Examen parțial LMC

Ex 1.

Fie $(P, \leq)$ și $(Q, \leq)$ poseturi.

$g : P \to Q$ un morfism între aceste poseturi.

Dem:

a) $\leq \cup Ker(g) \subseteq \leq \circ Ker(g)$

b) dacă $(P, \leq)$ e poset mărginit sau latice, iar $\leq \circ Ker(g) = Ker(g)$, at $|g(P)| = 1$

Rezolvare:

a) $\leq \cup Ker(g) \subseteq \leq \circ Ker(g)$

Funcția $g : P \to Q$ e morfism de poseturi dacă pt $\forall x, x' \in P$; $x \leq x'$, avem $g(x) \leq g(x')$, deci este o fct care ~~pa~~ conservă relația de ordine; e o fct monotonă.

De asemenea, știm că $Ker(g) = \{(x, y) \in P^2 \mid g(x) = g(y)\}$, care aparține mulțimii $Eq(P)$ a relațiilor de echivalență pe P.

Mulțimea factor prin această relație de echivalență e formată din clasele:

$$P/Ker(g) = \{ g^{-1}(\{u\}) / u \in Q \}.$$

Relația de ordine pe P e $\left\{\begin{array}{l}\text{reflexivă} \\ \text{antisimetrică} \\ \text{tranzitivă}\end{array}\right\}$, notată $\leq$.

Folosind cele 3 proprietăți mai sus menționate ale relației de ordine pe P obținem că

~~$\leq \cup Ker(g) \subseteq \leq$~~

$\leq \cup Ker(g) \subseteq \leq \circ Ker(g)$.

b) dacă $(P, \leq)$ e poset mărginit sau latice, iar $\leq \circ Ker(g) = Ker(g)$, atunci $|g(P)| = 1$.

De la ⓐ, punctul precedent, știm că $\leq \cup Ker(g) \subseteq \leq \circ Ker(g)$, dar, în cazul acesta, avem $\leq \circ Ker(g) = Ker(g)$, deci $\leq \cup Ker(g) \subseteq Ker(g)$ și cum $(P, \leq)$ e poset mărginit sau latice, atunci acesta va conține o singură valoare, aceasta fiind minimală deci $|g(P)| = 1$.

Ex 2.

L și M latici nevide

S sublatice a lui L

T sublatice a lui M

$f : L \to M$ un morfism de latici

1. Dacă S e latice booleană $\Rightarrow f(S)$ e booleană

S - ~~bole~~ booleană $\Rightarrow$ S
- mărginită
- complementată
- distributivă

f - morfism de latici $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a)\ f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y), & \forall x, y \in S \\ b)\ f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y), & \forall x, y \in S \\ c)\ \forall x, y \in S,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y) \end{cases}$$

S - mărginită $\Rightarrow \exists$ $1 \in S$ ultim element
$0 \in S$ prim element

$\Rightarrow 1 \vee x = 1, \ \forall x \in S$
$0 \wedge x = 0, \ \forall x \in S$

Dem că $\begin{cases} f(1) \text{ e ultim element în } f(S) \\ f(0) \text{ e } \cancel{\text{ultim}} \text{ prim element în } f(S) \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{pt } x \in S \Rightarrow 1 \vee x = 1 \Rightarrow f(1 \vee x) = f(1) \\ f\text{-morfism} \Rightarrow f(1 \vee x) = f(1) \sqcup f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(1) \sqcup f(x) = f(1) \\ f(x) \in f(S) \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) \in S \text{ este ultim elem în } f(S)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{pt } x \in S \Rightarrow 0 \wedge x = 0 \Rightarrow f(0 \wedge x) = f(0) \\ f\text{-morfism} \Rightarrow f(0 \wedge x) = f(0) \sqcap f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0) \sqcap f(x) = f(0) \\ f(x) \in f(S) \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) \in S \text{ este prim elem în } f(S)$$

$\Rightarrow f(S)$ este mărginită (A)

S - distributivă

$\Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \ \forall x, y, z \in S$

$\Rightarrow f(x \vee (y \wedge z)) = f((x \vee y) \wedge (x \vee z))$

$\overset{f\,morf}{\Rightarrow} f(x) \sqcup f(y \wedge z) = f(x \vee y) \sqcap f(x \vee z)$

$\overset{f\,morf}{\Rightarrow} f(x) \sqcup (f(y) \sqcap f(z)) = (f(x) \sqcup f(y)) \sqcap (f(x) \sqcup f(z))$

$\forall f(x), f(y), f(z) \in f(S)$

$\Rightarrow f(S)$ e distributivă (B)

S - complementată $\Rightarrow \forall x \in S$ e complementată $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x^c = y \in S$ a.î. $x \vee y = 1$

$x \wedge y = 0$

Dem că $f(y)$ e complementul lui $f(x)$ din $f(S)$

Avem $f(x) \sqcup f(y) \overset{f\,morf}{=} f(x \vee y) = f(1)$ - ultim elem în $f(S)$

$f(x) \sqcap f(y) \overset{f\,morf}{=} f(x \wedge y) = f(0)$ - prim elem în $f(S)$

$\Rightarrow f(x)^c = f(x^c)$ în $f(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(S)$ e complementată (C)

Dem că $f(S)$ e sublatice

Fie $v, w \in f(S) \Rightarrow \exists\, x, y \in S$ a.î. $v = f(x)$
$w = f(y)$

S latice $\Rightarrow x \vee y \in S \Rightarrow f(x \vee y) \in f(S)$
$x \wedge y \in S \Rightarrow f(x \wedge y) \in f(S)$ $\Big| \Rightarrow$

$\overset{f \text{ morf}}{\Longrightarrow}$ $f(x) \sqcup f(y) \in f(S)$
$f(x) \sqcap f(y) \in f(S)$ $\Big| \Rightarrow v \sqcup w \in f(S) \subset M$
$v \sqcap w \in f(S) \subset M$

$\Rightarrow f(S)$ e o sublatice a lui M (D)

Din (A) + (B) + (C) + (D) $\Rightarrow f(S)$ e o sublatice ~~tota~~ booleană a lui M

2. Dacă $f(S)$ e o sublatice nedistributivă a lui M, atunci S e nedistributivă.

$f(S)$ e nedistributivă $\Rightarrow \exists\, v, w, t \in f(S)$
a.î. $v \sqcup (w \sqcap t) \neq (v \sqcup w) \sqcap (v \sqcup t)$ (*)

$v, w, t \in f(S) \Rightarrow \exists\, x, y, z \in S$ a.î. $v = f(x)$
$w = f(y)$
$t = f(z)$

Presupunem că S e distributivă

$\Rightarrow$ pt $x, y, z \in S$ avem $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\Rightarrow f(x \vee (y \wedge z)) = f((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \Rightarrow$

$\overset{f \text{ morf}}{\Rightarrow} f(x) \sqcup f(y \wedge z) = f(x \vee y) \sqcap f(x \vee z) \Rightarrow$

$\overset{f \text{ morf}}{\Rightarrow} f(x) \sqcup (f(y) \sqcap f(z)) = (f(x) \sqcup f(y)) \sqcap (f(x) \sqcup f(z))$

$\Rightarrow v \sqcup (w \sqcap t) = (v \sqcup w) \sqcap (v \sqcup t)$ - abs cu $(*)$

$\Rightarrow S$ e nedistributivă

3. T nedistributivă, at $f^{-1}(T)$ sublatice nedistributivă a lui L

Dem că $f^{-1}(T)$ e sublatice a lui L $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\, x, y \in f^{-1}(T)$, avem $x \vee y \in f^{-1}(T)$

$x \wedge y \in f^{-1}(T)$

$x, y \in f^{-1}(T) \Rightarrow \exists\, v, w \in T$ a.î. $f(x) = v$

$f(y) = w$

$\overset{f \text{ morf}}{\Rightarrow} f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y) = v \sqcup w \in T \Rightarrow x \vee y \in f^{-1}(T)$

$\overset{f \text{ morf}}{\Rightarrow} f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y) = v \sqcap w \in T \Rightarrow x \wedge y \in f^{-1}(T)$

$\Rightarrow f^{-1}(T)$ e sublatice a lui L

T-nedistributivă $\Rightarrow \exists\, v, w, t \in T$ a.î.

$v \sqcup (w \sqcap t) \neq (v \sqcup w) \sqcap (v \sqcap t)$ (*)

$v, w, t \in T \Rightarrow \exists\, x, y, z \in f^{-1}(T)$ a.î. $\cancel{f}x = f(v)$

$y = f(w)$

$z = f(t)$

Presupunem $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x \vee (y \wedge z)) = f((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \Rightarrow$

$\overset{f\,morf}{\Rightarrow} f(x) \sqcup f(y \wedge z) = f(x \vee y) \sqcap f(x \vee z)$

$\overset{f\,morf}{\Rightarrow} f(x) \sqcup (f(y) \sqcap f(z)) = (f(x) \sqcup f(y)) \sqcap (f(x) \sqcup f(z))$

$\Rightarrow v \sqcup (w \sqcap t) = (v \sqcup w) \sqcap (v \sqcap t)$ – $\not\!\!\!\!\!\!\!$ cu (*)

$\Rightarrow$ ~~$\exists\, x, y$~~ $\exists\, x, y, z \in f^{-1}(T)$ a.î. $x \vee (y \wedge z) \neq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\Rightarrow f^{-1}(T)$ – nedistributivă.

4. Dacă $\sim$ e o congruență a laticii L, atunci clasele lui $\sim$ sunt sublatici ~~conexe~~ ale lui L

$\sim$ congruență a laticii L

Fie a o algebră de tip $\tau = (n_1, n_2, n_0)_\tau$

Pt orice $\Theta \overset{not}{=} \mathrm{Echiv}(A)$, relație de congruență pe A verifică așa zisa proprietate de substituție

Pt fiecare $i, j \in \Theta$, dacă $(a_i, a_j \in \Theta$ pt $j = 1, 2, n_i)$, atunci $(f_i(a_1, a_{n_i}); (f_i(a, a_{n_i}) \in \Theta$.

Iar prin această proprietate obținem că clasele lui $\sim$ sunt sublatici convexe ale lui L.

5. Δ_L e o congruență a laticii L și laticea factor $L/_{\Delta_L}$ e izomorfă cu L;

~~Fie~~ $(L, V, \wedge)$ latice, iar ΔL e o congruență a laticii L, atunci $(L/_{\Delta L}, V, \wedge)$ e o latice factor a lui L prin Δ_L, unde avem că $L/_{\Delta_L} = \{x/_{\Delta_L} \mid x \in L\}$ - mulțimea factor a lui L prin ΔL, iar pt $\forall\ x, y \in L$ avem

$x/_{\Delta L} \vee y/_{\Delta L} := (x \vee y)/_{\Delta L}$ și $x/_{\Delta L} \wedge y/_{\Delta L} := (x \wedge y)/_{\Delta L}$

Așadar laticea factor $L/_{\Delta L}$ e izomorfă cu L.

6. $Ker(f) \cap S^2$ e o congruență a laticii S și laticea factor $S/(Ker(f) \cap S^2)$ e izomorfă cu laticea $f(S)$.

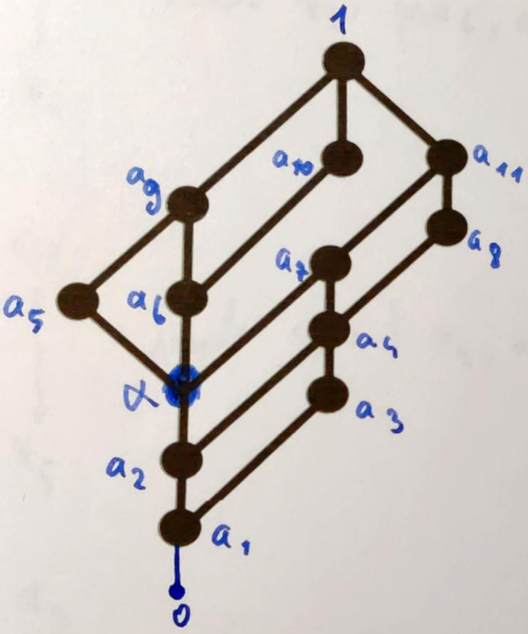
$Ker(f) = \{(x,y) \in S^2 \mid f(x) = f(y)\}$ aparține mulțimii $Eq(S)$ a relațiilor de echivalență pe S.

$S/Ker(f) = \{f^{-1}(\{u\}) \mid u \in T\}$ - mulțimea factor

Folosind aceste notații și demonstrația făcută la pct anterior (5) obținem că laticea factor $S/(Ker(f) \cap S^2)$ e izomorfă cu laticea $f(S)$.

Ex 3: $n_k = -1$ $n_j = 3$

1. Să se enumere toate sublaticele ~~bol~~ booleene S_{-1} ale lui L_{-1}



• $\mathcal{L}_1$: $0=1=x$ unde $x = \{0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \alpha, 1\}$

• $\mathcal{L}_2$: 1 — x_1 unde $x_1 = \{0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \alpha\}$

a_{11} — x_2 unde $x_2 = \{a_8, a_7, a_4, a_3, a_2, a_1, 0, \alpha\}$

a_{10} — x_3 unde $x_3 = \{\alpha, a_6, a_2, a_1\}$

a_9

unde x_4: $\{a, a_6, a_5, a_2, a_1, 0\}$.

x_4

a_8

unde x_5: $\{a_4, a_3, a_2, a_1, 0\}$

x_5

a_7

unde x_6: $\{a_4, a_3, a_2, a_1, 0\}$

x_6

a_6

unde x_7: $\{a, a_2, a_1, 0\}$

x_7

a_5

unde x_8: $\{a, a_2, a_1, 0\}$

x_8

a

$$\begin{tikzcd} a_4 \arrow[d, dash] \\ X_9 \end{tikzcd}$$

unde $X_9 = \{a_3, a_2, a_1, 0\}$

$$\begin{tikzcd} a_3 \arrow[d, dash] \\ X_{10} \end{tikzcd}$$

unde $X_{10} = \{a_1, 0\}$

$$\begin{tikzcd} a_2 \arrow[d, dash] \\ X_{11} \end{tikzcd}$$

unde $X_{11} = \{a_1, 0\}$

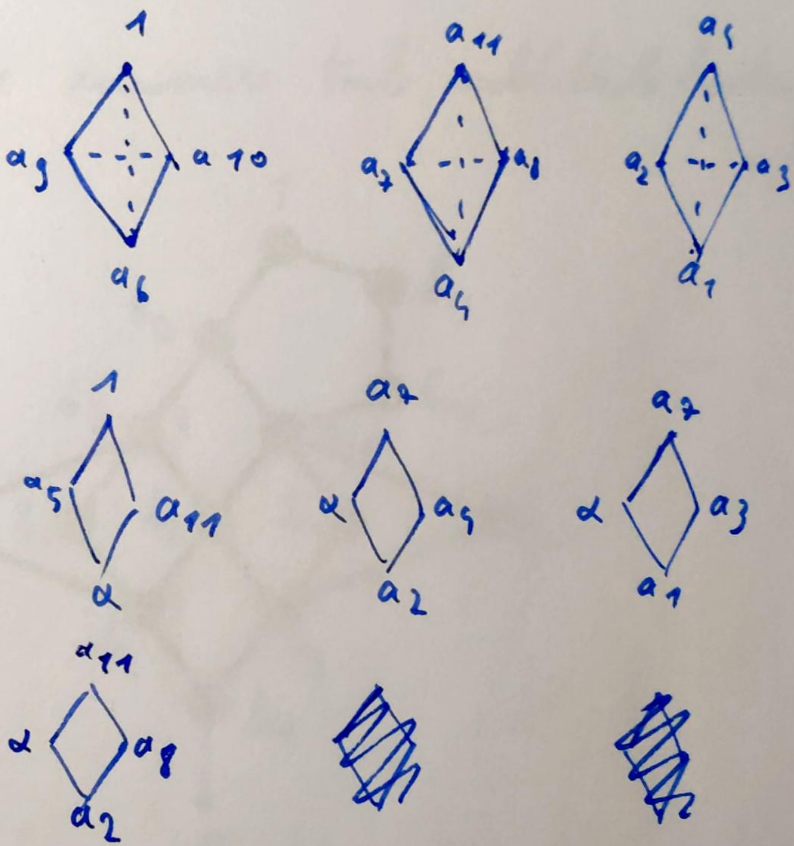
$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[d, dash] \\ X_{12} \end{tikzcd}$$

unde $X_{12} = \{0\}$

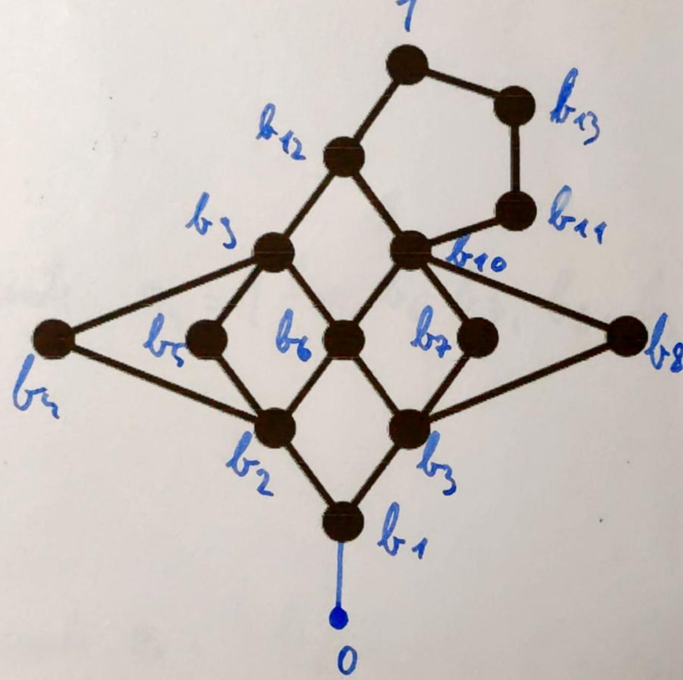
$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[d, dash] \\ X_{13} \end{tikzcd}$$

unde $X_{13} = \{a_2, a_1, 0\}$

• $\mathcal{L}_2^2$:


1
a9
a10
a6
a11
a7
a8
a4
a5
a2
a3
a1
1
a5
a11
α
a7
α
a4
a2
a7
α
a3
a1
a11
α
a8
a2

1. Să se enumere toate sublaticile booleene S_3 ale lui L_3



• $\mathcal{L}_1$: $0 = x = 1$ unde $x = \{0; b_1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6; b_7; b_8; b_9; b_{10}; b_{11}; b_{12}; b_{13}; 1\}$

• $\mathcal{L}_2$: 1 — x_1 unde $x_1 = \{0; b_1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6; b_7; b_8; b_9; b_{10}; b_{11}; b_{12}; b_{13}\}$

b_{13} — x_2 unde $x_2 = \{b_{11}, b_{10}, b_6, b_7, b_8, b_3, b_2, b_1\}$

$$\begin{tikzcd} b_{12} \arrow[d, no head] \\ x_3 \end{tikzcd}$$ unde $x_3 = \{b_{10}, b_9, b_8, b_7, b_6, b_5, b_4, b_3, b_2, b_1, 0\}$

$$\begin{tikzcd} b_{11} \arrow[d, no head] \\ x_4 \end{tikzcd}$$ unde $x_4 = \{b_{10}, b_6, b_7, b_8, b_3, b_2, b_1, 0\}$

$$\begin{tikzcd} b_{10} \arrow[d, no head] \\ x_5 \end{tikzcd}$$ unde $x_5 = \{b_6, b_7, b_8, b_3, b_2, b_1, 0\}$

$$\begin{tikzcd} b_9 \arrow[d, no head] \\ x_6 \end{tikzcd}$$ unde $x_6 = \{b_6, b_5, b_4, b_2, b_1, b_3, 0\}$.

$$\begin{tikzcd} b_{\cancel{1}8} \arrow[d, no head] \\ x_7 \end{tikzcd}$$ unde $x_7 = \{b_3, b_1, 0\}$.

$$\begin{tikzcd} b_7 \arrow[d, dash] \\ x_8 \end{tikzcd}$$ unde $x_8 = \{b_3, b_1, 0\}$

$$\begin{tikzcd} b_6 \arrow[d, dash] \\ x_9 \end{tikzcd}$$ unde $x_9 = \{b_2, b_3, b_1\}$

$$\begin{tikzcd} b_5 \arrow[d, dash] \\ x_{10} \end{tikzcd}$$ unde $x_{10} = \{b_2, b_1, 0\}$.

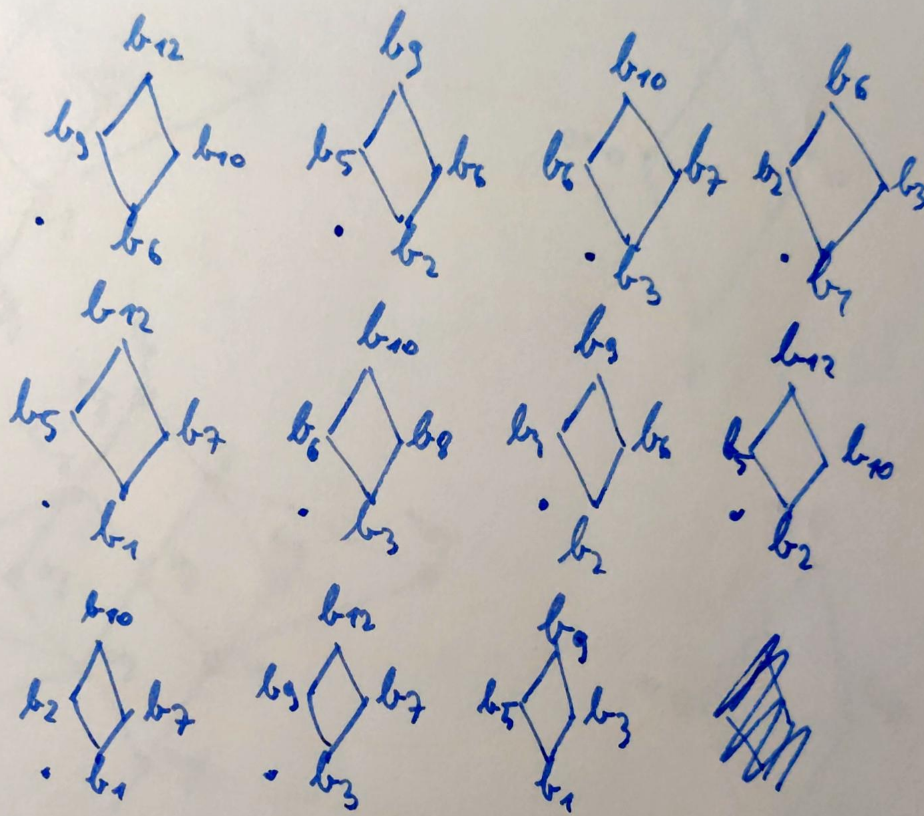
$$\begin{tikzcd} b_4 \arrow[d, dash] \\ x_{11} \end{tikzcd}$$ unde $x_{11} = \{b_2, b_1, 0\}$

$$\begin{tikzcd} b_3 \arrow[d, dash] \\ x_{12} \end{tikzcd}$$ unde $x_{12} = \{b_1, 0\}$.

$$\begin{tikzcd} b_2 \arrow[d, dash] \\ x_{13} \end{tikzcd}$$ unde $x_{13} = \{b_1, 0\}$.

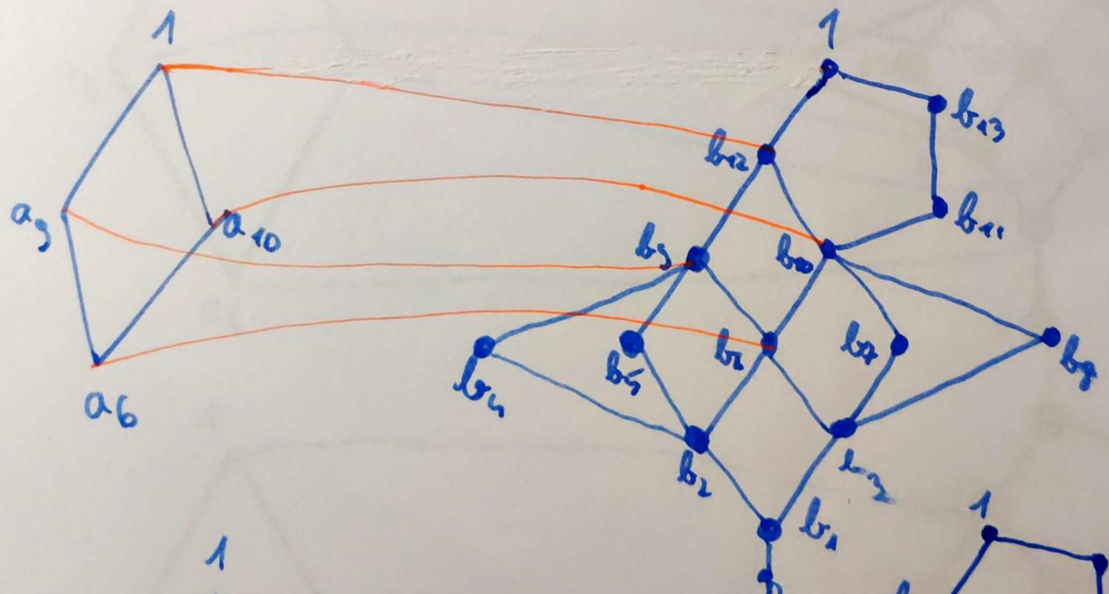
$$\begin{tikzcd} b_1 \arrow[d, dash] \\ x_{14} \end{tikzcd}$$ unde $x_{14} = \{0\}$

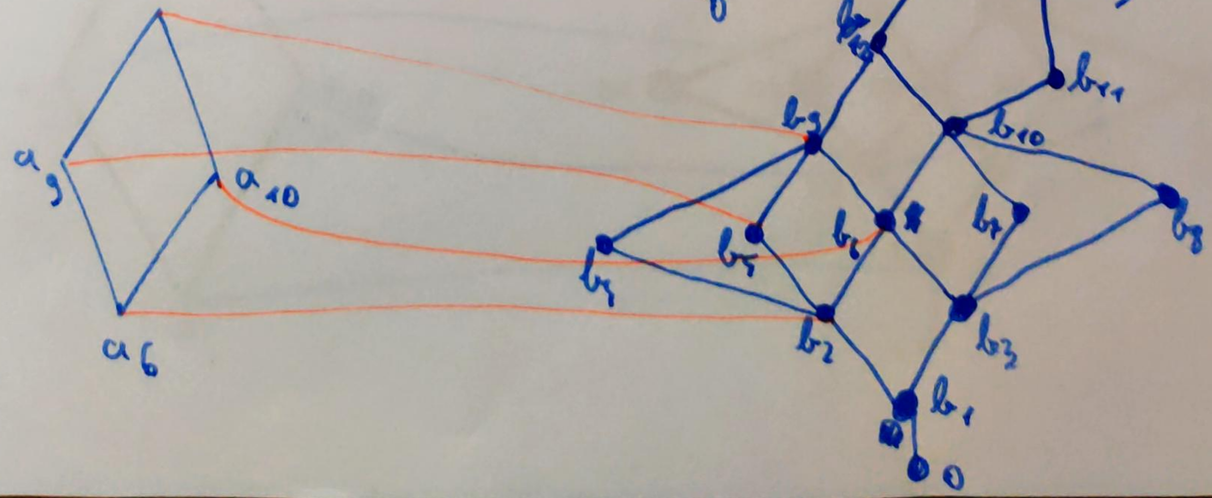
• $\mathcal{L}_2^2$:

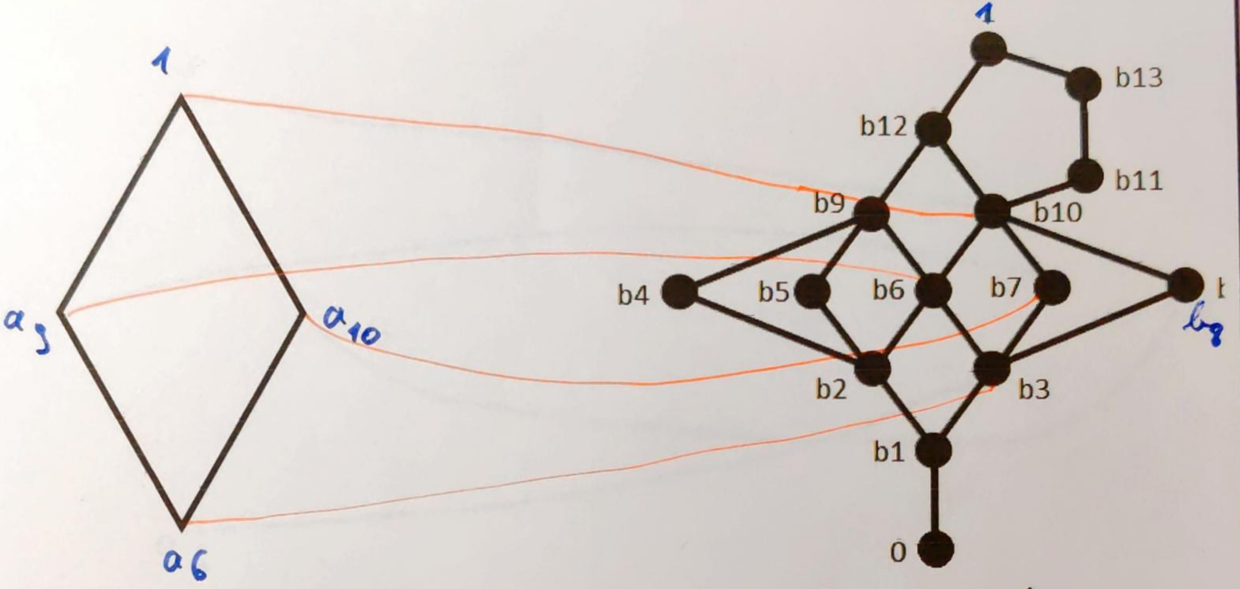

b12 b9 b10 b6
b9 b5 b8 b2
b10 b6 b7 b3
b6 b2 b3 b1
b12 b5 b7 b1
b10 b6 b8 b3
b9 b1 b6 b2
b12 b5 b10 b2
b10 b2 b7 b1
b12 b9 b7 b3
b9 b5 b3 b1

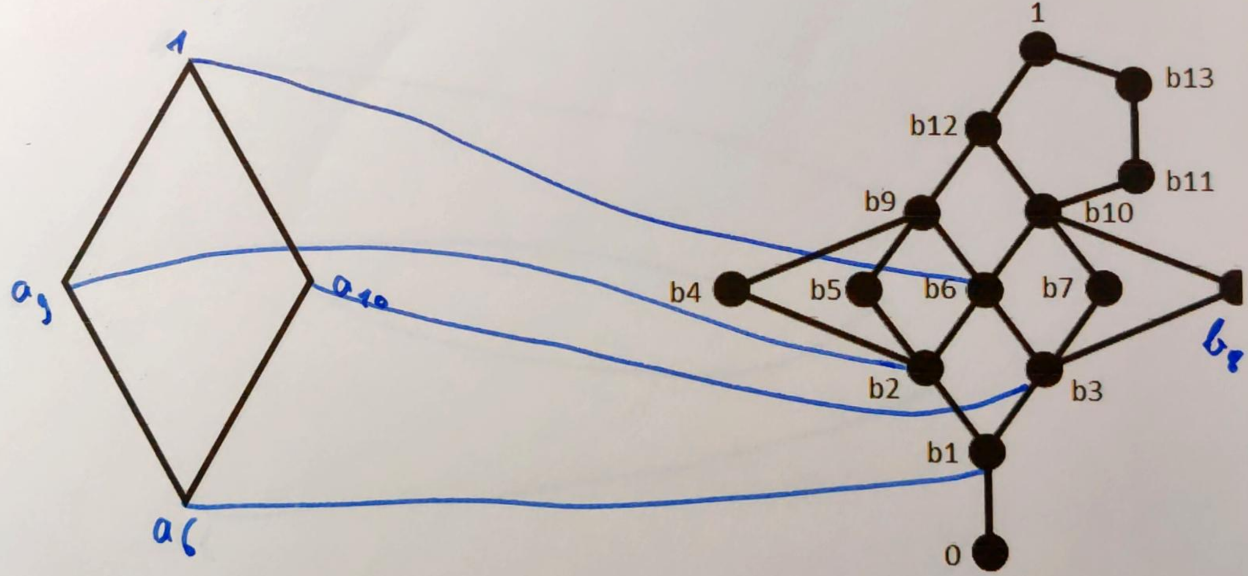
2. Pentagon în L_3 : $1\ b_{13}\ b_{11}\ b_{10}\ b_{12}$

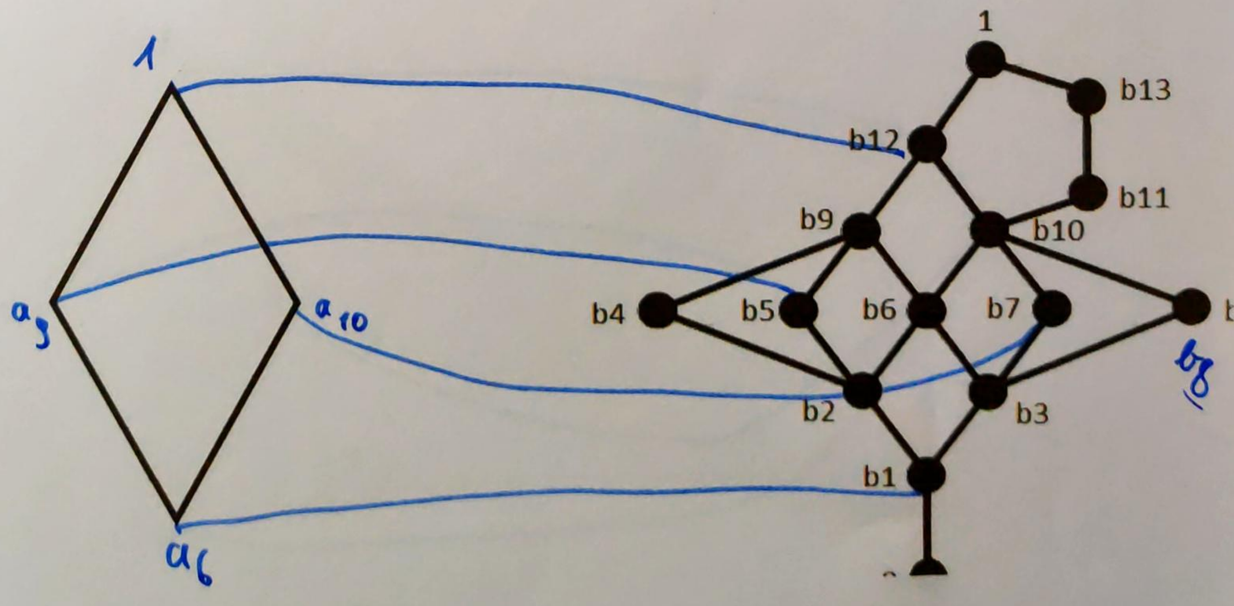
4. Pt fiecare sublatice S_{-1} ale lui L_{-1} ~~să se~~ de cardinal maxim dintre cele enumerate la pct 1, să se enumere toate morfismele injective de latici de la S_{-1} la L_3

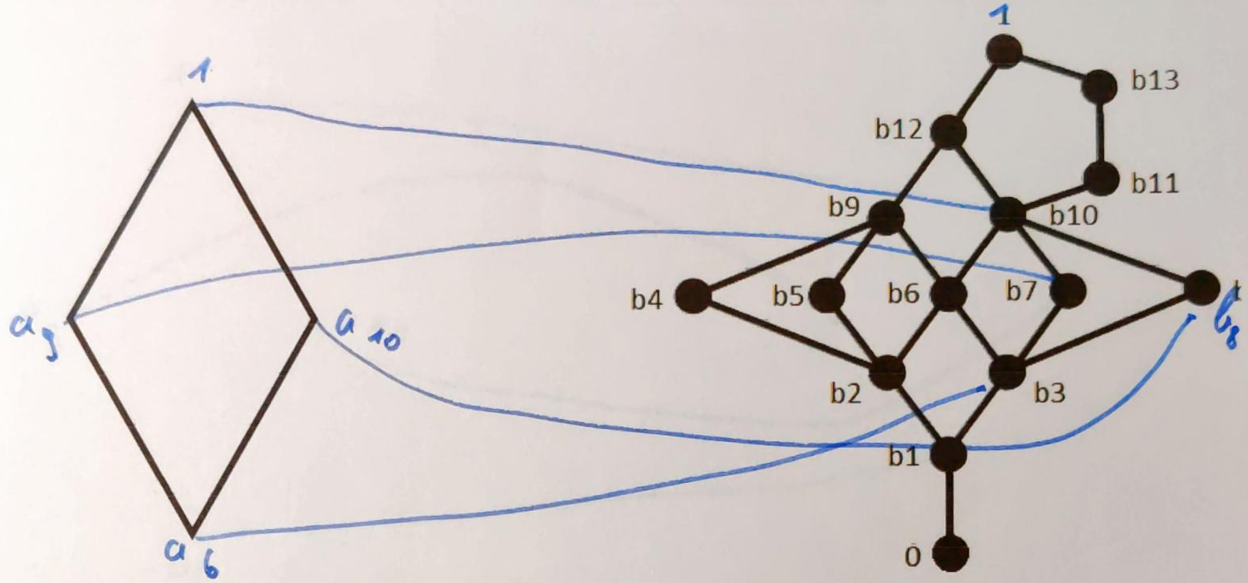


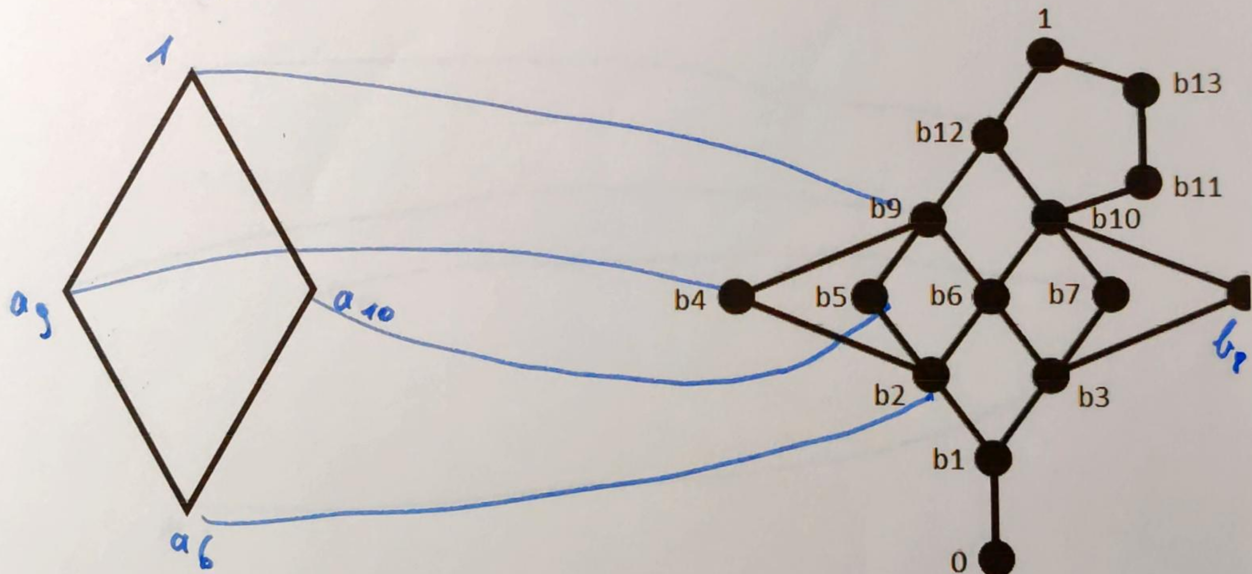


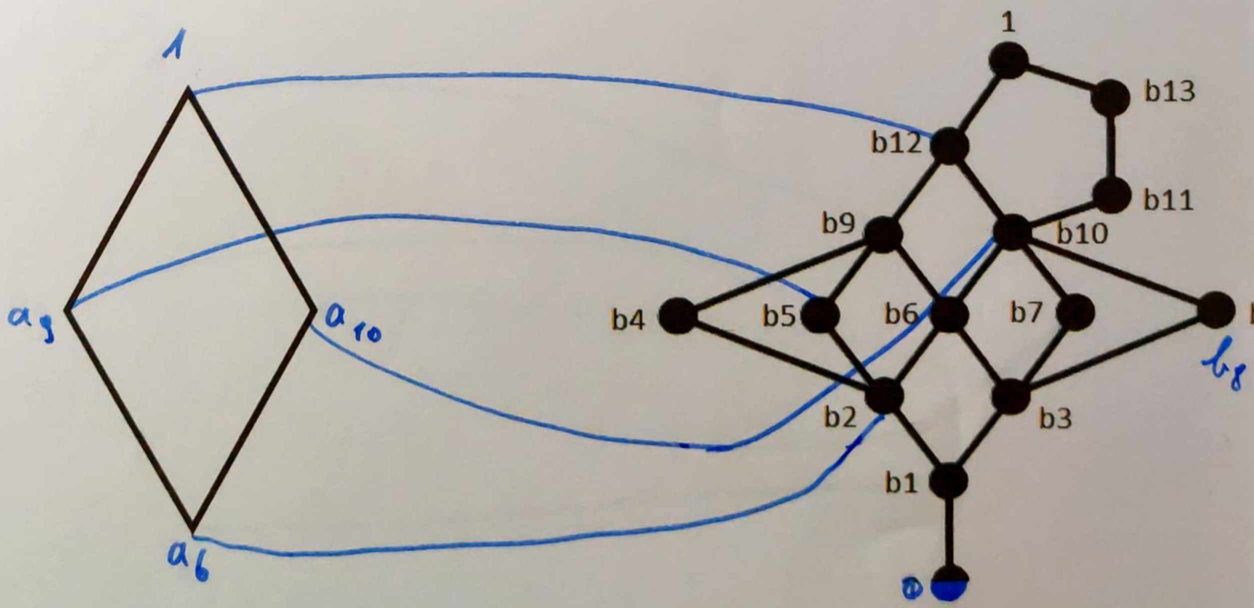

1
a9
a10
a6
1
b13
b12
b11
b9
b10
b4
b5
b6
b7
b8
b2
b3
b1
0

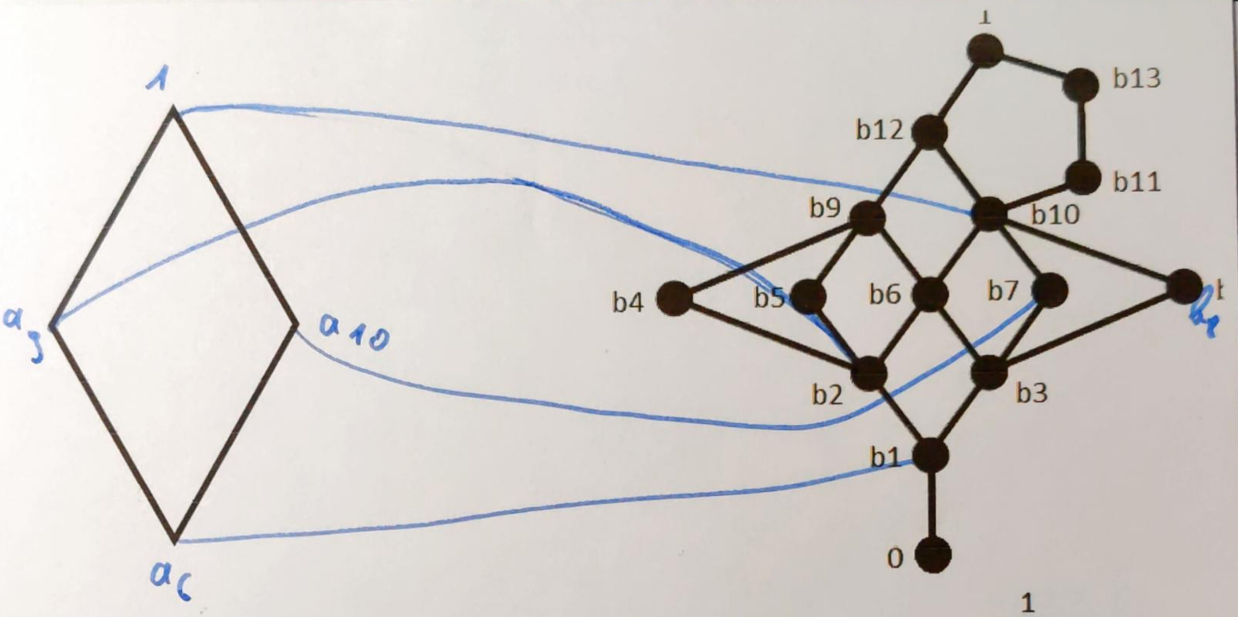

1
a9
a10
a6
1
b13
b12
b11
b9
b10
b4
b5
b6
b7
b8
b2
b3
b1
0

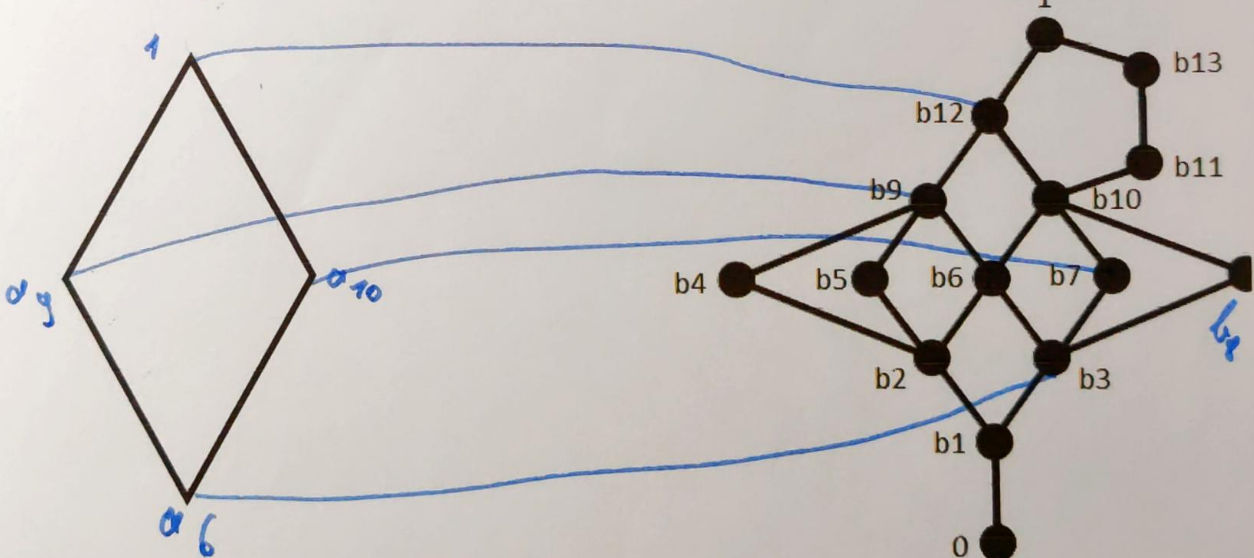

1
a9
a10
a6
1
b13
b12
b11
b9
b10
b4
b5
b6
b7
b8
b2
b3
b1

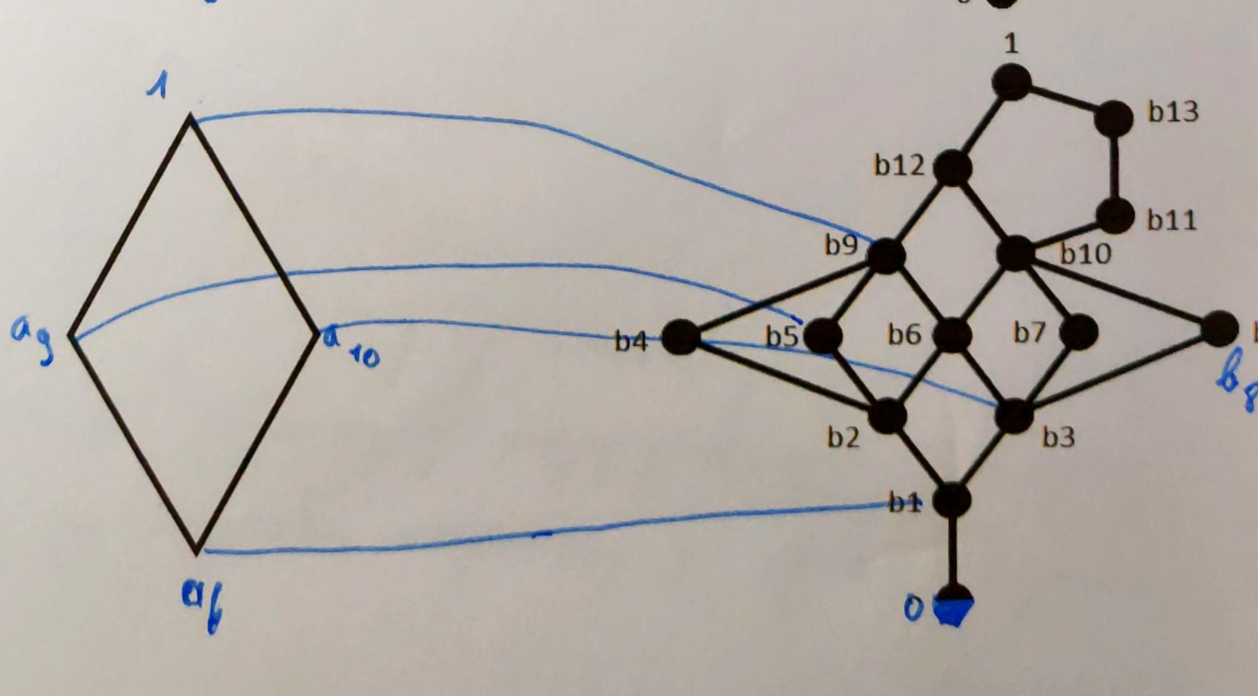

1
a9
a10
a6
1
b13
b12
b11
b9
b10
b4
b5
b6
b7
t
b8
b2
b3
b1
0


1
a9
a10
a6
1
b13
b12
b11
b9
b10
b4
b5
b6
b7
b8
b2
b3
b1
0


1
a9
a10
a6
1
b13
b12
b11
b9
b10
b4
b5
b6
b7
t
b8
b2
b3
b1
0


1
a9
a10
a6
1
b13
b12
b11
b9
b10
b4
b5
b6
b7
b8
b2
b3
b1
0


1
a9
a10
a6
1
b13
b12
b11
b9
b10
b4
b5
b6
b7
b8
b2
b3
b1
0


1
a9
a10
a6
1
b13
b12
b11
b9
b10
b4
b5
b6
b7
b8
b2
b3
b1
0

analog există 6 izomorfisme injective de la toate celelalte sublatici booleene S_{-1} ale lui L_{-1} de cardinal maxim la L_0