Introduction à la réécriture

Qu'est-ce que la récriture

La récriture est la théorie de la simplification qui sert

- en *calcul symbolique*,
- en *sémantique*, la valeur d'une expression est son résultat par évaluation, (il y a des liens avec la lambda calcul),
- en *démonstration automatique*, (il faut ≪simplifier≫)

Exemple 1 et 2

Un exemple de réécriture:

- $(4+3).(x+1) \longrightarrow 7.(x+1) \longrightarrow 7.x+7$
- $(4+3).(x+1) \longrightarrow (4+3).x+(4+3).1 \longrightarrow 7.x+7$

Un système:

- $S \longrightarrow aB|\epsilon$
- $B \longrightarrow bB|cC$
- $C \longrightarrow cC|c$

Le groupes

Considérons les trois équations de l'axiomatique faible des groupes, on note $*$ le produit, e l'élément neutre et $\overline{x}$ l'inverse de x.

$$\begin{aligned} x * e &= x && (1) \\ x * \overline{x} &= e && (2) \\ (x * y) * z &= x * (y * z) && (3) \end{aligned}$$

On veut prouver que $x = e * x$, c'est-à-dire qu'≪un élément neutre à droite est aussi un élément neutre à gauche !≫.

Pour s'y retrouver on utilise les des ≪flèches≫, pour orienter les équations (simplification?).

$$
\begin{align}
x * e &\longrightarrow x \tag{4}\\
x * \overline{x} &\longrightarrow e \tag{5}\\
(x * y) * z &\longrightarrow x * (y * z) \tag{6}
\end{align}
$$

Preuve de $x = e * x$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & e * (x * (\overline{x} * \overline{\overline{x}})) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & (x * \overline{x}) * \overline{\overline{x}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & (e * e) * \overline{\overline{x}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & e * ((x * \overline{x}) * \overline{\overline{x}}) \arrow[dl] & & e * (x * e) \arrow[d] \\
x * (\overline{x} * \overline{\overline{x}}) \arrow[d] & & e * \overline{\overline{x}} & & e * (e * \overline{\overline{x}}) & & & e * x \\
x * e \arrow[d] & & & & & & & \\
x & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Des questions

- Comment peut-on automatiser ce processus de démonstration?
- Autre question:
  - $e * (x * (\overline{x} * \overline{\overline{x}}))$
  - ou $(e * e) * \overline{\overline{x}}$
  - ou $(x * \overline{x}) * \overline{\overline{x}}$

  se récrivent de plusieurs manières, ils posent un problème pour un simplifieur. Est-on sûr que $e * (x * (\overline{x} * \overline{\overline{x}})) \longrightarrow e * ((x * \overline{x}) * \overline{\overline{x}})$ simplifie quelque chose ?

Encore des questions

Des termes comme comme

- Y a-t-il une seule forme simplifiée?
- Comment orienter les équations ?
- Les processus de simplification se termine-t-il?
- Comment le démontre-t-on?
- Sait-on résoudre les équations dans les termes?
- Peut-on calculer un système pour la simplification dans les groupes? Quitte à ajouter de nouvelles règles?

Un système de «simplification» pour les groupes

$$
\begin{aligned}
x * e &\longrightarrow x && (7)\\
e * x &\longrightarrow x && (8)\\
x * \overline{x} &\longrightarrow e && (9)\\
\overline{x} * x &\longrightarrow e && (10)\\
\overline{e} &\longrightarrow e && (11)\\
\overline{\overline{x}} &\longrightarrow x && (12)\\
\overline{x * y} &\longrightarrow \overline{y} * \overline{x} && (13)\\
(x * y) * z &\longrightarrow x * (y * z) && (14)\\
x * (\overline{x} * y) &\longrightarrow y && (15)\\
\overline{x} * (x * y) &\longrightarrow y && (16)
\end{aligned}
$$

Associativité et endomorphisme

- Considérons les deux identités:

$$\begin{array}{rcll} (x * y) * z & = & x * (y * z) & \text{(A)} \\ f(x * y) & = & f(x) * f(y) & \text{(E)} \end{array}$$

- Une *première* façon de simplifier:

$$\begin{array}{rcll} (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & \text{(A)} \\ f(x * y) & \longrightarrow & f(x) * f(y) & \text{(E)} \end{array}$$

- Une *deuxième* façon de simplifier:

$$\begin{array}{rcll} (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & \text{(A)} \\ f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & \text{(E)} \\ f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & \text{(EA)} \end{array}$$

$f(x * y)$ est plus lourd que $f(x)$,
donc $f(x * y) * z$ penche plus à gauche que $f(x) * (f(y) * z)$. C'est une bonne idée pour orienter l'associativité!

Une *deuxième* façon de simplifier:

$$
\begin{array}{rcll}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & \text{(A)} \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & \text{(E)} \\
f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & \text{(EA)} \\
f^2(x * y) * z & \longrightarrow & f^2(x) * (f^2(y) * z) & \text{(2EA)} \\
f^3(x * y) * z & \longrightarrow & f^3(x) * (f^3(y) * z) & \text{(3EA)} \\
 & \vdots & & \\
f^n(x * y) * z & \longrightarrow & f^n(x) * (f^n(y) * z) & \text{(nEA)} \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

Identités et réduction

- Une identité $g \approx d$ est un couple, c'est-à-dire un élément de $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$.
- Soit E un ensemble d'identités, la réduction $\underset{E}{\longrightarrow}$ est définie par

$$s \underset{E}{\longrightarrow} t$$

ssi

$$(\exists g \approx d \in E)(\exists \sigma \in Sub(T(\Sigma, X)))(\exists p \in Pos(s))$$

et

$$s_{|p} = \sigma(g) \quad \& \quad t = s[\sigma(d)]_p.$$

Notion de système de réécriture

Une règle de réécriture est une identité $g \approx d$ telle que $Var(g) \supseteq Var(d)$. On écrit $g \to d$.

- Un système de réécriture est un ensemble de règles de réécriture.
- Un redex de s est une instance (c'est-à-dire un sous-terme de s de la forme $\sigma(g)$ pour $\sigma \in Sub(T(\Sigma, X))$) d'un membre gauche de règle de réécriture $g \to d$.
- Contracter le redex $s_{|p}$ à la position p, c'est passer de s à $t = s[\sigma(d)]_p$.

Bibliographie

Franz Baader et Tobias Nipkow, Term Rewriting and All that,Cambridge University Press, (1998)

Terese, Term Rewriting Systems, Cambridge University Press, (2003)