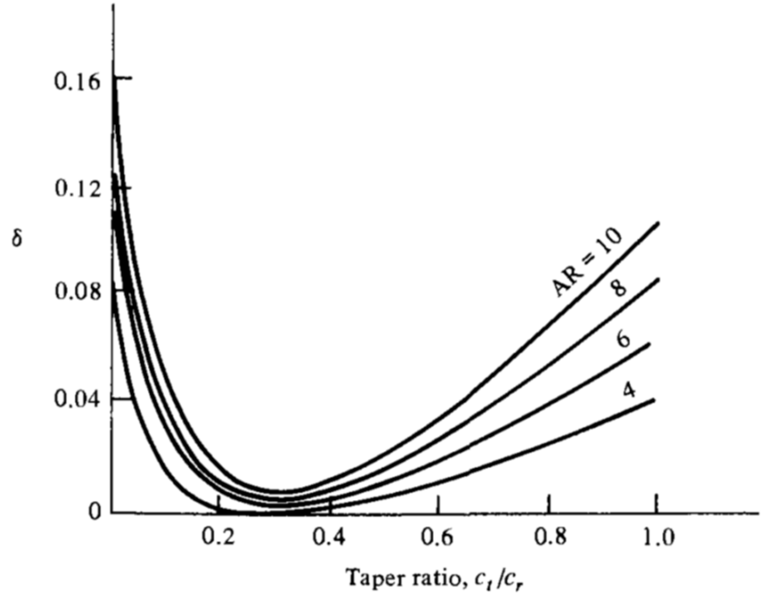
5. 一般升力分布：

一般升力分布：$\Gamma(\theta) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^{N} A_n \sin n\theta$

$\boxed{C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}(1+\delta)}$ $\delta = \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{A_n}{A_1}\right)^2$ $\delta \geq 0$诱导阻力修正因子

同等升力下，椭圆升力分布$C_{D,i}$最小。椭圆机翼有最佳升阻比，但加工复杂。用矩形、梯形机翼代替。





10.4普朗特经典升力线理论(5.4)

6. 展弦比影响：

$\boxed{C_{D,i} = \frac{C_L{}^2}{\pi AR}(1+\delta)}$ $AR = 6\sim22$时， AR对$C_{D,i}$的影响大于δ(δ影响 $< 10\%$)。

$C_{D,i} \propto \frac{1}{AR}$ 为普朗特升力线理论重要贡献！

$$\boxed{C_D = C_d + \frac{C_L{}^2}{\pi eAR}}$$

相同翼型，不同AR：$\begin{cases} C_{D1} = C_d + \frac{C_L{}^2}{\pi eAR_1} \\ C_{D2} = C_d + \frac{C_L{}^2}{\pi eAR_2} \end{cases}$ 若C_L相同→ $C_{D2} = C_{D1} + \frac{C_L{}^2}{\pi e_2}(\frac{1}{AR_1} - \frac{1}{AR_2})$

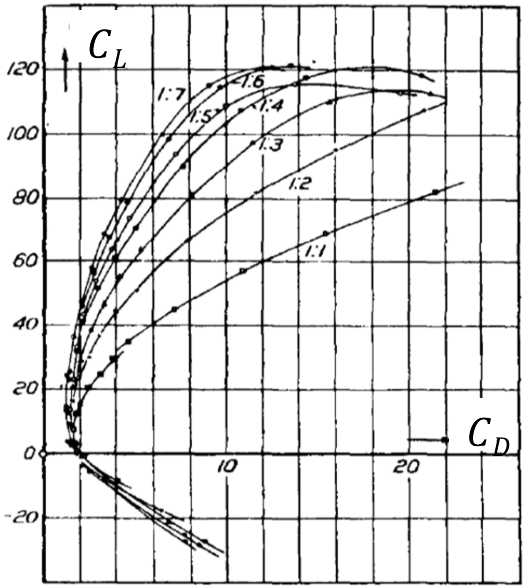
e变化小， C_d变化小

10.4普朗特经典升力线理论(5.4)

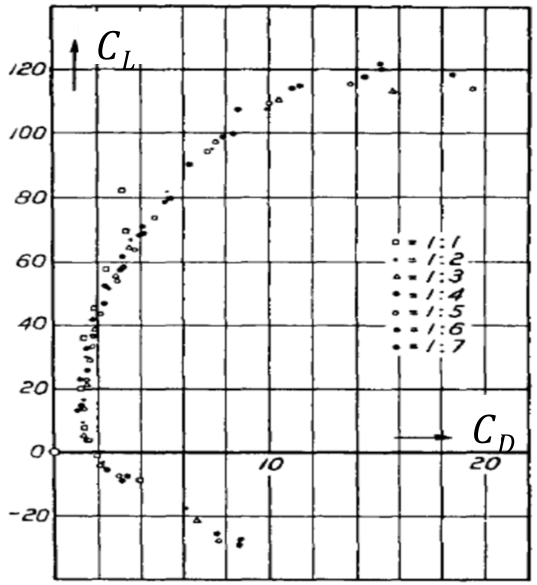
6. 展弦比影响：

相同翼型，不同AR：$\begin{cases} C_{D1} = C_d + \dfrac{{C_L}^2}{\pi e AR_1} \\ C_{D2} = C_d + \dfrac{{C_L}^2}{\pi e AR_2} \end{cases}$ 若C_L相同→ $C_{D2} = C_{D1} + \dfrac{{C_L}^2}{\pi e_2}\left(\dfrac{1}{AR_1} - \dfrac{1}{AR_2}\right)$

e变化小， C_d变化小

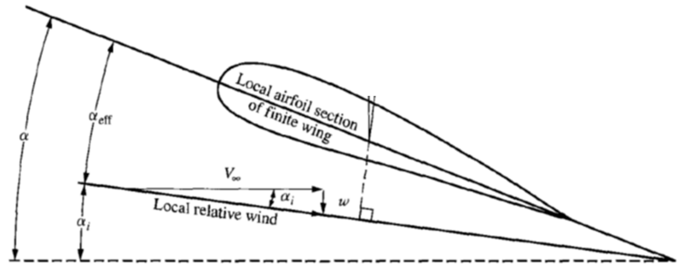


矩形机翼，普朗特1921



不同AR换算到$AR = 5$

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)



7. 升力线斜率：

产生相同升力，机翼α_1 > 翼型α_2。

翼剖面$a_0, \alpha_{L=0}$：

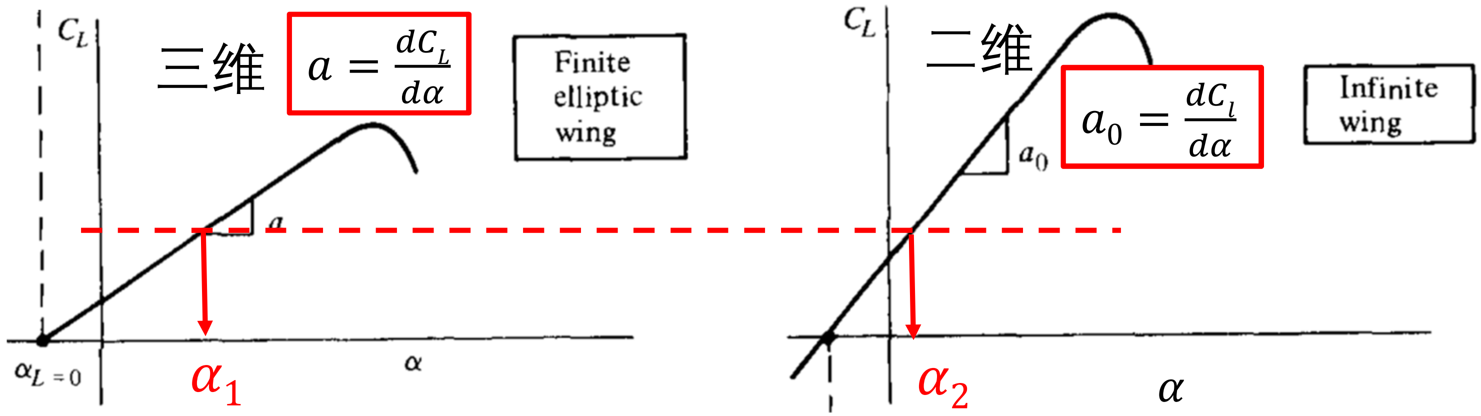
椭圆升力分布：$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}$

三维机翼：$\alpha_{eff} = \alpha_1 - \alpha_i$　　二维翼型：α_2

$C_L = a_0(\alpha_1 - \alpha_i - \alpha_{L=0})$　$C_l = a_0(\alpha_2 - \alpha_{L=0})$

$\alpha_1 - \alpha_i = \alpha_2$，$\alpha_1 > \alpha_2$

$\boxed{a < a_0\text{有限翼展机翼升力线斜率减小！}}$



10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

7. 升力线斜率： $\boxed{\alpha_{L=0}\text{不变}}$ ？？

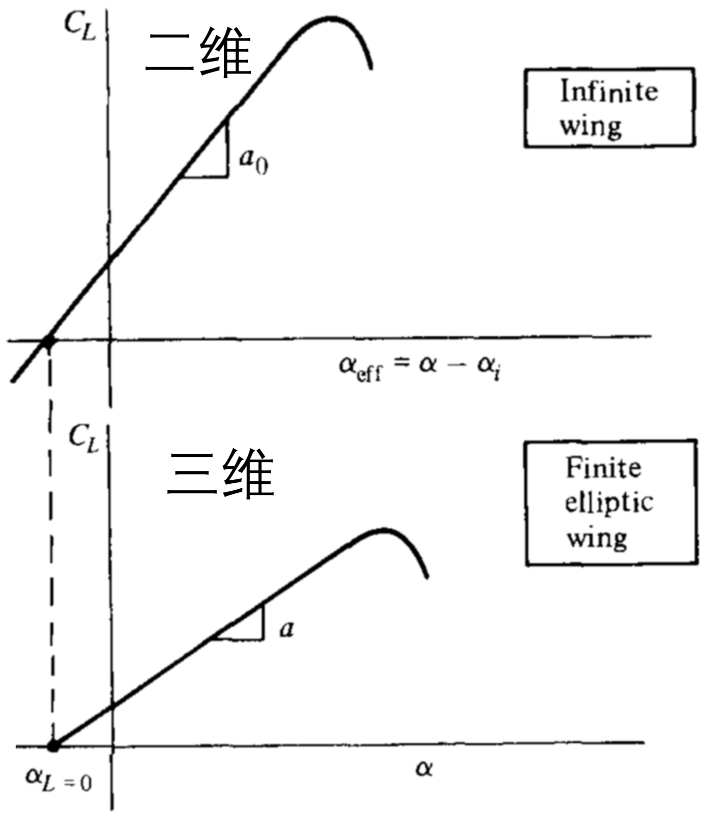
$$C_L = a_0(\alpha - \alpha_i - \alpha_{L=0}) \qquad C_L = a(\alpha - \alpha_{L=0})$$

椭圆升力分布：$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi AR}$

$$C_L = a_0\left(\alpha - \frac{C_L}{\pi AR} - \alpha_{L=0}\right)$$

$$C_L\left(1 + \frac{a_0}{\pi AR}\right) = a_0(\alpha - \alpha_{L=0})$$

$$C_L = \frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}}(\alpha - \alpha_{L=0})$$



$\boxed{\text{椭圆升力分布：} a = \frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}}}$ 椭圆升力分布a最大。

$\boxed{\begin{array}{l} C_l = 0\text{时} w = 0 \\ \alpha_i = C_{D,i} = 0 \end{array}}$

$\boxed{\text{一般升力分布：} a = \frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)}}$ $\tau > 0, \tau \approx 0.05 \sim 0.25$

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

7. 升力线斜率：

$$\boxed{C_L = a(\alpha - \alpha_{L=0}) \quad a = \frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)}} \qquad \boxed{C_{D,i} = \frac{C_L^{\ 2}}{\pi AR}(1+\delta)}$$ 机翼气动特性计算！

$$\alpha - \alpha_{L=0} = \frac{C_L}{a_0} + \boxed{\frac{C_L}{\pi AR}(1+\tau)}$$ 平均下洗角

三维机翼气动特性从二维翼型修正得到， $a_0 \rightarrow a \rightarrow C_L \rightarrow C_{D,i}$

τ、δ为非椭圆机翼对椭圆机翼气动力修正系数

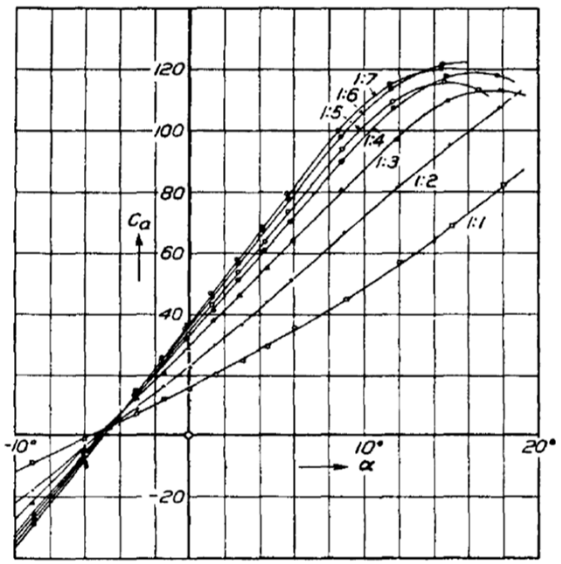
平面形状	稍根比	τ	δ
椭圆形	/	0	0
矩形	1	0.17	0.049
梯形	3/4	0.10	0.026
梯形	1/4	0.01	0.01
菱形(三角形)	0	0.17	0.141

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

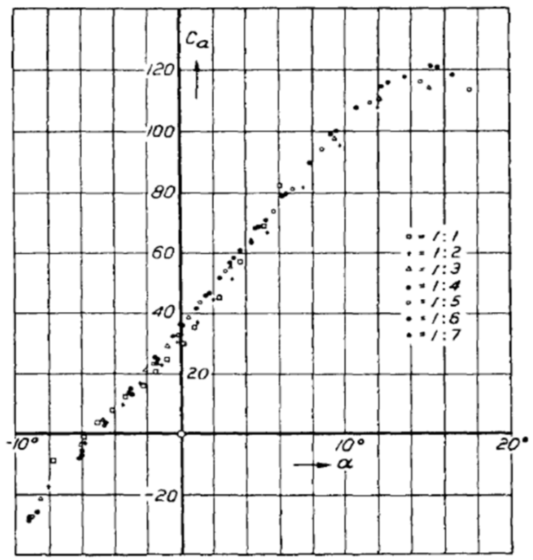
7. 升力线斜率：

相同翼型，不同AR：$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_{L=0} = \dfrac{C_L}{a_0} + \dfrac{C_L}{\pi AR_1}(1+\tau) \\ \alpha_2 - \alpha_{L=0} = \dfrac{C_L}{a_0} + \dfrac{C_L}{\pi AR_2}(1+\tau) \end{cases}$

C_L相同→ $\alpha_2 - \alpha_1 = \dfrac{C_L}{\pi}(1+\tau)\left(\dfrac{1}{AR_2} - \dfrac{1}{AR_1}\right)$



矩形机翼，普朗特1921



不同AR换算到$AR = 5$

10.4普朗特经典升力线理论(5.4)

例1：AR=8，$\frac{c_t}{c_r}$=0.8，薄对称翼($\tau = \delta = 0.055$)，求α =5°时C_L，$C_{D,i}$。

$$C_L = a(\alpha - \alpha_{L=0})$$

$$a = \frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)}$$

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}(1+\delta)$$

解：对称：$\alpha_{L=0}$ =0　薄翼：a_0 =2π

$$C_L = a(\alpha - \alpha_{L=0})$$

$$a = \frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)} = \frac{2\pi}{1+\frac{2\pi}{8\pi}(1+0.055)} = 4.97rad^{-1}$$

$\boxed{\text{公式中}a_0\text{单位用}1/rad\text{！}}$

$$C_L = a(\alpha - \alpha_{L=0}) = 4.97 \times \frac{5}{180}\pi = 0.4335$$

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}(1+\delta) = \frac{0.4335^2}{8\pi}(1+0.055) = 0.00789$$

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

例2：翼型$\alpha_{L=0}=-2°$，a_0=0.1$^1/_°$，机翼AR =7.96，$\tau=0.04$， C_L=0.21，求α。

$$C_L = a(\alpha - \alpha_{L=0})$$

$$a = \frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)}$$

解：$a = \frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)} = \frac{5.73}{1+\frac{5.73}{7.96\pi}(1+0.04)} = 4.626rad^{-1}$

$= 4.626\times\frac{1}{180/\pi}$ =0.0808$^1/_°$

公式中a_0单位用$1/rad$！

$$a_0=0.1\,{}^1/_° = 0.1\times\frac{1}{\pi/180} = 5.73rad^{-1}$$

$$C_L = a(\alpha - \alpha_{L=0}) = 0.0808(\alpha+2°)=0.21$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 0.6°$$

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

例3：$AR=6$，$\tau=\delta=0.055$，$\alpha_{L=0}=-2°$，$\alpha=3.4°$，$C_{D,i}=0.01$，求同α下，$AR=10$，$\delta=0.105$时$C_{D,i}$。

解：$C_{D,i}=\frac{C_L^{\ 2}}{\pi AR}(1+\delta)$ $C_L=?$ $C_L=a(\alpha-\alpha_{L=0})$ $a=\frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)}$

$C_{D,i}\rightarrow C_L\rightarrow a\rightarrow a_0$; $AR\rightarrow a\rightarrow C_L\rightarrow C_{D,i}$

$AR=6$时: $C_{D,i}=\frac{C_L^{\ 2}}{\pi AR}(1+\delta)=0.01 \Rightarrow \frac{C_L^{\ 2}}{6\pi}(1+0.055)=0.01\rightarrow C_L=0.423$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{C_L}{(\alpha-\alpha_{L=0})}=\frac{0.423}{3.4+2}=0.078\ {}^1/_{\circ}=4.485rad^{-1} \\ a &= \frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_0=5.989rad^{-1}$$

10.4普朗特经典升力线理论 (5.4)

例3：$AR=6$，$\tau=\delta=0.055$，$\alpha_{L=0}=-2°$，$\alpha=3.4°$，$C_{D,i}=0.01$，
求同α下，$AR=10$，$\delta=0.105$时$C_{D,i}$。

解：$AR=10$时: $a=\dfrac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)}=\dfrac{5.989}{1+\frac{5.989}{10\pi}(1+0.105)}=4.95rad^{-1}=0.086^1/$。

$$C_L=a(\alpha-\alpha_{L=0})=0.086(3.4+2)=0.464$$

$$C_{D,i}=\frac{C_L{}^2}{\pi AR}(1+\delta)=\frac{0.464^{\ 2}}{10\pi}(1+0.105)=0.0076$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_L&=a(\alpha-\alpha_{L=0})\\ a&=\frac{a_0}{1+\frac{a_0}{\pi AR}(1+\tau)}\\ C_{D,i}&=\frac{C_L{}^2}{\pi AR}(1+\delta)\end{aligned}}$$

10.4普朗特经典升力线理论

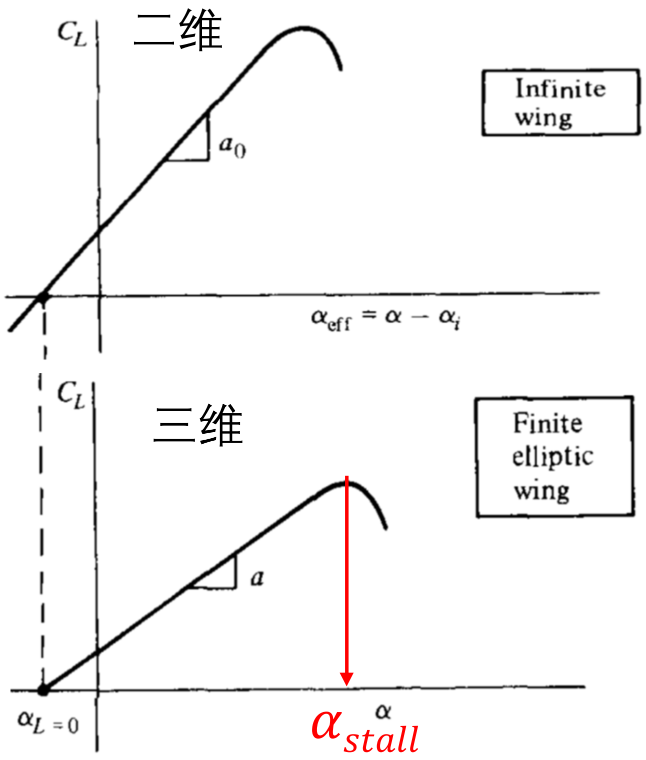
8. 平直机翼失速特性：

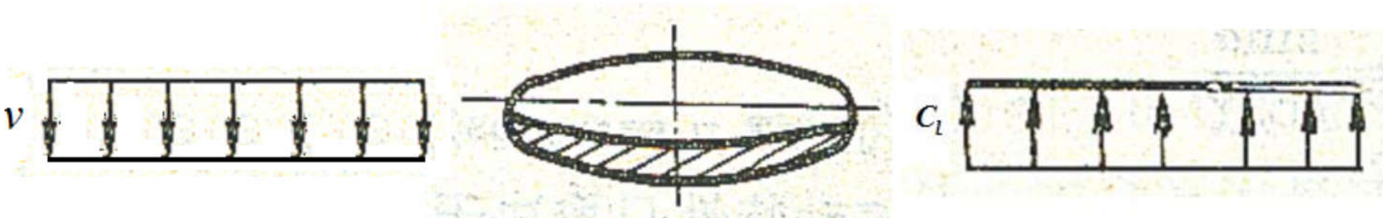
机翼：$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$

$\boxed{\alpha_{stall机翼} > \alpha_{stall翼型} \quad \alpha_i\uparrow \rightarrow \alpha_{stall}\uparrow}$

$\alpha_i(w)$越小越先失速。

椭圆形的机翼: 诱导下洗速度沿翼展是不变的，因而沿展向各翼剖面的有效迎角也不变。所以，随着α的增大，整个展向各翼剖面同时出现分离，同时达到翼型的最大升力系数， 同时发生失速，失速特性良好。



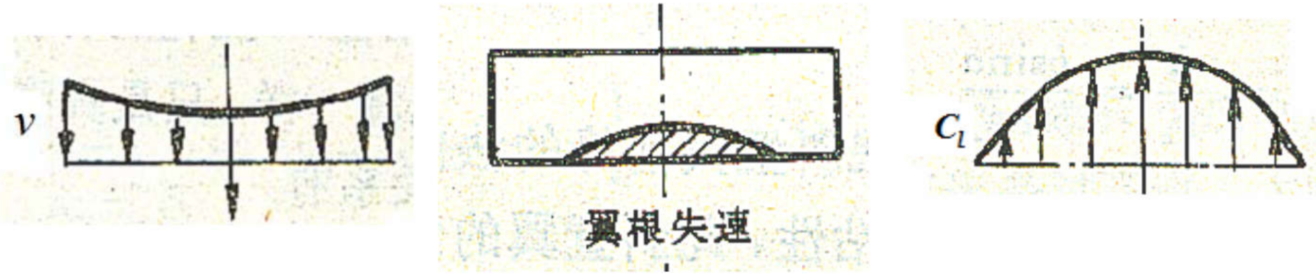


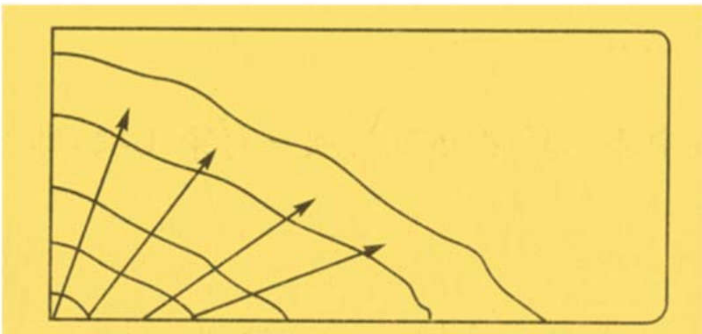
一起失速

10.4普朗特经典升力线理论

8. 平直机翼失速特性： 机翼：$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$

矩形机翼：诱导下洗速度从翼根向翼尖增大，翼根翼剖面的有效迎角将比翼尖大，翼根剖面升力系数也比翼尖大。因此，分离首先发生在翼根部分，然后分离区逐渐向翼尖扩展，失速是渐进的。



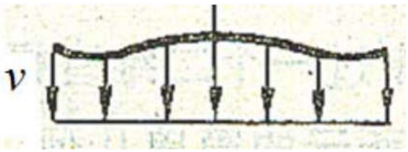


(a) 矩形机翼， λ=1.0

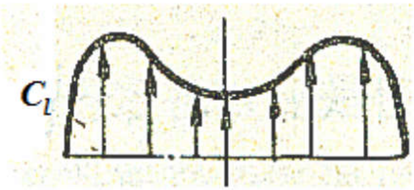
10.4普朗特经典升力线理论

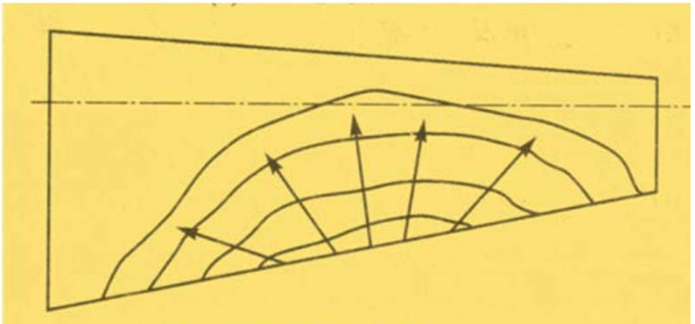
8. 平直机翼失速特性： 机翼：$\alpha_{eff}=\alpha-\alpha_i$

梯形直机翼：翼根下洗速度最大，最小下洗速度位于翼尖附近，随着跟梢比的增大，最小下洗速度位置越接近翼尖。所以分离首先发生在翼尖附近，不仅使机翼的最大升力系数下降，而且使副翼等操纵面效率大为降低。



翼尖失速



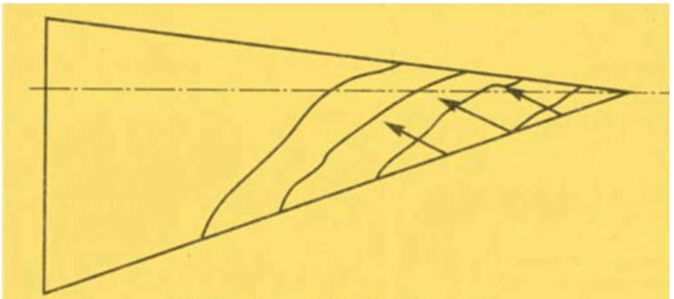


(b) 中等斜削机翼，$\lambda=0.4$

10.4普朗特经典升力线理论

8. 平直机翼失速特性：　机翼：$\alpha_{eff}=\alpha-\alpha_i$

三角翼：翼尖部分有效迎角比翼根附近大很多，翼尖附近有很强的失速趋势，所以在设计三角机翼时要采取措施增大翼尖附近的失速迎角，以避免翼尖失速和副翼失效。



(c) 翼尖为一点的机翼，$\lambda=0.0$

图 6－13　一些典型的失速流谱

10.4普朗特经典升力线理论

9. 升力线理论适用范围：

升力线理论贡献：机翼平面参数对气动特性影响！

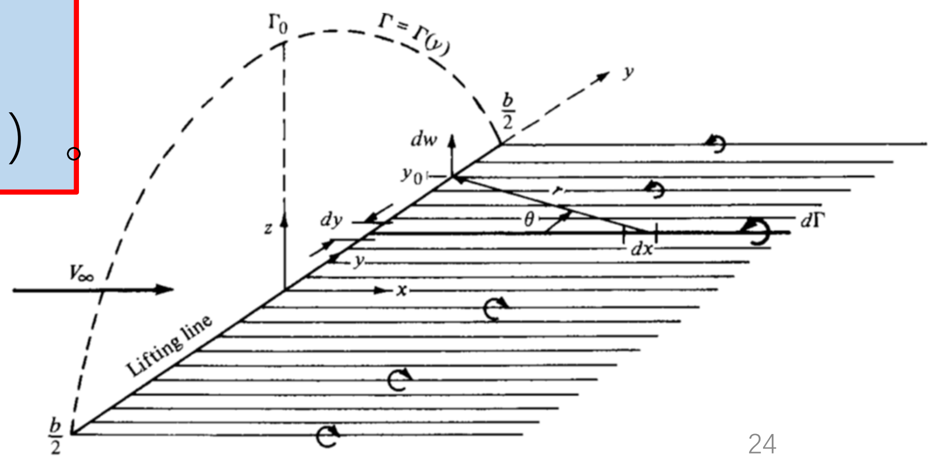
机翼平面形状+剖面气动数据→$\Gamma(y)$，α_i，C_L，$C_{D,i}$等气动特性

升力线理论适用范围：

（1）小迎角（$\alpha < 10°$),无流动分离；

（2）大展弦比（AR≥ 5）；

（3）平直机翼，后掠角不能太大（$\chi \leq 20°$）。



10.5升力面理论、涡格法

1. 升力面理论：

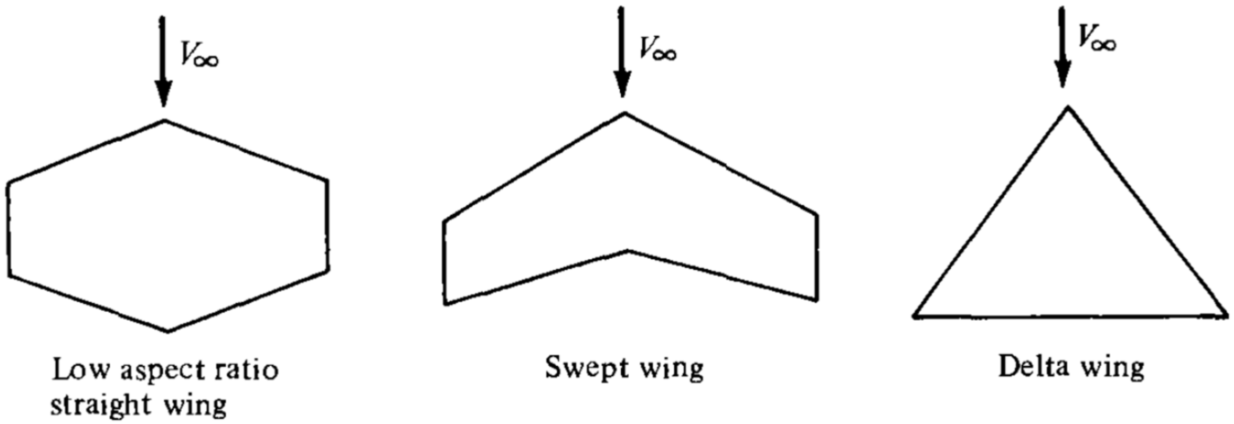
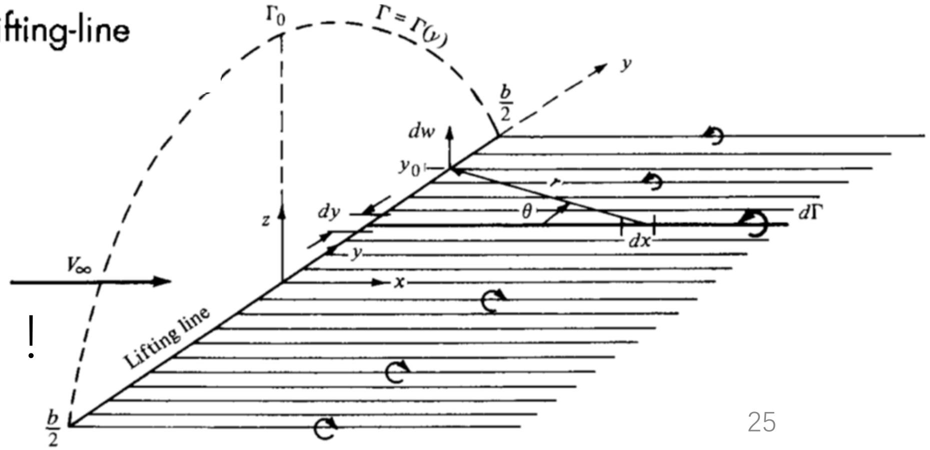


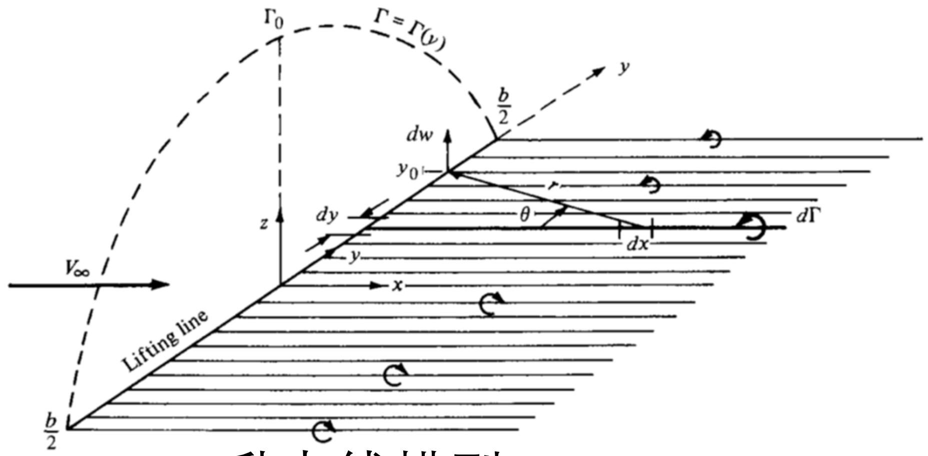
Figure 5.30 Types of wing planforms for which classical lifting-line theory is not appropriate.



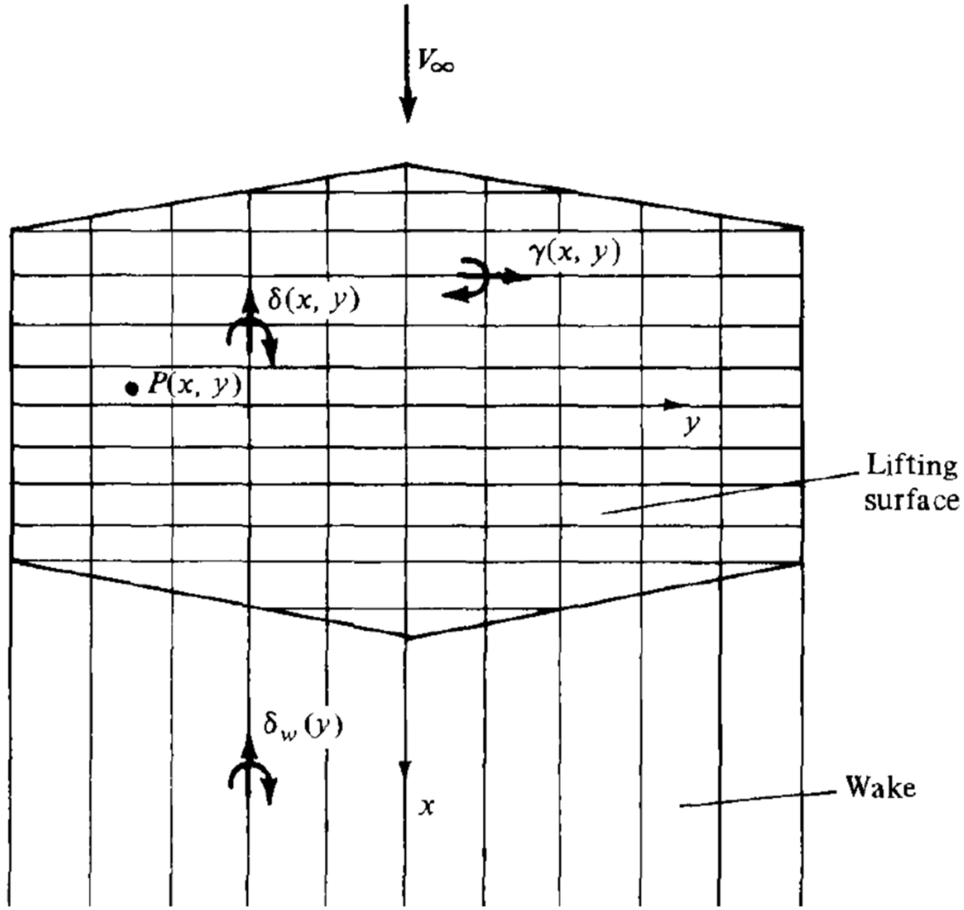
升力线不能模拟机翼气动特性！

10.5升力面理论、涡格法

1. 升力面理论：



升力线模型



升力面模型

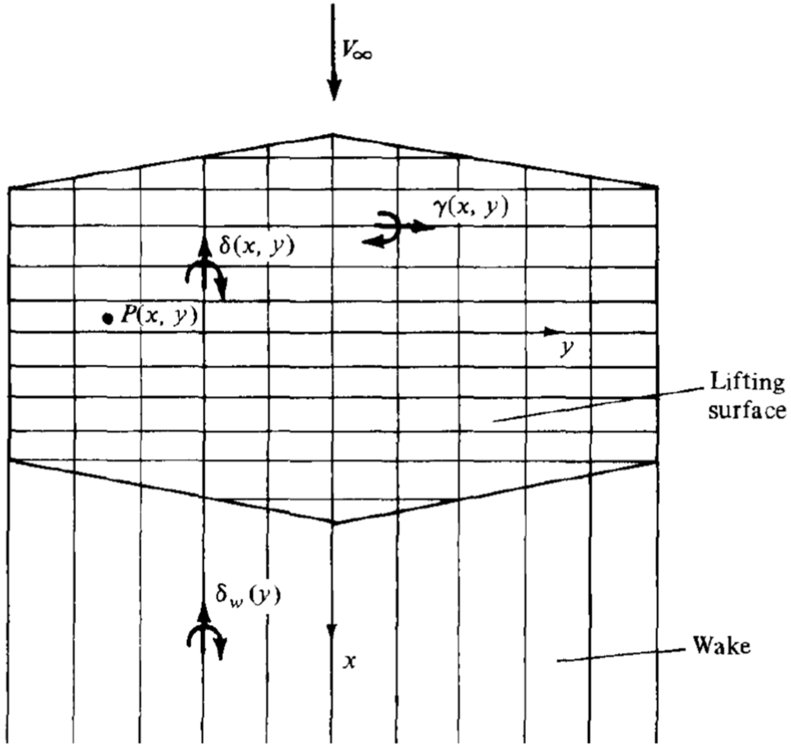
对小展弦比、后掠、三角形机翼，
用布置在整个翼面上的附着涡面+尾涡面
模拟机翼扰流→升力面理论！

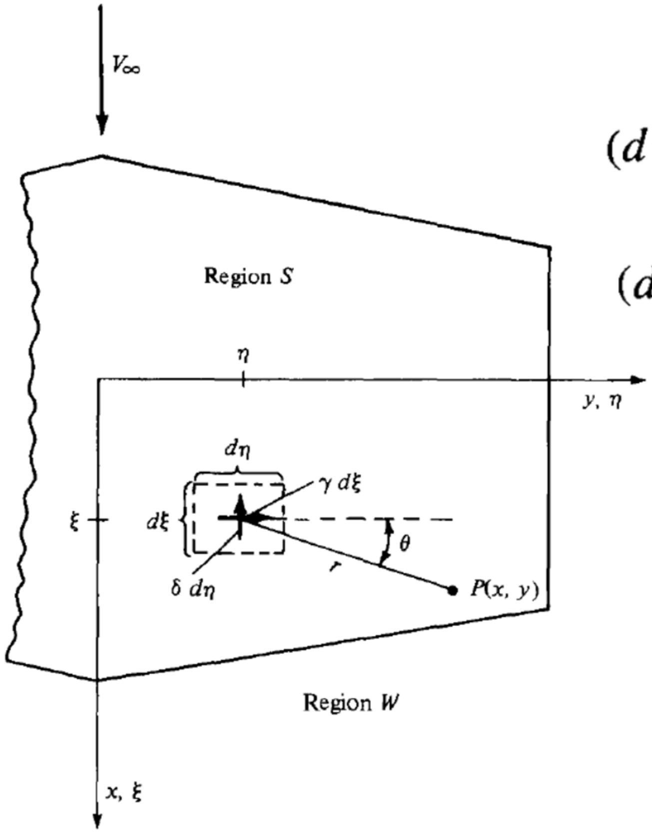
展向附着涡强度$\gamma(x,y)$
弦向涡强度$\delta(x,y)$
尾涡强度$\delta_w(y)$

10.5升力面理论、涡格法

1. 升力面理论：

机翼表面为流面， $w(x,y) = V_{\infty,n}(x,y) + w'(x,y) = 0$





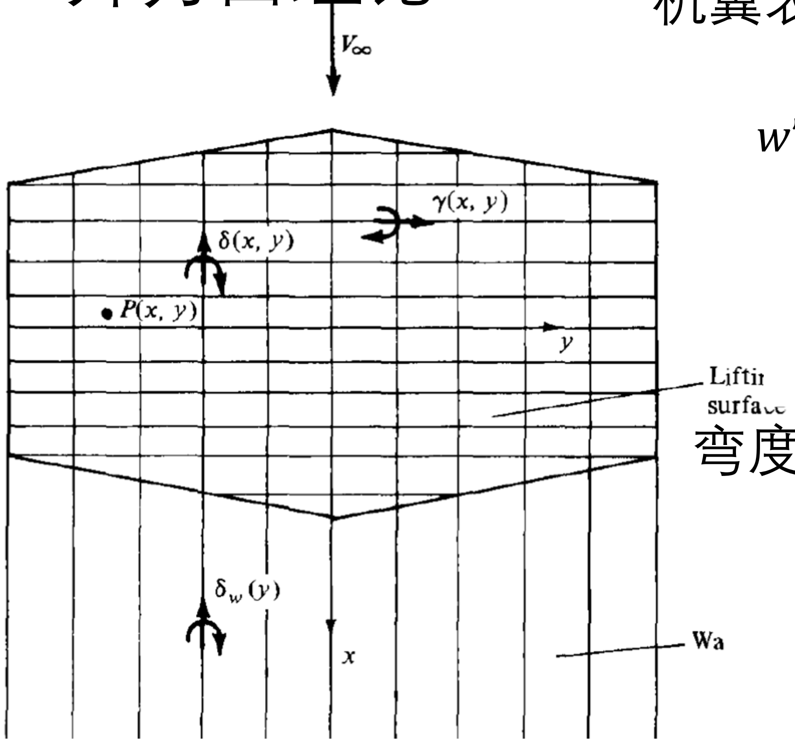
$$(dw)_\gamma = -\frac{\gamma}{4\pi}\frac{(x-\xi)d\xi\, d\eta}{r^3}$$

$$(dw)_\delta = -\frac{\delta}{4\pi}\frac{(y-\eta)d\xi\, d\eta}{r^3}$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

10.5升力面理论、涡格法

1. 升力面理论：



机翼表面为流面， $w(x, y) = V_{\infty,n}(x, y) + w'(x, y) = 0$

$$w'(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{(x-\xi)\gamma(\xi,\eta) + (y-\eta)\delta(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi\, d\eta - \frac{1}{4\pi}\iint_W \frac{(y-\eta)\delta_w(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi\, d\eta$$

弯度、厚度小，小迎角下： $V_{\infty,n}(x, y) = V_\infty \frac{\partial z}{\partial x}$

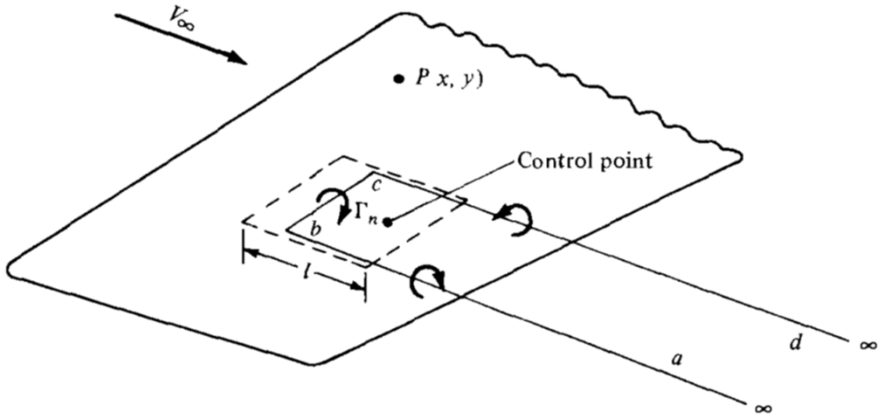
$$V_\infty \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{(x-\xi)\gamma(\xi,\eta) + (y-\eta)\delta(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi\, d\eta - \frac{1}{4\pi}\iint_W \frac{(y-\eta)\delta_w(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi\, d\eta = 0$$

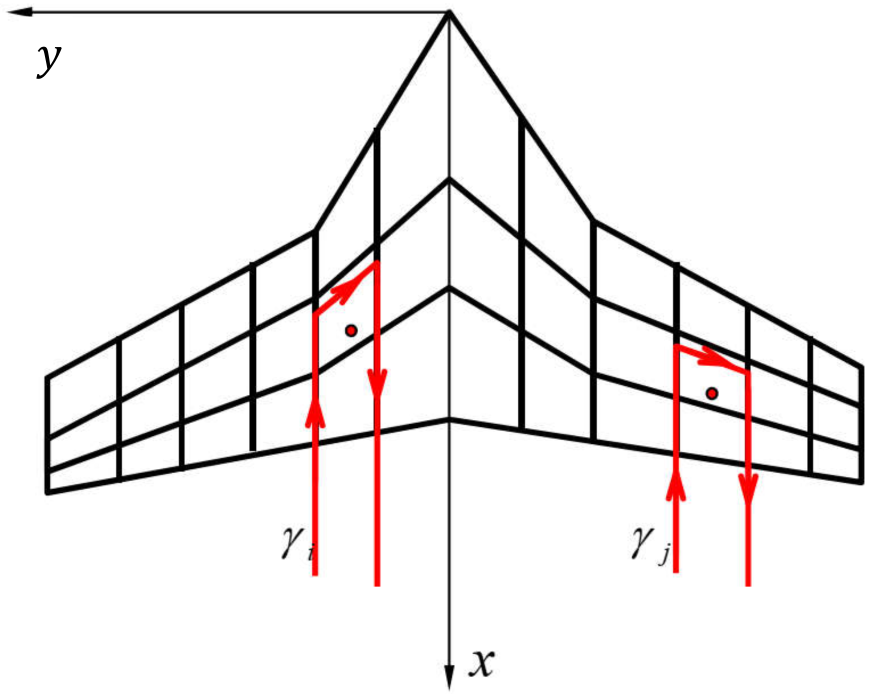
升力面基本方程！

10.5升力面理论、涡格法

2. 涡格法：

弦长l的区间内布置强度为Γ_n的马蹄涡$abcd$，
附着涡位于$l/4$，控制点位于$3l/4$处。

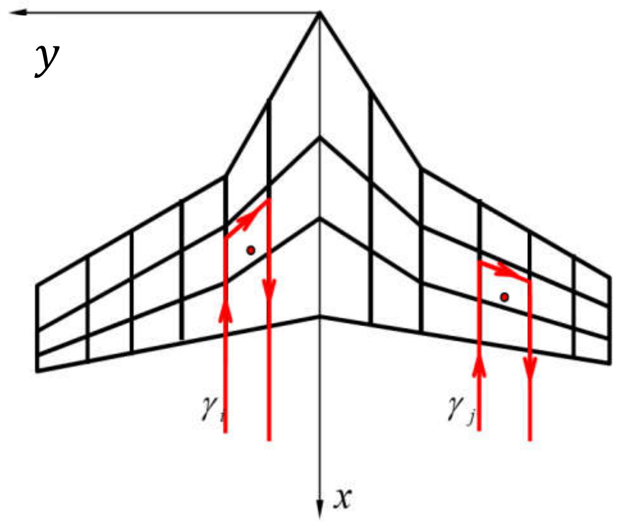




机翼在xoy投影面沿展向分成若干列，
沿等百分比弦线分成若干行；
每个网格布置强度恒定的马蹄涡——涡格！

每个涡格控制点上法向速度$w=0$！

10.5升力面理论、涡格法



2. 涡格法：附着涡位于$l/4$，控制点位于$3l/4$处？？

对平板翼型，若$c/4$处放置Γ，

则$3c/4$处满足无穿透边界条件（$w=0$）！

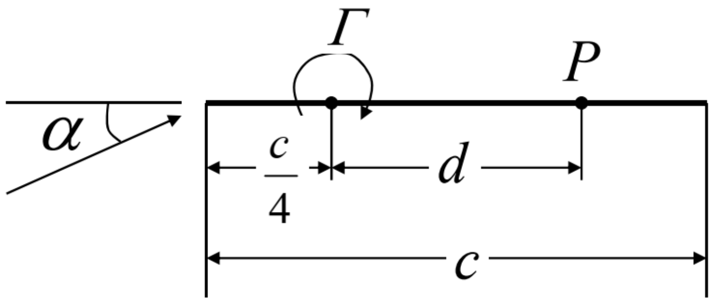
$$c/4\text{处}：\Gamma = \pi c V_\infty a \qquad (\rho V_\infty \Gamma = 2\pi a 0.5 \rho V^2{}_\infty c)$$

$$\text{距离}d\text{处}：w' = \frac{\Gamma}{2\pi d} = \frac{cV_\infty a}{2d}$$

$$w = V_\infty sin\alpha - w'$$

$$\approx V_\infty \alpha - \frac{cV_\infty a}{2d}$$

$$w = 0 \quad \Rightarrow \quad d = c/2$$

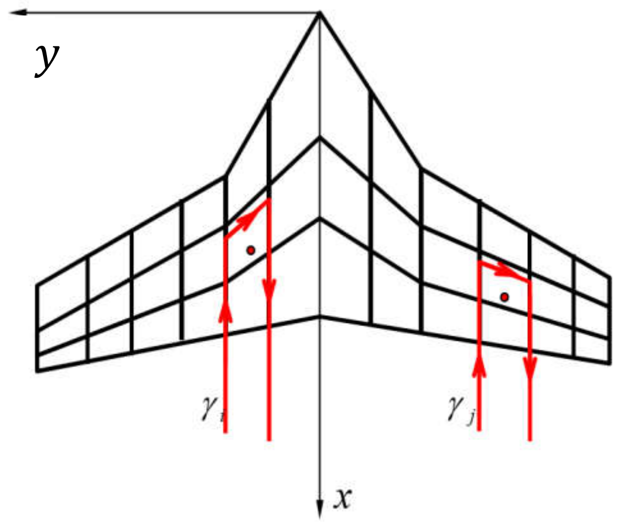


10.5升力面理论、涡格法

2. 涡格法：

步骤：

（1）划分面元，布马蹄涡，选控制点（左右各N个）；



（2）求j个面元上马蹄涡对i个控制点诱导速度；

$$w'_{i,j} = C_{i,j}\Gamma_j$$

$C_{i,j}$为影响系数，取决于i，j点的几何位置。

（3）求2N个面元对i个控制点总诱导速度：

$$w'_i = \sum_{j=1}^{2N} C_{i,j}\Gamma_j$$

（4）控制点法向速度$w = 0$，建N个方程$w_i = V_{ni} + w'_i = 0;$

薄翼小迎角下$V_{ni} = V_\infty(\alpha - \frac{dz}{dx}_i)$；

（5）求解方程组得Γ_j；

（6）求机翼气动性能。

作业：

复习笔记！

空气动力学书5.1，5.3，5.4，5.5