高数 P138 / 8.6 例8.

法1：曲线积分Ⅱ ⟶ 定积分.

曲线 L^+：$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1 \end{cases}$ $\xrightarrow[\substack{y=a\sin t \\ z=b(1-\frac{x}{a})=b(1-\cos t)}]{令 x=a\cos t}$ $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=b(1-\cos t) \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

曲面相交的形式 ⟶ 参数方程形式

可以视作 $(t)\longrightarrow(x,y,z)$

$R^1\longrightarrow R^3$ 的映射 ☆☆☆.

原式：$I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$

令 $\vec{F}=(P,Q,R)=(y-z,z-x,x-y)$. $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$

$\therefore I=\oint_{L^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}$　用参数t化简 x,y,z；dx,dy,dz.

从而将曲线积分Ⅱ化为定积分 ☆☆☆

$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=b(1-\cos t) \end{cases}$　$\begin{cases} dx=-a\sin t\,dt \\ dy=a\cos t\,dt \\ dz=b\sin t\,dt \end{cases}$　$t\in[0,2\pi]$

且 t 从 0 到 2π（dt为正）对应于 L^+ 的定向.

$\oint_{L^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\Big[(a\sin t-b(1-\cos t))(-a\sin t)+(b(1-\cos t)-a\cos t)\cdot a\cos t+(a\cos t-a\sin t)\cdot b\sin t\Big]\cdot dt$.

定向一致
不加负号.

$=\int_0^{2\pi}\left[-a^2+ab(\sin t+\cos t)-ab\right]dt=-a(a+b)\cdot 2\pi$

法2：曲线积分Ⅱ（环路）⟶ 曲面积分Ⅱ ⟶ 二重积分.

$\underbrace{\oint_{L^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{环量}=\iint_{S^+}\underbrace{(\nabla\times\vec{F})}_{环量面密度(旋度)}\cdot d\vec{S}$　（Stokes 公式）.

取曲线 L^+ 所在的一个曲(平)面 S. 并规定 S^+ 与 L^+ 成右手系.

曲线 L^+: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \text{（柱面 非单连通）} \Longrightarrow \text{用以限制 } S^+ \text{ 参数范围} \\ \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1 \text{（单连通平面）} \Longrightarrow \text{选作 } S^+ \end{cases}$

用参数方程表示 S^+. 从 $R^2 \to R^3$ 映射角度理解 S^+.

$$\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=b-\frac{b}{a}u \end{cases} \qquad (u,v)\in D\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$$

用参数 u,v 化简 x,y,z; $dydz, dzdx, dxdy$ 从而将曲面积分II化为二重积分. ☆☆☆

$$\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=b-\frac{b}{a}u \end{cases};\quad \begin{cases} x_u=1 & x_v=0 \\ y_u=0 & y_v=1 \\ z_u=-\frac{b}{a} & z_v=0 \end{cases}$$

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}=-z_u;\quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}=-z_v$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=1;\quad d\vec{S}=(dydz, dzdx, dxdy)$$

且 $du\cdot dv$ 为正，$d\vec{S}$ 对应于 S^+ 定向

$$d\vec{S}=\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)\cdot dudv=(-z_u,-z_v,1)\,dudv$$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=(-2,-2,-2);\quad \begin{matrix} R_y=-1 & Q_z=1 & P_z=-1 \\ R_x=1 & Q_x=-1 & P_y=1 \end{matrix}$$

$\vec{F}(P,Q,R)$ 中 P,Q,R 为一次式 $\Rightarrow \nabla\times\vec{F}$ 为定值

$$\oint_{L^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S^+}(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=0\iint_D(-2,-2,-2)\cdot(-z_u,-z_v,1)\,dudv$$

定向一致 不加负号

$$=2\iint_D(z_u+z_v-1)\,dudv=2\iint_D\left(-\frac{b}{a}-1\right)dudv=-2\frac{a+b}{a}\iint_D dudv$$

$$=-2\cdot\frac{a+b}{a}\cdot\mathrm{Area}(D)=-2\cdot\frac{a+b}{a}\pi a^2=-2\pi a(a+b).$$

曲线面积分Ⅱ的几种形式 $\qquad \vec{F}=(P,Q,R)$

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \ ③ = \iint \vec{F}\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{单位法向量}}}{\vec{n}_0}\, dS = \iint \vec{F}\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\,dS \ ②$$

$$= \iint_S \vec{F}\cdot(dS\cos\alpha,\ dS\cos\beta,\ dS\cos\gamma) = \iint_S \vec{F}\cdot(dydz,\ dzdx,\ dxdy)$$

$$= \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \ ①$$

旋度~方向旋度~Stokes公式的几种形式

$$\oint_{L^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S^+} (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_{S^+} \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}}_{\text{旋度}} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{\vec{n}_0\cdot dS} \ ③$$

$$= \iint_{S^+} \begin{vmatrix} \hat{i}\cdot d\vec{S} & \hat{j}\cdot d\vec{S} & \hat{k}\cdot d\vec{S} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{S^+} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \ ①$$

把 $d\vec{S}$ 乘进行列式

$$= \iint_{S^+} \begin{vmatrix} \hat{i}\cdot\vec{n}_0 & \hat{j}\cdot\vec{n}_0 & \hat{k}\cdot\vec{n}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\cdot dS = \iint_S \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}}_{\text{方向旋度}} \cdot dS \ ②$$

把 $\vec{n}_0$ 乘进行列式

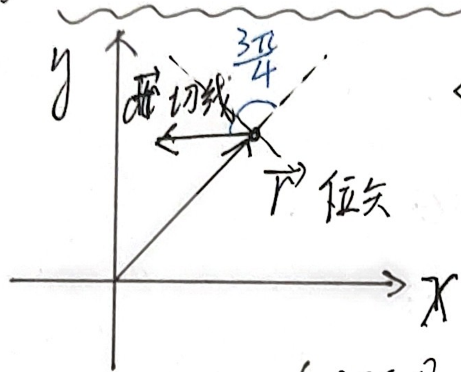
$$* \ (a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})\cdot d\vec{S} = a\hat{i}\cdot d\vec{S} + b\hat{j}\cdot d\vec{S} + c\hat{k}\cdot d\vec{S}$$

高数 §9.2 例15.

1. 几何. 等角螺线（与之相对的是等距螺线，阿基米德螺线）

切线（法线）与位矢夹角恒定.

2. 求解 切线与位矢夹 $\frac{3}{4}\pi$ 角度的等角螺线.



$\Leftrightarrow$ 切向量 $d\vec{r}$ 顺时针转 $\frac{\pi}{4}$ 后与位矢 $\vec{r}$ 垂直（夹角 $\frac{\pi}{2}$）.

① $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ θ 取 $(-\frac{\pi}{4})$

$A=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 令 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$d\vec{r}=\begin{pmatrix}dx \\ dy\end{pmatrix}$

$\vec{r}^{T}\cdot(B\,d\vec{r})=0$ 即 $(x,y)\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx \\ dy\end{pmatrix}=0$.

即 $(x,y)\begin{pmatrix}dx+dy \\ dy-dx\end{pmatrix}=x\,dy+\cancel{x}\,dy+y\,dy-y\,dx=0.$

即 $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

② 从复数角度也可以得上述旋转矩阵.

$\vec{\xi}=\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})$. ... 略.

3. 所求解 $\sqrt{x^2+y^2} = c\cdot e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}$

① 化极坐标.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ; \quad \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

即 $r = c\cdot e^{-\theta}$.

② 化参数方程可以验证等角.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = c\cdot e^{-\theta}\cos\theta. \\ y = r\sin\theta = c\cdot e^{-\theta}\sin\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = c\, e^{-\theta}(-\cos\theta-\sin\theta)\, d\theta \\ dy = c\cdot e^{-\theta}(-\sin\theta+\cos\theta)\, d\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = (x,y) = c\cdot e^{-\theta}(\cos\theta,\sin\theta). \\ \frac{d\vec{r}}{d\theta} = (dx,dy) = c\cdot e^{-\theta}(-\cos\theta-\sin\theta,-\sin\theta+\cos\theta). \end{cases}$$

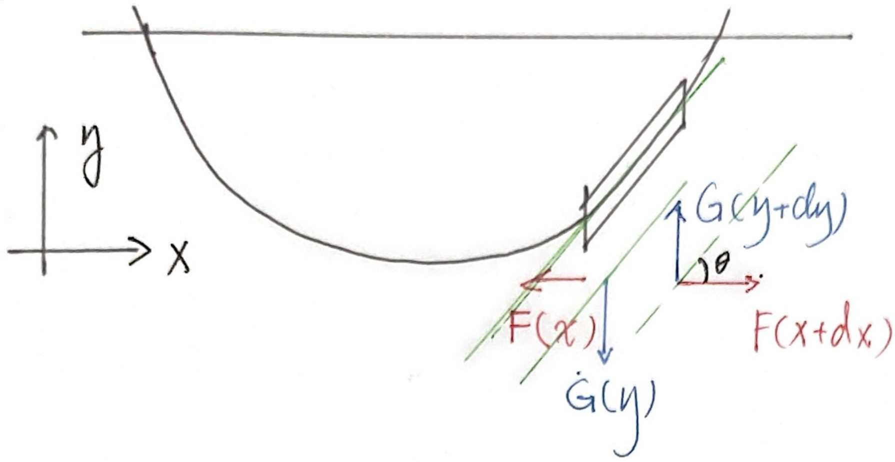
$$|\vec{r}| = c\cdot e^{-\theta} \qquad \left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right| = c\cdot e^{-\theta}\cdot\sqrt{2}.$$

$$\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\theta} = (c\cdot e^{-\theta})^2\cdot(-1) = |\vec{r}|\cdot\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|\cdot\cos\left\langle\vec{r},\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\rangle$$

$\therefore \cos\left\langle\vec{r},\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 对应 $\frac{3\pi}{4}$ 等角.

高数 §9.2 例16.

1. 物理 悬链线.



设线密度为 ρ

<水平>. $F(x+dx) - F(x) = 0$ ① $\dfrac{dG}{dx} = \rho g\sqrt{1+y'^2}$

<竖直> $\left\{\begin{aligned} & G(y+dy) - G(y) - \rho g \cdot dl = 0 \\ & dl\,(\text{弧长}) = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx \end{aligned}\right.$

<法向合力为0>

$$\frac{G(y)}{F(x)} = \tan\theta = y'$$

②

① $F(x) \equiv F_0$ 恒力. $\Longrightarrow G(y) = F_0 \cdot y' \Rightarrow \dfrac{dG}{dx} = F_0 y''$

② $\dfrac{G(y+dy)-G(y)}{dx} = \rho g\sqrt{1+y'^2} = \dfrac{d}{dx}(F_0 y') = F_0 y''$

2. 求解.

$$\boxed{F_0 y'' = \rho g\sqrt{1+y'^2}} \sim y'' = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \cosh(x+C_1)+C_2.$$

双曲余弦 ~ 悬链线