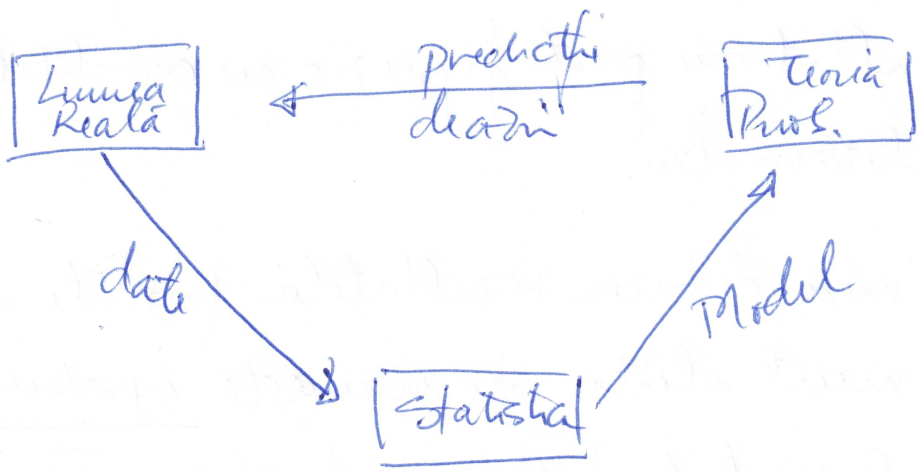
Notare:
- → proiect 30% (în echipe max 3 pers)
- → activitatea de laborator/seminar 20%
- → examen 50% (prag 50% din examen)

În cazul examenului online: → Dropbox

→ 10% în plus (15%) → Overleaf
20%

Introducere în Probabilități și Statistică

Fermat & Pascal ~1650



Cadrul: O urnă cu bile roșii și verzi într-o prop. necunoscută p. Efectuăm n extrageri și notăm culorile.

Pb. prob: Știm că $p = 23\%$ dintre bile sunt de culoare roșie, extragem $n = 20$ de bile (cu revenire) și ne întrebăm care este prob. să observăm 5 bile de culoare verde?

PS. Statistică: am extras din urnă $n=20$ de bile (cu revenire) și am observat că 5 sunt de culoare verde. În ce măsură putem aproxima p plecând de la această informație?

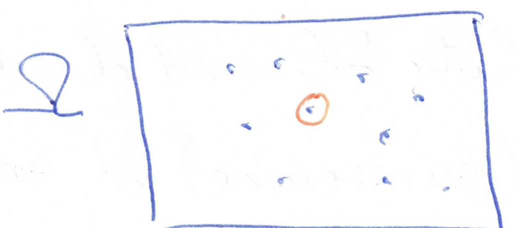
Câmp de probabilitate, operații cu evenimente și formule de calcul

Def: Se numește experiment aleator un experiment/fenomen al cărui rezultat nu poate fi prezis cu exactitate (siguranță) înaintea realizării lui.

Def: Mulțimea tuturor rezultatelor posibile asociate unui experiment aleator se numește spațiul stărilor (sau spațiul probelor) și se notează cu Ω.

Def: Elementele din Ω ($\omega \in \Omega$) se numesc evenimente elementare.

a) mutual exclusive



Exp: Aruncatul cu banul

$\Omega = \{H, T\}$

head, tail

b) colectiv exhaustive

În urma experimentului unul și doar unul dintre evenimentele elementare s-a realizat.

Ne imaginăm:

$$\Omega=\{H,T\} \qquad \begin{cases} 1)\ H \text{ și afară plouă} \\ 2)\ H \text{ și afară nu plouă} \\ 3)\ T \text{ și afară plouă} \\ 4)\ T \text{ și afară nu plouă} \end{cases}$$

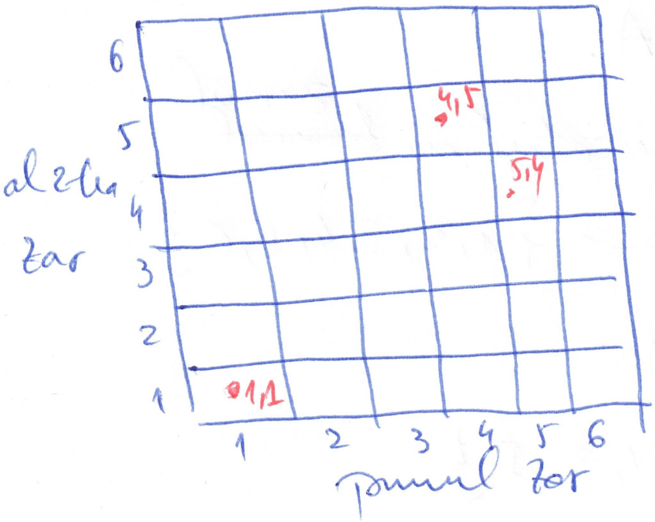
Exp 2: a) Aruncatul cu zarul (spațiu al stărilor discret finit)

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

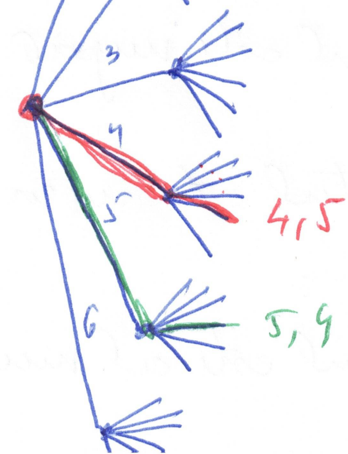
b) aruncăm cu 2 zaruri $\Omega=\{(x,y) \mid 1\le x\le 6,\ 1\le y\le 6,\ x,y\in\mathbb{N}\}$

x: nr. de puncte de pe primul zar

y: nr. de puncte de pe al 2-lea zar



Arbore:

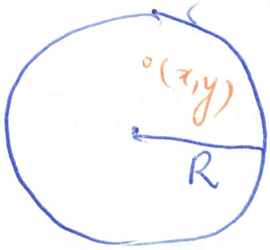


Exp 3: Durata de viață a unui calculator

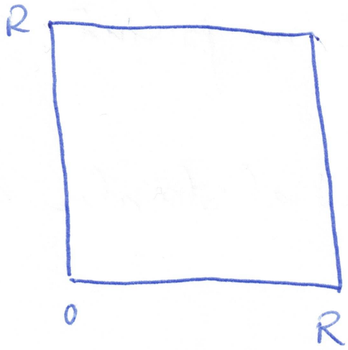
$$\Omega = [0,T], \quad T>0$$

$$\subseteq \mathbb{R}_+ \quad (\Omega \subset \mathbb{R}_+)$$

Exp 4: Tirul la țintă

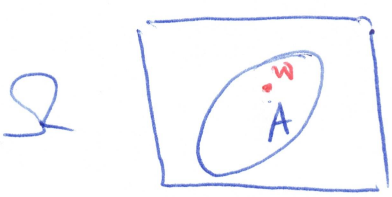


$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$$



$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x,y \le R\}$$

Def: Un eveniment este o submulțime de elemente din Ω. ($A \subseteq \Omega$). Spunem că evenimentul $A \subseteq \Omega$ s-a realizat dacă, în urma desfășurării experimentului aleator, rezultatul experimentului $\omega \in A$.



Exp: Aruncatul cu ~~banul~~ zarul

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

a) $A = \{3\}$

b) rezultatul este impar $A = \{1,3,5\}$

c) rezultatul este num. prim $A = \{2,3,5\}$

d) rezultatul este cel mult 4: $A = \{1,2,3,4\}$

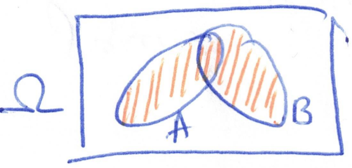
Fie A și B două evenimente:

Notație	Denumirea în Teoria Mulțimilor	Denumirea în Teoria Probabilit[ăților]
Ω	mulțimea Ω	spațiul stărilor sau evenimentul sigur
ω	submulțimea cu 1 element	eveniment elementar
$\emptyset$	mulțimea vidă	eveniment imposibil
A	mulțimea A (submulțimea $A \subseteq \Omega$)	evenimentul A se realizează
A^c (C_A, $\bar{A}$)	mulțimea complementară a lui A	evenimentul contrar
$A \cup B$	reuniunea lui A cu B	realizarea lui A sau a lui B (cel puțin unul dintre even. A și B se realize[ază])
$A \cap B$	intersecția de mulțimi	realizarea lui A și B (A și B se realizează simultan)
$A \setminus B$	diferența dintre A și B	realizarea lui A dar nu și a lui B

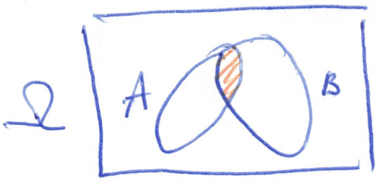
$A \subseteq B$	incluziunea mulțimilor	A implică B $\omega \in A \subseteq B \Rightarrow \omega \in B$
$A \Delta B$	diferența simetrică	realizarea lui A sau B dar nu a amândurora

Diagrame Venn:

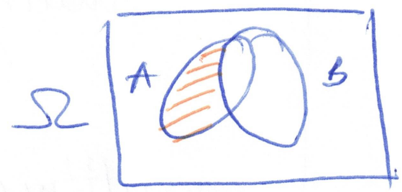
$A \cup B$



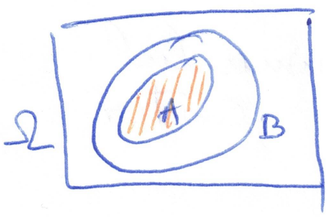
$A \cap B$



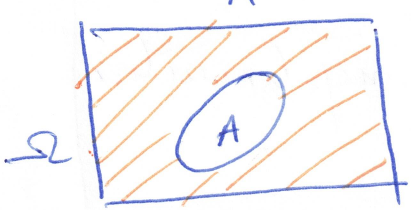
$A \setminus B$



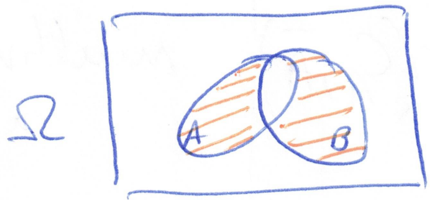
$A \subseteq B$



A^c



$A \Delta B$



Notăm mulțimea evenimentelor posibile asociate unui experiment aleator cu $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ - mulțime de mulțimi

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ - mulțimea părților lui Ω

Obs: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{cases} a) & \Omega \in \mathcal{F} \\ b) & A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \quad (\emptyset \in \mathcal{F}) \\ c) & A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Mulțimea $\mathcal{F}$ care verifică a), b) și c) s.n. algebră.

Exp: Aruncăm o monedă până când observăm pentru prima oară cap și ne interesăm la nr. de aruncări necesare:

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$$

H TH TTH

$A = \{$ am obținut pt. prima oară cap după un nr. par de aruncări $\}$

$= \{2, 4, 6, \dots\} = \bigcup_{i \geq 1} \{2i\}$ → reuniune numărabilă

c) dacă $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Def: O colecție $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ care verifică prop:

a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

c) $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

se numește σ-algebră peste Ω