Logică Matematică şi Computaţională – addenda la Cursul I, schiţată

Claudia Mureşan, c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică, 2021–2022, Semestrul I

Despre toate enunţurile vom presupune că sunt fie **false**, fie **adevărate** (amintesc că aceasta nu e o condiţie trivială: a se vedea în Cursul I *paradoxul mincinosului*), mai precis că au exact una dintre aceste valori de adevăr, deci că acestea sunt singurele valori de adevăr cu care lucrăm şi că sunt diferite.

Fie p, q şi r enunţuri arbitrare.

p sau q: adevărat ddacă p e adevărat sau q e adevărat.

p şi q: adevărat ddacă p e adevărat şi q e adevărat.

non p: adevărat ddacă p e fals.

p => q: adevărat ddacă, ori de câte ori p e adevărat, atunci şi q e adevărat.

Aşadar: **p => q**: fals ddacă p e adevărat şi q e fals.

Exemplu: Dacă un triunghi e echilateral, atunci toate unghiurile sale sunt de 60°. Enunţul acesta e adevărat chiar dacă există triunghiuri care nu sunt echilaterale; existenţa acelor triunghiuri nu invalidează acest enunţ; acele triunghiuri satisfac în mod trivial această implicaţie, pentru că nu satisfac premisa implicaţiei.
p <=> q: adevărat ddacă **p => q** şi **q => p** sunt adevărate, deci adevărat ddacă **(p => q) şi (q => p)** e adevărat.

p	**q**	**p => q**	**(non p) sau q**	**q => p**	**p <=> q**
fals	fals	adevărat	adevărat	adevărat	adevărat
fals	adevărat	adevărat	adevărat	fals	fals
adevărat	fals	fals	fals	adevărat	fals
adevărat	adevărat	adevărat	adevărat	adevărat	adevărat

Aşadar: **p <=> q**: adevărat ddacă p şi q au aceeaşi valoare de adevăr.

Prin urmare: **p <=> (non non p)** e adevărat întotdeauna.

De asemenea, (**p <=> q) <=> [(non p) sau q]** e adevărat întotdeauna, pentru că **p <=> q** şi **(non p) sau q** au aceeaşi valoare de adevăr.

Conform definiţiilor de mai sus, conectorii logici **sau** şi **şi** sunt comutativi, adică **[(p sau q) ⇔ (q sau p)]** şi **[(p şi q) ⇔ (q şi p)]** sunt întotdeauna adevărate, şi asociativi, adică **[((p sau q) sau r) ⇔ (p sau (q sau r))]** şi **[((p şi q) şi r) ⇔ (p şi (q şi r))]** sunt întotdeauna adevărate, şi de aceea aceste enunţuri se pot scrie fără paranteze:

p sau q sau r, respectiv **p şi q şi r**.

Observaţie: Dacă, într-un enunţ compus α, înlocuim un enunţ β din componenţa lui α cu un enunţ cu aceeaşi valoare de adevăr ca şi β, atunci obţinem un enunţ cu aceeaşi valoare de adevăr ca şi α (şi, desigur, putem face acest lucru pentru mai multe enunţuri β succesiv).

Abreviem ad-hoc: A := adevărat; F := fals.

Să demonstrăm că:

- [p sau (q şi r)] ⇔ [(p sau q) şi (p sau r)]

“=>”:

Presupunem [p sau (q şi r)] A. ⇔ p A sau (q A şi r A).

Dacă p A => (p sau q) A şi (p sau r) A <=> (p sau q) şi (p sau r) A.

Dacă (q A şi r A) => (p sau q) A şi (p sau r) A <=> (p sau q) şi (p sau r) A.

“<=”:

Presupunem [(p sau q) şi (p sau r)] A. ⇔ (p sau q) A şi (p sau r) A.

Dacă p A => [p sau (q şi r)] A.

Dacă p F, atunci, întrucât (p sau q) A şi (p sau r) A => q A şi r A ⇔ q şi r A => [p sau (q şi r)] A.

- [p şi (q sau r)] ⇔ [(p şi q) sau (p şi r)]

“=>”:

Presupunem [p şi (q sau r)] A. ⇔ p A şi (q sau r) A ⇔ p A şi (q A sau r A).

Dacă q A => (p şi q) A => [(p şi q) sau (p şi r)] A.

Dacă r A => (p şi r) A => [(p şi q) sau (p şi r)] A.

“<=”:

Presupunem [(p şi q) sau (p şi r)] A. ⇔ (p şi q) A sau (p şi r) A ⇔ (p A şi q A) sau (p A şi r A).

Dacă p A şi q A => p A şi (q sau r) A ⇔ [p şi (q sau r)] A.

Dacă p A şi r A => p A şi (q sau r) A ⇔ [p şi (q sau r)] A.

- [p=>q] ⇔ [(non q)=>(non p)]

"=>": Demonstrăm că: [p=>q] => [(non q)=>(non p)]. (*)

Presupunem p=>q A.

Dacă (non q)A, ⇔ q F => p F ⇔ (non p)A. Aşadar [(non q)=>(non p)] A.

"<=": În (*) înlocuim: p cu non q, iar q cu non p, şi obţinem:

[(non q)=>(non p)] => [(non non p)=>(non non q)] ⇔ [p=>q].

Aşadar [p=>q] <=> [(non q)=>(non p)].

Exerciţiu: Să se demonstreze că, pentru orice mulţime M, are loc echivalenţa: (∀x∈M)(p(x) şi q(x))⇔[(∀x∈M)(p(x)) şi (∀x∈M)(q(x))], pornind de la echivalenţa: (∀x)(p(x) şi q(x)) ⇔ (∀x)(p(x)) şi (∀x)(q(x)).

Rezolvare: (∀x∈M)(p(x) şi q(x)) ⇔ (∀x)[x∈M => (p(x) şi q(x))] ⇔

(∀x)[x∉M sau (p(x) şi q(x))] ⇔ (∀x)[(x∉M sau p(x)) şi (x∉M sau q(x))] ⇔

[(∀x)(x∉M sau p(x)) şi (∀x)(x∉M sau q(x))] ⇔

[(∀x)(x∈M => p(x)) şi (∀x)(x∈M => q(x))] ⇔ [(∀x∈M)(p(x)) şi (∀x∈M)(q(x))].

Remarcă: Dacă proprietatea q nu depinde de variabila x de sub incidenţa cuantificatorului, atunci: ∀xq ⇔ q ⇔ ∃xq, şi au loc:

- (∀x∈M)(p(x) şi q) ⇔ [(∀x)(p(x)) şi q], pentru că:

(∀x∈M)(p(x) şi q) ⇔ [(∀x)(p(x)) şi ∀xq] ⇔ [(∀x)(p(x)) şi q];

- (∃x∈M)(p(x) sau q) ⇔ [(∃x)(p(x)) sau q], pentru că:

(∃x∈M)(p(x) sau q) ⇔ [(∃x)(p(x)) sau ∃xq] ⇔ [(∃x)(p(x)) sau q];

- (∀x∈M)(p(x) sau q) ⇔ [(∀x)(p(x)) sau q], pentru că:

dacă q e adevărată, atunci [(∀x)(p(x)) sau q] e adevărată, iar (p(x) sau q) e adevărată pentru orice x, deci (∀x∈M)(p(x) sau q) e adevărată;

dacă q e falsă, atunci [(∀x)(p(x)) sau q] e adevărată ddacă (∀x)(p(x)) e adevărată ddacă p(x) e adevărată pentru orice x ddacă (p(x) sau q) e adevărată pentru orice x ddacă (∀x∈M)(p(x) sau q) e adevărată;

- (∃x∈M)(p(x) şi q) ⇔ [(∃x)(p(x)) şi q], pentru că:

dacă q e falsă, atunci [(∃x)(p(x)) şi q] e falsă, iar (p(x) şi q) e falsă pentru orice x, deci (∃x∈M)(p(x) şi q) e falsă;

dacă q e adevărată, atunci [(∃x)(p(x)) şi q] e adevărată ddacă (∃x)(p(x)) e adevărată ddacă p(x) e adevărată pentru măcar un x ddacă (p(x) şi q) e adevărată pentru măcar un x ddacă (∃x∈M)(p(x) şi q) e adevărată.

Dar, dacă înlocuim conectorii logici "sau", "şi" cu "=>" sau "⇔", proprietăţile de mai sus nu rămân valabile.

Exemplu: Enunţul (∀x∈ℕ)(2|n=>2|3) este fals, pentru că, pentru n=2, 2|2=>2|3 este fals. Dar enunţul (∀x∈ℕ)(2|n)=>2|3 este adevărat, pentru că antecedentul (∀x∈ℕ)(2|n) al acestei implicaţii este fals.

Exemplu *de utilizare a ultimei proprietăţi din remarca anterioară:*

A se vedea în Seminarul I faptul că, dacă P,Q sunt submulţimi ale unei mulţimi M, atunci: P=Q ⇔ (∀x∈M)(x∈P⇔x∈Q).

Fie A, B, C, D mulţimi.

O *relaţie binară* de la A la B este o submulţime a produsului cartezian AxB={(a,b) | a∈A,b∈B}. Aceasta este o generalizare a noţiunii de funcţie de la A la B; spre deosebire de cazul unei funcţii, elementul b∈B asociat de o relaţie binară unui element a∈A nu există neapărat şi nu e neapărat unic.

Amintesc că, în sistemul axiomatic din primul curs, a fost definită perechea ordonată (a,b):={a,{a,b}}. Această pereche ordonată poate fi definită şi ca o funcţie de la {1,2} la {a,b} care duce pe 1 în a şi pe 2 în b.

Compunerea de relaţii binare generalizează compunerea de funcţii:

$$\begin{tikzcd}
a & f(a) & g(f(a))=(gof)(a) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

şi se defineşte astfel: dacă R e o relaţie binară de la A la B, iar S e o relaţie binară de la B la C, adică $R \subseteq A x B$ şi $S \subseteq B x C$, atunci compunerea SoR e o relaţie binară de la A la C definită astfel: $SoR=\{(a,c) \mid a \in A, c \in C, (\exists b \in B)((a,b) \in R$ şi $(b,c) \in S)\} \subseteq A x C$.

Să demonstrăm că, la fel ca în cazul particular al funcţiilor, compunerea de relaţii binare e asociativă, adică: pentru orice $R \subseteq A x B$, $S \subseteq B x C$ şi $T \subseteq C x D$, avem: To(SoR) = (ToS)oR.

Avem $SoR \subseteq A x C$, $ToS \subseteq B x D$, iar $To(SoR) \subseteq A x D$ şi $(ToS)oR \subseteq A x D$, prin urmare, conform proprietăţii din Seminarul I menţionată mai sus, e suficient să demonstrăm că, pentru orice $x \in A x D$, are loc $(\forall x \in M)(x \in To(SoR) \Leftrightarrow x \in (ToS)oR)$. Un element arbitrar x din AxD este de forma x=(a,d), cu a element arbitrar al lui A şi d element arbitrar al lui D.

Fie, aşadar, $a \in A$ şi $d \in D$, arbitrare, fixate. Avem:

$(a,d) \in To(SoR) \Leftrightarrow^{\textbf{(definiţia compunerii)}} (\exists c \in C)((a,c) \in SoR$ şi $(c,d) \in T) \Leftrightarrow^{\textbf{(definiţia compunerii)}}$

$(\exists c \in C)[(\exists b \in B)((a,b) \in R$ şi $(b,c) \in S)$ şi $(c,d) \in T] \Leftrightarrow^{\textbf{((c,d)}\in\textbf{T nu depinde de b)}}$

$(\exists c \in C)(\exists b \in B)((a,b) \in R$ şi $(b,c) \in S)$ şi $(c,d) \in T) \Leftrightarrow^{\textbf{(cuantificatorii de acelaşi fel comută)}}$

$(\exists b \in B)(\exists c \in C)((a,b) \in R$ şi $(b,c) \in S)$ şi $(c,d) \in T) \Leftrightarrow^{\textbf{((a,b)}\in\textbf{R nu depinde de c)}}$

$(\exists b \in B)\ [(a,b) \in R$ şi $(\exists c \in C)((b,c) \in S)$ şi $(c,d) \in T)] \Leftrightarrow^{\textbf{(definiţia compunerii)}}$

$(\exists b \in B)\ [(a,b) \in R$ şi $(b,d) \in ToS] \Leftrightarrow^{\textbf{(definiţia compunerii)}} (a,d) \in (ToS)oR$.

Aşadar To(SoR) = (ToS)oR.