04.10.2022

Seminar 1

- Ω = spațiul tuturor stărilor posibile

Exemple:

1) dăm cu banul; $\Omega = \{H, T\}$
2) –"– zarul; $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3) nr. aleator din interv. $(0, 1)$; $\Omega = (0, 1)$
4) dăm cu 2 zaruri; $\Omega = \{(x, y) / x, y \in \overline{1,6}\}$
5) dăm cu 3 zaruri până când apare de 3 ori 6;

$(6,6,6)$ – o aruncare

$(i, j, k), (6,6,6)$, unde i, j, k nu sunt toate egale cu 6

$\underbrace{(i_1, j_1, k_1)}_{\neq 6}, \underbrace{(i_2, j_2, k_2)}_{\neq 6}, (6,6,6)$

$U = \{(i, j, k) / i, j, k \in \{1, 2 \ldots 6\}$, i, j, k nu sunt toate egale cu 6$\}$

$\Omega = \{\{(6,6,6)\}, \{U, (6,6,6)\}, \{U, U, (6,6,6)\} \ldots\}$

6) avem 52 de cărți și extragem 5 cărți pentru o mână.

$$\Omega = \{S / S \subset \{1, 2, \ldots 52\}, |S| = 5\}$$

$$|\Omega| = C_{52}^{5}$$

cum arată Ω dacă avem 2, 3 sau 4 jucători?

$$\Omega = \{(S_1, S_2) / S_1 \subset \{1, 2 \ldots 52\}, S_2 \subset \{1, 2 \ldots 52\} \setminus S_1\}$$

$$|\Omega| = C_{52}^{5} \cdot C_{47}^{5}$$

În general, pt. k jucători: $\Omega = \{(S_1, S_2 \ldots S_k) / S_1 \subset \{1, \ldots 52\}$, $S_2 \subset \{1, 2 \ldots 52\} \setminus S_1$, $S_3 \subset \{1, 2 \ldots 52\} \setminus (S_1 \cup S_2)$, $\vdots$ $S_k \subset \{1, 2 \ldots 52\} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} S_j\}$

$(k < 10)$

• Def!

Un eveniment este o submulțime a lui Ω.

Exemple:

1) dat cu zarul;

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

A = ev. că pică o față cu nr. par

$A = \{2,4,6\}$

$P(A) = \frac{cf}{cp} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2) descrieți ev. ca la o mână de cărți să avem ≥ 3 ași

$1,2 \ldots 52 \Rightarrow$ cărțile

$1,2,3,4 \Rightarrow$ ași

$\Omega = \{ S \mid S \subset \{1,2 \ldots 52\},\ |S| = 5 \}$

$A = \{ (x,y,z,u,v) \mid \{x,y,z\} \subset \{1,2,3,4\}$

$\{u,v\} \in \{5,6,7 \ldots 52\} \} \cup$

$\cup \{ \{1,2,3,4,w\} \mid w \in \{5,6,7 \ldots 52\} \}$

$|A| = C_4^3 \cdot C_{48}^2 + 48$

3) Fie A, B și C 3 evenimente. Exprimați în funcție de A, B, C și de operațiile cu mulțimi urm. evenimente:

a) A singur se realizează:

$A \setminus (B \cup C) = A \cap B^c \cap C^c$

b) A și C se realizează, dar nu și B:

$A \cap C \cap B^c$

c) cele trei ev. se produc

$A \cap B \cap C$

d) cel puțin unul din cele trei ev. se produce

$A \cup B \cup C$

e) cel puțin două ev. din cele trei se produc

$$\underbrace{(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)}_{S}\cup(A\cap B\cap C)$$

f) cel mult un eveniment se produce

$$(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap C^c)$$

g) niciunul dintre cele trei ev. nu se produce

$$A^c\cap B^c\cap C^c$$

h) exact 2 ev. din cele 3 se produc

S ↗

R

→ a = 5
→ b = 7
→ pi (⇒ 3.14...)
→ ls() ⇒ afișează datele
→ rm(list = ls()) ⇒ elimină datele
→ help()
→ help(mean)

• Tipuri și structuri de date:

- character a = "Ana are mere"
- numeric b = 2.57
- integer n = -7
- logical TRUE, FALSE
- complex a = 1+2i b = 2+3i

! typeof(a)

- Scalari și vectori:

```
x = c(1,2,3)
x = 1:3
y = c(1,2,"Ana")
```

→ length → lungimea vectorului

```
y = c(7,12,20)
z = c(x,y)

x = c(1,2,3)
y = c(4,7,20)
sum = x + y
prod = x * y
pow = x ** y
mult = 7 * x
imp = x / y
pow2 = y ** 3
```

- Indexare și accesare

→ indexare de la 1

! x[0] nu există

```
x = 1 : 10
y = x[4:10] = [4,5,6 ... 10]
x[-5]                  => el. poz. 5
x[-(2:6)]              => elimină de la pozițiile 2-6
x[x>3]
x[x>2 & x<5]           => valorile
x == 3                 => compară elem. din x cu 3 (val.)
```

- Matrici:

a = matrix (data = 1:10, nrow = 5, ncol = 2)

1	6
2	7
3	8
4	9
5	10

diag (a) : 1, 7 ce returnează

dim (a) : $\underset{r}{5}, \underset{c}{2}$

nrow (a)

ncol (a)

t(a) ⇒ transpusa

colSums (a)

rowSums (a)

solve (a) ⇒ determinantul ?

b = (data = c(2, 2, 2, 2), nrow = 2, ncol = 2)

solve (b)

c = (data = c(1, 2, 3, 4), nrow = 2, ncol = 2)

solve (c)

det(c) = -2

b + c

b - c

b * c

b %*% c - înmulțirea din alg. liniară (linie cu coloană)

Scanned with CamScanner

11.10.2022

Seminar 2

Ex:

1) Într-un sertar avem șosete roșii și negre. Atunci când extragem două șosete la întâmplare, prob. ca ambele să fie de culoare roșie este 1/2.

a) Care este nr. minim de șosete a.î. ca prop. din ip. să fie îndepl.?

b) Care este nr. minim de șosete, dacă nr. șosetelor negre este par?

Sol: r = nr. șosete roșii $R = \{1, 2, \dots, r\}$

n = nr. șosete negre $N = \{r+1, r+2, \dots, r+n\}$

A = extragem 2 șosete roșii

$P(A) = 1/2$

$\Omega = \{(x,y) / x, y \in R \cup N, x \neq y\}$

$|\Omega| = (r+n)(r+n-1)$

$A = \{(x,y) / x, y \in R, x \neq y\}$

$|A| = r(r-1)$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{r(r-1)}{(r+n)(r+n-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{r^2}{(r+n-1)^2} > \frac{r(r-1)}{(r+n)(r+n-1)} = \frac{1}{2} > \frac{(r-1)^2}{(r+n)^2}$$

$$\frac{r}{r+n-1} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{r-1}{r+n}$$

$$\frac{r}{r+n-1} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow r\sqrt{2} > r+n-1$$

$$\Leftrightarrow r(\sqrt{2}-1) > n-1 \quad / \cdot (\sqrt{2}+1)$$

$$\Leftrightarrow r > (\sqrt{2}+1)(n-1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{r-1}{r+n} \Leftrightarrow r+n > \sqrt{2}(r-1) \Leftrightarrow n+\sqrt{2} > \sqrt{2}r - r \quad / \cdot (\sqrt{2}+1)$$

$$\Leftrightarrow (n+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) > r$$

Scanned with CamScanner

$(\sqrt{2}+1)(n-1) < r < (n+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

• $n=0$: $r < \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2+\sqrt{2} \simeq 3{,}41$

$\Downarrow$

$r \in \{0,1,2,3\}$

Din ipoteză, $r \geq 2$

$\left.\right\} r \in \{2,3\}$

Dar pt. $n=0$ și $r \in \{2,3\}$ avem $P(A)=1$

• $n=1$: $0 < r < (\sqrt{2}+1)^2 \simeq 5{,}7$

$r \in \{2,3,4,5\}$

$r=2 \quad P(A) = \frac{2\cdot 1}{3\cdot 2} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$

$\boxed{r=3} \quad P(A) = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 3} = \frac{1}{2}$

b) $n=2$

$\sqrt{2}+1 < r < (2+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) \simeq 8{,}2$

$\Downarrow$

$r \in \{3,4,5,6,7,8\}$

$r=3 \quad P(A) = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 4} = \frac{3}{10} \neq \frac{1}{2}$

$r=4 \quad P(A) = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}$

$\vdots$

$r=8 \ \ldots$

$n=4 \quad \times$

$n=6$: $(\sqrt{2}+1)\cdot 5 < r < (6+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

$r \in \{13,14,15\}$

$r=13 \quad P(A) = \ldots \neq \frac{1}{2}$

$r=14 \quad P(A) = \ldots \neq \frac{1}{2}$

$\boxed{r=15} \quad P(A) = \frac{1}{2}$

2) Avem o urnă cu 3 bile albe și 7 negre. Se fac 4 extrageri fără întoarcere. Det. prob. evenim. urm.:

A = exact o bilă este albă

B = cel puțin o bilă este albă

C = prima bilă este albă

D = a doua bilă este albă

E = primele două bile sunt albe

F = cel puțin una din primele două bile este albă

Sol:

$\underbrace{1, 2, 3}_{\text{albe}}, \underbrace{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}_{\text{negre}}$

$\Omega = \{ S \mid S \subset \{1, 2 \ldots 10\}, |S| = 4 \}$

$|\Omega| = C_{10}^{4}$

a) $A = \{ \{a, b, c, d\} \mid a \in \{1, 2, 3\}$
$\{b, c, d\} \subset \{4, 5, \ldots 10\}$

$|A| = 3 \cdot C_7^3$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot C_7^3}{C_{10}^4} = \ldots$

b) $B = \{ \{a, b, c, d\} \mid a \in \{1, 2, 3\}, \{b, c, d\} \in \{1, 2 \ldots 10\}, a \notin \{b, c, d\} \}$

~~$|B| = 3 \cdot C_9^3$~~ pt. că $a = 1$ sau $a = 2$: $\{1, 2, 3, 4\}$ (l-am nr. de 2 ori)

$B^c = \Omega - B =$ "cele 4 bile sunt negre"

$B^c = \{ \{a, b, c, d\} \mid \{a, b, c, d\} \subset \{4, 5 \ldots 10\} \}$

$|B^c| = C_7^4$

$P(B^c) = \frac{|B^c|}{|\Omega|} = \frac{C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{6}$

$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

c) $\Omega = \{ (a,b,c,d) \,/\, a,b,c,d \in \{1,2 \ldots 10\},\ a \neq b \neq c \neq d \}$

$|\Omega| = A_{10}^{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

$C = \{ (a,b,c,d) \,/\, a \in \{1,2,3\},\ b,c,d \in \{1,2,3 \ldots 10\},\ a \neq b \neq c \neq d \}$

$|C| = 3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}$

d) $P(D) = P(C) = \frac{3}{10}$

e) $E = \{ (a,b,c,d) \,/\, a,b \in \{1,2,3\},\ c,d \in \{1,2,3 \ldots 10\},\ a \neq b \neq c \neq d \}$

$|E| = 3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7$

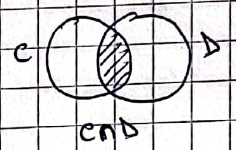
$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{1}{15}$

f) $F =$

Obs!

$E = C \cap D$

$F = C \cup D$



$|F| = |C \cup D| = |C| + |D| - |C \cap D| \quad / : |\Omega|$

$P(F) = P(C) + P(D) - P(E) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$

R

* Liste:

```
a = list(nume = "Ionel", salariu = 1500, apartenență = TRUE)
str(a)
```

• Indexarea:

```
a[1] , a[[1]]
a $ nume
```

```
b = list("Ana", m = 32.5 , apartenență = FALSE)
```

• Operații de adăugare și ștergere

```
a $ oraș = "Brașov"
a [5] = 21
a [4] = NULL

c = c(a,b)          //concatenare
```

* Data frame-uri:

```
index = c(1,2,3)
sex = c("M", "F", "F")
age = c(21, 72, 36)
survey = data.frame(index, sex, age)
nrow (survey)      : 3
ncol (survey)      : 3
dim (survey)       : 3, 3
```

index	sex	age
1	M	21
2	F	72
3	F	36

Scanned with CamScanner

rownames (survey) : 1,2,3

colnames (survey) : index, sex, age

str (survey)

mtcars

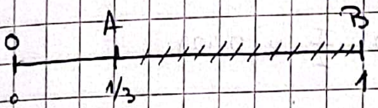
head (mtcars)

tail (mtcars)

17.10.2022

Seminar 3

1) Care este prob. dacă alegem un nr. în intervalul $(0,1)$ să fie mai mare ca $\frac{1}{3}$?

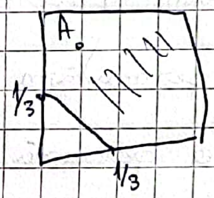


$$P\left(nr > \frac{1}{3}\right) = \frac{AB}{OB} = \frac{2}{3}$$

$$\Omega = (0,1)$$

$$\left\{ n > \frac{1}{3} \right\} = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

Ex: Aleg un punct aleator în pătrat. Care e probabilitatea ca punctul să fie în A?



$$P(A) = \frac{A(A)}{A(\square)} = \frac{Aria(\square) - A(\Delta)}{A(\square)} = \frac{1 - 1/18}{1} = \frac{17}{18}$$

$$\Omega = (0,1) \times (0,1)$$

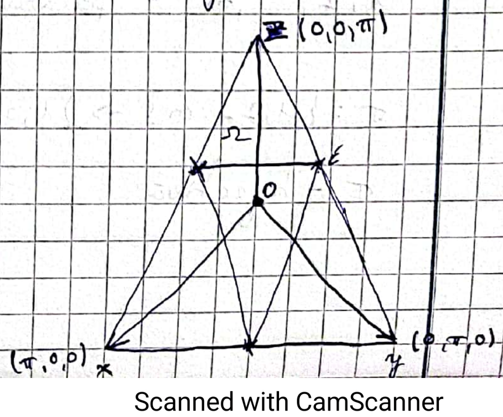
· Exercițiu: Paradoxul lui Bertrand

Care e prob. ca un Δ aleator să fie ascuțit-unghic

· Soluție: Metoda I

$$\Omega = \left\{ (A,B,C) \mid \begin{matrix} A+B+C = \pi \\ A,B,C \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

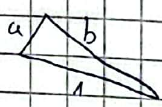
$$E = \left\{ (A,B,C) \mid \begin{matrix} 0 \leq A,B,C \leq \pi \\ A+B+C = \pi^2 \end{matrix} \right\}$$



$$P(\Delta \text{ ascuțitung.}) = \frac{\text{Aria}(E)}{\text{Aria}(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25$$

• Metoda II:

Fără a pierde generalitatea, putem să presupunem că cea mai mare latură are lungimea 1.



$$1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \sphericalangle(a,b)$$

$$\sphericalangle(a,b) < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \sphericalangle(a,b) > 0$$

$$1 \leq a^2 + b^2$$

$$\Omega = \{(a,b) \mid a,b > 0,\ a+b > 1\}$$

$$E = \{(a,b) \mid a,b > 0,\ a+b > 1,\ a^2+b^2 \geq 1\}$$

$a+b>1$

$d: a+b=1$ $\qquad$ $a^2+b^2=1$ ec. cercului de centru O și rază 1

$$P(E) = \frac{\text{Aria}(E)}{\text{Aria}(\Omega)} = \frac{\text{Aria}(\square) - \frac{1}{4}\text{Aria}(\circ)}{1/2} = \frac{1-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} \simeq 0,429$$

Probabil. din metoda I diferă de cea din metoda II

Ex:

Avem n persoane și fiecare persoană are o pălărie. Dacă permutăm pălăriile care este probabilitatea ca cel puțin o persoană să primească pălăria corectă.

• Soluție:

$1, 2, \dots, n$ – persoanele

$1, 2, \dots, n$ – pălăriile

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$$

σ – bijectivă

Persoana i își primește pălăria corectă dacă $\sigma(i)=i$

$$\Omega = S_n = \{\sigma : \{1,2\dots n\} \to \{1,2\dots n\} \;/\; \sigma - \text{bij.}\}$$

E_i = persoana își primește pălăria corectă

$$E_i = \{\sigma \in S_n \;/\; \sigma(i) = i\}$$

$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ = cel puțin o persoană își primește pălăria corectă

$$|E| = \sum_{i=1}^{n} |E_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |E_i \cap E_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |E_i \cap E_j \cap E_k| - \dots + (-1)^{n-1} |E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n|$$

$$|E_i| = (n-1)!$$

$$|E_i \cap E_j| = (n-2)!$$

$$\vdots$$

$$|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n| = 1$$

$$P(E) = n \cdot \frac{(n-1)!}{n} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

$$P(E) = 1 - \frac{n\cancel{(n-1)}}{2} \cdot \frac{(n-2)!}{\cancel{n!}} + \frac{n\cancel{(n-1)}(n-2)}{3!} \cdot \frac{(n-3)!}{\cancel{n!}} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = -\left(-1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$P(E) = 1 - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 1 - \frac{1}{e}$$

$x_0 = \frac{a}{2}$, $a>0$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad x_n \to \sqrt{a}$$

x_n = monoton + mărginit $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ - convergent

* <u>Mărginire</u>

Evident $x_n > 0$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

(*)

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a - x_n^2}{x_n}\right) \leq 0 \Rightarrow x_n \searrow$$

$\sqrt{a} \leq x_n \leq x_0$ - mărginit

$x_n \downarrow$

$\Rightarrow x_n$ convergent

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Trecem la limită în (*)

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Leftrightarrow \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{l}$$

$x_n \geq 0 \Rightarrow l = \sqrt{a}$

25.10.2022

Laborator 4

1)

	competenți	incompetenți
Generali	30	70
Soldați	60	50

P(general | incompetent)

$P(\text{general}) = \frac{100}{210} = \frac{10}{21}$

$P(\text{general} \mid \text{incompetent}) = \frac{70}{120} = \frac{7}{12}$

$P(\text{competent} \mid \text{soldat}) = \frac{60}{110} = \frac{6}{11}$

cu def: $P(\text{general} \mid \text{incompetent}) = \frac{P(\text{gen. și incom.})}{P(\text{incom.})} = \frac{70/210}{120/210} = \frac{7}{12}$

2) Familie cu doi copii:

a) P(BB | cel puțin unul e băiat) = ?

b) P(BB | cel mai tânăr e băiat) = ?

Sol:

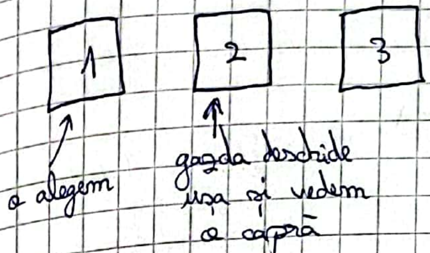
$\Omega = \{\underbrace{BB, BF, FB}, FF\}$

$P(BB) = \frac{1}{4}$

a) $P(BB \mid \ldots) = \frac{P(BB \text{ și } \ldots)}{P(\ldots)} = \frac{P(BB)}{P(\ldots)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

b) $P(BB \mid \ldots) = \frac{P(BB \text{ și } \ldots)}{P(\ldots)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$

3) Monty Hall Problem:



$C_i = \{$ maşina e în spatele uşii $i \}$ unde $i = \overline{1,3}$

$P(C_i) = \frac{1}{3}$

$X_1 =$ "aleg maşina din spatele uşii 1"

$H_2 =$ "gazda deschide uşa 2"

$$P(C_3 \mid X_1, H_2) = \frac{P(C_3 \mid X_1, H_2)}{P(X_1, H_2)} = \frac{P(X_1, H_2 \mid C_3) P(C_3)}{P(X_1, H_2)}$$

* Câmp de probabilitate:

• $(\Omega, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega))$ este o σ-algebră dacă:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

3) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

• $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ este un câmp de prob. dacă:

1) $(\Omega, \mathcal{F})$ e σ-alg.

2) $P(\Omega) = 1$

3) $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}$, atunci $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
disj.

* Formula lui Bayes:

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de prob.
Fie $A, B \in \mathcal{F}$ cu $P(A), P(B) > 0$.
Atunci:

1) $$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) P(B)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B) P(B)}{P(A \mid B) P(B) + P(A \mid B^c) P(B^c)}$$

2) $B_1, B_2 \ldots B_n \in \mathcal{F}$ care formează o partiţie pe Ω cu $P(B_i) > 0$, $\forall i = \overline{1,n}$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) P(B_j)}$$

$$P(X_1, H_2) = P(X_1, H_2 | C_1)\cdot P(C_1) + P(X_1, H_2 | C_2)\cdot P(C_2) + P(X_1, H_2 | C_3)\cdot P(C_3)$$

$P(X_1, H_2 | C_1) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(X_1, H_2 | C_3) = 1$

$P(X_1, H_2 | C_2) = 0$

$$P(X_1, H_2) = \frac{1 \cdot \cancel{\frac{1}{3}}}{\cancel{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}+0+1\right)} = \frac{2}{3}$$

4) Avem o sumă de k unități monetare, $0<k<n$

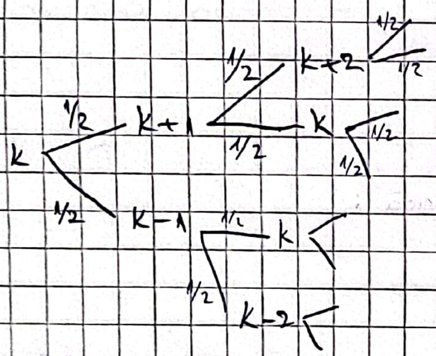
Dăm cu banul: Avem H $\Rightarrow$ +1 u.m.

Avem T $\Rightarrow$ −1 u.m.

Jocul se termină când suma este 0 sau n.

Care este prob. să ajungem în faliment?

Sol:



$A_k = \{$prob. să aj. la faliment dacă pornesc cu k u.m.$\}$

$P(A_k) = ?$

$B = \{$prima aruncare este H$\}$ $\Rightarrow P(B) = 1/2$

$$P(A_k) = P(A_k|B)\cdot P(B) + P(A_k|B^c)\cdot P(B^c) = \frac{1}{2}\left(P(A_{k+1}) + P(A_{k-1})\right)$$

$P_k := P(A_k)$

$P_k = \frac{1}{2}(P_{k+1} + P_{k-1})$

MI: $a\cdot x_{n+2} + b\cdot x_{n+1} + c\cdot x_n = 0$

$at^2 + bt + c = 0$

$t_{1,2}$ - sol.

I $t_1 \neq t_2$, $x_n = A t_1^n + B t_2^n$

II $t_1 = t_2 = t$, $x_n = A t^n + nBt^n$

$P_{k+1} - 2P_k + P_{k-1} = 0 \rightsquigarrow t^2 - 2t + 1 = 0$

$\Rightarrow t_1 = t_2 = 1$

$p_k = A + kB = A \cdot 1^k + k \cdot B \cdot 1^k$

$p_0 = 1 \Rightarrow A = 1$

$p_n = 0 \Rightarrow 1 + nB = 0 \Rightarrow B = \frac{-1}{n}$

$\Rightarrow p_k = 1 - \frac{k}{n}$

(M II) $p_k = \frac{1}{2}\left(p_{k+1} + p_{k-1}\right) \Leftrightarrow (p_k)_{k \geq 0}$ progresie aritmetică

$p_k = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{p_0}} + k \cdot r$

$p_n = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{n}$

01.11.2022

Seminar 5

A – eveniment

Ce reprezintă P(A)?

Exemplu: Aruncăm cu un zar de N ori

$A =$ "apare fața 1"

$N(A) :=$ de câte ori apare în cele N aruncări

$$\boxed{\frac{N(A)}{N} \simeq P(A) = \frac{1}{6}}$$

$$N(A) \simeq \frac{1}{6} N$$

2) $P(B|A)$

Simulăm de N ori

$N(A) :=$ nr. de apariții al ev. A

$N(B) :=$ nr de ap. al ev. B

$N(A \cap B) :=$ — " — $A \cap B$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \simeq \frac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(A)}{N}} = \frac{N(A\cap B)}{N(A)}$$

• Aplicație:

$P(BB \mid$ cel puțin unul este băiat$) = \frac{1}{3}$

$P(BB \mid$ cel mai dăvan este băiat$) = \frac{1}{2}$

$N(BB \cap$ cel puțin un băiat$) = N(BB) = 1/4$

$N($cel puțin un băiat$) = 3/4$

Partea de PC pe laptop

• Temă:

Avem o sumă de k u.m., aruncăm cu banul, dacă pică $H \to +1$, $T \to -1$

jocul se termină când ajungem la 0 sau m.

$0 < k < m$

$$P(\text{faliment}) = 1 - \frac{k}{m}$$

De simulat falimentul în R, de trimis pe Teams.

* Independența:

A, B - independente

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple:

1) Aruncăm cu banul de două ori.
Prima aruncare este independentă de a doua.

HH, HT, TH, TT

$$P(HH) = P(HT) = P(TH) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

$$P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(HH) = P(H) \cdot P(H) \\ P(HT) = P(H) \cdot P(T) \\ P(TH) = P(T) \cdot P(H) \\ P(TT) = P(T) \cdot P(T) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{cele două aruncări sunt independente}$$

2) Aruncăm cu două monede.

A = primul ban e H

B = al doilea e T

C = amândoi dau același lucru

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A, B \\ A, C \\ B, C \end{array}\right\} \text{sunt independente}$$

Dar A, B, C nu sunt independente

- Independența mai multor evenimente

$A_1, A_2, \dots A_m$ - independente dacă și numai dacă

$$P(A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \dots \cap A_m^{\varepsilon_m}) = P(A_1^{\varepsilon_1}) \cdot P(A_2^{\varepsilon_2}) \cdot \dots \cdot P(A_m^{\varepsilon_m})$$

$\varepsilon_i \in \{0, 1\}$

$1 \to$ ev. A_i e luat în considerare

$0 \to$ ev. A_i nu e luat —"—

Exemplu: A, B, C - independente

$\Updownarrow$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Soluție: $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

$A = \{HT, HH\}$

$B = \{HT, TT\}$

$C = \{HH, TT\}$

1) $P(A \cap B) = P(HT) = \frac{1}{4}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ✓

2) $P(A \cap C) = P(HH) = \frac{1}{4}$

$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ✓

3) la fel ✓

4) primele 3 au loc

$A \cap B \cap C = \emptyset$

$P(A \cap B \cap C) = 0$

$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$ ✗

$\Rightarrow A, B, C$ nu sunt independente

Exp: Aruncăm 2 zaruri

a) E_n: în primele $n-1$ aruncări nu a apărut suma 5 și 7 și în a n-a aruncare apare 5

Calculați $P(E_n)$

b) Care este probabil. ca suma 5 să apară înaintea sumei 7

Sol: $\Omega = \{(x,y) / x,y \in \{1,2..6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

A_5 - apare suma 5

A_7 - apare suma 7

$5 = 1+4$, $2+3$, $3+2$, $4+1$ $\quad P(A_5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$7 = 1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$ $\quad P(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

B_i = nu apare nici suma 5 și nici 7 în A_i-a aruncare

$P(B_i) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$

$E_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap A_{5,n}$

$B_1, B_2 \ldots B_{n-1}, A_{5,n}$ sunt independente

$P(E_n) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap A_{5,n}) = P(B_1) \cdot \ldots \cdot P(B_{n-1}) \cdot P(A_{5,n}) =$

$= \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{9}$

b) E = suma 5 apare înaintea sumei 7

5 x x x $= E_1$

a 5 x x $= E_2$

nici 5 nici 7: a_1 a_2 5 x x $= E_3$ $\quad a_1, a_2 \neq 5, 7$

$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$E_i \cap E_j = \emptyset \quad, \forall i \neq j$

$P(E) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}$

Reminder:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \ |q|<1$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^n = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{18}{5} = \frac{2}{5}$$

Seminar 6

* Variabile aleatoare

• Def!

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de prob.

Spunem că $X: \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a.

dacă: $\underbrace{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}}_{X \le x} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• Exemplu:

Datul cu banul

Dacă pică $H \to +1$

$T \to -1$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

$X(H) = 1$

$X(T) = 1$

$\Omega = \{H, T\}$

• Def!

Fie $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a.

Spunem că X este discretă dacă $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă

cel mult numărabil $<$ finită / numărabilă

· Def! Mulțimea A este numărabilă dacă $\exists f: \mathbb{N} \to A$ bij.

$A = \{ f(0), f(1), f(2) \dots \}$

· Exemple de mult. numărabile

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

$$f \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 2 & -3 & 3 & \end{array}$$

$\mathbb{Q}$ - numărabilă

$$\begin{array}{ccccc} \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \dots \\ \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \dots \\ \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \dots \end{array}$$

$\mathbb{R}$ - nu e numărabilă

Dacă X v.a. discretă

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix} \qquad p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$$

· Obs!

$p_i \geq 0$, $\forall i$

$\sum_{i \geq 1} p_i = 1$

Exemplu: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p., unde $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ și $\mathbb{P}$ este distr. uniformă pe Ω

· Def!

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad X(a) = 6$, $X(b) = 4$, $X(c) = 6$, $X(d) = 4$, $X(e) = 6$

Care este distr. lui X?

Sol: $X \sim \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

$\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 4\}) = \mathbb{P}(\{b, d\}) = \mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$\mathbb{P}(X=6) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 6\})$

$\mathbb{P}(\{a, c, e\}) = 3/5$

2) $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$

Să se afle distr. pt. urm. v.a.

$3X+7$, X^2, X^3, $X+X^2$ și să se calc. $\mathbb{P}(X > -\frac{1}{3})$ și $\mathbb{P}(X < \frac{1}{4} / X \geq -\frac{1}{2})$

• Sol:

$$3X+7 \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}(X^2=0) = \mathbb{P}(X=0) = 0,2$$

$$\mathbb{P}(X^2=1) = \mathbb{P}(X=-1 \cup X=1) =$$
$$= \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=1) = 0,3+0,5=0,8$$

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$X+X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(X^2+X=0) = \mathbb{P}(X(X+1)=0) = \mathbb{P}(X=0 \cup X=-1) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=-1) =$$
$$= 0,2+0,3 = 0,5$$

$$\mathbb{P}(X^2+X=2) = \mathbb{P}(X(X+1)=2) = \mathbb{P}(X=1) = 0,5$$

$$\mathbb{P}(X > -\tfrac{1}{3}) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 0,7$$

$$\mathbb{P}(X < \tfrac{1}{4} \mid X \geq -\tfrac{1}{2}) = \frac{\mathbb{P}(X < \frac{1}{4} \cap X \geq -\frac{1}{2})}{\mathbb{P}(X \geq -\frac{1}{2})} = \frac{\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}$$

• Experiment:

Aruncăm două monede de n ori. Care e prob. ca prima monedă să aibă mai mulți H decât a doua.

• Sol: $X :=$ nr. de H pt. moneda 1

$Y :=$ nr. de H pt. moneda 2

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^n} & \frac{C_n^2}{2^n} & \dots & \frac{C_n^n}{2^n} \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n\},\ \omega_i \in \{H, T\} \Rightarrow |\Omega| = 2^n$$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(TT\ldots T) = \frac{1}{2^n}$

$$\left.\begin{array}{l} HTT\ldots \\ THT\ldots \\ TTH\ldots \\ \ldots \end{array}\right\} \to n$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \frac{C_n^0}{2^n} & \frac{C_n^1}{2^n} & \frac{C_n^2}{2^n} & \frac{C_n^3}{2^n} & \ldots & \frac{C_n^n}{2^n} \end{pmatrix}$$

X, Y – distribuția binomială de parametru n

$\sim Bin(n, \frac{1}{2})$

Vrem $\mathbb{P}(X>Y)$?

$\mathbb{P}(X>Y) + \mathbb{P}(X<Y) + \mathbb{P}(X=Y) = 1$

$2\mathbb{P}(X>Y) + \mathbb{P}(X=Y) = 1$

$$\mathbb{P}(X>Y) = \frac{1-\mathbb{P}(X=Y)}{2} = \frac{1-\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{C_{2n}^n}{2^{2n+1}}$$

$$\mathbb{P}(X=Y) = \mathbb{P}(\{X=0, Y=0\} \cup \{X=1, Y=1\} \cup \ldots \cup \{X=n, Y=n\}) =$$
$$= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X=i, Y=i) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X=i)\cdot\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{i=0}^n \frac{C_n^i \cdot C_n^i}{2^n \cdot 2^n} =$$

X, Y – indep. $\qquad = \sum_{i=0}^n \frac{(C_n^i)^2}{2^{2n}}$

$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

$$(1+X)^n (1+X)^n = (1+X)^{2n}$$

$$\sum_{i=0}^n C_n^i X^i \qquad \sum_{j=0}^n C_n^j X^j \qquad \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k X^k$$

! două pol. sunt egale dacă au aceeași coef. În partea dreaptă termenul X^n are coef C_{2n}^n.

$(X^i, X^{n-i}) \to X^n$

$\hookrightarrow$ coef lui X^n în partea stângă $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \ldots + C_n^n C_n^0 =$
$= (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$

Seminar 7

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. Spunem că $X_1 \dots X_n$ sunt indep. dacă

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots X_n \le x_n) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1) \dots \mathbb{P}(X_n \le x_n) \quad (*)$$

$$\forall x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$$

Ex:

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

X, Y - indep.

$Z = XY$

$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$

$Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n & \dots \end{pmatrix}$

$(*) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$

$\forall i, j$

Arătați că X, Y, Z indep. 2 câte 2

Sunt X, Y, Z indep?

• Sol: X, Y - indep din ipoteză

X, Z:

$$\mathbb{P}(X = a, Z = b) \overset{1/4}{=} \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Z = b), \quad \forall a, b \in \{-1, 1\}$$

$$Z \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(XY = -1) = \mathbb{P}((X = -1, Y = 1) \cup (X = 1, Y = -1)) =$$

$$= \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) \overset{\text{indep}}{=}$$

$$= \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = -1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$a = 1, b = 1$:

$$\mathbb{P}(X = 1, Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \overset{\text{indep}}{=} \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}$$

$a = 1, b = -1$:

$$\mathbb{P}(X = 1, Z = -1) = \mathbb{P}(X = 1, XY = -1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) \overset{X,Y \text{ indep}}{=} \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{4}$$

⋮

În concluzie X și Z sunt indep.

Analog se dem. că Y și Z sunt indep.

Sunt X, Y, Z indep?

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y, Z=z) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}(Z=z) = \frac{1}{8}, \quad \forall x, y, z \in \{-1, 1\}$$

$x=y=z=1$

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1, Z=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1, XY=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{4}$$

$\Downarrow$

X, Y, Z nu sunt indep.

Ex: Avem un sac cu 10 bile (albe + negre)

Scoatem din sac 10 bile cu întoarcere și obs. că toate bilele extrase sunt albe. Care e prob. ca toate bilele din sac să fie albe?

Sol: X = nr. bilelor albe

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 10 \\ \frac{C_{10}^0}{2^{10}} & \frac{C_{10}^1}{2^{10}} & \frac{C_{10}^2}{2^{10}} & \dots & \frac{C_{10}^{10}}{2^{10}} \end{pmatrix} \qquad X \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

$A = \{$am extras 10 bile cu întoarcere și toate sunt albe$\}$

$$\mathbb{P}(X=10 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid X=10)\mathbb{P}(X=10)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(A \mid X=10) = 1$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{10} \mathbb{P}(A \mid X=i)\mathbb{P}(X=i)$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A, X=0) \cup (A, X=1) \cup \dots \cup (A, X=10)) = \sum_{i=0}^{10} \mathbb{P}(A, X=i) = \sum_{i=0}^{10} \mathbb{P}(A \mid X=i)\mathbb{P}(X=i)$$

$$\mathbb{P}(A \mid X_i) = \left(\frac{i}{10}\right)^{10}$$

$$\mathbb{P}(X=10 \mid A) = \frac{1/2^{10}}{\sum_{i=0}^{10} \left(\frac{i}{10}\right)^{10} \cdot \frac{C_{10}^i}{2^{10}}} \simeq 0,07$$

- Distribuția Poisson:

$X \sim \mathbb{P}(\lambda)$

$\mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Ex:

a) $X \sim \mathbb{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathbb{P}(\mu)$, X, Y indep. $\Rightarrow X+Y \sim \mathbb{P}(\lambda+\mu)$

b) $X \mid X+Y=n \sim Bin\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

a) $\mathbb{P}(X+Y=n) = \mathbb{P}(\{X=0, Y=n\} \cup \{X=1, Y=n-1\} \cup \ldots \cup \{X=n, Y=0\}) =$

$\cancel{b(\ldots)}$?

$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i, Y=n-i) \overset{X,Y \text{ indep}}{=\!=\!=} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=n-i) =$

$= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i \cdot \mu^{n-i}}{i!\,(n-i)!} =$

$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{i!\,(n-i)!}}_{C_n^i} \cdot \lambda^i \cdot \mu^{n-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda+\mu)^n$

$\Downarrow$

$X+Y \sim \mathbb{P}(\lambda+\mu)$

b) $\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k \cap X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$

$\mathbb{P}(X=k \cap X+Y=n) = \mathbb{P}(X=k \cap Y=n-k) \overset{X,Y \text{ indep}}{=\!=\!=}$

$= \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$

$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{\lambda^k \cdot \mu^{n-k}}{k!\,(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \underbrace{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}_{C_n^k} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \mid X+Y=n \sim Bin\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+m}\right)$

$X \sim Bin(n, p)$

$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Ex: Avem în buzunar N monezi, unde $N \sim \mathbb{P}(\lambda)$

Luăm fiecare monedă și o aruncăm.

Notăm cu $X := $ nr. de H

Dacă prob. să apară H e p atunci arătați că X are o distribuție Poisson de parametru λp $\mathbb{P}(\lambda p)$

Sol: Dacă N e un nr., atunci care este distribuția lui X

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & N \\ (1-p)^N & p(1-p)^{N-1} & & & \end{pmatrix}$$

În general, $\mathbb{P}(X=k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$

$$X \sim Bin(N, p)$$

Ce se întâmplă dacă N e o v.a. cu distr. $\mathbb{P}(\lambda)$?

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k \mid N=i)\,\mathbb{P}(N=i)$$

$$\mathbb{P}(X=k \mid N=n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad n \geq k$$

$$\mathbb{P}(X=k \mid N=i) = 0, \quad \forall i < k$$

$$\mathbb{P}(X=k \mid N=i) = C_i^k p^k (1-p)^{i-k}, \quad i \geq k$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{i=k}^{\infty} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} =$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\cancel{i!}}{k!(i-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{i-k} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{\cancel{i!}} =$$

$$= \frac{p^k \lambda^k}{k!} \cdot \sum_{i=k}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{i-k}}{(i-k)!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \frac{((1-p)\lambda)^i}{i!}}_{e^{(1-p)\lambda}} = e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^k}{k!} \rightarrow X \sim \mathbb{P}(\lambda p)$$

$$e^{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

Seminar 8

• Def:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$EX := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot p_n$$

Ex: (Paradoxul Saint-Petersburg)

Fie următorul joc. Se aruncă succesiv un zar până când apare prima dată cifra 6. Dacă 6 apare la a n-a aruncare, atunci câștigăm $\left(\frac{6}{5}\right)^n$ lei. Considerăm X câștigul obținut la finalul jocului.

$n = 1$ 6 $\rightarrow \frac{6}{5}$ lei $= 1,2$

$n = 2$ $\neq 6$ $\rightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^2 = (1,2)^2 = 1,44$ lei

$\vdots$

$n = 10 \longrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^{10} = (1,2)^{10} = 6,19$

$\vdots$

$n = 20 \longrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^{20} = 32,33$

a) $E(X) = \infty$

b) Merită să dăm 1 000 000 pt. acest joc?

• Dau cu banul:

H → +1 (câștig 1)

T → −1

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = -1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Sol:

$$X \sim \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \left(\frac{6}{5}\right)^2 & \left(\frac{6}{5}\right)^3 & \dots & \left(\frac{6}{5}\right)^n & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} & \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} & \dots & \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6} & \end{pmatrix}$$

$$Ex = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5} = \infty$$

$$\mathbb{P}\left(X = \left(\frac{6}{5}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{NU}$$

$$\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}_{<1} \qquad X \sim Geom\left(\frac{1}{6}\right)$$

$Ex = \infty$ DA

Ex: Vrem să găsim n cupoane diferite în cutiile de cereale

Pp. că fiecare cupon este ales uniform și independent din cele n posib

Câte cutii de cereale trebuie să cumpăr în medie pentru a obține cel puțin unul din fiecare cupon.

Sol: X = nr. min. de cutii

$E(X) = ?$

X_i = nr minim de cutii ca să găsesc ceva diferit de i

① 2 ... n

X_1 = nr. min de cutii — " — dif. de 1

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right) & \frac{1}{n^2}\left(\frac{n-1}{n}\right) & \dots & \left(\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}\right) & \dots \end{pmatrix}$$

$X_1 \sim Geom\left(\frac{n-1}{n}\right)$

X_2 := nr minim de cutii — " — ceva dif de primele 2 cupoane

$$X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{n-2}{n} & \frac{2}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right) & \left(\frac{2}{n}\right)^2\left(\frac{n-2}{n}\right) & \dots & \left(\frac{2}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-2}{n}\right) & \end{pmatrix}, \quad X_2 \sim Geom\left(\frac{n-2}{n}\right)$$

$$X_i \sim Geom\left(\frac{n-i}{n}\right), \quad \forall i = \overline{1, n-1}$$

$$X = 1 + X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$$

$$EX = 1 + EX_1 + EX_2 + \dots + EX_{n-1}$$

$$EX = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1}$$

$$EX = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1}$$

$$EX = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$$

$EX \sim n \cdot \ln n$ pt. n foarte mare

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p & p(1-p) & \dots & p(1-p)^{n-1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} n p (1-p)^{n-1} =$$
$$= -p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left((1-p)^n\right)' =$$
$$= -p \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n\right)' = \quad \text{→ sumă progr. geom}$$
$$= -p \cdot \left(1-p \cdot \frac{1}{1-(1-p)}\right)' =$$
$$= -p \left(\frac{1-p}{p}\right)' =$$
$$= -p\left(\frac{1}{p} - 1\right)' = -p \cdot \left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

Exp: X v.a. discretă a.î. $P(X=k) = \frac{(1-p)^k}{-k \cdot \log p}$, unde $k \geq 1$ și $P(X=0)=0$ cu $0<p<1$

Să se calculeze: EX, EX^2, $Var\, X$

Soluție:

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(X=n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(1-p)^n}{-n \log p} =$$
$$= \frac{-1}{\log p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n =$$
$$= \frac{-1}{\log p}\left(1-p \cdot \frac{1}{1-(1-p)}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\log p} \cdot \frac{1-p}{p}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$g(X) \sim \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \dots & g(x_n) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$Eg(X) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) \cdot p_n$$

$$Var\, X = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{(1-p)^n}{-n \log p} = \frac{-1}{\log p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^n =$$
$$= \frac{-(1-p)}{\log p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = \frac{1-p}{\log p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left((1-p)^n\right)' =$$
$$= \frac{1-p}{\log p}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n\right)' = \frac{1-p}{\log p}\left(\frac{1-p}{p}\right)' = \frac{1-p}{\dots} \cdot \left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1-p}{\dots}$$

$$1+q+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1+q+\dots+q^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$