常数变易法何以奏效

Bright Moon

August 23, 2024

1 二阶常系数线性微分方程的降阶

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$-p = \lambda_1 + \lambda_2; \quad q = \lambda_1\lambda_2$$

代入公式??中，可以得到下式：

$$y'' - \lambda_1 y' - \lambda_2 y' + \lambda_1\lambda_2 y = f(x)$$

$$(y'' - \lambda_1 y') - \lambda_2(y' - \lambda_1 y) = f(x) \tag{2}$$

令 $z = y' - \lambda_1 y$，代入公式??中得到:

$$z' - \lambda_2 z = f(x) \tag{3}$$

这一步实现了，二阶常系数线性微分方程，向一阶常系数线性微分方程的降阶。

2 一阶常系数线性微分方程的常数变易

令积分因子 $\mu = e^{-\lambda_2 x}$

$$\mu z' - \lambda_2 \mu z = \mu f(x)$$

$$z' e^{-\lambda_2 x} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} z = e^{-\lambda_2 x} f(x)$$

$$(ze^{-\lambda_2 x})' = e^{-\lambda_2 x} f(x)$$

$$ze^{-\lambda_2 x} = \int e^{-\lambda_2 x} f(x) dx$$

$$z = e^{\lambda_2 x} \int e^{-\lambda_2 x} f(x) dx$$

$$z = e^{\lambda_2 x} \left(\int_{x_0}^{x} e^{-\lambda_2 t} f(t) dt + C_1 \right) \tag{4}$$

其中后半部分就是常数 C_1 经过变易后的形式 $C_1(x)$

$$C_1(x) = \left(\int_{x_0}^{x} e^{-\lambda_2 t} f(t) dt + C_1 \right)$$

当原方程是齐次方程的时候，$f(t) = 0$，进而有：

$$C_1(x) = \left(\int_{x_0}^{x} e^{-\lambda_2 t} f(t) dt + C_1 \right) = \left(\int_{x_0}^{x} e^{-\lambda_2 t} 0 dt + C_1 \right) = 0 + C_1 = C_1$$

变易的常数退化为原来的形式（最后两步把新产生的常数合并到了原来的 C_1 中，仍记为 C_1）。

3 二阶常系数线性微分方程的常数变易

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

等价于：

$$(y'' - \lambda_1 y') - \lambda_2(y' - \lambda_1 y) = f(x)$$

等价于：

$$\begin{cases} z' - \lambda_2 z = f(x) \\ y' - \lambda_1 y = z(x) \end{cases}$$

用同样的，处理一阶的方法求解 $y(x)$ 得到：

$$y = e^{\lambda_1 x} \int z e^{-\lambda_1 x} dx$$

$$y = e^{\lambda_1 x} \left(\int_{x_0}^{x} z e^{-\lambda_1 s} ds + C_2 \right)$$

再代入求得的 $z(x)$（公式**??**）得到：

$$y = e^{\lambda_1 x} \left(\int_{x_0}^{x} e^{\lambda_2 s} \left(\int_{s_0}^{s} e^{-\lambda_2 t} f(t) dt + C_1 \right) e^{-\lambda_1 s} ds + C_2 \right)$$

整理一下：

$$y = e^{\lambda_1 x} \left(\int_{x_0}^{x} \left(\int_{s_0}^{s} e^{-\lambda_2 t} f(t) dt + C_1 \right) e^{\lambda_2 s} e^{-\lambda_1 s} ds + C_2 \right)$$

$$y = e^{\lambda_1 x} \left(\int_{x_0}^{x} \left(\int_{s_0}^{s} e^{-\lambda_2 t} f(t) dt + C_1 \right) e^{(\lambda_2 - \lambda_1) s} ds + C_2 \right) \tag{5}$$

3.1 齐次情形 $f(t) = 0$

3.1.1 相异两根 $\lambda_2 \neq \lambda_1$

公式**??**可以化简为：

$$y = e^{\lambda_1 x} \left(\int_{x_0}^{x} \left(\int_{s_0}^{s} 0 dt + C_1 \right) e^{(\lambda_2 - \lambda_1) s} ds + C_2 \right)$$

$$y = e^{\lambda_1 x} \left(\int_{x_0}^{x} C_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1) s} ds + C_2 \right) \tag{6}$$

把定积分多出来的常数，合并到 C_2 里构成新的 $\tilde{C}_2$：

$$y = e^{\lambda_1 x} \left(\frac{C_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} + \tilde{C}_2 \right)$$

把 λ_1，λ_2，C_1 合并成为新的常数，$\tilde{C}_1$：

$$y = \tilde{C}_1 e^{\lambda_2 x} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_1 x}$$

这种思路比先猜到两个解，然后再验证线性无关性（Wronski 行列式非零），或者验证两个常数的独立性，要自然顺畅很多。

3.1.2 相同两根 $\lambda_2 = \lambda_1$

这个时候公式??可以化简为：

$$y = e^{\lambda_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} C_1 e^0 ds + C_2\right)$$

$$y = e^{\lambda_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} C_1 ds + C_2\right)$$

把定积分多出来的常数，合并到 C_2 里构成新的 $\tilde{C}_2$：

$$y = e^{\lambda_1 x}\left(C_1 x + \tilde{C}_2\right)$$

最终有：

$$y = C_1 x e^{\lambda_1 x} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_1 x}$$

这就解释了为什么“遇事不决要乘一个 x”。让这种无厘头的操作合乎于推理。

3.2 非齐次情形 $f(t) \neq 0$

对公式??进行化简整理，把涉及到常数的部分往外提，得到：

$$y = \left(\int_{x_0}^{x}\left(\int_{s_0}^{s} f(t)e^{-\lambda_2 t}dt\right)e^{(\lambda_2-\lambda_1)s}ds\right)e^{\lambda_1 x} + \left(C_1\int_{x_0}^{x} e^{(\lambda_2-\lambda_1)s}ds\right)e^{\lambda_1 x} + C_2 e_1^{\lambda} x$$

其中后两项，就是公式??中的形式，所以可以借用上面的结论，化简后两项。

3.2.1 相异两根 $\lambda_2 \neq \lambda_1$

$$y = \left(\int_{x_0}^{x}\left(\int_{s_0}^{s} f(t)e^{-\lambda_2 t}dt\right)e^{(\lambda_2-\lambda_1)s}ds\right)e^{\lambda_1 x} + \tilde{C}_1 e^{\lambda_2 x} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_1 x}$$

其中第一项负责让两个常数 $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ 发生变易，成为 $\tilde{C}_1(x)$, $\tilde{C}_2(x)$

3.2.2 相同两根 $\lambda_2 = \lambda_1$

$$y = \left(\int_{x_0}^{x}\left(\int_{s_0}^{s} f(t)e^{-\lambda_2 t}dt\right)e^0 ds\right)e^{\lambda_1 x} + C_1 x e^{\lambda_1 x} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_1 x}$$

$$y = \left(\int_{x_0}^{x}\left(\int_{s_0}^{s} f(t)e^{-\lambda_2 t}dt\right)ds\right)e^{\lambda_1 x} + C_1 x e^{\lambda_1 x} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_1 x}$$

同样地，第一项负责让两个常数 $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ 发生变易，成为 $C_1(x)$, $\tilde{C}_2(x)$。**这就解释了常数变易法，为什么会是一种可行的方法，顺着什么样的思路可以想到常数变易法。**解微分方程，一些看起来必须要猜的结论，其实用推理的方法也可以得到。