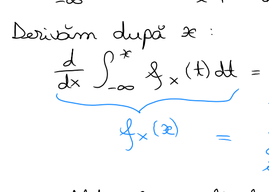
CURSUL 12 (20 decembrie 2022)

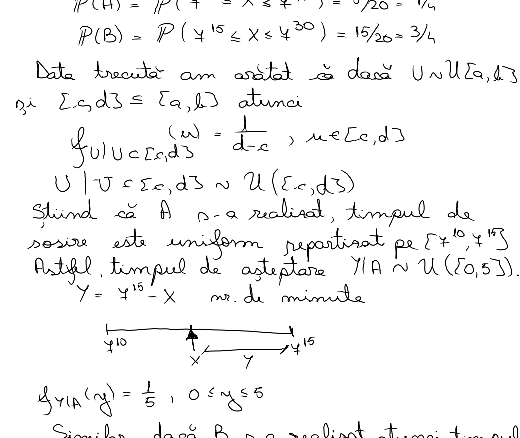
Repartiții condiționate și cazul continuu

① (Formula probabilității totale)

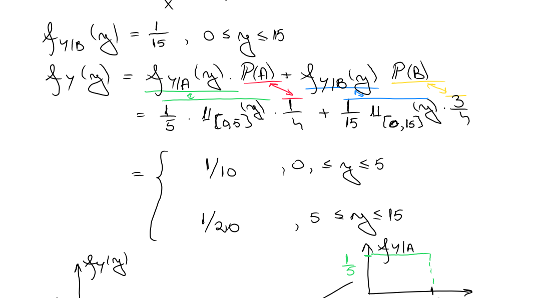
[illegible]



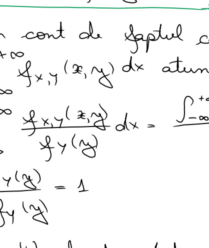
[illegible]



[illegible]



[illegible]



[illegible]

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi r^2} \mathbb{1}_D(x,y)\,dx = \frac{1}{\pi r^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_D(x,y)\,dx$$

Dacă $(x,y)\in D \Rightarrow x^2+y^2\le r^2 \Rightarrow x^2 \le r^2-y^2$
$\Rightarrow -\sqrt{r^2-y^2}\le x \le \sqrt{r^2-y^2}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 1\,dx = \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2},\ y\in[-r,r]$$

În mod similar, $f_X(x) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2},\ x\in[-r,r]$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{\pi r^2}\mathbb{1}_D(x,y)}{\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\,\mathbb{1}_{[-r,r]}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}\mathbb{1}_{[-\sqrt{r^2-y^2},\sqrt{r^2-y^2}]}(x)$$

Observăm că pt Y fixat avem că $f_{X|Y}$ este uniformă pe intervalul $[-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}]$.

Alg: 1) generăm Y cu densitatea $\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2},\ y\in[-r,r]$

2) dat fiind $Y=y$ generăm uniform pe int. $[-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}]$ un punct x

Perechea (X,Y) este $\mathcal{U}(D)$.

Obs: Având densitatea condiționată $f_{X|Y}(x|y)$ putem calcula

$$P(X\in A \mid Y=y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)\,dx.$$

Independența v.a. continue:

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un c.p., X și Y două v.a continue. Spunem că v.a X și Y sunt independente și notăm $X \perp\!\!\!\perp Y$, dacă $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ $\forall x,y$.

Cum $f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y)$ avem că

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x),\ \forall y$$

Obs: Dacă X și Y v.a independente atunci

$$P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\,P(Y\in B),\ \forall A,B\in\mathbb{R}$$

În particular, dacă $A=\{X\le x\}$ și $B=\{Y\le y\}$ atunci

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y),\ \forall x,y.$$

Ⓟ Dacă densitatea comună a v.a X și Y este de forma

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x)\cdot h(y),\ \forall x,y$$

atunci $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Ⓟ Dacă X și Y sunt independente atunci

$$E[g(x)\cdot h(y)] = E[g(x)]\,E[h(y)]$$

În particular,
1) $E[XY] = E[X]\cdot E[Y]$
2) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Formula lui Bayes:

Fie X și Y două v.a continue.

$$\xrightarrow[f_X(x)]{X} \boxed{\text{Zgomot}} \xrightarrow[f_{Y|X}(y|x)]{Y} \boxed{\text{Inferență}} \xrightarrow[f_{X|Y}(x|y)]{}$$

Var. pe care nu o observăm — Var pe care o observăm

$$\left.\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y) \\ &= f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)}{f_Y(y)}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)\,dx$$

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\,f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x')\cdot f_X(x')\,dx'}}$$

Cazul hibrid pt formula lui Bayes
(o v.a continuă și o v.a. discretă)

$$\xrightarrow[\{0,1\}]{\text{Semnal linar}} \boxed{+N(0,1)} \xrightarrow[\text{cont.}]{Y}$$

Vrem să descriem o probabilitate de forma:

$$P(A \mid Y=y) = ?$$

Pt că Y este o v.a cont, $P\{Y=y\}=0$

Putem interpreta

$$P(A\mid Y=y) \simeq P(A \mid Y\in[y,y+dy]) = \frac{P(A\cap Y\in[y,y+dy])}{P(Y\in[y,y+dy])} = \frac{P(A)\cdot P(Y\in[y,y+dy]\mid A)}{P(Y\in[y,y+dy])}$$

$$P(A\mid Y=y) \simeq \frac{P(A)\int_y^{y+dy} f_{Y|A}(t)\,dt}{\int_y^{y+dy} f_Y(t)\,dt} \simeq \frac{P(A)\cdot f_{Y|A}(y)\cdot \cancel{dy}}{f_Y(y)\cdot\cancel{dy}} = \frac{P(A)\cdot f_{Y|A}(y)}{f_Y(y)}$$

Formula probab. totale: $f_Y(y) = P(A)\cdot f_{Y|A}(y) + P(A^c)\cdot f_{Y|A^c}(y)$

$$P(A\mid Y=y) = \frac{f_{Y|A}(y)\cdot P(A)}{f_{Y|A}(y)\,P(A) + f_{Y|A^c}(y)\,P(A^c)}$$

Dacă $A=\{X=x\}$ și $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \dots x_n\}$

$$P(\underbrace{X=x}_{\text{discretă}} \mid \underbrace{Y=y}_{\text{continuă}}) = \frac{P(X=x)\,f_{Y|X}(y|x)}{\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)\,f_{Y|X}(y|x_i)}$$

Exp: $S\in\{-1,1\}$, $S\sim B(p)$ – semnalul

Semnalul observat $Y=S+N$, $N\sim N(0,1)$, $N \perp\!\!\!\perp S$

Care este $P(S=1\mid Y=y)$ = ?

$$P(S=1\mid Y=y) = \frac{\underbrace{P(S=1)}_{p}\cdot f_{Y|S}(y|1)}{\underbrace{P(S=1)}_{p}\,f_{Y|S}(y|1) + \underbrace{P(S=-1)}_{1-p}\,f_{Y|S}(y|-1)}$$

$$f_{Y|S}(y|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} \qquad f_{Y|S}(y|-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+1)^2}{2}}$$

$Y|S=s \sim N(s,1)$

Formula probabilității totale

X \ Y	discret	cont.
discret	$P(X=x)=\sum_y P(X=x\mid Y=y)\,P(Y=y)$	$P(X=x)=\int P(X=x\mid Y=y)\,f_Y(y)\,dy$
cont	$f_X(x)=\sum_y f_{X\mid Y}(x\mid y)\,P(Y=y)$	$f_X(x)=\int f_{X\mid Y}(x\mid y)\,f_Y(y)\,dy$

Formula lui Bayes

X \ Y	discret	cont.
discret	$P(Y=y\mid X=x)=\frac{P(X=x\mid Y=y)\,P(Y=y)}{P(X=x)}$	$f_{Y\mid X}(y\mid x)=\frac{P(X=x\mid Y=y)\,f_Y(y)}{P(X=x)}$
cont	$P(Y=y\mid X=x)=\frac{f_{X\mid Y}(x\mid y)\,P(Y=y)}{f_X(x)}$	$f_{Y\mid X}(y\mid x)=\frac{f_{X\mid Y}(x\mid y)\,f_Y(y)}{f_X(x)}$

Exp: Pe piață sunt 2 comp. (A și B) care produc becuri inteligente. Pp că becurile produse de comp. A au o durată de viață rep $Exp(\lambda_0)$, iar becurile prod. de comp B au o durată de viață $Exp(\lambda_1)$ cu $\lambda_0<\lambda_1$. Am primit un bec inteligent pe care nu este inscripționată firma prod. Știm că un bec ales în mod aleator provine de la comp A cu prob $p_0\in(0,1)$, iar de la comp B cu prob. $p_1 = 1-p_0$.

Fie T durata de viață a becului primit
a) Care este fct de rep și densitatea v.a T
b) Are v.a T prop. lipsei de memorie
c) Fie J v.a. definită prin $J=1$ dacă becul provine de la comp B și $J=0$ altfel. Det. rep cond. a lui J la $T=t$.

Sol:

a) T este o v.a continuă

$$J = \begin{cases} 1, & \text{becul provine de la comp B} \\ 0, & \text{becul provine de la comp A}\end{cases}$$

Din ipoteză știm că $\begin{cases} T\mid J=0 \sim Exp(\lambda_0) \\ T\mid J=1 \sim Exp(\lambda_1)\end{cases}$ $\lambda_1<\lambda_2$

În plus $P(J=1) = 1-p_0$, $P(J=0)=p_0$

$J\sim B(p_1 = 1-p_0)$

Funcția de rep. a lui T este $P(T\le t) = F_T(t)$

$$F_T(t) = P(T\le t) \overset{\text{F. probab. totale}}{=} P(T\le t\mid J=0)\,P(J=0) + P(T\le t\mid J=1)\,P(J=1)$$

În cazul rep $Exp(\lambda)$ avem că

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0$$
$$F(x) = 1-e^{-\lambda x}$$

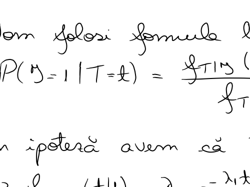
Astfel,

$$F_T(t) = (1-e^{-\lambda_0 t})\cdot p_0 + (1-e^{-\lambda_1 t})\,p_1,\ p_1 = 1-p_0$$
$$= 1 - e^{-\lambda_0 t}p_0 - e^{-\lambda_1 t}p_1$$

Densitatea lui T:

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}F_T(t) = p_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t},\ t>0$$

Densitatea comună (T, J)



b) Cum $\lambda_0 \ne \lambda_1$, observăm că forma densității lui T nu se poate reduce la o expresie de forma $\lambda e^{-\lambda t}$, astfel rezultă că v.a T nu este rep. exp prin urmare nu verifică prop lipsei de memorie.

c) Știind că $T=t$ vrem să determinăm $P(J=1\mid T=t)$ = ? prob. ca becul să provină de la Comp B știind că durata de viață e t

Vom folosi formula lui Bayes:

$$P(J=1\mid T=t) = \frac{f_{T|J}(t|1)\;P(J=1)}{f_T(t)}$$

Din ipoteză avem că $T\mid J=1 \sim Exp(\lambda_1)$

$$\Rightarrow f_{T|J}(t|1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$$

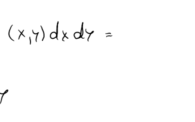
$$P(J=1\mid T=t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\cdot(1-p_0)}{p_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} + (1-p_0)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}}$$

Media funcțiilor de v.a cont. Media condiționată

Ⓣ Dacă X și Y sunt două v.a cont cu densitatea comună $f_{X,Y}(x,y)$ și $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a.î.

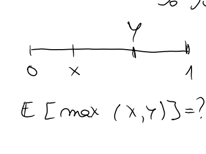
$$E[g(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Exp: $X, Y \sim \mathcal{U}[0,1]$ independente
$E[|X-Y|]$ = ?



Sol:

$$E[|X-Y|] = \iint (x-y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint |x-y|\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1\int_y^1 (x-y)\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^y (y-x)\,dx\,dy = 2\int_0^1\int_y^1 (x-y)\,dx\,dy = 1/3$$



Temă: $E[\max(X,Y)]$ = ? și $E[\min(X,Y)]$ = ?