Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа №1

Тема: «Решение задач линейного программирования симплекс-методом»

по дисциплине
«Методы оптимизаций»

Выполнили студенты
группы 3630102/80401 — Мамаева Анастасия Сергеевна
Веденичев Дмитрий Александрович
Тырыкин Ярослав Алексеевич

Руководитель
Доцент, к.ф.-м.н. — Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2021

СОДЕРЖАНИЕ

1 Постановка задачи **3**

2 Исследование применимости метода **3**

3 Описание алгоритмов **4**

3.1 Приведение задачи к канонической форме 4

3.2 Построение двойственной задачи 5

3.3 Приведение двойственной задачи к каноническому виду 6

3.4 Алгоритм симплекс-метода 8

3.5 Алгоритм выбора начального приближения методом искусственного базиса 10

4 Результаты решения задачи **11**

5 Нахождение решения прямой задачи по решению двойственной к ней задачи 12

6 Оценка достоверности полученного результата **15**

7 Исследование влияния ошибок в коэффициентах функции цели на результат решения задачи **17**

8 Программная реализация **18**

9 Выводы **19**

10 Дополнительные пояснения на замечания **19**

11 Результаты работы программы **20**

Список литературы **21**

1 Постановка задачи

Сформулируем задачу линейного программирования, состоящую из пяти переменных, включающую три равенства и два неравенства разных знаков. Также поставим ограничения на знаки для четырёх переменных:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_4 + 4x_5 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 6 \\ 8x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Зададим функцию цели:

$$4x_2 + 3x_4 \to min$$

Необходимо:

1. Построить к исходной задаче двойственную, затем обе задачи привести к форме, позволяющей применить к ним симплекс-метод.
2. Решить обе задачи симплекс-методом с выбором начального приближения методом искусственного базиса.
3. Исследовать влияние ошибок в коэффициентах функции цели на результат решения задачи.
4. Разработать схему восстановления прямой задачи по решению двойственной.
5. Решить данную задачу с помощью пакета MATLAB и сравнить полученные результаты.

2 Исследование применимости метода

Алгоритм симплекс-метода применим для решения оптимизационных задач на поиск минимума, приведенных к канонической форме.

$$min\ c^T[N] \cdot x[N]$$

$$S = \{\ x[N] |\ A[M,N] \cdot x[N] = b[M],\ x[N] \geq 0\} \tag{1}$$

Количество строк матрицы A равно $m = |M|$, а количество столбцов $n = |N|$, причем $m < n$. Тогда метод применим, если $rangA = m$, что будет гарантировать наличие хотя бы одного опорного вектора.

Проверим, выполняется ли это условие для нашей задачи.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & 7 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 2 & -6 & -11 \\ 0 & 8 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & -12 & 2 & -6 & -11 \\ 0 & 8 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{-22}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-25}{3} \\ 0 & 0 & \frac{65}{9} & \frac{-23}{9} & \frac{11}{9} \\ 0 & 0 & \frac{29}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-25}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{25}{22} \\ 0 & 0 & \frac{65}{9} & \frac{-23}{9} & \frac{11}{9} \\ 0 & 0 & \frac{29}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-25}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{25}{22} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-106}{33} & \frac{-461}{66} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{33} & \frac{-425}{66} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{25}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{461}{212} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{33} & \frac{-425}{66} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{25}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{461}{212} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1435}{212} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{25}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{461}{212} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили пять ненулевых строк $\Rightarrow$ $rangA = 5$, ровно столько же, сколько строк в матрице.

3 Описание алгоритмов

3.1 Приведение задачи к канонической форме

1. Если в системе есть неравенства со знаком "$\leq$", то к левой части каждого из них добавляем $w_i \geq 0$. В неравенствах со знаком "$\geq$" из левой части вычитаем $w_i \geq 0$.

2. Полагаем все неравенства равенствами.

3. Производим замену переменных: для $x_i \leq 0$ полагаем $x_i^{'} = -x_i \geq 0$. Для знакопеременных x_i полагаем $x_i = u_i - v_i$; $u_i, v_i \geq 0$.

По вышеизложенному алгоритму преобразуем исходную задачу к канонической форме:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_4 + 4x_5 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 6 \\ 8x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_4 + 4x_5 - x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 6 \\ 8x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 + x_7 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Так как x_5 переменная произвольного знака, то она заменяется разностями неотрицательных переменных $x_8 - x_9$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_4 + 4(x_8 - x_9) - x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 6(x_8 - x_9) = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + (x_8 - x_9) = 6 \\ 8x_2 + x_3 + x_4 + 3(x_8 - x_9) = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + (x_8 - x_9) + x_7 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Перенумеруем переменные для удобства:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_4 + 4(x_7 - x_8) - x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 6(x_7 - x_8) = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + (x_7 - x_8) = 6 \\ 8x_2 + x_3 + x_4 + 3(x_7 - x_8) = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + (x_7 - x_8) + x_6 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_4 - x_5 + 4x_7 - 4x_8 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 6x_7 - 6x_8 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_7 - x_8 = 6 \\ 8x_2 + x_3 + x_4 + 3x_7 - 3x_8 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_6 + x_7 - x_8 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{cases}$$

Функция цели: $4x_2 + 3x_4 \to min$

3.2 Построение двойственной задачи

Пусть имеется задача (1) на поиск минимума. Найдем двойственную ей задачу.

1. Транспонируем заданную матрицу A^T.

2. Положим новым вектором свободных коэффициентов вектор c.

3. Положим новым вектором коэффициентов функции цели вектор b.

4. Если $x_i \geq 0$, то $i-$ая строка новой системы будет иметь знак "$\leq$". Если на знак x_i не наложено ограничений, то $i-$ая строка новой системы будет иметь знак "$=$".

5. Если в исходной системе ограничением $i-$ой строки служит "$\geq$", то новая переменная будет иметь следующее ограничение на знак: $y_i \geq 0$. Если в $i-$ой строке находится равенство, то на знак новой переменной не накладываются ограничения.

6. Если исходная задача на поиск минимума, то двойственная - на поиск максимума.

По данному алгоритму составим двойственную задачу для нашей исходной системы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Транспонируем матрицу A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Получим двойственную задачу:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_5 \leq 0 \\ 5y_1 + y_2 + 3y_3 + 8y_4 + 4y_5 \leq 4 \\ 7y_2 + 2y_3 + y_4 + 4y_5 \leq 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 + 3y_5 \leq 3 \\ 4y_1 + 6y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 = 0 \\ y_1 \geq 0, \; y_5 \leq 0 \end{cases}$$

Функция цели:

$$2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 2y_4 + 8y_5 \to max$$

3.3 Приведение двойственной задачи к каноническому виду

Воспользуемся алгоритмом, приведенным в пункте (3.1) и преобразуем полученную двойственную задачу к каноническому виду.

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_5 + y_6 = 0 \\ 5y_1 + y_2 + 3y_3 + 8y_4 - 4y_5 + y_7 = 4 \\ 7y_2 + 2y_3 + y_4 - 4y_5 + y_8 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 - 3y_5 + y_9 = 3 \\ 4y_1 + 6y_2 + y_3 + 3y_4 - y_5 = 0 \\ y_1,\ y_5,\ y_6,\ y_7,\ y_8,\ y_9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_5 + y_6 = 0 \\ 5y_1 + y_2 + 3y_3 + 8y_4 - 4y_5 + y_7 = 4 \\ 7y_2 + 2y_3 + y_4 - 4y_5 + y_8 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 - 3y_5 + y_9 = 3 \\ 4y_1 + 6y_2 + y_3 + 3y_4 - y_5 = 0 \\ y_1,\ y_5,\ y_6,\ y_7,\ y_8,\ y_9 \geq 0 \end{cases}$$

Так как переменные $y_2,\ y_3,\ y_4$ произвольного знака, заменим их разностями неотрицательных. Введём новые переменные: $y_2 = \ y_{10} - \ y_{11},\ y_3 = \ y_{12} - \ y_{13},\ y_4 = \ y_{14} - \ y_{15}$

$$\begin{cases} y_1 + 2(y_{10} - y_{11}) + 3(y_{12} - y_{13}) - y_5 + y_6 = 0 \\ 5y_1 + (y_{10} - y_{11}) + 3(y_{12} - y_{13}) + 8(y_{14} - y_{15}) - 4y_5 + y_7 = 4 \\ 7(y_{10} - y_{11}) + 2(y_{12} - y_{13}) + (y_{14} - y_{15}) - 4y_5 + y_8 = 0 \\ 3y_1 + 2(y_{10} - y_{11}) + 3(y_{12} - y_{13}) + (y_{14} - y_{15}) - 3y_5 + y_9 = 3 \\ 4y_1 + 6(y_{10} - y_{11}) + (y_{12} - y_{13}) + 3(y_{14} - y_{15}) - y_5 = 0 \\ y_1,\ y_5,\ y_6,\ y_7,\ y_8,\ y_9,\ y_{10},\ y_{11},\ y_{12},\ y_{13},\ y_{14},\ y_{15} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_{10} - 2y_{11} + 3y_{12} - 3y_{13} - y_5 + y_6 = 0 \\ 5y_1 + y_{10} - y_{11} + 3y_{12} - 3y_{13} + 8y_{14} - 8y_{15} - 4y_5 + y_7 = 4 \\ 7y_{10} - 7y_{11} + 2y_{12} - 2y_{13} + y_{14} - y_{15} - 4y_5 + y_8 = 0 \\ 3y_1 + 2y_{10} - 2y_{11} + 3y_{12} - 3y_{13} + y_{14} - y_{15} - 3y_5 + y_9 = 3 \\ 4y_1 + 6y_{10} - 6y_{11} + y_{12} - y_{13} + 3y_{14} - 3y_{15} - y_5 = 0 \\ y_1,\ y_5,\ y_6,\ y_7,\ y_8,\ y_9,\ y_{10},\ y_{11},\ y_{12},\ y_{13},\ y_{14},\ y_{15} \geq 0 \end{cases}$$

Перенумеруем переменные для удобства:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 + 2y_7 - 2y_8 + 3y_9 - 3y_{10} = 0 \\ 5y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7 - y_8 + 3y_9 - 3y_{10} + 8y_{11} - 8y_{12} = 4 \\ -4y_2 + y_4 + 7y_7 - 7y_8 + 2y_9 - 2y_{10} + y_{11} - y_{12} = 0 \\ 3y_1 - 3y_2 + y_6 + 2y_7 - 2y_8 + 3y_9 - 3y_{10} + y_{11} - y_{12} = 3 \\ 4y_1 - y_2 + 6y_7 - 6y_8 + y_9 - y_{10} + 3y_{11} - 3y_{12} = 0 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6,\ y_7,\ y_8,\ y_9,\ y_{10},\ y_{11},\ y_{12} \geq 0 \end{cases}$$

Функция цели примет вид:

$$2y_1 + 3(y_{10} - y_{11}) + 6(y_{12} - y_{13}) + 2(y_{14} - y_{15}) + 8y_5 \to max$$

$$2y_1 + 3y_{10} - 3y_{11} + 6y_{12} - 6y_{13} + 2y_{14} - 2y_{15} + 8y_5 \to max$$

Аналогичным образом перенумеровываем переменные:

$$2y_1 + 8y_3 + 3y_7 - 3y_8 + 6y_9 - 6y_{10} + 2y_{11} - 2y_{12} \to max$$

Домножаем на -1:

$$-2y_1 - 8y_3 - 3y_7 + 3y_8 - 6y_9 + 6y_{10} - 2y_{11} + 2y_{12} \to min$$

3.4 Алгоритм симплекс-метода

Input

1. $A\,[M, N]$ - матрица коэффициентов задачи в канонической форме.
2. $b\,[M]$ - вектор свободных коэффициентов задачи.
3. $c\,[N]$ – вектор коэффициентов функции цели задачи.
4. $x_k\,[N]$ – опорный вектор предыдущего шага (опорный для множества $S := x \geq 0 | Ax = b$).
5. N_k - индексы базисных столбцов x_k, представленные в виде пары

$$N_k^0 = \{i \in N_k \,|\, x_k[i] = 0\}\,,\ N_k^+ = \{i \in N_k \,|\, x_k[i] > 0\}\,.$$

6. $B_k\,[N_k, M]$ – обратная матрица предыдущего шага (такая, что $B\,[N_k, M]\,A\,[M, N_k] = E[N_k, N_k]$).

Output

1. переменная, показывающая текущее состояние:

   I алгоритм нашел решение

   II функция не ограничена на допустимом множестве

   III процесс нужно продолжить

2. $x_{k+1}[N], N_{k+1},\ B_{k+1}\,[N_{k+1}, M]$.

Симплекс-метод

1. $L_k = N - N_k$
2. Найти векторы $y_k^T[M] = c^T[N_k][N_k, M]$, $d_k^T[N] = c^T[N] - y_k^T[M]A^T[M, N]$
3. Если $d_k[i] \geq 0 \; \forall \; i \in \; L_k$, то x_k - решение (Выход : 1; $x_k[N]$, N_k, $B_k[N_k, M]$).
4. Иначе:

   I $j_k =$ первый индекс из $L_k \; : \; d_k[j_k] < 0$. $u_k[N_k] = B[N_k, M]\, A[M, j_k]$

   II Если $u_k[N_k] \leq 0$ - то целевая функция $c^T[N]\, x[N]$ не ограничена снизу

   (Выход: 2; $x_k[N]$, N_k, $B_k[N_k, M]$).

   III Иначе:

   i. Если $N_k^+ = N_k$ или $u_k\left[N_k \setminus N_k^+\right] \leq 0$:

   A. $\theta_k = \min\limits_{i \in N_k,\, u_k[i] > 0} \dfrac{x_k[i]}{u_k[i]} = \dfrac{x_k[i_k]}{u_k[i_k]}$

   B. Дополним $u_k[N_k]$ до $u_k[N]$: $u_k[j_k] = -1$, $\quad u_k[L_k \setminus j_k] = 0$

   C. $x_{k+1}[N] = x_k[N] - \theta_k u_k[N]$

   D. $N_{k+1} = N_k - \{i_k\} + j_k$, упорядоченный согласно порядку следования.

   E. Построить

$$F[N_{k+1}, N_k] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & -u_k[1]/u_k[i_k] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & -u_k[i_{k-1}]/u_k[i_k] & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1/u_k[i_k] & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -u_k[i_{k+1}]/u_k[i_k] & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -u_k[m]/u_k[i_k] & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

   F. $B_{k+1}[N_{k+1}, M] = F[N_{k+1}, N_k]\, B_k[N_k, M]$. Упорядочить $B_{k+1}[N_{k+1}, M]$ по индексам.

   G. Выход: 3; $x_{k+1}[N]$, N_{k+1}, $B_{k+1}[N_{k+1}, M]$.

   ii. Иначе:

   A. Выбрать любой $i_k \in \; N_k^0$, $\quad j_k \in \; L_k$. $N_{k+1} = N_k - \{i_k\} + \{j_k\}$.

   B. Если $det\left(A[M, N_{k+1}]\right) = 0$, то вернуться к шагу $4.III.ii.A$

   C. Проделать шаги $4.III.i.E - 4.III.i.G$.

3.5 Алгоритм выбора начального приближения методом искусственного базиса

Input

1. $A[M,N]$ - матрица коэффициентов задачи в канонической форме.
2. $b[M]$ - вектор свободных коэффициентов задачи.
3. $c[N]$ – вектор коэффициентов функции цели задачи.

Output

1. переменная, показывающая текущее состояние:

   I True – если алгоритм нашел опорный вектор

   II False – если множество допустимых значений пусто

2. $x_*[N], N,\ B[N,M]$.

Метод искусственного базиса

1. Построить $\overline{A} = (A[M,N] \vdots E[M,M]),\ \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}$ - N нулей и M единиц. Если $b[N]$ содержит отрицательные компоненты, нужно умножить соответствующие строки системы $(\overline{A}|b)$ на -1. $\overline{x}_0 = \begin{pmatrix} N \begin{cases} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{cases} \\ b[M] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[N] \\ y[M] \end{pmatrix}$ - опорный вектор к $\overline{S} = \left\{\overline{x} \geq 0 | \overline{A}\overline{x} = b\right\}$.

2. Решить задачу $\min\limits_{x \in \overline{S}} (\overline{c^T} * \overline{x}),\ \overline{A}\overline{x} = b,\ \overline{x} \geq 0$ симплекс-методом. Решение распадается на $(\overline{x_*[N]}, \overline{y_*[M]})$.

3. Если $\exists\, i \in\ M :\ \ \overline{y_*[i]} > 0$, то множество допустимых значений пусто. Выход: NULL, False.

4. Иначе:

   I Если $\overline{x_*[N]}$ невырожденный или $\overline{x_*[N]}$ вырожденный, но $\nexists\, i \in\ M : E[M,\ i]$ – базисный для $\overline{x_*[N]}$, то опорный вектор найден. Выход: $x_*[N],\ N_*,\ B[N_*, M]$, True.

   II Иначе $\forall\ i \in\ M\ :\ E[M,\ i]$ – базисный заменить на столбцы матрицы $A[M, N \setminus N_*^+]$, сохраняя линейную независимость. Выход: $x_*[N],\ N_*,\ B[N_*, M]$, True.

4 Результаты решения задачи

Результат решения прямой канонической задачи симплекс- методом - план:

$$x^* = (1.744525553\ 0.299270073\ 0.0\ 0.0\ 0.715328467\ 5.189781022\ 0.0\ 0.131386861)$$

Тогда решение исходной задачи получим равным:

$$x^* = (1.744525553\ 0.299270073\ 0.0\ 0.0\ -0.131386861)$$

Результат решения двойственной задачи:

$$\overline{x}^* = (0.0\ -0.26277372\ 0.17518248\ 0.46715328\ 0.0)$$

При использовании пакета MATLAB2020b получили точно такие же решения с порядком точности 10^{-8}

Точный результат решения прямой канонической задачи в обыкновенных дробях:

$$x = (\frac{239}{137}\ \frac{41}{137}\ 0\ 0\ \frac{98}{137}\ \frac{711}{137}\ 0\ \frac{18}{137})$$

Точное решение исходной задачи в обыкновенных дробях:

$$x = (\frac{239}{137}\ \frac{41}{137}\ 0\ 0\ -\frac{18}{137})$$

Точный результат решения двойственной задачи в обыкновенных дробях:

$$\overline{x} = (0\ -\frac{36}{137}\ \frac{24}{137}\ \frac{64}{137}\ 0)$$

Сравнивая результат с точным решением, можем сделать вывод, что абсолютная погрешность при нашей реализации очень хорошая. Такую ситуацию имеем за счет того, что достаточно малые числа компьютер просто не хранит. Неточности, попадающие в область машинного нуля, нивелируются.

5 Нахождение решения прямой задачи по решению двойственной к ней задачи

Пусть имеется прямая и двойственная к ней задача:
Прямая задача:

$$\begin{aligned} &F = (x[N], c[N]) \longrightarrow \min_{x[N]}, x[N] \in S \\ &S = \{x[N] |\ A[M,N] \cdot x[N] = b[M], x[N] \geq 0\} \end{aligned} \tag{2}$$

Двойственная к ней задача:

$$\begin{aligned} &F = (y[M], b[M]) \longrightarrow \max_{y[M]}, y[M] \in S \\ &S = \{y[M] |\ A^T[N,M] \cdot y[M] \leq c[N]\} \end{aligned} \tag{3}$$

Каждая из задач (2) и (3) фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой. Однако при нахождении оптимального плана одной из задач, находится решение и другой.

Пусть:

- x^* – найденный оптимальный план задачи (2);
- $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$ – базис, определяющий план;
- $C_{basis} := (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$ – вектор-строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в целевой функции задачи (2);
- P^{-1} - матрица, обратная матрице P, составленной из базисных векторов.

Тогда будем находить решение прямой задачи в соответствии с теоремой [2]:

Теорема: если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план x^*, то $y^* = C_{basis} \cdot P^{-1}$ является оптимальным планом двойственной задачи.

Теперь, помня о том, что задачи (2) и (3) двойственны друг к другу, можем решать любую из них и находить оптимальный план для парной с затратами лишь на обращение матрицы из базисных векторов и на умножение этой матрицы на вектор C_{basis}.

Покажем справедливость данной теоремы для нашей задачи: Воспользуемся условием дополняющей нежёсткости. Составим матрицу A_1 из столбцов матрицы A без учёта столбцов, соответсвующих искусственным переменным, и вектор c_1 из вектора целевой функции c, соответсвующие положительным координатам оптимального плана x_*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решим уравнение $y = c_1 \cdot A_1^{-1}$ относительно y Для этого найдём обратную матрицу A_1^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 5 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 5 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 2 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 3 & 0 & 11 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 5 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 3 & 0 & 11 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{26}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{25}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{9} & 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} & 1 & \frac{25}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{26}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 25 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{9} & 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} & 1 & \frac{25}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 25 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{137}{3} & 0 & 8 & -\frac{16}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{3} & 0 & 3 & -\frac{7}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 25 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{3} & 0 & 3 & -\frac{7}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{137}{3} & 0 & 8 & -\frac{16}{3} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 25 & -1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{3} & 0 & 3 & -\frac{7}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{24}{137} & \frac{16}{137} & -\frac{3}{137} & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{137} & \frac{45}{137} & -\frac{17}{137} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{137} & \frac{6}{137} & \frac{16}{137} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{52}{137} & \frac{11}{137} & \frac{75}{137} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{137} & -\frac{53}{137} & -\frac{50}{137} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{24}{137} & \frac{16}{137} & -\frac{3}{137} & 0 \end{array}\right)$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{137} & \frac{45}{137} & -\frac{17}{137} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{137} & \frac{6}{137} & \frac{16}{137} & 0 \\ -1 & \frac{52}{137} & \frac{11}{137} & \frac{75}{137} & 0 \\ 0 & \frac{11}{137} & -\frac{53}{137} & -\frac{50}{137} & 1 \\ 0 & -\frac{24}{137} & \frac{16}{137} & -\frac{3}{137} & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{137} & \frac{45}{137} & -\frac{17}{137} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{137} & \frac{6}{137} & \frac{16}{137} & 0 \\ -1 & \frac{52}{137} & \frac{11}{137} & \frac{75}{137} & 0 \\ 0 & \frac{11}{137} & -\frac{53}{137} & -\frac{50}{137} & 1 \\ 0 & -\frac{24}{137} & \frac{16}{137} & -\frac{3}{137} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{36}{137} & \frac{24}{137} & \frac{64}{137} & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим допустимость полученного плана y.

$$y \cdot A - c = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{36}{137} & \frac{24}{137} & \frac{64}{137} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & -1 & 0 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\frac{3}{137} & -2\frac{73}{137} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y является допустимым вектором двойственной задачи, так как $y \cdot A - c \leq 0$

Двойственный оптимальный план:

$$y^* = (0 \ -\frac{36}{137} \ \frac{24}{137} \ \frac{64}{137} \ 0)$$

Значение целевой функции двойственной задачи равно:

$$y^* \cdot b = 1\frac{27}{137}$$

Значения целевых функций исходной и двойственной задач в оптимальной точке равны:

$$F = y^* \cdot b = \text{c} \cdot x^* = 1\frac{27}{137}$$

6 Оценка достоверности полученного результата

В результате работы нашей программы получили решение:

$$x_* = (\frac{239}{137}\ \frac{41}{137}\ 0\ 0\ \frac{98}{137}\ \frac{711}{137}\ 0\ \frac{18}{137})$$

Но мы должны убедиться в том, что оно является оптимальным. Для того, чтобы $x_*[N]$ была оптимальной точкой в задаче линейного программирования (1) необходимо и достаточно, чтобы $\exists y_*[M]$ такой, что

$$c^T[N] - y_*^T[M] \cdot A[M,N] \geq 0$$

$$(c^T[N] - y_*^T[M] \cdot A[M,N]) \cdot x_*[N] = 0$$

Имеем:

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & -1 & 0 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Обозначим вектор $y = (y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5)^T$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & -1 & 0 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_5 \\ 5y_1 + y_2 + 3y_3 + 8y_4 + 4y_5 \\ 7y_2 + 2y_3 + y_4 + 4y_5 \\ 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 + 3y_5 \\ -y_1 \\ y_5 \\ 4y_1 + 6y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 \\ -4y_1 - 6y_2 - y_3 - 3y_4 - y_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}y_1+2y_2+3y_3+y_5\\5y_1+y_2+3y_3+8y_4+4y_5\\7y_2+2y_3+y_4+4y_5\\3y_1+2y_2+3y_3+y_4+3y_5\\-y_1\\y_5\\4y_1+6y_2+y_3+3y_4+y_5\\-4y_1-6y_2-y_3-3y_4-y_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y_1-2y_2-3y_3-y_5\\4-5y_1-y_2-3y_3-8y_4-4y_5\\-7y_2-2y_3-y_4-4y_5\\3-3y_1-2y_2-3y_3-y_4-3y_5\\y_1\\-y_5\\-4y_1-6y_2-y_3-3y_4-y_5\\4y_1+6y_2+y_3+3y_4+y_5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-y_1-2y_2-3y_3-y_5\\4-5y_1-y_2-3y_3-8y_4-4y_5\\0-7y_2-2y_3-y_4-4y_5\\3-3y_1-2y_2-3y_3-y_4-3y_5\\y_1\\-y_5\\-4y_1-6y_2-y_3-3y_4-y_5\\4y_1+6y_2+y_3+3y_4+y_5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{239}{137}\\\frac{41}{137}\\0\\0\\\frac{98}{137}\\\frac{711}{137}\\0\\\frac{18}{137}\end{pmatrix}^T =$$

$$= 239(-y_1-2y_2-3y_3-y_5)+41(4-5y_1-y_2-3y_3-8y_4-4y_5)-711y_5+18(4y_1+6y_2+y_3+3y_4+y_5)+98y_1$$

$$= 137 \cdot 0$$

Получаем ничто иное, как систему линейных уравнений.

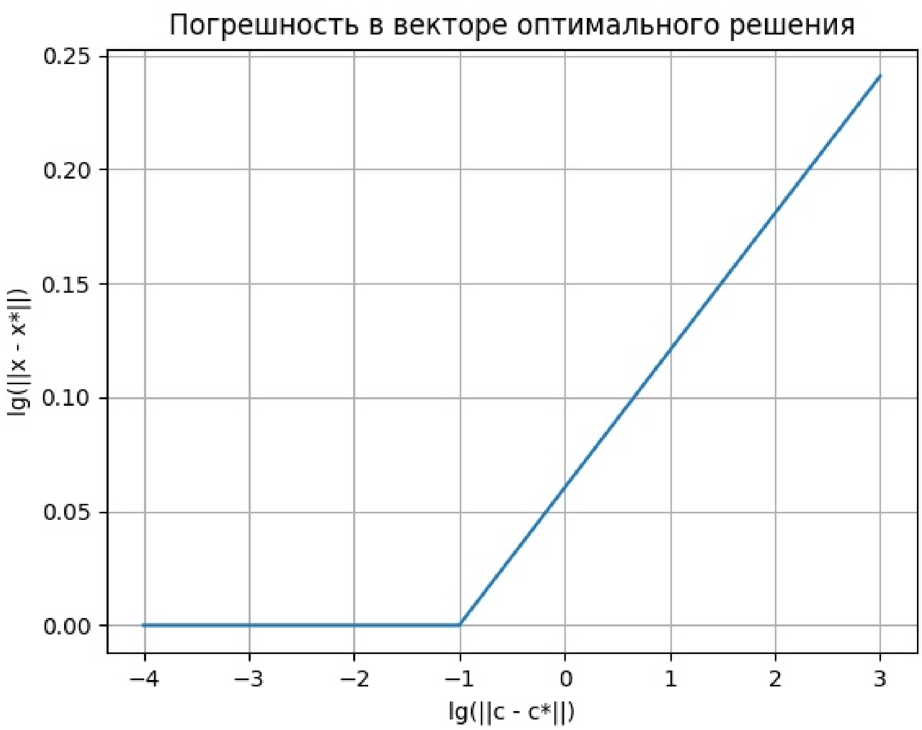
$$\begin{cases}239(-y_1-2y_2-3y_3-y_5)=0\\41(4-5y_1-y_2-3y_3-8y_4-4y_5)=0\\-711y_5=0\\18(4y_1+6y_2+y_3+3y_4+y_5)=0\\98y_1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_1=0\\y_5=0\\-2y_2-3y_3=0\\-y_2-3y_3-8y_4=-4\\6y_2+y_3+3y_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_1=0\\y_2=-\frac{36}{137}\\y_3=\frac{24}{137}\\y_4=\frac{64}{137}\\y_5=0\end{cases}$$

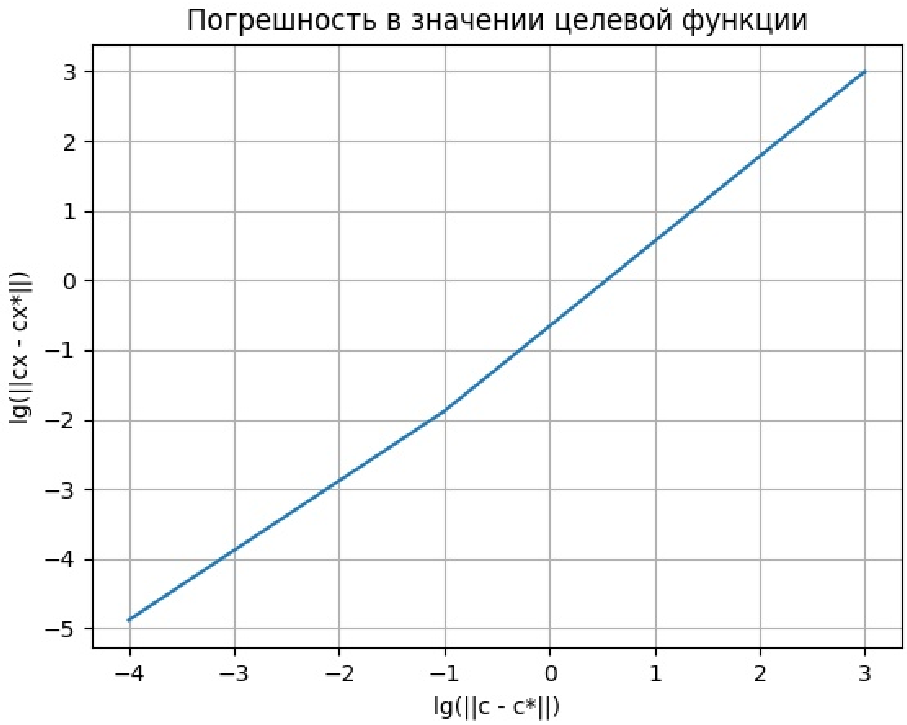
Таким образом, мы нашли такой ненулевой вектор $y[M]$, который полностью совпал с вектором решения двойственной задачи.

7 Исследование влияния ошибок в коэффициентах функции цели на результат решения задачи

Проведем серию испытаний, в которой будем вносить различные погрешности в коэффициенты функции цели. Построим два графика:

1. График зависимости отклонения вектора оптимального решения от вносимых погрешностей в коэффициенты вектора цели
2. График зависимости отклоенения значения целевой функции от вносимых погрешностей в коэффициенты вектора цели





Анализ полученных графиков В общем виде целевая функция задачи линейного программирования записывается следующим образом: $F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5$.
Оптимальной точкой задачи будет являться та, в которой гиперплоскость F касается множества допустимых точек. Изменение значений коэффициентов c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 приводит к изменению угла наклона гиперплоскости F. Графическая интерпретация даёт нам понять, что это может привести к изменению оптимального решения: оно будет достигаться в другой вершине пространства решений. Однако, при небольших изменениях в коэффициентах функции цели, оптимальная вершина не меняется.

8 Программная реализация

В процессе реализации алгоритмов использовался язык программирования Python3.6. Для построения графиков и проверки полученных решений пользовались пакетом MATLAB2020b.

Исходный код находится в системе контроля версий GitHub
URL: https://github.com/Brightest-Sunshine/Optimization-methods-2021/tree/master/lab1/src

9 Выводы

Симплекс-метод эффективен на практике. Вычислительная эффективность оценивается обычно при помощи двух параметров:

1. числа итераций, необходимого для получения решения
2. затрат машинного времени

В результате численных экспериментов произведенных в 1972 году Кли и Минти были полученые следующие результаты:

1. Число итераций при решении задач линейного программирования в стандартной форме с m ограничениями и n переменными заключено между m и $3m$
2. Среднее число итераций $2m$. Верхняя граница числа итераций равна $2m + n$
3. Требуемое машинное время пропорционально m^3
4. Число ограничений больше влияет на вычислительную эффективность, чем число переменных, поэтому при формулировке задач линейного программирования нужно стремиться к уменьшению числа ограничений пусть даже путём роста числа переменных

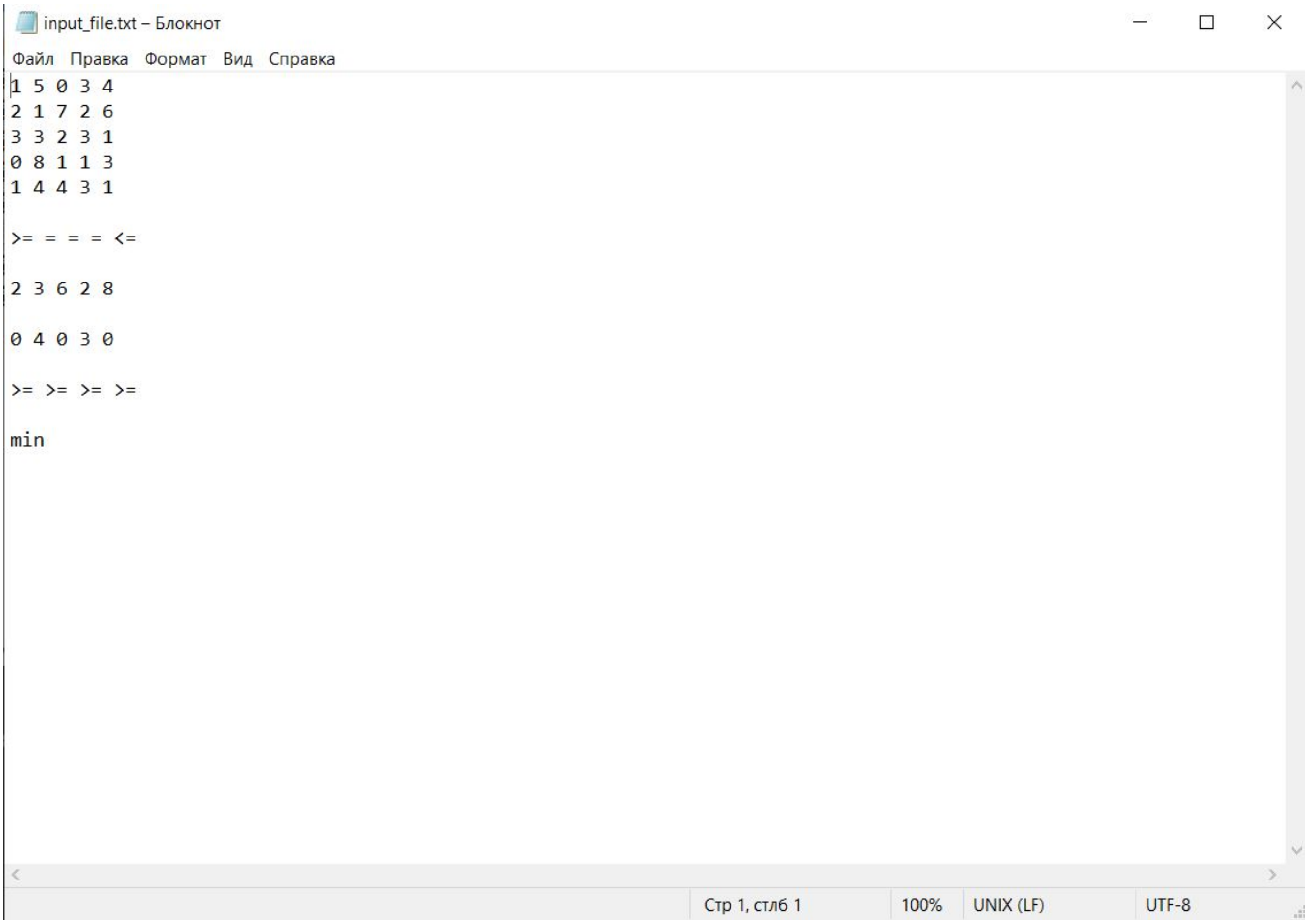
10 Дополнительные пояснения на замечания

В ходе защиты данной лабораторной работы, преподавателем были выявлены замечания. Ниже приведены ссылки, которые переместят в ту часть отчета, которая была отредактирована.

- Показана справедливость теоремы о связи решений прямой и двойственной задач (5).
- Более подробно расписана оценка достоверности полученного результата (6).
- Были добавлены более подробные комментарии к полученным зависимостям погрешности в значении целевой функции и векторе оптимального решения (7).
- В качестве отдельного пункта в отчет были вынесены результаты работы программной реализации симплекс-метода вместе с входными данными, использованными для построения решения (11).

11 Результаты работы программы

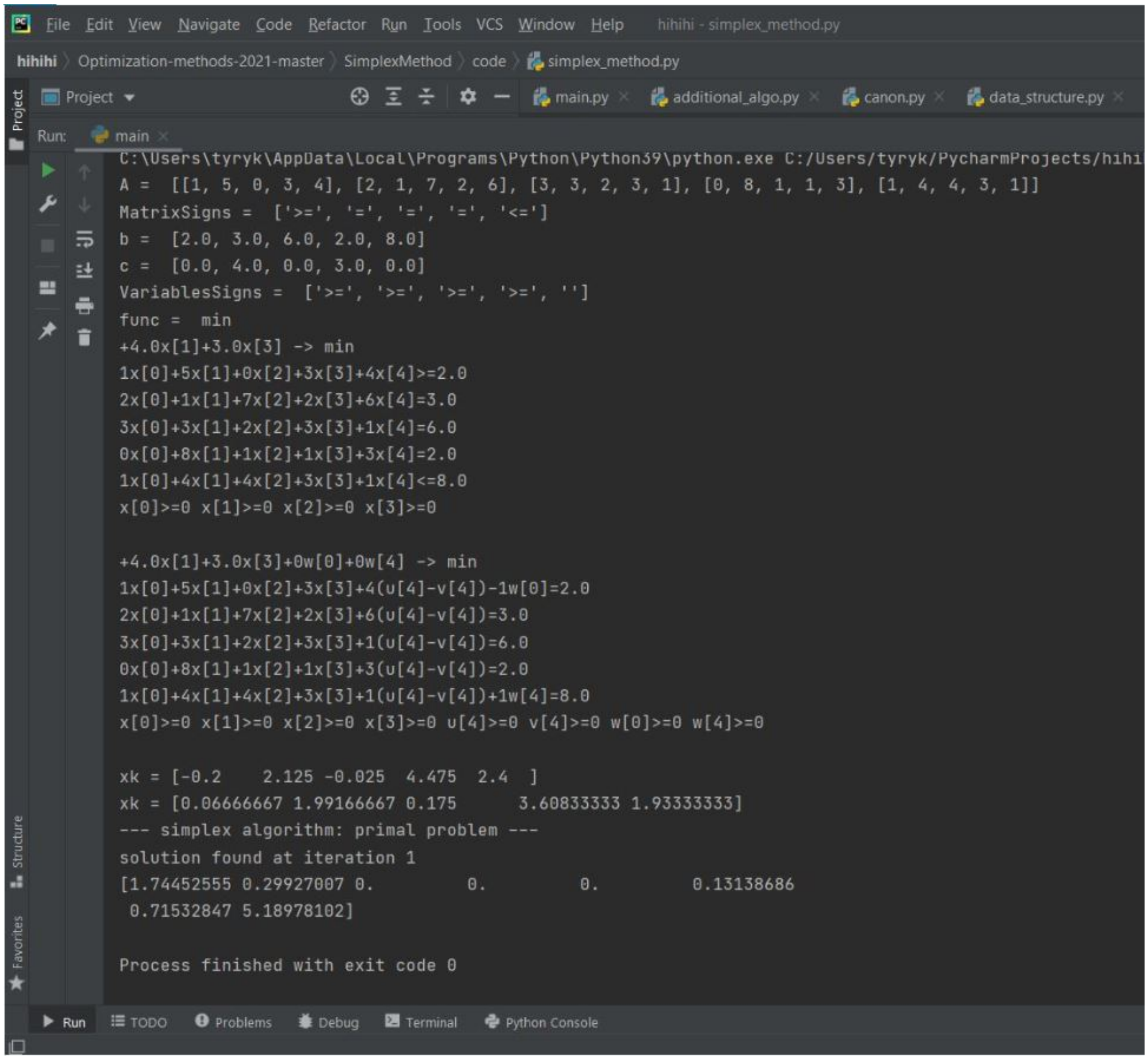
В результате тестирования программной реализации симплекс-метода была проверена обозначенная в отчете задача и получены следующие результаты:


input_file.txt – Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

```
1 5 0 3 4
2 1 7 2 6
3 3 2 3 1
0 8 1 1 3
1 4 4 3 1

>= = = = <=

2 3 6 2 8

0 4 0 3 0

>= >= >= >=

min
```

Стр 1, стлб 1 | 100% | UNIX (LF) | UTF-8



Список литературы

[1] Петухов Л. В. Методы оптимизации. Задачи выпуклого программирования: учеб. пособие / Л. В. Петухов, Г. А. Серёгин, Е. А. Родионова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 99 с.

[2] Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во 'Лань', 2011. – 352с.: ил.