积分方法.

(一)

$f(x)$
- 有理式(不含根式)
  - 整式
  - 分式 → 真分式 → 部分分式之和：$\frac{A}{(x-a)^n}$; $\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}$
- 无理式(含根式) → 根式之内
  - 一次整式、一次分式 → 初等代换
  - 二次整式 → 欧拉代换
    ↓
    三种类型 递推公式.

↑ 万能公式 代换

$x = g(\sin\alpha / \cos\alpha / \tan\alpha \cdots)$.

(不纯)

三角函数

↓ (纯).

- 奇次幂换元(移走一个) → 多项式.
- 偶次幂降次 $\left(\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}\right)\left(\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}\right)$

(二) 最廉价的换元. $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)\,d(kx+b)$

性价比极高. $= \frac{1}{k}\int f(u)\,du$.

例: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{t^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{t}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{t} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}} \longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm t^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2\pm1}} = \ln\left|\frac{x}{t} \pm \sqrt{1\pm\left(\frac{x}{t}\right)^2}\right| + C$

$\int \frac{dx}{x^2+1} \longrightarrow \int \frac{dx}{x^2+t^2} = \frac{1}{t}\int \frac{d\left(\frac{x}{t}\right)}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1} = \frac{1}{t}\arctan\frac{x}{t} + C$

$\int \frac{dx}{(x^2+t^2)^n} \longrightarrow \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}$ ⇒ 再用递推.

(三) 获取递推式的途径 ~ 分部积分

$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{I_n} = x\cdot f(x) - \underbrace{\int x f'(x)\,dx}_{I_n \text{ 与 } I_{n-1} / I_{n+1}}$ ⇐ 对于多项式等.

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 相差一次

$xf'(x)$ 可拆(成)分出一个

$c\cdot f(x) \Rightarrow I_{n+1} / I_{n-1}$.

(四). 九类相似公式的积分.

$$J_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+t^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+t^2}\right|+C$$

$I_1=J_{-1}$

$$\boxed{(1-n)J_n=x\cdot\frac{1}{(\sqrt{x^2+t^2})^n}-nt^2J_{n+2}},\quad J_n=\int\frac{dx}{(\sqrt{x^2+t^2})^n}$$

$$\Updownarrow$$

$$I_1=\int\sqrt{x^2+t^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+t^2}+\frac{1}{2}t^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+t^2}\right|+C$$

$$\boxed{(n+1)I_n=x(\sqrt{x^2+t^2})^n+nt^2I_{n-2}},\quad I_n=\int(\sqrt{x^2+t^2})^n dx$$

$$\Updownarrow$$

$$K_1=\int\frac{dx}{x^2+t^2}=\frac{1}{t}\arctan\frac{x}{t}+C$$

$$\boxed{(1-2n)K_n=x\cdot\frac{1}{(x^2+t^2)^n}-2nt^2K_{n+1}},\quad K_n=\int\frac{dx}{(x^2+t^2)^n}$$

$$\cdots(\sqrt{x^2+t^2})^5\xrightarrow{-2}(\sqrt{x^2+t^2})^3\xrightarrow{-2}\sqrt{x^2+t^2}\xrightarrow{-2}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\underset{+2}{\overset{-2}{\rightleftarrows}}\frac{1}{(\sqrt{x^2+t^2})^3}\cdots$$

高次 $\longrightarrow$ 低次.

$$(\sqrt{x^2+t^2})^4\xrightarrow{-2}(\sqrt{x^2+t^2})^2\xrightarrow{-2}\frac{1}{x^2+t^2}\underset{+2}{\overset{-2}{\rightleftarrows}}\frac{1}{(x^2+t^2)^2}\cdots$$

以上3个递推公式本质上是等价的. $\frac{1}{(\sqrt{x^2+t^2})^2}\underset{+2}{\overset{-2}{\rightleftarrows}}\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}^{\,4}}$

$$(n+1)\int(\sqrt{x^2+t^2})^{n}dx=x\cdot(\sqrt{x^2+t^2})^{n}+nt^2\int(\sqrt{x^2+t^2})^{n-2}.$$

n在 1, 3, 5, 7, 9 ⋯ 中取值. 得 I 系列. $I_1\quad I_3\quad I_5\quad I_7\cdots$

n在 -2, -4, -6, -8, -10 ⋯ 中取值 得 K 系列. $K_1(J_2)\quad K_2(J_4)\quad K_3(J_6)$

n在 -1, -3, -5, -7, -9 ⋯ 中取值. 得 J 系列. $J_1\quad J_3\quad J_5\quad J_7$.

☆ $(n+1)\int\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)^n dx = x\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)^n - nt^2\int\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)^{n-2}dx$

当 n 在 $-1,-3,-5,-7,-9$ 中取.

记 $\int\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)^n dx = J_{|n|}$.

$J_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-t^2}\right| + C$

当 n 在 $1,3,5,7,9$ 中取

记 $\int\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)^n dx = I_n$

$I_1 = \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x^2-t^2} - \frac{1}{2}t^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-t^2}\right| + C$

当 n 在 $-2,-4,-6,-8,-10$ 中取.

记 $\int\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)^n dx = K_{\frac{|n|}{2}}$.

$K_1 = \int\frac{dx}{x^2-t^2} = \frac{1}{2t}\ln\left|\frac{x-t}{x+t}\right| + C$

☆ $(n+1)\int\left(\sqrt{t^2-x^2}\right)^n dx = x\cdot\left(\sqrt{t^2-x^2}\right)^n + nt^2\int\left(\sqrt{t^2-x^2}\right)^{n-2}dx$.

$n \in \{-1,-3,-5,-7\cdots\} \longrightarrow J_{|n|}$

$J_1 = \int\frac{dx}{\sqrt{t^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{t} + C$

$n \in \{1,3,5,7,9\cdots\} \longrightarrow I_n$.

$I_1 = \int\sqrt{t^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}t^2\arcsin\frac{x}{t} + C$.

$n \in \{-2,-4,-6,-8\cdots\} \longrightarrow K_{\frac{|n|}{2}}$.

$K_1 = \int\frac{dx}{t^2-x^2} = \frac{1}{2t}\ln\left|\frac{x+t}{x-t}\right| + C$.

形式相似的~~递~~推公式 → $\int\left(\sqrt{x^2+t^2}\right)^n dx$　与 $[n' = n-2]$ 之间

共计3组.

$\int\left(\sqrt{x^2-t^2}\right)^n dx$

$\int\left(\sqrt{t^2-x^2}\right)^n dx$

每组之中. n的取值方式.

共计3种.

$$\begin{cases} 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots \to \mathrm{I}. \\ -1,\ -3,\ -5,\ -7\cdots \to \mathrm{J} \\ -2,\ -4,\ -6,\ -8\cdots \to \mathrm{K}. \end{cases}$$

↓

I, J, K, 分别有形式迥异的"初始条件".

I → 略. ← 导出

J → $\begin{cases} \sinh x \\ \cosh x \\ \ln\left|x \pm \sqrt{x^2 \pm t^2}\right|. \end{cases}$

K → $\begin{cases} \frac{1}{t}\arctan\frac{x}{t} \\ \frac{1}{2t}\ln\left|\frac{t-x}{t+x}\right|. \end{cases}$

全部写开有. 3 × 3 = 9 条公式 + 递推式.

其中 $\underbrace{\text{6条为无理式}}$. $\underbrace{\text{3条为有理式}}$.

↓ 不必再代换. 化为有理式.

↓ 不必再化为部分分式之和.