正项级数收敛的判据

Bright Moon

August 23, 2024

1　正项级数判别法的总体框架

对于正项无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n = f(n)$$

1. 定义判别
   (a) 纯粹的定义判别：**部分和**存在极限
   $$\lim_{n\to\infty} S_n = l$$
   (b) 从离散形式推广到连续形式（无穷积分判别法）：无穷级数对应的无穷积分收敛，即**定积分**存在极限
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{n} f(x)dx = l$$
   这种方法的优势在于，有时**原函数**（连续形式）比**求和公式**（离散形式）更好找。
2. 比较判别
   (a) 和几何级数的比较
      i. 达朗贝尔判别法（D’ Alembert ）
      ii. 柯西判别法（Cauchy ）
   (b) 和 p 级数的比较
      i. 拉比判别法（Raabe ）
   (c) 和其它级数的比较
      i.（完全可以自由创造的）

2　比较判别法

2.1　常用的两个基准

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

2.1.1 几何级数

$$u_n = aq^n \begin{cases} q < 1 : \text{级数收敛} \\ q > 1 : \text{级数发散} \end{cases}$$

2.1.2 p 级数

$$u_n = \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1 : \text{级数收敛} \\ p < 1 : \text{级数发散} \end{cases}$$

2.2 比较判别法的逐次推广

这是一个**判别对象**逐渐缩小的过程，使得操作起来越来越简便。

2.2.1 原始版本

$$u_n \leq v_n$$

条件：对于所有的 $n = 1, 2, 3, ...$ 均成立。

2.2.2 仅关注足够大的各项

$$u_n \leq v_n$$

条件：对于所有的 $n > N$ 均成立（N 是一个定值）。

2.2.3 仅关注足够大时候的极限值

$$\frac{u_n}{v_n} = h$$

条件：$n \to \infty$

2.3 比较对象的具体化

收敛级数和发散级数的分界线到底是谁？这是一个比较微妙的事情，我不知道。但我们知道 p 级数比几何级数更加接近这个分界线（临界状态）。

一些远离临界状态的可以通过和几何级数比较得出结论。靠近临界状态的则要通过和 p 级数比较得出结论。再靠近临界状态就不能通过和这两者的比较得出结论了。

2.3.1 和几何级数比

思路：在极限意义下（n 足够大时）, 把任何一个级数看作几何级数。如果公比 q 大于 1 则发散，小于 1 则收敛。

$$u_n \approx aq^n$$

“抓取”公比 q 的两种方法：

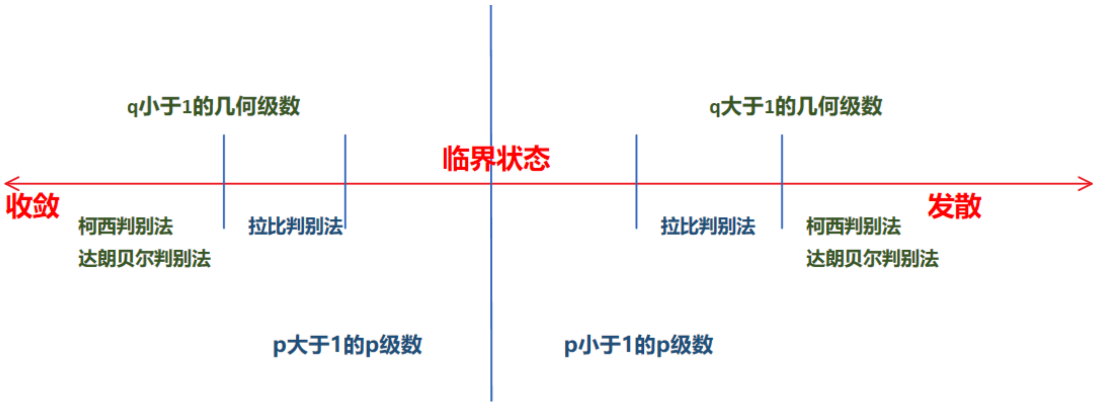

Figure 1: 不同判别法的有效区间

1. 前后作比（达朗贝尔判别法）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\begin{cases}q<1:\text{收敛}\\q>1:\text{发散}\end{cases}$$

2. 开 n 次根号（柯西判别法）

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q\begin{cases}q<1:\text{收敛}\\q>1:\text{发散}\end{cases}$$

2.3.2 和 p 级数比

思路：在极限意义下（n 足够大时），把任何一个级数看作 p 级数。如果 p 小于 1 则发散，大于 1 则收敛。

$$u_n\approx\frac{1}{n^p}$$

“抓取” p 的方法（拉比判别法）：

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^p-1\right)=n((1+\frac{1}{n})^p-1)\approx n(1+\frac{p}{n}-1)=n(\frac{p}{n})=p$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=p\begin{cases}p>1:\text{收敛}\\p<1:\text{发散}\end{cases}$$

3 适用情形

1. 如果知道求和公式可以用定义（部分和）直接判别。
2. 如果知道原函数可以用无穷积分法判别。
3. 比几何级数远离临界状态，可以和几何级数比较。（柯西与达朗贝尔）
4. 比 p 级数远离临界状态，可以和 p 级数比较。（拉比）
5. 也可以通过放缩和其它的级数比较。