$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}d\omega$$

曲线积分I

增量 $F(B)-F(A)=\int_L\left(F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma\right)ds$

牛顿—莱布尼茨公式

增量线密度 ~ 方向导数

0阶外微分

$\{B,A\}=\partial(L)$

曲线端点

$$=\int_L F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz$$ 曲线积分II

1阶外微分

$$=\int_L\left(F_x\cdot x'(t)+F_y\cdot y'(t)+F_z\, z'(t)\right)dt$$ 定积分

$$=\int_L (F_x,F_y,F_z)\cdot d\vec{r}$$ 曲线积分II

方向导数〈最大之方向，最大之数值〉梯度（向量）$\left\{\begin{array}{l}\nabla F\\ \mathrm{grad}\,F\end{array}\right.$

曲线积分II

Green (2)
Stokes (3)
公式

环量 $\oint_{L^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S^+}\left((R_y-Q_z)\cos\alpha+(P_z-R_x)\cos\beta+(Q_x-P_y)\cos\gamma\right)dS$ 曲面积分I

环量面密度 ~ 方向旋度

$\vec{F}=\vec{F}(P,Q,R)$

$$=\iint_{S^+}(Q_x-P_y)\,dx\,dy+(R_y-Q_z)\,dy\,dz+(P_z-R_x)\,dz\,dx$$

二阶外微分　曲面积分II

$\oint_{L^+}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

1阶外微分

$L^+=\partial(S^+)$

曲面边界

$$=\iint_{S^+}\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}dS$$ 曲面积分I

方向旋度

$$=\iint_{S^+}\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}\cdot d\vec{S}$$ 曲面积分II

方向旋度〈最大之方向，最大之数值〉旋度（向量）：$\mathrm{rot}\,\vec{F}$

$$=\iint_{S^+}\left((Q_x-P_y)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}+(R_y-Q_z)\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+(P_z-R_x)\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)du\,dv$$

二重积分

通量 $\oiint_{S^+} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iiint_{\Omega} (P_x+Q_y+R_z)\,dV$ 三重积分

高斯公式

通量体密度 ~ 散度(数量) $\mathrm{div}\,\vec{F}$

曲面积分Ⅱ

3阶外微分

$\oiint_{S^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_{\Omega} (P_x+Q_y+R_z)\,dxdydz$

S^+ 2阶外微分

R^3 中 线、面有取向之差异 ~ $\{\mathrm{grad}\,F,\ \mathrm{rot}\,\vec{F}\}$ 为向量

体没有取向之差异 ~ $\mathrm{div}\,\vec{F}$ 为数量

$S^+ = \partial(\Omega)$ 体之表面

$F = F(x,y,z)$　　$\mathrm{grad}\,F = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ 梯度

$\vec{F} = \vec{F}(P,Q,R)$

$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla\times\vec{F}$ 旋度

$\mathrm{div}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = \nabla\cdot\vec{F}$ 散度.

(一)

曲线：$(t) \longrightarrow (x,y,z)$　　$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$　$\begin{cases} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \\ dz = z'(t)\,dt \end{cases}$

1. 对于弧长 ds

$\begin{cases} ds\cos\alpha = dx \quad ds\cos\beta = dy \quad ds\cos\gamma = dz \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow ds^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) = ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$

$\therefore ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$

2. 对于弧的切向量 $d\vec{s}$

$d\vec{s} = (dx, dy, dz) = (ds\cos\alpha, ds\cos\beta, ds\cos\gamma) = ds\underbrace{(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}_{\text{单位切向量}}$

$d\vec{s} = (x'(t), y'(t), z'(t))\,dt$.

(二)

曲面：$(u,v) \longrightarrow (x,y,z)$ $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $\vec{r_u} = (x_u, y_u, z_u)$

$\vec{r_v} = (x_v, y_v, z_v)$

$$dydz = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}dudv = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} dudv. = A\,dudv$$

$$dzdx = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}dudv = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} dudv. = B\,dudv$$

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} dudv. = C\,dudv.$$

1. 对于面积，ds.

$$\begin{cases} ds\cos\alpha = dydz. \quad ds\cos\beta = dzdx \quad ds\cos\gamma = dxdy \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \Rightarrow ds^2 = ds^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = (dydz)^2 + (dzdx)^2 + (dxdy)^2 \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{(dydz)^2 + (dzdx)^2 + (dxdy)^2} = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv.$$

另一方面. $ds = |\vec{r_u} \times \vec{r_v}|\,dudv = \sqrt{|\vec{r_u}|^2|\vec{r_v}|^2 - |\vec{r_u}\cdot\vec{r_v}|^2}\,dudv.$

$|\vec{r_u}|^2 = E.\quad |\vec{r_u}\cdot\vec{r_v}| = F.\quad |\vec{r_v}|^2 = G.$

$\therefore ds = \sqrt{EG-F^2}\,dudv.\ ;\ (A^2+B^2+C^2 = EG-F^2)$

综上. $ds = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv = \sqrt{EG-F^2}\,dudv.$

2. 对于面的法向量 $d\vec{s}$.

$$d\vec{s} = (dydz, dzdx, dxdy) = (ds\cos\alpha, ds\cos\beta, ds\cos\gamma)$$

$$= ds\underbrace{(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}_{\text{单位法向量}}.$$

$$d\vec{s} = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)dudv = (A, B, C)\,dudv.$$

多元积分的相互转化

积分区域的映射

$\mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^1$

$(x,y,z) \longleftarrow (t)$ "平"~"曲"

"闭" L^+ 曲线积分 $\longrightarrow$ 定积分

格林公式(2)

Stokes公式(3)

$\mathrm{I} \rightleftarrows \mathrm{II}$

$$\mathrm{I}: \quad ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

$$\mathrm{II}: \quad d\vec{s} = (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt = (dx, dy, dz)$$

$\mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longleftarrow (u,v)$

S^+ 曲面积分. $\longrightarrow$ 二重积分.

"闭"

$\mathrm{I} \rightleftarrows \mathrm{II}$

$$\mathrm{I}: \quad ds = \sqrt{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}\, du\,dv.$$

$$\mathrm{II}: \quad d\vec{s} = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) du\,dv = (dy\,dz, dz\,dx, dx\,dy)$$

高斯公式 $\longrightarrow$ 三重积分 Ω.

$L^+ = \partial(S^+) \qquad S^+ = \partial(\Omega).$

$\mathbb{R}^2$中

$$* \quad \oint_{L^+} \vec{F} \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\text{弧法向量}} = \iint_{D^+} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_L P\,dy + Q\,dx$$

$(dx, dy) = d\vec{s} = (dy', -dx').\qquad \vec{F} = (P, Q).$

$$d\vec{r} = (dx', dy') \longleftarrow \begin{cases} x' \Leftarrow y. \\ y' \Leftarrow -x. \end{cases}$$

$$\oint_{L^+} \vec{F} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\text{弧切向量}} = \iint_{D^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'}\right) dx\,dy.$$

$$* \begin{cases} F(B) - F(A) = \int_L \nabla F \cdot d\vec{r} \\ \oint_{L^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S^+} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} \\ \oiint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{F})\, dV \end{cases}$$