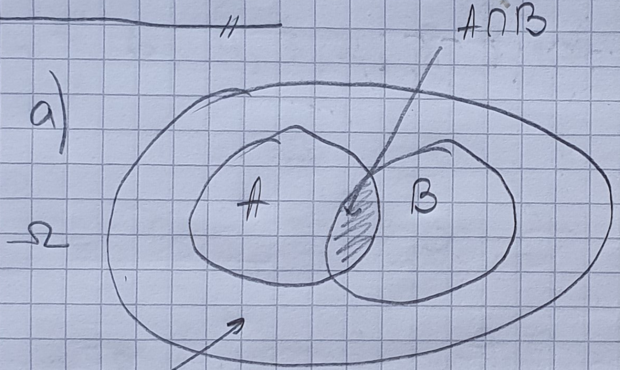
# Consultație PS. 21.01.2023

Ex 1: 60% dintre studenți nu folosesc nici F, nici T
20% folosesc F
30% folosesc T.

a) Care este prob ca ~~elevii~~ stud să aibă F sau T?
b) — " — F și T?
c) — " — să folosească o singură platformă

//

a)

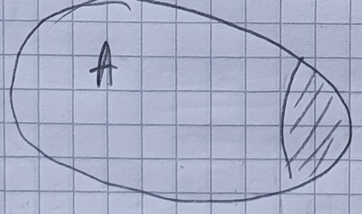



A = ev. prin care folosesc doar F

B = — " — doar T.

ev. prin care studenții nu fol nici F, nici T

$(A \cap B)^c$



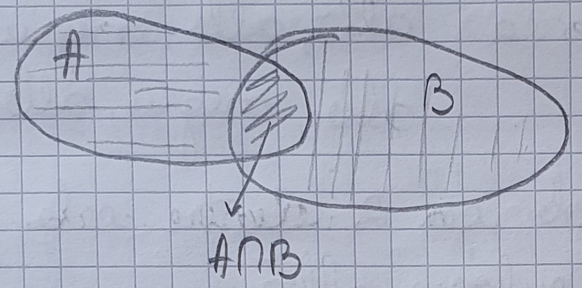

$A \cap B^c$ - doar F
$B \cap A^c$ - doar T

Din ip:
$\mathbb{P}(A) = 0.2$
$\mathbb{P}(B) = 0.3$
$\mathbb{P}(A \cap B)^c) = 06$

$\mathbb{P}(A\cup B) = 1 - \mathbb{P}((A\cup B)^c) = 1 - 0.6 = 0.4$

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cup B)$
$= 0.2 + 0.3 - 0.4 = 0.1$

c) "o singură platformă" $= A \triangle B$
$= (A\cup B)\setminus(A\cap B)$
$= \underbrace{(A\cap B^c)}_{\text{doar F}} \underset{\text{sau}}{\cup} \underbrace{(B\cap A^c)}_{\text{doar T}}$

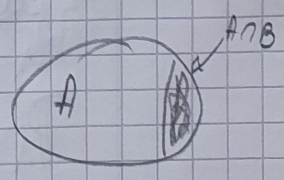



$\mathbb{P}(A\triangle B) = \mathbb{P}((A\cup B)\setminus(A\cap B))$
$= \mathbb{P}(A\cup B) - \mathbb{P}(A\cap B)$
$= 0.4 - 0.1$
$= 0.3$

Obs! $C \subseteq D$
$\mathbb{P}(D\setminus C) = \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C)$

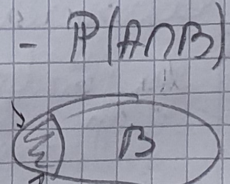
sau

$\mathbb{P}(A\triangle B) = \mathbb{P}\big((A\cap B^c)\overset{\text{disjuncte}}{\cup}(B\cap A^c)\big)$
$= \mathbb{P}(A\cap B^c) + \mathbb{P}(B\cap A^c)$




$\mathbb{P}(A\cap B^c) = \mathbb{P}(A\setminus(A\cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B) = 0.2 - 0.1 = 0.1$

$\mathbb{P}(B\cap A^c) = \mathbb{P}(B\setminus(A\cap B)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$
$= 0.3 - 0.1 = 0.2$



$$\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(B \cap A^c) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

Ex 2 O urnă cu $\underset{15}{\underline{a}}$ bile albe și $\underset{7}{\underline{b}}$ bile negre.

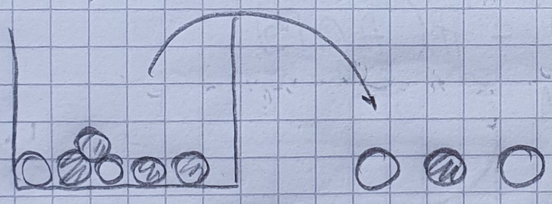
Extragem fără întoarcere 3 bile.

a) Care este prob ca ~~la ext~~ bilele extrase să fie în ordinea alb, alb, negru?

alb, negru, alb?

b) Care este prob. ca 2 dintre cele 3 bile extrase să fie de culoare albă

Soluție



Fie $A_i$ evenimentul prin care la extragerea i am scos o bilă de culoare albă

Cum se scrie cer. din cerința a)?

$$\{alb, alb, negru\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3^c$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A^c) =$$

erau indep. dacă extragerea ar fi fost cu întoarcere

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3^c | A_1 \cap A_2)$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{a}{a+b} \qquad \mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{a-1}{a-1+b}$$

$$\mathbb{P}(A^c | A_1 \cap A_2) = \frac{b}{a-2+b}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a-1+b} \times \frac{b}{a-2+b}$$

$$\{\text{alb, negru, alb}\} = A_1 \cap A_2^c \cap A_3$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \, \mathbb{P}(A^c | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2^c)$$
$$= \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a-1+b} \times \frac{a-1}{a-1+b-1}$$

b) $\{\text{două din cele 3 sunt albe}\}$

$$= \underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)}_{X}$$

$$\{\text{cel puțin } \overset{\text{din 3}}{2} \text{ sunt albe}\} = \qquad X \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Putem modif procedura de extragere

$a$ - albe

$b$ - negre

I - extragem o bila din urnă, notăm culoarea, introducem bila în urnă împreună cu $\underset{=4}{t}$ bile de aceeași culoare

II - introducem în urnă

$\rightarrow d_1$ bile de culoare albă dacă bila extrasă a ~~fost~~ a

$\rightarrow d_2$ bile de cul. neagră dacă bila extrasă a fost n.

a) Care este prob ca a doua bilă extrasă să fie neagră?

$$\mathbb{P}(A_2^c) = \mathbb{P}(A_2^c | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2^c | A_1^c) \cdot \mathbb{P}(A_1^c)$$

$$= \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b+d_1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b+d_2}{a+b+d_2}$$

prima extragere

b) Care este prob ca prima să fie neagră știind că a doua este de culoare neagră

$$\mathbb{P}(A_1^c | A_2^c) = \frac{\mathbb{P}(A_2^c | A_1^c) \cdot \mathbb{P}(A_1^c)}{\mathbb{P}(A_2^c)}$$

$$\mathbb{P}(A_1^c) = \frac{b}{a+b}$$

$$\mathbb{P}(A_2^c | A_1^c) = \frac{b+d_2}{a+b+d_2}$$

$$\mathbb{P}(A_1^c | A_2^c) = \frac{\frac{b+d_2}{a+b+d_2} \times \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b+d_1} + \frac{b+d_2}{a+b+d_2} \times \frac{b}{a+b}}$$

Pp. că suntem în scenariul 1 $\Rightarrow d_1 = d_2 = d$

Să calculăm $\mathbb{P}(A_{2023}^c)$

$$\mathbb{P}(A_n^c) = \mathbb{P}(A_n^c \mid A_{n-1})\,\mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n^c \mid A_{n-1}^c)\,\mathbb{P}(A_n^c)$$

f. prob. totale

Folosim inducție

$n=2$

$$\mathbb{P}(A_2^c) = \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b+d} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b+d}{a+b+d}$$

$$= \frac{ab + b(b+d)}{(a+b)(a+b+d)}$$

$$= \frac{b\cancel{(a+b+d)}}{(a+b)\cancel{(a+b+d)}} = \frac{b}{a+b} = \mathbb{P}(A_1^c)$$

$d=0$ → nu adaug nimic

→ extragerea este cu unl

· $n=2$ $\mathbb{P}(A_2^c) = \mathbb{P}(A_1^c)$

Vom arăta că $\mathbb{P}(A_n^c) = \mathbb{P}(A_1^c)$, $\forall\, n \geq 1$

Ip. de inducție $\mathbb{P}(A_k^c) = \mathbb{P}(A_1^c)$, $\forall\, k \in \{1 \dots n-1\}$

și vrem să arătăm pentru $n$

Fie $N_k$ - nr. de bile negre din urnă la pasul $k$

$$\mathbb{P}(A_n^c) = \mathbb{P}(A_n^c \mid A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n^c \mid A_{n-1}^c) \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}^c)$$

$$= \frac{N_{n-2}}{a+b+(n-1)\cdot d} \times \frac{a}{a+b} + \frac{N_{n-2}+d}{a+b+(n-1)d} \times \frac{b}{a+b}$$

din ip induct

$$P(A_{n-1}^{c}) = \frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow P(A_{n+1}) = \frac{a}{a+b}$$

$$N_{n-2} = ?$$

$$P(A_{n-2}^{c}) = \frac{b}{a+b} = \frac{N_{n-2}}{a+b+(n-2)d}$$

$$N_{n-2} = \frac{b[a+b+(n-2)d]}{a+b}$$

$$P(A_n^{c}) = \frac{a\,N_{n-2} + b(N_{n-2}+d)}{(a+b)[a+b+(n-1)d]} = \frac{b}{a+b}$$

Numarator:

$$\frac{ab}{a+b}[a+b+(n-2)d + \frac{b}{a+b}[a+b+(n-2)d+(a+b)d]$$

(c) Calculati care este prob ca prima bila extrasa sa fie de culoare neagra stiind ca urm. 2023 sunt de cul neagra

$$P(A_1^{c} \mid A_2^{c} \cap A_3^{c} \cap \ldots \cap A_{2023}^{c})$$ (*)

Calculați prob. că primele 2023 de bile extrase să fie de culoare neagră

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c)$$

$$= \mathbb{P}(A_1^c)\, \mathbb{P}(A_2^c | A_1^c) \times \mathbb{P}(A_3^c | A_1^c \cap A_2^c) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{2023}^c | A_1^c \cap \dots \cap A_{2022}^c)$$

$$= \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b+d}{a+b+d} \times \frac{b+2d}{a+b+2d} \times \dots \times \frac{b+2022d}{a+b+2022d}$$

(*)
$$\frac{\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c)}{\mathbb{P}(A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c)}$$

~~formula prob. totale~~ $= \cancel{\mathbb{P}}\, \mathbb{P}(B \cap \Omega)$

$$= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2023}^c)$$

$\cancel{B}$ $\Omega = A_1 \cup A_1^c$

~~$\mathbb{P}(B \cap$~~

$$B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_1^c) = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_1^c)}_{\text{disjuncte}}$$

Ex 3

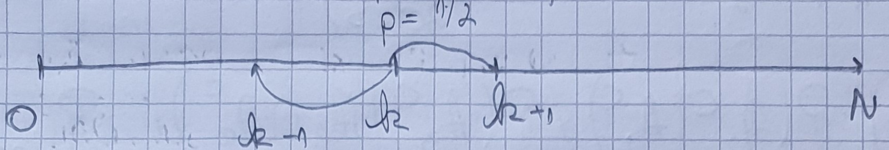
O casă N u.m.

Voi aveți k u.m. $0 < k < N$

Aruncăm o monedă echilibrată ($p = 1/2$) în mod repetat. Dacă moneda a picat cap, managerul băncii vă da o u.m. Dacă moneda a picat pajură, îi dați manag. o u.m.

Jocul continuă până vom cump. casă sau vom aj. la faliment.

Care este prob. faliment?




prob ruina – R

$$\mathbb{P}_k(R) = \mathbb{P}(R \mid \text{ați plecat cu } k \text{ u.m})$$

$$\mathbb{P}_k(R) = \mathbb{P}_k(R|H)\cdot \underbrace{P(H)}_{\frac{1}{2}\,(p)} + \mathbb{P}_k(R|T)\cdot \underbrace{P(T)}_{1/2\ (1-p)}$$

$$= \mathbb{P}_{k-1}(R)\cdot 1/2 + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_{k-1}(R)$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}_0(R) = 1 \\ \mathbb{P}_n(R) = 0 \end{cases}$$

Ex. 4 O persoană are în buzunar 2 monede.

1 → echilibrata

1 → fețe identice H

Aruncă moneda și moneda a picat H?

a) Care este prob. ca moneda să fi fost ech?

b) Aruncă și a doua oară moneda și obține tot H? Care este acum prob ca moneda să fi fost cea normală

Soluție:

$A_1$ = persoana alege moneda 1

$A_2$ = ——— " ——— 2.

a) $\mathbb{P}(A_1 | H) \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{\mathbb{P}(H|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(H)} = \dfrac{\mathbb{P}(H|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(H|A_1)\cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(H|A_2)\cdot \mathbb{P}(A_2)}$

$= \dfrac{1/2 \times 1/2}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

b) $\mathbb{P}(A_1 | (H, H)) = \mathbb{P}(A_1 | B_1 \cap B_2)$

$B_1$ – am dat H la prima aruncare

$B_2$ – — " ——— a doua aruncare.

Formula lui Bayes

$\mathbb{P}(A_1 | B_1 \cap B_2) = \dfrac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 | A) \cdot \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}$

$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 | A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)$

$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 | A_1) = \mathbb{P}(B_1 | A_1) \cdot \mathbb{P}(B_2 | A_1) \leftarrow$ independ. condiționată

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 | A_2) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 | B_1 \cap B_2) = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{5}$

$\mathbb{P}(A_1 | B_1) = 1/3 \qquad \mathbb{P}(A_1 | B_1 \cap B_2 \cap B_3) < \frac{1}{5}$

Ex. 5 Efectuăm aruncări succesive, indep. a două zaruri echilibrate

Vrem să det prob ev ca suma 5 să apară înaintea sumei 7

Soluție

$$\underset{1}{(1,3)},\ \underset{2}{(6,2)},\ \underset{3}{(3,5)},\ \underset{4}{\boxed{(2,3)}},\ \underset{5}{(1,6)}$$

În primele 3 nu am nici 5, nici 7

În a patra am 5

Fie $A_i$ - ev prin care la a-i-a aruncare am obț suma 5.

$B_i$ - ev — " — am obț suma 7

$A = \{$suma 5 apare înaintea sumei 7$\}$

$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \boxed{\phantom{x}}\ E_i$

$E_1$ - apare suma 5 la prima ar.

$E_2$ - suma 5 apare la a doua, iar la prima nu a ap. nici 5, nici 7

$E_n$ - în primele $(n-1)$ aruncări nu apare nici 5, nici 7, iar la a-n-a aruncare apare 5

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

$P(E_n) = ?$

$$E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \ldots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n$$

la a $(n-1)$-a aruncare nu am obț nici 5, nici 7

indep

$$P(E_n) = P(A_1^c \cap B_1^c) \times P(A_2^c \cap B_2^c) \times \ldots \times P(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times P(A_n)$$

$$P(A_1^c \cap B_1^c) = P(A_2^c \cap B_2^c) = \ldots = P(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c)$$

$$P(A_n) = P(A_1) = \frac{4}{36}$$

$(1,4), (4,1), (2,3), (3,2) \to 5$

$$P(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$$

$36 - 7$

$(1,6), (6,1), (3,4), (4,3), (2,5), (5,2) \to 7$

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{36} = \frac{4}{36} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$$

$\to A_1^c \cap B_1^c$ – nu avem nici suma 5, nici 7

$\Omega = \{(i,j) \mid 1 \le i,j \le 6\} = \{1, 2, \ldots 6\}$

suma 5 : 4

suma 7 : 6

$$\Rightarrow P(A_1^c \cap B^c) = \frac{26}{36}$$