Informatique Fondamentale: prédicats primitifs récursifs

Plan Chapitre - Prédicats récursifs

1. Les prédicats primitifs récursifs

Prédicats

- Un prédicat est une fonction dont les valeurs sont prises dans $\{vrai, faux\}$
- L'ensemble des prédicats sur les naturels est:

$$\{\mathbb{N}^k \rightarrow \{vrai, faux\} | k \geq 0\}$$

- Un prédicat sur $\mathbb{N}^k$ peut être défini par un sous-ensemble de $\mathbb{N}^k$.
- Définition: un prédicat P à k arguments est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^k$, i.e., les éléments de $\mathbb{N}^k$ pour lesquels P est vrai.

- Exemples:
  - Le prédicat $pair(n)$ est vrai si n est pair, faux sinon. Il correspond aux naturels pairs.
  - Le prédicat $n < m$ est vrai si n est inférieur à m. Il correspond au sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ contenant toutes les paires (n, m) avec $n < m$.

Les prédicats primitifs récursifs

- Définition: la fonction caractéristique d'un predicat $P \subseteq \mathbb{N}^k$ est la fonction $f : \mathbb{N}^k \to \{0, 1\}$ telle que:

$$\begin{array}{rcl} f(\bar{n}) & = & 0 \;\; si \;\; \bar{n} \notin P \\ f(\bar{n}) & = & 1 \;\; si \;\; \bar{n} \in P \end{array}$$

- "codage" qui permet de traiter les prédicats comme des fonctions: 0 est faux, 1 est vrai.
- Définition: Un prédicat est primitif récursif si sa fonction caractéristique est primitive récursive.

Exemples

- le prédicat *zero* (vrai uniquement pour l'entier 0) est primitif récursif car sa fonction caractéristique *zeroc* est définie par récursion primitive:

$$\begin{array}{lcl} zeroc(0) & = & 1 \\ zeroc(n+1) & = & 0 \end{array}$$

- Le prédicat *plus_petit* $(n < m)$ est récursif primitif car sa fonction caractéristique est:

$$plus\_petitc(n, m) \quad = \quad sg(m - n)$$

Exemples

- Les prédicats issus de prédicats primitifs récursifs par opérations booléennes sont primitifs récursifs.
  Soient $g_1(\bar{n})$ et $g_2(\bar{n})$ les fonctions caractéristiques de 2 prédicats primitifs récursifs g_1 et g_2:

$$\begin{array}{rcl} et(g_1(\bar{n}), g_2(\bar{n})) & = & g_1(\bar{n}) \times g_2(\bar{n}) \\ ou(g_1(\bar{n}), g_2(\bar{n})) & = & sg(g_1(\bar{n}) + g_2(\bar{n})) \\ non(g_1(\bar{n})) & = & 1 - g_1(\bar{n}) \end{array}$$

- Le prédicat d'égalité $(n = m)$ est récursif primitif. $n = m$ si $\neg(n < m \vee m < n)$ et donc en fonction caractéristique:

$$egal(n, m) \;=\; 1 - sg(sg(n - m) + sg(m - n))$$

- de manière similaire, on peut définir que $\leq, \geq, \neq, \ldots$ sont primitifs récursifs.

Exemples

- Quantification bornée universelle (p est vrai pour tout $i \leq m$):

$$\forall i \leq m \;\; p(\bar{n}, i)$$

- Quantification bornée existentielle (p vrai pour au moins un $i \leq m$):

$$\exists i \leq m \;\; p(\bar{n}, i)$$

- si p est primitif récursif, alors $\forall i \leq m \;\; p(\bar{n}, i)$ et $\exists i \leq m \;\; p(\bar{n}, i)$ sont aussi primitifs récursifs
- fonction caractéristique de $\forall i \leq m \;\; p(\bar{n}, i)$
(vaut 1 si $p(\bar{n}, i) = 1$ pour tout $i \leq m$):

$$\Pi_{i=0}^{m} p(\bar{n}, i)$$

- fonction caractéristique de $\exists i \leq m \;\; p(\bar{n}, i)$
(obtenue par $\exists x \;\; p(x)$ si et seulement si $\neg \forall x \neg p(x)$):

$$1 - \Pi_{i=0}^{m}(1 - p(\bar{n}, i))$$

Exemples: Définition par cas

- Définition par cas:

$$
\begin{array}{ccc}
f(\bar{n}) & = & g_1(\bar{n}) \ si \ p_1(\bar{n}) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f(\bar{n}) & = & g_l(\bar{n}) \ si \ p_l(\bar{n})
\end{array}
$$

avec g_i et p_j primitifs récursifs.
$f(\bar{n})$ est alors primitive récursive et est donnée par:

$$f(\bar{n}) = g_1(\bar{n}) \times p_1(\bar{n}) + \ldots + g_l(\bar{n}) \times p_l(\bar{n})$$

Note: les p_i doivent être mutuels exclusifs (obligé pour définition non ambigue de f)

Exemples: Minimisation bornée

$$\begin{aligned} \mu i \leq m\ q(\bar{n}, i) &= \text{le plus petit } i \leq m \text{ tel que } q(\bar{n}, i) = 1 \\ \mu i \leq m\ q(\bar{n}, i) &= 0 \text{ s'il n'existe pas de tel } i \end{aligned}$$

Si q est primitif récursif, $\mu i \leq m$ l'est aussi (par récursion primitive sur m):

$$\begin{array}{lcll} \mu i \leq 0\ q(\bar{n}, i) & = & 0 & \\ \mu i \leq m+1\ q(\bar{n}, i) & = & 0 & \text{si } \neg\exists i \leq m+1\ q(\bar{n}, i) \\ \mu i \leq m+1\ q(\bar{n}, i) & = & \mu i \leq m\ q(\bar{n}, i) & \text{si } \exists i \leq m\ q(\bar{n}, i) \\ \mu i \leq m+1\ q(\bar{n}, i) & = & m+1 & \text{si } q(\bar{n}, m+1) \text{ et } \neg\exists i \leq m\ q(\bar{n}, i) \end{array}$$

ou

$$\mu i \leq m\ q(\bar{n}, i) = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=0}^{k} (1 - q(\bar{n}, i))$$