函数性质

(一) 区间上的性质

$f(x)$ 1. 单调性：
原函数

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2), & \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \quad \text{单调增} \\ \text{或} & \\ f(x_1) > f(x_2), & \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \quad \text{单调减} \end{cases}$$

当 $f(x)$ 可导时 可以用 $f'(x)$ 研究单调性

Lagrange 中值定理证之

$$\begin{cases} f(x)\ \text{单调增} \uparrow \Leftrightarrow f'(x) \geq 0\text{，等号仅在个别点成立} \\ f(x)\ \text{单调减} \downarrow \Leftrightarrow f'(x) \leq 0\text{，等号仅在个别点成立} \end{cases}$$

此条件充要. 减弱后半部分成为必要. 加强前半成为充分条件.

2. 凹凸性

本质上是导函数 $f'(x)$ 的单调性.

$$\begin{cases} f(tx_1+(1-t)x_2) < tf(x_1)+(1-t)f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in I,\ \forall t \in (0,1) \quad \text{下凸} \\ \text{或} \\ f(tx_1+(1-t)x_2) < tf(x_1)+(1-t)f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in I,\ \forall t \in (0,1) \quad \text{上凸} \end{cases}$$

当 $f(x)$ 可导时 可以等价定义成如下形式

带 Lagrange 余项泰勒公式证之

$$\begin{cases} f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),\ \forall x \in I,\ x \neq x_0. \quad \text{下凸} \\ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),\ \forall x \in I,\ x \neq x_0. \quad \text{上凸} \end{cases}$$

可以用 $f'(x)$ 研究凹凸性.

$$\begin{cases} f'(x)\ \text{单调增} \uparrow \Leftrightarrow f(x)\ \text{下凸} \\ f'(x)\ \text{单调减} \downarrow \Leftrightarrow f(x)\ \text{上凸} \end{cases}$$

当 $f(x)$ 二阶可导时，可以用 $f''(x)$ 研究 $f'(x)$ 单调性，进而研究凹凸性

$$\begin{cases} f''(x) \geq 0\text{，等号仅在个别点成立} \Leftrightarrow f'(x) \uparrow \Leftrightarrow f(x)\ \text{下凸} \\ f''(x) \leq 0\text{，等号仅在个别点成立} \Leftrightarrow f'(x) \downarrow \Leftrightarrow f(x)\ \text{上凸} \end{cases}$$

(二) 个别点的性质

f' 符号改变

$f(x)$ 1. 极值点：单调性改变的点 ← (连续函数而言)

原函数的

$$\exists U_\delta(x_0)\ s.t.\begin{cases} f(x)\le f(x_0),\ \forall x\in U_\delta(x_0), & \text{极大} \\ f(x)\ge f(x_0),\ \forall x\in U_\delta(x_0), & \text{极小} \end{cases}$$

可导前提下(也连续) x_0 满足的必要条件：$f'(x_0)=0$ (Fermat定理)

二阶可导前提下

$$\begin{cases} f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\ne 0 \Rightarrow \text{极值}\begin{cases} f''(x_0)>0 \Rightarrow \text{极小} \\ f''(x_0)<0 \Rightarrow \text{极大} \end{cases} \\ {}^{*} f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0 \text{ 且 } f'''(x_0)\ne 0 \Rightarrow \text{非极值} \end{cases}$$

推论：

推广. $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n-1)}(x_0)=0$

对于临界点而言

不是极值点则为拐点

$$\begin{cases} f^{(2n)}(x_0)\ne 0 \Rightarrow \text{极值}\begin{cases} f^{(2n)}(x_0)>0 \Rightarrow \text{极小} \\ f^{(2n)}(x_0)<0 \Rightarrow \text{极大} \end{cases} \\ f^{(2n)}(x_0)=0,\ f^{(2n+1)}(x_0)\ne 0 \Rightarrow \text{非极值} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \\ \text{非}0 \begin{cases} f'=0 \begin{cases} f''=0 \begin{cases} f'''=0 \begin{cases} f^{(4)}=0 \cdots \begin{cases} f^{(2n)}=0 \cdots \\ f^{(2n)}\ne 0\ ✓ \end{cases} \\ f^{(4)}\ne 0\ ✓ \end{cases} \\ f'''\ne 0\ ✓ \end{cases} \\ f''\ne 0\ ✓ \end{cases} \\ f'\ne 0\ ✓ \end{cases} \end{cases}$$

非 是 非 是

$f^{(k)}(x_0)$ 从 $k=1$ 开始 直到找到第一个非0的 $f^{(k_0)}(x_0)$ 才有定论 (是不是极值 (以及何种

本质上是 $f'(x)$ 导函数 f'' 符号改变，f' 单调性改变

k_0 取 $\begin{cases}\text{奇数不是极值} \\ \text{偶数是极值}\end{cases}$

极值点 2. 拐点：凹凸性改变的点

类似地 有必要条件 $f''(x_0)=0$

$$\begin{cases} 0 \\ \text{非}0 \begin{cases} f''=0 \begin{cases} f'''=0 \begin{cases} f^{(4)}=0 \cdots \begin{cases} f^{(2n)}=0 \\ f^{(2n)}\ne 0 \end{cases} \\ f^{(4)}\ne 0 \end{cases} \\ f'''\ne 0\ ✓ \end{cases} \\ f''\ne 0\ ✓ \end{cases} \end{cases}$$

不是 是 不是

$f^{(k)}(x_0)$ 从 $k=2$ 开始 直到找到第一个非0的 $f^{(k_0)}(x_0)$ 才有定论

k_0 取 $\begin{cases}\text{奇数 是拐点} \\ \text{偶数 不是拐点}\end{cases}$