Variabile aleatoare discrete

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Vrem să calculăm probabilități de tipul următor $\mathbb{P}(X \in A) = ?$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

Def! (Repartiția unei v.a)
Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probab. și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. Se numește repartiția lui X (distribuția lui X) măsura de probabilitate (pe $\mathbb{R}$) definită prin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(A) &= \mathbb{P}(X \in A) \\ &= \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \\ &= (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

Repartiția $\boxed{\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}}$

Def! (Funcția de repartiție)
Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a.. Se numește funcția de repartiție a lui X (funcția cumulativă) funcția $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ definită prin:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Obs: Dacă $A = (-\infty, x]$ atunci $F(x) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A)$

Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul (moneda este echilibrată)

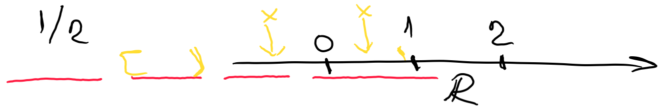
$\Omega = \{H, T\}^2 = \{HH, HT, TH, TT\}$

Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X = \#$ capete în cele 2 aruncări

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$\mathbb{P}(X=0) = 1/4 = \mathbb{P}(X=2)$

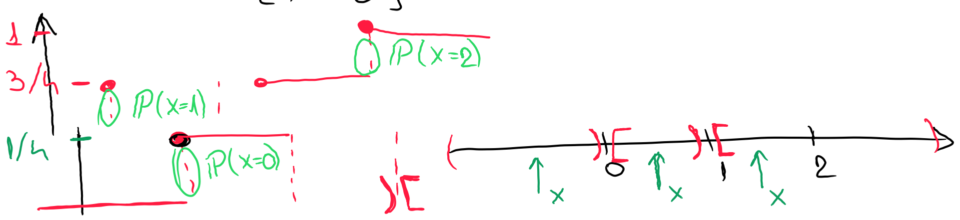
$\mathbb{P}(X=1) = 1/2$



$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \mathbb{P}(X=0) = 1/4 & , 0 \le x < 1 \\ 3/4 & , 1 \le x < 2 \\ 1 & , 2 \le x \end{cases}$

Dacă $x < 0$ atunci $\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} = \emptyset$

$0 \le x < 1$ atunci $\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\}$
$= \{X = 0\}$



Dacă $X \le 0$ atunci $\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$
$= \begin{cases} \emptyset & , x < 0 \\ \{X = 0\} & , x = 0 \end{cases}$

X

$x \le 1 \Rightarrow \{X \in x\} = \begin{cases} \{X = 0\} & , x < 1 \\ \{X = 1\} & , x = 1 \end{cases}$

$\{X=0\} \cup$

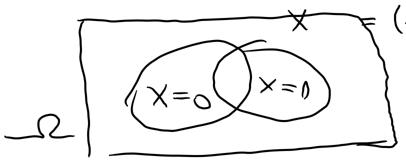
$F(1) = \mathbb{P}(\underbrace{X \le 1})$

$\{\omega \mid X(\omega) \le 1\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0$ sau $X(\omega) = 1\} = \{X=0\} \cup \{X=1\}$

$F(1) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 1/4 + 1/2$

$x \le 1 \Rightarrow \{X \le x\} = \begin{cases} \{X=0\}, & x<1 \\ \{X=0\} \cup \{X=1\}, & x=1 \end{cases}$

$x = (0,1]$



$F(x) = \begin{cases} F(0) = 1/4, & x<1 \\ F(1) = 1/4 + 1/2, & x=1 \end{cases}$

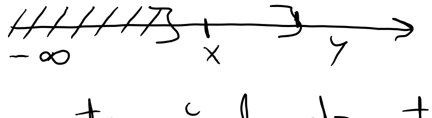
Dacă $x \in [1,2)$ atunci $\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$
$= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0$ sau $X(\omega) = 1\} =$
$\{X=0\} \cup \{X=1\}$

$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 1/4 + 1/2 = 3/4$

Dacă $x \in [2, +\infty)$ atunci
$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0$ sau $X(\omega) = 1$ sau $X(\omega) = 2\})$
$= \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\})$
$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 1$

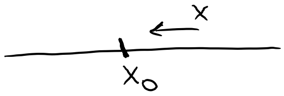
Proprietăți ale funcției de repartiție:

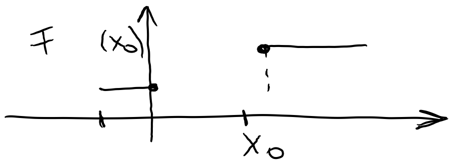
a) F este crescătoare ($x<y \Rightarrow F(x) \le F(y)$) $\{X \in (-\infty, x]\} \subseteq \{X \in (-\infty, y]\}$



b) F este continuă la dreapta

$$F(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} F(x)$$





c) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

<u>Obs</u>: O funcție care îndeplinește a), b), c) este o funcție de repartiție.

<u>Obs</u>: În plus, plecând de la prop a), b) și c) avem:

d) $P(X>x) = 1 - P(X\le x) = 1 - F(x)$

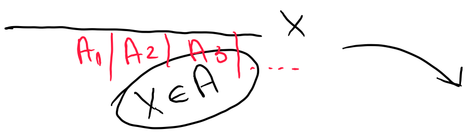
e) $P(X<x) = \lim\limits_{\substack{y\to x\\ y<x}} F(y) = F(x-)$ (limita la stânga în x)

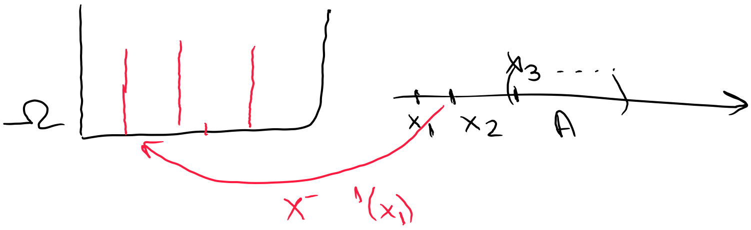
f) $P(x<X\le y) = P(X\le y) - P(X\le x) = F(y) - F(x)$

g) $P(X=x) = P(X\le x) - P(X<x)$
$= F(x) - F(x-)$

Atunci când vorbim de v.a. discrete,
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a discretă $\Leftrightarrow$ $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă,

$$P(X\in A) = P\Big(X\in \bigcup_{x\in A\cap X(\Omega)} \{x\}\Big)$$





$$\{X\in A\} = \{\omega \mid X(\omega)\in A\}$$
$$= \{\omega\in\Omega \mid X(\Omega)\in A\cap X(\Omega)\}$$
$$= \{\omega\in\Omega \mid X(\Omega)\in \bigcup_{x\in A\cap X(\Omega)}\{x\}\} =$$
$$= \bigcup_{x\in A\cap X(\Omega)} \{X=x\}$$

reuniune disjunctă

$$\mathbb{P}(X\in A) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)$$

Def! (Funcția de masă asociată unei v.a. discrete)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o v.a discretă. Se numește funcție de masă a lui X (PMF) funcția $\boxed{f(x) = \mathbb{P}(X=x)}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X\in A) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} f(x)$$

Obs: Uneori se mai folosește și notația $p(x)$ sau $p_X(x)$.

Obs: Dacă $A=(-\infty, x]$ atunci $F(x) = \mathbb{P}(X\leq x)$
$$= \sum_{\substack{y\in X(\Omega)\\ y\leq x}} f(y)$$

Notație: Dacă $X:\Omega\to\mathbb{R}$ este o v.a discretă, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ atunci modul în care este repartizată v.a. X:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ P(X=x_1) & P(X=x_2) & P(X=x_3) & \end{pmatrix}$$ altfel spus

$$X \sim \begin{pmatrix} \dots \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots \end{pmatrix}$$

→ valorile X

→ masa în fiecare pct

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

Ce prop. trebuie să îndeplinească funcția de masă?

$f(x) = P(X=x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

a) $f(x) \geq 0$ (prop. de nonnegativitate)

b) Masa totală este egală cu 1

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1$$

$P(X \in \mathbb{R}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \mathbb{R}\}) = P(\Omega) = 1$ $\{X \in \mathbb{R}\} = \{X \in \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{x\}\} = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$

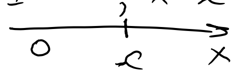
Exemple de v.a discrete

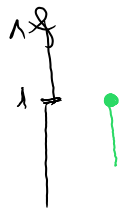
1) Variabila aleatoare constantă

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X = c$ (constantă)

Funcția de masă:

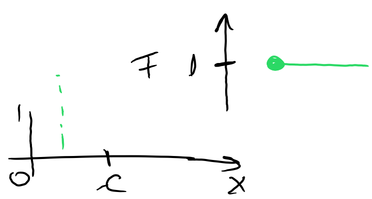
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq c \\ 1, & x = c \end{cases}$$





Funcția de repartiție:

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$



$F(x) =$

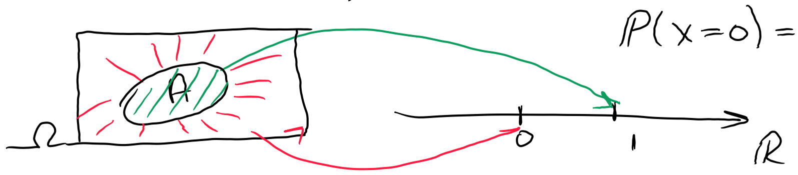
2) Variabile aleatoare de tip Bernoulli

Avem un experiment aleator și ne interesăm la realizarea sau nerealizarea unui ev. de interes A.

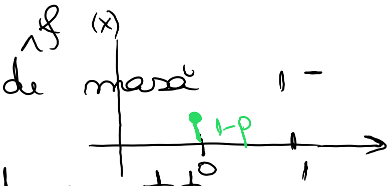
Dacă $p = \mathbb{P}(A)$ atunci definim $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A) = p$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(A^c) = 1-p$



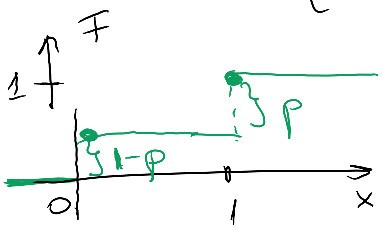
Funcția de masă



$f(1) = p$ $\quad$ $f(0) = 1-p$

Funcția de repartiție

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



<u>Obs</u>: Dacă $A \in \mathcal{F}$ atunci funcție indicator a mulțimii A

$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ este o variabilă Bernoulli

Notație: Spunem că v.a. X este repartizată Bernoulli de parametrul p, $X \sim B(p)$, dacă $X \in \{0,1\}$ și $P(X=1) = p$.

„este repartizată ca"

Scrierea sub formă compactă

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0,1\}$$

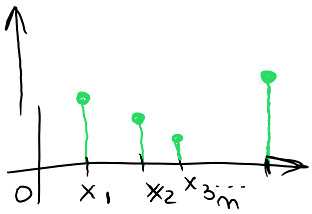
3) Variabilele aleatoare discrete cu suport finit $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega)$ finită

Presupunem că $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$,

$x_1 \le x_2 \le x_3 \dots \le x_n$

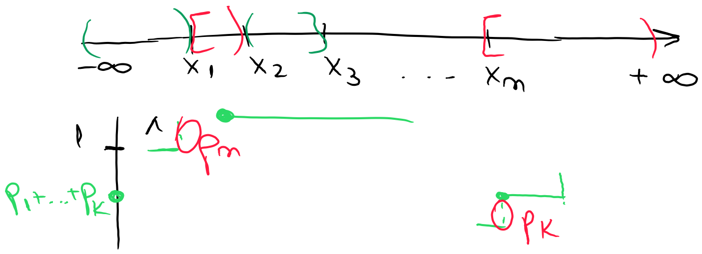
Notăm $f(x_i) = p_i$, $i \in \{1, \dots n\}$ masa în x_i, $p_i \geq 0$

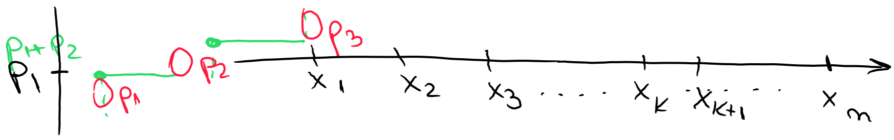
și $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$



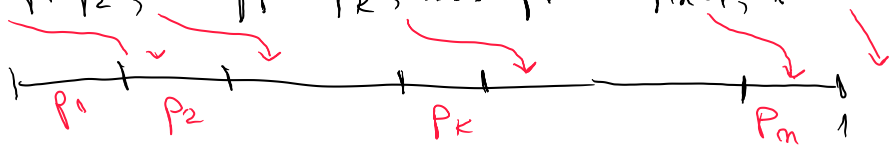
Funcția de repartiție

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k, & x_k \le x < x_{k+1} \\ \vdots & \\ 1, & x \ge x_n \end{cases}$$





$p_1,\ p_1+p_2,\ \dots,\ p_1+\dots+p_k,\ \dots,\ p_1+\dots+p_{n-1},\ 1$



4) Variabilele aleatoare repartizate binomial Pp. că avem n experimente aleatoare identice independente. (sau repetăm de n ori un experiment aleator) și în realizarea fiecărui experiment ne interesăm de realizarea sau nerealizarea unui ev de interes A.

Considerăm că $\mathbb{P}(A) = p$.

Definim v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots n\}$, ca fiind $X = \#$ de realizări ale lui A în cele n experimente.

Atunci X este repartizată binomial de parametrii n și p și notăm $X \sim B(n, p)$

<u>Obs</u>: Dacă $n = 1$ atunci $X \sim B(1, p) = B(p)$

Exp: Aruncăm o monedă de n ori și presupunem că la fiecare aruncare șansa de apariție a capului este $p \in (0,1)$.

Fie $X = \#$ de H în cele n aruncări

$$\Omega = \{H, T\}^n \quad , \quad X \in \{0, 1, 2, \dots n\}$$

$f(K) = P(X=K)$, $K \in \{0,1,2,\dots n\}$

$n=5$

$K=3$

H H H

| T | H | H | T | H |

THHTH

$(1-p)\times p\times p\times(1-p)\times p$ $(1-p)^2\cdot p^3$ $\binom{5}{3}$

$K=3$

moduri

Probabilitatea să observăm o secvență specifică de lungime n care conține K valori de H și n−K valori de T este $p^K(1-p)^{n-K}$

Avem $\binom{n}{K}$ secvențe de lungime n care conțin K valori de H și n−K valori de T

$$P(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} \qquad K\in\{1,2,\dots n\}$$

Este $f(K)$ o funcție de masă validă?

$f(K) \geq 0$, $\forall K\in\{0,1,2,\dots n\}$ Newton $\sum_{K=0}^{n} f(K) =$

$\sum (p+1-p)^n = 1$ K $n-K$ binomul lui $K>0$

Obs: Fie $X \sim B(n,p)$. Atunci putem inter- preta v. a. X ca pe o sumă de v. a de tip Bernoulli.

$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ unde $Y \sim B(p)$

Y_j – rezultatul obținut la experimentul j

Obs: Urnă cu bile albe și negre / M bile negre, N−M albe. Efectuăm n extrageri cu întoarcere. Fie X v. a. care ne dă numărul de bile negre din cele n extrageri. Atunci $X \sim B(n, \frac{M}{N})$.

Exp: Un bit (0 sau 1) este transmis printr-un canal bruiat şi probabilitatea ca acesta să fie transmis incorect este p.

Pentru a creşte fiabilitatea transmiterii mesajului, îl transmitem de n ori (impar). $n=5$

$p=0,1$ $\quad X$ = nr de biţi trans. cu eroare

$X \sim B(n,p)$

Probabilitatea ca bitul să fie corect? $P(X \le 2) =$

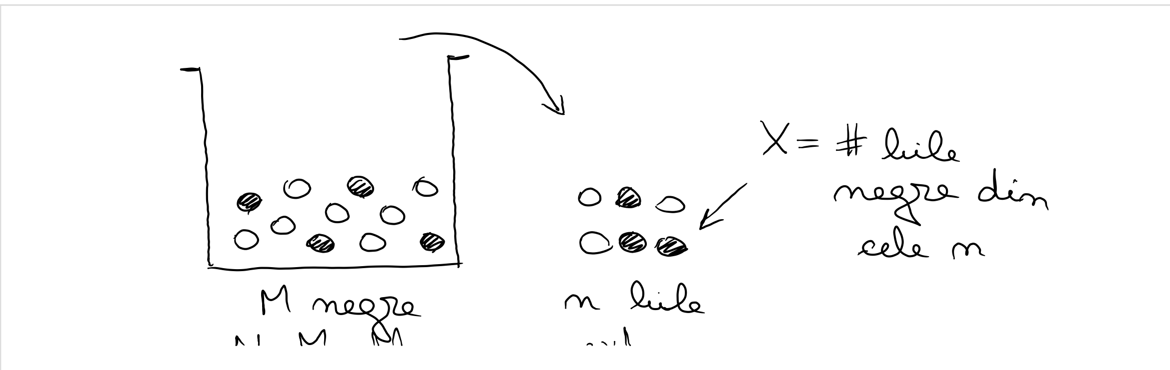
$F(2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} 0.1^k \times 0.9^?$

În R: $\left\{ \begin{array}{l} \text{fct. de masă} \quad \text{dbe....()} \\ \text{fct de repartiţie} \quad \text{pbe...()} \end{array} \right.$

5) Variabile aleatoare repartizate hipergeometric. Avem o urnă cu N bile dintre care M sunt negre şi $N-M$ sunt albe.

Considerăm că am extras n bile fără întoarcere. Fie X v.a. care ne dă nr. de bile negre din cele n extrase



N − M albe extrase

Notație: $X \sim HG(n, N, M)$

nr bile negre

nr bile extrase

total bile urnă

$f(K) = \mathbb{P}(X=K) = ?$ $\qquad X \in \{0, 1, \dots, \min(M, n)\}$

$$f(K) = \frac{\binom{M}{K}\binom{N-M}{n-K}}{\binom{N}{n}} \geq 0$$

Verificăm $\displaystyle\sum_{K=0}^{\min(M,n)} f(K) = 1$

$n \leq M$

$$\sum_{K=0}^{\min(M,n)} \frac{\binom{M}{K}\binom{N-M}{n-K}}{\binom{N}{n}} = 1 \quad \text{sau} \quad \sum_{K=0}^{\min(M,n) = n} \binom{M}{K}\binom{N-M}{n-K} = \binom{N}{n}$$

Identitatea lui Vandermonde

$$\sum_{K=0}^{n} \binom{M}{K}\binom{N-M}{n-K} = \binom{N}{n}$$

<u>Idee</u>: avem identitatea $(1+x)^M (1+x)^{N-M} = (1+x)^N$ și să identificăm coeficientul lui x^n.