Taylor 多项式与 Taylor 公式

Taylor 多项式定义

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

① 是以 x 为自变量的 n 次多项式函数.

② 参数 f, x_0, n 决定一个 Taylor 多项式.

$\uparrow$ 对于谁 $\uparrow$ 在哪 $\uparrow$ 几阶展开.

通常 x_0 取 0 时 $f^{(n)}(x_0)$ 方便计算. x_0 默认取 0.

Taylor 公式（Peano 余项与 Lagrange 余项两个版本）.

Peano 余项版：

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Lagrange 余项版：

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \iff \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

*. Peano 余项版（局部）Taylor 公式唯一性定理.

若 $B_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n$.

满足 $f(x) = B_n(x) + o((x-x_0)^n)$. $\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-B_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

则 $B_n(x) = T_n(x)$

即 $T_n(x)$ 与 $B_n(x)$ 对应系数相等. $A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

* 证明逻辑.

Rolle 中值定理 $\Rightarrow$ Lagrange $\Rightarrow$ Cauchy 中值定理 $\Rightarrow$ 洛必达 L'Hospital 法则

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

Taylor 公式 Lagrange 余项版 $\Rightarrow$ Peano 余项版 + 唯一性定理