Seminar 9

Def:

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de prob. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a.

Spunem că v.a. X este continuă dacă $\exists\ p(x) \geq 0$ a.î.

$$P(X \in A) = \int_A p(x)\,dx \qquad \forall\ A \subseteq \mathbb{R}$$

$p(x)$ s.n. funcția de densitate a lui X.

Obs:

1) Dacă X e o v.a. discretă, i.e. $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$

$$P(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} P(X = x)$$

Exemplu

$X(\Omega) \cap A = \{0, 1\}$

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $A = \{0, 1, 2\}$, $P(X \in A) = \cancel{\frac{2}{3}}\ P(X=0) + P(X=1) =$

$= \frac{2}{3}$

2) Dacă $A = [a, b]$ ~~atunci~~ și X e o v.a. continuă

$$P(X \in A) = \int_A p(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx$$

$$\parallel$$

$$P(a \leq X \leq b)$$

3) $A = \mathbb{R}$

$P(X \in A) = P(\Omega) = 1 \quad (*)$

$X \in A := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

Dacă $A = \mathbb{R}$, atunci $X \in A = \Omega$

$(*) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$

~~Densitatea de~~

Funcția de densitate satisface următoarele prop.

1) $p(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$

Obs.

4) X v.a. cont

$P(X=a) = \int_a^a p(x)\,dx = 0$

5) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

Def:

$F(x) := P(X \leq x)$ - funcția de repartiție a lui X.

Obs:

6) X v.a. discretă, i.e. $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$

$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$

7) Dacă X v.a. cont., atunci

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt.$$

8) Dacă funcția de densitate p este cont., atunci F diferențiabilă.
Mai mult, $F'(x) = p(x)$

Prop

a) $F \nearrow$

b) F este cont. la dreapta

c) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Fie X v.a. cu densitatea dată de:

$$p(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se det. const α

b) Să se afle fct de repartiție

Sol

$p(x) \ge 0 \iff \alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \alpha \int_0^{\infty} x^2 e^{-kx}\,dx = \alpha \int_0^{\infty} x^2 \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right)' dx =$$

$$= \alpha \left(\underbrace{-\frac{x^2 e^{-kx}}{k} \Big|_0^{\infty}}_{0} + \frac{2}{k}\int_0^{\infty} x e^{-kx}\,dx \right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-kx} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{kx}} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{ke^{kx}} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{k^2 e^{kx}} \Rightarrow 0$$

$$= \cancel{x} \frac{2\alpha}{k} \int_0^\infty x e^{-kx} dx = \frac{2\alpha}{k} \int_0^\infty x \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right)' dx =$$

$$= \frac{2\alpha}{k}\left(\underbrace{\frac{-xe^{-kx}}{k}\Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-kx} dx \right) = \frac{2\alpha}{k^2}\int_0^\infty e^{-kx} =$$

$$= \frac{2\alpha}{k^2} \cdot \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\Big|_0^\infty \right) = \frac{2\alpha}{k^3}$$

$$\int_{-\infty}^\infty p(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{k^3} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{k^3}{2}$$

b) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$

Dacă $x<0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

Dacă $x > 0$

$F(x) = \frac{k^3}{2}\int_0^x t^2 e^{-kt} dt = \ldots$ integrare prin părți

$$F(x) = \begin{cases} \ldots, & x>0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Ex

$X \sim \mathcal{U}([a,b])$ și $[c,d] \subseteq [a,b]$

Arătați că $X \mid X \in [c,d] \sim \mathcal{U}([c,d])$

Sol

$$\cancel{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases}}$$

$$f_X = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Obs

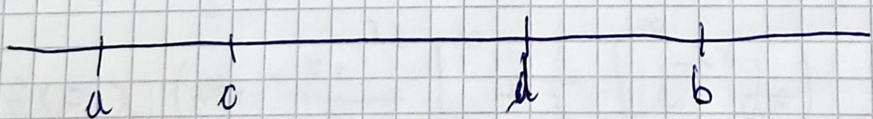
Dacă X e o v.a. $\sim \mathcal{U}([a,b])$, atunci ne așteptăm ca

$$f_X = \begin{cases} c, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad f \text{ e densitate} \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0 \\ \int f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c \geq 0 \\ \int_a^b c \, dx = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{b-a} \end{cases}$$

$$P(X \leq x \mid X \in [c,d]) = \frac{P(X \leq x \wedge X \in [c,d])}{P(X \in [c,d])}$$

$$P(X \in [c,d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a} \, dt = \frac{d-c}{b-a}$$



I. $x < a$

$$P(X \leq x \wedge X \in [c,d]) = 0$$

II. $x \in [a, c]$

$P(\ldots) = P(X = c) = 0$

III. $x \in [c, d]$

$P(\ldots) = P(c \le X \le x) = \frac{x - c}{b - a}$

IV. $x \in [d, b]$

$P(\ldots) = P(X \in [c, d]) = \frac{d - c}{b - a}$

V. $x > b$

$P(\ldots) = \frac{d - c}{b - a}$

$$P(X \le x \wedge X \in [c, d]) = \begin{cases} 0, & x < c \\ \frac{x - c}{b - a}, & x \in [c, d] \\ \frac{d - c}{b - a}, & x > d \end{cases}$$

$$F_{X|X\in[c,d]}(x) = P(X \le x \mid X \in [c, d]) = \begin{cases} 0, & x < c \\ \frac{x - c}{d - c}, & x \in [c, d] \\ 1, & x > d \end{cases}$$

$$f_{X|X\in[c,d]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{d - c}, & x \in [c, d] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \Rightarrow X \mid X \in [c, d] \sim \mathcal{U}([c, d])$$

Def:

Fie X o v.a. cont. cu densitatea de repartiție p.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx$$

Obs:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$EX = \sum x_i p_i$$

Exemple

1) $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

$$p_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$EX = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

2) $X \sim Exp(\lambda)$

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$EX = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\, dx$$

$$EX = \lambda \Big(\underbrace{\frac{-x e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}}_{0} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx \Big)$$

$$EX = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Seminar S 12

Cum simulăm o v.a. aleat. cu o anumită distr. F?

$U \sim Unif([0,1])$

Pp. F este cont și bij.

Vrem să ne def. o v.a. X care să aibe distr. F

$X := F^{-1}(U)$

$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \le x) \overset{*}{=} P(U \le F(x)) \overset{**}{=} F(x)$

$F^{-1}(U) \le x \;\Big|\; \circ F$ la stg.

$\Updownarrow$

$F(F^{-1}(U)) \le F(x)$ (relația de ordine se păstr. pt. că $F \nearrow$)

$U \le F(x)$

** $U \sim Unif([0,1])$

$$f_U(t) = \begin{cases} c, & t \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$\int_{\mathbb{R}} f_U(t)\,dt = 1 \iff c = 1$

$F_U(t) = \int_{-\infty}^{t} f_U(x)\,dx = \int_0^t 1\,dx = t$

$t \in [0,1]$

În concluzie, $X = F^{-1}(U)$ are distr. F.

Aplicație

Simulăm o variabilă exp. de parametru λ

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \forall x \geq 0$$

Vrem să calculăm $F^{-1}(x)$

$$y = F^{-1}(x) \quad | \circ F \text{ la stânga}$$

$$F(y) = x$$

$$1 - e^{-\lambda y} = x \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x)$$

Deci, $X := F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$ este o v.a. $\sim Exp(\lambda)$

Implementare în R

Simulăm $U_1, U_2, \dots, U_n$ uniforme și apoi vom genera $F^{-1}(U_1), F^{-1}(U_2), \dots, F^{-1}(U_n)$.

$\boxed{\text{COD}}$ R

```
> hist(gen_exp(100, 2))
```

100 → nr. de sim.

2 → λ

Dacă X v.a. oarecare, atunci F nu mai este injectivă în general.

$\Rightarrow \nexists F^{-1}$

Cum simulăm în acest caz o v.a. X?

Def: $X := \inf \{x \mid F(x) \geq U\}$ are distr. F

Dacă X v.a. cont $\Rightarrow \inf \{x \mid F(x) \geq U\} = F^{-1}(U)$

Apl. (v.a. discretă)

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix}, \quad p_i := P(X = x_i)$$

$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

Vrem să calc. $F(x) = P(X \le x)$

$F(x_1) = P(X \le x_1) = p_1$

$F(x_2) = P(X < x_2) = p_1 + p_2$

$\vdots$

$F(x_k) = P(X \le x_k) = p_1 + p_2 + \dots + p_k$

$$\underset{P(X \le x)}{\overset{}{F(x)}} = \begin{cases} 0 & , x < x_1 \\ p_1 & , x \in [x_1, x_2) \\ p_1 + p_2 & , x \in [x_2, x_3) \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k & , x \in [x_k, x_{k+1}) \end{cases}$$

<u>Temă</u>: Implementați în R o funcție care simulează o distribuție discretă. (finită)

Exemplu: $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

Trebuie să calculați F (folosind formula ant.)

Simulați uniforme și apoi pt. fiecare unif. calc. ~~infimum~~ infimum $\{x \mid F(x) \ge U\}$

Funcția ar trebui să aibe 3 parametrii (n, x, p)

nr. de sim. | val. v.a. | prob.

Vectori aleatori

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - câmp de probe.

Variabilă aleatoare: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\{X \le x\} \in \mathcal{F}$

Vector aleator: $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, unde X_i e o v.a.

Vectori aleatori discreți

$\forall i$ X_i v.a. discretă

Def:

Numim fct. de masă a vect. $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

Prop

1) $p_{(X,Y)}(x, y) \ge 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

2) $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$

~~**Def:**~~

~~Se numește rep. marg. a lui X~~

~~$$P(X = x) = \sum$$~~

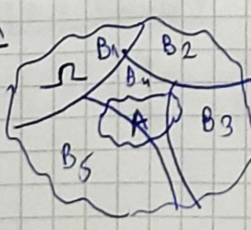
Prop:

Fie (X, Y) un vector aleator cu fct. de masă $p_{(X,Y)}(x, y) = P(X = x)$.

1) $P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$

2) $P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$

Dem



$$\left.\begin{array}{l} A \subset \Omega \\ \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \\ B_n \text{ - disj.} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap B_n$$

$A \cap B_n$ sunt disj.

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n)$$

1) $A = \{ X = x \}$ 2) Analog ca la 1)

$\text{Im } Y = \{ y_1, y_2, \dots \}$

$B_n = \{ Y = y_n \}$

$\cup B_n = \Omega$ și B_n sunt disj.

Din $(*) \Rightarrow$ prop dorită

<u>Def</u>:

(X, Y) vector aleator. Notăm cu $\boxed{p_{X|Y}(x|y) := P(X=x \mid Y=y)}$

<u>Obs</u>:

1) $p_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y) = \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$

$$= \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_Y(y)}$$

2) $p_X(x) = \sum_{y_i} p_{X|Y}(x|y_i) \, p_Y(y_i) \rightarrow$ Bayes

<u>Prop</u>

(X, Y) vect. aleator și $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) \, p_{X,Y}(x,y)$$

Exp

(X/Y)	1	2	3
1	0.22	0.11	0.02
2	0.2	0.15	0.1
3	0.06	0.07	0.07

$p_{ij} = P(X=i, Y=j)$

$p_{12} = 0.11$

Det:

a) Legile marginale ale lui X și Y

b) Media și varianța lui X și Y

c) Legea cond. a lui X la $Y=2$ și resp. legea cond. a lui Y la $X=2$

d) $E[X \mid Y=2]$ și $E[Y \mid X=2]$

Sol

a) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.35 & 0.45 & 0.20 \end{pmatrix}$

$P(X=1) = 0.22 + 0.11 + 0.02 = 0.35$

$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.48 & 0.33 & 0.19 \end{pmatrix}$

b) $EX = 0.35 \cdot 1 + 0.45 \cdot 2 + 0.02 \cdot 3$

$\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2$

$EX^2 = 0.35 \cdot 1^2 + 0.45 \cdot 2^2 + 0.2 \cdot 3^2$

Analog și Y

c) $X|Y=2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$

$$P(X=1 \mid Y=2) = \frac{P(X=1, Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0.11}{0.33} = \frac{1}{3}$$

linia 1, col 2

$$P(X=2 \mid Y=2) = \frac{P(X=2, Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0.15}{0.33} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$$

$$P(X=3 \mid Y=2) = \frac{P(X=3, Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0.07}{0.33} = \frac{7}{33}$$

$$X|Y=2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11/33 & 15/33 & 7/33 \end{pmatrix}$$

Analog. calc. $Y|X=2$

d) $E[X|Y=2] = 1 \cdot \frac{11}{33} + 2 \cdot \frac{15}{33} + 3 \cdot \frac{7}{33} = \frac{11+30+21}{33} = \frac{62}{33}$

$Var(X|Y=2) = E((X|Y=2)^2) - E(X|Y=2)^2$

$E((X|Y=2)^2) = 1^2 \cdot \frac{11}{33} + 2^2 \cdot \frac{15}{33} + 3^2 \cdot \frac{7}{33}$

Seminar S13

Def

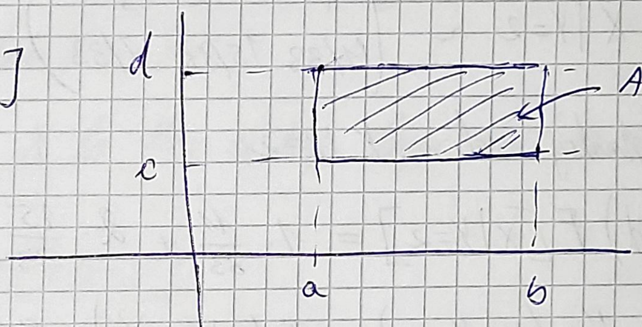
Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un c.p. și (X,Y) un vector aleator. Spunem că vectorul (X,Y) formează o pereche de v.a. cont. dacă există $f_{(X,Y)}(x,y)$ cu prop. că:

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \quad \forall A\subseteq \mathbb{R}^2$$

Funcția $f_{(X,Y)}(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.n. densitatea comună a vect (X,Y)

Obs:

1) $A = [a,b] \times [c,d]$



$$P((X,Y)\in A) = P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \int_a^b \int_c^d f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\,dx$$

2) Dacă $A=\mathbb{R}^2$ atunci

$$\underbrace{P((X,Y)\in \mathbb{R}^2)}_{=1} = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

Prop

$f_{(X,Y)}$ este densitate $\Leftrightarrow$ a) $f_{(X,Y)}\ge 0$

b) $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1$

Prop:

1) Fie f_X și f_Y dens. lui X și Y. Atunci

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$$

2) Densitatea $X|Y=y$ este dată de

$$f_{X|Y}(x|y) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Ex:

Fie (X,Y) cu densitatea $f_{(X,Y)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k(x+y+1), & x\in[0,1], y\in[0,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a) Să se determine k

b) Să se determine densitățile marginale

c) Să se verifice dacă X și Y sunt independente

d) Să se afle funct. de rep. marginale și funcția de repartiție a vectorului (X,Y)

e) Să se det. dens. v.a. $X|Y=y$ și $Y|X=x$

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$k\int_0^2\int_0^1 x+y+1\,dx\,dy = 1$

$k\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + xy + x\right)\Big|_0^1 dy = 1$

$k\int_0^2 y + \frac{3}{2}\,dy = 1$

$k\left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y\right)\Big|_0^2 = 1$

$k(2+3) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$

b) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy$

$A \sim \frac{1}{5}$

$x \notin [0,1] \Rightarrow f_X(x) = 0$

$x \in [0,1] \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{5}\int_0^2 x+y+1\, dy$ $\left(\int_0^2 \text{pt că } y \in [0,2]\right)$

$= \frac{1}{5}\left(xy + \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^2$

$= \frac{1}{5}(2x+2+2)$

$= \frac{2x+4}{5}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx = \dots = \frac{1}{5}\int_0^1 x+y+1\, dx = \frac{2y+3}{10}, \forall y \in [0,2]$

Prop:

Fie (X,Y) un vector aleator cont. cu fct. de densitate $f_{(X,Y)}(x,y)$. Notăm cu f_X, f_Y dens. v.a. X și Y.

X și Y indep $\Leftrightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

c) Este adevărat că $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$?

$\cancel{\frac{3}{10}} \cdot \cancel{\frac{6}{5}} =$

$f_{(X,Y)}(0,0) = \frac{1}{5}$

$f_X(x) = \frac{4}{5}, \quad f_Y(y) = \frac{3}{10}$ $\quad \cancel{\frac{12}{50}} = \cancel{\frac{6}{25}}$

$\frac{1}{5} \neq \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{10} \Rightarrow X$ și Y nu sunt independente

d) F_X, F_Y, $F_{(X,Y)}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

$x < 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$

$x \in [0,1]$, $F_X(x) = \int_0^x \frac{2t+4}{5}\,dt =$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{4}{5}t \Big|_0^x = \frac{x^2+4x}{5}$$

$x > 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2t+4}{5}\,dt = \frac{1+4}{5} = 1$

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt}_{0} + \int_0^1 f_X(t)\,dt + \underbrace{\int_1^x f_X(t)\,dt}_{0}$$

$F_X(x) = P(X \le x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{5}(x^2+4x), & x \in [0,1] \\ 1, & \text{in rest} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{10}(y^2+3y), & y \in [0,2] \\ 1, & \text{in rest} \end{cases}$$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du$$

$x \in [0,1]$

$y \in [0,2]$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{5}\int_0^x\int_0^y u+v+1\,dv\,du = \frac{1}{5}\int_0^x \left(uv + \frac{v^2}{2} + v\right)\Big|_0^y du =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^x uy + \frac{y^2}{2} + y\,du$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{u^2}{2}y + \frac{y^2}{2}u + yu\right)\Big|_0^x = \frac{1}{5}\left(\frac{x^2y + y^2x}{2} + xy\right), \; x\in[0,1], \; y\in[0,2]$$

$x<0 \Rightarrow F_{(X,Y)}(x,y) = 0$

$x>1 \Rightarrow F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{5}\left(\frac{y+y^2}{2} + y\right)$

$y<0 \Rightarrow F_{(X,Y)}(x,y) = 0$

$y>2 \Rightarrow F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{5}\left(\frac{x^2+x}{2} + x\right)$

e) $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{2(x+y+1)}{2y+3}, \; x\in[0,1], \; y\in[0,2]$

$f_{Y|X}(y|x) = \dots$

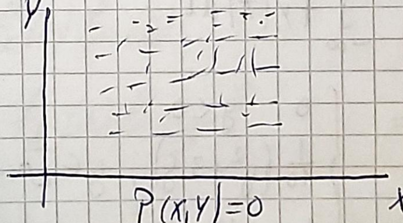
Def:

$\text{Cov}(X,Y) = E\left((X-EX)(Y-EY)\right) = EXY - EX\cdot EY$

↑ covarianta

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}X}\sqrt{\text{Var}Y}}$$

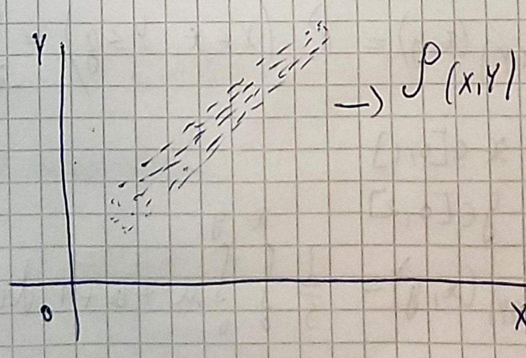
↗ coef. de corelatie



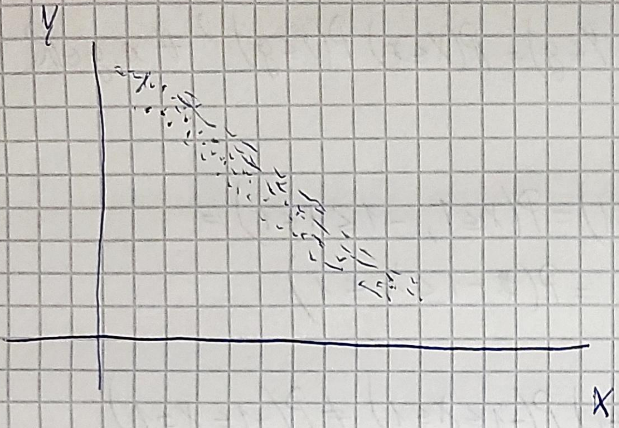
$\rho(X,Y)=0$

Obs

$-1 \le \rho(X,Y) \le 1$



$\rightarrow \rho(X,Y) > 0$



$\rho(X,Y) < 0$

2) Dacă $\rho(X,Y)=0$, atunci spunem că X și Y sunt v.a. necorelate.

<u>Prop</u>:

X, Y – indep $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ X, Y necorelate

<u>Ex</u>:

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$Y = X^2$

Arătați că X și Y sunt necorelate, dar nu sunt indep.

<u>Sol</u>.

$$\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow Cov(X,Y) = 0$$

$$Cov(X,Y) = Cov(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - EX \cdot EX^2$$
$$= E(X^3) - EX \cdot EX^2$$

$X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow E[X^n] = 0 \quad \forall\, n$ impar

altfel $EX^3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \xrightarrow{\text{integrare prin părți}} \dots = 0$

$\Rightarrow Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow$ X și Y sunt necorelate

Este adevărat că $P(X \le x,\ Y \le y) = P(X \le x)\, P(Y \le y)$? $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$x = y = 1$

$$P(X \le 1,\ Y \le 1) = P(X \le 1,\ X^2 \le 1) = P(X \le 1,\ -1 \le X \le 1) =$$
$$= P(\cancel{2}\ -1 \le X \le 1)$$

$$P(X \le 1)\, P(X^2 \le 1) = P(X \le 1)\, P(-1 \le X \le 1) \ne P(-1 \le X \le 1)$$

$\Downarrow$

X, Y nu sunt independente

S14

Legea numerelor mari

(versiunea slabă)

Fie $X_1, X_2, \dots X_n$ sir de v.a. i.i.d de medie $EX_1 = \mu$ și $Var(X_1) = \sigma^2$.
Atunci $\varepsilon > 0$ avem

$$P\left(\left| \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

sau echivalent

$$P\left(\left| \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} - \mu \right| \leq \varepsilon \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

(versiunea tare)

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} = \mu\right) = 1, \quad \overline{X_n} = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$$

Aplicatie

Aruncăm cu banul de n ori,

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \to T \\ 1 \to H \end{matrix}$$

a i-a aruncare cu banul

$X_1+X_2+\dots+X_n = \#H$ în n aruncări

$$LNM \Rightarrow \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} EX_1 = \frac{1}{2}$$

$X_1+X_2+\dots+X_n \approx \frac{n}{2}$ pt. n foarte mare

Folosind legea nr. mari putem aprox. integrala următoare

$$I = \int_0^1 \underbrace{e^x \sin(2x)\cos(2x)}_{g(x)}\,dx$$

Fie $U_1, U_2, \ldots$ i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$

$\Downarrow$

$g(U_1), g(U_2), \ldots, g(U_n), \ldots$ v.a. i.i.d

$$\frac{g(U_1)+g(U_2)+\ldots+g(U_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} E[g(U_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)\,dx$$

p - funcția de densitate a uniformei pe $[0,1]$

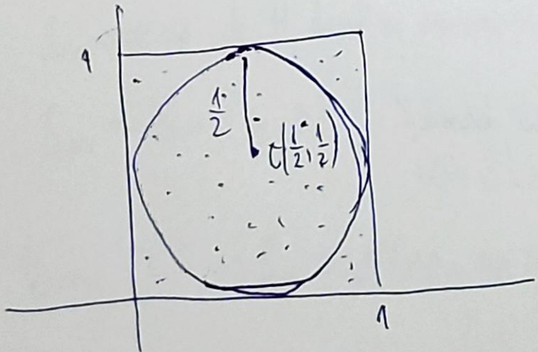
$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$E[g(U_1)] = \int_0^1 g(x)\,dx$$

Morala: $I = \int_0^1 g(x)\,dx \approx \dfrac{g(U_1)+g(U_2)+\ldots+g(U_n)}{n}$

Cum putem să îl calculăm pe π folosind LNM?



n - nr. de pct. aleatoare din □

n_{cerc} - nr. de puncte ce cad în interiorul cercului

$$\frac{n_{cerc}}{n} \approx \frac{\text{Aria(cerc)}}{\text{Aria}(\square)} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}$$

$\Downarrow$

$$\pi \approx \frac{4\, n_{cerc}}{n}$$

Considerăm un șir de pct. i.i.d $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots (X_n, Y_n) \dots$

$X_1 \sim U([0,1])$
$Y_1 \sim U([0,1])$

$(x,y) \in C\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

$Z_i = \mathbb{1}_{\left\{\left(X_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y_i - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}\right\}}$

$$Z_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \left(X_i(\omega) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y_i(\omega) - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Evident $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sunt i.i.d.

LNM $\to \dfrac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} E[Z_1]$

$Z_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $p = P\left(\left(X_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y_i - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}\right)$

$E Z_1 = p = P(\dots) = \iint$

$P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy$

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}\right\}$

$P\left(\left(X_i - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y_i - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}\right) \underset{*}{=} \iint_D f_{(X_1,Y_1)}(x,y)\, dx\, dy$

$$\left.\begin{array}{l} X_i \sim \text{Unif}([0,1]) \\ Y_i \sim \text{Unif}([0,1]) \end{array}\right\} \Rightarrow f_{(X_i,Y_i)}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \square \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$X_i \perp\!\!\!\perp Y_i$

$* = \iint_D 1\, dx\, dy = \text{Aria}(D) = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{Z_1+Z_2+\dots+Z_n}{n} \approx E Z_1 = \frac{\pi}{4}$$

$n_{cerc} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \Rightarrow$ ~~Z_{cerc}~~ $=$

$$\pi = \frac{4 n_{cerc}}{n}$$

Teorema limită centrală

Fie $X_1, X_2, \dots$ un șir de v.a. i.i.d, de medie μ și var σ^2. Atunci, notând cu $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ o să avem

$$P\left(\frac{S_n - E S_n}{\sqrt{Var\, S_n}}\right) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

aproximative

$$S_n \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

Datul cu banul

$X_1, X_2, \dots,$ i.i.d. cu $X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

Care este distr. lui $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

$S_n = \#$nr. de H după n aruncări

$S_n \sim Bin(n, p)$ $\quad E S_n = np$

$\quad Var\, S_n = np(1-p)$

Din TLC $\Rightarrow S_n \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$