No.

Date

定理 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} = a$.

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon_1>0 \quad |a_n-a|<\varepsilon_1, \quad n>N_1$ (#)

要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \left|\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}-a\right|<\varepsilon, n>N$

$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| = \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots(a_n-a)}{n}\right|$

$\leq \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots|a_n-a|}{n}$ (*) 希望 $<\varepsilon$, $n>N$.

对于给定的 N, $|a_1-a|, |a_2-a|, \cdots |a_N-a|$ 为定值

$M_N \overset{def}{=} |a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_N-a|$ 为定值, 不随 n 改变.

$(*) = \frac{M_N+|a_{N+1}-a|+|a_{N+2}-a|+\cdots|a_n-a|}{n}$.

(∵(#)式)

在选取 N 时, 使 $N>N_1$ 从而有.

$\forall\varepsilon_1>0 \quad |a_{N+1}-a|<\varepsilon_1 \quad |a_{N+2}-a|<\varepsilon_1 \cdots |a_n-a|<\varepsilon_1$.

$\therefore (*) \leq \frac{M_N+(n-N)\varepsilon_1}{n}$.

以下证 $\frac{M_N+(n-N)\varepsilon_1}{n}<\varepsilon$.

即 $\frac{M_N}{n}+\frac{n-N}{n}\varepsilon_1<\varepsilon$.

对 $\forall\varepsilon_2>0$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M_N}{n}=0$. 所以有 $\left|\frac{M_N}{n}\right|<\varepsilon_2, \quad n>N_2$.

因为 $\frac{n-N}{n}<1$ 所以 $\frac{n-N}{n}\varepsilon_1<\varepsilon_1$.

所以 $\frac{M_N}{n}+\frac{n-N}{n}\varepsilon_1 < \varepsilon_2+\varepsilon_1$, 其中 $\varepsilon_2, \varepsilon_1$ 为任意正数.

不妨令 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2} \quad \varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}$. 从而 $\frac{M_N}{n}+\frac{n-N}{n}\varepsilon_1<\varepsilon$.

从而 $(*) \leq \cdots \leq \varepsilon$ ∴ 得证.