曲线积分与路径无关

Bright Moon

August 23, 2024

1 曲线积分与路径无关的相关表述

$$\int_L \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r}$$

其中，L 是区域 D 中的一条有向路径；$\vec{F}(x,y,z)$ 是一个三元向量函数。

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(z,y,z))$$

1. 第二型曲线积分与路径无关。
2. $\vec{F}(x,y,z)$ 在 D 内是保守场。
3. $\vec{F}(x,y,z)$ 在 D 内沿任意闭曲线 Γ 环量为零。

$$\oint_\Gamma \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = 0$$

4. $\vec{F}(x,y,z)$ 在 D 内存在连续可微的原函数 $f(x,y,z)$。
5. $\vec{F}(x,y,z)$ 在 D 内可以看作一个函数 $u(x,y,z)$ 的负梯度。

$$\vec{F}(x,y,z) = -\nabla u(x,y,z)$$

6. $\vec{F}(x,y,z)$ 在 D 内是有势场。
7. $\vec{F}(x,y,z)$ 在 D 内是无旋场。

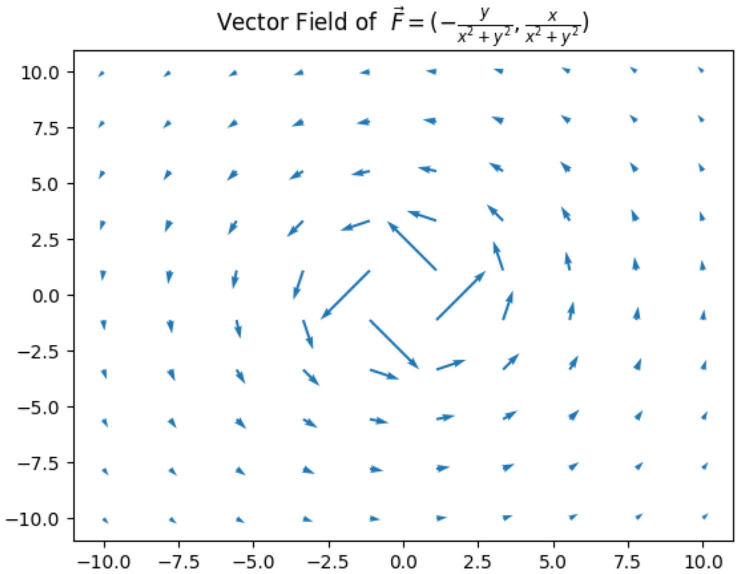
$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \vec{0}$$

8. $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$；$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$；$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

2 相关表述的等价性

2.1 紧凑的表示

$$1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6 \begin{cases} \longrightarrow 7 \Leftrightarrow 8, & \text{不要求 } D \text{ 单连通} \\ \longleftarrow 7 \Leftrightarrow 8, & \text{要求 } D \text{ 单连通} \end{cases} \tag{1}$$



2.2 文字描述

1 是 2 的定义，5 是 6 的定义。1、2、3、4、5、6 彼此之间两两等价。根据旋度的定义，7、8 等价。

根据旋度的定义（旋度取环量面密度最大的数值与方向），3 可以推出 7。类似的，由于连续函数混合偏导数相等，所以 4 可以推出 8。这两条向右走的逻辑都不需要 D 为单连通区域。

7 推出 3 要借助斯托克斯公式，因此，要求 D 是单连通区域。

$$\oint_{\partial S} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{F}(x,y,z)\right) \cdot d\vec{S}$$

斯托克斯公式可以在多连通区域使用。但是只有在单连通区域，Γ 才可能是双侧曲面 S 的边界，即，$\Gamma = \partial S$。