方程(组)与函数(映射).

方程： $F(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0$.

观点一：是函数 $F(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 的零点，/函数值取0时的特殊情况.

观点二：给出了 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 之间的一条约束关系.

基于此，一部分变量可以看作另一部分剩余变量的函数. $(x_i, \cdots x_j) = \vec{f}(x_p, \cdots x_q)$.

映射 $(x_p, \cdots x_q) \xrightarrow{\vec{f}} (x_i, \cdots x_j)$

即，一个方程可以确定若干个隐函数/映射.

但是 y 与 x 之间存在约束关系，不能保证 y 是 x 的函数/映射

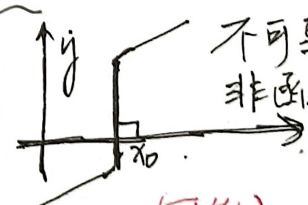
后者要求唯一的 y 与给定的 x 相对应.

所以需要定理判别隐函数的存在性，即方程给出的约束关系能否上升到函数关系.

(一般) (特殊).

另外可以同时研究隐函数的可导性(求(偏)导及J).

* 可导性与存在性是有关联的 如



"上家".

F 函数 $\xrightarrow{\vec{f}^{-1}}$ $F=0$ 方程 $\xrightarrow{\vec{f}^{-1}}$ $\left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \right.$ 隐函数. (可能)互逆映射.

*研究 $\vec{f}$ 逆映射存在性 可将其视作方程 $\vec{F} = 0$ 的隐函数. 套用隐函数存在定理 同时得到其导数"

举例：参数/自变量　因变量/未知数

1. 方程 $F(x,y)=0$

$$\begin{cases} x \overset{?}{=} x(y)，条件：\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0 . \\ y \overset{?}{=} y(x)，条件：\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0 . \end{cases}$$

（控制 y 不变）

$\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$ 说明在 (x_0,y_0) 处 x 的改变不引起 $F(x,y)$ 改变

$F(x,y)=0$ 在 x 的改变过程中仍然成立.

即被控制不变的 $y=y_0$ 可以对应多个 x.

x 不能看作 y 的函数 $x \neq x(y)$.

同理 $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0 \Longrightarrow$ y 的改变不引发 $F(x,y)$ 改变

$F(x,y)$ 仍成立，对应着 $x=x_0$.

$y \neq y(x)$.

抽象概括：隐函数 f 被视作因变量的 y 必须足以（控制 $x=x_0$）独立引起 $F(x,y)$ 的改变从而使方程 $F(x,y)=0$ 不再成立

避免一个 $x=x_0$ 对应多个 y.

$F(x,y)=0$ 在 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 条件下，$y=y(x)$.

$F(x,y(x))=0$ 对 x 求导 $\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

非0 存在 $y(x)$

非0 可导 $y(x)$.

参数/自变量　因变量/未知数

2. 方程 $F(x,y,z)=0$ 以隐函数 $z=z(x,y)$ 为例.

存在条件：$\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$

$F(x,y,z(x,y))=0$
$$\begin{cases} 对x求偏导\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ 对y求偏导\ \dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0. \end{cases}$$

非0　可偏导

3. 方程组 $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} u=u(x) \\ v=v(x) \end{cases}$ 存在条件. $J\neq 0$.

参数/自变量：因变量/未知数.

存在条件. 以隐函数的因变量(u,v)为方程函数F/G的自变量应能独立引发其改变.

$$J=\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0$$

J

导数：

$$F(x,u(x),v(x))=0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}=0$$

$$G(x,u(x),v(x))=0 \rightarrow \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}=0$$

$\left(\frac{du}{dx},\frac{dv}{dx}\right)$ 存在(可导)条件：$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0$ 即$\Delta\neq 0$.

4. 方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 以 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 为例

2维 $R^2\rightarrow R^2$ 是由未知数个数和方程个数决定的.

自变量维数＝未知数个数－方程个数.

存在条件 $\frac{D(F,G)}{D(u,v)}\neq 0$ 同上.

偏导数.

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

5. $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \Longleftrightarrow (u,v) \xrightarrow{f} (x,y)$. 视所求 f^{-1} 为隐函数

找到对应方程组. $\begin{cases} x(u,v) - x = 0 \\ y(u,v) - y = 0 \end{cases}$

自 f^{-1} 因　　　　　　　　　　　　因 f 自

$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x(u,v) - x = 0 \\ G(x,y,u,v) = y(u,v) - y = 0 \end{cases}$ 互逆 $\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} u = (x,y) \\ v = (x,y) \end{cases}$ 存在条件. $\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0$ $\boxed{\text{即可逆条件.}}$

$J = \dfrac{D(F,G)}{D(u,v)} = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ 即 $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$

仅视 u,v 为变量 单独 x,y 为常数.

求 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 导数 与 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 导数关系

$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \dfrac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$ 形式上成立 实际也成立

证: $\begin{cases} x = x(u(x,y), v(x,y)) \\ y = y(u(x,y), v(x,y)) \end{cases}$ 对 x 求导 $\begin{cases} 1 = x_u u_x + x_v v_x \\ 0 = y_u u_x + y_v v_x \end{cases}$

$u_x = \dfrac{y_v}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$　$v_x = \dfrac{-y_u}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$ 同理可求 u_y v_y.

可以验证 $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \dfrac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$

* $\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}_{\text{一阶导 (I)}}$; $\underbrace{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{一阶导 (II)}} = \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ 汀

* 一维 $(k)\cdot(\Delta x) = k(\Delta x)$.