



Universidad
de Cádiz

Escuela Superior de Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Apuntes de Matemática Discreta

14. Grafos

Francisco José González Gutiérrez

Cádiz, Octubre de 2004

Lección 14

Grafos

Contenido

14.1 Generalidades	396
14.1.1 Definición	396
14.1.2 Vértices Adyacentes	397
14.1.3 Representación Gráfica	397
14.1.4 Multigrafos	398
14.1.5 Pseudografo	398
14.1.6 Digrafo	399
14.2 Grados	399
14.2.1 Grado de un Vértice	399
14.2.2 Vértice Aislado	399
14.2.3 Grafo Regular	399
14.2.4 Suma de los Grados de un Grafo	400
14.2.5 Grado de Entrada y de Salida	402
14.3 Isomorfismo	403
14.3.1 Isomorfismo de Grafos	403
14.3.2 Invariante de un Grafo	404
14.3.3 Invariancia del Grado	404
14.4 Subgrafos	406
14.4.1 Definición	406
14.4.2 Subgrafo Expandido	407
14.4.3 Subgrafo Inducido	407
14.4.4 Eliminación de Aristas	408
14.4.5 Eliminación de Vértices	408
14.4.6 Grafos Completos	409
14.4.7 Complemento de un Grafo	410
14.5 Caminos y Ciclos	411
14.5.1 Camino	411
14.5.2 Ciclo	411
14.5.3 Teorema	413
14.6 Grafos Conexos	414
14.6.1 Vértices Conectados	414
14.6.2 Grafos Conexos	414
14.6.3 Proposición	415
14.6.4 Componentes Conexas de un Grafo	416
14.6.5 Puntos de Corte	418
14.6.6 Puentes	418

14.7 Caminos y Ciclos de Euler	420
14.7.1 Ciclo de Euler	421
14.7.2 Grafo Euleriano	422
14.7.3 Primer Lema	422
14.7.4 Camino de Euler	423
14.7.5 Segundo Lema	423
14.7.6 Problema de los Puentes de Königsberg	424
14.7.7 Tercer Lema	424
14.7.8 Teorema	425
14.7.9 Corolario	431
14.8 Caminos y Ciclos de Hamilton	443
14.8.1 Ciclo de Hamilton	443
14.8.2 Grafo Hamiltoniano	444
14.8.3 Camino de Hamilton	444
14.8.4 Método desarrollado por Hamilton	444
14.8.5 Teorema	449
14.9 Representación de Grafos	456
14.9.1 Matriz de Adyacencia	456
14.9.2 Teorema	460
14.9.3 Corolario	461
14.9.4 Caracterización de un Grafo Conexo	461
14.9.5 Matriz de Incidencia	462

El hecho es que la teoría de grafos sirve como modelo matemático para cualquier sistema que implique una relación binaria.

Frank Harary

14.1 Generalidades

Definiremos un grafo como un sistema matemático abstracto. No obstante, para desarrollar el conocimiento de los mismos de forma intuitiva los representaremos mediante diagramas. A estos diagramas les daremos, también, el nombre de grafos, aun cuando los términos y definiciones no estén limitados únicamente a los grafos que pueden representarse mediante diagramas.

Un grafo es un conjunto de puntos y un conjunto de líneas donde cada línea une un punto con otro. Veremos, para comenzar, una definición formal de grafo.

14.1.1 Definición

Llamaremos grafo, G , al par ordenado formado por un conjunto finito no vacío, V , y un conjunto, A , de pares no ordenados de elementos del mismo.

V es el conjunto de los vértices o nodos del grafo.

A será el conjunto de las aristas o arcos del grafo.

Utilizaremos la notación $G = (V, A)$ para designar al grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas son, respectivamente, V y A .

A cualquier arista de un grafo se le puede asociar una pareja de vértices del mismo. Si u y v son dos vértices de un grafo y la arista a está asociada con este par, escribiremos $a = uv$.

Por ejemplo, si

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

y

$$A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5\}$$

entonces el grafo $G = (V, A)$ tiene a v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 como vértices y sus aristas son $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4$ y v_2v_5 .

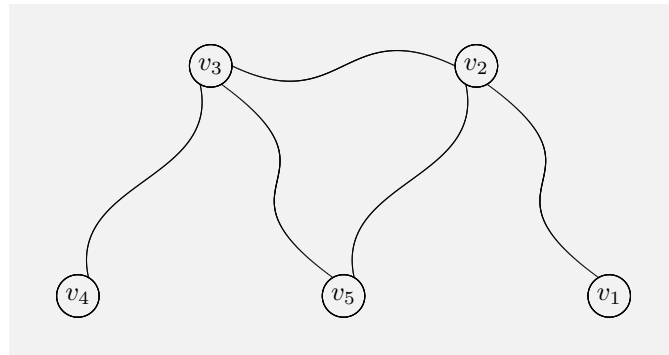
14.1.2 Vértices Adyacentes

Diremos que los vértices u y v son adyacentes, si existe una arista a tal que $a = uv$. A los vértices u y v los llamaremos extremos de la arista.

14.1.3 Representación Gráfica

Un grafo se representa mediante un diagrama en el cual a cada vértice le corresponde un punto y si dos vértices son adyacentes se unen sus puntos correspondientes mediante una línea.

Ejemplo 14.1



Representación gráfica de un grafo

El grafo de la figura tiene como conjunto de vértices

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

siendo su conjunto de aristas,

$$A = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5\}$$

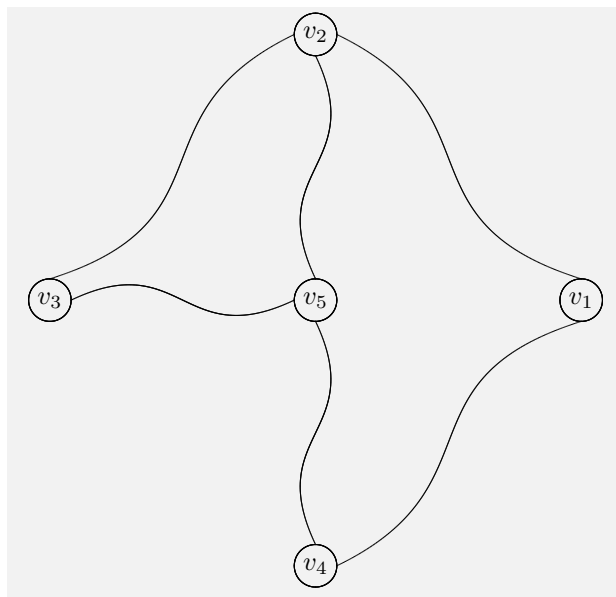
Vértices adyacentes: v_1 y v_2 ; v_2 y v_3 ; v_2 y v_5 ; v_3 y v_4 ; v_3 y v_5 .

Vértices no adyacentes: v_1 y v_3 ; v_1 y v_4 ; v_2 y v_4 ; v_4 y v_5 . ■

Ejemplo 14.2 Sean $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $A = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_5, v_4v_5\}$. Constrúyase la representación gráfica del grafo $G = (V, A)$.

Solución

Representamos cada uno de los vértices por un punto y luego cada arista por una línea que una dos vértices que representan los extremos de la misma como muestra la figura. La solución no es, obviamente, la única.



Ejemplo 14.2

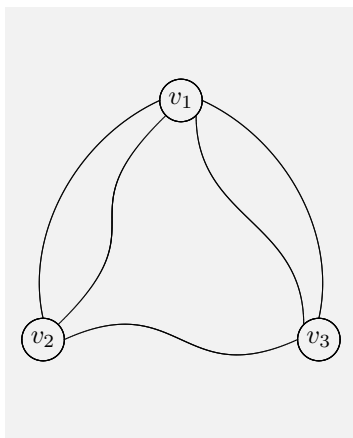
14.1.4 Multigrafos

Llamaremos de esta forma a los grafos en los que haya pares de vértices unidos por más de una arista.

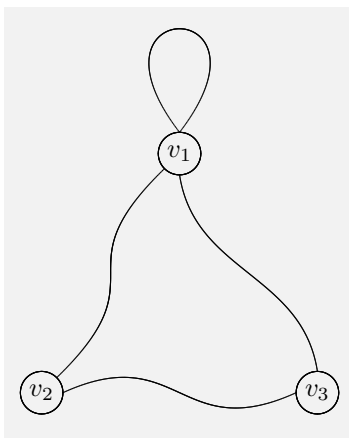
14.1.5 Pseudografo

Llamaremos pseudografos a los grafos en los que existan aristas cuyos extremos coincidan, es decir, aquellos en los que existan aristas que unan vértices consigo mismos. A tales aristas las llamaremos bucles o lazos.

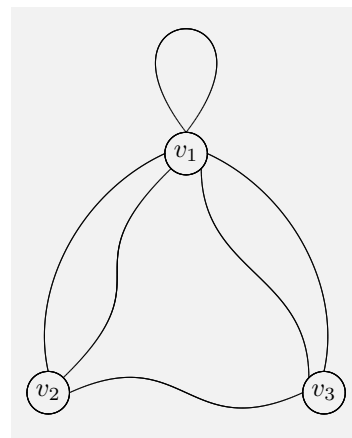
Ejemplo 14.3



(a) Multigrafo



(b) Pseudografo



(c) Pseudomultigrafo

Ejemplo 14.3

En la figura, (a) representa un multigrafo cuyo conjunto de vértices es

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

y el de aristas

$$A = \{v_1v_2, v_1v_2, v_1v_3, v_1v_3, v_2v_3\}$$

(b) representa un pseudografo cuyo conjunto de vértices es

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

y el de aristas,

$$A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_1v_1\}$$

y (c) representa un grafo que es, a un tiempo, pseudo y multigrafo cuyo conjunto de vértices es

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

y que tiene por conjunto de aristas

$$A = \{v_1v_2, v_1v_2, v_1v_3, v_1v_3, v_2v_3, v_1v_1\}$$

■

14.1.6 Digrafo

Es un grafo en el cual el conjunto de las aristas A está formado por pares ordenados del conjunto de vértices V . Lo llamaremos también grafo dirigido.

Esto asigna un orden en los extremos de cada arista. Dicho orden se indica en el diagrama con una flecha y llamaremos origen o inicial al primer vértice de una arista y fin o terminal al segundo.

14.2 Grados

14.2.1 Grado de un Vértice

Llamaremos grado o valencia de un vértice al número de aristas que incidan en él.

Notaremos por $\text{gr}_G(v)$ al grado del vértice v en el grafo G y cuando no haya posibilidad de confusión notaremos, simplemente, $\text{gr}(v)$.

14.2.2 Vértice Aislado

Un vértice de grado cero se denomina aislado.

14.2.3 Grafo Regular

Un grafo se dice que es regular cuando todos sus vértices tienen el mismo grado.

14.2.4 Suma de los Grados de un Grafo

En cualquier grafo se verifica,

- (a) La suma de todos sus grados es igual al doble del número de sus aristas.
 (b) El número de vértices de grado impar es par.

Demostración

Sea $G = (V, A)$ un grafo cuyo conjunto de vértices es

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$$

y sea $|A|$ el número de aristas de G .

- (a) Cada una de las aristas une dos vértices luego al sumar los grados de éstos, las contamos, exactamente, dos veces, de aquí que

$$\sum_{i=1}^q \text{gr}(v_i) = 2|A|$$

- (b) En efecto, supongamos que de los q vértices que tiene G hay p con grado par (los p primeros) y el resto, es decir $q - p$, tienen grado impar. Entonces, por el apartado (a),

$$\sum_{i=1}^q \text{gr}(v_i) = 2|A| \tag{14.1}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \text{gr}(v_i) \text{ es par, } 1 \leq i \leq p &\implies \text{gr}(v_i) = 2k_i, \quad 1 \leq i \leq p \\ &\implies \sum_{i=1}^p \text{gr}(v_i) = 2 \sum_{i=1}^p k_i \\ \text{gr}(v_i) \text{ es impar, } p+1 \leq i \leq q &\implies \text{gr}(v_i) = 2k_i + 1, \quad p+1 \leq i \leq q \\ &\implies \sum_{i=p+1}^q \text{gr}(v_i) = 2 \sum_{i=p+1}^q k_i + \sum_{i=p+1}^q 1 \\ &\implies \sum_{i=p+1}^q \text{gr}(v_i) = 2 \sum_{i=p+1}^q k_i + (q-p) \end{aligned}$$

de aquí se sigue que

$$\sum_{i=1}^p \text{gr}(v_i) + \sum_{i=p+1}^q \text{gr}(v_i) = 2 \sum_{i=1}^p k_i + 2 \sum_{i=p+1}^q k_i + (q-p)$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^q \text{gr}(v_i) = 2 \sum_{i=1}^q k_i + (q-p)$$

sustituyendo en (14.1), resulta

$$2 \sum_{i=1}^q k_i + (q-p) = 2|A|$$

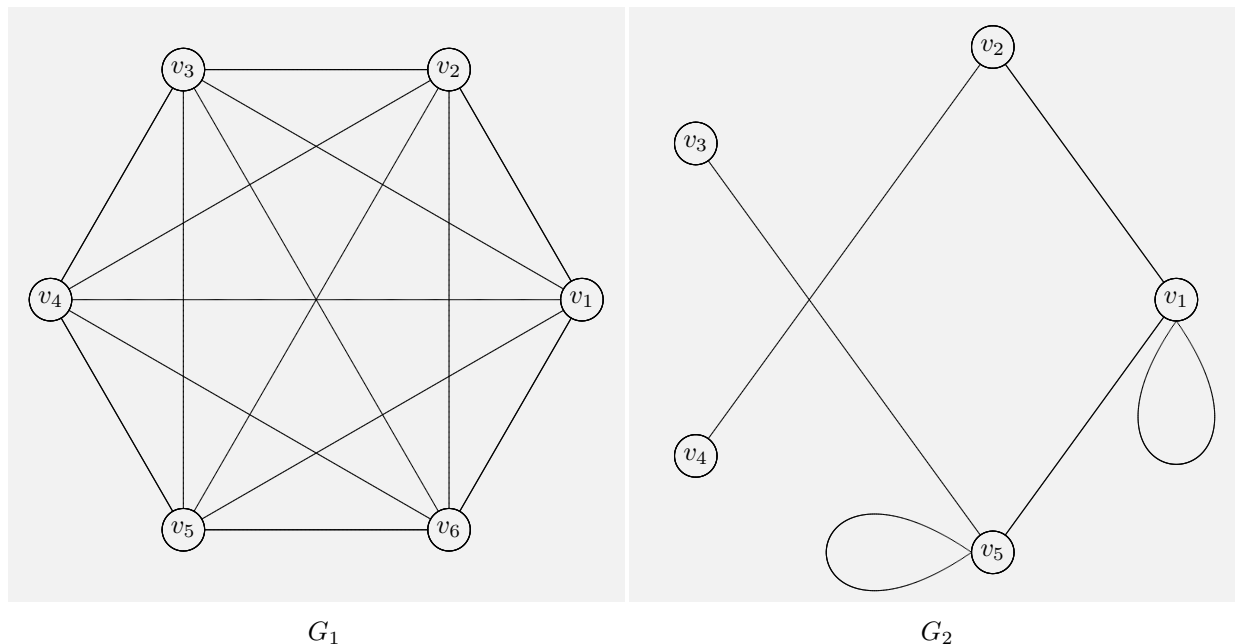
y, consecuentemente,

$$q-p = 2|A| - 2 \sum_{i=1}^q k_i$$

es decir, $q-p$ es par.



Ejemplo 14.4 Comprobar que la suma de los grados de los vértices de los grafos la figura es igual al doble del número de sus aristas y que el número de vértices de grado impar es par.



Ejemplo 14.4

Solución

Sea $G_1 = (V, A)$ siendo

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

y

$$A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6\}$$

Entonces, $|A| = 15$ y $\text{gr}(v_i) = 5$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, luego

$$\sum_{i=1}^6 \text{gr}(v_i) = 30 = 2 \cdot 15 = 2|A|$$

Por otra parte, todos los vértices son de grado impar, luego su número (6) es par.

Sea ahora $G_2 = (V, A)$ donde

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

y

$$A = \{v_1v_1, v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_4, v_4v_5, v_5v_5\}$$

siendo

$$|A| = 6$$

$$\text{gr}(v_1) = 4$$

$$\text{gr}(v_2) = 2$$

$$\text{gr}(v_3) = 1$$

$$\text{gr}(v_4) = 1$$

$$\text{gr}(v_5) = 4$$

y

$$\sum_{i=1}^5 \text{gr}(v_i) = 12 = 2 \cdot 6 = 2 |A|$$

Por otra parte, el número de vértices de grado impar es 2 (v_3 y v_4). ■

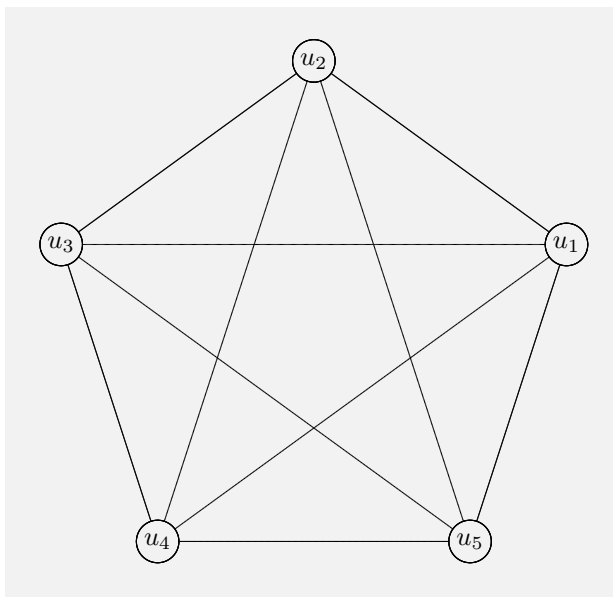
Ejemplo 14.5 ¿Se puede construir un grafo regular con 10 aristas en el que cada vértice tenga grado 4?

Solución

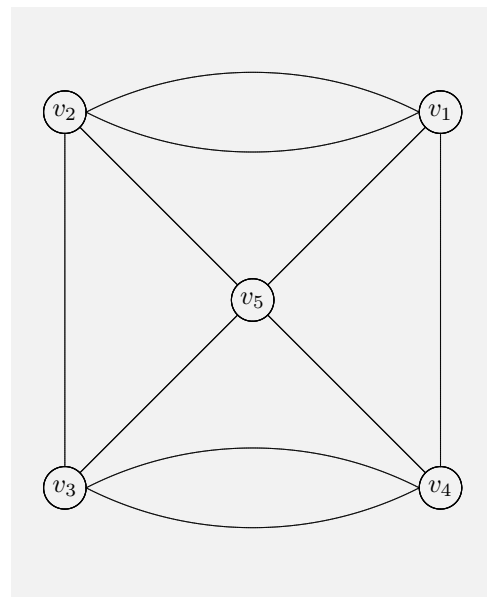
Según el teorema anterior,

$$\sum_{i=1}^p \text{gr}(v_i) = 2 |A| \implies \sum_{i=1}^p \text{gr}(v_i) = 2 \cdot 10 \implies 4p = 20 \implies p = 5$$

luego es posible y ha de tener cinco vértices. La figura siguiente nos muestra dos ejemplos de grafos que cumplen estas condiciones.



G_1



G_2

Ejemplo 14.5

14.2.5 Grado de Entrada y de Salida

Si v es un vértice de un digrafo D , entonces su grado de entrada $\text{gr}_e(v)$ es el número de arcos en D de la forma uv y su grado de salida $\text{gr}_s(v)$ es el número de arcos en D de la forma vu .

14.3 Isomorfismo

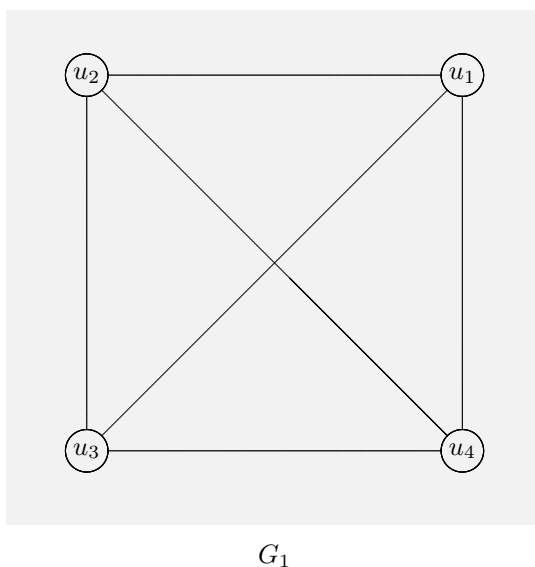
14.3.1 Isomorfismo de Grafos

Dos grafos $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ se dice que son isomorfos cuando existe una biyección entre los conjuntos de sus vértices que conserva la adyacencia. Si los grafos G_1 y G_2 son isomorfos, notaremos $G_1 \simeq G_2$.

Nota 14.1 Según la definición anterior,

$$G_1 \simeq G_2 \iff \exists f : V_1 \longrightarrow V_2 : \begin{cases} f \text{ es biyectiva} \\ uv \in A_1 \iff f(u)f(v) \in A_2; \forall u, v \in V_1 \end{cases}$$

Ejemplo 14.6 Construir un grafo isomorfo al de la siguiente figura.



Solución

Sea $G_1 = (V_1, A_1)$ el grafo dado y sea $G_2 = (V_2, A_2)$ el grafo que busquemos. Entonces,

$$V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

y

$$A_1 = \{u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4\}$$

son, respectivamente, sus conjuntos de vértices y de aristas.

Pues bien, como tenemos que construir una función entre los conjuntos de vértices que sea biyectiva, V_2 ha de tener el mismo número de elementos que V_1 , es decir 4. Podemos escribir, por tanto,

$$V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Por otra parte, f ha de conservar la adyacencia luego ha de cumplirse que

$$f(u_1)f(u_2) \in A_2$$

$$f(u_1)f(u_3) \in A_2$$

$$f(u_1)f(u_4) \in A_2$$

$$f(u_2)f(u_3) \in A_2$$

$$f(u_2)f(u_4) \in A_2$$

$$f(u_3)f(u_4) \in A_2$$

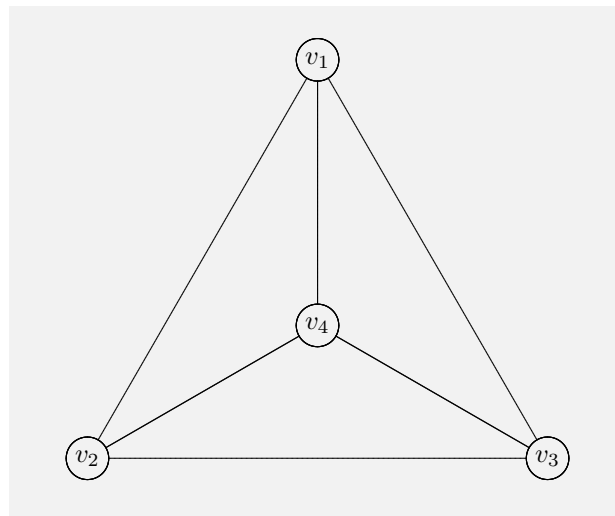
cosa que se consigue sin más que definir

$$f : V_1 \longrightarrow V_2 : \begin{cases} f(u_1) = v_1 \\ f(u_2) = v_2 \\ f(u_3) = v_3 \\ f(u_4) = v_4 \end{cases}$$

siendo el conjunto de aristas de G_2 ,

$$A_2 = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$$

Una representación gráfica de G_2 puede ser la de la figura siguiente:



G_2

14.3.2 Invariante de un Grafo

Un invariante de un grafo G es un número asociado con G que tiene el mismo valor para cualquier grafo que sea isomorfo con él.

14.3.3 Invariancia del Grado

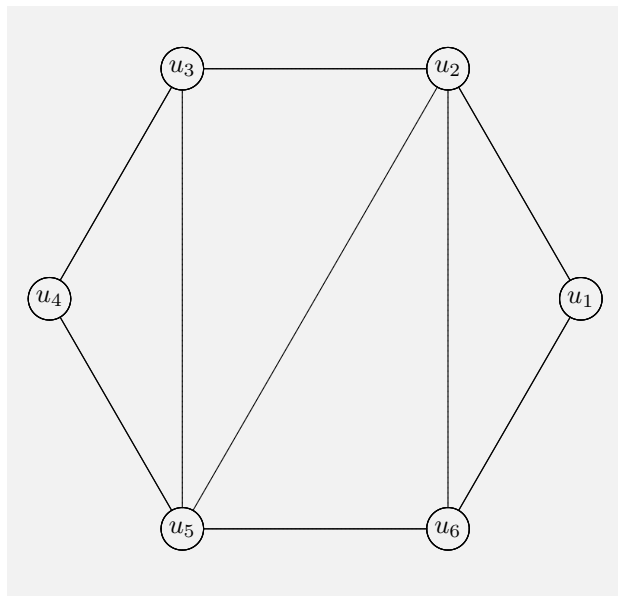
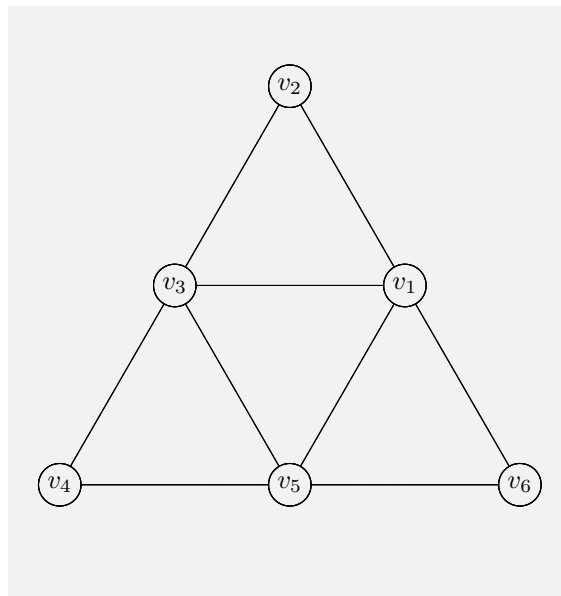
Dado un grafo G , el grado de cualquiera de sus vértices es un invariante de G .

Demostración

Sean G_1 y G_2 dos grafos y sea f un isomorfismo entre ambos. Veamos que si u es un vértice arbitrario de G_1 , entonces $\text{gr}(u) = \text{gr}(f(u))$.

En efecto, como f es una biyección que conserva la adyacencia, el número de vértices adyacentes a u en G_1 ha de ser el mismo que el de vértices adyacentes a $f(u)$ en G_2 , por lo tanto, el número de aristas con extremo en u ha de coincidir con el número de aristas con extremo en $f(u)$ y, consecuentemente, sus grados serán iguales. ■

Ejemplo 14.7 Los grafos de la figura siguiente tienen el mismo número de vértices (6) y de aristas (9). ¿Son isomorfos?

 G_1  G_2

Grafos no isomorfos

Solución

Observemos que

$$\text{gr}_{G_1}(u_1) = 2$$

$$\text{gr}_{G_1}(u_2) = 4$$

$$\text{gr}_{G_1}(u_3) = 3$$

$$\text{gr}_{G_1}(u_4) = 2$$

$$\text{gr}_{G_1}(u_5) = 4$$

$$\text{gr}_{G_1}(u_6) = 3$$

y

$$\text{gr}_{G_2}(v_1) = 4$$

$$\text{gr}_{G_2}(v_2) = 2$$

$$\text{gr}_{G_2}(v_3) = 4$$

$$\text{gr}_{G_2}(v_4) = 2$$

$$\text{gr}_{G_2}(v_5) = 4$$

$$\text{gr}_{G_2}(v_6) = 2$$

y, según la proposición anterior,

$$\text{si } G_1 \text{ es isomorfo a } G_2 \text{ entonces } gr_{G_1}(u) = gr_{G_2}(f(u))$$

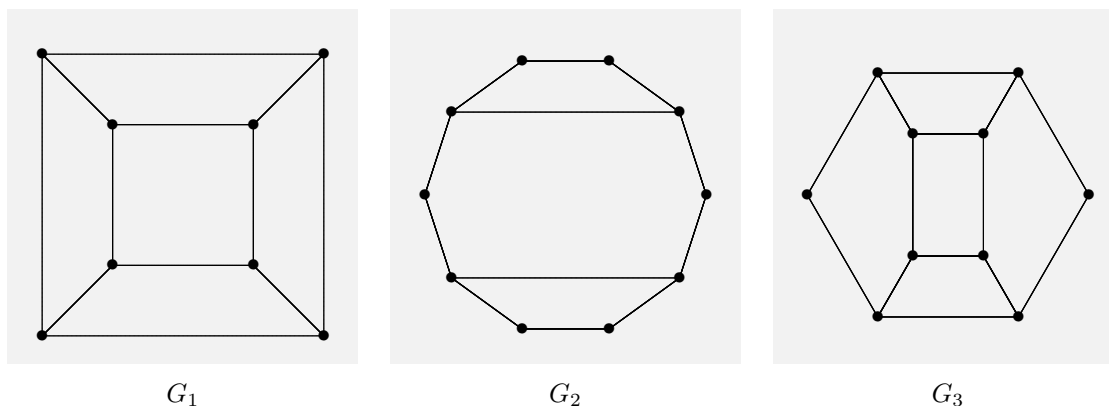
para cualquier vértice u del grafo G_1 .

Por lo tanto, si encontramos, al menos, un vértice u en G_1 tal que $gr_{G_1}(u) \neq gr_{G_2}(f(u))$, entonces f no sería un isomorfismo, es decir, no podría establecerse entre ambos grafos una función biyectiva que conserve la adyacencia.

Pues bien, si tenemos en cuenta, por ejemplo, que en G_1 hay dos vértices de grado 2 y en G_2 hay tres, cualquier función que establezcamos entre ambos grafos hará corresponder a un vértice de grado 2 un vértice de grado distinto de 2 y, consecuentemente, ambos grafos no son isomorfos. ■

Ejemplo 14.8

- (a) Probar que los grafos G_1 y G_2 en la figura no son isomorfos.
- (b) Idem con los grafos G_2 y G_3



Ejemplo 14.8

Solución

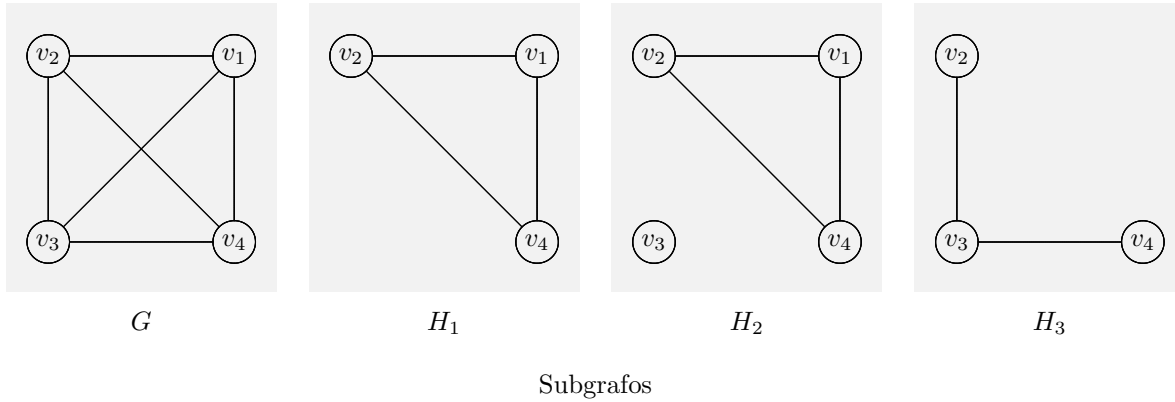
- (a) G_1 y G_2 . En efecto, si existiese una biyección entre los conjuntos de vértices de G_1 y G_2 , ambos grafos deberían tener el mismo número de vértices. Pero G_1 tiene ocho vértices y G_2 diez, luego es imposible que exista tal biyección y, consecuentemente, no son isomorfos.
- (b) G_2 y G_3 . En efecto, ambos tienen el mismo número de vértices, luego existen aplicaciones biyectivas entre los conjuntos de vértices de G_2 y G_3 . Ahora bien, un isomorfismo entre grafos conserva el grado de los vértices de aquí que el número de vértices de grado 2 en G_2 deba ser igual al de vértices del mismo grado en G_3 . Como G_2 tiene 2 vértices de grado 2 y G_3 tiene 6, dichos grafos no son isomorfos. ■

14.4 Subgrafos

14.4.1 Definición

Un subgrafo de un grafo $G = (V(G), A(G))$ es un grafo $H = (V(H), A(H))$ tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Ejemplo 14.9 La figura muestra un grafo G y tres de sus subgrafos.



$$G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\})$$

$$H_1 = (\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_4\})$$

$$H_2 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_4\})$$

$$H_3 = (\{v_2, v_3, v_4\}, \{v_2v_3, v_3v_4\})$$

■

14.4.2 Subgrafo Expandido

Un subgrafo expandido de un grafo G , es un subgrafo que contiene todos los vértices de G .

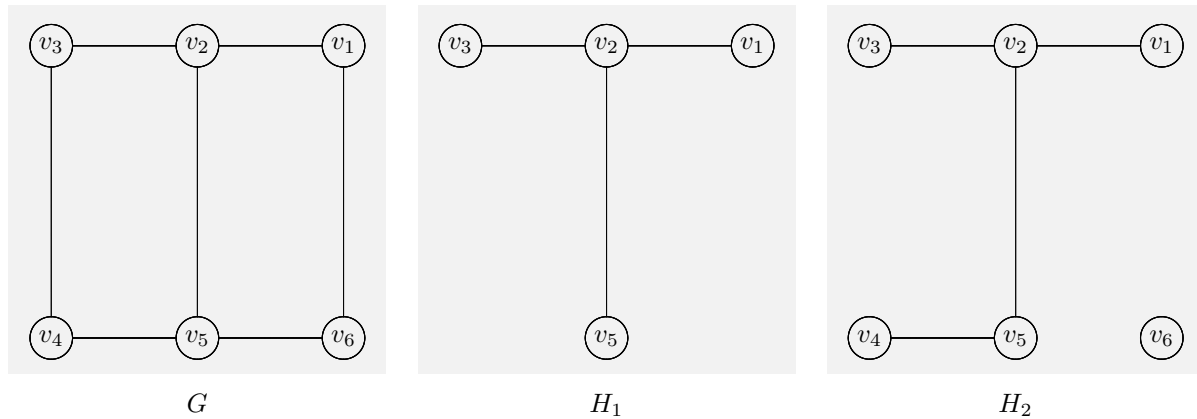
En el ejemplo anterior, H_2 es un subgrafo expandido de G .

14.4.3 Subgrafo Inducido

Para cualquier subconjunto W de vértices de un grafo G , llamaremos subgrafo inducido por W , y lo notaremos $\langle W \rangle$, al subgrafo de G que se obtiene tomando los vértices de W y las aristas de G que son incidentes con ellos.

Por tanto, dos vértices de W son adyacentes en $\langle W \rangle$ si, y sólo si son adyacentes en G .

Ejemplo 14.10



Subgrafos expandido e inducido

En la figura anterior, H_2 es un subgrafo expandido de G , ya que contiene a todos los vértices de G , sin embargo H_1 no lo es ya que le faltan v_4 y v_6 .

Por otra parte, H_1 es un subgrafo inducido ya que si $W = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, el subgrafo H_1 contiene todas las aristas de G incidentes con los vértices de W , pero H_2 no lo es ya que le faltan las aristas v_1v_6 , v_3v_4 y v_5v_6 . ■

14.4.4 Eliminación de Aristas

Si a es una arista del grafo G , entonces el subgrafo $G \setminus \{a\}$ es el grafo que se obtiene de G eliminando la arista a .

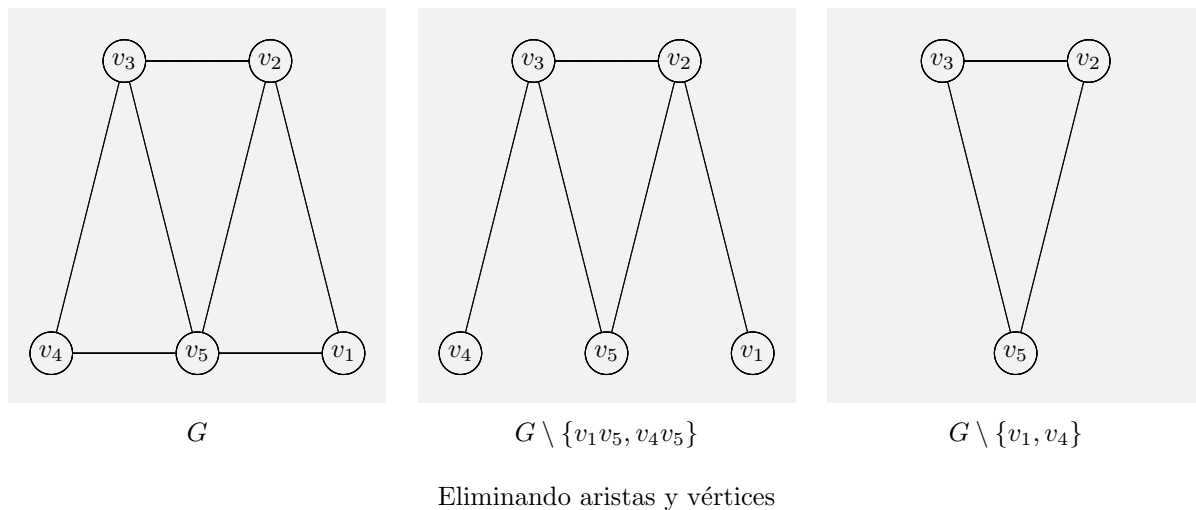
En general, escribiremos $G \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ para denominar al subgrafo que se obtiene de G eliminando las aristas a_1, a_2, \dots, a_k .

14.4.5 Eliminación de Vértices

Si v es un vértice del grafo G , entonces $G \setminus \{v\}$ es el subgrafo obtenido del G eliminando el vértice v junto con todas las aristas incidentes con él.

En general, escribimos $G \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ para notar al grafo obtenido eliminando los vértices v_1, v_2, \dots, v_k en G y todas las aristas incidentes con cualquiera de ellos.

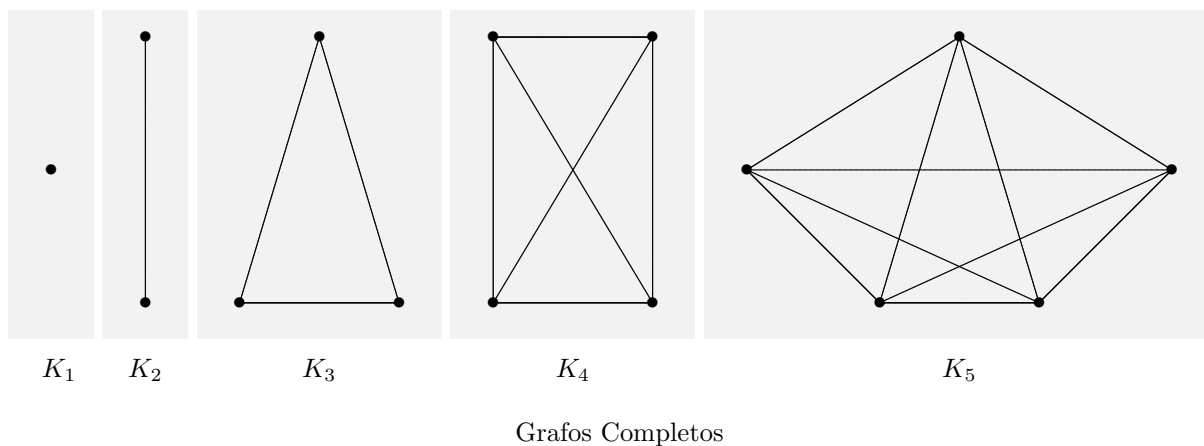
Ejemplo 14.11 La figura nos muestra un grafo y dos subgrafos suyos obtenidos eliminando aristas y vértices, respectivamente.



14.4.6 Grafos Completos

Se dice que un grafo es completo cuando todos sus vértices son adyacentes a todos los vértices del grafo, es decir, cuando cada par de vértices son los extremos de una arista. Notaremos por K_n los grafos completos de n vértices.

Ejemplo 14.12 La figura siguiente muestra los cinco primeros grafos completos.

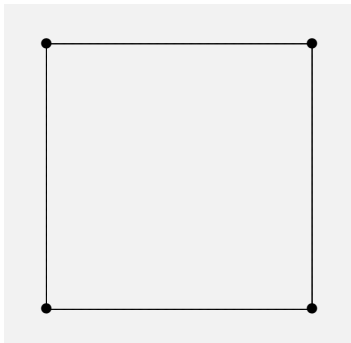


Ejemplo 14.13 Demostrar que todo grafo completo es regular y dar un ejemplo de que el recíproco no es cierto.

Solución

En efecto, si G es un grafo completo con p vértices, entonces cualquier vértice de G es adyacente a otro vértice de G , por lo tanto su grado es $p - 1$. Consecuentemente, G es un grafo regular de grado $p - 1$.

Veamos que el recíproco no es cierto.



En efecto, este grafo es regular de grado 2 y, sin embargo, los vértices en diagonal no son adyacentes, por tanto no es completo.

Ejemplo 14.14 Pruébese que en todo grafo $G = (V, A)$ se verifica

$$|A| \leq \frac{1}{2} |V| (|V| - 1)$$

y si se da la igualdad, entonces G es completo.

Solución

Supongamos que G tiene p vértices, es decir, $|V| = p$. Como el grafo completo K_p es el que más aristas tiene entre todos los grafos con p vértices, tendremos que

$$|A| \leq \text{número de aristas de } K_p$$

Por otro lado, es obvio que

$$\text{Número de aristas de } K_p = C_{p,2} = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

luego,

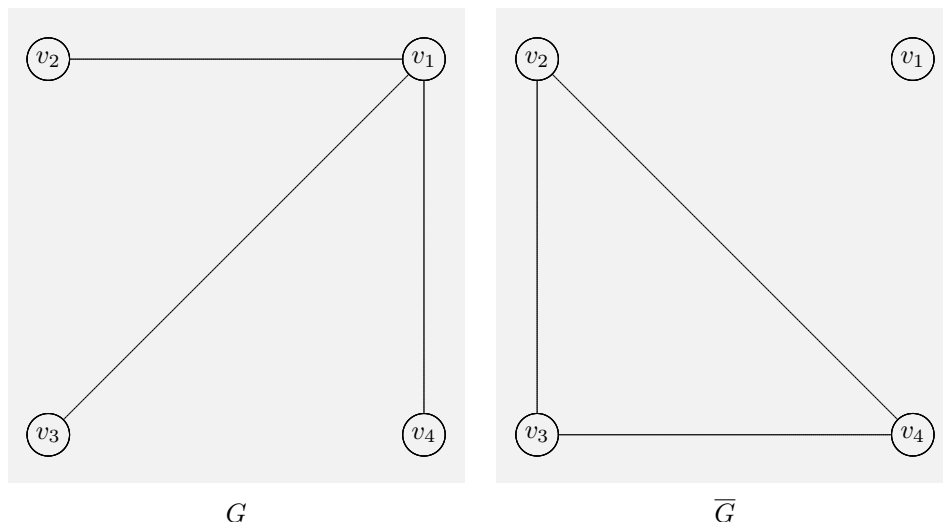
$$|A| \leq \frac{1}{2} |V| (|V| - 1)$$

y si se verifica la igualdad, entonces G ha de tener todas las aristas posibles y, por tanto, cada par de sus vértices ha de estar unido por una de ellas, de aquí que G sea completo. ■

14.4.7 Complemento de un Grafo

Dado un grafo G con n vértices, llamaremos complemento de G , y lo notaremos por \overline{G} , al subgrafo de K_n formado por todos los vértices de G y las aristas que no están en G .

Ejemplo 14.15



Complemento de un Grafo

En la figura representamos un grafo de cuatro vértices y su complemento. ■

14.5 Caminos y Ciclos

14.5.1 Camino

Sea G un grafo o un multigrafo. Un camino en G es una sucesión donde se alternan vértices y aristas, comenzando y terminando con vértices y en el que cada arista es incidente con los dos vértices que la preceden y la siguen.

Un camino que une los vértices v_1 y v_n sería:

$$v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n$$

Si se trata de un grafo (no un multigrafo) este camino también puede especificarse simplemente por la sucesión de sus vértices, $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ y lo representaremos por:

$$\gamma = \langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle$$

A los vértices v_1 y v_n se les denomina extremos del camino. Suele decirse también que el camino conecta v_1 con v_n o que va de v_1 a v_n . La longitud del camino es el número $n - 1$ de aristas que contiene.

Un camino es simple si en la sucesión de vértices no hay ninguno repetido.

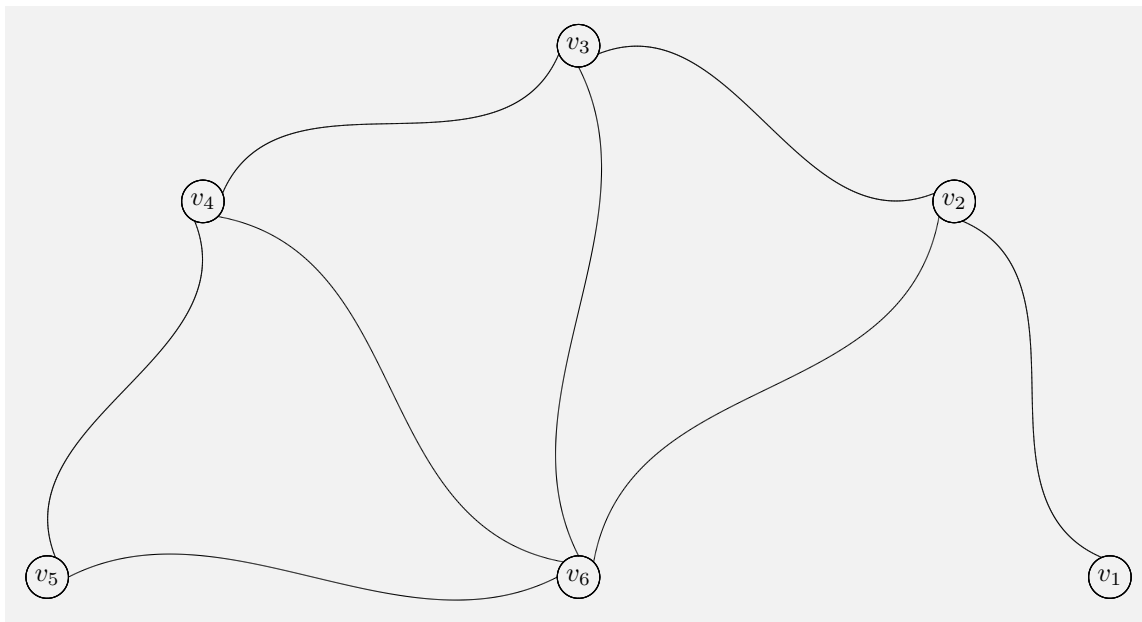
14.5.2 Ciclo

Sea G un grafo o un multigrafo. Un ciclo en G es un camino en el que sus extremos coinciden.

El ciclo será simple si no hay, además del primero y el último, ningún otro vértice repetido.

En un grafo dirigido, utilizaremos los términos caminos y ciclos dirigidos.

Ejemplo 14.16



Camino y Ciclos

$\gamma = \langle v_1, v_2, v_6, v_3, v_4, v_6, v_5 \rangle$ es un camino.

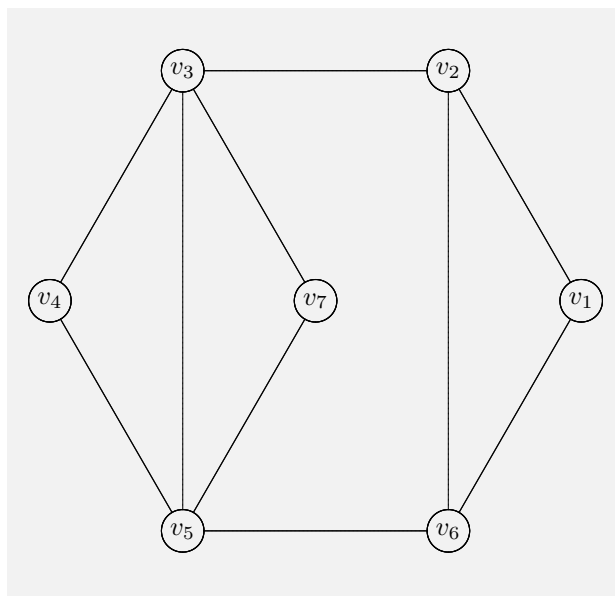
$\gamma = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ es un camino simple ya que no hay ningún vértice repetido.

$\gamma = \langle v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_6, v_2, v_1 \rangle$ es un ciclo.

$\gamma = \langle v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_2 \rangle$ es un ciclo simple ya que se repiten, únicamente, los vértices primero y último.



Ejemplo 14.17 Sea G el grafo de la figura. Encontrar:



G

- (a) Un camino que conecte v_3 con v_7 .
- (b) Un camino simple de longitud 5 entre v_3 y v_7 .
- (c) Un camino de longitud 6 entre v_3 y v_7 .
- (d) Un ciclo con origen en v_7 de longitud 6.
- (e) Un ciclo de longitud 3, otro de longitud 4 y un tercero de longitud 6.
- (f) Un ciclo simple de longitud 6.

Solución

- (a) Un camino que conecte v_3 con v_7 .

$$\gamma = \langle v_3, v_4, v_5, v_7 \rangle$$

- (b) Un camino simple de longitud 5 entre v_3 y v_7 .

$$\gamma = \langle v_3, v_2, v_1, v_6, v_5, v_7 \rangle$$

- (c) Un camino de longitud 6 entre v_3 y v_7 .

$$\gamma = \langle v_3, v_2, v_6, v_5, v_4, v_3, v_7 \rangle$$

- (d) Un ciclo con origen en v_7 de longitud 6.

$$\gamma = \langle v_7, v_3, v_2, v_1, v_6, v_5, v_7 \rangle$$

- (e) Un ciclo de longitud 3, otro de longitud 4 y un tercero de longitud 6.

$$\gamma_1 = \langle v_3, v_7, v_5, v_3 \rangle$$

$$\gamma_2 = \langle v_4, v_5, v_7, v_3, v_4 \rangle$$

$$\gamma_3 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1 \rangle$$

- (f) Un ciclo simple de longitud 6.

$$\gamma = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1 \rangle$$

■

14.5.3 Teorema

Si en un grafo existe un camino que conecta dos vértices, entonces existe un camino simple con extremos en dichos vértices.

Demostración

En efecto, sea $\gamma = \langle v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, v_p \rangle$ un camino que conecta v_1 con v_p y supongamos que el camino no es simple.

Entonces, en el camino existirán, al menos, dos vértices repetidos $v_i = v_j$ con $1 \leq i < j \leq p$. Si ahora eliminamos el camino que une a los dos vértices repetidos (desde v_{i+1} hasta v_j), tendremos un nuevo camino,

$$\gamma' = \langle v_1, v_2, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_{p-1}, v_p \rangle.$$

Si este nuevo camino es simple, entonces el teorema estará demostrado, de lo contrario repetiríamos el proceso.

Seguimos así sucesivamente y, como el número de vértices es finito, al final obtendríamos un camino sin vértices repetidos, es decir un camino simple. ■

Ejemplo 14.18 En el grafo del ejemplo 14.16, consideramos el camino:

$$\gamma = \langle v_1, v_2, v_6, v_3, v_4, v_6, v_5 \rangle$$

El vértice v_6 está repetido en las posiciones tercera y sexta. Eliminamos los vértices v_3 , v_4 y v_6 y el camino resultante

$$\gamma_1 = \langle v_1, v_2, v_6, v_5 \rangle$$

no tiene vértices repetidos, es decir, es simple. ■

14.6 Grafos Conexos

Una de las propiedades más elementales de las que puede gozar cualquier grafo es que sea conexo. Desarrollaremos en esta sección la estructura básica de este tipo de grafos.

14.6.1 Vértices Conectados

Dos vértices de un grafo se dice que están conectados cuando existe un camino entre ambos, es decir,

$$u \text{ y } v \text{ están conectados} \iff \exists \mu = \langle u, v \rangle$$

μ es un camino que une al vértice u con el v .

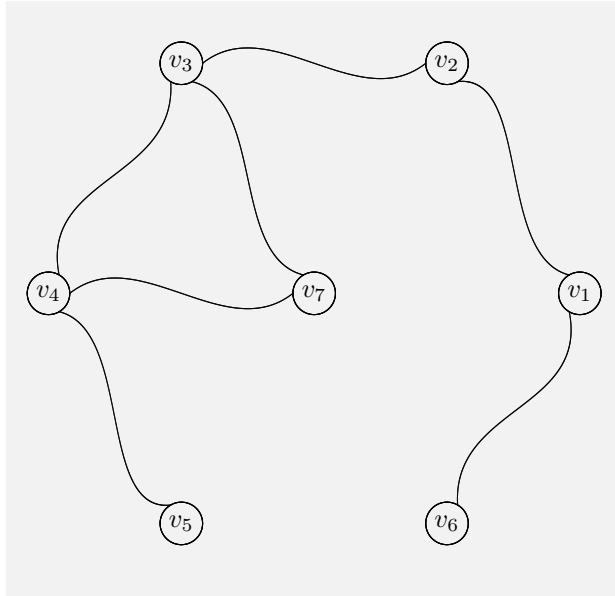
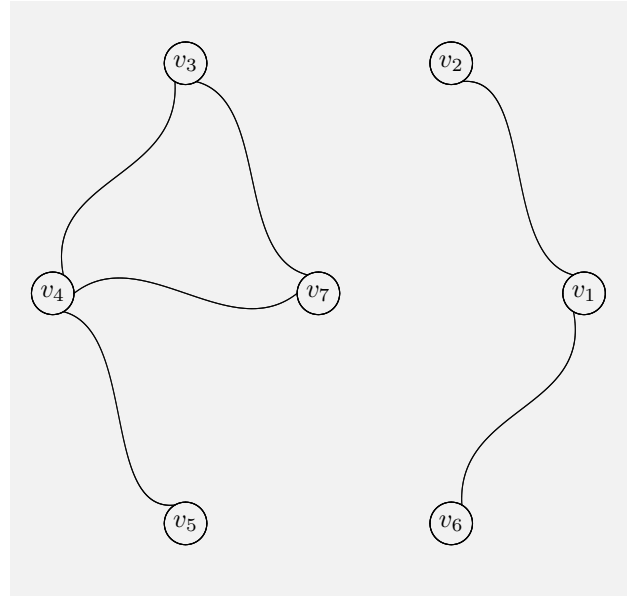
14.6.2 Grafos Conexos

Un grafo se dice que es conexo si cada par de sus vértices están conectados. Es decir,

$$G \text{ es conexo} \iff \forall u, v : \exists \mu = \langle u, v \rangle$$

En caso contrario, diremos que G es un grafo desconexo.

Ejemplo 14.19 En la figura siguiente G_1 es un grafo conexo, en tanto que G_2 no lo es ya que, por ejemplo, no existe ningún camino entre v_2 y v_3 .

 G_1 (Grafo Conexo) G_2 (Grafo Desconexo)

14.6.3 Proposición

Dado un grafo, la relación “estar conectado con” definida en el conjunto de sus vértices es una relación de equivalencia.

Demostración

Sea el grafo $G = (V, A)$ y definimos en el conjunto V de sus vértices la siguiente relación

$$u\mathcal{R}v \iff u \text{ está conectado con } v$$

Veamos que esta relación es de equivalencia.

- (a) *Reflexividad.* Sea u cualquiera de V . Entonces, el camino $\mu = \langle u, u \rangle$ conecta u con u , luego

$$\forall u \in V; u\mathcal{R}u$$

es decir, \mathcal{R} es reflexiva.

- (b) *Simetría.* Sean u y v dos elementos cualesquiera de V . Entonces,

$$u\mathcal{R}v \iff \exists \mu = \langle u, v \rangle \implies \exists \mu' = \langle v, u \rangle \iff v\mathcal{R}u$$

luego,

$$\forall u, v \in V; u\mathcal{R}v \implies v\mathcal{R}u$$

o sea, \mathcal{R} es simétrica.

- (c) *Transitividad.* Si u, v y w son tres vértices cualesquiera de G , entonces

$$\left. \begin{array}{l} u\mathcal{R}v \iff \exists \mu_1 = \langle u, v \rangle \\ v\mathcal{R}w \iff \exists \mu_2 = \langle v, w \rangle \end{array} \right\} \implies \exists \mu = \langle u, w \rangle \iff u\mathcal{R}w$$

Bastaría, pues, con unir los caminos μ_1 y μ_2 . Por lo tanto,

$$\forall u, v, w; u\mathcal{R}v \wedge v\mathcal{R}w \implies u\mathcal{R}w$$

es decir, \mathcal{R} es transitiva.

14.6.4 Componentes Conexas de un Grafo

Dado un grafo $G = (V, A)$, las clases de equivalencia definidas en el conjunto de sus vértices, V , por la relación de equivalencia “estar conectado con” reciben el nombre de componentes conexas de G .

Obsérvese que de esta forma un grafo no conexo G puede ser “partido” por la relación anterior en subgrafos conexos que son las citadas componentes conexas de G .

Ejemplo 14.20 El conjunto de vértices del grafo G_2 del ejemplo 14.19 es

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

y si consideramos en él la relación de equivalencia definida en la proposición anterior, las clases de equivalencia serán

$$[v_1] = \{v_1, v_2, v_6\} = [v_2] = [v_6]$$

$$[v_3] = \{v_3, v_4, v_5, v_7\} = [v_4] = [v_5] = [v_7]$$

Por lo tanto, el grafo G_2 tiene dos componentes conexas que son los subgrafos H_1 y H_2 cuyos conjuntos de vértices son $[v_1]$ y $[v_3]$, es decir,

$$H_1 = (\{v_1, v_2, v_6\}, \{v_1v_2, v_1v_6\})$$

$$H_2 = (\{v_3, v_4, v_5, v_7\}, \{v_3v_4, v_3v_7, v_4v_5, v_4v_7\})$$

■

Ejemplo 14.21 Demuéstrese que en un grafo conexo $G = (V, A)$ se verifica: $|V| - 1 \leq |A|$

Solución

Utilizaremos la inducción sobre el número de vértices de G .

Paso básico. Si $|V| = 1$, entonces $|A| = 0$, luego

$$|V| - 1 = 1 - 1 = 0 = |A|$$

Paso inductivo. Supongamos que la desigualdad es cierta para $|V| = p$ con $p > 1$ y veamos que también es cierta para $|V| = p + 1$.

En efecto, sea u un vértice cualquiera de G . Como el número de vértices, p , es mayor que 1, habrá otro vértice v en G distinto de u y, al ser G conexo, deberá existir, al menos, un camino entre u y v , luego $\text{gr}(u) \geq 1$.

- Si $\text{gr}(u) = 1$ y a es la única arista que tiene a u como extremo, entonces el grafo

$$(V \setminus \{u\}, A \setminus \{a\})$$

es conexo y tiene p vértices. Por la hipótesis de inducción,

$$|V \setminus \{u\}| - 1 \leq |A \setminus \{a\}|$$

es decir,

$$|V| - 2 \leq |A| - 1$$

de donde,

$$|V| - 1 \leq |A|$$

- Si $\text{gr}(u) > 1$, $\forall u \in V$, entonces por el teorema 14.2.4

$$2|V| \leq \text{Suma de los grados de los vértices de } G = 2|A|$$

o sea, $|V| \leq |A|$, de aquí que

$$|V| - 1 < |A|$$

Por el *primer principio de inducción matemática*,

$$|V| - 1 \leq |A|$$

■

Ejemplo 14.22 Pruébese que en un grafo $G = (V, A)$ que posee k componentes conexas se verifica la siguiente desigualdad:

$$|A| \leq \frac{1}{2} (|V| - k) (|V| - k + 1).$$

Deducir de esta desigualdad que si

$$|A| > \frac{1}{2} (|V| - 2) (|V| - 1)$$

entonces G es conexo.

Solución

Razonaremos por inducción sobre el número de componentes conexas, k .

Paso básico. Para $k = 1$, por el ejemplo 14.14 la desigualdad es cierta, es decir,

$$|A| \leq \frac{1}{2} |V| (|V| - 1)$$

Paso inductivo. Supongamos que la desigualdad es cierta para $k - 1$.

$$|A| \leq \frac{1}{2} (|V| - k + 1) (|V| - k + 2)$$

Veamos que también es cierto para k .

En efecto, sea $G_{k-1} = (V_{k-1}, A_{k-1})$ un subgrafo de G formado por $k - 1$ componentes conexas de G y sea $G_1 = (V_1, A_1)$ el subgrafo de G formado por los vértices y aristas de G que no están en G_{k-1} .

Por el paso inductivo, la desigualdad es cierta para G_{k-1} , o sea,

$$|A_{k-1}| \leq \frac{1}{2} (|V_{k-1}| - k + 1) (|V_{k-1}| - k + 2)$$

y por el *paso básico*,

$$|A_1| \leq \frac{1}{2} (|V_1| - 1) |V_1|$$

sumando ambas desigualdades miembro a miembro,

$$|A_{k-1}| + |A_1| \leq \frac{1}{2} [(|V_{k-1}| - k + 1) (|V_{k-1}| - k + 2) + (|V_1| - 1) |V_1|]$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |V_{k-1}| < |V| &\implies |V_{k-1}| - (k - 1) < |V| - (k - 1) \\ &\implies |V_{k-1}| - (k - 1) + 1 \leq |V| - (k - 1) \\ &\implies |V_{k-1}| - k + 2 \leq |V| - k + 1 \end{aligned}$$

además, de $|V| = |V_1| + |V_{k-1}|$ se sigue que $|V_1| = |V| - |V_{k-1}|$ y como en cada componente conexa debe haber al menos un vértice,

$$|V_{k-1}| \geq k - 1 \implies -|V_{k-1}| \leq -k + 1$$

luego,

$$|V_1| \leq |V| - k + 1$$

y como

$$|A_{k-1}| + |A_1| = |A|$$

tendremos,

$$\left. \begin{aligned} |A_{k-1}| + |A_1| &\leq \frac{1}{2} [(|V_{k-1}| - k + 1) (|V_{k-1}| - k + 2) + (|V_1| - 1) |V_1|] \\ |A_{k-1}| + |A_1| &= |A| \\ |V_{k-1}| - k + 2 &\leq |V| - k + 1 \\ |V_1| &\leq |V| - k + 1 \end{aligned} \right\}$$

de donde,

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{1}{2} [(|V_{k-1}| - k + 1) (|V| - k + 1) + (|V_1| - 1) (|V| - k + 1)] \\ &= \frac{1}{2} [(|V_{k-1}| - k + 1 + |V_1| - 1) (|V| - k + 1)] \end{aligned}$$

de aquí que

$$|A| \leq \frac{1}{2} (|V| - k) (|V| - k + 1)$$

Probemos ahora que

$$|A| > \frac{1}{2} (|V| - 2) (|V| - 1) \implies G \text{ es Conexo}$$

Lo demostraremos por reducción al absurdo. En efecto, supongamos que

$$|A| > \frac{1}{2} (|V| - 2) (|V| - 1)$$

y que, sin embargo, G no es conexo. Entonces, G debe tener, al menos, dos componentes conexas, luego según lo demostrado anteriormente,

$$|A| \leq \frac{1}{2} (|V| - 2) (|V| - 1)$$

lo que contradice la hipótesis. Consecuentemente, G es conexo. ■

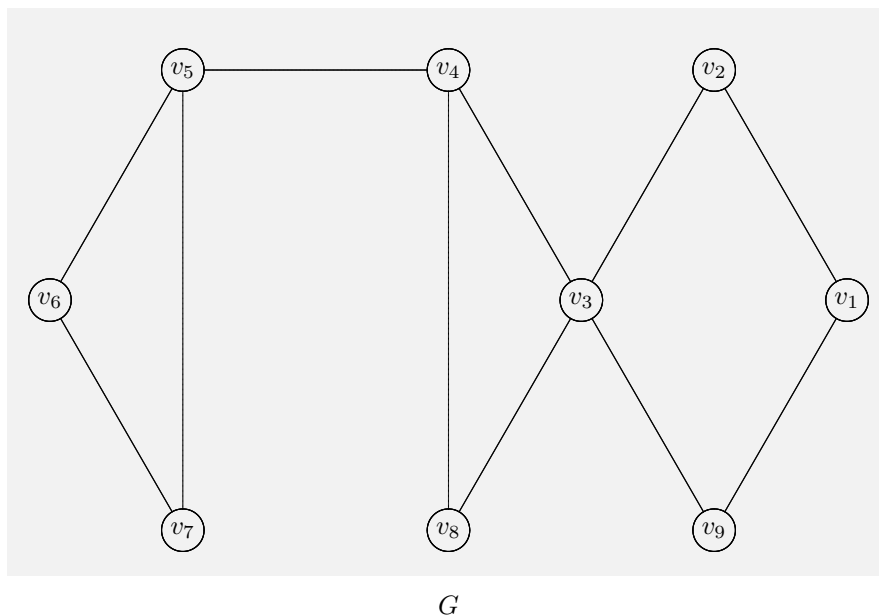
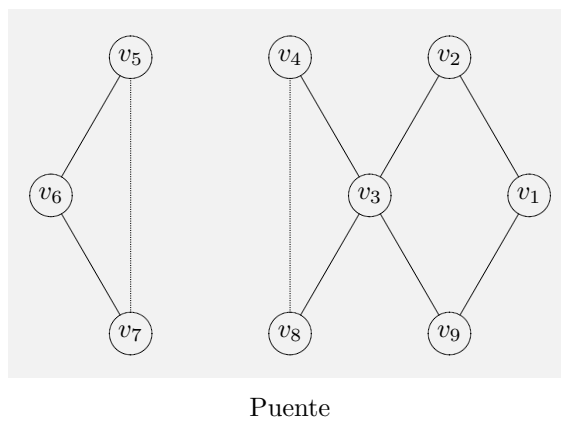
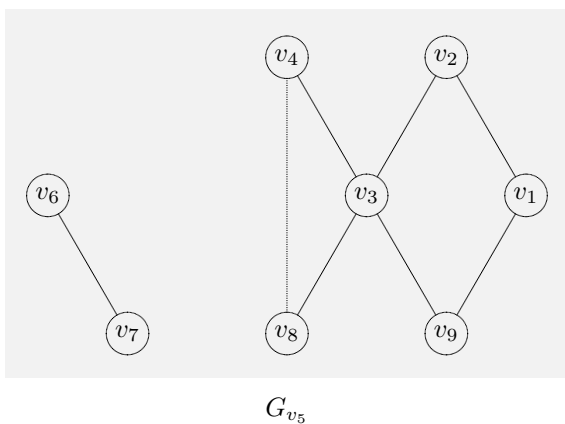
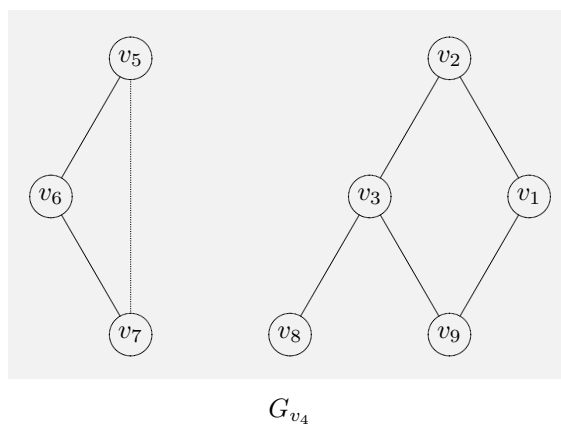
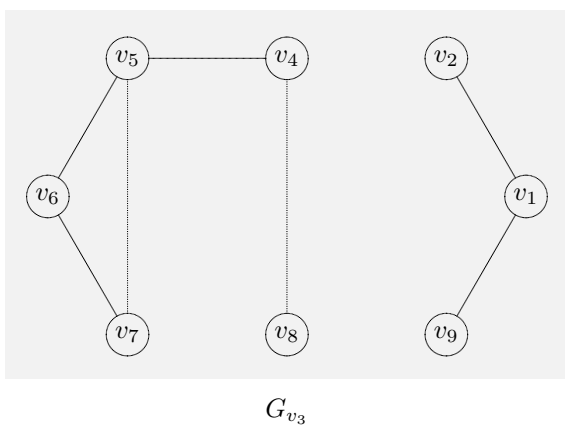
14.6.5 Puntos de Corte

Dado un grafo conexo $G = (V, A)$, un vértice u de G se llama punto de corte cuando el subgrafo G_u cuyos vértices son los de $V \setminus \{u\}$ y cuyas aristas son todas las de A cuyos vértices están en $V \setminus \{u\}$ no es conexo.

14.6.6 Puentes

Dado un grafo conexo $G = (V, A)$, a cualquier arista “ a ” de G tal que el grafo $(V, A \setminus \{a\})$ no sea conexo, lo llamaremos puente.

Ejemplo 14.23 Hallar los puntos de corte y los puentes del grafo G del la figura

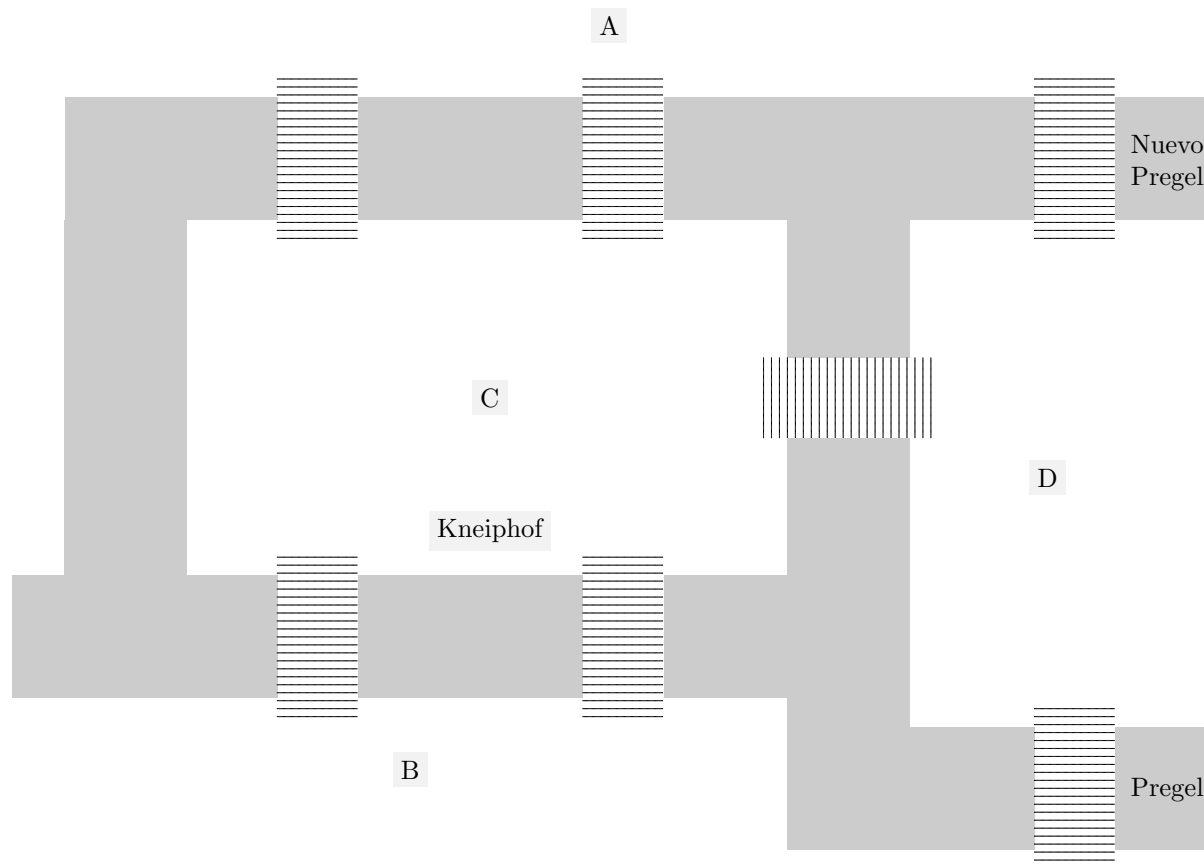
Solución

Puntos de Corte y Puentes

Puntos de corte. Los vértices v_3 , v_4 y v_5 ya que en los grafos G_{v_3} , G_{v_4} y G_{v_5} en la figura existen puntos que no pueden conectarse a través de ningún camino, luego ninguno de los tres es conexo.

Puentes. El único puente que existe en el grafo propuesto es la arista v_4v_5 ya que en el grafo resultante existen vértices que no están conectados, es decir, no es conexo. ■

14.7 Caminos y Ciclos de Euler



Puentes de Königsberg

En 1736 Leonhard Euler publicó el artículo “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” (La solución de un problema relativo a la geometría de posición), en el cual resolvió lo que se conocía con el nombre de “*Problema de los puentes de Königsberg*”. Este trabajo se considera el primer artículo sobre lo que hoy conocemos como la *Teoría de grafos*.

En el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg en la Prusia oriental (hoy Kaliningrado, en Lituania) estaba dividida por el río Pregel (hoy Pregolya) en cuatro zonas como muestra la figura. Las dos orillas A y B del río, una isla C llamada Kneiphof, y la parte de tierra D entre los ríos Pregel y Nuevo Pregel. Existían siete puentes: dos entre A y C, dos entre B y C y uno entre A y D, B y D y C y D.

Cuentan que durante sus paseos dominicales, los habitantes de Königsberg intentaban encontrar un camino que uniese dos zonas terrestres en el cual cada uno de los puentes se cruzase exactamente una vez.

Aunque era ampliamente conocido que tal camino no existía, aparentemente ninguno de los interesados habitantes de la ciudad podía explicar por qué.

Fue Euler quien encontró que tal camino era imposible: Para la existencia del mismo era necesario que como mucho, dos de las cuatro zonas terrestres A, B, C y D, fueran el final de un número impar de

puentes. Euler estableció, también, que esta condición no era suficiente para una solución del problema, sin embargo no hizo una demostración de estas afirmaciones.

No fue hasta 1873 que se publicó una demostración. Su autor, Hierholzer, desconocía, aparentemente, el trabajo de Euler.

Hoy en día se trata el *Problema de los puentes de Königsberg* representando el mapa de la figura anterior por un multigrafo en el que cada una de las zonas de la ciudad estaba representada por un vértice y cada puente por una arista que unía los vértices correspondientes a las zonas conectadas por dicho puente, aunque esto no fue lo que hizo Euler. Hierholzer, sin embargo, pudo haber planteado el problema de esta forma, ya que él definió, básicamente, el concepto de grafo cuando hablaba de un “sistema de líneas entrelazadas”.

El resultado es el multigrafo de la figura siguiente y el problema puede plantearse de la forma siguiente: ¿Puede encontrarse un camino en el multigrafo que contenga todas las aristas una sola vez?

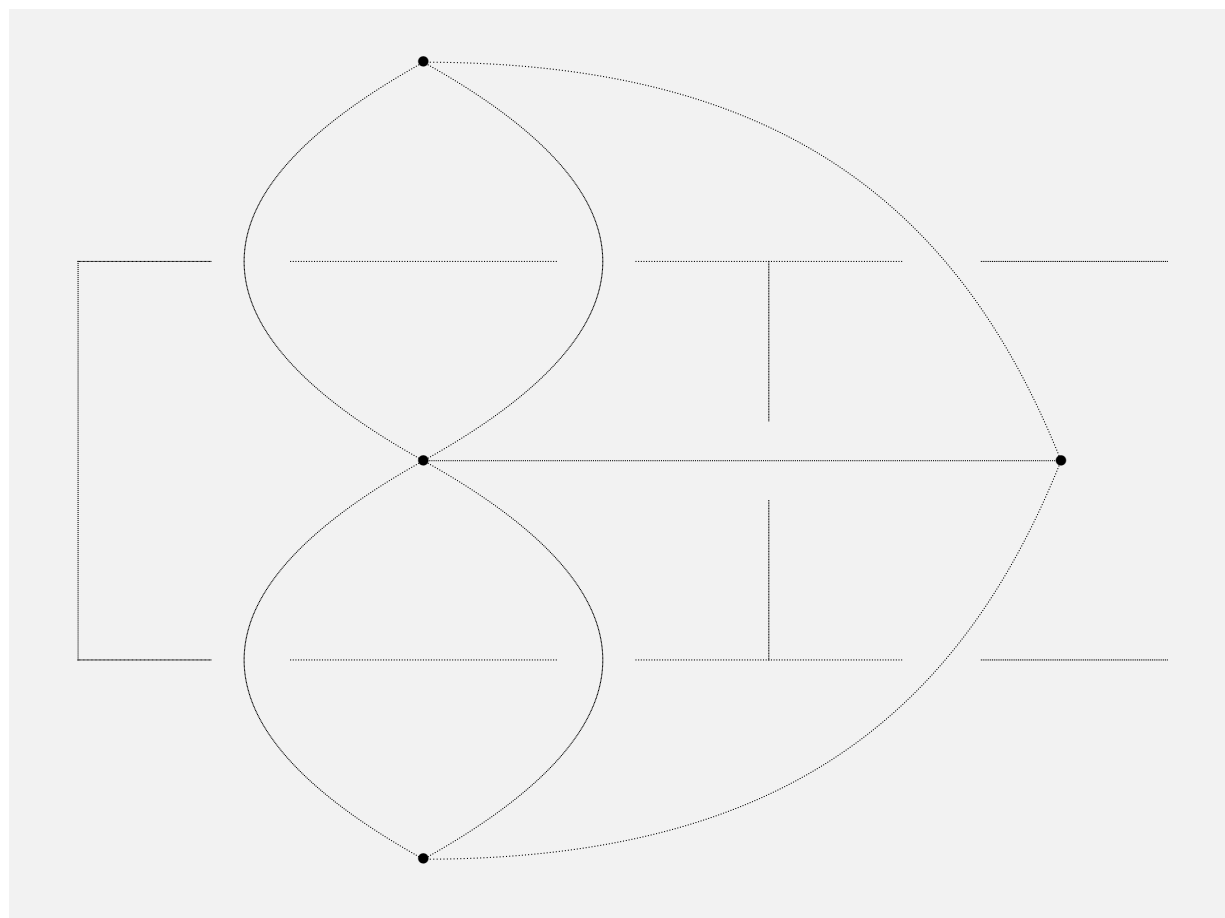


Figura 14.7. Multigrafo

14.7.1 Ciclo de Euler

Un ciclo de un grafo o multigrafo se dice de Euler si pasa por todos los vértices recorriendo cada arista exactamente una vez.

14.7.2 Grafo Euleriano

Un grafo que admita un ciclo de Euler se denomina grafo euleriano.

14.7.3 Primer Lema

Una condición necesaria para que un grafo o multigrafo sea Euleriano es que todos sus vértices sean de grado par.

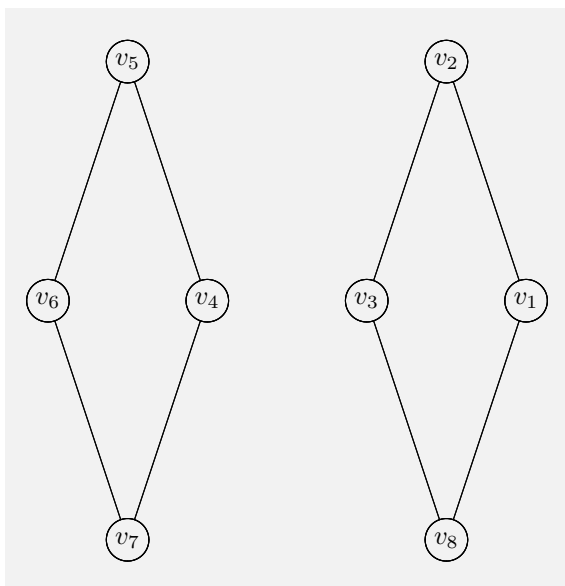
Demostración

En efecto, supongamos que G es un grafo Euleriano, es decir, supongamos que existe un ciclo de Euler, γ , en G . Sea v un vértice cualquiera de G . Veamos que tiene grado par.

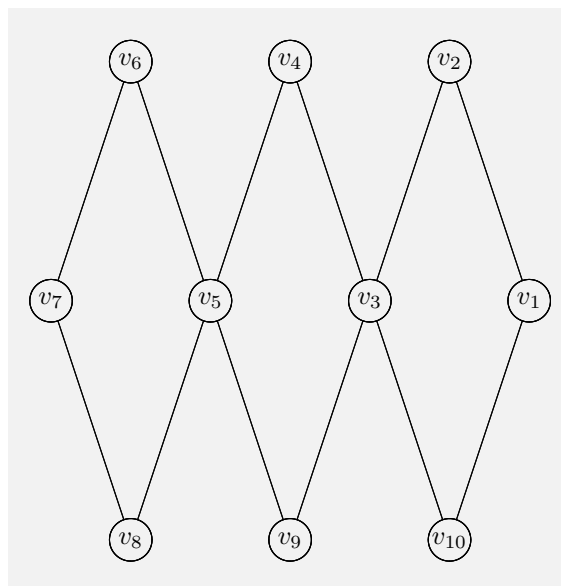
- Si v no es el primer vértice de γ , cada una de las veces que el ciclo pase por v entrará y saldrá por dos aristas distintas de la vez anterior, luego contribuirá con 2 al grado de v .
- Si v es el primer vértice de γ , el ciclo γ contribuye con 2 al grado de v en cada una de las “visitas” que se realicen a v , salvo en la primera y en la última en la que añade 1 cada vez.

Por lo tanto, en cualquier caso, el grado de v es par. ■

Nota 14.2



(a) Grafo no Euleriano



(b) Grafo Euleriano

El grafo de la figura en su apartado (a) nos muestra que la condición no es suficiente, es decir, existen grafos con todos sus vértices de grado par y, sin embargo, no son eulerianos. Obsérvese que si *conectamos* el grafo, entonces sí es euleriano (apartado (b) en la figura). En efecto, el ciclo

$$\gamma = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_5, v_9, v_3, v_4, v_{10}, v_1 \rangle$$

es de Euler. ■

Nota 14.3 En el Primer Lema hemos visto que

Si G es un grafo Euleriano, entonces todos sus vértices son de grado par.

de donde negando ambos miembros, y teniendo en cuenta la equivalencia lógica entre una proposición condicional y su contrarrecíproca, tendremos

Si existe algún vértice de grado impar, entonces G no es Euleriano.

es decir, si en un grafo G existe, al menos, un vértice de grado impar, entonces no es Euleriano.

14.7.4 Camino de Euler

Se dice que un camino de un grafo o multigrafo es de Euler si pasa por todos los vértices del mismo, recorriendo cada arista del mismo exactamente una vez.

Nota 14.4 Claramente, el problema de los puentes de Königsberg estará resuelto si encontramos un camino de euler en el multigrafo de la figura 14.7.

Obsérvese que un camino de Euler en un grafo G puede entenderse también como una forma de dibujar el grafo sin levantar el lápiz del papel y sin pintar dos veces la misma arista.

14.7.5 Segundo Lema

Una condición necesaria para que un grafo o multigrafo admita un camino de Euler es que el número de vértices de grado impar sea 2 o ninguno.

Demostración

Sea $G = (V, A)$ un grafo con un camino de Euler $\gamma = \langle u, u_1, u_2, \dots, u_p, v \rangle$.

Tomamos un punto w que no pertenezca a V y sea $G' = (V', A')$ un grafo tal que

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{w\} \\ A' &= A \cup \{uw, vw\} \end{aligned}$$

es decir, el grafo obtenido añadiendo el nuevo punto como vértice al grafo original y las dos aristas adyacentes al mismo y a los extremos u y v .

El ciclo

$$\langle w, u, u_1, \dots, u_p, v, w \rangle$$

es de Euler en G' , de aquí que G' sea un grafo euleriano y aplicando el primer lema, tengamos que todos sus vértices son de grado par.

Pues bien, si x es cualquier vértice de G distinto de u y de v , entonces

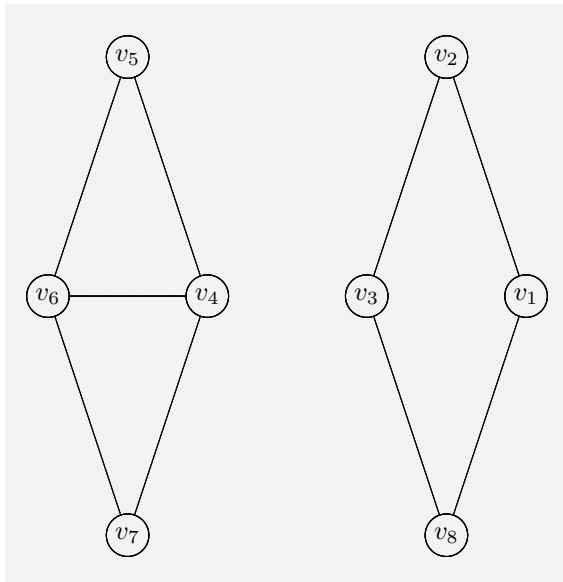
$$\text{gr}_G(x) = \text{gr}_{G'}(x)$$

luego el grado de x en el grafo G es par. Por otra parte,

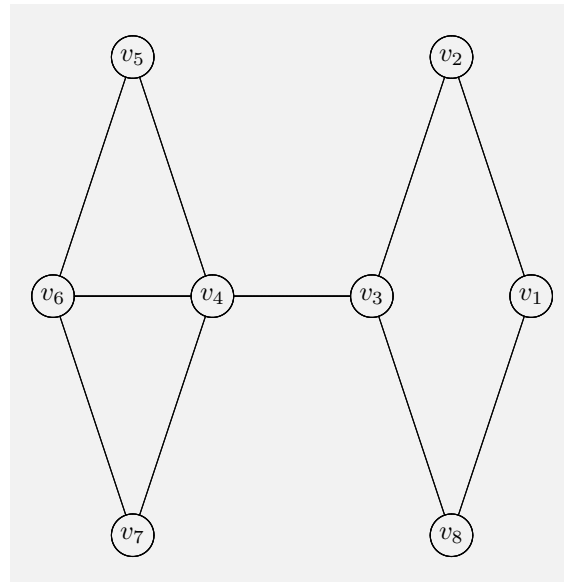
$$\begin{aligned} \text{gr}_G(u) &= \text{gr}_{G'}(u) - 1 \implies \text{gr}_G(u) \text{ es impar} \\ \text{y} \\ \text{gr}_G(v) &= \text{gr}_{G'}(v) - 1 \implies \text{gr}_G(v) \text{ es impar} \end{aligned}$$

luego los únicos dos vértices de grado impar son u y v . ■

Nota 14.5



(a) Sin camino de Euler



(b) Con camino de Euler

El grafo de la figura (apartado (a)) nos muestra que la condición no es suficiente, es decir, existen grafos con todos sus vértices de grado par o con exactamente 2 vértices de grado impar que no admiten un camino de Euler. Obsérvese que si *conectamos* el grafo, entonces sí admite un camino euleriano ((b) en la figura). En efecto, el camino

$$\gamma = \langle v_6, v_7, v_4, v_5, v_6, v_4, v_3, v_2, v_1, v_8 \rangle$$

lo es. ■

Nota 14.6 En el segundo lema, hemos visto que

“Si G es un grafo con un camino de Euler, entonces el número de vértices de grado impar es 2 o ninguno”.

Si ahora negamos ambos miembros, y tenemos en cuenta la equivalencia lógica entre una proposición condicional y su contrarrecíproca, tendremos

“Si el número de vértices de grado impar es distinto de 2, entonces G no tiene ningún camino de Euler”. ■

14.7.6 Problema de los Puentes de Königsberg

En el multigrafo de la figura 14.7 hay cuatro vértices de grado impar, luego según el segundo lema no existe en él ningún camino de Euler, de aquí que no exista ningún camino que una dos puntos terrestres cruzando cada uno de los puentes exactamente una vez.

14.7.7 Tercer Lema

Si G es un grafo en el que todos sus vértices tienen grado par, entonces para cada par de vértices adyacentes de G , puede encontrarse un ciclo que contiene a la arista que forman ambos.

Demostración

Sean u y v dos vértices adyacentes de G y sea γ un camino que comienza en u y continúa por la arista uv .

Cada vez que γ llega a un vértice w distinto de u , continuamos el camino por una arista que no esté en γ , si w es igual u damos por terminado el proceso. Dado que los grados de los vértices son pares por hipótesis, cada vez que el camino γ pasa por un vértice utiliza dos aristas con un extremo en el mismo. Como el número de aristas y el de vértices es finito, el camino γ acaba por volver a u y γ es, según la construcción hecha, un ciclo. ■

14.7.8 Teorema

Un grafo o multigrafo $G = (V, A)$ es euleriano si, y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Demostración

Sea $G = (V, A)$ un grafo o multigrafo.

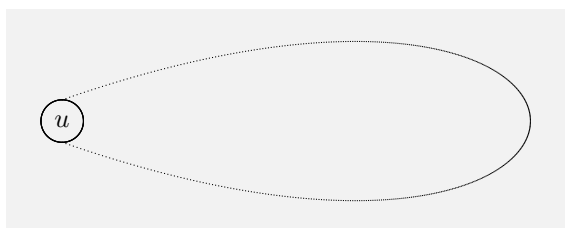
“Sólo si.” En efecto, supongamos que G admite un ciclo de Euler.

Dados dos vértices cualesquiera de G , u y v , la parte del ciclo que comienza en u y acaba en v es un camino que une u con v , luego G es conexo.

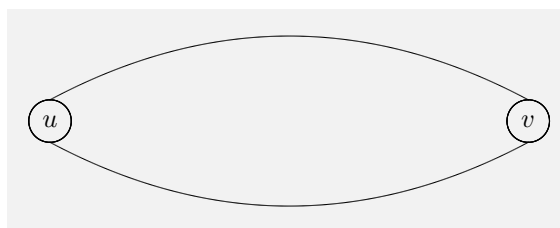
Además, el *primer lema* asegura que todos los vértices de G tienen grado par.

“Si.” Recíprocamente, supongamos que G es conexo y que todos sus vértices son de grado par.

Si $|V|$, número de vértices de G , es 1 ó 2, entonces como pone de manifiesto la figura siguiente, el resultado es trivial.



Un Vértice



Dos Vértices

Supongamos, pues, que $|V| > 2$.

- [1] Sean u y v dos vértices adyacentes de G . Como G tiene todos sus vértices de grado par, el *tercer lema* asegura la existencia de un ciclo γ_1 que contiene a la arista uv . Pues bien, sea $G' = (V, A')$ el subgrafo de G que resulta eliminando las aristas que están en γ_1 , es decir,

$$A' = A \setminus \{\text{aristas de } \gamma_1\}.$$

G' tiene todos sus vértices de grado par (o cero) ya que en el ciclo γ_1 cada vértice habrá aportado dos aristas, luego si los vértices de G eran de grado par, los de G' seguirán siéndolo.

- Si $A' = \emptyset$, entonces $\gamma = \gamma_1$ es el ciclo de Euler que buscamos y la demostración habrá concluido.
- Si $A' \neq \emptyset$, continuamos el proceso.

- [2] Elegimos un vértice cualquiera de γ_1 .

- Si no está aislado en G' , tomamos uno de sus adyacentes y por el *tercer lema*, habrá un ciclo γ'_1 que contenga la arista que forman ambos.
- Si está aislado en G' , entonces elegimos un vértice cualquiera que no esté aislado en G' (siempre existirá ya que $A' \neq \emptyset$). La primera arista del camino que une a ambos en G (recuérdese que G es conexo) que no esté en γ_1 comenzará en un vértice de γ_1 no aislado en G' . Ahora bastaría tomar este vértice y uno de sus adyacentes para hallar el ciclo γ'_1 .

Ahora unimos γ_1 con γ'_1 de la forma siguiente: recorremos γ_1 hasta llegar al vértice que acabamos de elegir, seguimos a través de γ'_1 y volvemos a γ_1 , de esta forma obtendremos un nuevo ciclo γ_2 con más aristas que γ_1 . Sea

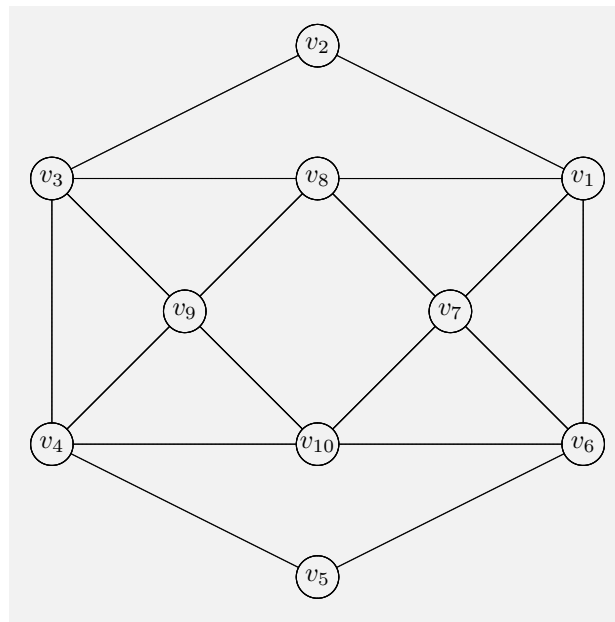
$$A'' = A' \setminus \{\text{aristas de } \gamma'_1\}$$

- Si $A'' = \emptyset$, entonces $\gamma = \gamma_2$ es el ciclo de Euler que buscamos y la demostración habrá concluido.
- Si $A'' \neq \emptyset$, entonces reiteramos el proceso.

Siguiendo así sucesivamente, como el número de aristas es finito y en cada una de las construcciones aumenta el número de aristas que tiene el ciclo construido, el proceso termina con la obtención de un ciclo de Euler.

■

Ejemplo 14.24



El problema del cartero (G)

Un cartero tiene asignadas para el reparto una red de calles representadas en la figura anterior. El reparto de cartas debe comenzar y acabar en la estafeta de correos que se encuentra en el vértice v_9 y debe efectuarse sin recorrer dos veces la misma calle.

Solución

El grafo de la figura, además de ser conexo, tiene todos los vértices de grado par, luego según el teorema anterior es euleriano, de aquí que contenga un *ciclo de Euler*. Consecuentemente, el cartero puede efectuar el reparto sin recorrer dos veces la misma calle utilizando dicho ciclo. Veamos la forma de obtenerlo.

El conjunto de aristas de G es

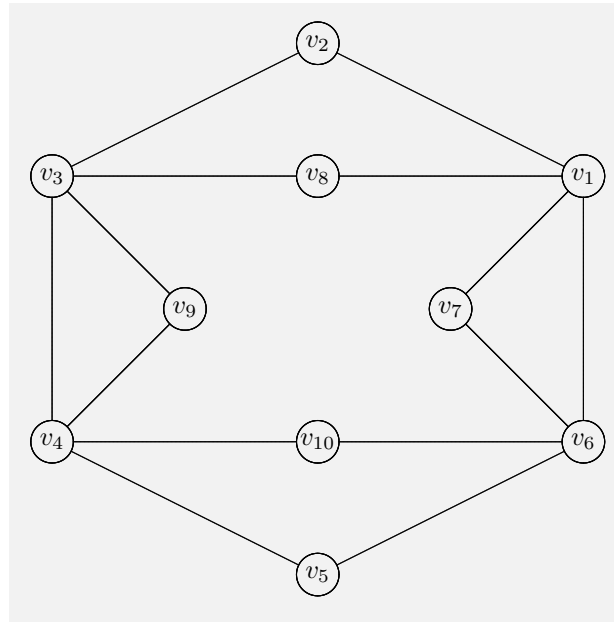
$$A = \{v_1v_2, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_8, v_3v_9, v_4v_5, v_4v_9, v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_7, v_6v_{10}, v_7v_8, v_7v_{10}, v_8v_9, v_9v_{10}\}$$

- [1] Consideramos el vértice v_9 y uno de sus adyacentes, por ejemplo v_8 . De acuerdo con el *tercer lema* (todos los vértices de G tienen grado par), podremos encontrar un ciclo γ_1 que contiene a la arista v_9v_8 . Siguiendo las instrucciones dadas en la demostración del citado lema, obtenemos el ciclo:

$$\gamma_1 = \langle v_9, v_8, v_7, v_{10}, v_9 \rangle = \langle v_9v_8, v_8v_7, v_7v_{10}, v_{10}v_9 \rangle$$

Sea $G' = (V, A')$ el subgrafo de G que resulta de eliminar las aristas que están en γ_1 , es decir,

$$\begin{aligned} A' &= A \setminus \{\text{aristas de } \gamma_1\} \\ &= A \setminus \{v_9v_8, v_8v_7, v_7v_{10}, v_{10}v_9\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_8, v_3v_9, v_4v_5, v_4v_9, v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_7, v_6v_{10}\} \end{aligned}$$



El problema del cartero (G')

Como $A' \neq \emptyset$, continuamos el proceso.

- [2] Elegimos un vértice cualquiera de γ_1 , por ejemplo v_8 y un vértice de G' que no esté aislado (existe ya que $A' \neq \emptyset$), por ejemplo v_5 .

- [2.1] Como G es conexo, habrá en G un camino que una v_8 con v_5 . Por ejemplo,

$$\gamma'_1 = \langle v_8, v_9, v_4, v_5 \rangle$$

- [2.2] La primera arista de γ'_1 que no está en γ_1 es v_9v_4 . Obsérvese que $v_9v_4 \in A'$ y $v_9v_4 \in \gamma_1$ luego v_9 es de γ_1 y no está aislado en G' . Como todos los vértices de G' siguen siendo de grado par, aplicamos el *tercer lema* y podremos encontrar un ciclo γ''_1 en G' que contenga a la arista v_9v_4 . Por ejemplo,

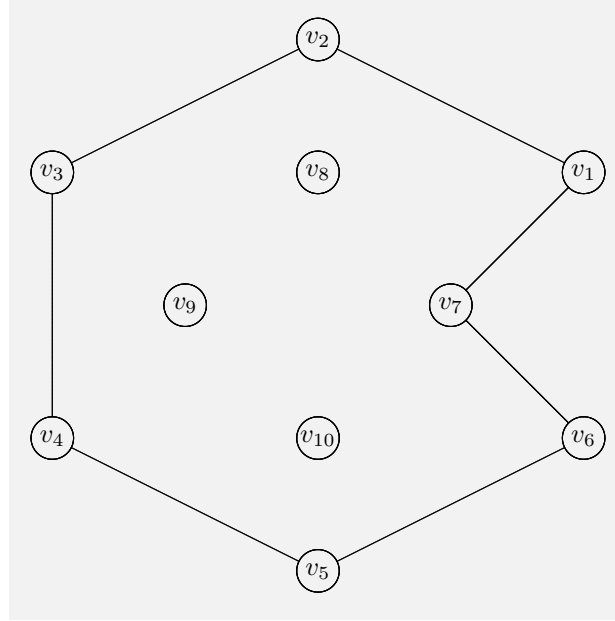
$$\gamma''_1 = \langle v_9, v_4, v_{10}, v_6, v_1, v_8, v_3, v_9 \rangle = \langle v_9v_4, v_4v_{10}, v_{10}v_6, v_6v_1, v_1v_8, v_8v_3, v_3v_9 \rangle$$

Unimos γ_1 con γ''_1 empezando por γ_1 conectando con γ''_1 y terminando con γ_1 . Obtenemos el ciclo,

$$\gamma_2 = \langle v_9, v_4, v_{10}, v_6, v_1, v_8, v_3, v_9, v_8, v_7, v_{10}, v_9 \rangle$$

Sea $G'' = (V, A'')$ el subgrafo de G' que se obtiene eliminando las aristas que están en γ_1'' , o sea,

$$\begin{aligned} A'' &= A' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_1''\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_8, v_3v_9, v_4v_5, v_4v_9, v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_7, v_6v_{10}\} \\ &\quad \setminus \{v_9v_4, v_4v_{10}, v_{10}v_6, v_6v_1, v_1v_8, v_8v_3, v_3v_9\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_7, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7\} \end{aligned}$$



El problema del cartero (G'')

como $A'' \neq \emptyset$, seguimos el proceso.

- 3 Elegimos un vértice cualquiera de γ_2 , por ejemplo v_{10} , y un vértice de G'' que no esté aislado, por ejemplo v_1 .

- 3.1 Como G es conexo, habrá un camino con extremos en v_{10} y v_1 , por ejemplo,

$$\gamma_2' = \langle v_{10}, v_4, v_3, v_8, v_1 \rangle$$

- 3.2 La primera arista de γ_2' que no está en γ_2 es v_4v_3 . El vértice v_4 es de γ_2 y no está aislado en G'' que sigue teniendo todos sus vértices de grado par. Por el *tercer lema* habrá un ciclo γ_2'' en G'' que contiene a la arista v_4v_3 .

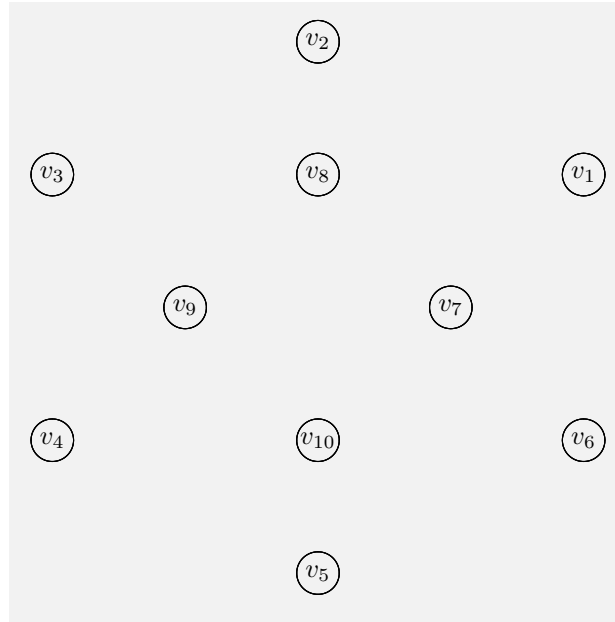
$$\gamma_2'' = \langle v_4, v_3, v_2, v_1, v_7, v_6, v_5, v_4 \rangle = \langle v_4v_3, v_3v_2, v_2v_1, v_1v_7, v_7v_6, v_6v_5, v_5v_4 \rangle$$

Unimos γ_2 con γ_2'' de la misma forma que hicimos antes. Obtenemos el ciclo γ_3 .

$$\gamma_3 = \langle v_9, v_4, v_3, v_2, v_1, v_7, v_6, v_5, v_4, v_{10}, v_6, v_1, v_8, v_3, v_9, v_8v_7, v_{10}, v_9 \rangle$$

Sea $G''' = (V, A''')$ el subgrafo de G'' que se obtiene eliminando las aristas que están en γ_2'' , es decir,

$$\begin{aligned} A''' &= A'' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_2''\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_7, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7\} \setminus \{v_4v_3, v_3v_2, v_2v_1, v_1v_7, v_7v_6, v_6v_5, v_5v_4\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$



El problema del cartero (G'')

Como $A''' = \emptyset$ el proceso finaliza y la solución es el ciclo γ_3 .

■

Nota 14.7 En un grafo euleriano, puede existir más de un ciclo de Euler. Obtendremos, a modo de ejemplo, un ciclo distinto al anterior para este mismo problema.

- [1] Consideramos el vértice v_9 y uno de sus adyacentes, por ejemplo v_3 . De acuerdo con el *tercer lema* (todos los vértices de G tienen grado par), podremos encontrar un ciclo γ_1 que contiene a la arista v_9v_3 . Siguiendo las instrucciones dadas en la demostración del citado lema, obtenemos el ciclo:

$$\gamma_1 = \langle v_9, v_3, v_8, v_9 \rangle = \langle v_9v_3, v_3v_8, v_8v_9 \rangle$$

Sea $G' = (V, A')$ el subgrafo de G que resulta de eliminar las aristas que están en γ_1 , es decir,

$$\begin{aligned} A' &= A \setminus \{\text{aristas de } \gamma_1\} \\ &= A \setminus \{v_9v_3, v_3v_8, v_8v_9\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_9, v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_7, v_6v_{10}, v_7v_8, v_7v_{10}, v_9v_{10}\} \end{aligned}$$

Como $A' \neq \emptyset$, continuamos el proceso.

- [2] Elegimos un vértice cualquiera de γ_1 , por ejemplo v_3 y un vértice de G' que no esté aislado (existe ya que $A' \neq \emptyset$), por ejemplo v_{10} .

- [2.1] Como G es conexo, habrá en G un camino que una v_3 con v_{10} . Por ejemplo,

$$\gamma'_1 = \langle v_3, v_8, v_7, v_{10} \rangle$$

- [2.2] La primera arista de γ'_1 que no está en γ_1 es v_8v_7 . Obsérvese que $v_8v_7 \in A'$ y $v_8v_7 \in \gamma_1$ luego v_8 es de γ_1 y no está aislado en G' . Como todos los vértices de G' siguen siendo de grado par, aplicamos el *tercer lema* y podremos encontrar un ciclo γ''_1 en G' que contenga a la arista v_8v_7 . Por ejemplo,

$$\gamma''_1 = \langle v_8, v_7, v_6, v_1, v_8 \rangle = \langle v_8v_7, v_7v_6, v_6v_1, v_1v_8 \rangle$$

Unimos γ_1 con γ_1'' empezando por γ_1 conectando con γ_1'' y terminando con γ_1 . Obtenemos el ciclo,

$$\gamma_2 = \langle v_9, v_3, v_8, v_7, v_6, v_1, v_8, v_9 \rangle$$

Sea $G'' = (V, A'')$ el subgrafo de G' que se obtiene eliminando las aristas que están en γ_1'' , o sea,

$$\begin{aligned} A'' &= A' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_1''\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_9, v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_7, v_6v_{10}, v_7v_8, v_7v_{10}, v_9v_{10}\} \\ &\quad \setminus \{v_8v_7, v_7v_6, v_6v_1, v_1v_8\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_7, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_9, v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_{10}, v_7v_{10}, v_9v_{10}\} \end{aligned}$$

como $A'' \neq \emptyset$, seguimos el proceso.

- 3 Elegimos un vértice cualquiera de γ_2 , por ejemplo v_7 , y un vértice de G'' que no esté aislado, por ejemplo v_4 .

3.1 Como G es conexo, habrá un camino con extremos en v_7 y v_4 , por ejemplo,

$$\gamma_2' = \langle v_7, v_6, v_5, v_4 \rangle$$

- 3.2 La primera arista de γ_2' que no está en γ_2 es v_6v_5 . El vértice v_6 es de γ_2 y no está aislado en G'' que sigue teniendo todos sus vértices de grado par. Por el *tercer lema* habrá un ciclo γ_2'' en G'' que contiene a la arista v_6v_5 .

$$\gamma_2'' = \langle v_6, v_5, v_4, v_{10}, v_6 \rangle = \langle v_6v_5, v_5v_4, v_4v_{10}, v_{10}v_6 \rangle$$

Unimos γ_2 con γ_2'' de la misma forma que hicimos antes. Obtenemos el ciclo γ_3 .

$$\gamma_3 = \langle v_9, v_3, v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_{10}, v_6, v_1, v_8, v_9 \rangle$$

Sea $G''' = (V, A''')$ el subgrafo de G'' que se obtiene eliminando las aristas que están en γ_2'' , es decir,

$$\begin{aligned} A''' &= A'' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_2''\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_7, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_9, v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_{10}, v_7v_{10}, v_9v_{10}\} \\ &\quad \setminus \{v_6v_5, v_5v_4, v_4v_{10}, v_{10}v_6\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_7, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_9, v_7v_{10}, v_9v_{10}\} \end{aligned}$$

Como $A''' \neq \emptyset$ continuamos el proceso.

- 4 Elegimos un vértice cualquiera de γ_3 , por ejemplo v_5 , y un vértice de G''' que no esté aislado, por ejemplo v_2 .

4.1 Como G es conexo, habrá un camino con extremos en v_5 y v_2 , por ejemplo,

$$\gamma_3' = \langle v_5, v_4, v_3, v_2 \rangle$$

- 4.2 La primera arista de γ_3' que no está en γ_3 es v_4v_3 . El vértice v_4 es de γ_3 y no está aislado en G''' que sigue teniendo todos sus vértices de grado par. Por el *tercer lema* habrá un ciclo γ_3'' en G''' que contiene a la arista v_4v_3 .

$$\gamma_3'' = \langle v_4, v_3, v_2, v_1, v_7, v_{10}, v_9, v_4 \rangle = \langle v_4v_3, v_3v_2, v_2v_1, v_1v_7, v_7v_{10}, v_{10}v_9, v_9v_4 \rangle$$

Unimos γ_3 con γ_3'' de la misma forma que hicimos antes. Obtenemos el ciclo γ_4 .

$$\gamma_4 = \langle v_9, v_3, v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_7, v_{10}, v_9, v_4v_{10}, v_6, v_1, v_8, v_9 \rangle$$

Sea $G'' = (V, A'')$ el subgrafo de G''' que se obtiene eliminando las aristas que están en γ_3'' , es decir,

$$\begin{aligned} A'' &= A''' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_3''\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_7, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_9, v_7v_{10}, v_9v_{10}\} \setminus \{v_4v_3, v_3v_2, v_2v_1, v_1v_7, v_7v_{10}, v_{10}v_9, v_9v_4\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Como $A'' = \emptyset$ el proceso finaliza y el ciclo γ_4 es la solución

■

Un corolario al teorema anterior, nos permitirá caracterizar los grafos con caminos de Euler.

14.7.9 Corolario

Un grafo o multigrafo $G = (V, A)$, admite un camino de Euler si, y sólo si es conexo y exactamente 2 de sus vértices son de grado impar.

Demostración

“Sólo si.” En efecto, supongamos que G admite un camino de Euler.

Entonces, para cada dos vértices de G , u y v , la parte del camino de Euler que comienza en u y acaba en v es un camino que une ambos vértices, luego G es conexo.

Además, el *segundo lema* asegura que exactamente 2 de sus vértices son de grado impar.

“Si.” En efecto, supongamos que G es conexo y que exactamente dos de sus vértices u y v son de grado impar.

Sea $G' = (V \cup \{w\}, A \cup \{uw, vw\})$, es decir, el grafo que se obtiene añadiendo un vértice w y dos aristas uw y vw al grafo dado G .

Ahora todos los vértices de G' tienen grado par, luego por el teorema anterior, existirá un ciclo γ en G' . Además, podemos construir γ empezando en w y terminando en w , o sea,

$$\gamma = \langle w, u, v_1, \dots, v_p, v, w \rangle$$

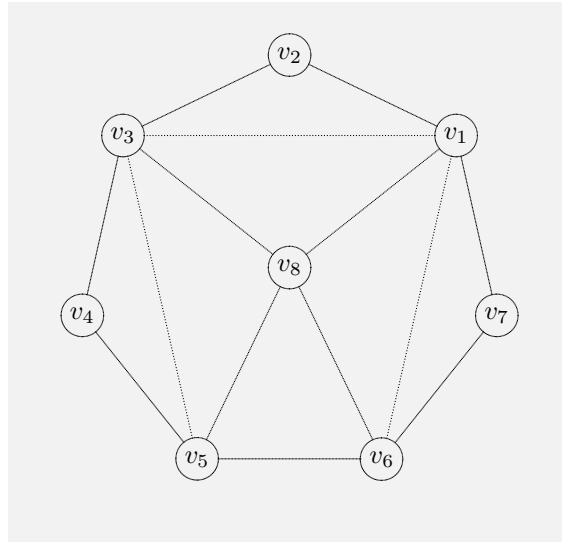
Por lo tanto, el camino

$$\langle u, v_1, \dots, v_p, v \rangle$$

es el buscado.

■

Ejemplo 14.25 ¿Puede dibujarse el grafo de la figura sin levantar el lápiz del papel y sin dibujar dos veces la misma arista?

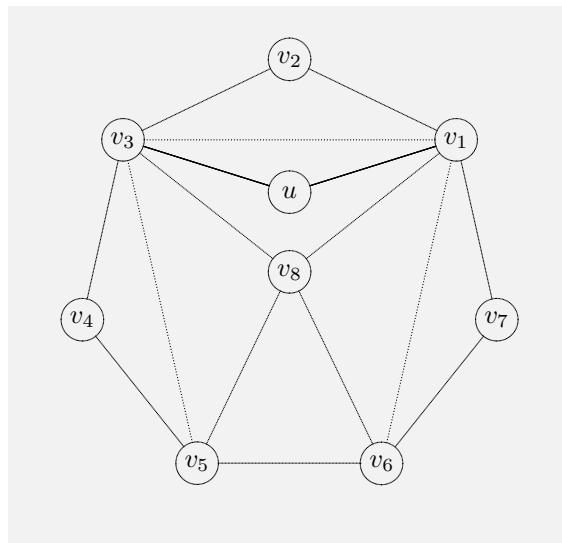


G

Solución

Este grafo es conexo y tiene exactamente dos vértices con grado impar, el v_1 y el v_3 que tienen grado cinco. El corolario anterior asegura que el grafo propuesto admite un camino de Euler que comienza en v_1 y acaba en v_3 o viceversa. Seguiremos el razonamiento propuesto en el mismo para obtener dicho camino. En efecto, sea $G' = (V \cup \{u\}, A \cup \{uv_1, uv_3\})$ el grafo obtenido añadiendo un vértice u y las aristas uv_1 y uv_3 , es decir,

$$A' = \{uv_1, uv_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1, v_1v_3, v_3v_5, v_6v_1, v_8v_1, v_8v_3, v_8v_5, v_8v_6\}$$



G'

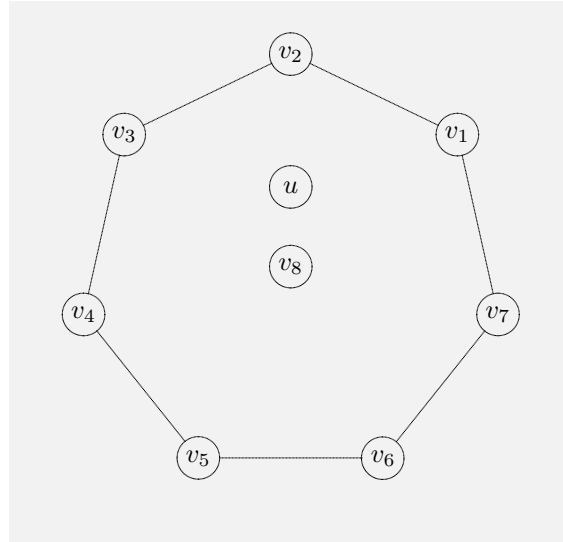
El grafo G' tiene todos los vértices de grado par luego por el teorema 14.7.8 podemos encontrar un ciclo que comience y acabe en el vértice u .

- [1] Tomamos el vértice u y uno de sus adyacentes, v_1 . El *tercer lema* nos asegura la existencia de un ciclo γ_1 que contiene la arista que forman ambos. En efecto,

$$\gamma_1 = \langle u, v_1, v_3, v_5, v_8, v_6, v_1, v_8, v_3, u \rangle = \langle uv_1, v_1v_3, v_3v_5, v_5v_8, v_8v_6, v_6v_1, v_1v_8, v_8v_3, v_3u \rangle$$

Sea $G'' = (V', A'')$ el subgrafo obtenido eliminando de A' las aristas de γ_1 , es decir,

$$\begin{aligned}
 A'' &= A' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_1\} \\
 &= \{uv_1, uv_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1, v_1v_3, v_3v_5, v_5v_7, v_7v_2, v_2v_4, v_4v_6, v_6v_5, v_5v_8, v_8v_1, v_1v_8, v_8v_3, v_3v_5\} \\
 &\setminus \{uv_1, v_1v_3, v_3v_5, v_5v_8, v_8v_6, v_6v_1, v_1v_8, v_8v_3, v_3u\} \\
 &= \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1\}
 \end{aligned}$$



G''

Como $A' \neq \emptyset$, el proceso continua.

- 2 Elegimos un vértice cualquiera de γ_1 , por ejemplo v_8 y un vértice de G'' que no esté aislado, por ejemplo v_4 .

- 2.1 Como G' es conexo, habrá un camino que una v_8 con v_4 , por ejemplo,

$$\gamma'_1 = \langle v_8, v_3, v_4 \rangle = \langle v_8v_3, v_3v_4 \rangle$$

- 2.2 La primera arista de γ'_1 que no está en γ_1 es v_3v_4 , luego v_3 es de γ_1 y no está aislado en G'' . El *tercer lema* nos asegura la existencia de un ciclo que contenga dicha arista.

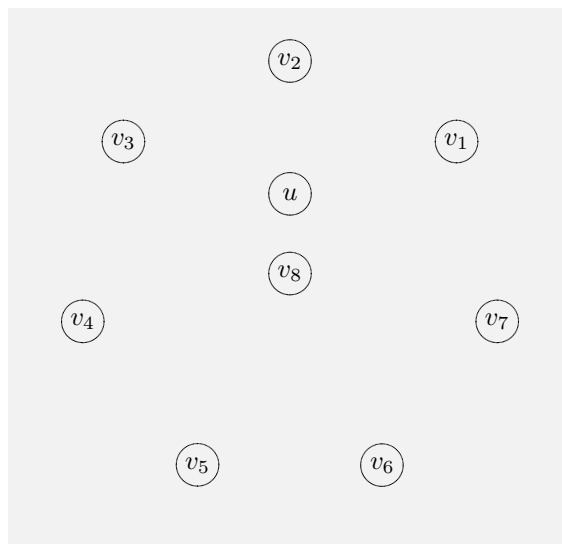
$$\gamma''_1 = \langle v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1, v_1v_2, v_2v_3 \rangle$$

unimos γ_1 con γ''_1 obtenemos el camino,

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \langle u, v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, v_2, v_3, v_5, v_8, v_6, v_1, v_8, v_3, u \rangle \\
 &= \langle uv_1, v_1v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_5, v_5v_8, v_8v_6, v_6v_1, v_1v_8, v_8v_3, v_3u \rangle
 \end{aligned}$$

Sea ahora $G''' = (V', A''')$, siendo

$$\begin{aligned}
 A''' &= A'' \setminus \{\text{aristas de } \gamma''_1\} \\
 &= \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1\} \setminus \{v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1, v_1v_2, v_2v_3\} \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$



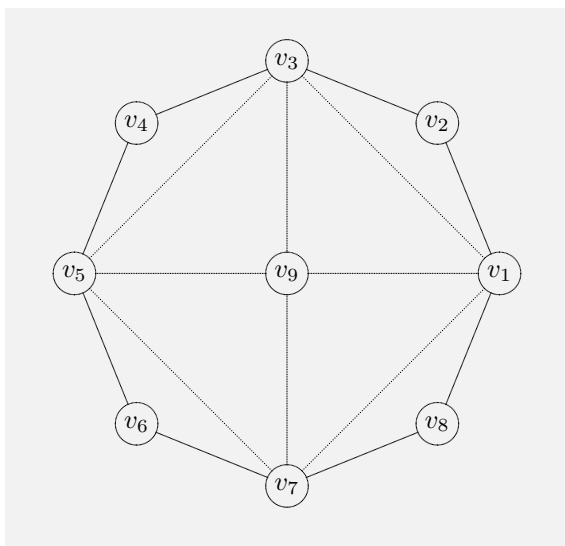
G'''

Como $A''' = \emptyset$, el proceso finaliza. Bastará eliminar el vértice u del camino γ_2 y el camino buscado será:

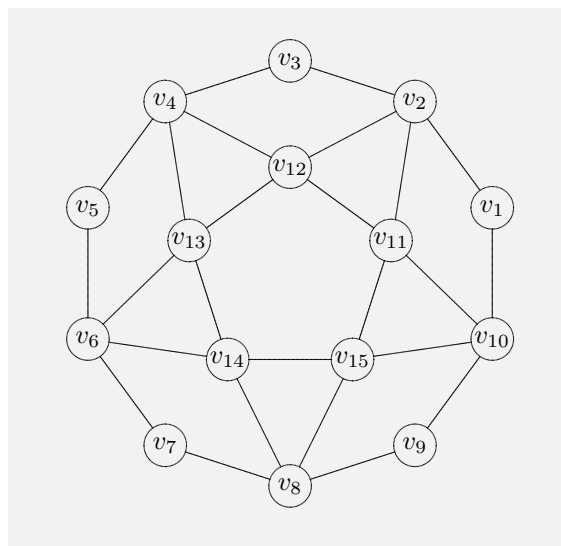
$$\gamma_3 = \langle v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, v_2, v_3, v_5, v_8, v_6, v_1, v_8, v_3 \rangle$$

■

Ejemplo 14.26 Determinar cuáles de los grafos de la figura pueden dibujarse sin levantar el lápiz del papel y sin dibujar dos veces la misma arista. En los casos en que la respuesta sea afirmativa especificar el camino a recorrer.



(a)



(b)

Solución

- (a) Los vértices v_1, v_3, v_5 y v_7 son de grado cinco, luego hay más de dos vértices con grado impar, y por el corolario anterior no existe un camino de Euler en este grafo.

Obviamente, tampoco existe ningún ciclo de Euler.

- (b) Dados dos vértices cualesquiera del grafo, siempre es posible encontrar un camino que los una, luego es conexo. Además, todos sus vértices son de grado par, de aquí que por el teorema anterior el grafo sea euleriano, luego es posible encontrar en él un ciclo de Euler. Sea $G = (V, A)$ el grafo (b), siendo

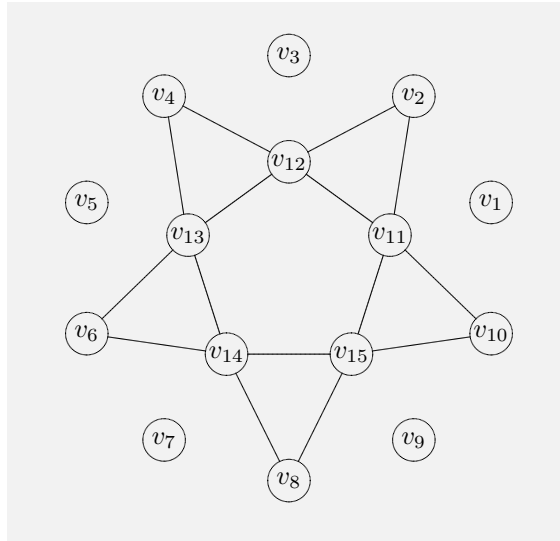
$$A = \{v_1v_2, v_1v_{10}, v_2v_3, v_2v_{11}, v_2v_{12}, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_{12}, v_4v_{13}, v_5v_6, v_6v_7, v_6v_{13}, v_6v_{14}, v_7v_8, v_8v_9, v_8v_{14}, v_8v_{15}, v_9v_{10}, v_{10}v_{11}, v_{10}v_{15}, v_{11}v_{12}, v_{11}v_{15}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14}, v_{14}v_{15}\}$$

- [1] Consideremos un vértice cualquiera y un adyacente suyo. Por ejemplo v_1 y v_2 . Como todos los vértices de G son de grado par, aplicando el *tercer lema*, podemos encontrar un ciclo que contenga a la arista v_1v_2 . En efecto, el ciclo γ_1 cumple tal condición,

$$\gamma_1 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_1 \rangle = \langle v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10}, v_{10}v_1 \rangle$$

Sea $G' = (V, A')$ el subgrafo de G que resulta de eliminar las aristas que están en γ_1 , es decir,

$$\begin{aligned} A' &= A \setminus \{\text{aristas de } \gamma_1\} \\ &= \{v_1v_2, v_1v_{10}, v_2v_3, v_2v_{11}, v_2v_{12}, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_{12}, v_4v_{13}, v_5v_6, v_6v_7, v_6v_{13}, v_6v_{14}, v_7v_8, v_8v_9, v_8v_{14}, v_8v_{15}, v_9v_{10}, v_{10}v_{11}, v_{10}v_{15}, v_{11}v_{12}, v_{11}v_{15}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14}, v_{14}v_{15}\} \\ &\quad \setminus \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_{10}, v_{10}v_1\} \\ &= \{v_2v_{11}, v_2v_{12}, v_4v_{12}, v_4v_{13}, v_6v_{13}, v_6v_{14}, v_8v_{14}, v_8v_{15}, v_{10}v_{11}, v_{10}v_{15}, v_{11}v_{12}, v_{11}v_{15}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14}, v_{14}v_{15}\} \end{aligned}$$



G'

Como A' no está vacío, continuamos el proceso.

- [2] Elegimos un vértice cualquiera de γ_1 , por ejemplo v_2 y un vértice que no esté aislado en G' , por ejemplo v_{12} .

- [2.1] Como G es conexo, existirá un camino que una v_2 con v_{12} . Por ejemplo,

$$\gamma'_1 = \langle v_2, v_{11}, v_{10}, v_{15}, v_8, v_{14}, v_6, v_{13}, v_4, v_{12} \rangle$$

- [2.2] La primera arista de γ'_1 que no está en γ_1 es v_2v_{11} . Como todos los vértices de G' son de grado par, por el *tercer lema* podremos encontrar un ciclo γ''_1 en G' que contenga dicha arista. En efecto,

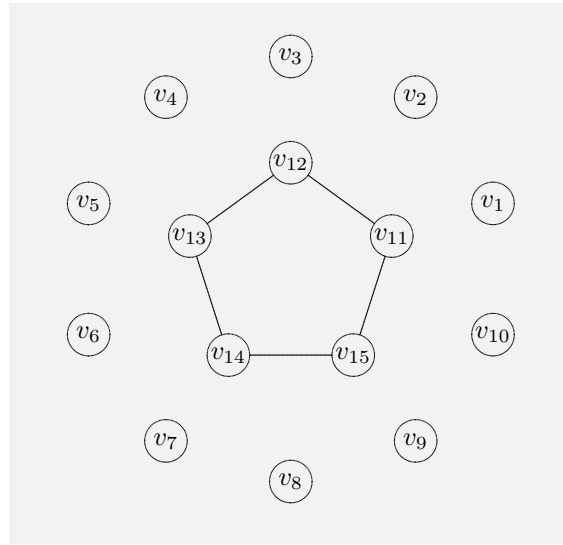
$$\begin{aligned} \gamma''_1 &= \langle v_2, v_{11}, v_{10}, v_{15}, v_8, v_{14}, v_6, v_{13}, v_4, v_{12}, v_2 \rangle \\ &= \langle v_2v_{11}, v_{11}v_{10}, v_{10}v_{15}, v_{15}v_8, v_8v_{14}, v_{14}v_6, v_6v_{13}, v_{13}v_4, v_4v_{12}, v_{12}v_2 \rangle \end{aligned}$$

Unimos γ_1 con γ_1'' empezando por γ_1 , conectando con γ_1'' y terminando con γ_1 . Obtenemos el ciclo,

$$\gamma_2 = \langle v_1, v_2, v_{11}, v_{10}, v_{15}, v_8, v_{14}, v_6, v_{13}, v_4, v_{12}, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_1 \rangle$$

Sea $G'' = (V, A'')$ el subgrafo de G' que se obtiene eliminando las aristas que están en γ_1'' , es decir,

$$\begin{aligned} A'' &= A' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_1''\} \\ &= \{v_2v_{11}, v_2v_{12}, v_4v_{12}, v_4v_{13}, v_6v_{13}, v_6v_{14}, v_8v_{14}, v_8v_{15}, \\ &\quad v_{10}v_{11}, v_{10}v_{15}, v_{11}v_{12}, v_{11}v_{15}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14}, v_{14}v_{15}\} \\ &\quad \setminus \{v_2v_{11}, v_{11}v_{10}, v_{10}v_{15}, v_{15}v_8, v_8v_{14}, v_{14}v_6, v_6v_{13}, v_{13}v_4, v_4v_{12}, v_{12}v_2\} \\ &= \{v_{11}v_{12}, v_{11}v_{15}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14}, v_{14}v_{15}\} \end{aligned}$$



G''

Como $A'' \neq \emptyset$ continuamos el proceso.

- [3] Elegimos un vértice cualquiera de γ_2 , por ejemplo v_{14} y un vértice de G'' que no esté aislado, por ejemplo v_{12} .

- [3.1] Como G es conexo, podremos encontrar un camino entre v_{14} y v_{12} . Por ejemplo,

$$\gamma_2' = \langle v_{14}, v_{15}, v_{11}, v_{12} \rangle$$

- [3.2] La primera arista de γ_2' que no pertenece a γ_2 es $v_{14}v_{15}$. Como todos los vértices de G'' siguen siendo de grado par, por el *tercer lema* habrá un ciclo γ_2'' en G'' que contenga a dicha arista.

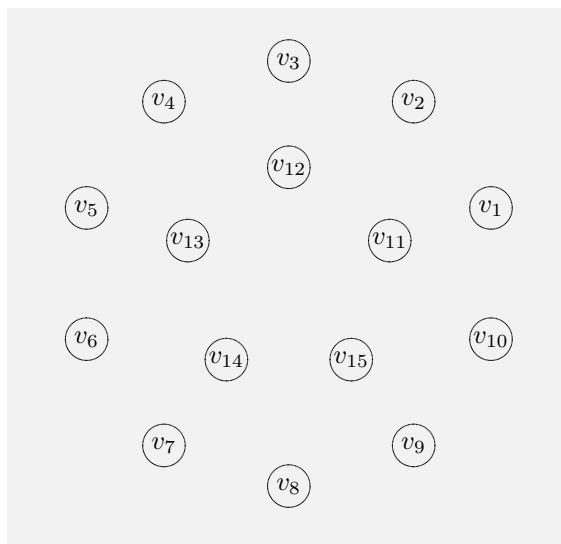
$$\gamma_2'' = \langle v_{14}, v_{15}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14} \rangle = \langle v_{14}v_{15}, v_{15}v_{11}, v_{11}v_{12}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14} \rangle$$

Al igual que hicimos antes, unimos γ_2 con γ_2'' . Obtenemos el ciclo γ_3 .

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \langle v_1, v_2, v_{11}, v_{10}, v_{15}, v_8, v_{14}, v_{15}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}v_6, v_{13}, v_4, v_{12}, v_2, v_3, v_4, \\ &\quad v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_1 \rangle \end{aligned}$$

Sea ahora $G''' = (V, A''')$ el subgrafo de G'' resultante de eliminar las aristas de γ_2'' , es decir,

$$\begin{aligned} A''' &= A'' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_2''\} \\ &= \{v_{11}v_{12}, v_{11}v_{15}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14}, v_{14}v_{15}\} \setminus \{v_{14}v_{15}, v_{15}v_{11}, v_{11}v_{12}, v_{12}v_{13}, v_{13}v_{14}\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

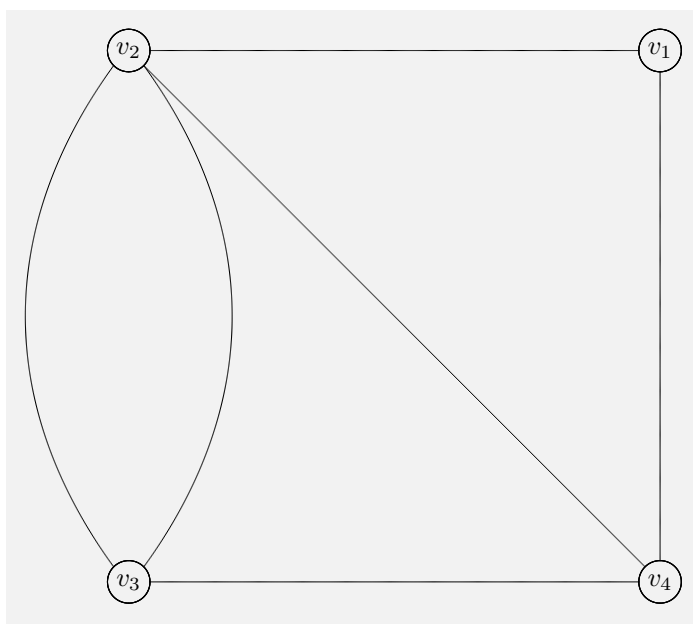
 G'''

Como $A''' = \emptyset$ el proceso finaliza.

Consecuentemente, el grafo (b) puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Basta seguir el camino γ_3 .

■

Ejemplo 14.27 Encontrar en el multigrafo de la figura un ciclo de longitud dos y un ciclo simple de longitud seis.



Solución

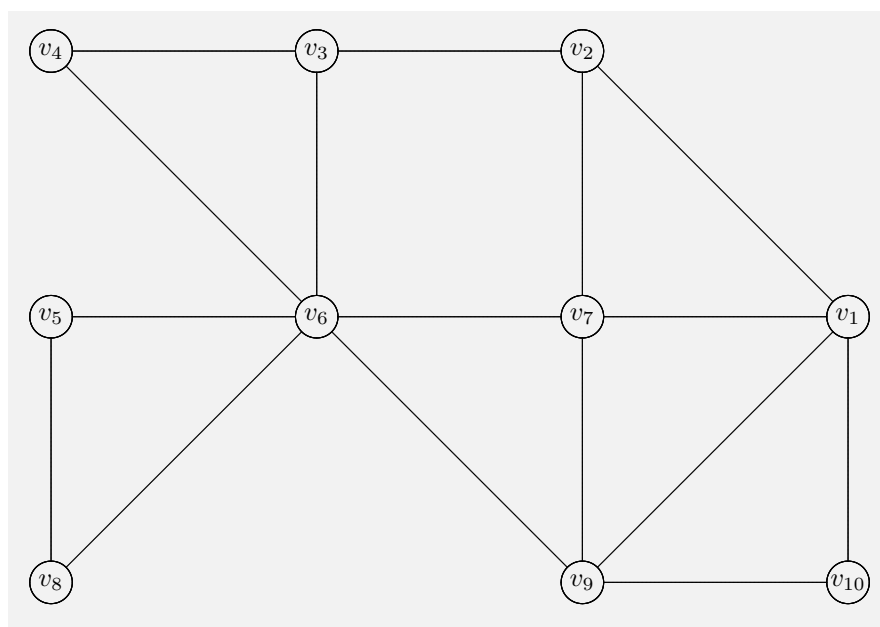
Un ciclo de longitud dos sería:

$$\gamma = \langle v_2, v_2 v_3, v_3 v_2, v_2 \rangle$$

Dado que el grafo propuesto tiene seis aristas, un ciclo de longitud seis que no repita aristas será un ciclo de Euler. Como hay dos vértices con grado impar, por 14.7.8 no es posible encontrar tal ciclo. ■

Ejemplo 14.28 Estudiar si es posible trazar el grafo G de la figura sin levantar el lápiz del papel, y sin pasar dos veces por el mismo lado en los siguientes casos:

- (a) comenzando y terminando en el mismo punto.
- (b) comenzando y terminando en puntos distintos.

 G

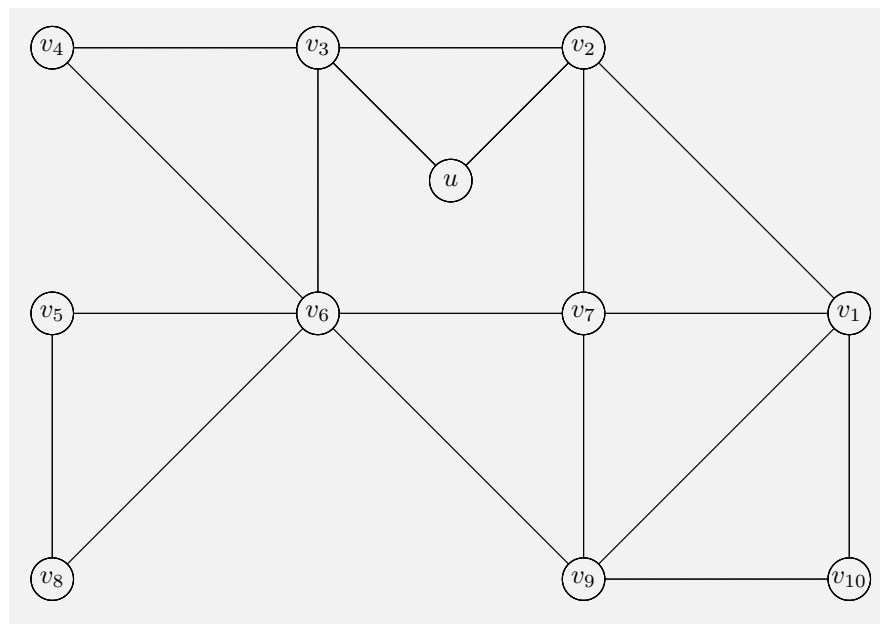
Solución

- (a) Al existir dos vértices, v_2 y v_3 , con grado impar, de acuerdo con el primer lema el grafo no es Euleriano, por lo tanto no existe en dicho grafo ningún ciclo de Euler, de aquí que no sea posible trazar el grafo en la forma que plantea el ejercicio.
- (b) El grafo propuesto es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar, v_2 y v_3 . Consecuentemente, por el corolario 14.7.9, el grafo admite un camino de Euler que comienza en v_2 y acaba en v_3 o viceversa. Así pues, podemos trazar el grafo en la forma que pedida. Hallaremos tal camino siguiendo las instrucciones dadas en la demostración del citado corolario. Sea $G = (V, A)$ el grafo propuesto, siendo su conjunto de aristas,

$$A = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_6, v_5v_6, v_5v_8, v_6v_3, v_6, v_7, v_6v_9, v_7v_2, v_7v_1, v_7v_9, v_8v_6, v_9v_1, v_9v_{10}v_{10}v_1\}$$

y sea G' el grafo obtenido añadiéndole a G el vértice u y las aristas uv_2 y uv_3 , es decir, $G' = (V', A')$, siendo $V' = V \cup \{u\}$ y

$$A' = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3u, uv_3, v_3v_4, v_4v_6, v_5v_6, v_5v_8, v_6v_3, v_6, v_7, v_6v_9, v_7v_2, v_7v_1, v_7v_9, v_8v_6, v_9v_1, v_9v_{10}, v_{10}v_1\}$$

 G'

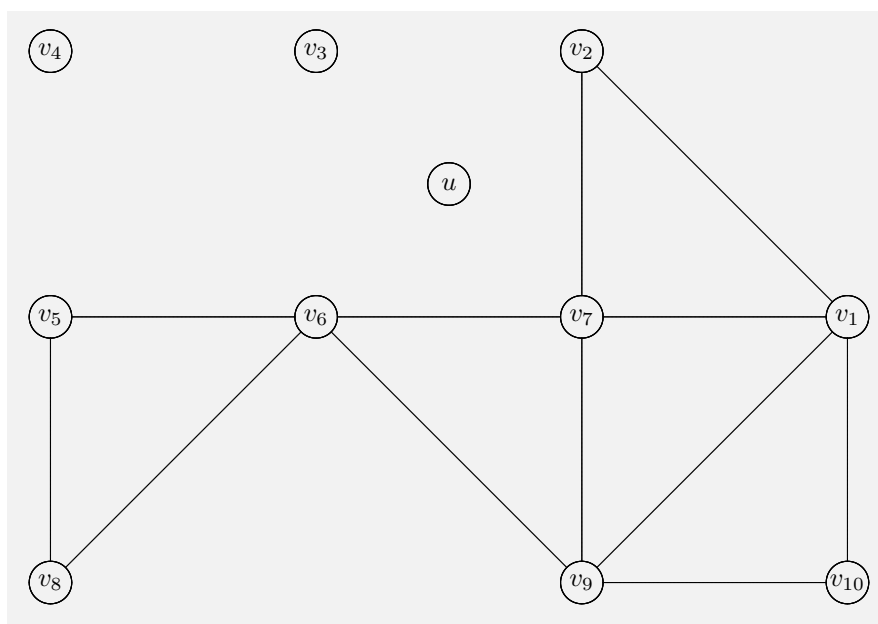
Todos los vértices de G' tienen grado par, luego por el teorema 14.7.8 habrá un ciclo en G' . Lo construiremos empezando y acabando en u .

[1] Tomemos, pues, el vértice u y uno de sus adyacentes, por ejemplo, v_2 . Por el *tercer lema*, podemos encontrar un ciclo γ_1 que contiene la arista que forman ambos. En efecto,

$$\gamma_1 = \langle u, v_2, v_3, v_4, v_6, v_3, u \rangle = \langle uv_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_6, v_6v_3, v_3u \rangle$$

Sea $G'' = (V', A'')$, el subgrafo de G' resultante de eliminar las aristas de γ_1 , es decir,

$$\begin{aligned} A'' &= A' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_1\} \\ &= \{v_1v_2, v_2v_3, v_2u, uv_3, v_3v_4, v_4v_6, v_5v_6, v_5v_8, v_6v_3, v_6, v_7, v_6v_9, v_7v_2, v_7v_1, v_7v_9, v_8v_6, v_9v_1, \\ &\quad v_9v_{10}, v_{10}v_1\} \setminus \{uw_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_6, v_6v_3, v_3u\} \\ &= \{v_1v_2, v_5v_6, v_5v_8, v_6, v_7, v_6v_9, v_7v_2, v_7v_1, v_7v_9, v_8v_6, v_9v_1, v_9v_{10}, v_{10}v_1\} \end{aligned}$$

 G''

Como $A'' \neq \emptyset$ continuamos el proceso.

- [2] Elegimos cualquier vértice de γ_1 , por ejemplo v_4 y un vértice que no esté aislado en G'' , por ejemplo v_{10} .

[2.1] Como G' es conexo, habrá un camino que una v_4 con v_{10} . En efecto,

$$\gamma'_1 = \langle v_4, v_6, v_7, v_1, v_{10} \rangle = \langle v_4 v_6, v_6 v_7, v_7 v_1, v_1 v_{10} \rangle$$

- [2.2] La primera arista de γ'_1 que no está en γ_1 es $v_6 v_7$, luego $v_6 \in \gamma_1$ y no está aislado en G'' . Por el *tercer lema*, podremos encontrar un ciclo que la contenga,

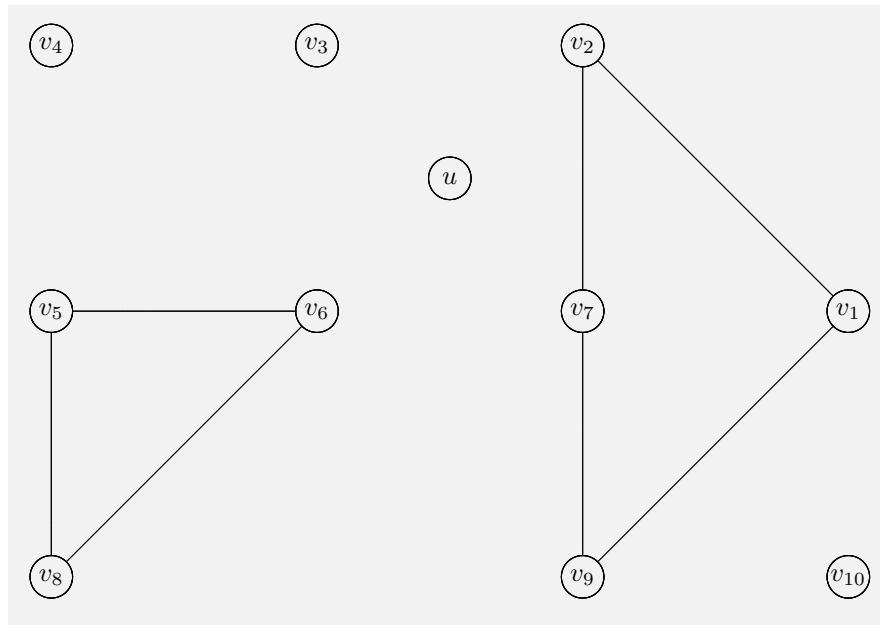
$$\gamma''_1 = \langle v_6, v_7, v_1, v_{10}, v_9, v_6 \rangle = \langle v_6 v_7, v_7 v_1, v_1 v_{10}, v_{10} v_9, v_9 v_6 \rangle$$

Unimos γ_1 con γ''_1 ,

$$\gamma_2 = \langle u, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_1, v_{10}, v_9, v_6, v_3, u \rangle$$

Sea $G''' = (V, A''')$ el subgrafo de G'' que se obtiene eliminado las aristas de γ''_1 , o sea,

$$\begin{aligned} A''' &= A'' \setminus \{\text{aristas de } \gamma''_1\} \\ &= \{v_1 v_2, v_5 v_6, v_5 v_8, v_6, v_7, v_6 v_9, v_7 v_2, v_7 v_1, v_7 v_9, v_8 v_6, v_9 v_1, v_9 v_{10}, v_{10} v_1\} \\ &\quad \setminus \{v_6 v_7, v_7 v_1, v_1 v_{10}, v_{10} v_9, v_9 v_6\} \\ &= \{v_1 v_2, v_5 v_6, v_5 v_8, v_7 v_2, v_7 v_9, v_8 v_6, v_9 v_1\} \end{aligned}$$



G'''

- [3] Elegimos un vértice arbitrariamente en γ_2 , por ejemplo v_{10} y un vértice que no esté aislado en G''' , por ejemplo v_8 .

[3.1] La conexión de G' asegura la existencia de un camino que una los vértices v_{10} y v_8 . Por ejemplo,

$$\gamma'_2 = \langle v_{10}, v_9, v_6, v_8 \rangle = \langle v_{10} v_9, v_9 v_6, v_6 v_8 \rangle$$

- [3.2] La primera arista de γ'_2 que no está en γ_2 es $v_6 v_8$, luego $v_6 \in \gamma_2$ y no está aislado en G''' . Por el *tercer lema* habrá un ciclo que la contiene. En efecto,

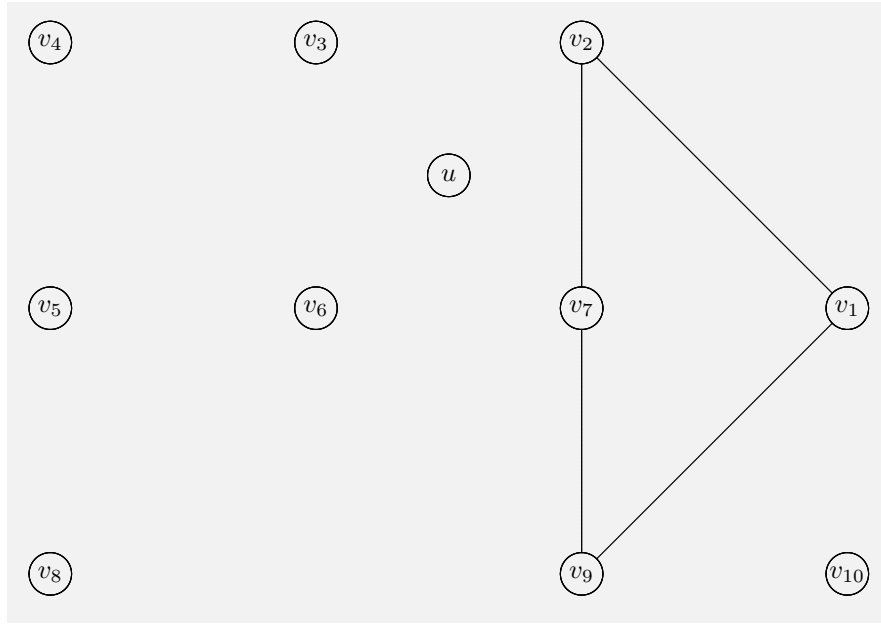
$$\gamma''_2 = \langle v_6, v_8, v_5, v_6 \rangle = \langle v_6 v_8, v_8 v_5, v_5 v_6 \rangle$$

Ahora unimos γ_2 con γ_2'' ,

$$\gamma_3 = \langle u, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8, v_5, v_6, v_7, v_1, v_{10}, v_9, v_6, v_3, u \rangle =$$

Sea $G^{iv} = (V', A^{iv})$, donde

$$\begin{aligned} A^{iv} &= A''' \setminus \{\text{aristas de } \gamma_2''\} \\ &= \{v_1v_2, v_5v_6, v_5v_8, v_7v_2, v_7v_9, v_8v_6, v_9v_1\} \setminus \{v_6v_8, v_8v_5, v_5v_6\} \\ &= \{v_1v_2, v_7v_2, v_7v_9, v_9v_1\} \end{aligned}$$



G^{iv}

Como $A^{iv} \neq \emptyset$, el proceso continúa.

[4] Elegimos v_8 , vértice de γ_3 , y otro que no esté aislado en G^{iv} , por ejemplo v_1 .

[4.1] Como G' es conexo, habrá un camino que una v_8 con v_1 . En efecto,

$$\gamma_3' = \langle v_8, v_6, v_7, v_2, v_1 \rangle = \langle v_8v_6, v_6v_7, v_7v_2, v_2v_1 \rangle$$

[4.2] La primera arista de γ_3' que no está en γ_3 es v_7v_2 , luego $v_7 \in \gamma_3$ y no está aislado en G^{iv} . Nuevamente, el *tercer lema* asegura la existencia de un ciclo que la contiene,

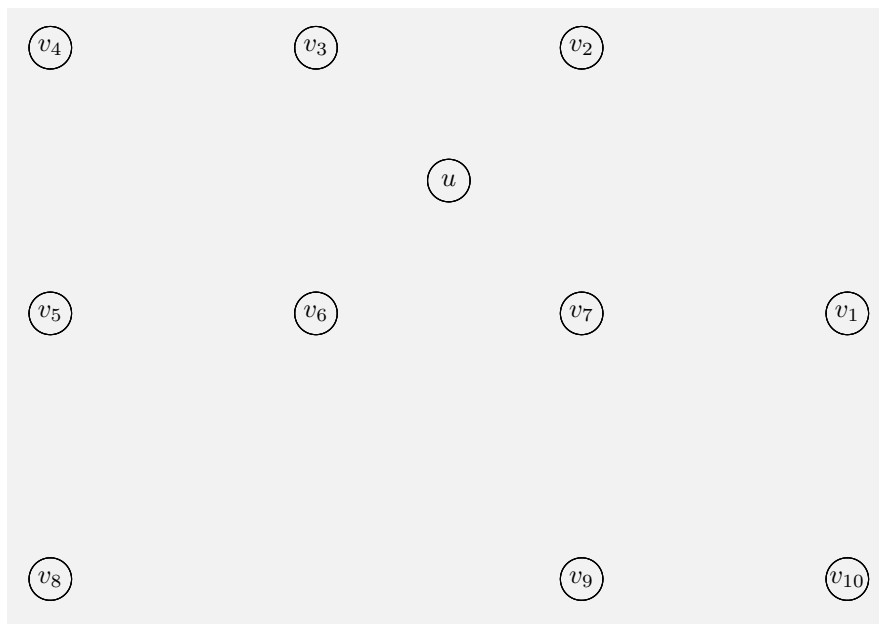
$$\gamma_3'' = \langle v_7, v_2, v_1, v_9, v_7 \rangle = \langle v_7v_2, v_2v_1, v_1v_9, v_9v_7 \rangle$$

Unimos γ_3 con γ_3'' ,

$$\gamma_4 = \langle u, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8, v_5, v_6, v_7, v_2, v_1, v_9, v_7, v_1, v_{10}, v_9, v_3, u \rangle$$

Sea $G^v = (V', A^v)$ el subgrafo obtenido eliminando en A^{iv} las aristas de γ_3'' , es decir,

$$\begin{aligned} A^v &= A^{iv} \setminus \{\text{aristas de } \gamma_3''\} \\ &= \{v_1v_2, v_7v_2, v_7v_9, v_9v_1\} \setminus \{v_7v_2, v_2v_1, v_1v_9, v_9v_7\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$



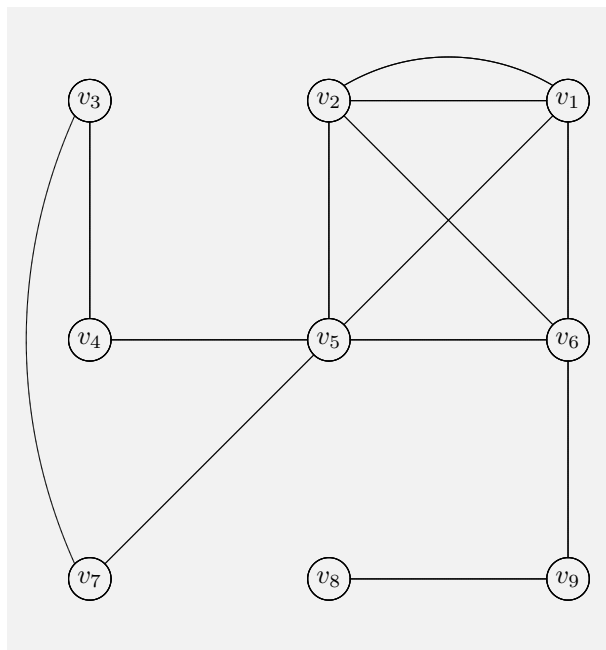
G^v

Como $A^v = \emptyset$ el proceso finaliza. Bastará eliminar el vértice u y el camino buscado será

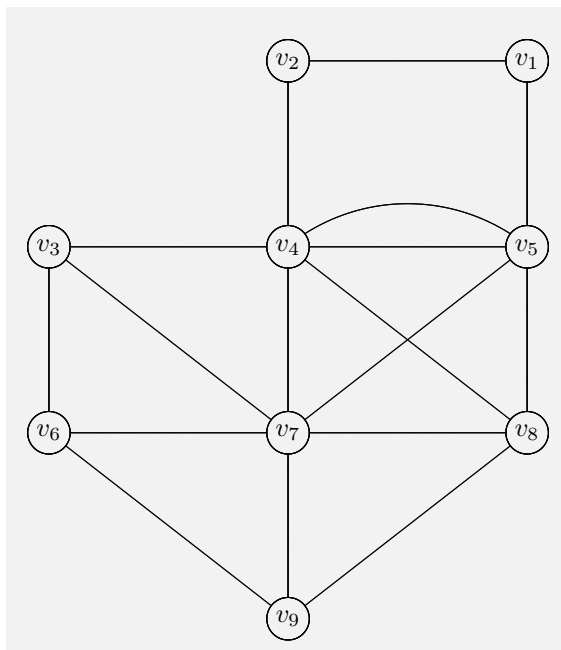
$$\gamma_5 = \langle v_2, v_3, v_4, v_6, v_8, v_5, v_6, v_7, v_2, v_1, v_9, v_7, v_1, v_{10}, v_9, v_3 \rangle$$

■

Ejemplo 14.29 Repetir los dos ejercicios anteriores para los grafos de la siguiente figura:



(a)



(b)

Solución

- (a) Este grafo es conexo y tiene, exactamente, dos vértices de grado impar, v_5 y v_8 . Por el corolario 14.7.9 puede encontrarse en él un camino de Euler. Consecuentemente, y siguiendo el mismo, es

posible trazar el grafo comenzando y acabando en el mismo punto sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista.

Siguiendo el mismo razonamiento expuesto en el ejercicio anterior, una de las posibles soluciones es:

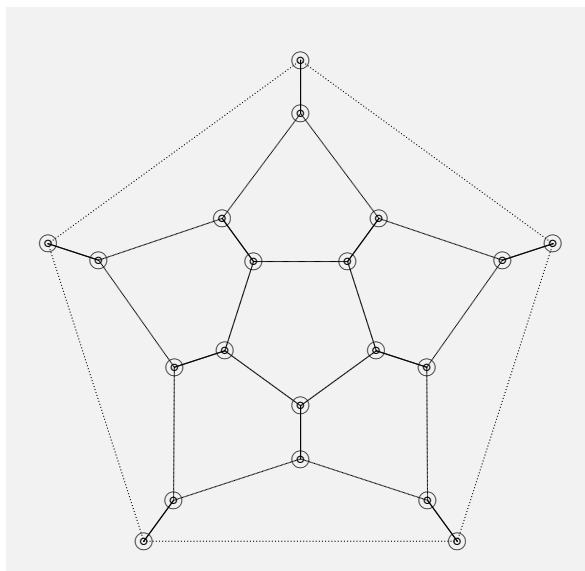
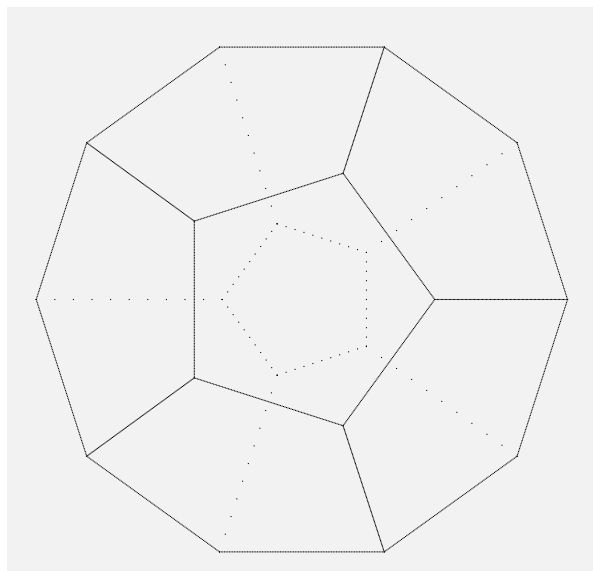
$$\gamma = \langle v_8, v_9, v_6, v_1, v_2, v_1, v_5, v_2, v_6, v_5, v_4, v_3, v_7, v_5 \rangle$$

- (b) El grafo propuesto tiene cuatro vértices de grado impar, v_3, v_5, v_6 y v_9 luego según el corolario 14.7.9 no admite ningún camino de Euler, de aquí que no sea posible trazarlo sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma arista. ■

14.8 Caminos y Ciclos de Hamilton

El problema de conocer si un grafo es Hamiltoniano y en tal caso encontrar un ciclo de Hamilton es uno de los más antiguos en *Teoría de Grafos*. Reciben su nombre del famoso matemático Sir William Hamilton a quien suele atribuirse el origen del problema en cuestión. Sin embargo, fueron investigados con anterioridad por el matemático T. P. Kirkman.

En 1856, Hamilton inventó un juego matemático llamado el “dodecaedro del viajero”. Tal juego consiste en un dodecaedro cada uno de cuyos veinte vértices estaba etiquetado con el nombre de una ciudad de la época. El objetivo del juego era viajar a lo largo de las aristas del dodecaedro, visitando cada ciudad exactamente una vez y volviendo al punto de partida. Tal recorrido se denominaba “un viaje alrededor del mundo.”



Dodecaedro del Viajero

14.8.1 Ciclo de Hamilton

Un ciclo simple en un grafo o multigrafo G se dice que es de Hamilton, si contiene a todos los vértices de G .

14.8.2 Grafo Hamiltoniano

Un grafo o multigrafo que contenga un ciclo de Hamilton se denomina Hamiltoniano.

Nota 14.8 En términos de la teoría de grafos, el juego consistía pues, en encontrar un ciclo de Hamilton en el grafo de la figura anterior.

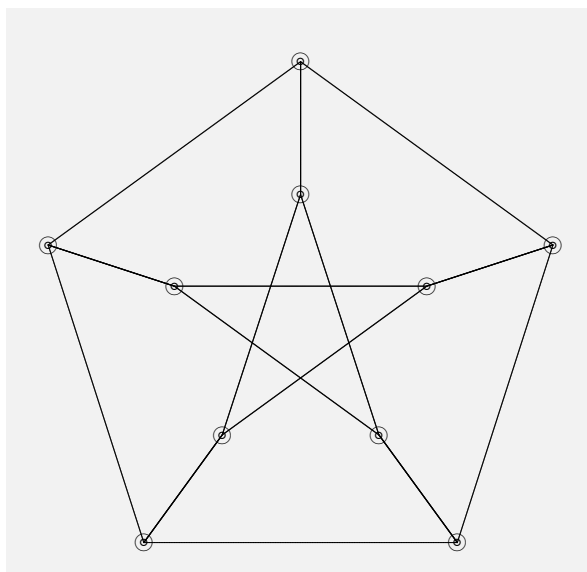
Es claro que el grafo completo K_p es Hamiltoniano, ya que podemos empezar en cualquier vértice e ir sucesivamente a cualquier otro vértice todavía no visitado. Sin embargo, si “ponderamos” las aristas de K_p , entonces el problema de encontrar un ciclo de Hamilton con el mínimo peso es difícil. Usualmente se le llama el “*problema del vendedor viajero*”, y representa el problema de encontrar como un vendedor puede visitar cada una de las p ciudades en el tiempo más corto posible.

Lo ideal sería encontrar un algoritmo “bueno” o “eficiente” que nos permitiese encontrar el ciclo de Hamilton, pero aunque existe abundante literatura sobre este problema, no se conoce ninguno.

14.8.3 Camino de Hamilton

Un camino simple en un grafo o multigrafo G que contenga a todos los vértices se denomina camino de Hamilton.

Ejemplo 14.30 El grafo de Petersen contiene un camino de Hamilton que comienza en cada uno de sus vértices. Este grafo es la base de la mayoría de los contraejemplos en las conjeturas sobre grafos de Hamilton.



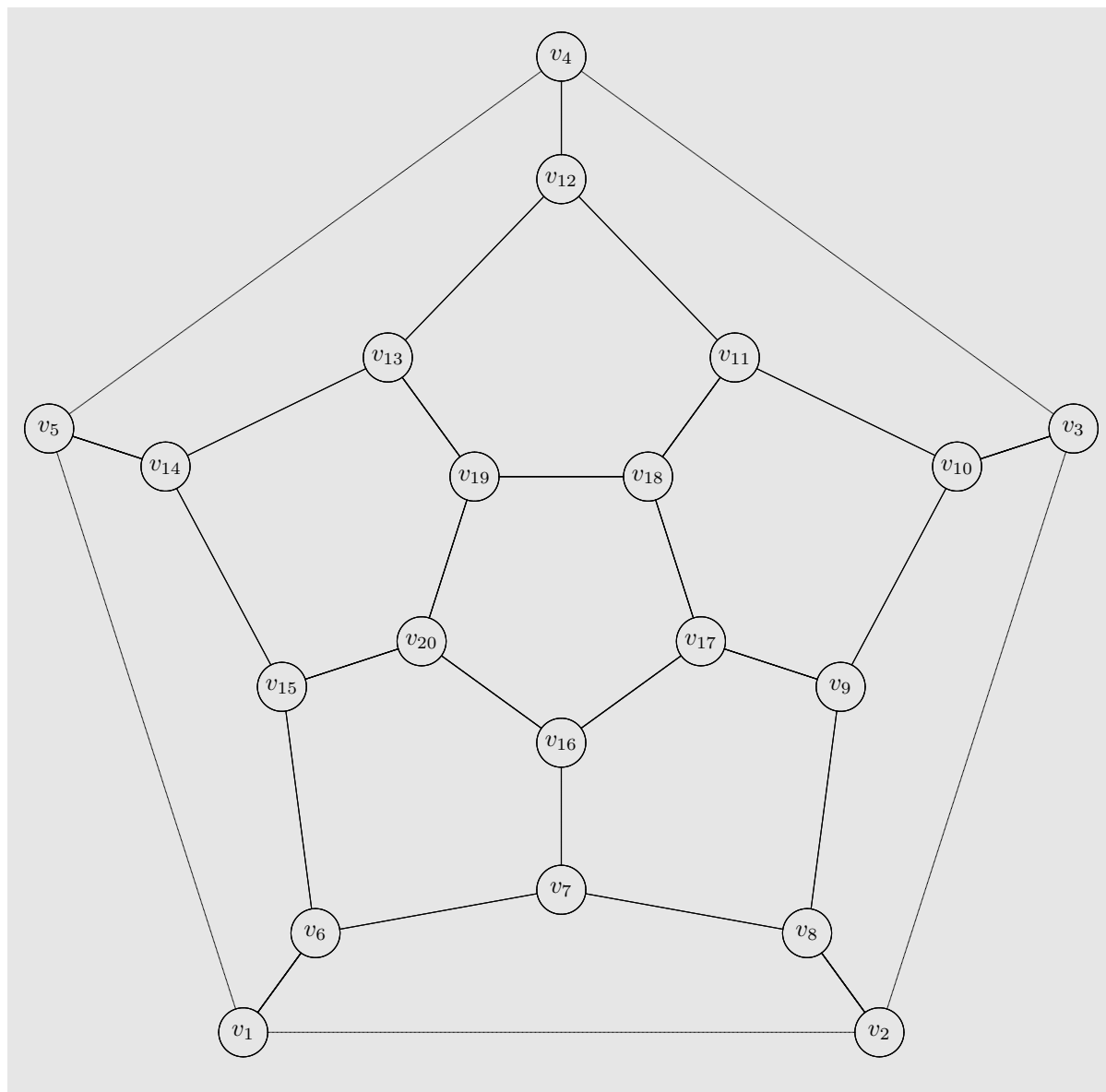
Grafo de Petersen

Al contrario de lo que ocurre para los Eulerianos no conocemos una condición necesaria y suficiente para decidir si un grafo es o no Hamiltoniano. ■

14.8.4 Método desarrollado por Hamilton

Hamilton resolvió el problema del *dodecaedro del viajero* en la forma siguiente: cuando el viajero llega al final de una arista, tiene tres opciones: tomar la arista de la derecha, lo que notaremos por D , la arista

de la izquierda, que notaremos por I o quedarse donde está, lo que notaremos con un 1. Utilizaremos el grafo de la figura siguiente en el que cada vértice está etiquetado con un número.

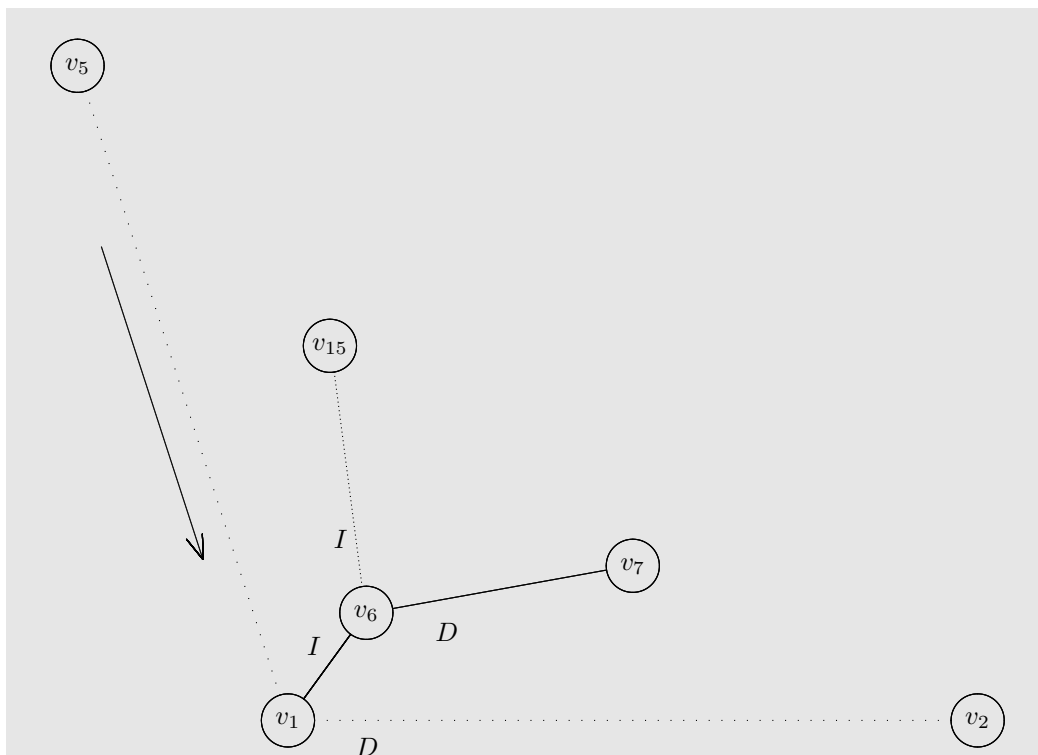


Grafo del Dodecaedro del viajero

Definimos el *producto* de estas operaciones.

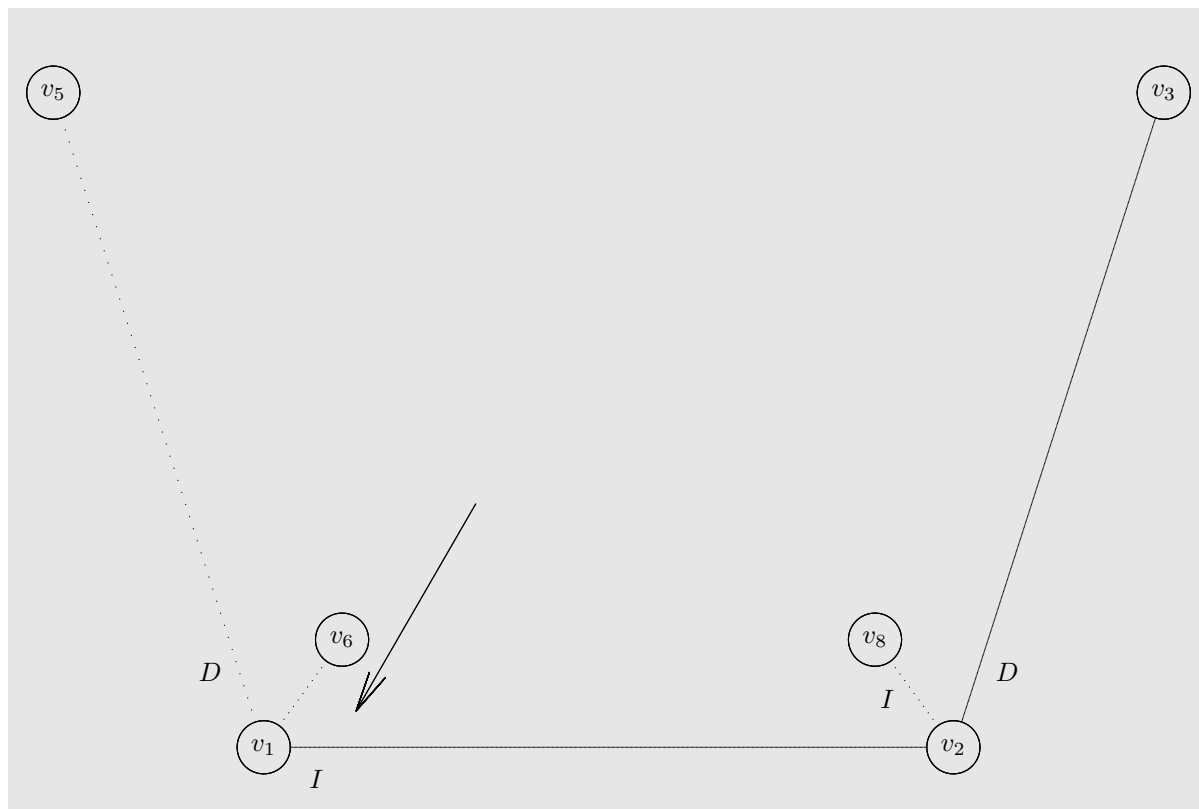
ID significa tomar la arista de la izquierda y luego la de la derecha.

Por ejemplo, si llegamos al vértice v_1 desde el v_5 , ID significaría ir primero a v_6 y después a v_7 , es decir sería el camino $\langle v_1, v_6, v_7 \rangle$ en la figura.



Camino ID desde v_5

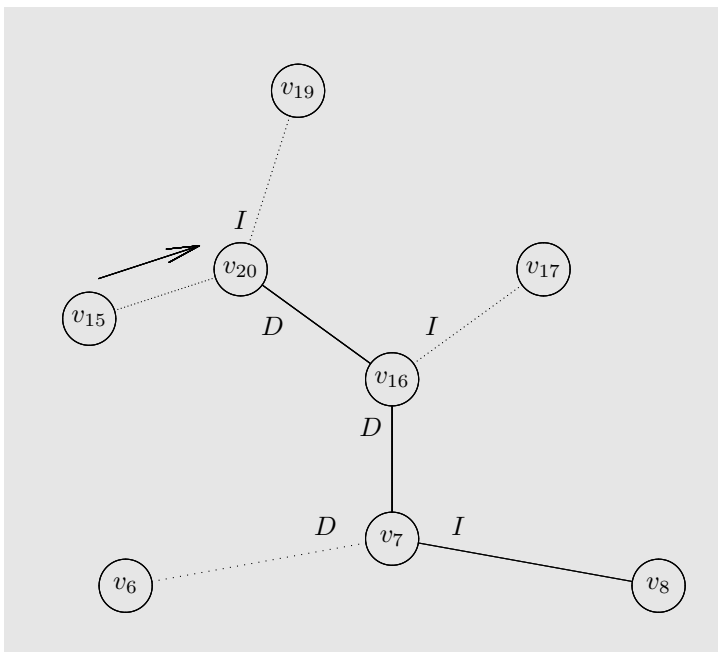
Si hubiéramos llegado al vértice v_1 desde el v_6 , entonces el camino sería $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.



Camino ID desde v_6

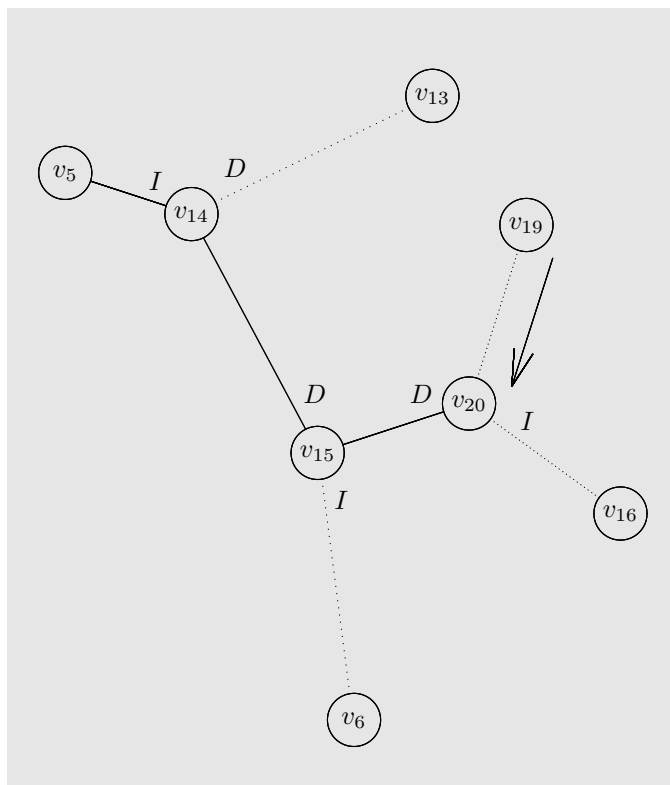
D^2I denota la operación dos veces a la derecha y luego una vez a la izquierda.

Por ejemplo, si estamos en el vértice v_{20} habiendo llegado a él desde el v_{15} , iríamos primero a v_{16} , luego a v_7 y, finalmente, a v_8 , es decir el camino sería $\langle v_{20}, v_{16}, v_7, v_8 \rangle$



Camino D^2I desde v_{15}

Si hubiéramos llegado a v_{20} desde v_{19} , el camino sería $\langle v_{20}, v_{15}, v_{14}, v_5 \rangle$.



Camino D^2I desde v_{19}

Se dice que dos operaciones son iguales si comenzando ambas en un vértice acaban también en el mismo vértice, es decir, si definen dos caminos con el mismo principio y el mismo final.

Obsérvese que el producto de dos operaciones no es conmutativo ya que $ID \neq DI$, sin embargo si es asociativo ya que $I(DI) = (ID)I$.

Según esto para el grafo del dodecaedro, tendremos

$$D^5 = I^5 = 1$$

$$DI^2D = IDI$$

$$ID^2I = DID$$

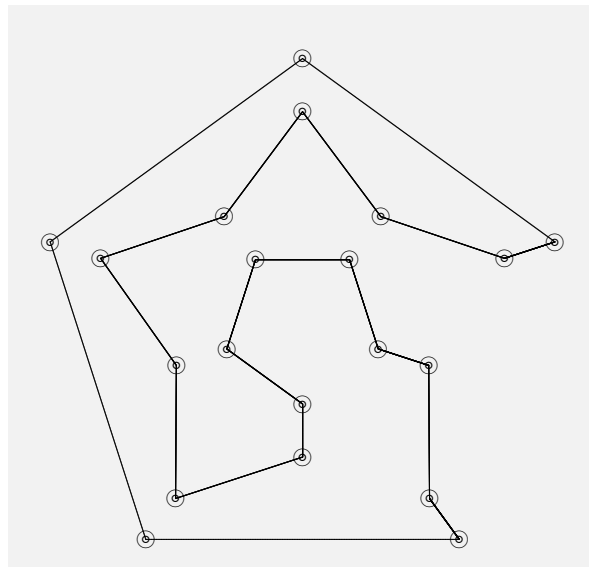
$$DI^3D = I^2$$

$$ID^3I = D^2$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
 1 &= D^5 \\
 &= D^2D^3 && \{D^2 = ID^3I\} \\
 &= ID^3ID^3 \\
 &= (ID^3)^2 \\
 &= (ID^2D)^2 && \{D^2 = ID^3I\} \\
 &= [I(ID^3I)D]^2 \\
 &= (I^2D^3ID)^2 \\
 &= (I^2D^2DID)^2 && \{D^2 = ID^3I\} \\
 &= [I^2(ID^3I)DID]^2 \\
 &= (I^3D^3IDID)^2 \\
 &= (IIDDIDDIDID)^2 \\
 &= IIDDIDDIDID IIDDIDDIDID
 \end{aligned}$$

Esta secuencia contiene veinte operaciones y no contiene secuencias parciales iguales a 1. De aquí que represente un ciclo de Hamilton.

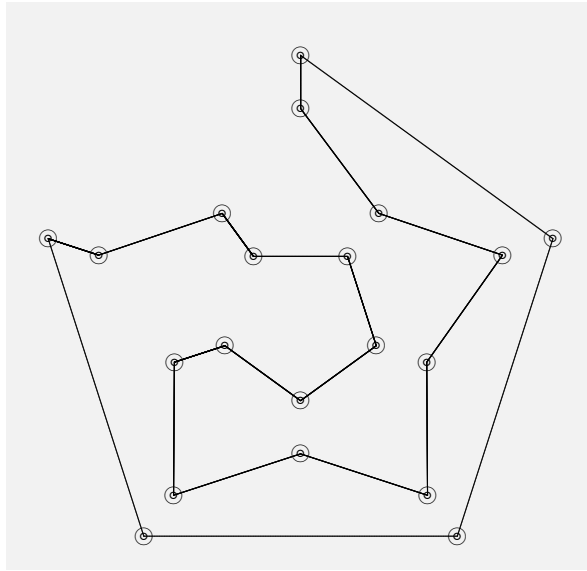


Ciclo de Hamilton

También podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 1 &= I^5 \\
 &= I^2 I^3 && \{I^2 = DI^3 D\} \\
 &= DI^3 DI^3 \\
 &= (DI^3) \\
 &= (DI^2 I)^2 && \{I^2 = DI^3 D\} \\
 &= [D (DI^3 D) I]^2 \\
 &= (D^2 I^3 DI)^2 \\
 &= (D^2 I^2 IDI)^2 && \{I^2 = DI^3 D\} \\
 &= [D^2 (DI^3 D) IDI]^2 \\
 &= (D^3 I^3 DIDI)^2 \\
 &= (DDDIHIDIDI)^2 \\
 &= DDDIHHIDIDIDDDIHHIDIDI
 \end{aligned}$$

y obtendríamos el ciclo de Hamilton de la figura siguiente.



Ciclo de Hamilton

Podremos encontrar otras secuencias que representen a ciclos de Hamilton sin más que partir de cualquier letra intermedia de la secuencia anterior y en cualquiera de los dos sentidos. ■

Veremos una condición necesaria para que un grafo sea Hamiltoniano, pero el problema general de determinar cuando un grafo es de este tipo, es muy difícil.

14.8.5 Teorema

Sea $G = (V, A)$ un grafo tal que $|A| \geq 3$, sea U un subconjunto no vacío de V y sea $c(G \setminus U)$ el número de componentes conexas del subgrafo $G \setminus U$. Entonces, una condición necesaria para que G sea Hamiltoniano es que $c(G \setminus U) \leq |U|$.

($|A|$ y $|U|$ son, respectivamente, el número de aristas de G y de vértices de U .)

Demostración

En efecto, supongamos que G es Hamiltoniano y sea γ un ciclo de Hamilton en G . Sea H el subgrafo de G cuyos vértices son los de V y las aristas las del ciclo γ .

Si U es un subconjunto cualquiera de V , entonces $H \setminus U$ es un subgrafo expandido de $G \setminus U$ ya que contiene todos los vértices de G , luego

$$c(G \setminus U) \leq c(H \setminus U)$$

Supongamos ahora que $U = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$. Entonces,

$H \setminus \{v_1\}$ es conexo, luego

$$c(H \setminus \{v_1\}) = 1$$

$(H \setminus \{v_1\}) \setminus \{v_2\}$ puede tener una o dos componentes conexas, es decir,

$$c((H \setminus \{v_1\}) \setminus \{v_2\}) \leq 2$$

$((H \setminus \{v_1\}) \setminus \{v_2\}) \setminus \{v_3\}$ tiene, a lo sumo, tres componentes conexas, luego

$$c(((H \setminus \{v_1\}) \setminus \{v_2\}) \setminus \{v_3\}) \leq 3$$

En general, si eliminamos r vértices (ver nota a continuación), tendremos que

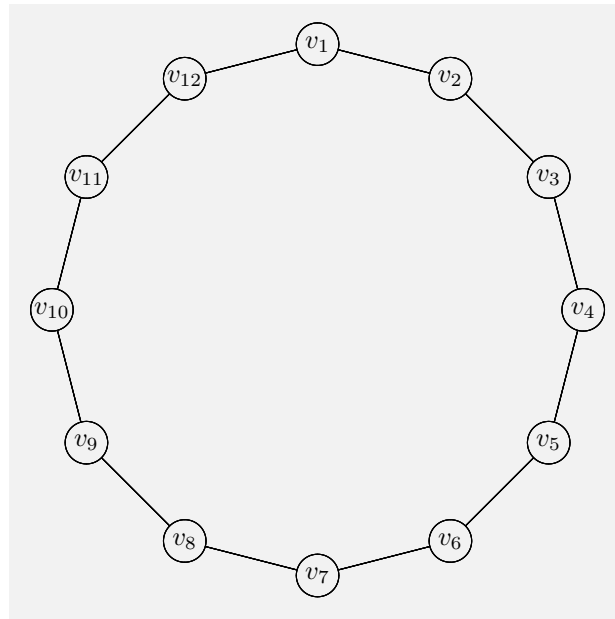
$$c(H \setminus U) \leq r = |U|$$

lo cual, teniendo en cuenta la desigualdad anterior, nos lleva directamente al resultado, es decir,

$$c(G \setminus U) \leq |U|$$

■

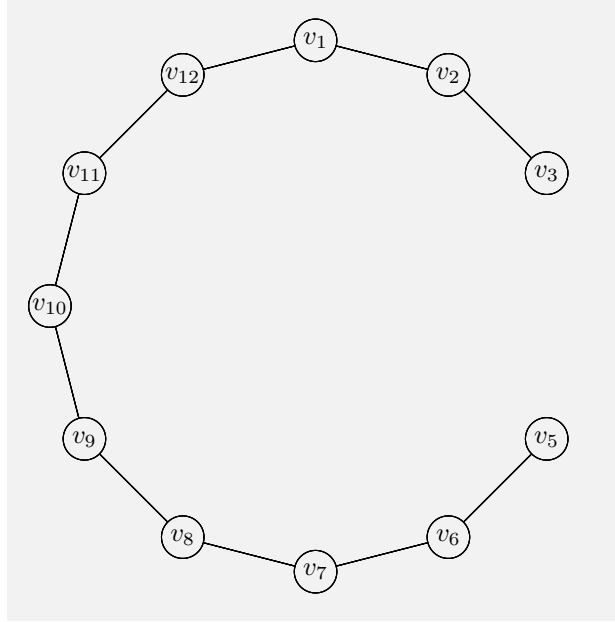
Nota 14.9 Sea G un grafo Hamiltoniano con doce vértices y sea H el subgrafo cuyos vértices son los de G y las aristas del ciclo de Hamilton γ . Entonces H puede representarse en la forma que muestra la figura.



H

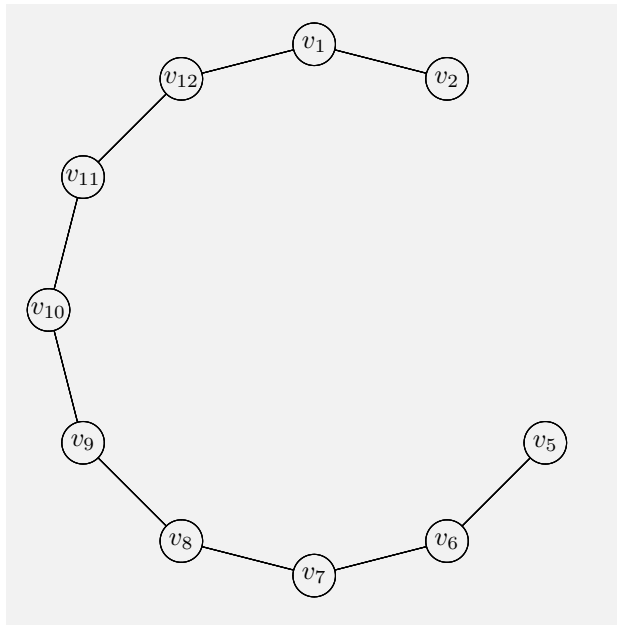
Pues bien, observemos lo siguiente:

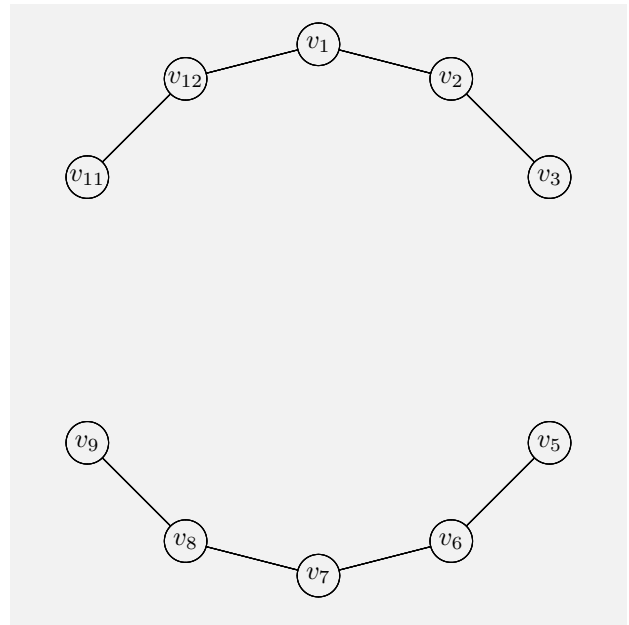
Si eliminamos un vértice cualquiera, por ejemplo v_4 y al ser conexo tendremos que $c(H \setminus v_4) = 1$, luego si U es un subconjunto de vértices de G tal que $|U| = 1$, entonces $c(H \setminus U) = 1$.



$$H \setminus \{v_4\}$$

En la figura que sigue hemos eliminado dos vértices y según los que elijamos, tenemos



$$H \setminus \{v_3, v_4\}$$


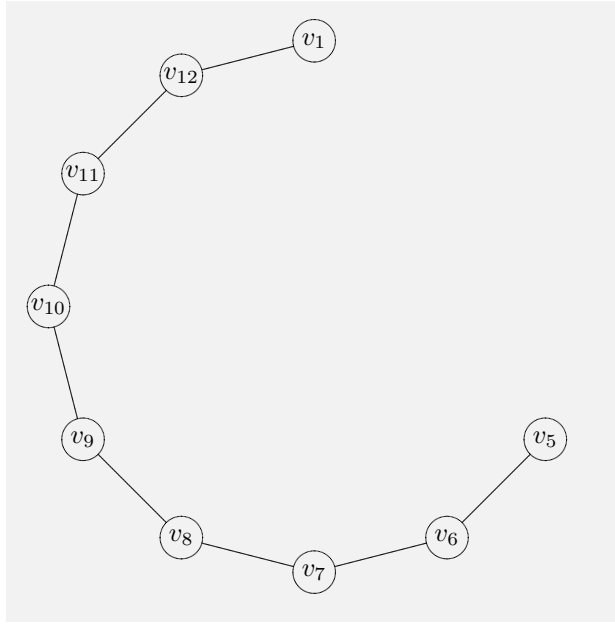
$$H \setminus \{v_4, v_{10}\}$$

$$c(H \setminus \{v_3, v_4\}) = 1 \text{ y } c(H \setminus \{v_4, v_{10}\}) = 2$$

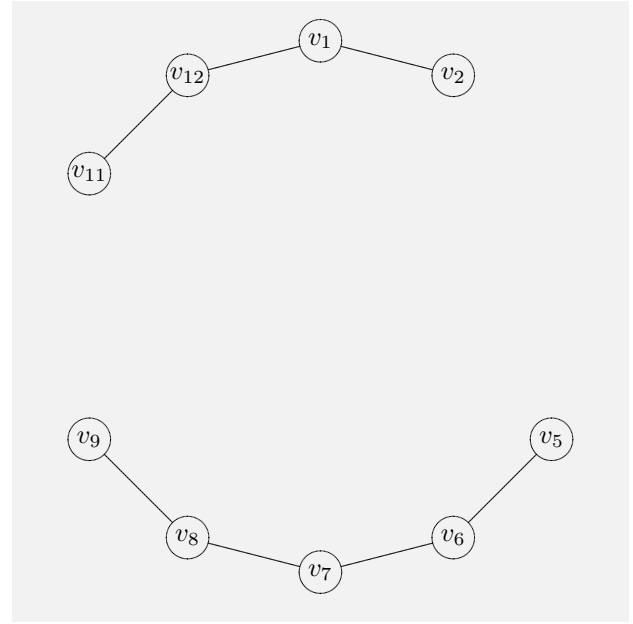
luego si U es un subconjunto de vértices de V tal que $|U| = 2$, entonces

$$c(H \setminus U) \leq 2$$

Ahora eliminamos tres vértices y, según los que elijamos, resulta



$$H \setminus \{v_2, v_3, v_4\}$$



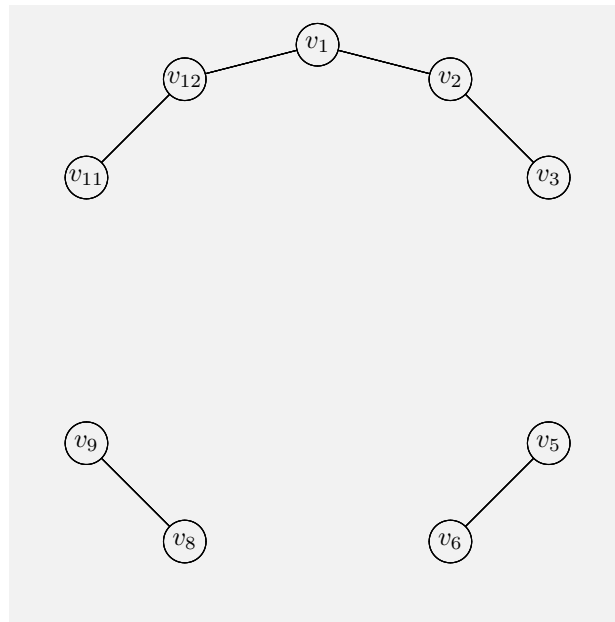
$$H \setminus \{v_4, v_3, v_{10}\}$$

$$c(H \setminus \{v_2, v_3, v_4\}) = 1$$

$$c(H \setminus \{v_3, v_4, v_{10}\}) = 2$$

o

$$c(H \setminus \{v_4, v_7, v_{10}\}) = 3$$



$$H \setminus \{v_4, v_{10}, v_7\}$$

luego si U es un subconjunto de vértices de V tal que $|U| = 3$, entonces

$$c(H \setminus U) \leq 3$$

Nota 14.10 En el teorema anterior, hemos obtenido una condición necesaria para que un grafo $G = (V, A)$ sea Hamiltoniano, es decir hemos probado que

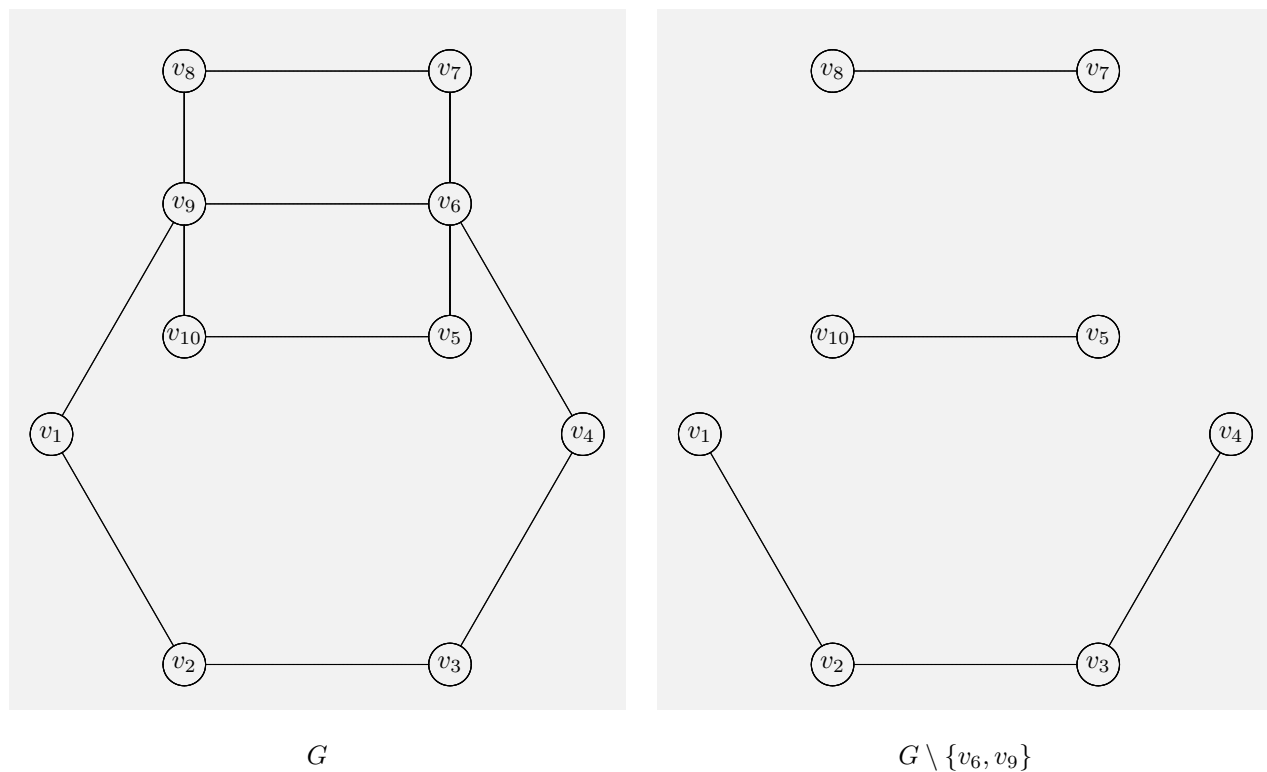
$$G \text{ es Hamiltoniano} \implies c(G \setminus U) \leq |U|; \forall U \subset V$$

de aquí que negando ambos miembros y teniendo en cuenta la equivalencia lógica entre una proposición condicional y su contrarrecíproca, resulta:

$$\exists U \subset V : c(G \setminus U) > |U| \implies G \text{ no es Hamiltoniano}$$

es decir, si existe un subconjunto U del conjunto de vértices, V , de G tal que el número de componentes conexas del subgrafo $G \setminus U$ sea mayor que el número de vértices de U entonces el grafo no es Hamiltoniano. ■

Ejemplo 14.31



Grafo no Hamiltoniano

¿Es Hamiltoniano el grafo G de la figura?

Solución

No lo es, ya que como se muestra la figura, si $U = \{v6, v9\}$, entonces

$$c(G \setminus U) = 3 \text{ y } |U| = 2$$

luego $c(G \setminus U) > |U|$ y, consecuentemente G no es Hamiltoniano. ■

Ejemplo 14.32 Pruébese que todo grafo completo es Hamiltoniano.

Solución

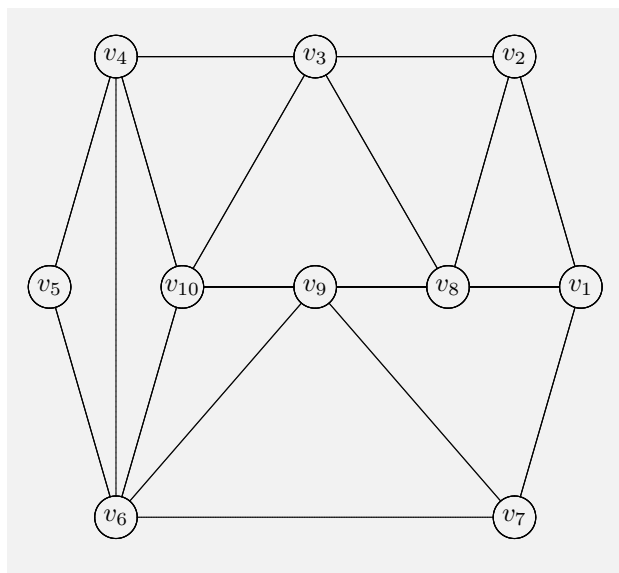
En efecto, sea el grafo completo con p vértices K_p y sean v_1, v_2, \dots, v_p dichos vértices.

Al ser completo, existirán las aristas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{p-1}v_r$ y v_rv_1 y tendremos, por tanto, en K_p el ciclo,

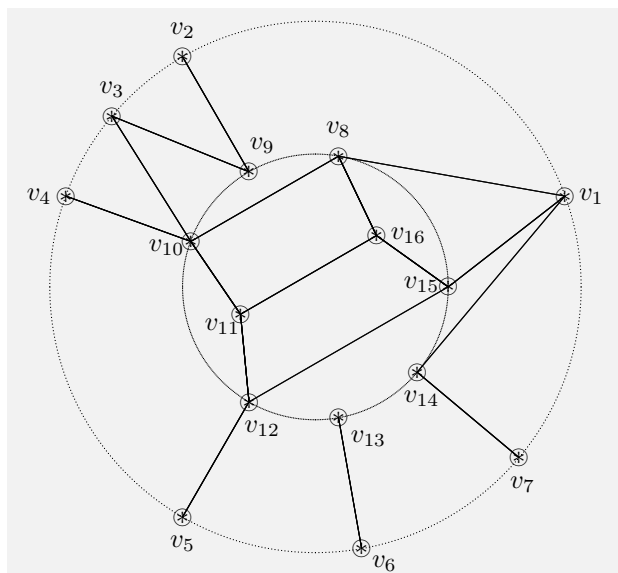
$$\gamma = \langle v_1, v_2, \dots, v_r, v_1 \rangle$$

que es, claramente, de Hamilton.

Ejemplo 14.33 Determinar un ciclo de Hamilton para los grafos de la figura.



(a)



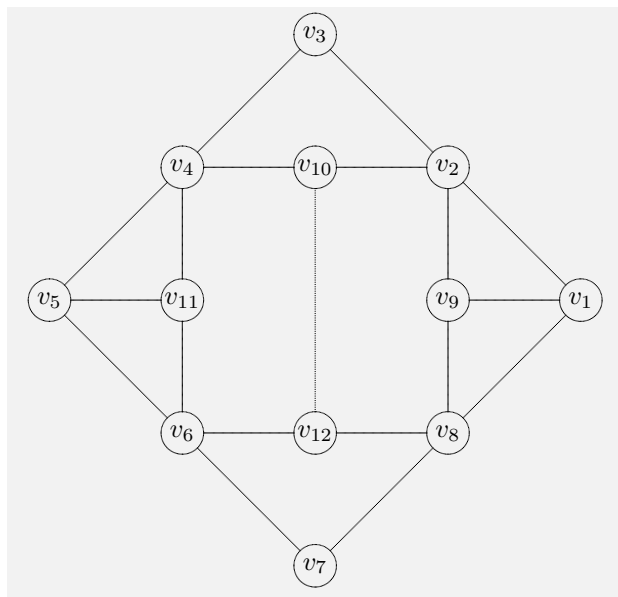
(b)

Solución

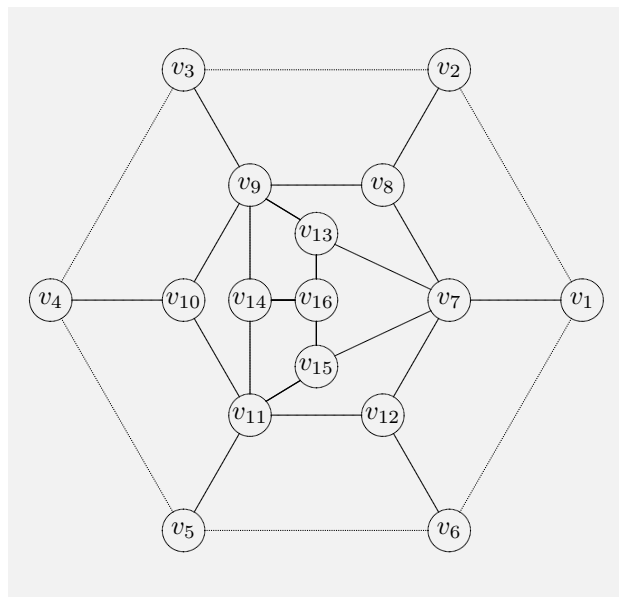
(a) $\gamma = \langle v_1, v_2, v_8, v_3, v_{10}, v_4, v_5, v_6, v_9, v_7, v_1 \rangle$,

(b) $\gamma = \langle v_1, v_7, v_6, v_5, v_4, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_8, v_9, v_3, v_1 \rangle$

Ejemplo 14.34 Verificar que los grafos de la figura no son Hamiltonianos.



(a)

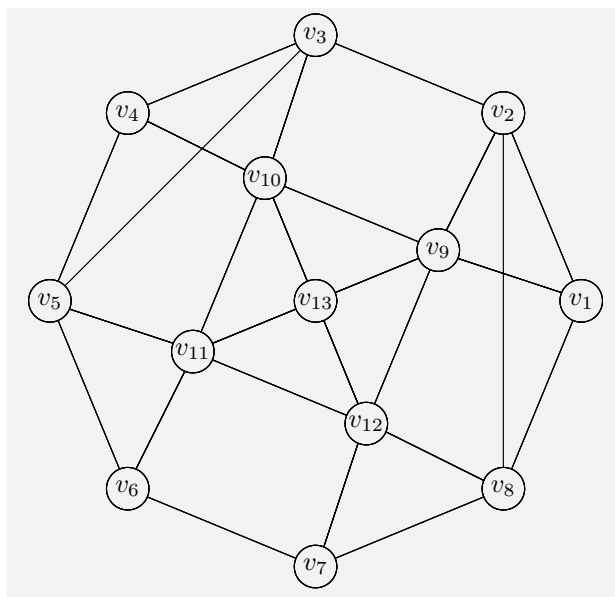


(b)

Solución

- (a) En efecto, eliminando los vértices v_2, v_4, v_6 y v_8 el número de componentes conexas del subgrafo resultante es 5. Por tanto, por el teorema 14.8.5, el grafo G no contiene ningún ciclo de Hamilton.
- (b) El grafo propuesto tiene 16 vértices, luego un ciclo de Hamilton debería tener 16 aristas. Cada vértice deberá tener en dicho ciclo 2 aristas incidentes con él, una para llegar y otra para salir. Pues bien, si eliminamos de cada vértice todas las aristas que excedan de 2, tendrían que quedar 16 para que existiese un ciclo de Hamilton. Procediendo de esta forma, si eliminamos las aristas $v_9v_3, v_9v_8, v_9v_{13}, v_{14}v_{16}, v_4v_{10}, v_{11}v_{15}, v_{11}v_5, v_{11}v_{12}, v_{12}v_7, v_7v_1$ y v_1v_2 quedarían 15 aristas que no son suficientes para un ciclo de Hamilton, luego el grafo no es Hamiltoniano.

Ejemplo 14.35 Determinar si el grafos de la figura es hamiltoniano.



Solución

El ciclo

$$\gamma = \langle v_{10}, v_{13}, v_{12}, v_8, v_7, v_6, v_{11}, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_9, v_{10} \rangle$$

es de Hamilton, luego el grafo es hamiltoniano. ■

14.9 Representación de Grafos

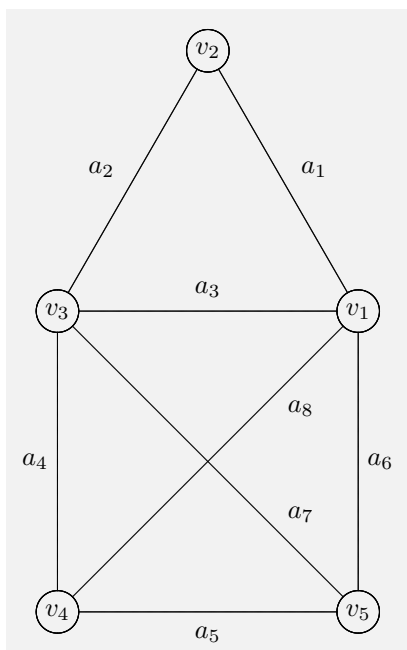
En las secciones anteriores, hemos representado los grafos mediante un esquema o un diagrama. Algunas veces, como por ejemplo cuando se desea analizar un grafo por ordenador es necesaria una representación más formal.

14.9.1 Matriz de Adyacencia

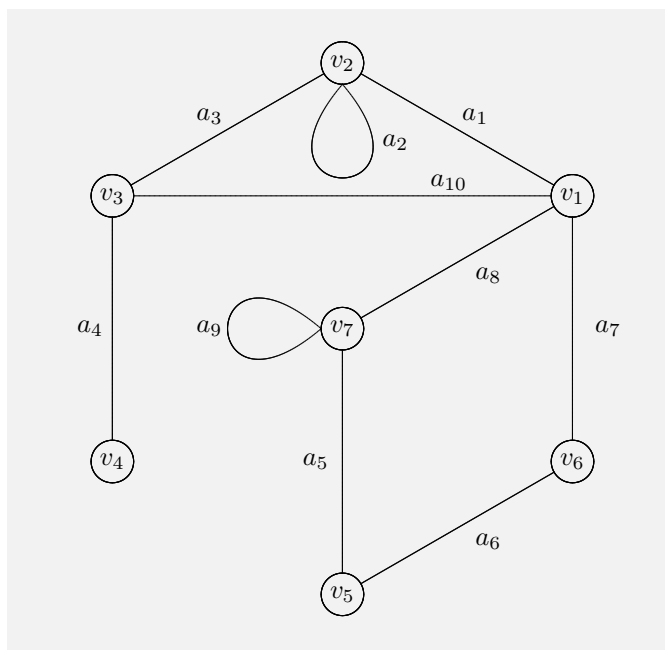
Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Llamaremos matriz de adyacencia del grafo G a la matriz $A = (a_{ij})$ de p filas y p columnas, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ y } v_j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{si } v_i \text{ y } v_j \text{ no son adyacentes} \end{cases}$$

Ejemplo 14.36 Escribir la matriz de adyacencia de los grafos de la figura.



(a)



(b)

Solución

Tomaremos como ordenación de las filas y las columnas en la matriz, el orden natural de los subíndices de los vértices.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Ejemplo 14.37 Escribir la matriz de adyacencia del grafo completo de cinco vértices.

Solución

Directamente de la definición de grafo completo, se sigue que si $A = (a_{ij})$ es la matriz de adyacencia de K_5 , entonces

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \neq j \\ 0, & \text{si } i = j \end{cases}$$

es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

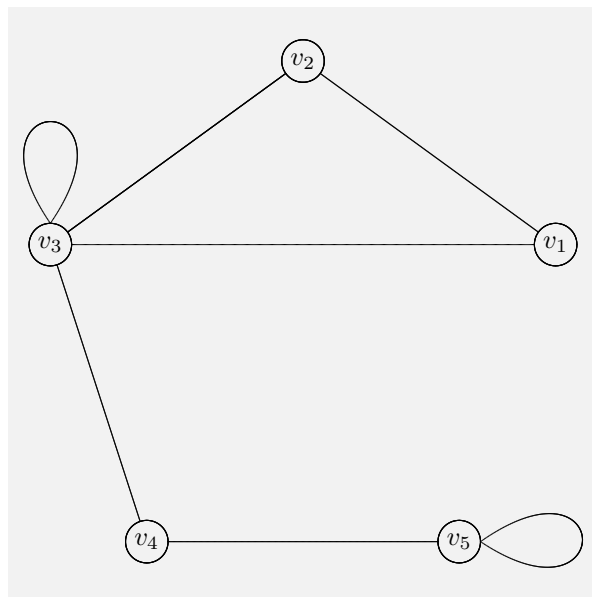
■

Ejemplo 14.38 Dibujar el grafo representado por cada una de las matrices de adyacencia siguientes:

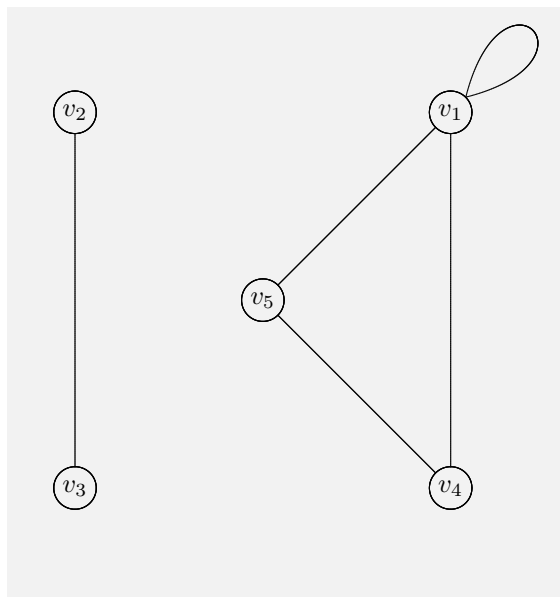
$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

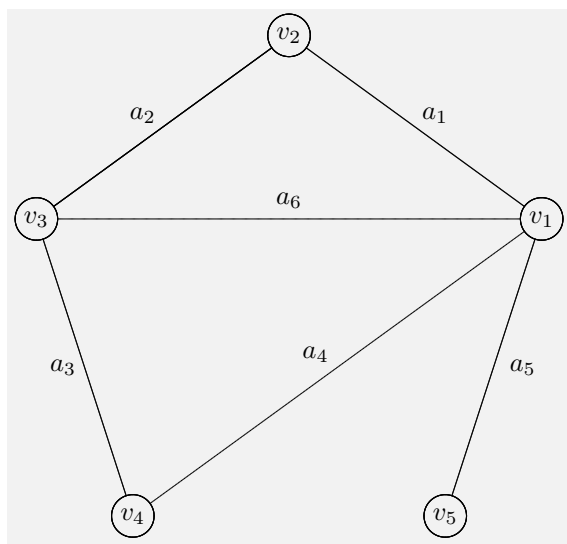


(a)

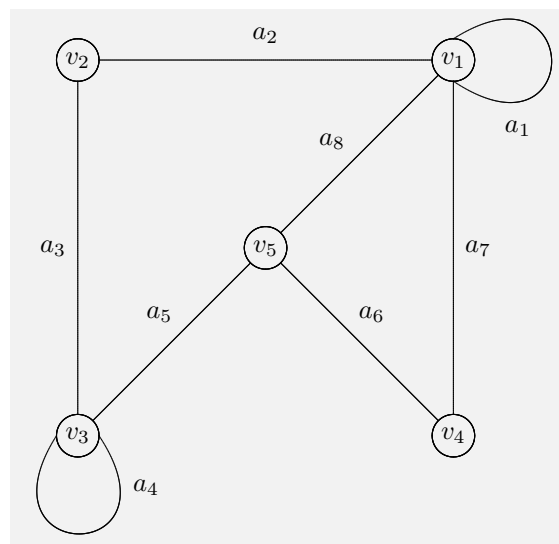


(b)

Ejemplo 14.39 Hallar las matrices de adyacencia de los grafos de la figura.



(a)



(b)

Solución

- (a) Primero seleccionamos un orden arbitrario de los vértices, por ejemplo v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 . A continuación asignamos a las filas y columnas de la matriz el mismo orden dado a los vértices. Un elemento de la matriz es 1 si los vértices correspondiente a la fila y a la columna están unidos por

una arista y 0 en caso contrario. Así pues, la matriz buscada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Razonando igual

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Nota 14.11 Observemos lo siguiente:

- La matriz de adyacencia de un grafo permite representar los bucles, aunque no las aristas repetidas entre dos vértices.
- Si el grafo no tiene bucles, entonces puede calcularse el grado de un vértice sumando la fila o columna correspondiente al mismo.
- Dado que la matriz de adyacencia de un grafo es simétrica respecto de la diagonal, la información, exceptuando la contenida en la diagonal, aparece dos veces.

Veamos que información puede extraerse de la matriz de adyacencia del grafo (a) en la figura. Multiplicando la matriz por si misma, tendremos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos cualquier elemento distinto de cero que no esté en la diagonal principal. Por ejemplo el a_{24} que vale dos. Este elemento resulta de multiplicar la segunda fila que se corresponde con el vértice v_2 con la cuarta columna correspondiente al vértice v_4 . Es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$$

Ahora bien, la única forma de que los sumandos sean distintos de cero es que los elementos que se multipliquen sean, ambos, iguales a uno. Esto ocurrirá cuando haya un vértice cuyo elemento en la fila correspondiente a v_2 sea uno y el de la columna que se corresponde con v_4 también sea uno. Es decir, han de existir aristas de la forma v_2v y de la forma vv_4 . Cada vez que esto suceda, la suma aumentará una unidad.

En nuestro ejemplo, la suma es dos, representando a los pares de aristas

$$v_2v_1, v_1v_4 \text{ y } v_2v_3, v_3v_4$$

es decir, tenemos dos caminos de longitud dos entre v_2 y v_4 ,

$$\gamma_1 = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle \text{ y } \gamma_2 = \langle v_2, v_1, v_4 \rangle$$

Si hubiéramos elegido el elemento a_{21} que vale uno y razonamos igual, tendríamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

y el único producto no nulo es $1 \cdot 1$ que representa al par de aristas v_2v_3, v_3v_1 , es decir, hay un camino de longitud dos entre v_2 y v_1 ,

$$\gamma = \langle v_2, v_3, v_1 \rangle$$

Por tanto,

- todos los ceros de la matriz A^2 significan que no hay ningún camino de longitud dos entre los vértices correspondientes.
- todos los unos de la matriz A^2 significan que existe un camino de longitud dos entre los vértices correspondientes.
- todos los doses de la matriz A^2 significan que existe dos caminos de longitud dos entre los vértices correspondientes.

y así sucesivamente.

Observamos, además, que los elementos de la diagonal principal son los grados de los vértices. En efecto, si consideramos el elemento a_{11} que vale cuatro, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$$

y los cuatro productos no nulos, representan a los pares de aristas

$$v_1v_2, v_2v_1$$

$$v_1v_3, v_3v_1$$

$$v_1v_4, v_4v_1$$

$$v_1v_5, v_5v_1$$

por tanto, el número de caminos de longitud dos entre v_1 y v_1 es cuatro que es el grado de v_1 . ■

Formalizaremos estas ideas en el siguiente teorema.

14.9.2 Teorema

Si A es la matriz de adyacencia de un grafo simple, el elemento a_{ij} que ocupa la fila i -ésima y la j -ésima columna de la matriz $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ es el número de caminos de longitud n que existen entre el vértice i y el vértice j .

Demostración

Utilizaremos la inducción sobre n .

Paso básico. Para $n = 1$, A^1 es la matriz A , o sea, la matriz de adyacencia del grafo. Entonces, por definición de la misma, si $a_{ij} = 1$, hay una arista entre los vértices i y j , es decir, un camino de longitud

uno entre ambos vértices. En cualquier otro caso, a_{ij} vale cero. Consecuentemente, el teorema es cierto para $n = 1$.

Paso inductivo. Supongamos que el teorema es cierto para $n = p$.

Observemos que $A^{p+1} = A^0 \cdot A$, de tal forma que el elemento a_{ik} en la matriz A^{p+1} se obtiene multiplicando los elementos de la fila i -ésima de A^p por los de la fila k -ésima de A y sumándolos, es decir,

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^m b_{ij}c_{jk} = b_{i1}c_{1k} + b_{i2}c_{2k} + \cdots + b_{im}c_{mk}$$

Ahora bien, b_{ij} , $j = 1, 2, \dots, m$ es un elemento de A^p , luego por la hipótesis de inducción, es el número de caminos de longitud p que hay entre los vértices v_i y v_j .

Por otro lado, c_{jk} , $k = 1, 2, \dots, m$ es un elemento de la matriz A , luego es cero o uno. Pues bien,

Si $c_{jk} = 0$, no existe arista entre los vértices v_j y v_k , consecuentemente habrá $b_{ij} \cdot c_{jk} = b_{ij} \cdot 0 = 0$ caminos de longitud $p + 1$ entre los vértices i y k cuya última arista sea v_jv_k .

Si $c_{jk} = 1$, existe una arista entre los vértices v_j y v_k . Entonces, como hay b_{ij} caminos de longitud p desde v_i a v_j , ahora habrá $b_{ij}c_{jk} = b_{ij} \cdot 1 = b_{ij}$ caminos de longitud $p + 1$ cuya última arista sea la v_jv_k .

Al efectuar la suma sobre todos los j 's se cuentan todos los caminos de longitud $p + 1$ desde v_i a v_k . Consecuentemente, el elemento a_{ik} en A^{p+1} no da el número de caminos de longitud $p + 1$ desde v_i hasta v_k , verificándose de esta forma el paso inductivo.

Por el *primer principio de inducción matemática* el teorema está demostrado. ■

14.9.3 Corolario

Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G con p vértices v_1, v_2, \dots, v_p , $p > 1$ y sea $C = A^{p-1} + A^{p-2} + \cdots + A$. Entonces, existe un camino entre los vértices v_i y v_j si, y sólo si el elemento c_{ij} de la matriz C es distinto de cero.

Demostración

Sólo si. Si existe un camino entre los vértices v_i y v_j , entonces por el teorema 14.5.3, existirá un camino simple entre ambos.

Como el camino es simple, su longitud será menor que p , de aquí que alguno de los elementos que ocupan la posición (i, j) de la matriz A^m con $m < p$ será distinto de cero y, por tanto, c_{ij} sea no nulo.

Si. Recíprocamente, si $c_{ij} \neq 0$, entonces, al menos uno de los términos que ocupan la posición (i, j) en A^m , con $1 \leq m < p$ ha de ser distinto de cero, luego existe un camino entre los vértices v_i y v_j . ■

Directamente de este corolario se sigue un criterio para establecer la conexión de un grafo.

14.9.4 Caracterización de un Grafo Conexo

Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G con p vértices v_1, v_2, \dots, v_p , $p > 1$ y sea $C = A^{p-1} + A^{p-2} + \cdots + A$. El grafo G es conexo si, y sólo si todos los elementos de la matriz C son distintos de cero.

14.9.5 Matriz de Incidencia

Sea $G = (V, A)$ un grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas son, respectivamente,

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$$

y

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$$

Llamaremos matriz de incidencia del grafo G a la matriz $B = (b_{ij})$ de p filas y q columnas, donde

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ y } a_j \text{ son incidentes.} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 14.40 Hallar las matrices de incidencia de los grafos de la figura del ejemplo 14.39.

Solución

(a)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota 14.12 Obsérvese lo siguiente:

- La matriz de incidencia de un grafo permite representar tanto bucles como aristas repetidas entre dos vértices.
- Si el grafo no tiene bucles, entonces cada columna tiene dos 1 y la suma de cada fila nos da el grado del vértice correspondiente. ■

Ejemplo 14.41 Escribir la matriz de incidencia de los grafos de la figura del ejemplo 14.36.

Solución

$$(a) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

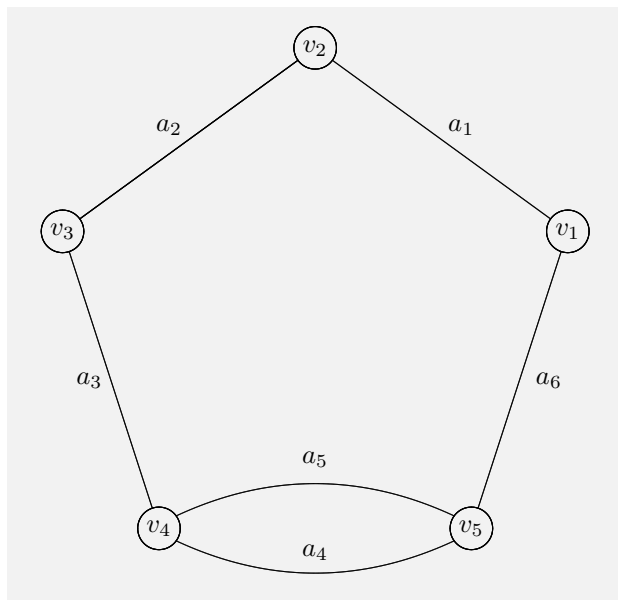
$$(c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 14.42 Dibujar el grafo representado por cada una de las matrices de incidencia siguientes:

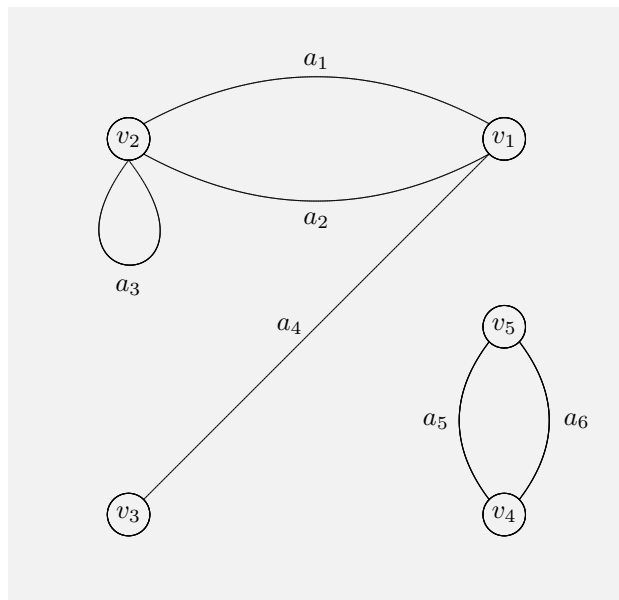
$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución



(a)



(b)