曲线的切线与曲面的切面

1. 一般化方法

(1) 曲线：R 上的区间 $\xrightarrow[\text{连续映射}]{\vec{f}}$ R^n 中的区域中

曲面：R^2 中的区域 $\xrightarrow{\vec{f}}$ R^n 中的区域

(2) 对应地，可以有参数方程表达曲线、曲面

曲线：$x_i = f_i(t)$　　曲面：$x_i = f_i(u, v)$

t：单参数(一维)　　u, v：双参数(二维)

(3) 对于直线，可以用方向向量表定方向

对于平面，可以用一组基底表定方向

① 切向量 ～ 切线

$$\vec{r}' = (f_1'(t), f_2'(t), \cdots, f_n'(t))$$

② 切平面基底 ～ 切面

$$\vec{r_u}' = (f_{1u}'(u,v), f_{2u}'(u,v), \cdots f_{nu}'(u,v))$$

$$\vec{r_v}' = (f_{1v}'(u,v), f_{2v}'(u,v), \cdots f_{nv}'(u,v))$$

2. 特别地，简便方法

(1) $\left.\begin{cases}\text{平面曲线：二维余一维} \\ \text{空间曲面：三维余一维}\end{cases}\right\} \Rightarrow$ 可以用法向量 $\vec{n}$ 刻画

(2) 对应的表示形式是方程形式 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \text{：曲线} \\ F(x, y, z) = 0 \text{：曲面} \end{cases}$

(3) ① 对~~于~~方程 $F(x,y)=0$ 所确定的平面曲线
可以视作~~方程~~函数 $F(x,y)$ 的一条等值线/等高线
梯度 $\vec{g}=\nabla\cdot F(x,y)=(F_x,F_y)$ 与之垂直
故 $\vec{g}$ 可以作为法向量 $\vec{n}$

② 对于方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的空间曲面
可以视作函数 $F(x,y,z)$ 的一个等值面
梯度 $\vec{g}=\nabla\cdot F(x,y,z)=(F_x,F_y,F_z)$ 与之垂直
故 $\vec{g}$ 可以作为法向量 $\vec{n}$

(4) ①直线法向量可以由切向量旋转 90° 得到
$\vec{n}=(f_2'(t),-f_1'(t))$，$\vec{r}'=(f_1'(t),f_2'(t))$

②平面法向量可以由基底叉乘得到
$$\vec{n}=\vec{r_u}'\times\vec{r_v}'=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ f_{1u} & f_{2u} & f_{3u}\\ f_{1v} & f_{2v} & f_{3v}\end{vmatrix}$$

*3：如何将方程形式、参数式和显函数式进行转化
(并不总能进行)

例：$z=f(x,y)$，曲面（显函数）

$\begin{cases}x=x\\y=y\\z=f(x,y)\end{cases}$ 以 x,y 为参数；$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$ 方程

例：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 曲线（方程）；例 $x^2+y^2+z^2=R^2$（方程）

$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$ 以 θ 为参数

$\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\y=R\sin\varphi\sin\theta\\z=R\cos\varphi\end{cases}$ 以 φ,θ 为参数

例：$y=f(x)$ 曲线（显函数）
$\begin{cases}x=x\\y=f(x)\end{cases}$ 以 x 为参数；$F(x,y)=f(x)-y=0$（方程）