一道题的多角度思考——N人跳车问题

版本1. 车：M.　　人：N个 m.

人以相对于车 u 的速度离开（u与V车反向）.

V：为末速度. 求：一起跳 V大 还是分别跳 V大？

<一起跳>.

$$M\cdot V+N\cdot m(V-u)=0 \Rightarrow V=\frac{Nmu}{M+Nm}.$$

√ <分开跳>.

考虑 $k\to k+1$ 个人跳的 ΔV.

$$(M+(N-k)m)V_k=(M+(N-k-1)m)V_{k+1}+m(V_{k+1}-u)$$
$$=(M+(N-k)m)V_{k+1}-mu$$

$$\therefore \Delta V_{k\to k+1}=V_{k+1}-V_k=\frac{mu}{M+(N-k)m}.$$

$V_0=0$

$$V=V_N=\sum_{k=0}^{N-1}\Delta V_{k\to k+1}+V_0=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{mu}{M+(N-k)m}$$

$$V=\underbrace{\frac{mu}{M+Nm}+\frac{mu}{M+(N-1)m}+\cdots+\frac{mu}{M+m}}_{\text{共}N\text{项}}>\underbrace{N\times\left(\frac{mu}{M+Nm}\right)}_{\text{一起跳}}$$

小 $\longrightarrow$ 大

版本2：每人消耗能量/体力 A. 其余不变. 结果如何？

√ <一起跳>. $E_{k相}=0$

$$\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}(Nm)V_c^2+0=N\cdot A.$$

<分开跳> $E_{k相}\neq0$ (>0).

$$\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}(Nm)V_c^2+E_{k相}=NA.$$

$MV=NmV_c$. (质心系特性) ☆

$$\left[\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}Nm\left(\frac{M}{Nm}\right)^2\right]V^2+\underbrace{E_{k相}}=NA.$$

$\uparrow$　　$\downarrow$

推论：<版本1>中分开跳，做功在变化，每个人不相同（从整体结果

问题：是什么导致了相邻两个人做功的不同（机制、原因）？

差异 $\begin{cases} \text{做功前，系统整体速度不同 ①} \\ \text{做功前，系统整体质量不同 ②} \end{cases}$

①

$m_1 \rightarrow v_1$, $v_2 \leftarrow$, m_2

$u = v_1 - v_2$，$v_c = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2}$

$v_1^{cm} = v_1 - v_c = \frac{m_2}{m_1+m_2}u$

$v_1 = v_1^{cm} + v_c$ $\quad v_2 = v_2^{cm} + v_c$ $\quad v_2^{cm} = v_2 - v_c = -\frac{m_1}{m_1+m_2}u$

$A = \Delta E_K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2 = \frac{1}{2}m_1(v_1^{cm}+v_c)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2^{cm}+v_c)^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\ldots$

$A = \frac{1}{2}m_1v_1^{cm^2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{cm^2} + \underbrace{(m_1v_1^{cm} + m_2v_2^{cm})}_{=0\ (\text{质心性质})}\cdot v_c = \frac{1}{2}m_1v_1^{cm^2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{cm^2} + 0$

$A = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}u^2 = \frac{1}{2}\mu u^2$，$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$；$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

↓

说明 A 与 v_c 的大小无关（①），当 u 一定时，仅与 μ 有关（②）。

而对于 μ，当 $m_2\downarrow \Rightarrow \mu\downarrow$，进而 $A\downarrow$。

所以，由于系统质量↓，每个人做功 A，随顺序增加而↓。

↓

类似地，<版本2>中分开跳，由于 μ↓，u 是↑的。

问题：仅看末态，<版本1>

① 一起跳，大 $\leftarrow MV_A$ $\quad \rightarrow m(u)\times N$ 大

② 分开跳，小 $\leftarrow MV_B$. $\quad \rightarrow m(u-v_1)$，$m(u-v_2)$，⋮，$m(u-v_N)$（大↓小） 小

则 $V_B < V_A$？ × 应为

① 小 $\leftarrow MV_A$ $\quad \rightarrow m(u-v_N)\times N$ 小

② 大 $\leftarrow MV_B$ $\quad \rightarrow m(u-v_1)$，$m(u-v_2)$，⋮，$m(u-v_N)$（大↓小） 大

$V_B > V_A$，若相对上一次为 u，则前者成立。

关于质心系.

定义上. 动量中心系. 即. 质心系中. 系统动量为0 ($P_c=0$).

所以 $P_o = m_总 \cdot V_c + P_c = m_总 \times V_c$

由此可得 $V_c = \frac{\sum m_i V_i}{m} = \frac{\sum m_i \frac{d}{dt} r_i}{m} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i r_i}{m}\right) = \frac{d}{dt}(r_c)$

进而 (令 $r_0=0$) 得 $r_c = \frac{\sum m_i r_i}{m}$.

$$\left.\begin{cases} V_c = \frac{\sum m_i V_i}{m} \\ r_c = \frac{\sum m_i r_i}{m} \end{cases}\right\}$$ 与定义动量中心系等价.

反映了: 质心的状态 (r, v) 由各质点 ($m_i \cdot r_i v_i$) 的状态决定.

质心系的特性:

在质心系中. (以下 r_i^{cm}. V_i^{cm} 均以质心为参考系).

$\sum m_i r_i^{cm} = 0$. $\sum m_i V_i^{cm} = 0 \Rightarrow \sum m_i a_i^{cm} = 0$

定义使然

$r_i^{cm} = r_i - r_c$.

$\sum m_i r_i^{cm} = \sum m_i r_i - r_c \sum m_i = \sum m_i r_i - m r_c = 0$.

在另一系到质心系的变换中.

$\vec{P} = m \cdot \vec{V_c} + \vec{P_c} = m\vec{V_c} + 0 = m\vec{V_c}$.

$E_K = \frac{1}{2} m V_c^2 + E_{kc}$. 相对动能.

$\vec{J} = \underbrace{\vec{r} \times m\vec{V_c}}_{} + \underbrace{\vec{J_c}}_{}$. 轨道角动量. ; 固有角动量.

在系统受力/力矩作用下.

$\vec{F_外} = m\vec{a_c}$ ← 质心的加速度.

$\vec{M_外} = \frac{d\vec{J_c}}{dt}$. ← 质心系下系统的角动量.

质心系与能量.

系统内力做功.可以改变系统动能.　　$a_c = \frac{F_{外}}{m}$ 与F内无关 质心运动定理保证.

但局限于相对动能.　　$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + E_{kc}$.

E_{kc}：一方面是各质点相对于质心(质心系下)动能之和.

另一方面.在两体问题中.直接与质点间相对速度 u.

相关. $E_{kc} = \frac{1}{2}\mu u^2$.

*对于多质点,若每次仅存在两个物体(系)之间的作用

可以按照两体处理.(如前所示).

内力做功～可以拆成多对相互作用力.做功.

而每一对仅与相对位移有关 $\vec{r}_{21}$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

$$A = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_2 - \vec{F}_1 d\vec{r}_1 = \vec{F}_1 \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1)$$

$$A = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_{21}.$$

内力做功.与相对动能在参考系变换下均不变.

在系统整体速度改变下也不变.

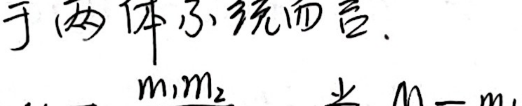
而对于两体系统而言.

① $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. 当 $M = m_1 + m_2$ 一定 $m_1 m_2 = m_1(M - m_1)$.

$m_1 m_2$ 越接近(于 $\frac{M}{2}$). μ 越↑

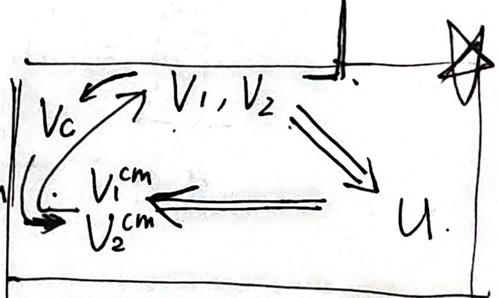
解释了相对速度 u 一定时.一起跳 做功比单个人跳大.

[另一方面: V(做功相同.齐跳) > V(做功同,分跳)]



② u同 $\Rightarrow V_1^{cm}$ 与 V_2^{cm}.

$V_1, V_2 \Rightarrow u \Rightarrow V_1^{cm} + V_2^{cm}$　　V_c



3条逻辑.

(1) $\begin{matrix}V_1\\V_2\end{matrix} \Longrightarrow u \xrightarrow[m_2]{m_1} \begin{matrix}V_1^{cm}\\V_2^{cm}\end{matrix} \xrightarrow{V_c} \begin{matrix}V_1\\V_2\end{matrix}$

(2) $\begin{matrix}m_1 & V_1\\ m_2 & V_2\end{matrix} \longrightarrow V_c \xRightarrow[V_2]{V_1} \begin{matrix}V_1^{cm}\\V_2^{cm}\end{matrix} \xrightarrow{V_c} \begin{matrix}V_1\\V_2\end{matrix}$

(3) $\begin{matrix}V_{10}\\V_{20}\end{matrix} \longrightarrow u_0 \xrightarrow{e} u \xrightarrow[m_2]{m_1} \begin{matrix}V_1^{cm}\\V_2^{cm}\end{matrix} \xrightarrow{V_c'=V_c} \begin{matrix}V_1\\V_2\end{matrix}$

$\downarrow m_1\ m_2$

V_c

与能量相关.

相对动能.

与动量守恒等价.

对比旧方法.

(1) 动量守恒联立动量守恒 $\Rightarrow -u_0=u$ 再代入.

动量守恒消元.

(2) 已知 $u=-eu_0$. 代入动量守恒消元.

(3) $e=1$ 时是完全弹性碰撞是二级结论.

2个路径. 算 $E_{kc}/E_{k相}$

(1) $\left.\begin{matrix}V_1, V_2 \longrightarrow u\\ m_1, m_2 \longrightarrow \mu\end{matrix}\right\} \longrightarrow E_{k相}=\frac{1}{2}\mu u^2$.

(2) $\left.\begin{matrix}m_1V_1, m_2V_2 \longrightarrow V_c\\ V_1, V_2\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix}V_c\\V_1^{cm}\\V_2^{cm}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[m_2]{m_1} E_{k相}=\frac{1}{2}m_1V_1^{cm^2}+\frac{1}{2}m_2V_2^{cm^2}$