

函数性质

(一) 区间上的性质

$f(x)$ 1. 单调性: $f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 单调增
原函数 \uparrow 或 $f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 单调减

当 $f(x)$ 可导时, 可以用 $f'(x)$ 研究单调性.

Lagrange 中值定理证: $f(x)$ 单调增 $\uparrow \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, 等号仅在个别点成立.
 $f(x)$ 单调减 $\downarrow \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$, 等号仅在个别点成立.

此条件充要. 减弱后半部分成为必要. 加强前半成为充分条件.

2. 凹凸性

本质上是导函数 $f'(x)$ 的单调性.

$f(t x_1 + (1-t) x_2) < t f(x_1) + (1-t) f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0,1)$ 下凸
或 $f(t x_1 + (1-t) x_2) > t f(x_1) + (1-t) f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0,1)$ 上凸

当 $f(x)$ 可导时, 可以等价定义成如下形式:

带 Lagrange 余项泰勒公式证: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \forall x \in I, x \neq x_0$ 下凸
 $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \forall x \in I, x \neq x_0$ 上凸

可以用 $f'(x)$ 研究凹凸性.

$f'(x)$ 单调增 $\uparrow \Leftrightarrow f(x)$ 下凸

$f'(x)$ 单调减 $\downarrow \Leftrightarrow f(x)$ 上凸

当 $f(x)$ 二阶可导时, 可以用 $f''(x)$ 研究 $f'(x)$ 单调性, 进而研究凹凸性.

$f''(x) \geq 0$, 等号仅在个别点成立 $\Leftrightarrow f'(x) \uparrow \Leftrightarrow f(x)$ 下凸.
 $f''(x) \leq 0$, 等号仅在个别点成立 $\Leftrightarrow f'(x) \downarrow \Leftrightarrow f(x)$ 上凸.

(二) 个别点的性质. f' 符号改变.

$f(x)$ 1. 极值点: = 单调性改变的点, \leftarrow (连续函数而言)

原函数的 \uparrow

$$\exists U_\delta(x_0) \text{ s.t. } \begin{cases} f(x) \leq f(x_0), \forall x \in U_\delta(x_0), & \text{极大} \\ f(x) \geq f(x_0), \forall x \in U_\delta(x_0), & \text{极小} \end{cases}$$

可导前提下 (连续) x_0 满足的必要条件: $f'(x_0) = 0$ (Fermat 定理)

$$\text{二阶可导前提下. } \begin{cases} f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{极值} & \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{极小} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{极大} \end{cases} \\ * f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{非极值} \end{cases}$$

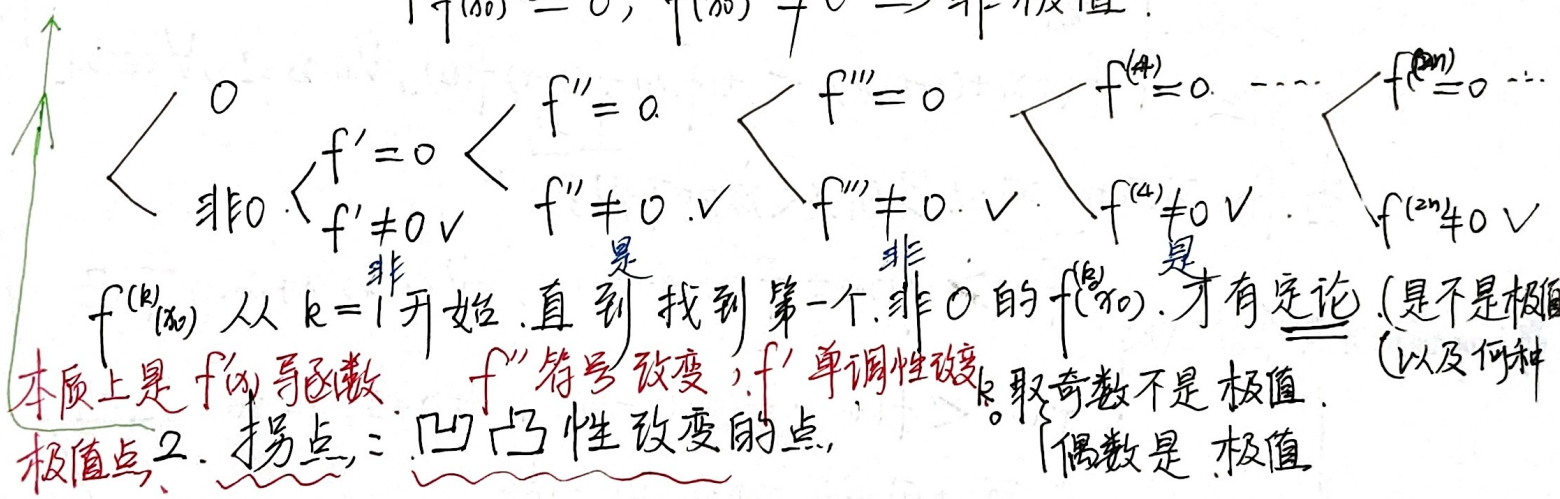
推论:

$$\text{推广. } f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0.$$

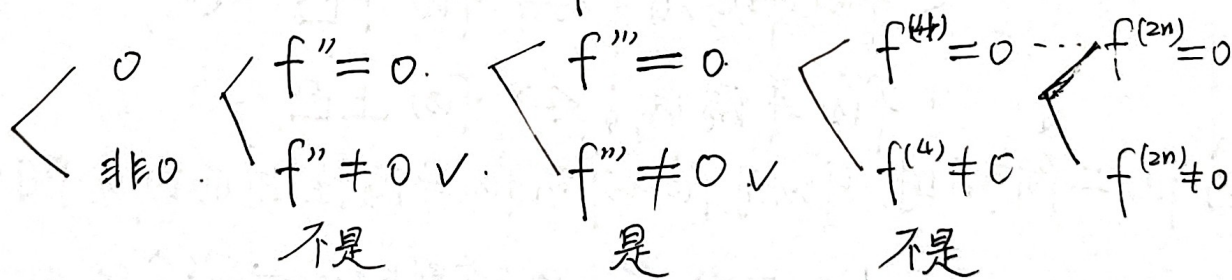
对于临界点而言.

不是极值点则为拐点

$$\begin{cases} f^{(2n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{极值} & \begin{cases} f^{(2n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \text{极小} \\ f^{(2n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \text{极大} \end{cases} \\ f^{(2n)}(x_0) = 0, f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{非极值} \end{cases}$$



类似地. 有必要条件. $f''(x_0) = 0$.



$f^{(k)}(x_0)$ 从 $k=2$ 开始. 直到找到第一个非 0 的 $f^{(k)}(x_0)$ 才有定论.

k_0 取. $\begin{cases} \text{奇数. 是拐点,} \\ \text{偶数. 不是拐点} \end{cases}$