Systèmes de Réductions abstraites

Réductions abstraites

1. notations et terminologie sur les relations et règles
2. notions de confluence
3. concepts de réduction

Rappels sur les relations

Si R et T sont deux relations binaires sur A notées de façon infixée (c-à-d, $x\ R\ y$). On définit

- $x\ R\ T\ y$ ssi il existe z tel que $x\ R\ z$ et $z\ T\ y$.
- R^n par $R^0 = \{(x, x) \mid x \in A\}$ et $R^{n+1} = R\, R^n$ (donc $R^1 = R$).
- $R \subseteq T$ ssi $x\ R\ y$ implique $x\ T\ y$.
- $x\ (R \bigcup T)\ y$ ssi $x\ R\ y$ ou $x\ T\ y$.

Rappels sur les relations

Une relation est transitive si $x \; R \; y$ et $y \; R \; z$ impliquent $x \; R \; z$.

La fermeture transitive de R est la plus petite relation transitive qui contient R. Elle est notée R^+.

Souvent la relation R est notée $\xrightarrow[R]{}$.

- R^{-1} est la relation converse $\{(y,x) \in A \times A | (x,y) \in R\}$, aussi notée $\xleftarrow[E]{}$.
- $\xrightarrow[R]{+}$ est la clôture transitive de $\xrightarrow[R]{}$,
- $\xrightarrow[R]{\star}$ est la clôture réflexive et transitive de $\xrightarrow[R]{}$,

Terminologie

- si $a \underset{R}{\longrightarrow} b$, on dit que a **se contracte** en b par R
- si $a \overset{\star}{\underset{R}{\longrightarrow}} b$, on dit que a **se réduit** en b par R

Rappels sur les relations

- $\underset{R}{\longleftrightarrow}$ est la clôture symétrique, c'est la relation $\underset{R}{\longrightarrow} \cup \underset{E}{\longleftarrow}$.
- $\overset{\star}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ est la clôture réflexive, symétrique et transitive de $\underset{R}{\longrightarrow}$. C'est aussi la clôture réflexive et transitive de $\underset{R}{\longleftrightarrow}$.
- $\overset{+}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ est la clôture symétrique et transitive de $\underset{R}{\longrightarrow}$ .C'est aussi la clôture transitive de $\underset{R}{\longleftrightarrow}$.
- $\overset{=}{\underset{R}{\longrightarrow}}$ est la clôture réflexive, c'est la relation $\underset{R}{\longrightarrow} \cup \overset{0}{\underset{R}{\longrightarrow}}$ sachant que $\overset{0}{\underset{R}{\longrightarrow}}$ est l'égalité

Confluence

Definition

Une relation R sur A est confluente si

$$(\forall M, N_1, N_2 \in A) M \xrightarrow[R]{\star} N_1 \;\&\; M \xrightarrow[R]{\star} N_2$$
$$\Longrightarrow$$
$$(\exists P \in A) N_1 \xrightarrow[R]{\star} P \;\&\; N_2 \xrightarrow[R]{\star} P$$

autrement dit

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "*"', "R"] \arrow[dr, "*", "R"'] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, "*", "R"'] & & N_2 \arrow[dl, "*"', "R"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Semi-confluence

Definition

Une relation R sur A est semi-confluente si

$$(\forall M, N_1, N_2 \in A) \quad M \xrightarrow[R]{} N_1 \;\&\; M \xrightarrow[R]{\star} N_2$$
$$\Longrightarrow$$
$$(\exists P \in A) \quad N_1 \xrightarrow[R]{\star} P \;\&\; N_2 \xrightarrow[R]{\star} P$$

autrement dit

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R", "*"'] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, "*", "R"'] & & N_2 \arrow[dl, "*"', "R"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Confluence locale

Definition

Une relation R sur A est localement confluente si

$$(\forall M, N_1, N_2 \in A) \quad M \xrightarrow[R]{} N_1 \ \& \ M \xrightarrow[R]{} N_2$$
$$\Longrightarrow$$
$$(\exists P \in A) \quad N_1 \xrightarrow[R]{\star} P \ \& \ N_2 \xrightarrow[R]{\star} P$$

autrement dit

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, "R"', "*"] & & N_2 \arrow[dl, "R", "*"'] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Paire joignable

Definition

Une paire de terme (N_1, N_2) est joignable, notée $N_1 \downarrow N_2$ si

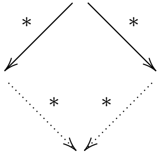
$$(\exists P \in A) \;\; N_1 \xrightarrow[R]{\star} P \;\&\; N_2 \xrightarrow[R]{\star} P$$

d'où

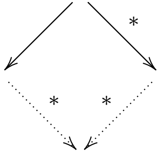
- confluence: $M \xrightarrow[R]{\star} N_1 \;\&\; M \xrightarrow[R]{\star} N_2 \quad \Longrightarrow \quad N_1 \downarrow N_2,$
- semi-confluence: $M \xrightarrow[R]{} N_1 \;\&\; M \xrightarrow[R]{\star} N_2 \quad \Longrightarrow \quad N_1 \downarrow N_2.$
- confluence locale: $M \xrightarrow[R]{} N_1 \;\&\; M \xrightarrow[R]{} N_2 \quad \Longrightarrow \quad N_1 \downarrow N_2,$

Diagrammes

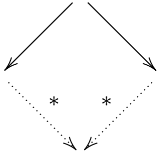
confluence



semi-confluence



confluence locale



$\overset{*}{\dashrightarrow}$ est un flèche existentielle.

Terminaison

Definition

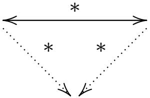
Une relation R termine ou est noethérienne ssi il n'existe pas de suite infinie $x_0 \underset{R}{\longrightarrow} x_1 \underset{R}{\longrightarrow} \ldots x_n \underset{R}{\longrightarrow} x_{n+1} \ldots$

Definition

Une relation est convergente si elle termine et est confluente

Propriété de Church Rosser

$$N_1 \xleftrightarrow[R]{\star} N_2 \quad \Longrightarrow \quad N_1 \downarrow N_2$$



Si la relation termine, les conditions suivantes sont équivalentes

- R est confluente,
- R est semi-confluente,
- R a la propriété de Church-Rosser

Propriété de Church Rosser

Church-Rosser $\Longrightarrow$ confluence $\Longrightarrow$ semi-confluence est facile!

Semi-confluence $\Longrightarrow$ Church-Rosser

Par induction sur la longueur de $\overset{\star}{\longleftrightarrow}$.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"] & & {} \arrow[dl, dotted, "*"'] \\ & {} & \end{tikzcd}$$

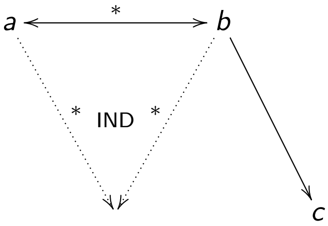
Propriété de Church Rosser

$$
\begin{tikzcd}
 & & & c \arrow[dl] \\
a \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[ddr, dotted, "*"] & & b \arrow[ddl, dotted, "*"'] & \\
 & \text{IND} & & \\
 & {} & &
\end{tikzcd}
$$

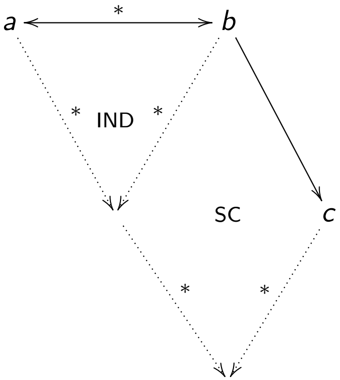
Propriété de Church Rosser

$$
\begin{tikzcd}
 & & & c \arrow[dl] \arrow[ddll, dotted, bend left, "*"] \\
a \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"'] & {} \arrow[d, phantom, "\mathrm{IND}"] & b \arrow[dl, dotted, "*"] & \\
 & {} & &
\end{tikzcd}
$$

Propriété de Church Rosser



Propriété de Church Rosser



Réductibilité - Forme normale

A partir de maintenant on laisse tomber les R s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Definition

- x est réductible ssi il existe un y tel que $x \longrightarrow y$,
- x est irréductible ssi x n'est pas réductible,
- y est une forme normale de x ssi $x \stackrel{\star}{\longrightarrow} y$ et y est irréductible. Si la forme normale est déterminée de façon unique on la note $x\downarrow$.

Definition

Une relation est normalisante si toute élément a une forme normale.

Quelques remarques

- Si $\longrightarrow$ est confluente, chaque élément a au plus une forme normale.
- Si $\longrightarrow$ est confluente et normalisante, chaque élément a une forme normale unique.

Preuve d'égalité par normalisation

Propriéte

Si $\longrightarrow$ *est confluente et normalisante, alors*
$x \overset{\star}{\longleftrightarrow} y \quad \Leftrightarrow \quad x\downarrow = y\downarrow$

Y a-t-il un moyen simple

1. de calculer ces formes normales?
2. de savoir si une relation est normalisante?

Induction noethérienne

$$(\mathcal{IN})\frac{(\forall x \in A)\ \ ((\forall y \in A)\ x \longrightarrow y \Longrightarrow P(y))\ \ \Longrightarrow\ \ P(x)}{(\forall a \in A)P(a)}$$

(IN) est satisfaite sur A si et seulement si $\longrightarrow$ termine.

Vocabulaire

Definition

- Une relation est à branchement fini ssi pour tout x il n'y a qu'un nombre fini de y tels que $x \longrightarrow y$.
- Une relation est globalement finie ssi pour tout x il n'y a qu'un nombre fini de y tels que $x \xrightarrow{+} y$.
- Une relation est acyclique ssi il n'y a pas d'élément a tel que $a \xrightarrow{+} a$.

Propriété

Proposition

Une relation à branchement fini est globalement finie si elle termine

Nous devons prouver

$$\text{branchement fini} + \text{termine} \\ \Longrightarrow \\ \text{globalement fini}$$

Propriété

Par induction noethérienne.

Soit $SD(a) = \{x \in A | a \longrightarrow x\}$.

Soit $S(a) = \{x \in A | a \xrightarrow{+} x\}$.

Nous devons prouver ≪$(\forall a \in A)$ $S(a)$ est fini≫.

Pour le faire par induction noethérienne, nous devons prouver que

≪Pour tout b tel $a \longrightarrow b$ on a $S(b)$ est fini≫

implique

≪$S(a)$ est fini≫.

Propriété

Or

$$S(a) = SD(a) \cup \bigcup_{b \in SD(a)} S(b)$$

Donc $S(a)$ qui est une réunion finie d'ensembles finis est finie.
En application de (IN), ≪$(\forall a \in A)\ S(a)$ est fini≫.

Propriété

Proposition

Une relation acyclique termine si elle est globalement finie.

Nous devons prouver

$$\text{acyclique} + \text{globalement fini} \\ \Longrightarrow \\ \text{termine}$$

Propriété

Soit $\longrightarrow$ une relation acyclique.

Si elle ne termine pas, alors il existe une suite $x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \ldots x_n \longrightarrow x_{n+1} \ldots$

Puisque la relation est acyclique, les éléments sont tous différents.

Donc $S(x_0)$ est infini et la relation n'est pas globalement finie.

Lemme de Koenig

Propriéte

Soient $(A, \longrightarrow)$ *une relation acyclique et à branchement fini et* $a \in A$ $S(a)$ *est infini si et seulement si il existe un chemin infini* $a \longrightarrow a_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_n \longrightarrow a_{n+1} \longrightarrow \ldots$ *qui part de a.*

Lemme de Koenig (deuxième formulation)

Propriéte

Soient $\longrightarrow$ une relation acyclique et à branchement fini $\longrightarrow$ est globalement finie si et seulement si $\longrightarrow$ termine.

Comment prouver la terminaison ?

Les fonctions croissantes

Soit $(A, \longrightarrow)$, on connaît $(B, >)$ est noethérien et $\phi : A \mapsto B$ telle que $x \longrightarrow y$ implique $\phi(x) > \phi(y)$.

Le plus souvent on prend $(\mathbb{N}, >)$.

Une relation à branchement fini termine si et seulement si elle est plongeable dans $\mathbb{N}$

Composition lexicographique de deux ordres

Soient deux ordres $(A_1, >_1)$ et $(A_2, >_2)$.

On définit l'ordre $>_1 \times_{lex} >_2$ sur $A_1 \times A_2$, par
$(a_1, a_2) \quad >_1 \times_{lex} >_2 \quad (b_1, b_2)$ ssi

- $a_1 >_1 b_1$
- ou $a_1 =_1 b_1$ et $a_2 >_2 b_2$.

Proposition

Si $>_1$ et $>_2$ terminent alors $>_1 \times_{lex} >_2$ termine.

Composition lexicographique de n ordres

Soient $(A_n, >_n), ..., (A_1, >_1), (A_0, >_0)$ des ordres.

Soit $\mathbf{A}_{n+1} = A_{n+1} \times \mathbf{A}_n$ et $\mathbf{A}_0 = A_0$.

On définit l'ordre $>_n^{lex}$ sur $\mathbf{A}_n$ ainsi:

- $>_0^{lex}$ est $>_0$,
- Si $(x, \mathbf{x}), (y, \mathbf{y}) \in A_{n+1} \times \mathbf{A}_n$, alors $(x, \mathbf{x}) >_{n+1}^{lex} (y, \mathbf{y})$ ssi
  - $x >_{n+1} y$,
  - ou $x = y$ et $\mathbf{x} >_n^{lex} \mathbf{y}$.

Si les ordres $(A_n, >_n), ..., (A_1, >_1), (A_0, >_0)$ terminent alors $(\mathbf{A}_n, >_n^{lex})$ termine

Ordres stricts et lexicographie

Definition

Un ordre strict est une relation transitive, et irréflexive (et a fortiori antisymétrique)

Proposition

Si les ordres $(A_n, >_n), \ldots, (A_1, >_1), (A_0, >_0)$ *sont stricts alors* $(\mathbf{A}_n, >_n^{lex})$ *est strict.*

Attention à la lexicographie !

La composition lexicographique se fait sur des relations et peut donner des résultats surprenants.

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\geq_{\mathbb{N}} \times_{lex} \geq_{\mathbb{N}} \ \equiv \ \geq_{\mathbb{N}} \times_{lex} \mathbf{U}$
où $\mathbf{U}$ est la relation universelle $\{(x, y) | x \in \mathbb{N} \ \& \ y \in \mathbb{N}\}$.

Pour tous m, n, p, on a donc $(m, n) \geq_{\mathbb{N}} \times_{lex} \geq_{\mathbb{N}} (m, p)$.

Produit lexicographique d'ordres

Pour définir le produit lexicographique d'ordres on définit

1. le produit lexicographique de leur partie stricte (la partie stricte de $\geq$ est l'ordre défini par $x > y$ ssi $x \geq y \& x \neq y$),
2. la clôture réflexive de ce produit,

ou encore directement

$$(x, y) \geq_{A \times B} (x', y') \qquad \text{ssi} \qquad (x >_A x') \vee (x = x' \ \& \ y \geq_B y').$$

Multiensemble

Definition

Un multiensemble M sur A est une fonction $M : A \to \mathbb{N}$.

Intuitivement: on peut s'imaginer qu'il s'agit d'≪ensembles≫ où la répétition d'éléments est autorisée, $M(x)$ est le nombre de répétitions de x dans M.

Un multiensemble est fini si $\{x \in A | M(x) \neq 0\}$ est fini.

$\mathcal{M}(A)$ est l'ensemble des multiensembles finis sur A.

La notation standard est $\{a, a, b\}$, pour $\{a \mapsto 2, b \mapsto 1, c \mapsto 0\}$.

Opérations sur les multiensembles

- $x \in M$ ssi $M(X) > 0$
- $M \supseteq N$ ssi $(\forall x \in A) M(x) \geq N(x)$
- $(M \cup N)(x) = M(x) + N(x)$
- $(M - N)(x) = M(x) \dot{-} N(x)$ où $m \dot{-} n = max(m - n, 0)$.

Ordre multiensemble

Definition

Soit $>$ un ordre strict sur A. L'extension multiensemble $>_{mult} sur$M(A) est définie par

$M >_{mult} N$ ssi il existe X et Y tels que

- $\varnothing \neq X \subseteq M$ et
- $N = (M - X) \cup Y$ et
- $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)x > y$

Propriété de l'ordre multiensemble

- Si $>$ est strict, alors $>_{mult}$ est strict.
- irréflexivité
- transitivité
- Si $>_{mult}$ termine, alors $>$ termine.

Propriété de l'ordre multiensemble

Si $>_{mult}$ sur $\mathcal{M}(A)$ termine, alors $>$ sur A termine.

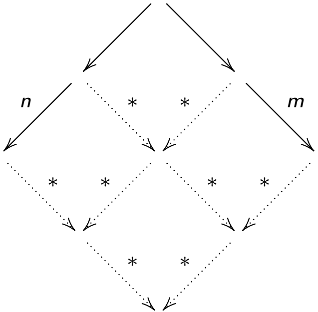
Puisque A est plongé dans $\mathcal{M}(A)$ par $a \mapsto \{a\}$, clairement la terminaison sur $\mathcal{M}(A)$ implique celle sur A.

Prouver la confluence

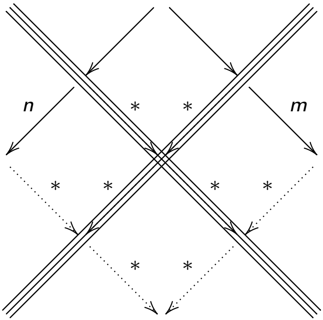
Lemme de confluence locale

Si une relation est localement confluente, alors elle est confluente.

Lemme de confluence locale



Lemme de confluence locale



L'induction sur m et n ne fonctionne pas.
Donc **FAUX**, pas de lemme de confluence locale sans terminaison

Le lemme de Newman

Si une relation termine et est localement confluente, alors elle est confluente.

La terminaison est importante

Les deux relations suivantes sont localement confluentes, mais non confluente.

Une relation globalement finie, localement confluente et non confluente

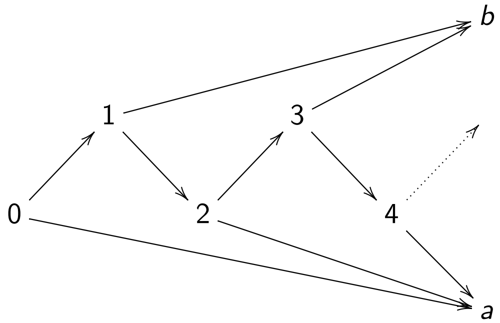
$$\begin{tikzcd} a & b \arrow[l] \arrow[r, bend left] & c \arrow[l, bend left] \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

Le lemme de Newman

La terminaison est importante

Une relation acyclique, localement confluente et non confluente

Soit la relation sur $\mathbb{N} \cup \{a, b\}$ définie par:
$n \longrightarrow n + 1$
Si n est pair, $n \longrightarrow a$.
Si n est impair, $n \longrightarrow b$.



Preuve du lemme de Newman

Si une relation termine et est localement confluente, alors elle est confluente.

$$P(x) = (\forall y, z) y \xleftarrow{*} x \xrightarrow{\star} z \implies y \downarrow z.$$

La confluence c'est $(\forall x) P(x)$.

Preuve du lemme de Newman

On peut supposer sans nuire à la généralité que $x \xrightarrow{\star} y$ et $x \xrightarrow{\star} z$, prennent chacun au moins une étape de réduction

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "CL"] & z_1 \arrow[r, "*"] \arrow[d, dotted, "*"] \arrow[ddr, phantom, "Ind"] & z \arrow[dd, dotted, "*"] \\
y_1 \arrow[r, dotted, "*"] \arrow[d, "*"] \arrow[dr, phantom, "Ind"] & u \arrow[d, dotted, "*"] & \\
y \arrow[r, dotted, "*"] & v \arrow[r, dotted, "*"] & w
\end{tikzcd}
$$

Forte confluence

Definition

Une relation est fortement confluente ssi

$$y_1 \longleftarrow x \longrightarrow y_2 \qquad \Longrightarrow \qquad (\exists z) y_1 \xrightarrow{\star} z \xleftarrow{=} y_2 .$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y_1 \arrow[dr, dotted, "*"] & & y_2 \arrow[dl, dotted] \\ & z & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y_1 \arrow[rr, dotted, "*"] & & y_2 \end{tikzcd}$$

Forte confluence

On prouve que si une relation est fortement confluence alors elle est semi-confluente.
On fait une récurrence sur la longueur de la branche $\xrightarrow{\star}$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathsf{FC}"] & {} \arrow[r, "*"] \arrow[d, dotted, "="] & {} \\
{} \arrow[r, dotted, "*"] & {}
\end{tikzcd}$$

Forte confluence

Deux cas:

Cas $\xrightarrow{=} = \longrightarrow$.

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{FC}"] & \cdot \arrow[r, "*"] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IND}"] & \cdot \arrow[d, dotted, "*"] \\
\cdot \arrow[r, dotted, "*"] & \cdot \arrow[r, dotted, "*"] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

Cas $\xrightarrow{=} = \xrightarrow{0}$.

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{FC}"] & \cdot \arrow[r, "*"] & \cdot \\
\cdot \arrow[ur, dotted, "*"] & &
\end{tikzcd}
$$

Bilan

Nous savons à présent caractériser et construire des termes pour proposer une syntaxe

Nous savons également caractériser un processus par itération d'opérateur sur une structure par le calcul d'un point fixe

Nous pouvons également décrire des systèmes de règles entre termes