Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа №2

Тема: «Решение задач транспортного типа»

по дисциплине

«Методы оптимизаций»

Выполнили студенты
группы 3630102/80401

Мамаева Анастасия Сергеевна
Веденичев Дмитрий Александрович
Тырыкин Ярослав Алексеевич

Руководитель
Доцент, к.ф.-м.н.

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2021

СОДЕРЖАНИЕ

1 Постановка задачи

Имеется транспортная таблица

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	8	5	7	5	4	11
A_2	9	6	8	2	3	15
A_3	7	4	7	1	4	10
A_4	5	4	7	1	2	10
	11	8	10	9	8	

Необходимо:

1. Решить транспортную задачу методом потенциалов с выбором начального приближения методом северо-западного угла.

2. Решить эту же задачу симплекс-методом, сравнить результаты.

3. Проверить оптимальность полученного решения.

4. Решить транспортную задачу с усложнением, когда объём хранимого больше объёма доставок.

2 Применимость методов

Пусть имеется n пунктов хранения, в которых сосредоточен однотипный груз, и m пунктов назначения.

Известны:

- a_i - количество груза в i-ом пункте хранения

- b_j - суточная потребность в j-ом пункте назначения

- c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза из i-ого в j-ый пункт

Необходимо составить план перевозок так, чтобы минимизировать стоимость проекта. Рассмотрим, как такую задачу можно формализовать.

В качестве переменных естественно выбрать двухиндексные характеристики: x_{ij} показывают, сколько груза перевозят из i-ого в j-ый пункт. Из физического смысла следует, что:

$$x_{ij} \geq 0$$

Весь груз, который вывезен из i-ого пункта во все пункты назначения, не может превосходить того количества, которое хранилось изначально:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, ..., n$$

Интерпретируем условие, что мы должны удовлетворить потребности в грузе в каждом пункте назначения:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, ..., m$$

Выражение для функции цели запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow min$$

Условием корректности постановки задачи по исходным данным является условие:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Если транспортная задача содержит знаки в виде неравенств, то такая задача называется открытой. Но если выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

то задача называется закрытой.

Для того, чтобы применять методы, разработанные для решения транспортных задач, она должна быть приведена к закрытому типу. Проверим выполнение данного условия к нашей задаче.

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 11 + 15 + 10 + 10 = 46$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 = 11 + 8 + 10 + 9 + 8 = 46$$

Видим, что суммы совпадают, наша задача - закрытого типа.

3 Описание алгоритмов

Для того, чтобы найти начальное приближение (начальный план) воспользуемся методом северо-западного угла.

3.1 Метод северо-западного угла

На вход поступает: запас, потребность

1. Будем двигаться по таблице и заполнять её соответствующими объёмами перевозок в северо-западном направлении. То есть будем начинать с верхнего левого угла, клетки (1, 1).

2. Ищем минимум $min\{\text{запас}[i], \text{потребность}[j]\}$ и заполняемым полученным результатом текущую ячейку, в которой находимся.

3. Вычитаем из запас$[i]$ и потребность$[j]$ найденный минимальный элемент.

4. Передвигаемся вправо по матрице $(j = j + 1)$, если запас$[i]$ $! =\ 0$
   Передвигаемся вниз $(i = i + 1)$, если потребность$[j]$ $! =\ 0$,
   иначе двигаемся по диагонали.

5. Повторяем действия 2 - 4, пока не окажемся в правой нижней ячейке (n, m).

По вышеизложенному алгоритму построим начальный план для исходной задачи.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	-	-	-	-	11
A_2	-					15
A_3	-					10
A_4	-					10
	11	8	10	9	8	

В клетку (1, 1) запишем $min\{11, 11\} = 11$. Закроем оставшиеся клетки столбца и строки прочерками.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	-	-	-	-	11
A_2	-	8				15
A_3	-	-				10
A_4	-	-				10
	11	8	10	9	8	

В клетку (2, 2) запишем $min\{8, 15\} = 8$. Закроем оставшиеся клетки столбца прочерками.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	-	-	-	-	11
A_2	-	8	7	-	-	15
A_3	-	-				10
A_4	-	-				10
	11	8	10	9	8	

В клетку (3, 2) запишем $min\{7, 10\} = 7$. Закроем оставшиеся клетки строки прочерками.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	-	-	-	-	11
A_2	-	8	7	-	-	15
A_3	-	-	3			10
A_4	-	-	-			10
	11	8	10	9	8	

В клетку (3, 3) запишем $min\{3, 7\} = 3$. Закроем оставшиеся клетки столбца прочерками.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	-	-	-	-	11
A_2	-	8	7	-	-	15
A_3	-	-	3	7	-	10
A_4	-	-	-			10
	11	8	10	9	8	

В клетку (4, 3) запишем $min\{7, 9\} = 7$. Закроем оставшиеся клетки строки прочерками.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	-	-	-	-	11
A_2	-	8	7	-	-	15
A_3	-	-	3	7	-	10
A_4	-	-	-	2		10
	11	8	10	9	8	

В клетку (4, 4) запишем $min\{2, 8\} = 2$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	-	-	-	-	11
A_2	-	8	7	-	-	15
A_3	-	-	3	7	-	10
A_4	-	-	-	2	8	10
	11	8	10	9	8	

В последнюю незаполненную клетку (5, 4) запишем $min\{8, 10\} = 8$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	-	-	-	-	11
A_2	-	8	7	-	-	15
A_3	-	-	3	7	-	10
A_4	-	-	-	2	8	10
	11	8	10	9	8	

3.2 Проверка опорного плана на вырожденность

Система

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad 1 \le i \le n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad 1 \le j \le m \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

имеет $m + n$ уравнений относительно x_{ij}. Условие закрытого типа (наличие равенств) позволяет выразить явно одну переменную через другие. Значит базисная система будет состоять из $n+m-1$ уравнений.

Следовательно первым делом, как получили начальное приближение, мы должны проверить, сколько заполненых клеток в таблице. В нашем случае $m = 4$, $n = 5$, значит должно быть занято $4 + 5 - 1 = 8$ ячеек, но видим что это не так.

Принимая это во внимание, заключаем, что опорный план - вырожденный. А значит мы должны пополнить его фиктивным элементом - нулём. Важно помнить, что проверку на вырожденность надо производить и в дальнейшем, каждый раз после построения очередного цикла пересчёта.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	0	-	-	-	11
A_2	-	8	7	-	-	15
A_3	-	-	3	7	-	10
A_4	-	-	-	2	8	10
	11	8	10	9	8	

Получили точку, которая является допустимой:

$$x^0 = (11\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 7\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 7\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 8)$$

$$f(x^0) = 11 \cdot 8 + 8 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 238$$

Очевидно, что полученный план не является оптимальным, так как при заполнении клеток мы вовсе не учитывали их стоимости.

3.3 Метод потенциалов

Для решения транспортных задач в табличной форме используется метод потенциалов. Представим симплекс таблицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} & u_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} & u_n \\ \hline v_1 & v_2 & \dots & v_m & \end{array}\right)$$

Сопоставим каждой строчке переменную, которую назовём потенциалом u_i, а каждому столбцу переменную v_j.

Теорема 1. *Для того, чтобы $x_*[N]$ была оптимальной точкой в задаче линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы $\exists y_*[M]$ такой, что*

$$c^T[N] - y_*^T[M] \cdot A[M,N] \geq 0$$

$$(c^T[N] - y_*^T[M] \cdot A[M,N]) \cdot x_*[N] = 0$$

Если проанализируем условие оптимальности для потенциалов, то увидим, что эти условия соответствуют получению решений, отвечающих условиям

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

Алгоритм метода потенциалов

1. Вычисляются векторы потенциалов для базисных клеток $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ из условий

   $$u_i + v_j = c_{ij}, \quad x_{ij} > 0$$

   Поскольку в полученой системе $n+m-1$ уравнений и $n+m$ переменных, введем искусственное ограничение $v_0 = 0$. Далее решаем СЛАУ, поочередно выражая переменные через друг друга.

2. Для свободных клеток, то есть для несвязанных пар «поставщик-продавец», вычисляются сумма потенциалов $\alpha_{ij} = u_i + v_j$

3. Если $\forall\ i,\ j :\ x_{ij} = 0\ \rightarrow\ \alpha_{ij} \leq c_{ij}$, то как следует из результатов теории двойственности [3], план оптимальный и процесс завершается. В противном случае продолжаем алгоритм: переходим к пересчёту плана.

4. Выберем $(i,j) = argmax_{i,j}(\alpha_{ij} - c_{ij})$. Ячейка с координатами (i,j) - вводимая в план перевозок.

5. Находим цикл пересчёта - замкнутую последовательность перемещений внутри таблицы по горизонтали и вертикали попеременно, начинающуюся и кончающуюся во вводимой клетке, в которой все ячейки, где меняется направление - заполненны.

6. Выбираем минимальное значение θ из всех объёмов перевозок в вершинах цикла. Добавляем его в клетку, бывшую пустой, вычитаем из следующей в цепочке, добавляем к третьей и так далее поочередно. Клетка, значение перевозок в которой было равно θ, помечается как пустая. Можно показать, что объёмы поставок после этой операции остаются прежними как у поставщиков, так и у потребителей.

7. После изменения плана перевозок возвращаемся к первому пункту - пересчитываем потенциалы, их сумму и продолжаем алгоритм.

3.4 Поиск цикла пересчёта

Предварительно оговорим, что мы можем двигаться только вверх-вниз-вправо-влево (двумерная окрестность фон-Неймана порядка 1). Создадим множество, в которое будем складывать посещённые вершины. В цикле по всевозможным направлениям для стартовой ячейки находим, какая будет следующей. Для неё запускаем функцию «Walk»

Описание функции «Walk»

1. Проверяем, не вышли ли мы за границы/посещали ли мы эту ячейку ранее.

2. Проверяем тип ячейки: базисная или нет

3. Помечаем ячейку как посещенную.

4.
   I Если ячейка оказалась не базисной, то продолжаем движение в текущем направлении и запускаем функцию «Walk» для следующей клетки.

   II Если ячейка базисная, то по всем доступным направлениям считаем следующую ячейку и запускаем для них «Walk»

III Если ячейка начальная, то возвращаемся из рекурсии функций «Walk», записывая базисные ячейки, в которых мы поменяли направление.

Покажем первую итерацию метода потенциалов:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	0	-	-	-	11
A_2	-	8	7	-	-	15
A_3	-	-	3	7	-	10
A_4	-	-	-	2	8	10
	11	8	10	9	8	

Выберем пустую ячейку, с которой начнём строить цикл, пусть это будет клетка $(4, 1)$ Ломанная пути будем иметь вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11/-	0/+	-	-	-	11
A_2	-	8/-	7/+	-	-	15
A_3	-	-	3/-	7/+	-	10
A_4	-/+	-	-	2/-	8	10
	11	8	10	9	8	

Выбираем клетки, в которых записал «-» и ищем среди них минимальное число:

$$min\{2,\ 3,\ 8,\ 11\} = 2$$

Тогда после пересчета, таблица будет выглядеть:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9	2	-	-	-	11
A_2	-	6	9	-	-	15
A_3	-	-	1	9	-	10
A_4	2	-	-	-	8	10
	11	8	10	9	8	

4 Результаты решения задачи

В результате выполнения программы получили оптимальный опорный план:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	-	1	10	-	-	11
A_2	-	-	-	7	8	15
A_3	1	7	-	2	-	10
A_4	10	-	-	-	-	10
	11	8	10	9	8	

Векторы потенциалов при этом равны:

$$u^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad v^* = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислив значение целевой функции, получим:

$$F = 1 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 10 \cdot 5 = 200$$

5 Решение задачи симплекс-методом

5.1 Постановка прямой задачи

Так как наша задача является канонической задачей линейного программирования, то мы можем решить ее симплекс-методом. Для этого приведем ее к виду СЛАУ.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 11 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 15 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 10 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 10 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 11 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 8 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 10 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 9 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 8 \\ x_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad 1 \leq j \leq 5 \end{cases}$$

$$F = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow min$$

Однако, если мы сложим первые 4 строчки и последние 5, мы получим одно и то же выражение. Строки этой матрицы - линейнозависимы. Исключим из рассмотрения последнее уравнение, тогда получим:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=11 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=15 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=10 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=10 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=11 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=8 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=10 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=9 \\ x_{ij}\geq 0, \quad 1\leq i\leq 4, \quad 1\leq j\leq 5 \end{cases}$$

Значения c_i будем брать из транспортной таблицы (1)

Вектор решения прямой задачи - план:

$$x^* = (1\ 0\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 7\ 8\ 0\ 8\ 0\ 2\ 0\ 10\ 0\ 0)^T$$

Значение функции цели принимает значение:

$$F = 1\cdot 8 + 10\cdot 7 + 7\cdot 2 + 8\cdot 3 + 8\cdot 4 + 2\cdot 5 + 10\cdot 7 = 200$$

Если сравним полученные результаты симлпекс-методом и методом потенциалов, заметим что вектор решения x^* отличается, однако значение целевой функции совпало.

5.2 Постановка двойственной задачи

$$\begin{cases} y_1 + y_5 \le 8, \\ y_1 + y_6 \le 5, \\ y_1 + y_7 \le 7, \\ y_1 + y_8 \le 5, \\ y_1 \le 4, \\ y_2 + y_5 \le 9, \\ y_2 + y_6 \le 6, \\ y_2 + y_7 \le 8, \\ y_2 + y_8 \le 2, \\ y_2 \le 3, \\ y_3 + y_5 \le 7, \\ y_3 + y_6 \le 4, \\ y_3 + y_7 \le 7, \\ y_3 + y_8 \le 1, \\ y_3 \le 4, \\ y_4 + y_5 \le 5, \\ y_4 + y_6 \le 4, \\ y_4 + y_7 \le 7, \\ y_4 + y_8 \le 1, \\ y_4 \le 2, \\ y_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le 8. \end{cases}$$

$$F = 11y_1 + 15y_2 + 10y_3 + 10y_4 + 11y_5 + 8y_6 + 10y_7 + 9y_8 \to max.$$

Все ограничения содержат неравенства,значит необходимо приведение к каноническому виду.

5.2.1 Приведение двойственной задачи к канонической форме

Для того, чтобы привести задачу к канонической форме воспользуемся алгоритмом, который изучили в прошлой лабораторной работе (Решение задач линейного программирования симплекс-методом). Введём новые переменные с ограничением на знаки:

$$y_1 = u_1 - v_1$$

$$y_2 = u_2 - v_2$$

$$y_3 = u_3 - v_3$$

$$y_4 = u_4 - v_4$$

$$y_5 = u_5 - v_5$$

$$y_6 = u_6 - v_6$$

$$y_7 = u_7 - v_7$$

$$y_8 = u_8 - v_8$$

а также добавим дополнительные переменные $t_j \quad j = 1...20$ чтобы неравенства превратить в равенства.

$$
\begin{cases}
y_1 + y_5 \le 8,\\
y_1 + y_6 \le 5,\\
y_1 + y_7 \le 7,\\
y_1 + y_8 \le 5,\\
y_1 \le 4,\\
y_2 + y_5 \le 9,\\
y_2 + y_6 \le 6,\\
y_2 + y_7 \le 8,\\
y_2 + y_8 \le 2,\\
y_2 \le 3,\\
y_3 + y_5 \le 7,\\
y_3 + y_6 \le 4,\\
y_3 + y_7 \le 7,\\
y_3 + y_8 \le 1,\\
y_3 \le 4,\\
y_4 + y_5 \le 5,\\
y_4 + y_6 \le 4,\\
y_4 + y_7 \le 7,\\
y_4 + y_8 \le 1,\\
y_4 \le 2,\\
y_i \in \mathbb{R}, \qquad 1 \le i \le 8.
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
u_1 - v_1 + u_5 - v_5 + t_1 = 8,\\
u_1 - v_1 + u_6 - v_6 + t_2 = 5,\\
u_1 - v_1 + u_7 - v_7 + t_3 = 7,\\
u_1 - v_1 + u_8 - v_8 + t_4 = 5,\\
u_1 - v_1 + t_5 = 4,\\
u_2 - v_2 + u_5 - v_5 + t_6 = 9,\\
u_2 - v_2 + u_6 - v_6 + t_7 = 6,\\
u_2 - v_2 + u_7 - v_7 + t_8 = 8,\\
u_2 - v_2 + u_8 - v_8 + t_9 = 2,\\
u_2 - v_2 + t_{10} = 3,\\
u_3 - v_3 + u_5 - v_5 + t_{11} = 7,\\
u_3 - v_3 + u_6 - v_6 + t_{12} = 4,\\
u_3 - v_3 + u_7 - v_7 + t_{13} = 7,\\
u_3 - v_3 + u_8 - v_8 + t_{14} = 1,\\
u_3 - v_3 + t_{15} = 4,\\
u_4 - v_4 + u_5 - v_5 + t_{16} = 5,\\
u_4 - v_4 + u_6 - v_6 + t_{17} = 4,\\
u_4 - v_4 + u_7 - v_7 + t_{18} = 7,\\
u_4 - v_4 + u_8 - v_8 + t_{19} = 1,\\
u_4 - v_4 + t_{20} = 2,\\
u_i, v_i \ge 0, \quad 1 \le i \le 8,\\
t_j \ge 0, \quad 1 \le j \le 20.
\end{cases}
$$

$$
F = (11u_1 + 15u_2 + 10u_3 + 10u_4 + 11u_5 + 8u_6 + 10u_7 + 9u_8) -
$$
$$
(11v_1 + 15v_2 + 10v_3 + 10v_4 + 11v_5 + 8v_6 + 10v_7 + 9v_8) \to max.
$$

Вектор решения двойственной канонической задачи:

$$
y^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T
$$

Значение целевой функции равно $F = 200$

6 Оценка достоверности полученного результата

6.1 Проверка результатов, полученных методом потенциалов

Для проверки оптимальности решения, необходимо выполнение $u_i+v_j \le c_{ij}$ условий во всех пустых клетках, помеченных «–»

$$c = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 8 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad u^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad v^* = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	-	1	10	-	-	11
A_2	-	-	-	7	8	15
A_3	1	7	-	2	-	10
A_4	10	-	-	-	-	10
	11	8	10	9	8	

Проверяем клетку A_1B_1 :

$$u_1 + v_1 = 0 + 8 = 8 \le 8$$

Проверяем клетку A_1B_4 :

$$u_1 + v_4 = 0 + 2 = 2 \le 5$$

Проверяем клетку A_1B_5 :

$$u_1 + v_5 = 0 + 3 = 3 \le 4$$

Проверяем клетку A_2B_1 :

$$u_2 + v_1 = 0 + 8 = 8 \le 9$$

Проверяем клетку A_2B_2 :

$$u_2 + v_2 = 0 + 5 = 5 \le 6$$

Проверяем клетку A_2B_3 :

$$u_2 + v_3 = 0 + 7 = 7 \le 8$$

Проверяем клетку A_3B_3 :

$$u_3 + v_3 = -1 + 7 = 6 \le 7$$

Проверяем клетку A_3B_5 :

$$u_3 + v_5 = -1 + 3 = 2 \le 4$$

Проверяем клетку A_4B_2 :

$$u_4 + v_2 = -3 + 5 = 2 \leq 4$$

Проверяем клетку A_4B_3 :

$$u_4 + v_3 = -3 + 7 = 4 \leq 7$$

Проверяем клетку A_4B_4 :

$$u_4 + v_4 = -3 + 2 = -1 \leq 1$$

Проверяем клетку A_4B_5 :

$$u_4 + v_5 = -3 + 3 = 0 \leq 2$$

Таким образом, полученное решение, действительно, оптимальное.

6.2 Проверка результатов, полученных при помощи симплекс-метода

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 10 & 10 & 11 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 5 & 4 & 9 & 6 & 8 & 2 & 3 & 7 & 4 & 7 & 1 & 4 & 5 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$$

Воспользуемся ранее упомянутой теоремой (1) и проверим оптимальность полученного решения.

$$y_*^T\left[M\right] * A\left[M, N\right] = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 0 & 8 & 5 & 7 & 2 & 0 & 7 & 4 & 6 & 1 & -1 & 5 & 2 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c^T\left[N\right] - y_*^T\left[M\right] * A\left[M, N\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\left(c^T\left[N\right] - y_*^T\left[M\right] * A\left[M, N\right]\right) * x_*\left[N\right] = 0$$

Таким образом, полученное решение является оптимальным для нашей задачи.

7 Решение задачи при условии перепоставок

Транспортные задачи могут быть дополнены различными усложнениями. Это делается для того, чтобы приблизить постановку задачи к некоторой практической ситуации. Приведем примеры усложнений:

- многопродуктовые постановки
- запрет на поставку, когда из $i-$ого в $j-$ый пункт запрещается перевозить груз
- обязательность поставки
- доставка не менее заданного количества груза
- доставка не более заданного количества груза
- возврат тары и минимизация порожного пробега
- сменно-суточный характер организации доставки

В нашей работе рассмотрим задачу в условии перепоставок. Пусть общая потребность останется прежней $b = (11\ 8\ 10\ 9\ 8)$, а общие запасы на складах увеличим на 15 условных единиц $a = (16\ 15\ 15\ 15)$. Значение штрафов положим равными $p = \{1,\ 4,\ 3,\ 6\}$ соответственно. Задача в данной постановке не является закрытой, так как $\sum\limits_{j=1}^{5} b_j \leq \sum\limits_{i=1}^{4} a_i$.

Введём фиктивного потребителя $B_ф$ с потребностью $b_ф = \sum_{i=1}^{4} a_i - \sum_{j=1}^{5} b_j$ и соответствующие тарифы равными нулю: $c_{iф} = 0, \quad i = 1...4$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	
A_1	8	5	7	5	4	0	16
A_2	9	6	8	2	3	0	15
A_3	7	4	7	1	4	0	15
A_4	5	4	7	1	2	0	15
	11	8	10	9	8	15	

Введём в расмотрение, что мы должны учесть штрафы за хранение товара на складах. Будем считать, что стоимости штрафов равносильны стоимости перевозок в фиктивный пункт назначения. Математически это запишем:

$$c_{iф} = c_{iф} + p_i$$

Тогда транспортная таблица примет вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	
A_1	8	5	7	5	4	1	16
A_2	9	6	8	2	3	4	15
A_3	7	4	7	1	4	3	15
A_4	5	4	7	1	2	6	15
	11	8	10	9	8	15	

Оптимальное решение данной задачи получим равным:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$B_ф$	
A_1	-	-	1	-	-	15	16
A_2	-	-	7	-	8	-	15
A_3	-	4	2	9	-	-	15
A_4	11	4	-	-	-	-	15
	11	8	10	9	8	15	

$$x^* = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 15\ 0\ 0\ 7\ 0\ 8\ 0\ 0\ 4\ 2\ 9\ 0\ 0\ 11\ 4\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

Векторы потенциалов при этом равны:

$$u^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v^* = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Целевая функция принимает значение:

$$F = 1 \cdot 7 + 15 \cdot 1 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 9 \cdot 1 + 11 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 212$$

Проверим оптимальность полученного плана:

Клетка $A1B1: \ u_1 + v_1 = 0 + 5 = 5 \leq 8$
Клетка $A_1B_2: \ u_1 + v_2 = 0 + 4 = 4 \leq 5$
Клетка $A_1B_4: \ u_1 + v_4 = 0 + 1 = 1 \leq 5$
Клетка $A_1B_5: \ u_1 + v_5 = 0 + 2 = 2 \leq 4$
Клетка $A_2B_1: \ u_2 + v_1 = 1 + 5 = 6 \leq 9$
Клетка $A_2B_2: \ u_2 + v_2 = 1 + 4 = 5 \leq 6$
Клетка $A_2B_4: \ u_2 + v_4 = 1 + 1 = 2 \leq 2$
Клетка $A_2B_ф: \ u_2 + v_6 = 1 + 1 = 2 \leq 4$
Клетка $A_3B_1: \ u_3 + v_1 = 0 + 5 = 5 \leq 7$
Клетка $A_3B_5: \ u_3 + v_5 = 0 + 2 = 2 \leq 4$
Клетка $A_3B_ф: \ u_3 + v_6 = 0 + 1 = 1 \leq 3$
Клетка $A_4B_3: \ u_4 + v_3 = 0 + 7 = 7 \leq 7$

Клетка $A_4B_4: \ u_4 + v_4 = 0 + 1 = 1 \leq 1$
Клетка $A_4B_5: \ u_4 + v_5 = 0 + 2 = 2 \leq 2$
Клетка $A_4B_ф: \ u_4 + v_6 = 0 + 1 = 1 \leq 6$

Действительно, найденный нами план является оптимальным.

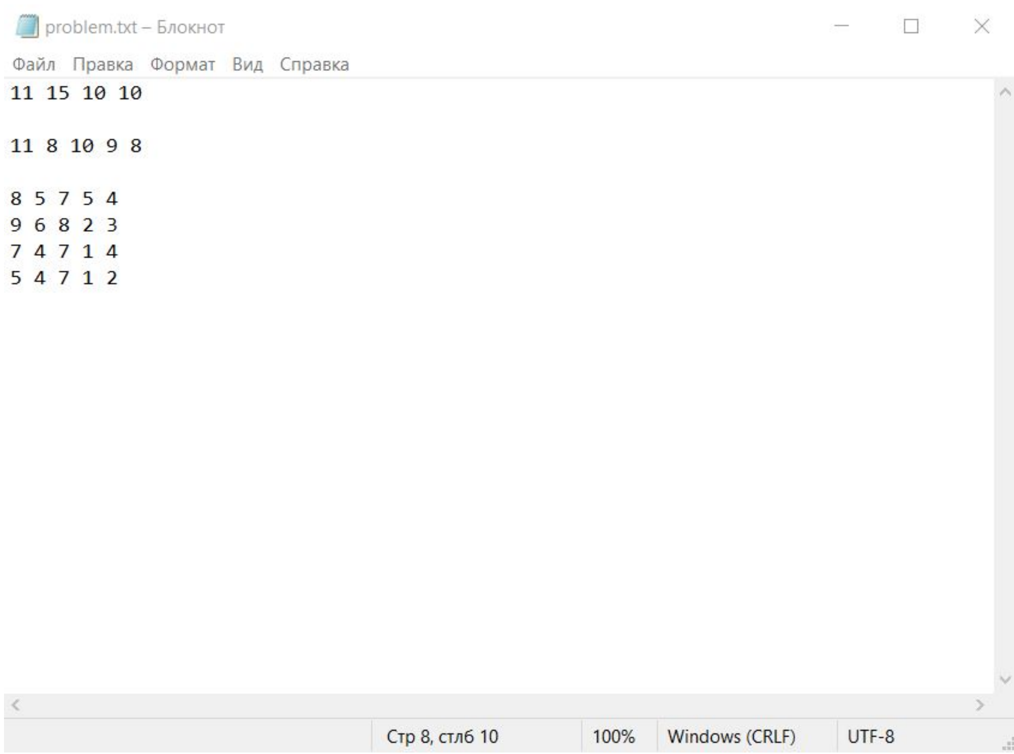
8 Программная реализация

В процессе реализации алгоритмов использовался язык программирования Python3.6. Для проверки полученных решений пользовались пакетом MATLAB2020b.

Исходный код находится в системе контроля версий GitHub
https://github.com/Brightest-Sunshine/Optimization-methods-2021/tree/master/TransportTask/code

9 Результаты работы программы

На вход нашей программе поступает текстовый файл с проблемой



Далее в консоль выводятся промежуточные вычисления. Данная задача решилась за семь итераций. Приведём на скриншоте последнюю седьмую итерацию работы алгоритма.

```
main

Новая изменяемая точка [2, 1]
Ломаная пути [[2, 3, '-'], [1, 3, '+'], [1, 2, '-'], [0, 2, '+'], [0, 1, '-']]
[2, 3, '-']
new plan
['*', 1, 10, '*', '*']
['*', '*', '*', 7, 8]
[1, 7, '*', 2, '*']
[10, '*', '*', '*', '*']
Заполнение верное
v_1+u_0=5
v_2+u_0=7
v_3+u_1=2
v_4+u_1=3
v_0+u_2=7
v_1+u_2=4
v_3+u_2=1
v_0+u_3=5
{'u_0': 0, 'v_1': 5, 'v_2': 7, 'u_2': -1, 'v_3': 2, 'u_1': 0, 'v_4': 3, 'v_0': 8, 'u_3': -3}
Производители  [0, 0, -1, -3]
Потребители  [8, 5, 7, 2, 3]
END
final plan
['*', 1, 10, '*', '*']
['*', '*', '*', 7, 8]
[1, 7, '*', 2, '*']
[10, '*', '*', '*', '*']

result of calculation:  200
```

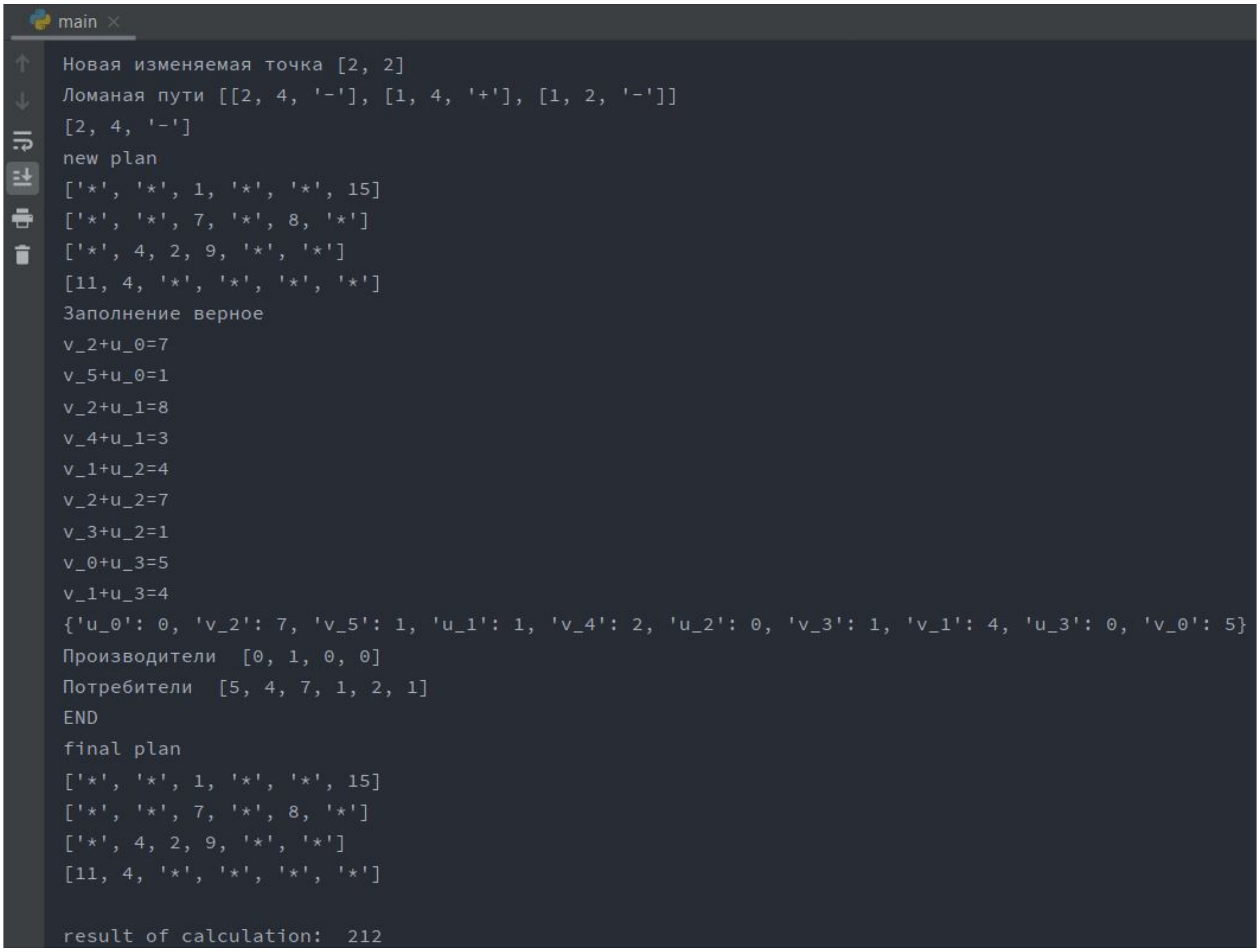
Аналогично приведем скриншоты решения задачи с усложнением:

```
problem.txt – Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
16 15 15 15

11 8 10 9 8 15

8 5 7 5 4 1
9 6 8 2 3 4
7 4 7 1 4 3
5 4 7 1 2 6

Стр 1, стлб 1    100%    Windows (CRLF)    UTF-8
```



```
main
Новая изменяемая точка [2, 2]
Ломаная пути [[2, 4, '-'], [1, 4, '+'], [1, 2, '-']]
[2, 4, '-']
new plan
['*', '*', 1, '*', '*', 15]
['*', '*', 7, '*', 8, '*']
['*', 4, 2, 9, '*', '*']
[11, 4, '*', '*', '*', '*']
Заполнение верное
v_2+u_0=7
v_5+u_0=1
v_2+u_1=8
v_4+u_1=3
v_1+u_2=4
v_2+u_2=7
v_3+u_2=1
v_0+u_3=5
v_1+u_3=4
{'u_0': 0, 'v_2': 7, 'v_5': 1, 'u_1': 1, 'v_4': 2, 'u_2': 0, 'v_3': 1, 'v_1': 4, 'u_3': 0, 'v_0': 5}
Производители  [0, 1, 0, 0]
Потребители  [5, 4, 7, 1, 2, 1]
END
final plan
['*', '*', 1, '*', '*', 15]
['*', '*', 7, '*', 8, '*']
['*', 4, 2, 9, '*', '*']
[11, 4, '*', '*', '*', '*']

result of calculation:  212
```

10 Дополнительные замечания

При решении поставленной задачи симплекс-методом обнаружили, что полученный оптимальный вектор, отличается от результата, найденного при помощи метода потенциалов. Однако значение целевых функций совпали. Это связано с тем, что в симплекс-методе мы "подменили"нашу исходную задачу путём вычеркивания одного уравнения. Мы вычеркнули восьмую строку.

Проведём эксперимент, в котором последовательно будем видоизменять исходную систему, поочерёдно вычеркивая из нее по одной строке.
Решение задачи (5.1) без первой, или второй, или третьей, или четвёртой, или пятой, или седьмой, или восьмой строк равняется:

$$x^* = (1\ 0\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 7\ 8\ 0\ 8\ 0\ 2\ 0\ 10\ 0\ 0)^T$$

Решение задачи (5.1) без шестой строки:

$$x^* = (0\ 1\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 7\ 8\ 1\ 7\ 0\ 2\ 0\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$$

Обратимся к дополнительному пособию:

Теорема 2. *Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то минимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если минимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих вершин.*

В ходе нашего эксперимента мы нашли два оптимальных вектора задачи, а значит любая выпуклая комбинация этих решений будет являться также решением. Исходя из данных рассуждений делаем вывод, что общее число решений - неограничено.

Список литературы

[1] Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во 'Лань', 2011. – 352с.: ил.

[2] Волков И. К., Загоруйко Е. А.; ред. Зарубин В. С., Крищенко А. П. *Исследование операций: учебник для втузов*. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. - 435 с.

[3] Конюховский П. В. *Математические методы исследования операций в экономике*. Изд-во СПб: Питер, 2000.-208с.:ил.-(Серия "Краткий курс")