Area of a d-Dimensional Sphere. (Hypersphere)

$A_d(r)$：d维球体(半径为r)的表面积，

$A_d(r) = \underbrace{A_d(1)}_{}\cdot r^{d-1}$. 量纲分析之结果

☆ 关键在于求出这个由球体形状决定的无量纲量.

(一) $$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^d = A_d(1)\cdot\left(\int_0^{+\infty} r^{d-1}e^{-r^2}dr\right).$$

先假定上式成立.

左：$\left[G(0)\times 2\right]^d = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times 2\right]^d = \pi^{\frac{d}{2}}$.

右：$G(d-1) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}-1\right)!$

可以求出 $A_d(1) = \dfrac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$

① 高斯积分与Γ函数的转换关系，

$$\begin{cases} \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx \xrightarrow[dx=2zdz]{\text{令} x=z^2} 2\int_0^{+\infty} z^{2n+1}e^{-z^2}dz = 2G(2n+1) \\ G(d-1) = \int_0^{+\infty} z^{d-1}e^{-z^2}dz \xrightarrow[dx=2zdz]{\text{令} x=z^2} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{\frac{d-2}{2}}e^{-x}dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{cases}$$

② $$\boxed{A_d(r) = A_d(1)\cdot r^{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} r^{d-1}.}$$

(二) $$\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^d}_{} = A_d(1)\left(\int_0^{+\infty} r^{d-1}e^{-r^2}dr\right)$$ 为什么成立.

积分的乘积 ⟶ 累次积分 ⟶ 重积分 ⟶ 极坐标下重积分

被积函数 $f(x_1,\cdots,x_d) = e^{-r^2}$ 具有球形对称性 只与r相关.

含有体积元素概念 (表面积×厚度)

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^d = \int_\Omega e^{-(x_1^2+\cdots+x_d^2)}dV = \int_\Omega e^{-r^2}dV$$

$$\Omega = \underbrace{R\times\cdots\times R}_{d\text{个}R\text{相乘}} \quad ; \quad f(x_1,\cdots,x_d) = e^{-r^2} \quad (r^2 = x_1^2+\cdots+x_d^2)$$

$$\int_\Omega e^{-r^2}dV = \int_{\Omega_{r=0}} e^{-r^2}dV + \cdots + \int_{\Omega_{r\to+\infty}} e^{-r^2}dV$$

将Ω分割为不同半径厚度为dr的球壳

在Ω_r（给定半径为r的球壳上）

$$\int_{\Omega_r} f(x_1,\cdots,x_d)\,dV = \int_{\Omega_r} e^{-r^2}dV = e^{-r^2}\int_{\Omega_r}dV = e^{-r^2}\cdot A_d(1)\cdot r^{d-1}dr$$

$$\underbrace{\int_{\Omega_r}dV}_{\text{球壳}\Omega_r\text{体积}} = \underbrace{A_d(r)}_{\text{表面积}}\underbrace{dr}_{\text{厚度}} = A_d(1)\,r^{d-1}dr$$

$\therefore$ 在 $\Omega = \Omega_{r=0}+\cdots+\Omega_{r\to+\infty}$ 上

$$\int_\Omega f(x_1,\cdots,x_d)\,dV = \int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-r^2}A_d(1)\,r^{d-1}dr = A_d(1)\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{d-1}dr$$

所以有 $$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^d = A_d(1)\int_0^{+\infty} r^{d-1}\cdot e^{-r^2}dr$$

d维区域中 $\boxed{\text{重积分}}$ dV 体积元素 → 球壳

f具有球形对称性

$f = e^{-r^2}$ 高斯函数

→ 累次积分 → 积分乘积（幂次）

↑ s.t.

$$\underbrace{e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2)} = e^{-x_1^2}\cdot e^{-x_2^2}\cdots e^{-x_d^2}}_{\text{高斯函数}}$$