多元函数的概念

(一) 映射与函数概念的分化

$R^n \xrightarrow{\vec f} R^m$，都可以是映射 记作 $\vec f$

$R^n \longrightarrow R$，才是函数 记作($\vec f$ ×) f

$(x_1,x_2,\cdots x_m)=\vec f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 等价于

$$\begin{cases} x_1=f_1(x_1,x_2,\cdots x_n) \\ x_2=f_2(x_1,x_2,\cdots x_n) \\ \vdots \\ x_m=f_m(x_1,x_2,\cdots x_n) \end{cases}$$

所以 $\vec f=(f_1,f_2,\cdots f_m)$

映射与函数的关系

$\vec f$："m个有序n元函数的组合

(二) R^n中的距离 邻域 开集

对应R^1中

① $d(P,Q)=\sqrt{\sum(x_i-x_i^0)^2}$

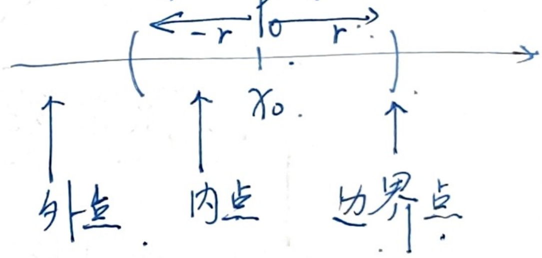
$d=|x_p-x_Q|$

距离 ↓ 邻域 ↓ 边界

$P(x_i^0)$ $Q(x_i)$

$U_r(P_0)=(x_0-r,x_0+r)$

② $U_r(P_0)=\{P\in R^n \mid d(P,P_0)<r\}$

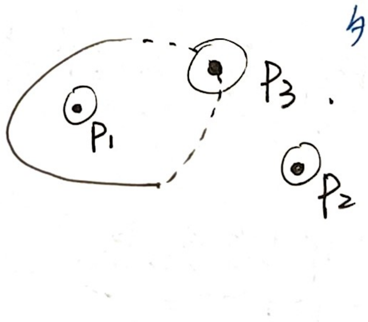


③ $E\subset R^n$ 点P与集合E的关系

P $\begin{cases} \text{内点}, & P_1 \\ \text{外点}, & P_2 \\ \text{边界点}, & P_3 \end{cases}$

⇓

集合：边界 ∂E



E集合依据边界状况分类

开集 $\partial E\cap E=\phi$

闭集 $\partial E\subset E$

半开半闭 $\partial E\cap E\neq\phi$ 且 $\partial E\not\subset E$

④ 若E是开集($\partial E \cap E = \varnothing$)且连通，对应$R^1$中

连通

- E为(开)区域 — 开区间
- $E \cup \partial E$为闭区域，记作$\bar{E}$ — 闭区间

} 区间 → 连通

⑤ 若存在$U_\rho(0)$，ρ为有限值使

有界　$E \subset U_\rho(0)$ 则E为有界集合。

否则无界。

(三) 概念建立之逻辑

R^n中的集合E 考察：

- 边界状况 → {开集, 闭集}
- 连通性 → "区域"
  - → {(开)区域, 闭区域}
- 有界性 → {有界集, 无界集}

Start	End
* 什么是边界？	定义边界∂E

从P_0出发"向四周走"总有一部分"走出E"一部分"走进E"

↓

P_0附近的小区域总有一部在E一部分不在。

↓

P_0的邻域 用$d<r$来刻画。 → 定义邻域

↓

定义R^n中的距离

↓

Branch　有界性定义