(一) 波动方程的由来

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

- 分析介质的动学结构 (I)
- 将波函数的(通)解求导 (II)

波动

举例说明. 分析弹簧振子链 可得.

牛二定律 ⇒ (I)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{Ka^2}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

分析 连续体 (纵) (横)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

分析 气体 (纵)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{p}{\rho}\right)_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

分析 浅水波

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-gh_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

(II) 将 $u(x,t)=\varphi(ct-x)+\psi(ct+x)$ 求导 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

将(I)所得方程与(II)所得方程比照. 即可求得该介质中波速 c.

如: 弹簧振子链 $c=\sqrt{\frac{K}{m}a^2}=\sqrt{\omega_0^2a^2}=\omega_0 a$.

连续体: $c_{/\!/}=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ $\quad c_{\perp}=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$.

声速: $c=\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$.

浅水: $c=\sqrt{gh_0}$.

所以构成了求波速的一种方法.

均是在无色散条件下.

(二) 描述波的物理量

1. 时空参量 ~ 周期性 $\begin{cases} T, \ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ \lambda, \ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \end{cases}$

2. 色散关系 $\omega = \omega(k)$; $c = c(k)$

3. 波的相速 / 波速 $c = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\omega}{k}$

4. 波的群速 $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$; $v_g = \dfrac{w}{\varepsilon}$

   * 无色散 $[\omega = ck]$ 时 $v_g = c$

5. 能量密度 $\varepsilon = \underset{\text{长度}}{\dfrac{1}{a}}\underset{\text{该长度内一个周期内能量均值}}{[\overline{E_k + E_p}]}$

   单位长度所蕴含的能量（均值/周期）

6. 能流~~密度~~（÷S） $w = \dfrac{}{f \cdot v}$ 功率在一个周期内的均值

   单位时间所传递的能量（均值）周期

7. 阻抗 $Z = \dfrac{F}{v}$

   若与位置无关 → Z_c 特性阻抗

   若发生突变 → 波发生反射. 反射系数 $R = \dfrac{\tilde{A}_{反}}{\tilde{A}_{入}} = \dfrac{Z_c - Z_L}{Z_c + Z_L}$

   $\begin{cases} |R| = 1 \ \text{全反射} \Rightarrow \text{驻波} \begin{cases} Z_L = 0, \ R = 1 \\ Z_L = +\infty, \ R = -1 \ \text{半波损失} \end{cases} \\ |R| = 0 \ (\text{全吸收}) \ \text{阻抗匹配} \end{cases}$

(三) 具体的波

1. 在一维弹性介质（弹簧振子链模型）中的简谐波

   (0) 介质参量：K. m. a. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$

   (1) 时空参量：$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

   (2) 色散关系：$\omega = 2\omega_0 \sin\dfrac{ka}{2} = \omega_0 a k$ $(ka = 2\pi \cdot \frac{a}{\lambda} \to$

(3) 相速 $c=\frac{\omega}{k}=\frac{2\omega_0}{k}\cdot\sin\frac{ka}{2}=\omega_0 a$ $\left(ka=2\pi\frac{a}{\lambda}\to 0\right)$.

(4) 群速 $V_g=\frac{d\omega}{dk}=\omega_0 a\cos\frac{ka}{2}=\omega_0 a$ $\left(ka=2\pi\frac{a}{\lambda}\to 0\right)$.

(5) 能量密度 $\varepsilon=\frac{1}{a}\left[\overline{E_k}+\overline{E_p}\right]=\frac{m}{2a}\omega^2A^2$.

$$\varepsilon=\frac{1}{2}KaK^2A^2 \quad \left(ka=2\pi\frac{a}{\lambda}\to 0\right).$$

(6) 能流$\cancel{\overset{\div S}{密度}}$ $W=\overline{P}=\overline{f\cdot v}=\omega_0 KA^2\sin^2\frac{ka}{2}\cos\frac{ka}{2}$

$$=\frac{\sqrt{Km}}{2}\omega^2A^2\cos\frac{ka}{2}.$$

$$V_g'=\frac{W}{\varepsilon}=V_g.$$

$$W=\frac{K\omega_0 a^2k^2}{2}A^2 \quad \left(ka=2\pi\frac{a}{\lambda}\to 0\right).$$

(7) 特性阻抗 $Z_c=\sqrt{Km}$.

2. 一维弹性波(连续体模型).

(0) 介质参量 Y. G. ρ. ; Y对应 $\frac{Ka}{S}$.

(2) 无色散. $\omega=ck$.

(3) 相速 $c_{\parallel}=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ $c_{\perp}=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$.

(4) $V_g=c$

(5) $\varepsilon=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$.

(6) $W=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\cdot c$.

ρ对应上述 $\frac{m}{aS}$.

3. 声波

(0) 介质参量: $\rho=\rho_0+\tilde{\rho}$; $p=p_0+\tilde{p}$; $v=\tilde{v}$; $pV^{\gamma}=nRT$.

(1). $\omega=\frac{2\pi}{T}$ $k=\frac{2\pi}{\lambda}$.

(2). 无色散

(3). $C_s=\sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}}=\left(\frac{p}{\rho}\right)$。

(6). 能流$\cancel{\underset{\div S}{密度}}$/声强: $I=\frac{1}{2}\rho_0 C_s\omega^2A^2$.

$I_0 = 1\times10^{-12}\ W/m^2$.

声强级. $L = \underline{\underline{10}}\ \lg\frac{I}{I_0}$ ($\underline{\underline{分贝}}$).

4. 水面波.

λ长波 (重力)

$\omega = k\sqrt{gh}\ \tanh\sqrt{kh}$.

$\begin{cases} 浅 & \omega = k\sqrt{gh}\ ;\ c = \sqrt{gh} & 无色散 \\ 深. & \omega = \sqrt{gk}\ ;\ c = \sqrt{\frac{g}{k}} = 2v_g. & 色散 \end{cases}$

λ短波 (重力+表面张力). $c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}}$.

(四) 总结.

1. 抽象的波. $\begin{cases} 波函数 & u = u(x,t) = \varphi(ct-x) + \psi(ct+x). \\ 波动方程. & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \end{cases}$

↑

用 $\begin{cases} \omega, k,\ \omega = \omega(k). \\ c.\ v_g \\ \varepsilon.\ w.\ I = \frac{w}{s} \quad \propto \underline{\underline{\omega^2 A^2}}. \\ z. \end{cases}$ 描述.

2. 具体的波函数. 如: $u = u(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$.

$\hat{u} = \hat{A}e^{i(\omega t - kx)}$.

3. 具体的介质. 如: 弹性体. 空气. 水等.

对应相关参量如: $\begin{cases} m.\ K.\ \omega_0. \\ Y\ \ G\ \ \rho. \\ p\ \ \rho\ \ v. \\ h.\ g.\ \gamma.\ \rho. \end{cases}$