常微分方程（ODE）的分类

Bright Moon

2024 年 8 月 23 日

1 常微分方程（ODE）的分类框架

1.1 阶数与线性的辨析

$$F(x, y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}) = 0$$

1.1.1 阶数——导数的阶数

阶数取决于导数 $y^{(n)}$ 的最高阶数 n。上述微分方程为 n **阶**常微分方程。

1.1.2 线性——导数的幂次

如果上述微分方程可以写成关于各阶导数 $(y^{(i)})^{k_i}$ 的多项式形式：

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y^{(0)} = f(x)$$

所涉及的各阶导数 $(y^{(i)})^{k_i}$ 在方程中的幂次 k_i 不超过一次，则是**线性**常微分方程。
进一步，如果 $f(x) = 0$，则称线性方程是**齐次**的，否则为**非齐次**的。
如果各阶导数前的系数 $a_i(x)$ 不依赖于 x，是常数 a_i，则称线性方程是**常系数**。

1.2 常微分方程与常微分方程组的辨析

1.2.1 "常" / "偏"——函数自变量的个数

一个常微分方程的未知函数是一个一元函数 $f(x)$。
一个偏微分方程的未知函数是一个多元函数 $f(x_1, ..., x_n)$。

1.2.2 "组"——函数的个数

常微分方程**组**的未知函数是多个一元函数（一个一元向量函数）

$$v_1(t), ..., v_n(t)$$

$$\text{或} \quad \vec{v}(t) = (v_1(t), ..., v_n(t))$$

1.3 可以用初等积分法求解的常微分方程（ODE）的分类

1. 一阶

   (a) 线性大类

i. 线性齐次

$$y' + P(x)y = 0$$

i. 线性非齐次

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

ii. 伯努利方程（仍然是一阶的，但不是线性的）（可以化为线性方程）

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

(b) 伯努利方程（仍然是一阶的，但不是线性的）（可以化为线性方程）

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

(c) 变量分离大类（包含线性与非线性）

i. 纯粹变量分离型

$$y' = f(x)g(y)$$

ii. 复合一次函数型

$$y' = f(ax + by + c)$$

iii. 齐次函数型

$$y' = f(x, y) = h(\frac{y}{x})$$

iv. 一次分式型

$$y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2})$$

(d) 可以降为一阶的大类（包含线性与非线性）

i. 二阶缺项

A. 不显含 y

$$F(x, y', y'')$$

B. 不显含 x

$$F(y, y', y'')$$

(e) 全微分方程（恰当方程）大类

i. 纯粹的全微分方程

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

$$\text{或：}\quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$\text{要求：}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ii. 乘积分因子后可化全微分的方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$$

$$\text{要求：}\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

2. 二阶

(a) 常系数线性方程

i. 齐次（特征根法求通解）

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

- 相异一重实根

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

- 二重实根

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

- 一重共轭复根

$$\lambda = \alpha \pm \beta i$$

ii. 非齐次（可以待定系数的类型）（待定系数求特解）

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

A. 多项式

$$f(x) = P_n(x)$$

- 0 不是特征根
- 0 是单根
- 0 是重根

B. 指数函数

$$f(x) = ae^{\alpha x}$$

- α 不是特征根
- α 是单根
- α 是重根

C. 三角函数

$$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$$

- $\pm\beta i$ 不是特征根
- $\pm\beta i$ 是特征根

D. 多项式乘指数函数

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$$

- α 不是特征根
- α 是单根
- α 是重根

E. 多项式乘指数函数乘三角函数

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$$

- $\alpha \pm \beta i$ 不是特征根
- $\alpha \pm \beta i$ 是特征根

iii. 非齐次（不可以待定系数求特解的类型）（常数变易法直接求通解）

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

iv. 欧拉方程（仍然是 n 阶线性的，但不是常系数的）（可以化为常系数）

$$a_0x^2y^{(2)} + a_1x^1y^{(1)} + a_3x^0y^{(0)} = f(x)$$

(b) 欧拉方程（仍然是 n 阶线性的，但不是常系数的）（可以化为常系数）

$$a_0x^2y^{(2)} + a_1x^1y^{(1)} + a_3x^0y^{(0)} = f(x)$$

3. 高阶

(a) 常系数线性方程

i. 齐次（特征根法求通解）

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_ny^{(0)} = 0$$

- 一重实根
- k 重实根 $(k > 1)$
- 一重共轭复根
- m 重共轭复根 $(m > 1)$

ii. 非齐次

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_ny^{(0)} = f(x)$$

iii. 欧拉方程（仍然是 n 阶线性的，但不是常系数的）（可以化为常系数）

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_nx^0y^{(0)} = f(x)$$

(b) 欧拉方程（仍然是 n 阶线性的，但不是常系数的）（可以化为常系数）

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_nx^0y^{(0)} = f(x)$$

1.4 一阶线性常系数常微分方程组

1. 齐次

$$\vec{v}(t) = A\vec{r}(t)$$

其中A为常数系数构成的矩阵

2. 非齐次

$$\vec{v}(t) = A\vec{r}(t) + \vec{\beta}(t)$$

其中A为常数系数构成的矩阵