三重积分

(一)拆分积分区域Ω的两种方式

(1) 先往 $z=0$ 平面投影，再定投影区域 D 上每点上下限　2+1

$$\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\cdot dz \quad 或 \quad \iint_D rdrd\theta \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} \cancel{f}\, dz$$

1+2

(2) 先确定一个维度的上下限 $\left\{\begin{array}{c} z\in[a,b] \\ 或 \\ \theta\in[\alpha,\beta] \end{array}\right\}$ 再以 $\left\{\begin{array}{c} z=z_0 \\ 或 \\ \theta=\theta_0 \end{array}\right\}$ 做截面 $\left\{\begin{array}{c} D(z) \\ D(\theta) \end{array}\right.$

$$\int_a^b dz\iint_{D(z)} f\cdot dxdy \; ; \; \int_\alpha^\beta d\theta \iint_{D(\theta)} fr\,drdz \; ; \; \int_\alpha^\beta d\theta \iint_{D(\theta)} f\cdot \rho^2 \sin\varphi\, d\rho \cdot d\varphi .$$

(二) 当Ω绕 z 轴具有旋转对称性

1. 柱坐标：$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_1}^{r_2} rdr \int_{z_1(r)}^{z_2(r)} f\cdot dz$ 或 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r_1(z)}^{r_2(z)} f\cdot rdr$

常数　与θ无关　常数　与θ无关

2. 球坐标：$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi\, d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f\cdot \rho^2 d\rho$.

* 特别地，当 $\theta=\theta_0$ 的截面为

(1) $D(\theta)$ 矩形。$z_1(r)$，$z_2(r)$　$r_1(z)$　$r_2(z)$ 均为常数。

→ Ω 为柱 $\left\{\begin{array}{l} 壳 \\ 体\ (r 从 0 开始取值) \end{array}\right.$

(2) $D(\theta)$ 扇形　$\rho_1(\varphi)$　$\rho_2(\varphi)$ 为常数。

→ Ω 为球 $\left\{\begin{array}{l} 壳 \\ 体\ (\rho 从 0 开始取值). \end{array}\right.$

(三). 当 $f(x,y,z)=f(z)$ 与 x,y 无关.

且截面 $D(z)$ 规则可以计算面积时. 可以简化计算.

$$\int_a^b dz \iint_{D(z)} f(z)\,dx\,dy = \int_a^b f(z)\,dz \iint_{D(z)} dx\,dy = \int_a^b f(z)\,\mathrm{Area}(D(z))\,dz$$

e.g. 抛物面. $z=x^2+y^2$. 椭球: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

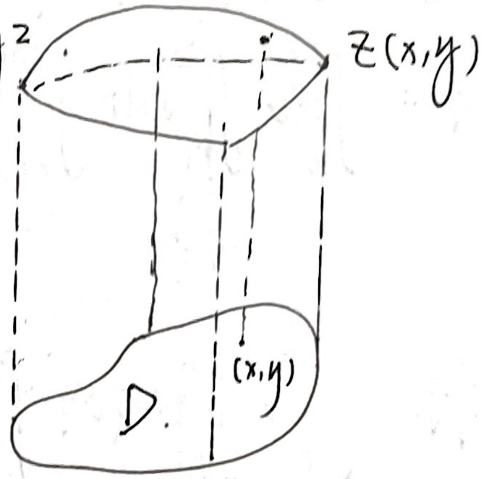
平移后的球: $x^2+y^2+z^2=2z$.

(四)

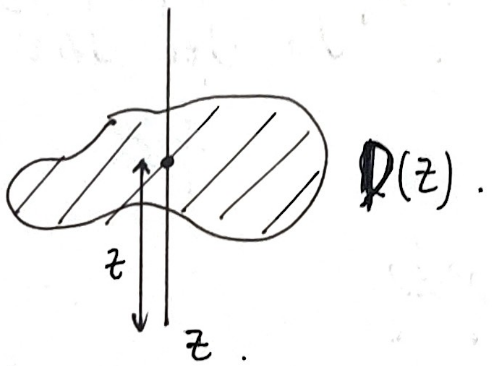
1. 以上将 z 轴置于与 x,y 轴不同的地位.

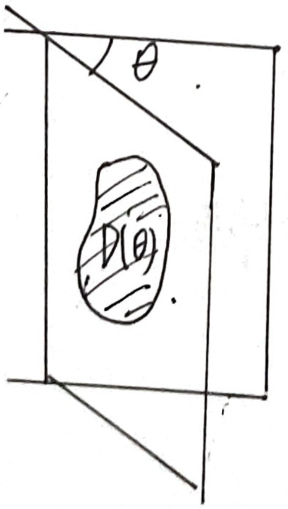
事实上当 Ω 取向突出了 x/y 轴地位时做相应改变即可.

如: $x^2=z^2+y^2$



2.





三维空间 Ω: 二维 D; 一维 z / θ

$\Omega = D_{(z)} \times z$.

$\Omega = D_{(\theta)} \times \theta$.

① $z=z(x,y)$. $(x,y)\in D$.

$z=z(r,\theta)$ $(r,\theta)\in D$.

② $D=D(z)$. $z\in$ z 轴.

$D=D(\theta)$ $\theta\in$ θ 轴.

三维空间的分解.