Wallis 公式及其应用

(一) Wallis 公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta = I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\,(\cancel{奇})\,偶 \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\,(\cancel{偶})\,奇 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^n\theta\, d\theta = \begin{cases} 0, & n奇 \\ 4I_n, & n偶 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n\theta\, d\theta = 2I_n . \qquad \int_0^{\pi} \cos^n\theta\, d\theta = \begin{cases} 0, & n奇 \\ 2I_n, & n偶 \end{cases}$$

(二) $\int_\alpha^\beta \sin^m\theta\cdot\cos^n\theta\, d\theta = J$.

① 若 n 为偶数. $(\cos^2\theta)^{\frac{n}{2}} = (1-\sin^2\theta)^{\frac{n}{2}} = \cos^n\theta$.

$$J = \int_\alpha^\beta \sin^m\theta\,(1-\sin^2\theta)^{\frac{n}{2}}\, d\theta .$$ 再用 Wallis 公式

② 若 m 为偶数. $J = \int_\alpha^\beta (1-\cos^2\theta)^{\frac{m}{2}} \cos^n\theta\, d\theta$

定积分
且对上下限
有要求

③ 若 m, n 均为奇数（或之一为奇数）

不妨设 $n = 2k+1$: $J = \int_\alpha^\beta \sin^m\theta\,(1-\sin^2\theta)^k\, d(\sin\theta)$.

不妨设 $m = 2l+1$: $J = -\int_\alpha^\beta (1-\cos^2\theta)^l \cos^n\theta\, d(\cos\theta)$

(三) $\int_0^1 r^m (1-r^2)^{\frac{n}{2}}\, dr$.

再按多项式处理

不定积分和
任意上下限

可以令 $r = \sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 转化为(二)中情形.