Основные понятия теории графов и линейной алгебры

Рустам Азимов

Ориентированный граф

Определение

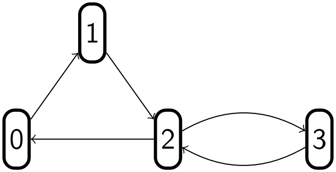
Ориентированный граф *$\mathcal{G} = \langle V, E\rangle$, где V — конечное множество вершин, E — конечное множество рёбер, т.ч. $E \subseteq V \times V$.*

Пример (Ориентированный граф и его графическое представление)

Пусть дан ориентированный граф

$$\mathcal{G}_1 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 3), (3, 2)\}\rangle.$$

Графическое представление графа $\mathcal{G}_1$:



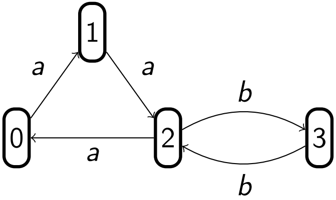
Помеченный ориентированный граф

Определение

Помеченный ориентированный граф *$\mathcal{G} = \langle V, E, L \rangle$, где V — конечное множество вершин, E — конечное множество рёбер, т.ч. $E \subseteq V \times L \times V$, L — конечное множество меток на рёбрах.*

Пример (Помеченный ориентированный граф и его графическое представление)

$$\mathcal{G}_2 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, \{(0, a, 1), (1, a, 2), (2, a, 0), (2, b, 3), (3, b, 2)\} \rangle.$$



Основные понятия теории графов

- Путь — последовательность рёбер, в которой конечная вершина ребра совпадает с начальной вершиной следующего ребра
- Вершина v_j достижима из вершины v_i, только если существует путь из вершины v_i в вершину v_j
- Достижима ли вершина сама из себя обговаривается отдельно для каждой конкретной задачи
- Один из способов задать граф — это задать его **матрицу смежности**

Матрица смежности

Определение

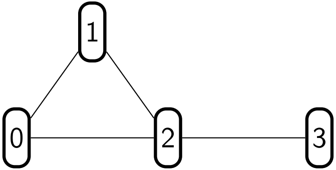
Матрица смежности графа $\mathcal{G} = \langle V, E, L\rangle$ *— это квадратная матрица* M *размера* $n \times n$*, где* $|V| = n$ *и ячейки которой содержат множества. При этом* $l \in M[i,j] \iff \exists e = (i,l,j) \in E$.

- Если необходимо отметить лишь наличие рёбер, то строят Булеву матрицу смежности, т.е. состоящую только из 0 и 1
- Матрица смежности неориентированного графа будет симметричной, т.е. её элементы будут симметричны относительно главной диагонали
- Если запрещены кратные рёбра, то элементы матрицы смежности могут быть не множества меток, а именно метками

Примеры

Пример (Матрица смежности неориентированного графа)

Неориентированный граф:

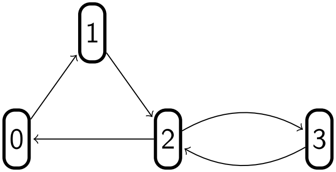


И его матрица смежности:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример (Матрица смежности ориентированного графа)

Ориентированный граф:

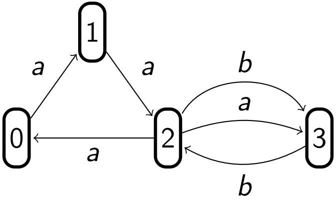


И его матрица смежности:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример (Матрица смежности помеченного графа)

Помеченный граф:



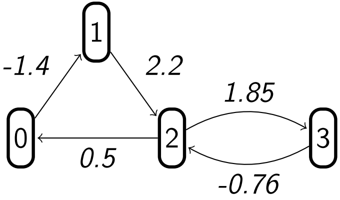
И его матрица смежности:

$$\begin{pmatrix} \varnothing & \{a\} & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing & \{a\} & \varnothing \\ \{a\} & \varnothing & \varnothing & \{a, b\} \\ \varnothing & \varnothing & \{b\} & \varnothing \end{pmatrix}$$

Примеры

Пример (Матрица смежности взвешенного графа)

Взвешенный граф для задачи о кратчайших путях:



И его матрица смежности (для задачи о кратчайших путях):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1.4 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2.2 & \infty \\ 0.5 & \infty & 0 & 1.85 \\ \infty & \infty & -0.76 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства операций линейной алгебры

- Коммутативная операция — бинарная операция, обладающая коммутативностью $x \odot y = y \odot x$
- Ассоциативная операция — бинарная операция, обладающая ассоциативностью $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$
- Бинарная операция $\times$ дистрибутивна относительно бинарной операции $+$ на множестве D, если для любых трех элементов $x, y, z \in D$:
  1. Дистрибутивность слева $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
  2. Дистрибутивность справа $(y + z) \times x = y \times x + z \times x$

Некоторые алгебраические струткуры

- Полугруппа $\langle D, \cdot \rangle$ в общей алгебре — множество с заданной на нём ассоциативной бинарной операцией
- Моноид $\langle D, \cdot, e \rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом e, где $e \cdot x = x = x \cdot e$
- Полукольцо $\langle D, \oplus, \otimes, 0 \rangle$ — структура, для которой
  1. $\langle D, \oplus, 0 \rangle$ — коммутативный моноид
  2. $\langle D, \otimes \rangle$ — полугруппа
  3. Операция $\otimes$ дистрибутивна относительно $\oplus$
  4. Мультипликативное свойство нуля $0 = 0 \otimes a = a \otimes 0$