Важнейшие темы школьной математики

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Книга для ученика и учителя

8–10 классы

Москва
ИЛЕКСА
2025

УДК 372.851:512.12
ББК 22.141:74.202.61я721
К32

Рецензенты:
А.Р. Чехлов, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры алгебры Томского государственного университета;
А. Г. Мордкович, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ
в области образования, доктор педагогических наук,
профессор Московского городского педагогического университета (МГПУ).

Авторы:
Э. Г. Гельфман, Л. Н. Демидова, А. И. Терре, С. Я. Гриншпон,
З. П. Матушкина, М.А. Холодная, Н. Б. Лобаненко, И. Г. Просвирова,
И. Е. Малова, Л. Ф. Пичурин, В. Я. Эпп

К32 Квадратные уравнения. Книга для ученика и учителя. 8—10 классы — М.: ИЛЕКСА, 2025. — 272 с. (Серия: Важнейшие темы школьной математики).
ISBN 978-5-89237-747-8

Данная книга адресована ученикам, учителям математики, студентам педагогических специальностей, исследователям в области математического образования.

Ученикам книга дает возможность получить глубокие и всесторонние знания о квадратных уравнениях. Она поможет понять, каким образом возникают разные способы решения квадратных уравнений и какова история развития этих способов, как квадратные уравнения можно применить при решении других уравнений и как они используются при решении физических, геометрических и экономических задач.

Действующие и будущие учителя смогут использовать материалы этой книги как основу сценариев своих уроков, для проведения дополнительных занятий различного типа, для организации проектной и исследовательской деятельности учащихся, при подготовке к ЕГЭ и ОГЭ.

Исследователи в области математического образования смогут увидеть новый подход к конструированию учебных текстов. Работа с такими текстами способствует развитию у учащихся умений работать с математической информаций, искать альтернативные способы решений, управлять своей учебной деятельностью и т. д., а также создает условия для роста интереса к математическому знанию.

УДК 372.851:512.12
ББК 22.141:74.202.61я721

Учебное издание

Квадратные уравнения.
Книга для ученика и учителя. 8—10 классы

Подписано в печать 21.11.2024.
Формат 70×90/16. Усл. печ. л. 12,71.
Тираж 1000 экз. Заказ

ООО «Илекса»
+7(964) 534-80-01
real-ilexa@yandex.ru
www.ilexa.ru

ISBN 978-5-89237-747-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. О книге «Квадратные уравнения. Книга для ученика и учителя»

С чего начинать изучение любых уравнений, в том числе и квадратных?

Найти готовый способ их решения или разобраться в обосновании этого способа самому?

Рассматривать ли частные виды уравнения?

Выяснить, каждый ли вид уравнений решается только единственным способом?

Определить, можно ли без долгих вычислений сказать, сколько корней имеет уравнение?

Узнать, где пригодятся данные уравнения?

Подобные вопросы полезно ставить перед изучением любого вида уравнений. Они задают логику подачи учебного материала, определяют особенности его изложения.

Для поиска ответов на эти вопросы каждый может выбрать свой путь изучения квадратных уравнений. Можно начать решение квадратного уравнения с помощью взятой из справочника формулы для вычисления его корней, то есть сразу получить образец решения квадратного уравнения (§1), а можно, столкнувшись с новым видом уравнений, самому искать информацию о них и о способах их решения, самому вывести формулу корней (§4). Можно разобраться в особенностях квадратных уравнений (§§2, 5, 7), а можно, зная уже, как решать уравнение с помощью формулы корней, сразу перейти к применению квадратных уравнений для решения других видов уравнений (§§13—14) или решения текстовых задач (§§16—17).

Как устроен каждый параграф книги?

В каждом параграфе присутствуют эпиграф, заключает параграф послесловие (часто вовсе нематематического содержания). Эти элементы текста могут подтолкнуть к обнаружению в изучаемом материале новых смыслов за рамками математики.

В каждом параграфе учебный материал разделен на части подзаголовками в форме вопросов. Такой прием представления материала способствует удержанию сути той или иной его части, позволяет читателю выстраивать внутренний диалог, включаться в другие виды диалога. Ответы на вопросы подзаголовков обычно в тексте не выделены, их либо нужно найти в тексте либо сформулировать самостоятельно.

Важную роль в понимании изучаемого материала играют первые задания каждого параграфа. Они помогают увидеть проблему, отделить знание от незнания. Результаты самостоятельной работы над этими заданиями можно сравнить с тем, как обсуждаются эти задания в тексте параграфа.

При изучении любого материала возникает необходимость сохранения полезной информации. Для этого в каждом параграфе предлагается заполнить страничку в блокноте, поместив на ней самое существенное из всего объема информации.

С каждым параграфом связан раздел «Задания после параграфа». Маркировка его заданий помогает выбрать уровень самостоятельности в работе.

Буквой А отмечены задания, закрепляющие полученные знания. Они обычно начинаются со слов: «Решите...», «Выполните...», «Преобразуйте...», «Разбейте на группы...», «Выясните, какие преобразования...», «Решите по аналогии...» и т. д.

Буквой В — задания, развивающие умения анализировать, обобщать, исследовать связи между изучаемыми объектами, видеть закономерности, составлять свои тексты, структурировать информацию и т. д. Они начинаются со слов: «Выберите те, которые...», «Сравните, чем отличаются..., «Что общего...», «Сформулируйте...», «Составьте сами...», «Дополните условие, чтобы...», «Исследуйте...», «Может ли...», «Верно ли...» и т. д.

Просмотрев задания к параграфу и определив назначение каждого из них, можно, в зависимости от познавательных потребностей, выбрать наиболее полезные.

В процессе работы с книгой может оказаться целесообразным обращение к Справочнику, который находится в конце книги.

Большинство параграфов книги учитель может использовать как сценарий урока, наставник — как основу сценария индивидуальных занятий.

Сценариям параграфов может следовать и каждый изучающий книгу самостоятельно.

Каково назначение Психологического комментария, помещенного в книге?

Важным условием эффективности обучения является осознанное отношение ученика к своей учебной деятельности, в частности, понимание роли собственной мыслительной активности в процессе обучения. Поэтому в пособии есть особый раздел — Психологический комментарий. Он поможет осознать, какие свойства характеризуют успешное мышление (психологи и педагоги используют термин «продуктивное мышление» — ПМ).

Каждое свойство иллюстрируется обсуждением житейских и математических проблем, решение которых позволяет разобраться в том, как и когда проявляется то или иное свойство продуктивного мышления: рациональность (1); критичность (2); рефлексивность (3); гибкость (4); креативность (5).

Как работать с Психологическим комментарием?

Познакомиться с содержанием Психологического комментария можно как на начальном этапе работы с книгой, так и в процессе ее изучения. Сначала достаточно прочитать описание свойств продуктивного мышления и выполнить одно-два вызвавших интерес задания. При дальнейшей работе с книгой можно неоднократно обращаться к Психологическому комментарию, чтобы более детально проанализировать проявления того или иного свойства продуктивного мышления.

В тексте книги вы встретитесь с пятью значками, обозначающими каждое из пяти свойств ПМ, — значки стоят рядом с заданиями, которые в наиболее явном виде требуют использования определенного свойства ПМ (эти значки перечислены на с. 9). По завершении работы с книгой «Квадратные уравнения» можно провести коллективное обсуждение пройденного материала: самостоятельно ответить на вопрос, какие фрагменты математического текста и выполнение каких математических заданий потребовали опоры на какое конкретное свойство ПМ (при этом следует иметь в виду, что некоторые задания могут быть связаны с привлечением одновременно 2–3 таких свойств).

Для кого написана эта книга?

Авторы надеются, что книга будет полезна учителям, учащимся и, возможно, их родителям; студентам, магистрантам и аспирантам педагогических специальностей. Авторы будут рады, если этой книгой заинтересуются преподаватели методики обучения математике.

Авторский коллектив выражает благодарность за поддержку и содействие в подготовке этой книги Томскому государственному педагогическому университету, департаменту общего образования Томской области, информационно-методическому центру г. Томска и всем тем, кто помогал в нашей работе над учебными материалами. Особая благодарность учителям за их поддержку, советы и замечания.

2. О ключевом факторе, влияющем на развитие интеллекта учащихся

Ключевой фактор, влияющий на развитие интеллекта учащихся, — это содержание школьного образования. С психологической точки зрения, формирование интеллектуальных способностей человека, начиная с детства и включая возраст зрелости, осуществляется через процесс усвоения, переработки и самостоятельного создания разнообразных предметных содержаний, начиная с простейших житейских впечатлений и заканчивая гипотезами об устройстве Вселенной. При этом уровень интеллектуального развития личности — особенно это важно по отношению к процессу школьного обучения — будет напрямую зависеть от качества предметного содержания (развивающие эффекты будут разными, если ребенок будет учиться читать либо на комиксах, либо на сказках Андерсена; если ученик будет осваивать математические знания через решение множества однотипных задач либо через самостоятельное исследование того или иного математического понятия).

Единицей содержания школьного предмета является учебный текст. Об особой роли текста в интеллектуальном развитии личности говорят многие специалисты, рассматривая текст как «мыслящую структуру» (Вяч. Вс. Иванов), «модель приключения мысли» (Л. Э. Генденштейн), «партнера-собеседника» (М. М. Бахтин). Текст — это та естественная среда, в которой осуществляется интеллектуальное развитие человека на протяжении всей его жизни. В области школьного образования интерес к текстам связан с их влиянием на эффективность обучения.

Учебные тексты нового поколения — это развивающие тексты, разработанные на основе психодидактического подхода (Холодная, Гельфман, 2016; Гельфман, Демидова, Терре, 2017; Гельфман, Холодная, Подстригич, 2019). На наш взгляд, обучение на основе специально сконструированных учебных текстов позволяет активно влиять на интеллектуальное развитие учащихся за счет обогащения индивидуального ментального (умственного) опыта каждого ученика, включая когнитивный, понятийный, метакогнитивный и эмоционально-оценочный опыт (Холодная, 2002; 2019).

Согласно разработанным психодидактическим требованиям, развивающий учебный (в том числе математический) текст характеризуется рядом специфических особенностей:

- *тематическая организация* — тематический учебный текст (в виде тематической учебной книги) позволяет последовательно и развернуто выстроить учебный материал, раскрыть его роль в курсе математики, обеспечить развитие темы для более глубокого и полного изучения материала;
- *разнородность* — наличие текстов разной степени сложности как по содержанию, так и по способам учебной деятельности (текстов с демонстрацией образцов действий и открытых текстов; текстов, инициирующих режим исполнительской, исследовательской, проектной или творческой деятельности); использование текстов разных жанров и типов (констатирующих, объяснительных, рассуждающих, проблемных, сюжетных, «невозможных»); обращение к разным формам предъявления учебной информации (словесно-логической, визуальной, предметно-практической, эмоционально-метафорической);
- *ориентация на понимание* — средствами учебного текста учитываются закономерности образования математических понятий, обеспечивается формирование таких общих интеллектуальных умений, как умения доказывать, оценивать, обосновывать, обобщать, прогнозировать, интерпретировать; создается мотивация на стадии введения новых понятий; воспитывается готовность анализировать один и тот же объект (явление, ситуацию, закономерность) разными способами и т. д.;
- *неоднозначность и противоречивость* — в учебных текстах присутствуют элементы неопределенности, которые усиливаются неполнотой исходных данных либо постановкой неожиданной проблемы с ее последующим обсуждением; описываются разные точки зрения на один и тот же вопрос;
- *диалогичность* — учебный текст включает разнообразные вопросы к ученику-читателю, ориентирует учащихся на организацию дискуссии, учит школьников правильно реагировать на интеллектуальные конфликты, сотрудничать при решении поставленных задач, быть толерантными к мнению другого человека;
- *открытость* — учебные тексты организованы так, что знание не дается в готовом виде (ученик постепенно переходит от незнания к новым понятиям); тот или иной элемент текста предполагает мно-

жество интерпретаций (смысловых контекстов); возможны разные сценарии и разная последовательность чтения;

- *ориентация на интеллектуальную самодеятельность* — учебный текст «отпускает» ученика вперед, позволяя ему самостоятельно осваивать те или иные аспекты темы; тексты приглашают учащихся к самостоятельному созданию фрагментов учебного текста;
- *опора на личный опыт* — средствами учебного текста подключаются житейские впечатления и обыденные знания, формируется готовность доверять собственной интуиции при анализе учебной информации.

Книга «Квадратные уравнения» — это вариант развивающего учебного текста, который, с одной стороны, является проекцией структуры научного математического знания и, с другой, обеспечивает формирование психологических механизмов продуктивной интеллектуальной деятельности.

3. Об авторах книги «Квадратные уравнения»

Авторы этой книги — математики, методисты, психолог, историк, физик — живут в разных городах России (в Белгороде, Брянске, Владимире, Москве, Кургане, Томске). Но такая география не мешает им вместе много лет участвовать в разработке Проекта «Математика. Психология. Интеллект» (МПИ). Руководителями Проекта являются Э. Г. Гельфман, профессор, доктор педагогических наук, и М. А. Холодная, профессор, доктор психологических наук.

Содержание книг Проекта, и в том числе книги «Квадратные уравнения», является результатом многолетней работы авторского коллектива над решением важных для практики обучения вопросов: каковы особенности переработки учащимися информации, какие условия способствуют формированию у них математических понятий, каким образом учащиеся управляют своей умственной деятельностью, как можно учесть индивидуальные познавательные особенности учащихся и т. д.

В Проекте МПИ создана «обогащающая модель обучения». Слово «обогащение» в названии модели обучения означает, что содержание учебников, учебных пособий Проекта направлено на обогащение различных форм умственного опыта (когнитивного, понятийного, метакогнитивного, эмоционально-оценочного) как основы развития интеллекта учащихся.

Авторским коллективом Проекта МПИ созданы и внедрены в практику многих школ России учебники, учебные пособия, рабочие тетради и практикумы по математике для учащихся 5—9 классов, учебник по геометрии для учащихся 5—6 классов, компьютерная поддержка для 5—6 классов (http://school-collection.edu.ru/).

Условные обозначения

Маркировка свойств продуктивного мышления:

ПМ1 — Рациональность;

ПМ2 — Критичность;

ПМ3 — Рефлексивность;

ПМ4 — Гибкость;

ПМ5 — Креативность.

Маркировка заданий (уровень самостоятельности их выполнения):

А — задания, закрепляющие полученные знания.

В — задания, позволяющие получить новые знания и развить новые умения.

ГЛАВА 1

Квадратные уравнения и последовательность их изучения

Новая тема... . С чего начать? Хорошо бы с такой конкретной ситуации, с такой задачи, которая позволила бы понять необходимость нового знания, помогла бы увидеть перспективы его развития, прикинуть план изучения. Простая задача о размерах цветника, с которой начинается первая глава, вдруг приводит к новому виду уравнений! Решение таких уравнений пока неизвестно. Как поступить? Появляется возможность осознать, какая стратегия работающему с этим материалом ближе: самостоятельно изобрести способ решения нового вида уравнений или найти информацию о способах решения в каких-нибудь источниках? Или дождаться, когда кто-то всё растолкует?

В первой главе сначала предлагается работа с готовой формулой корней квадратного уравнения, взятой из математического справочника. В результате уже в §1 задача о цветниках решена с помощью квадратных уравнений.

Что дальше? Может быть, если решить ещё некоторое количество задач, приводящих к квадратному уравнению, то тема будет освоена? Или вам, в силу своей любознательности, своей основательности, захочется больше узнать о квадратных уравнениях: как их распознавать, как получается формула корней, нельзя ли их решать как-нибудь иначе и так далее?

Оказывается, что если знать структуру квадратного уравнения, понять связи между его корнями и коэффициентами, то это облегчит нахождение корней уравнения, иногда найти корни можно будет даже устно (§2, §3, §5, §7).

Выделение частных видов квадратных уравнений, составление алгоритмов нахождения корней, выбор способов решения конкретного уравнения помогут научиться решать разные виды квадратных уравнений (§6, §3, §10, §11).

Кроме того, работая с этой книгой, можно научиться анализировать сделанное, обобщать, систематизировать изучаемое, научиться удерживать в памяти полезное, упрощать громоздкое. О развитии этих и других свойств продуктивного мышления речь идет в разделе «Психологический комментарий».

Может быть, кому-то после изучения §1 захочется перейти к главе 3, посвященной решению задач. А в ходе изучения главы 3 покажется нужным изменить свой план и познакомиться с §6 «Упрощаем вычисление корней квадратного уравнения» или с §13 «Используем квадратные уравнения при решении уравнений других видов». Все это тоже возможно.

§1. Встречаемся с уравнениями нового вида

Посредством уравнений, теорем
Он уйму всяких разрешил проблем:
И засуху предсказывал, и ливни,
Поистине его познанья дивны.

Джеффри Чо́сер

1. Какие уравнения могут возникать при решении текстовых задач?

Предлагаем решить две задачи и затем обсудить их решение.

Задача 1. Участок земли примыкает к реке и имеет форму прямоугольника со сторонами a и b (рис. 1). С трёх сторон участок обнесён изгородью.

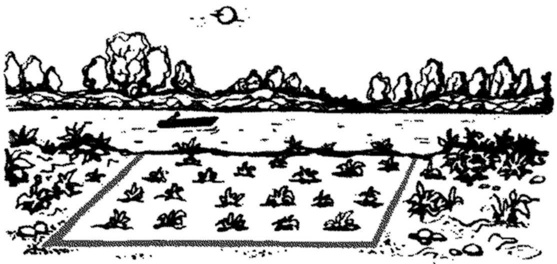


Рис. 1

Какова площадь участка и какова длина изгороди, если:

а) $a = 23$ м, $b = 31$ м; б) $a = 44{,}5$ м, $b = 30$ м?

Задача 2. Планируется разбить цветник, который должен примыкать к дому и иметь форму прямоугольника площадью S. Материал для ограждения цветника уже заготовлен, из него нужно изготовить изгородь длиной l. Найдите длину сторон цветника (рис. 2), если:

а) $l = 59$ м, $S = 435$ м^2; в) $l = 72$ м, $S = 648$ м^2;

б) $l = 53$ м, $S = 300$ м^2; г) $l = 20$ м, $S = 90$ м^2.

Обсуждение.

Что общего есть в условиях этих задачах? В чём заключается их различие?

В обеих задачах речь идёт о земельных участках прямоугольной формы. Величины, которые характеризуют любой прямоугольник, — это длины сторон a и b, периметр P, площадь S. Они связаны между собой формулами $S = a \cdot b$, $P = 2(a + b)$.

Рис. 2

Можно ли обе задачи решить арифметически? Или для их решения придётся использовать уравнения?

Если вы решали вторую задачу с помощью уравнения, то какое уравнение вы составили для её решения?

Сравните свои рассуждения со следующими.

Решение задачи 1а).

При $a = 23$ м и $b = 31$ м площадь участка находится однозначно:

$$S = 23 \cdot 31 = 713 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Для длины изгороди возможны два варианта:

$$l = 2 \cdot 23 + 31 = 77 \text{ (м) или } l = 2 \cdot 31 + 23 = 85 \text{ (м)}.$$

Ответ. 713 $м^2$; 77 м или 713 $м^2$; 85 м.

Аналогично решается задача 1(б).

Решение задачи 2а).

Вряд ли удастся решить задачу арифметически. Попробуем её решить с помощью уравнения. Для его составления нужно понять, *какое предложение из условия задачи нужно взять за основу для составления уравнения*. Известна, например, площадь цветника $S = 435$ $м^2$. Эту же площадь можно представить как произведение длин двух смежных сторон цветника. Получится равенство, которое и будет искомым уравнением. Значит, условие задачи «площадь цветника равна 435 $м^2$» является основой для составления уравнения.

Представим ситуацию схематично (рис. 3).

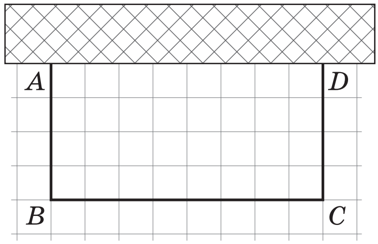


Рис. 3

Пусть x м — длина стороны AB;
Тогда $(59 - 2x)$ м — длина стороны BC;
$(59 - 2x)x$ м^2 — площадь цветника.
По условию задачи площадь цветника равна 435 м^2.
Получаем уравнение: $(59 - 2x)x = 435$.

Составленное уравнение не является линейным. Однако некоторый опыт решения нелинейных уравнений у нас есть. В левой части уравнения стоит произведение $(59 - 2x)x$. Если бы правая часть уравнения равнялась нулю, то решение уравнения было бы простым. Но правая часть уравнения отлична от нуля.

Может быть, есть смысл представить полученное уравнение в каком-то другом виде, который поможет найти корни уравнения? Конечно же, отыскивая такой вид, нужно использовать только такие преобразования уравнений, которые позволяют переходить от данного уравнения к равносильному уравнению.

Определение
Два уравнения называются *равносильными,* если множества их корней совпадают.

Например, линейные уравнения $5x - 10 = 35$ и $27 - 3x = 0$ равносильны, так как оба они имеют единственный корень, равный 9.

Равносильными называют также два уравнения, которые не имеют корней.

Например, уравнения $0 \cdot x = 5$ и $x^2 + 10 = 0$ равносильны, поскольку они не имеют корней.

Преобразования уравнения, которые приводят к равносильному уравнению:

- *тождественные преобразования алгебраического выражения в какой-либо части уравнения*, не меняющие области допустимых значений переменных;
- *прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа или алгебраического выражения*, не меняющего области допустимых значений переменного (как следствие — перенос слагаемого из одной части уравнения в другую с изменением знака слагаемого на противоположный);
- *умножение (деление) обеих частей уравнения на одно и то же число, не равное нулю*.

Выполним следующие преобразования уравнения:

$$(59-2x)x = 435;$$

$$59x-2x^2 = 435;$$

$$-2x^2+59x-435=0.$$

Пока удалось привести уравнение $(59-2x)x = 435$ к равносильному уравнению: $-2x^2+59x-435=0$, в котором левая часть — многочлен второй степени, а правая — нуль.

Итак, при решении текстовой задачи о площади получилось алгебраическое уравнение второй степени. Коротко его называют *квадратным уравнением*.

Как найти корни уравнения $-2x^2+59x-435=0$?

Есть ли у вас опыт решения квадратных уравнений?

Что делать, если вы не знаете, как решаются такие уравнения?

2. Что делать, если неизвестен способ решения уравнения?

Как вы поступаете, когда сталкиваетесь с новой для вас задачей?

Пытаетесь найти ее решение самостоятельно?

Обращаетесь к учителю, к приятелю?

Ищете информацию в учебниках, справочниках, в интернете?

Давайте посмотрим на задачу решения квадратного уравнения с точки зрения человека, который хотел бы получить новую информацию из справочника. Возьмём «Справочник по математике для средней школы» А. Г. Цыпкина (вы можете найти этот справочник, например, в интернете). В пункте 5.3 рассматривается алгебраическое уравнение второй степени $ax^2+bx+c=0$, которое называется квадратным. Уравнение $-2x^2+59x-435=0$ на него очень похоже.

Что говорится в справочнике о решении такого уравнения? Цитируем: «Корни x_1, x_2 квадратного уравнения вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}».$$

Уравнение $-2x^2 + 59x - 435 = 0$ является квадратным.
Можно увидеть, что $a = -2$, $b = 59$, $c = -435$.
Подставим значения a, b и c в формулу:

$$x_{1,2} = \frac{-59 \pm \sqrt{59^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-435)}}{2 \cdot (-2)};$$

$$x_{1,2} = \frac{-59 \pm \sqrt{1}}{-4};$$

$$x_1 = \frac{-59 + 1}{-4} = 14{,}5 \text{ или } x_2 = \frac{-59 - 1}{-4} = 15.$$

Итак, уравнение $-2x^2 + 59x - 435 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 14{,}5$; $x_2 = 15$.

Эти же корни имеет и равносильное уравнение $(59 - 2x)x = 435$, составленное по условию задачи.

Если вы не уверены в правильности проведённых вычислений, то можете выполнить проверку. Можно убедиться, что число 14,5 является корнем уравнения $(59 - 2x)x = 435$:

$$(59 - 2 \cdot 14{,}5) \cdot 14{,}5 = 435;$$

$$(59 - 29) \cdot 14{,}5 = 435;$$

$$30 \cdot 14{,}5 = 435;$$

$435 = 435$ — верное равенство.

Можно проверить, что и число 15 является корнем уравнения $(59 - 2x)x = 435$.

Итак, для нахождения корней квадратного уравнения можно использовать формулу

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3. Все ли корни уравнения удовлетворяют условию задачи?

Сопоставим корни уравнения $(59 - 2x)x = 435$, составленного для решения задачи 2а, с её условием.

Длина цветника должна быть выражена положительным числом.

Оба корня уравнения $(59-2x)x = 435$ — положительные числа.

Каждое ли из этих чисел может быть взято в качестве длины выбранной стороны цветника?

1-й случай: длина выбранной стороны равна 14,5 м, тогда длина смежной стороны цветника равна 59 − 2 · 14,5 = 30 (м);

2-й случай: длина выбранной стороны цветника равна 15 м, тогда длина смежной стороны равна 59 − 2 · 15 = 29 (м).

Значит, цветник может быть двух размеров при одной и той же площади.

Изобразим планы этих цветников (рис. 4, рис. 5).

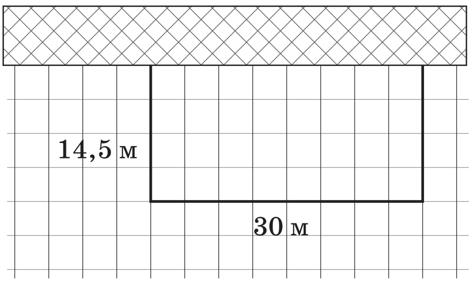


Рис. 4

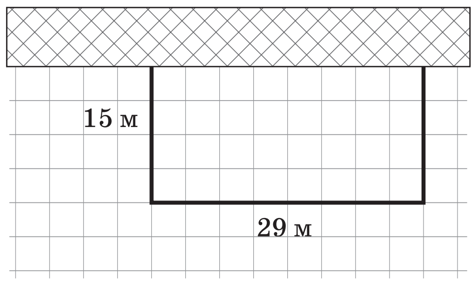


Рис. 5

Остаётся записать ответ в решении задачи 2а).

Ответ: 14,5 м; 30 м или 15 м; 29 м.

Итак, задача 2 решена для случая а), когда $l = 59$ м, $S = 435$ м^2. Решите её для трёх оставшихся случаев б) — г). Постройте план каждого из найденных цветников, проанализируйте полученные решения.

Напомним, что в задаче 2 надо было разбить цветник в виде прямоугольника, примыкающий к дому, площадью S и длиной изгороди l, где:

а) $l = 59$ м, $S = 435$ м^2;
б) $l = 53$ м, $S = 300$ м^2;
в) $l = 72$ м, $S = 648$ м^2;
г) $l = 20$ м, $S = 90$ м^2.

Сравните свои выводы о размерах цветника со следующими.

Решение задачи 2б).

$$l = 53 \text{ м}, \ S = 300 \text{ м}^2;$$

$$-2x^2 + 53x - 300 = 0;$$

$$x_1 = \frac{-53+\sqrt{409}}{-4} = \frac{53-\sqrt{409}}{4}; \ x_2 = \frac{-53-\sqrt{409}}{-4} = \frac{53+\sqrt{409}}{4}.$$

Получилось два варианта цветника (рис. 6, рис. 7)!

Чтобы лучше представить размеры цветника, найдём приближенно его размеры:

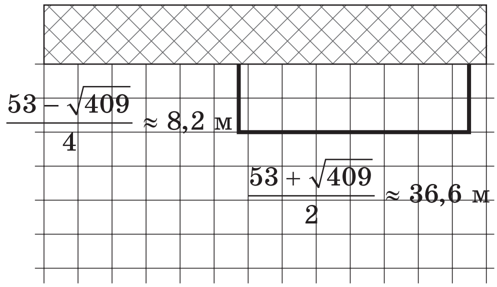


Рис. 6

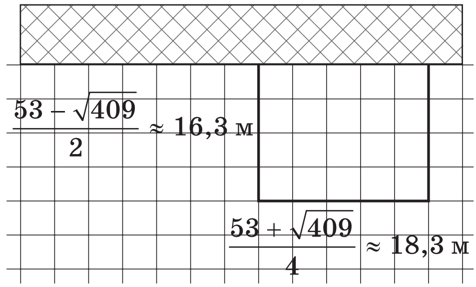


Рис. 7

Ответ: $\frac{53-\sqrt{409}}{4}$ м; $\frac{53+\sqrt{409}}{2}$ м или $\frac{53+\sqrt{409}}{4}$ м; $\frac{53-\sqrt{409}}{2}$ м.

Решение задачи 2в).

$$l = 72 \text{ м}, \ S = 648 \text{ м}^2;$$

$$-2x^2 + 72x - 648 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-72 \pm \sqrt{0}}{-4} = 18;$$

$$x_{1,2} = 18.$$

Квадратное уравнение $-2x^2 + 72x - 648 = 0$ имеет два совпадающих корня. (В таких случаях иногда говорят, что уравнение имеет один корень.)

Получился один цветник (рис. 8).

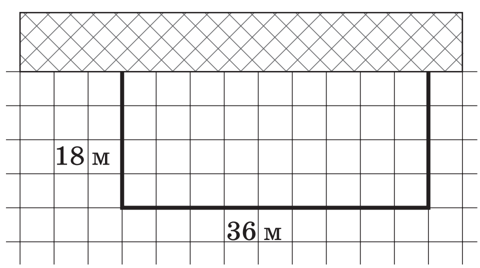


Рис. 8

Ответ: 18 м; 36 м.

Решение задачи 2г).

$$l = 20 \text{ м}, \ S = 90 \text{ м}^2;$$

$$-2x^2 + 20x - 90 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{-320}}{-4}.$$

Подкоренное выражение оказалось отрицательным. Значит, выражение, стоящее в правой части равенства, на множестве действительных чисел не имеет смысла. Уравнение $-2x^2 + 20x - 90 = 0$ не имеет действительных корней, следовательно, разбить на земле такой цветник невозможно.

Подведём итоги решения двух задач. В обеих задачах речь шла об одном и том же — о площади и длинах сторон участков прямоугольной формы.

Задача 1 легко решилась путём составления числового выражения и нахождения его значения. А задача 2, которая является обратной к задаче 1, была решена *с помощью квадратных уравнений.*

Все корни *квадратных уравнений* были найдены по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При этом уравнения имели разное количество корней: *два различных корня, два совпадающих корня, ни одного корня.*

Соответственно, в задаче было получено два цветника, один цветник, ни одного цветника.

ПМЗ 4. Какие вопросы могут возникнуть после решения задач?

Вторая задача про цветник привела к квадратным уравнениям. Можно предположить, что есть и другие задачи, решение которых сводится к решению квадратных уравнений.

Что вам хотелось бы узнать о квадратных уравнениях?

Какие вопросы, связанные с новым видом уравнений, возникают?

Сформулируйте эти вопросы и сравните их со следующими.

- При решении каких задач могут возникнуть квадратные уравнения?
- Как распознать квадратное уравнение?

- Только ли с помощью формулы $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ можно решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$?
- Как самому доказать формулу корней квадратного уравнения $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$?
- Как определить, имеет ли квадратное уравнение корни? И, если имеет, то какие это корни?
- Какова история решения квадратных уравнений?
- Решение каких уравнений можно свести к решению квадратных уравнений?

Задание 1. Посмотрите оглавление этой книги, полистайте книгу. В каких параграфах могут быть ответы на ваши вопросы? Составьте план изучения квадратных уравнений.

Послесловие

Владимир Высоцкий — русский поэт, актёр театра и кино, знаменитый автор-исполнитель песен однажды сказал:

«Среди нехоженых путей
Один — пусть мой,
Среди невзятых рубежей
Один — за мной!»

А что вы предпочитаете в жизни: следовать привычному пути или выбирать свой путь? В том числе и свой собственный путь изучения квадратных уравнений?

Задания после параграфа

А1.

1. Решите задачи:

а) Даны квадрат со стороной x см и прямоугольник со сторонами x см и $(x + 6)$ см. Найдите периметры этих фигур, если сумма их площадей равна 140 см^2.

б) Периметр прямоугольника равен 78 м, а площадь — 358 м^2. Определите длины сторон прямоугольника.

в) При увеличении стороны квадрата на 3 см площадь его увеличивается в 4 раза. Определите первоначальную длину стороны квадрата.

г) Площадь прямоугольника равна 1440 м^2. Как велики его стороны, если одна длиннее другой на 18 м?

2. Составьте задачу, сводящуюся к решению квадратного уравнения.

3. Вернитесь к задаче 2 параграфа. Может ли быть основой для составления уравнения такое условие: «Длина изгороди l равняется 59 м»?

Составьте уравнение для решения задачи. Будет ли оно квадратным?

А2. Поработайте с формулой.

1. Путь S, пройденный телом за время t при равноускоренном движении с ускорением a, вычисляется по формуле $S = \frac{at^2}{2} + \upsilon t + S_0$.

а) Найдите путь S при $t = 5$ с, $a = 10$ м/с^2 , $v = 4$ м/с, $S_0 = 7$ м.

б) За какое время при $a = 10$ м/с^2, $v = 4$ м/с и $S_0 = 7$ м может быть пройден путь длиной 0,547 км?

2. Дана формула $S = x\left(\frac{P}{2} - x\right)$. Верно ли, что эта формула может выражать площадь прямоугольника через длину одной из его сторон (x) и его периметр (P)? Придавая значения каким-либо двум из этих величин, вычислите значение третьей. Всегда ли это можно сделать?

А3. Определите, какие из уравнений а)—в) равносильны уравнению $x^2 + 4x - 5 = 0$:

а) $(x + 4)x = 5$; б) $-\frac{3}{4}x^2 - 3x = -4 + \frac{1}{4}$; в) $2(x + 5)(x - 1) = 20$.

Составьте свои примеры уравнений, равносильных и неравносильных данному квадратному уравнению.

А4. Дан многочлен $x^2 - 2x - 24$.

1. Найдите его значение при: а) $x = 0$; б) $x = -5$; в) $x = 6$.

2. При каких значениях x многочлен

а) обращается в нуль; б) принимает значение, равное 9?

В каком случае, в задании 1 или задании 2, нужно было решить уравнение?

А5. Рассмотрите уравнения:

а) $17x^2 - 34 = 0$;

б) $1,3 - 2(x - 1,5) = \frac{1}{3}(4,2 - 7,5x)$;

в) $\frac{x+4}{x+3} = 1,2$;

г) $\frac{x+4}{3} = \frac{4}{x+3}$;

д) $3\sqrt{x} + 8 = 7 - \sqrt{x}$;

е) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

ж) $x^3 + 7x - 8 = (x-2)^3$;

з) $11x^2 = x^4 + 24$;

и) $14 - 3x - x^2 = 0$.

1. Какие из данных уравнений вы можете решить?
2. Какие из них вы стали бы решать по формуле корней $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$?

Попытайтесь решить их.

Если у вас возникали трудности при выполнении задания, то стоит их выделить (например, «как распознать коэффициенты a, b, c?») и посмотреть, обсуждаются ли эти проблемы в данной книге или в других учебных материалах. Как гласит пословица:

Не бойся первой ошибки, избегай второй.
Если ты споткнулся и упал, это ещё не значит, что ты идёшь не туда.

(*Китайская пословица*)

А6. Поработайте с корнями уравнения.

1. Убедитесь, что числа 2 и 5 являются корнями уравнения $x^2 - 7x + 10 = 0$.
2. Является ли число $\sqrt{2} - 2$ корнем уравнения $x^2 - 4x - 2 = 0$?
3. Проверьте, являются ли корнями уравнения $x^2 - 2x - 2 = 0$ числа $1 + \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{3}$.
4. Являются ли числа $\frac{2}{3}$ и $-0,2$ корнями уравнения $15x^2 - 7x - 2 = 0$?

В7. Докажите, что выражение $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль при:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В8. Решите старинные задачи:

1. Стая обезьян забавлялась. Число обезьян, равное квадрату восьмой их части, бегало в лесу. Остальные двенадцать прыгали на верхушке холма. Сколько было обезьян?

2. Квадрат пятой части обезьян, уменьшенный на семь, спрятался в гроте. Одна обезьяна, влезшая на дерево, была видна. Сколько было обезьян?

(Обе задачи принадлежат Бха́скаре — индийскому математику XII в.)

§2. Распознаем квадратные уравнения

Бди!
Козьма Прутков

В предыдущем параграфе вы встретились с несколькими квадратными уравнениями. Уверены ли вы, что сможете распознать любое квадратное уравнение среди других уравнений?

1. Как установить, что алгебраическое уравнение является квадратным?

Распознавание квадратного уравнения опирается на его определение.

Определение
Уравнение, левая часть которого есть многочлен второй степени относительно одной переменной, а правая — нуль, называется *квадратным уравнением, или уравнением второй степени.*

Если многочлен второй степени записать в стандартном виде по убывающим степеням x, то *квадратное уравнение будет выглядеть так*:

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$$

Числа a, b, c называются *коэффициентами квадратного уравнения.* Именно такой вид мы встретили в справочнике.

Потренируемся в распознавании квадратных уравнений.

Задание 1. Приведите уравнения к равносильным, в которых в левой части равенства многочлен, а в правой — нуль. В один столбик выпишите квадратные уравнения, в другой — неквадратные:

а) $2x = 3x^2 + 5$;

б) $7x^2 = 1$;

в) $6x = -x^2$;

г) $9x^2 + 0 \cdot x + 3 = 0$;

д) $5x^2 + 8x + 7 = 5x^2$;

е) $4x^2 - x^3 + 6 = 0$;

ж) $a^4x^2 = 7x$ (a — некоторое заданное число);

з) $(2x - 0,3)(10 + x) = 0$;

и) $5x^4 - 2x^2 - 3 = 0$;

к) $x + x - 14 = 0$;

л) $(2x - 0,3)(10 + x) = 100$.

Допишите в каждый столбик по два соответствующих уравнения.

Пример. Рассмотрим уравнение з) $(2x - 0{,}3)(10 + x) = 0$.

В левой части уравнения стоит произведение многочленов.
Выполним умножение:

$$20x - 0{,}3x + 2x^2 - 3 = 0.$$

Приведём подобные слагаемые:

$$19{,}7x + 2x^2 - 3 = 0.$$

Запишем многочлен в стандартном виде

$$2x^2 + 19{,}7x - 3 = 0.$$

Получилось уравнение, в котором слева многочлен второй степени, справа — нуль. Значит, по определению, это уравнение является квадратным.

2. Какими могут быть коэффициенты квадратного уравнения?

Квадратное уравнение — это уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ в котором } a \neq 0.$$

Коэффициенты квадратного уравнения называются так:
a — *первый* (*старший*) коэффициент, он стоит при x^2;
b — *второй* (*средний*) коэффициент, он стоит при x;
c — *третий* коэффициент, или *свободный член уравнения.*
Как вы объясните условие $a \neq 0$?
Почему, на ваш взгляд, коэффициент c называют свободным членом?

Потренируемся в определении коэффициентов квадратного уравнения.

Пример.

Рассмотрим уравнение $-2x^2 - 5 = 0$.

Представим его в виде $ax^2 + bx + c = 0$:

$$-2x^2 + 0 \cdot x - 5 = 0.$$

Теперь запишем коэффициенты:

$$a = -2,\ b = 0,\ c = -5.$$

Задание 2. Приведите следующие уравнения к виду $ax^2 + bx + c = 0$ и запишите, чему равны коэффициенты a, b, c в каждом случае.

а) $6x^2 - 13 = 0$;

б) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 4 = 0$;

в) $4\frac{3}{7}x^2 + 5x - 7 = 0$;

г) $(x-5)^2 - 25 = 0$;

д) $(20 - x)x = 96$;

е) $x^2 + px + q = 0$;

ж) $-3x^2 + \sqrt{5}x = 0$;

з) $-x^2 + 3x - 14 = 0$;

и) $(5 + x)(x - 4) = 7$;

к) $8x^2 = 4x$.

Решите полученные квадратные уравнения.

Пример. Приведём уравнение $5x^2 = 14x - 8$ к виду $ax^2 + bx + c = 0$:

$$5x^2 - 14x + 8 = 0.$$

Выпишем коэффициенты уравнения:

$$a = 5,\ b = -14,\ c = 8.$$

Так как $a \neq 0$, то уравнение является квадратным.
Подставим эти коэффициенты в формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Вычислим корни:

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8}}{2 \cdot 5};$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 160}}{2 \cdot 5};$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{10};$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm 6}{10};$$

$$x_1 = \frac{14 + 6}{10} \text{ или } x_2 = \frac{14 - 6}{10};$$

$$x_1 = 2 \text{ или } x_2 = 0{,}8.$$

Ответ: 2; 0,8.

ПМ4 **Задание 3.** Составьте квадратное уравнение, в котором:

а) все коэффициенты — натуральные числа;

б) все коэффициенты — целые числа;

в) все коэффициенты — действительные числа;

г) свободный член равен 5, первый коэффициент равен 1, а второй равен 7;

д) $a = b = c = 12{,}3$;

е) коэффициент при x^2 равен -1;

ж) второй коэффициент равен $\sqrt{3} + 4$;

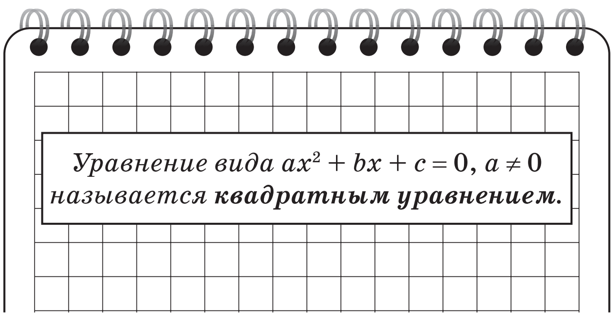
з) $b = 0$, $c = 0$;

и) $a = 4$, $b = -5$, $c = 1$.

Решите одно из составленных вами уравнений.

Задание 4. В данном параграфе есть вопросы, которые делят текст на логические части и выделяют существенную информацию. Ответьте на эти вопросы своими словами или подчеркните в тексте ключевые слова и составьте из них ответы.

Задание 5. Заведите себе блокнот, на страничках которого будете записывать полезную информацию о квадратных уравнениях. Создайте страничку, посвящённую определению квадратного уравнения. Сравните её, например, с такой:



Послесловие

Решение конкретной задачи предполагает умение распознавать объекты, о которых в ней идет речь.

Распознать — это значит, ответить на вопрос, принадлежит ли рассматриваемый объект тому или иному множеству объектов, напри-

мер, множеству квадратных уравнений. Образно говоря, ответить на вопрос «Свой или чужой?» Во многих случаях ответить на этот вопрос помогает определение объекта.

Древнегреческий философ Сократ считал, что «определение помогает родиться истине в споре». Как вы понимаете это высказывание?

Задания после параграфа

А9. Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$:

а) $-x^2 - x = 12$;

б) $0,2x^2 + 0,2x = 0$;

в) $(x+5)^2 = (3-2x)^2$;

г) $x(x+5) = 5$;

д) $(x-2)^2 = x+1$;

е) $-5x^2 - 5 - 2,5x = -27,5x$;

ж) $\frac{1}{3}x^2 = 0,5 - \frac{5}{6}x$;

з) $-5 + x = x^2$;

и) $4x(1-x) = x^2 - 5x - 2$;

к) $(x-3)(x+3) = 9$;

л) $(2x-1)^2 + 4x = 1$.

1. Какие преобразования нужно было выполнить в каждом случае:
   - раскрытие скобок;
   - перенос слагаемых из одной части уравнения в другую;
   - приведение подобных слагаемых?
2. Назовите коэффициенты полученного уравнения.
3. Решите уравнения, в которых коэффициент a равен 1.

А10. Заполните пропуски в таблице.

Уравнение	Корни уравнения
$3x^2 - 6x - 9 = 0$	$x_{1,2} = \frac{\ldots \pm \sqrt{36 + \ldots}}{6}$
$\ldots x^2 + \ldots x - 2 = 0$	$x_{1,2} = \frac{0,5 \pm \sqrt{\ldots + 8}}{2}$
$\ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$	$x_{1,2} = \frac{\ldots \pm \sqrt{36 - 36}}{\ldots}$

$x^2 + 4x + \ldots = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{\ldots \pm \sqrt{\ldots - 12}}{\ldots}$
$\ldots x^2 - 2x - 1 = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{\ldots \pm \sqrt{\ldots + 12}}{\ldots}$

Все ли пропуски удалось заполнить единственным образом?

А11. Используя в качестве коэффициентов только числа 1, 2, –3, запишите всевозможные квадратные уравнения, в каждом из которых все коэффициенты различны. У вас получится 6 уравнений. Решите любые два из них.

А12. Какие из уравнений вы можете решить по формуле корней квадратного уравнения:

а) $5x^2 - 8x + 3 = 0$;

б) $\left(x^2 - 1\right)x = x^2 + 12$;

в) $x^2 = 2x + 3$;

г) $\dfrac{3x^2 - 5}{3} - \dfrac{5x^2 - 4x}{2} + \dfrac{5}{3} = 0$;

д) $3x^2 + 3x^4 = 0$;

е) $12x(x - 1) = 12x^2 + 5$;

ж) $25x^2 = \dfrac{1}{16x}$.

Решите одно из уравнений с помощью формулы корней квадратного уравнения.

В13. Даны уравнения:

а) $15x^2 = 14x - 8$;

б) $-6x + x^2 = 0$;

в) $3x^2 + 2 - 5{,}3x = 0$;

г) $\dfrac{1}{2} = 6x^2 - \dfrac{3}{8}x$;

д) $8{,}73x^2 = 0$;

е) $(2x - 7) \cdot 5x = 35 + 10x^2$;

ж) $x^2 - 1 = (x - 1)(x - 2)$;

з) $\dfrac{5x^2}{6} = \dfrac{6}{125}$;

и) $(5 - x)^2 = x\left(25 - x^2\right)$.

1. Приведите уравнения к виду $P(x)=0$, где $P(x)$ — некоторый многочлен относительно x. Многочлены какой степени получились в уравнениях?

2. Те уравнения, которые оказались квадратными, разбейте на три группы так, чтобы:

в группе I в левой части уравнения был трёхчлен второй степени;

в группе II — двучлен второй степени;

в группе III — одночлен второй степени.

Какие значения принимают коэффициенты квадратных уравнений в каждой группе?

ОГЛАВЛЕНИЕ