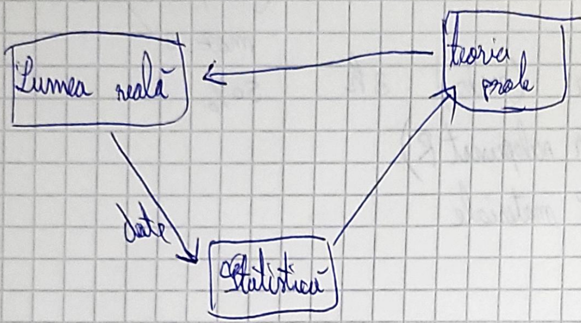
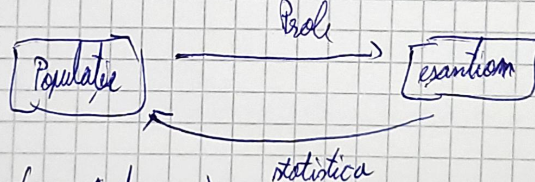
Introducere în Prob. și Statistică

- AI
- Machine Learning



Exp. Urnă cu bile albe și negre. Proporția bilelor albe este $p \in (0,1)$ necunoscut

Prob: $p = 17\%$ (presupunem) extragem 10 bile
care este probabilitatea ca în cele 10 bile să avem 4 de culoare albă.



Stat: Am extras 10 bile (cu întoarcere)
obs. 4 sunt albe
ce pot spune despre p

1600 ⟶ 1900

Câmp de probabilitate, operații cu evenimente

Experiment aleator = șir de acțiuni care conduc la un rezultat necunoscut înaintea realizării lui
(fenomen)

Ω - mulțimea evenimentelor elementare / spațiul stărilor / spațiul probelor

$\Omega = \{H, T\}$ (head, tail) $\qquad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\omega \in \Omega$ → eveniment elementar

Ω

a) mutual exclusivitate

b) colectiv exhaustive

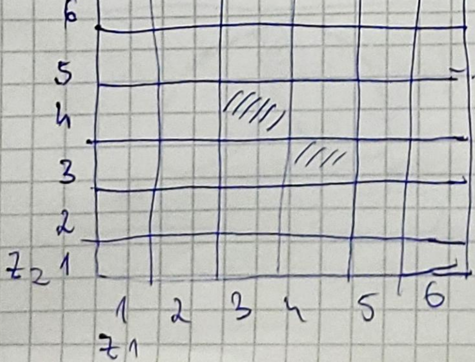
1) H și afară plouă
2) T și afară plouă
3) H și afară nu plouă
4) T și afară nu plouă

$\Omega = \{H, T\}$

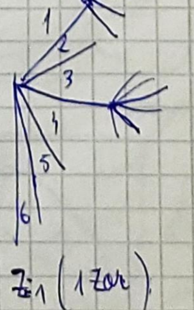
Exp: 1) $\Omega = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \{H, T\} \}$

2) Două zaruri

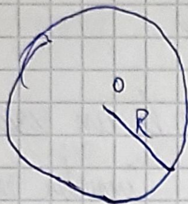
$\Omega = \{ (x, y) \mid x, y \in \{1, \dots, 6\} \}$



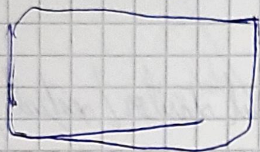
(3, 4)
(4, 3)



3) $\Omega = \underbrace{[0, T]}_{\mathbb{R}_+}$, $T \geq 0$



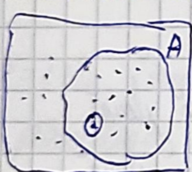
$$\Omega = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \}$$



$$\Omega = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{matrix} -a \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq b \end{matrix} \right\} \quad a, b > 0$$

<u>Def</u>: O submulțime ~~a lui~~ $A \subseteq \Omega$ s.n. eveniment. Spunem că ev. A se realizează dacă în urma desfășurării experimentului aleator $\Rightarrow \omega \in A$.

Ω



$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{4\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

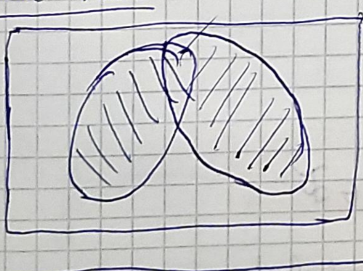
$A = \{2, 3, 5\}$

	Teoria mulțimilor	Teoria prob.
Ω	mulțimea Ω	spațiul stărilor / ev. sigur
ω	un element din Ω	evenimentul elementar
$\emptyset$	mulțimea vidă	ev. imposibil
A	mulțimea A	ev. A
$A^c (C_A, \bar{A})$	compl. lui A în Ω	ev. contrar al lui A
$A \cup B$	reuniune	cel puțin unul din ev. A sau B se realizează (ev. A sau B)
$A \cap B$	intersecție	ev. A și ev. B (ev. A și B se realizează simultan)
$A \setminus B$	diferența	A se realizează dar B nu
$A \Delta B$	diferența simetrică	sau A sau B se realizează dar nu amândouă ambele.

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

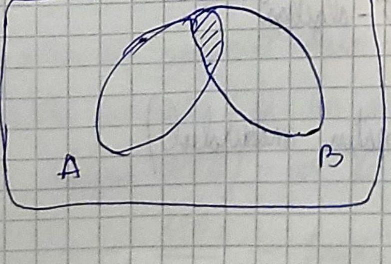
Diagrame Venn

Ω

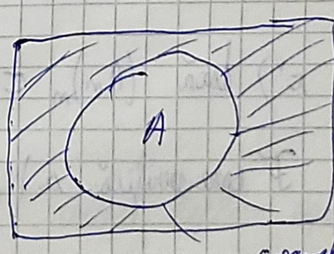


reuniune

Ω

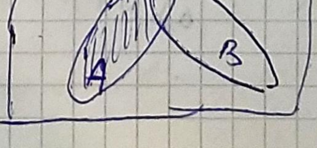


intersecție



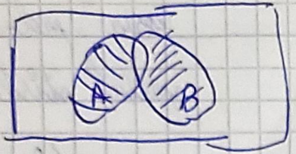
Ω

complementar



diferența

Ω



Ω diferența simetrică

Def: Mulțimea evenimentelor posibile asociate experimentului aleator cu spațiul stărilor Ω este o submulțime $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ care verifică următoarele prop.:

algebră
$$\begin{cases} a) \ \Omega \in \mathcal{F} \\ b) \text{ dacă } A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ c) \text{ dacă } A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F} \end{cases}$$

$\emptyset \in \mathcal{F}$

Exp: Aruncăm cu banul până obținem pentru prima oară H.

$$\Omega = \{1, \underset{\substack{\downarrow \\ TH}}{2}, \underset{\substack{\downarrow \\ TTH}}{3}, \ldots\} = \mathbb{N}^*$$

$A = \{$ am obținut pt. prima oară H după un nr. par de ori $\}$

$$= \{2, 4, 6, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2i\}$$

c') dacă $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$ atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ care verifică a), b) și c') s.n σ-algebră

$(\Omega, \underset{a,b,c'}{\mathcal{F}})$ spațiu probabilizabil (spațiu măsurabil) exp. aleator $\longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, P)$

<u>Prop</u>: a) Avem $(\Omega, \mathcal{F})$

1) $\Omega = \{H, T\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega\}$

2) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \triangle \{0,1\}^{|\Omega|}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$A \to (0, 1, 1, \dots, 0)$

<u>Curs 2</u>

<u>Câmp de probabilitate</u>. Operații cu evenimente.
Formule de calcul.

exp. aleator $\to (\Omega, \mathcal{F})$ $\longrightarrow \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mulțimea ev. posibile

sp. stărilor
mulțimea evenimentelor elementare

$$\left.\begin{cases} a)\ \Omega \in \mathcal{F} \\ b)\ A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ c)\ A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F} \end{cases}\right] \text{algebră}$$

c') $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$

a), b) + c') $\to$ σ-alg.

$$\begin{aligned} P : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ \Psi \quad & \qquad \Psi \\ A &\longrightarrow p \end{aligned}$$

Pp. că avem un experiment aleator și un eveniment A de interes. Repetăm experimentul (în condiții similare) de un nr. mare de ori: N

Notăm $N(A)$ - nr. de realizări ale lui A

$\dfrac{N(A)}{N}$ - frecv. relativă de realizare a lui A

$$\mathbb{P}(A) \simeq \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N}$$

$$N(A) \in \{0, \dots, N\}$$

$$\frac{N(A)}{N} \in [0,1]$$

$\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

Dacă $A = \Omega$

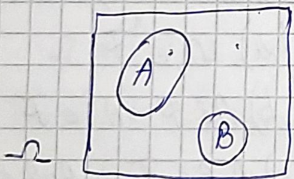
$\Rightarrow N(A) = N$

$\Rightarrow \frac{N(A)}{N} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

P.p. $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$



$A \cup B \in \mathcal{F}$

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) \;/ :N$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (finit aditivitate)

Def: O funcție $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1)$ care verifică

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(σ-aditivitate) b) $(\forall)\ (A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ disjuncte două câte două

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Sn. măsură de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$
(probabilitate)

Experiment aleator

$\downarrow$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ câmp de probabilitate

Ex. 1: a) Aruncatul cu banul

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega\}$$

$$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(\{H\}) = p \in [0,1] \Rightarrow \mathbb{P}(\{T\}) = 1-p$$

$p = \frac{1}{2}$ monedă echilibrată

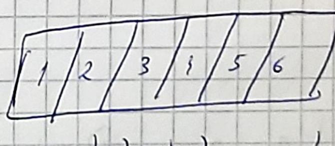
Ex. 2) Aruncatul cu zarul

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad 2^6$ elemente

$$\{0,1\}^{\Omega} = \{f : \Omega \to \{0,1\}\}$$

$$A^B = \{f : B \to A\}$$



$$\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \cup \{6\}$$

$$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(\{i\}) = p_i \in [0,1], \quad i \in \{1, \ldots, 6\}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) $(A_n)_n \in \mathcal{F}$ disjuncte două câte două

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

Prop: a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ → finit (in def și inf.)

opț. cond.

$$\Omega \cup \emptyset = \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\Omega \cap \emptyset = \emptyset \qquad \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Șirul $A_n = \emptyset$

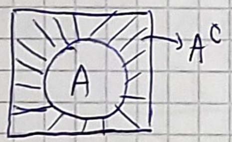
$$\bigcup_n A_n = \emptyset$$

Pp. $\mathbb{P}(\emptyset) > 0$

Fol. b) $\mathbb{P}(\emptyset) = \underbrace{\sum \mathbb{P}(\emptyset)}_{\infty}$ } contradicție

b) $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disj. 2 câte 2

c) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$



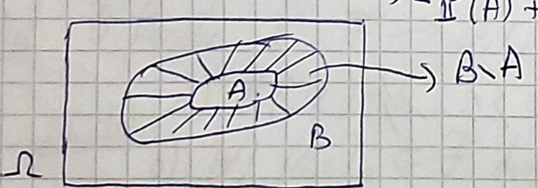
$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$A \cup A^c = \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

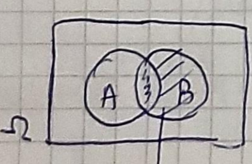
$$\mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

(A și A^c sunt disj.)

d) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geq 0}$ $\quad (B = A \cup (B \setminus A))$



e) $A, B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A \cup B) \overset{?}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$



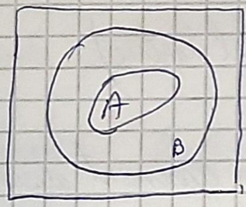
$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$

$$A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus (A \cap B))}_{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

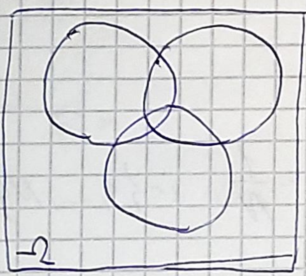
$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$



$\underline{A \subseteq B} \Rightarrow P(A) \le P(B)$

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

e') A, B, C $\quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



f) Formula lui Poincaré (când nu sunt disjuncte)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

(Temă)

$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$

$P(A \cap B) \ge P(A) + P(B) - 1$

$P(\{H\}) = p \in (0,1)$

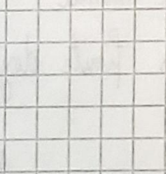
$A = \{$va pica H mai devreme sau mai târziu$\}$

$P(A) = 1$

$A = \bigcup_n A_n$ $\qquad A_n = \{$vom obține H în n aruncări$\}$

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$

H ... T ...



$\bigcup_n A_n = \lim_n A_n$

$P(\lim_n A_n) = \lim_n \underbrace{P(A_n)}_{1-(1-p)^n}$

Modelul clasic de probabilitate (Modelul Laplace)

Fie $N \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$ și considerăm un experiment aleator cu N rezultate posibile

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad (2^N \text{ elemente})$$

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] \qquad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}, \ i \in \{1, \dots, N\} \text{ echirepartiția}$$

Fie $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\overset{\text{reuniune finită}}{\bigcup_{\omega_i \in A}} \{\omega_i\}\Big) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{\omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N}$$

$$A = \{\omega_1, \omega_7, \omega_9\} \qquad = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nr. caz. favorabile}}{\text{nr. caz. posibile}} \qquad \cancel{= |A|}$$

a) Formula sumei

A, B finite disjuncte $\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

oarecare $\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Principiul includerii-excluderii

$A_1, A_2, \dots, A_n$ finite

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

Apl: $\varphi(n) =$ nr. de nr prime cu $n \leq n$

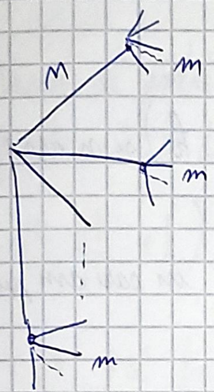
fct Euler

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

b) Formula produs

A, B finite $\quad A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A,\ B \in B \}$

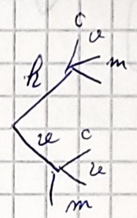
$|A \times B| = |A| \cdot |B|$



$n \times m$

c, v, m

k, w



$6 = 2 \times 3$

$= 3 \times 2$

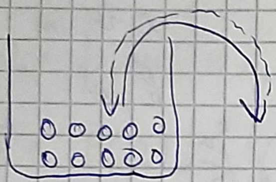
$A^n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid n,\ a_i \in A \}$

$|A|^n$

Curs 3

1) Schema cu revenire (cu întoarcere)

Urnă cu n bile 1...n și efectuăm k extrageri cu revenire.



În câte moduri?

Reformulare: k bile (1...k) și n urne

$(x_1, \dots, x_k)$

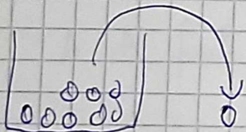
x_i - nr. urnei în care am pus bila

n^k moduri

- nr. de șiruri de lungime k cu termeni oarecare din $\{1, \dots, n\}$

2) Schema de extrageri fără revenire (fără întoarcere)

Urnă n bile 1...n și efectuăm k extrageri fără întoarcere.



În câte moduri?

Reformulare: Nr. de șiruri de lungime k cu termeni distincți din $\{1, \dots, n\}$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

	ordinea contează	ordinea nu contează
cu revenire	n^k	$\binom{n+k-1}{n-1}$ → Bose-Einstein
fără revenire	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Exp: 1) MATE

$\boxed{M, A, T, E}$ — cu revenire $4^4 = 256$

— fără revenire $4!$

2) Vrem să păstrăm grupate cărțile din domeniu

4 Matematică
3 Fizică
2 Istorie
1 Geografie

$\underset{\text{domeniile}}{4!} \cdot (4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!)$

$\underbrace{\underset{M}{4!} \mid \underset{F}{3!} \mid \underset{I}{2!} \mid \underset{G}{1!}}_{4!}$

Exp: (Pb. aniversărilor) n persoane. Vrem să vedem care este probabilitatea ca cel puțin două să se fi născut în aceeași zi.

Ipoteze: - anul are 365 zile
- echirepartiție
- nu avem gemeni

Câmpul de prob.

$$\Omega = \{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i \in \{1, \dots, 365\} \}$$

$|\Omega| = 365^n$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ - mulțimea ev. posibile

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{365^n}$ echirep.

A – cel puțin 2 persoane s-au născut în aceeași zi

$$A = \{(z_1, \dots, z_n) \in \Omega \mid \exists\, i,j,\ i \neq j \text{ a.î. } z_i = z_j\}$$

$\mathbb{P}(A) = ?$ $\dfrac{|A|}{|\Omega|}$

$n = 23$

$\mathbb{P}(A) \simeq 51\%$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$$

A^c – toate cele n persoane s-au născut în zile diferite

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

Avem n persoane și vrem să formăm comisii de k persoane.

Reformulare: Nr de submulțimi cu k elem. a unei mulțimi cu n elem.
Ordinea nu contează!

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad C_n^k,\ \binom{n}{k}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \longrightarrow \frac{n!}{(n-k)!}$$

$k!$

Ex: 1) 52 cărți

câte mâini de 5 cărți

$$\binom{52}{5}$$

Ex: 2) Câte mâini de 5 cărți conțin exact 2 ași, 2 popi și o damă

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{1}$$

52 cărți de joc $<$
- 4 culori: inimă roșie, inimă neagră, romb, treflă
- 13 figuri: 2, 3, ..., 10, J, Q, K, A

3) În jocul de Poker vrem să determinăm probabilitatea Full House

Full House: $\{Q, Q, 3, 3, 3\}$

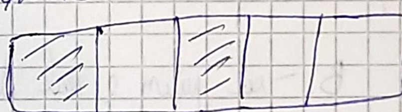
$\Omega = \{\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} \mid w_i \in$ cărților de joc$\}$

$|\Omega| = C_{52}^{5}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$, $\mathbb{P}(\{w_1 \ldots w_5\})$ echiprob.

$\frac{1}{\binom{52}{5}}$

A = evenimentul prin care am obținut Full House.

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

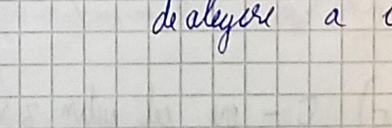


$|A| =$ – putem alege figura pt. pereche în $\binom{13}{1}$ iar culoarea în $\binom{4}{2}$ ori;

iar pt. cele 3 cărți avem $\binom{12}{1}$ moduri de alegere a figurii și $\binom{4}{3}$ moduri de alegere a culorii

$|A| = \binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{1}\binom{4}{3}$

4) o pereche



B – ev. prin care avem o pereche

figuri diferite

$\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3$

Ex: Problema lui ~~Ne~~ Newton - R

a) Cel puțin un 6 apare atunci când aruncăm 6 zaruri
b) Cel puțin 2 valori de 6 apar at. când aruncăm 12 zaruri
c) cel puțin 3 valori de 6 apar at. când aruncăm 18 zaruri

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6$

$\{1, \dots 5\}$

A - ev. de interes

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5^6}{6^6}$$

b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{12}$

B - cel puțin 2 val de 6 în 12 zaruri

$$P(B) = 1 - P(B^c)$$

$$P(B^c) = P(\underbrace{\text{nicio val. de 6}}_{} \text{ sau } \underbrace{\text{exact o val. de 6}}_{}) = P(\text{nicio val de 6}) +$$

$\cup$

$$+ P(\text{exact 1 val de 6}) = \frac{5^{12}}{6^{12}} + \cancel{\frac{6^{11}}{6^{12}}} \frac{\binom{12}{1} \cdot 5^{11}}{6^{12}}$$

c) C - ev. cel puțin 3 val de 6 în 18 zaruri

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{18}$

$P(C) = 1 - P(C^c)$ niciuna sau exact 1 sau exact 2 =

$$= \frac{5^{18}}{6^{18}} + \frac{\binom{18}{1} 5^{17}}{6^{18}} + \frac{\binom{18}{2} 5^{16}}{6^{18}}$$

Partiții – coef. multinomial

Avem o mulțime cu n elem. și fie $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ a.î. $n_1+n_2+\dots+n_k=n$

Considerăm o part. cu k submulțimi a.î. submulțimea i să aibă n_i elem.

$k=2$ $\quad n_1+n_2=n$

$$\binom{n}{n_1}$$

Echivalent cu: mulțimea șirurilor de lung n cu n_1 elem de tip 1

n_2 elem. de tip 2

$\vdots$

n_k elem. de tip k.

Pt. k

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{A_1} \times \underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{A_2} \times \underbrace{\binom{n-n_1-n_2}{n_3}}_{A_3} \times \dots \times$$

$$\dots \times \underbrace{\binom{n-n_1-n_2\dots n_{k-1}}{n_k}}_{A_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}} \times \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \times \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\,\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \times \dots \times \frac{\cancel{(n-n_1-n_2\dots n_{k-1})!}}{n_k!\,\underbrace{(n-n_1-n_2-\dots-n_k)!}_{0!=1}} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Exp 1) MATEMATICA

M → 2

A → 3

T → 2

I → 1

C → 1

E → 1

$$\binom{10}{2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1}$$

2) 4 băieți și 12 fete

Prof. formează în mod aleator 4 subgrupe de câte 4 studenți

Care este prob. ca în fiecare subgrupă să fie 1 băiat?

$$\binom{16}{4,4,4,4} = \frac{16!}{4!\,4!\,4!\,4!}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{\binom{16}{4,4,4,4}}$$ echiprob.

|B |B |B |B |

$$\frac{4!\binom{12}{3,3,3,3}}{\binom{16}{4,4,4,4}}$$

Extragem cu revenire, ordinea nu contează

În câte moduri putem plasa k bile (care nu se disting între ele) în n urne.

|oo| |ooo|o|oo|oooo| $n=6$, $k=12$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$

$x_i \in \mathbb{N}$

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

(*)

Apl. Prob lui Montmort

$\cancel{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$

n plicuri

n scrisori

Prob ca cel puțin o scrisoare să fi ajuns la destinatarul de drept.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

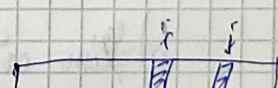
$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bij.

$\Omega = S_n = \{ \sigma : \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\} \mid \sigma \text{ bij} \}$. $|\Omega| = n!$, Pe echiprob.

$A = \{ \sigma \in S_n \mid \exists\, i \in \{1, \dots, n\} \text{ a.î. } \sigma(i) = i \}$ $\quad n \to \infty,\ \mathbb{P} \to 1 - \frac{1}{e}$

Fie A_j - ev. prin care dest j a primit scrisoarea destinată lui $= \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(j) = j \}$ $\quad A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) =$$



$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \cancel{\frac{(n-2)!}{n!}} = \frac{|A_i \cap A_j|}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \quad 1 - \frac{1}{e}$$

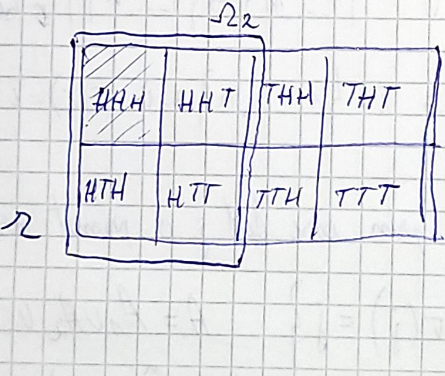
Curs 4

Probabilități condiționate

Ex 1): Aruncăm cu o monedă de 3 ori

a) Care este prob. să obținem HHH?

$\Omega = \{H, T\}^3$



$A = \{HHH\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}$

b) Știm că la prima aruncare am obținut H

$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \mid B)$ — știind că — ev. care s-a realizat

B - ev. prin care la prima aruncare am obținut H

ev. de interes

$P(A|B)$ – prob. realizării lui A știind că B s-a realizat

prob. cond. a lui A la B

Din perspectivă frecvenționistă: Avem un experiment aleator pe care îl repetăm de un nr. N de ori. Ne ~~interesează~~ interesăm la ev. A și B.

$$\frac{N(A\cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \approx \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de prob., $A, B \in \mathcal{F}$ cu $P(B)>0$. Atunci definim prob. cond. a lui A la ev. B și o notăm $P(A|B)$, prin

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

"$A|B$" nu este un eveniment (o notație)

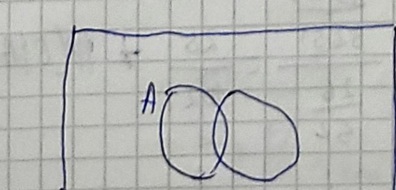
$P(A)$ – prior sau prob. a priori

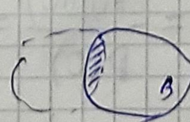
$P(A|B)$ – posterior sau prob. a posteriori

Exp: (cont.)

$$P(A|B) = \frac{P(\overset{\{HHH\}}{A\cap B})}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{5}$$

$P(B|B) = 1$





Ex 2: Avem un pachet de cărți de joc și extragem în mod aleator 2 cărți succesive și fără întoarcere

52 cărți

13 inimă roșie

26 cul. roșie

A – "prima carte este de inimă roșie"

B – "a doua carte este de inimă roșie"

C – "a treia carte este de culoare roșie"

Vrem să calculăm:

$P(B|A)$, $P(C|A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$

Sol: $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{13\cdot 12}{52\cdot 51}}{\frac{13}{52}} = \frac{12}{51}$

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$P(A\cap B) = \frac{13\cdot 12}{52\cdot 51}$

$P(C|A) = \frac{P(A\cap C)}{P(A)} = \frac{25}{51}$

$P(A\cap C) = \frac{13\cdot 25}{52\cdot 51}$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{12}{51} = P(B|A)$

$P(B) \rightarrow \frac{1}{4}$

$P(C) = \frac{26}{52}$

$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{13\cdot 25}{52\cdot 51}}{\frac{26}{52}} = \frac{25}{102} \neq P(C|A)$

FB, BF, BB, FF

Ex 3 O familie are 2 copii:

a) Care este prob. ca cei 2 copii să fie de sex F știind că cel mai mare vârsta este F?

b) — " — știind că cel puțin unul dintre ei este F?

Ipoteze: $\begin{cases} - \{F, B\} \\ - P(F) = P(B) = \frac{1}{2} \\ - \text{sexul unui copil nu este influențat de sexul celuilalt copil.} \end{cases}$

$\Omega = \{BB, BF, FB, FF\}$ $\quad A = \{FF\}$

a) $B = \{\text{cel mai în vârstă este } F\} = \{FB, FF\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

$C = \{\text{cel puțin unul este de sex } F\} = \{FB, BF, FF\}$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

c) — " — Fată născută Iarna ! Examen

I, P, V, T $\quad \Omega = \{FI, FP, FV, FT, BI, BP, BV, BT\}^2$ $\quad$ 64 de elemente

$P(\text{cei 2 copii să fie } F | FI) = \frac{7}{15}$

$P(FI) = \frac{15}{64}$

$FI, \underline{\ \ }$ $\quad 4$

$\underline{\ \ }, FI$ $\quad 3$ → două fete

$FI, \underline{\ \ }$ $\quad 8$

$\underline{\ \ }, FI$ $\quad 7$

$(FI\,FI)$

Ex 4) Dacă o aeronavă apare în zona de interes scanată de un radar atunci se declanșează o alarmă cu prob de 99%. Dacă nu ~~apare~~ avem aeronava atunci alarma (falsă) se declanșează în 10%.
Șansa să treacă o aeronavă prin zona de interes = 5%.

a) Care este prob. ca în zona de interes să nu avem avion și să avem alarmă?

b) Care este prob. să avem avion dar să nu fie detectat?

A = { să avem avion în zona de interes }
B = { se declanșează alarma }

a) $\mathbb{P}(A^c \cap B)$

b) $\mathbb{P}(A \cap B^c)$

$$P(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Ipoteză

$\mathbb{P}(A) = 0.05$

$\mathbb{P}(B|A) = 0.99$

$\mathbb{P}(B|A^c) = 0.1$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = P(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}$$

~~P(A|B)~~

a) $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B|A^c)\,\mathbb{P}(A^c)$

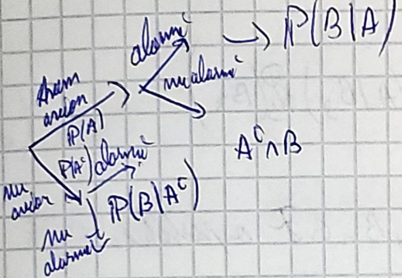
$= \mathbb{P}(B|A^c)(1 - \mathbb{P}(A))$

$= 0.1 \times 0.95 = 0.095$

b) $P(A \cap B^c) = P(B^c|A) \cdot P(A)$

$= (1 - P(B|A)) \cdot P(A)$

$= 0.01 \cdot 0.05 = 0.0005$

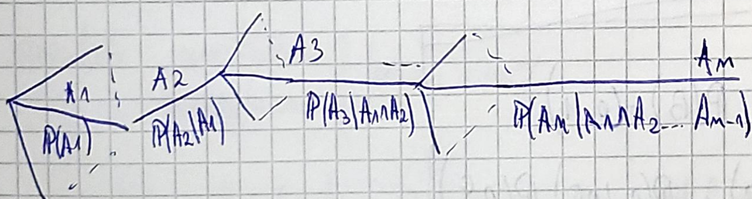


(P) (Formula produsului) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o.p. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) > 0$

Atunci

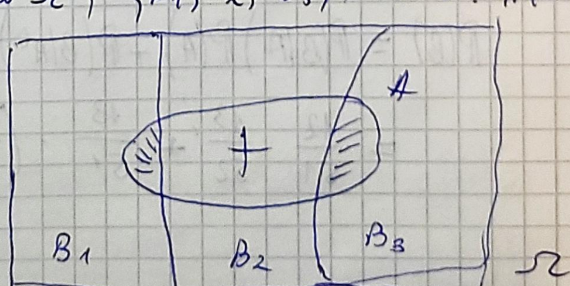
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap \dots A_{n-1})$$



Formula prob. totale

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o.p. o partiție a lui Ω, $\{B_1, B_2, B_3\}$ și $A \in \mathcal{F}$. $P(B_i) > 0$

$$\begin{cases} B_1, B_2, B_3 \subseteq \Omega \\ B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \\ B_1 \cap B_2 = \emptyset \\ B_2 \cap B_3 = \emptyset \\ B_1 \cap B = \emptyset \end{cases}$$



$$A = A \cap \Omega$$
$$= A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$$
$$= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3) =$$
$$= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)$$

(P) Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ o partiție a Ω cu $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$

Dacă $A \in \mathcal{F}$ atunci:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

$n=2$

$A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ $\quad \mathbb{P}(B) \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

Exp (cărți ant.)

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)$$
$$= \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} + \frac{13}{51} \cdot \left(1 - \frac{13}{52}\right) = \frac{1}{4}$$

Formula lui Bayes

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. $A, B \in \mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$

a) $$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$

b) $A \in \mathcal{F}$, $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ o part. a lui Ω, $P(B_i) > 0$

$$P(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}$$

EXP: Să presupunem că prevalența unei boli în pop. este 1%. Pp că efectuăm un test de detecție cu o acuratețe de 95%.

acuratețe: $\left.\begin{array}{l}\text{sensitivitatea} \\ \text{specificitatea}\end{array}\right\}$ testului = 95%

$\mathbb{P}(T|D)$ = sensitivitate = rata de true positive = prob. ca testul să fie + știind că pacientul este infectat

$\mathbb{P}(T^c|D^c)$ specificitate = rata de true negative = prob. ca testul să fie − știind că pacientul nu e infectat.

D − pacientul este infectat

T − testul este pozitiv

$\mathbb{P}(T|D^c)$ = false pozitive

$\mathbb{P}(T^c|D^c)$ = false negative

Pp. că am efectuat testul și a ieșit pozitiv. Care este prob. să avem virusul știind că testul e +?

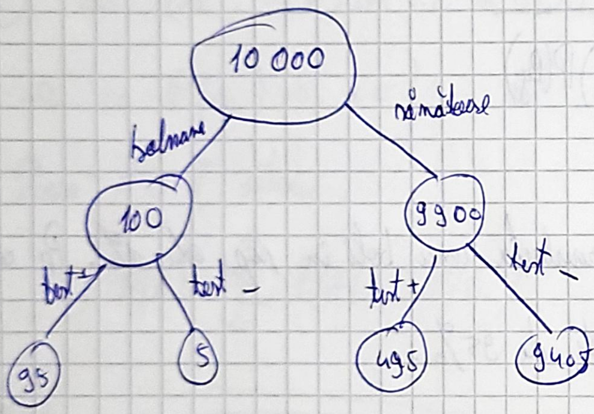
$\mathbb{P}(D|T) = ?$ ↗ Formula lui Bayes

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)P(B)}{P(T)} = \frac{P(T|D)P(D)}{P(T|D)P(D)+P(T|D^c)P(D^c)} =$$

$$P(D^c) = 1-P(D)$$

$$P(T|D^c) = 1 - P(T^c|D^c) = 0.05$$

$$= \frac{0.95\times 0.01}{0.95\times 0{,}01 + 0.05\times 0.99} = \frac{0.0095}{0.0095+0.049} = \frac{0.095}{0.0445} \approx 0{,}16$$



$$\frac{95}{95+495} = 0.16$$

(P) Prob. condiționată este o probabilitate

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cp. și $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$

def $Q(\cdot) = P(\cdot\,|A)$

$Q(B) = P(B|A)$

$(A, \mathcal{F}\cap A)$

$$\begin{cases} Q(A) = 1 \\ (A_n)_n \subseteq \mathcal{F}\cap A \text{ disjuncte} \\ \quad Q(\bigcup A_n) = \sum Q(A_n) \end{cases}$$

$Q(A) = P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = 1$

$Q(\bigcup_m A_m)\ P(\bigcup_m A_n | A) = \frac{P(\bigcup_m A_m \cap A)}{P(A)} = \frac{\sum P(A_m \cap A)}{P(A)} = \sum Q(A_m)$

Exp: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o.p

$A, B, C \in \mathcal{F}$ $P(A \cap B) > 0$

$P(A \cap C) > 0$

$P(B \cap C) > 0$

$P(A | B, C) = \frac{P(B|A,C)\, P(A|C)}{P(B|C)}$

$\hookrightarrow B \cap C$

$Q(\cdot) = P(\cdot | C)$

Curs 5

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$

$Q(B) = \mathbb{P}(B|A)$, $\forall B \in \mathcal{F} \cap A = \{ \mathcal{F} \cap A \mid F \in \mathcal{F} \}$

este prob.

Formula lui Bayes:

$$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | C)$$

$$Q(A|B) = \frac{Q(B|A) \cdot Q(A)}{Q(B)}$$

$$\mathbb{P}(A|\overset{B\cap C}{B,C}) = \frac{\mathbb{P}(B|A,C)\,\mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(B|C)}$$

$$Q(A|B) = \mathbb{P}(A|B,C)$$

Exp: P.p. să avem 2 monede: una echilibrată (prob $H = \frac{1}{2}$), una trucată (prob $H = \frac{3}{4}$)

Șansa să alegem oricare dintre cele 2 monede este $\frac{1}{2}$.
Obțin în urma celor 3 aruncări: HHH

a) Având această info care este prob. să fi ales moneda echilibrată?

b) P.p. să arunc pt. a 4-a oară moneda. Care este prob. să fi obținut H?

a) A - ev. prin care în primele 3 aruncări am obținut HHH
B - ev. prin care am ales moneda echilibrată

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\,\mathbb{P}(B^c)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{9}{}} \quad \frac{1}{1 + \frac{3^3}{2^3}}$$

b) C - ev. prin care la a 4-a aruncare am obținut H.

$P(C|A) = ?$ $\qquad Q(\cdot) = P(\cdot|A)$

Dacă notăm $Q(C) = P(C|A)$

Formula prob. totale: $Q(C) = Q(C|B)\,Q(B) + Q(C|B^c)\,Q(B^c)$

$Q(B) = P(B|A)$

$Q(B^c) = 1 - Q(B)$

$Q(C|B) = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ prob. să pice H dacă am ales moneda echilibrată

$Q(C|B^c) = \frac{3}{4}$

Independență

Două ev. sunt independente dacă realizarea unuia nu aduce niciun fel de info. suplimentară despre realizarea celuilalt.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $A, B \in \mathcal{F}$

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un c.p. și $A, B \in \mathcal{F}$. Spunem că A și B sunt indep. și notăm $A \perp\!\!\!\perp B$ dacă $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Ex: ~~Dacă~~ Dacă $A \perp\!\!\!\perp B$ at.:

$A^c \perp\!\!\!\perp B$

$A \perp\!\!\!\perp B^c$

$A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Exp: Aruncăm cu banul de 2 ori

A_1 - ev. prin care la prima aruncare am obținut H

A_2 — " — a 2-a aruncare — " —

$\Omega = \{H, T\}^2$

22
12
23
24
21
32
42

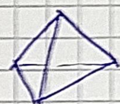
$A_1 = \{(H,H), (H,T)\}$

$A_2 = \{(T,H), (H,H)\}$

$A_1 \cap A_2 = \{(H,H)\}$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(A_1) &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A_2) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \Rightarrow A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$$

Exp: Zar cu 4 fețe: Aruncăm de 2 ori



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$$

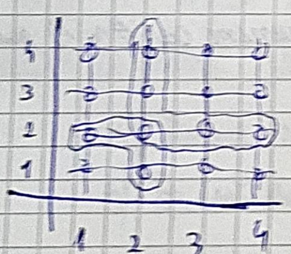
$A = \{\text{primul zar are fața } 1\} = \{(1,x) \mid x \in \{1,2,3,4\}\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$

$B = \{\text{suma punctelor este } 5\} = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$ $\quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$

$A \cap B = \{(1,4)\}$ $\quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{16}$

$C = \{\text{minimul este } 2\}$

$D = \{\text{maximul este } 2\}$



$\mathbb{P}(C) = \frac{5}{16}$

$\mathbb{P}(D) = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{16}$

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Spunem că ev. $A_1 \dots A_n$ sunt indep. (mutual) dacă

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i), \quad \forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$$

Obs: A_1, A_2, A_3 sunt indep $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{cases}$$

Pt. n evenimente $2^n - n - 1$ condiții

$$C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n$$

Exp: (cont) Aruncăm 2 monede

$P(A_1) = \frac{1}{2} \leftarrow \{(H,H),(H,T)\} = A_1$ – prima H $\qquad A_1 \perp A_2$

$P(A_2) = \frac{1}{2} \leftarrow \{(H,H),(T,H)\} = A_2$ – a doua H

$P(A_3) = \frac{1}{2} \leftarrow \{(T,H),(H,T)\} = A_3$ – cele 2 sunt diferite

$$\underset{(H,H)}{P(A_1 \cap A_2)} = \underset{(H,T)}{P(A_1 \cap A_3)} = \underset{(T,H)}{P(A_2 \cap A_3)} = \frac{1}{4}$$

A_1, A_2, A_3 sunt independente două câte două

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

A_1, A_2, A_3 nu sunt independente

Def: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ c.p. și $A, B, C \in \mathcal{F}$, $P(C) > 0$

Spunem că A și B sunt indep condiționat la C dacă

$$P(A \cap B | C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$$

Obs: $Q(\cdot) = P(\cdot | C) \to Q(A \cap B) = Q(A) \cdot Q(B)$

Exp: D – {o persoană are afecțiunea} ~~$P(D) = 1\%$~~ (exemplul curs ant.)

$T \to$ {testul a ieșit pozitiv}

$P(D) = 1\%$

acuratețea (senzitivitatea = specificitatea) $= 95\%$ $\qquad P(T|D) = P(T^c|D^c) = 95\%$

$P(D|T) \simeq 16\%$

Să spunem că persoana mai efectuează un test (Ps. că rezultatele celor două teste sunt independente în raport cu statusul bolii) și testul este tot +. Care este probabilitatea să avem COVID?

T_1 – primul test +

T_2 – al 2-lea test +

$P(D|T_1 \cap T_2) = ?$

$$\begin{cases} P(T_1 \cap T_2 | D) = \underset{}{\overset{0.95}{P(T_1|D)}} \cdot \overset{0.95}{P(T_2|D)} \\ P(T_1 \cap T_2 | D^c) = \underset{0.05}{P(T_1|D^c)} \cdot \underset{0.05}{P(T_2|D^c)} \end{cases}$$

0.0090 +

0.0024 +

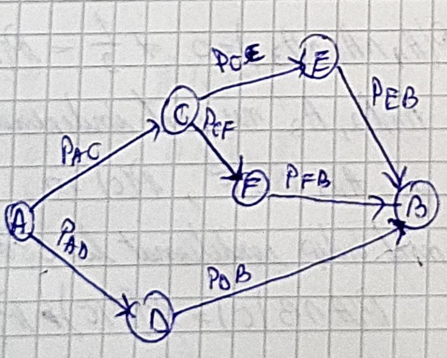
$$P(D|T_1 \cap T_2) = \frac{P(T_1 \cap T_2 | D)\, \overset{0.01}{P(D)}}{P(T_1 \cap T_2)} \simeq 0.78$$

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1 \cap T_2 | D)\, P(D) + P(T_1 \cap T_2 | D^c)\, \underset{0.99}{P(D^c)}$$

$$\frac{0.95 \cdot 0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.95 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.99} = 0.78$$

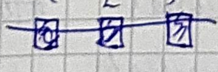
$A \xrightarrow{P_{AB}} B$

Exp:



Care este prob. să transmit un mesaj de la A la B?

a) Subsistem serie

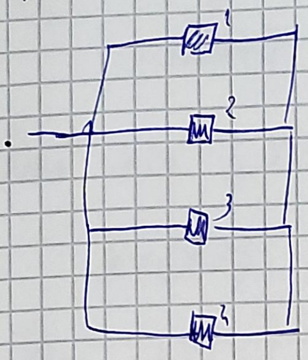


$P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$

$A \xrightarrow{P_{AB}} B \xrightarrow{P_{BC}} C$

$P_{AC} = P_{AB} \cdot P_{BC}$

b) Subsistem paralel



P(transmit mesaj în sist paralel) = 1 − P(să nu transmit mesaj în sist paralel)

= 1 − P(eșec în nod 1, eșec nod 2 ... eșec nod n)

= 1 − P(eșec nod 1) x ... x P(eșec nod n) =

$= 1 - (1 - P_1) * (1 - P_2) \dots * (1 - P_n)$

$P(A \to B) = ?$

P_{OB} $P(C \to B) = 1 - (1 - P(C \to E, E \to B))(1 - P(C \to F, F \to B)) =$

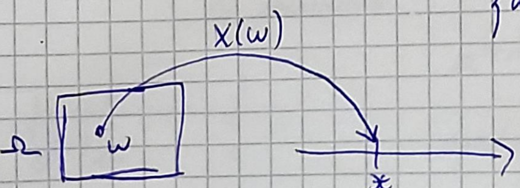
$= 1 - (1 - P_{CE} \times P_{EB})(1 - P_{CF} P_{FB})$

$P(A \to B) = 1 (1 - P_{AC} \times P_{CB})(1 - P_{AD} \times P_{DB})$

<u>Variabile aleatoare</u>

<u>Def</u>: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un c.p și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcție. Spunem că X este o variabilă aleatoare, X v.a (variabilă aleatoare), dacă mulțimea

$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}$



Exp: Aruncăm 2 zaruri

Def X = suma punctelor de pe cele 2 zaruri

$3, 5 \to 8$

$X(\underbrace{(3,5)}_{\omega}) = 8$

$X(x, y) = x+y$

$3, 5 \to 8$

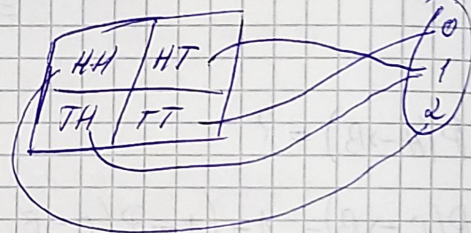
Exp: Aruncăm de 2 ori cu banul

X = nr. de H din cele 2 aruncări

~~$\Omega = \{(H,H)$~~

$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

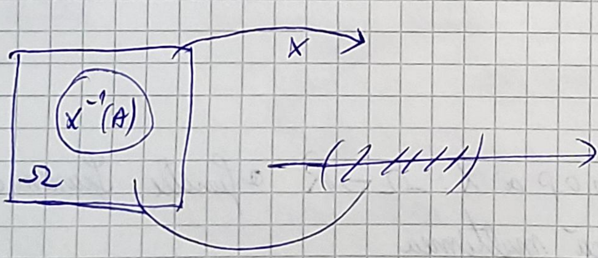
$HH \to 2$, $HT \to 1$, $TH \to 1$, $TT \to 0$



$A \subseteq \mathbb{R}$

Obs $\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$



$X^{-1}(\{0\}) = \{TT\}$

$X^{-1}(\{1\}) = \{HT, TH\}$

$X^{-1}(\{2\}) = \{HH\}$

$$\{X \le x\} \in \underset{\mathcal{P}(\Omega)}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{F}}}$$

Dacă $x<0$ $\{X \le x\} = \emptyset$

$x \in [0,1)$ $\{X \le x\} = \{TT\}$

Dacă $x \in [1,2)$

$\{X \le x\} = \cancel{\{HT, TH\}}$ $\{TT, HT, TH\} = \{X=0\} \cup \{X=1\}$

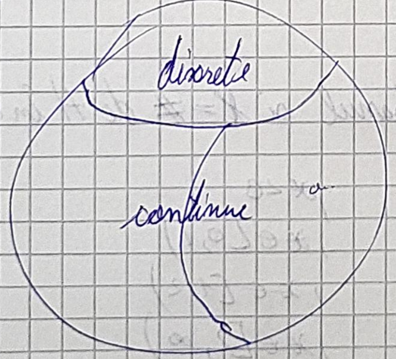
$\{X=0$ sau $X=1\}$

$x \in [2, +\infty)$

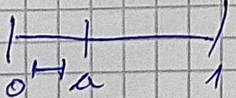
$\{X \le x\} = \Omega$

__Not__: V.a se notează cu litere mari $X, Y, Z, T, W, \dots$

X → discretă: $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă
X → continuă



__Exp__: $[0,1)$ luăm un pct. la întâmplare



a^3 → continuă

$$sgn(a) = \begin{cases} -1, & a<0 \\ 0, & a=0 \\ 1, & a>0 \end{cases}$$

→ discretă

Vrem să calculăm $\mathbb{P}(X\in A)$ unde $A \subseteq \mathbb{R}$

__Def__: (Repartiția unei v.a.)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Se numește rep. lui X (distribuție) probabilitatea pe $\mathbb{R}$ definită prin

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = (\mathbb{P}\circ X^{-1})(A), \quad \forall A \text{ interval din } \mathbb{R}$$

(a,b)
$(-\infty, x]$

$$\boxed{\mathbb{P}_X = \mathbb{P}\circ X^{-1}}$$

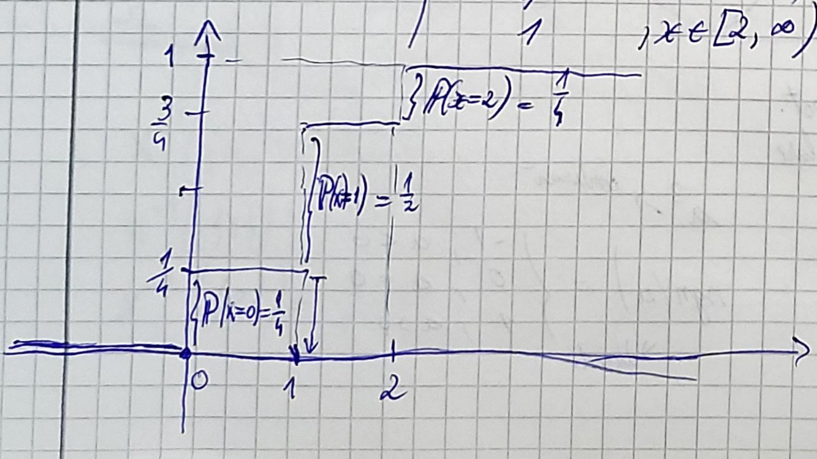
__Def__: (Funcția de repartiție) Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p, $X:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a.
Definim fct. de rep. a lui X

$$F:\mathbb{R}\to[0,1] \text{ prin}$$
$$F(x) = \mathbb{P}(X\le x), \ \forall x\in\mathbb{R}$$

__Obs__: $A = (-\infty, x]$
$$\mathbb{P}_X(A) = F(x)$$

__Exp__: Aruncăm de 2 ori cu ~~zarul~~ banul și $X = \#$ de H în cele 2 aruncări

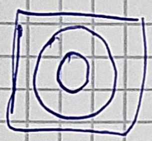
$$F(x) = P(X\le x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{1}{4} & , x\in[0,1) \\ \frac{3}{4} & , x\in[1,2) \\ 1 & , x\in[2,\infty) \end{cases}$$

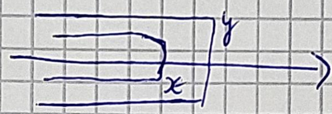


Prop. Funcţiei de rep.

a) F este crescătoare

$$x<y \Rightarrow F(x)\le F(y)$$





b) F este continuă la dreapta

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} F(x)=F(x_0)$$

c) $$\lim_{x\to -\infty} F(x)=0$$

$$\lim_{x\to +\infty} F(x)=1$$

$$P(X=x_0)=P(X\le x_0)-P(X<x_0)=F(x_0)-F(x_0-)$$

$$\hookrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} F(x)$$

In

Curs 6

Variabile aleatoare. Repartiția unei v.a. și fct. de rep.

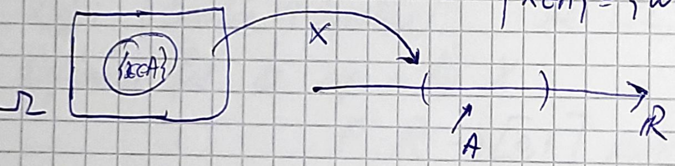
$X: \Omega \to \mathbb{R}$

$\{X \le x\} \in \mathcal{F}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X v.a. și

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, $\forall A \subset \mathbb{R}$ interval

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$



$\boxed{\mathbb{P}_X(\cdot) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(\cdot)}$ ← repartiția v.a. X

Funcția de repartiție (fct. cumulativă - CDF)

$F: \mathbb{R} \to [0,1)$

$F(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$

$= \mathbb{P}(X \le x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Ex: Aruncăm de 3 ori cu banul

$X = \#$ capete în cele 3 aruncări

Care este funcția de rep. a lui X?

$\Omega = \{H, T\}^3 \to 2^3$ el.

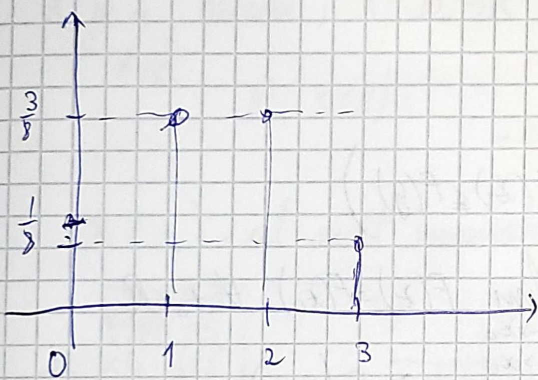
$X \in \{\underset{\uparrow TTT}{0}, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \cancel{\tfrac{1}{8}}\ P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$

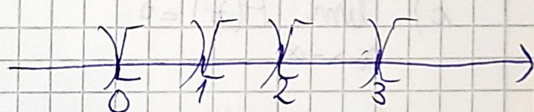
$P(X=1) = P(\{HTT\} \cup \{THT\} \cup \{TTH\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = P(\{THH\} \cup \{HTH\} \cup \{HHT\}) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = \frac{1}{8}$



$F(x) = ?$



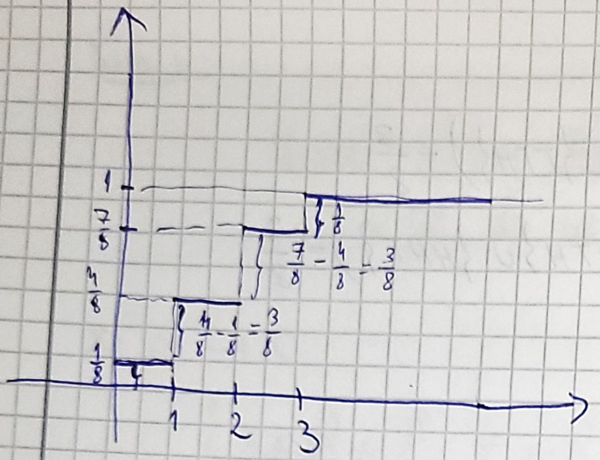
$$F(x) = \begin{cases} 0 = P(\emptyset) & , x < 0 \\ \frac{1}{8} & , 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} & , 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} & , 2 \le x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}$$

Dacă $0 \le x < 1 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X = 0\}$.

$1 \le x < 2 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X=0\} \cup \{X=1\}$

$2 \le x < 3 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\}$

$x \ge 3 \Rightarrow \{X \le x\} = \Omega$



Prop. funcției de rep

a) F crescătoare ($\forall x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$)

b) F este cont. la dreapta $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0)$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\to F(x+)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

În plus:

d) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x)$

e) $\mathbb{P}(X < x_0) = \mathbb{P}(X \leq x_0) - \mathbb{P}(X = x_0)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x) = F(x_0 -)$

f) $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-)$

Variabile aleatoare discrete

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. $\quad X(\Omega)$ = mulțimea val. lui X

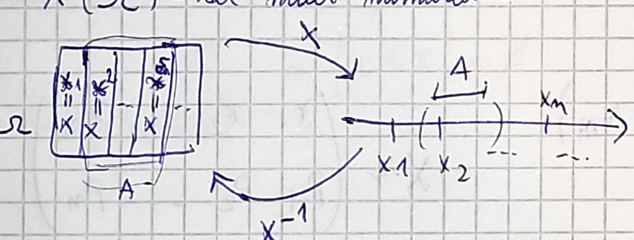
$X(\Omega)$ → cel mult numărabilă $\Rightarrow$ X este v.a. discretă
= finit sau numărabilă
→ infinită nenumărabilă $\Rightarrow$ X este cont

X v.a. discretă, $X: \Omega \to \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in A) =$$

$X(\Omega)$ - cel mult numărabilă

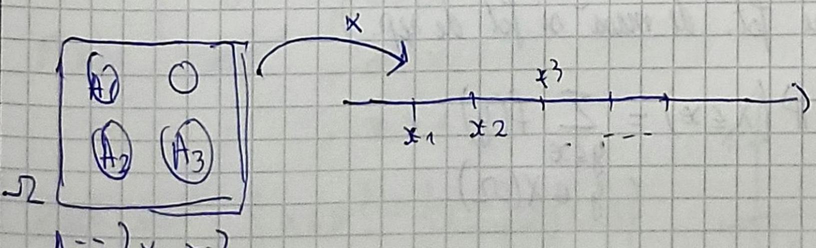


$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} \{X = x_n\}$$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\Big(X \in \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} \{x\}\Big) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)$$

Def. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. discretă. Se numește funcția de masă asociată (PMF)

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x), \ \forall x \in X(\Omega), \quad f: X(\Omega) \to [0,1]$$



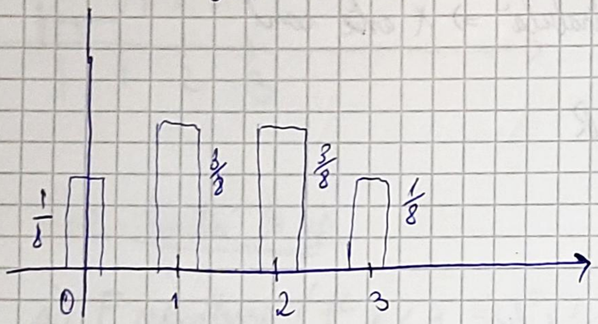
$A_i = \{X = x_i\}$

Obs: Se mai folosește și notația $p(x)$ sau $p_X(x)$

Ex: Aruncăm de 3 ori cu banul, $X = \#H$ în cele 3 aruncări!
Det. fct. de masă a lui X

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad \forall x \in \{0, 1, 2, 3\} = X(\Omega)$$

$$f(0) = \frac{1}{8}, \; f(1) = \frac{3}{8}, \; f(2) = \frac{3}{8}, \; f(3) = \frac{1}{8}$$



Obs: $X \in \{x_1, x_2 \dots x_n\}$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$$

Prop. funcției de masă

a) $f(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0$ (pozitivă)

b) $\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(\Omega) = 1 \\ \Omega = \bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{\sum\limits_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1}$ masa totală $= 1$

Obs. (Legătura dintre fct. de masă și fct. de rep.)

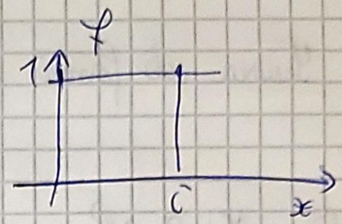
$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in X(\Omega)}} f(y)$$

$$f(x) = F(x) - F(x-)$$

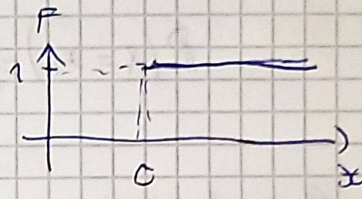
Exemple de v.a. discrete

① v.a $X = c$ (constantă)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1, & x = c \\ 0, & x \neq c \end{cases}$$



$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$



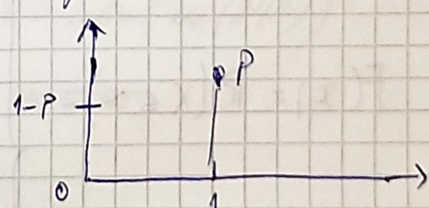
Dacă $x < c \Rightarrow \{X \leq x\} = \{c \leq x\} = \emptyset$

$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$

② Variabile aleatoare de tip Bernoulli

Avem un experiment și un eveniment A de interes. Pp. $P(A) = p \in [0,1]$

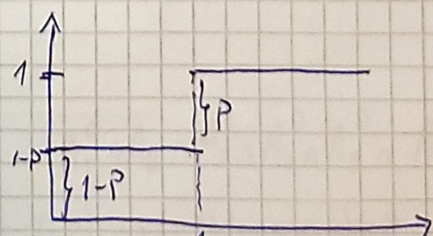
$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



$f(1) = P(X = 1) = P(A) = p$

$f(0) = P(X = 0) = P(A^c) = 1 - p$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Dacă $x \geq 1$, $\{X \leq x\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\}$

Not: $X \sim Ber(p)$ (sau $B(p)$)

este repartizată ca ...

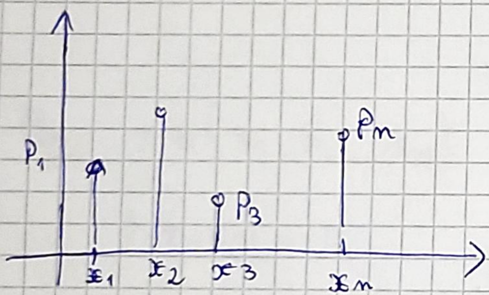
V. a. indicator: $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

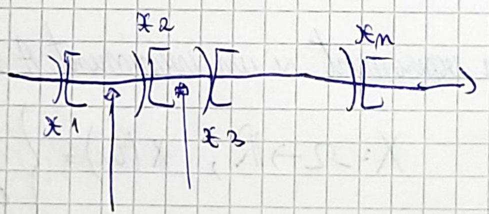
Scrierea sub formă compactă a funcției de masă: $\boxed{f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \ x \in \{0,1\}}$

③ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și să pp. $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

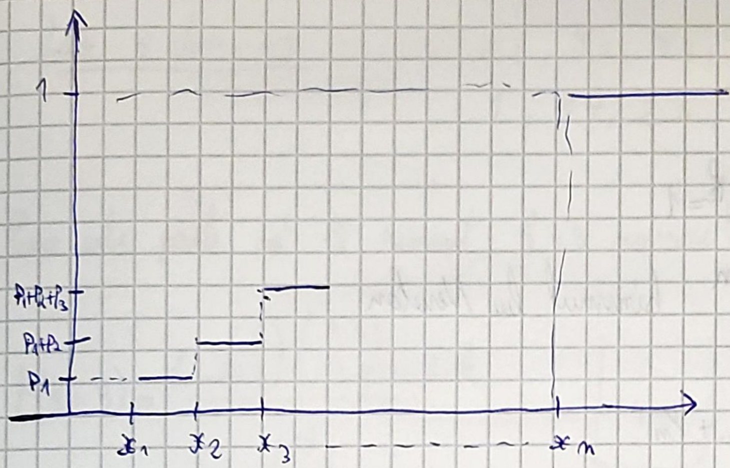
$$P(X = x_i) = p_i \in (0,1) \text{ cu } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

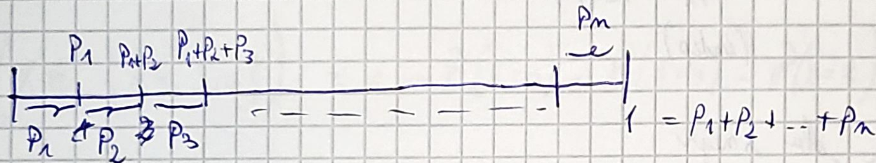
Graficul fct. de masă





$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3 \\ \dots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k, & x_k \le x < x_{k+1} \\ \dots & \\ 1, & x \ge x_n \end{cases}$$





(4) Variabile aleatoare de tip binomial

Presupunem că avem un exp. aleator și A un ev. de interes. Repetăm experimentul de n ori și ne interesăm la nr. de realizări ale exp. A.

$X = \#$ realizări ale ev. A în n repetări de exp.

$X \sim B(n, p)$ – v.a. repartizată binomial de parametrii n și p.

n → nr. de repetiții ale exp.

p → prob. de realizare a ev. A în cadrul exp. ($\mathbb{P}(A)$)

~~n=6, k=2~~

$X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Funcția de masă: $f(k) = \mathbb{P}(X=k) = ?$ $\quad k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k}$$

$n=6$, $k=2$

$C_6^2 (1-p)^4 p^2$

T	H	T	T	T	H

$A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c \cap A_6$

$(1-p) \times p \times (1-p) \times (1-p) \times (1-p) \times p$

$\to (1-p)^4 p^2$

$$\sum_{k=0} P(X=k) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k = 1$$

$$= (1-p+p)^n$$ binomul lui Newton

Obs: $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

$Y_i \sim B(p)$

(indep)

Exp: Urnă $\overset{albe}{a}$ și $\overset{negre}{n}$

N bile, M negre

Extragem n bile cu întoarcere

X = nr. de bile negre din cele n bile extrase: $X \sim B(n, \frac{M}{N})$

5. V.a. repartizată hipergeometric

Avem o urnă cu N bile albe și negre și M de culoare neagră. Extragem n bile fără întoarcere și ne interesăm la nr. de bile negre din cele n extrase.

X = # de bile negre din cele n extrase este rep. hipergeometric $HG(n, N, M)$

nr. extr. fără întoarcere; nr. bile urnă; nr. bile negre

$X \sim HG(n, N, M)$

$X = \{0, 1, \dots, \min(M, n)\}$

~~$P(X=k) =$~~

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Loto 6 din 49

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$1, 17, 23, 41, 39, 5$

Care este prob să fi nimerit $k=3$ numere?

$$P(X=3)=\frac{\overset{k}{\binom{6}{3}}\overset{6-k}{\binom{43}{3}}}{\binom{49}{6}}$$

$\boxed{49}$

$N=49$

$M=6$ bile negre

$n=6$

$$\mathbb{P}(X\in\{3,4,5,6\})=1-\mathbb{P}(X=0)-\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(X=2)\simeq 0.18$$

$$\sum_{k=0}^{\min(n,M)}\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}=\binom{N}{n}$$

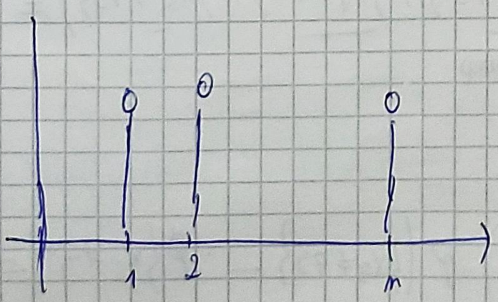
$$(1+x)^M(1+x)^{N-M}=(1+x)^N$$

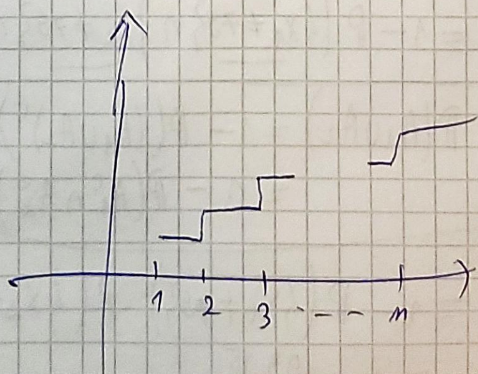
coef x^n

⑥ Uniforma pe $\{1,2,\dots,n\}$ (Echirepartiția)

$X:\Omega\to\mathbb{R}$, $X(\Omega)=\{1,2,\dots,n\}$

$$f(k)=P(X=k)=\frac{1}{n}\quad\left(\frac{1}{|\Omega|}\right),\ \forall k\in\{1,2,\dots,n\}$$





$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{|A \cap D|}{|D|}, \quad \forall A \in \mathbb{R}$$

Curs 7

Examen !!

Ex: O urnă cu bile numerotate de la 1 - 100

~~Efectuăm~~ Extragem 5 bile din urnă (succesiv)

a) Care este rep. v.a. care ne dă nr. bilelor ≥ 70?

b) Cum este rep. v.a. care ne dă a ~~3~~ 3-a extragere?

c) Care este probabilitatea ca nr. 79 să fie extras cel puțin odată?

Sol:

I. Extragerea cu revenire

a) $\underbrace{X \sim B(5, \frac{31}{100})}$

nr. extrageri

prob să avem succes (am extras o bilă ≥ 70)

b) $X_1, X_2, \dots, X_5 \in \{1, \dots, 100\}$

~~$X_1 \sim \mathcal{U}$~~

$X_1 \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots 100\})$

$X_3 \sim$

nu sunt indep.

c) $\mathbb{P}(\{79 \text{ să fie extras cel puțin odată}\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = 79\} \cup \{X_2 = 79\} \cup \{X_3 = 79\} \cup \{X_4 = 79\} \cup \{X_5 = 79\})$

$= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \neq 79\} \cap \{X_2 \neq 79\} \cap \{X_3 \neq 79\} \cap \{X_4 \neq 79\} \cap \{X_5 \neq 79\}) =$

Indep.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= 1 - \mathbb{P}((A_1 \cup A_2)^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c)\end{aligned}}$$

$= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 \neq 79\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_2 \neq 79\}) \cdot \mathbb{P}(\{X_3 \neq 79\}) \dots \cdot \mathbb{P}\{X_5 \neq 79\} =$

$= 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^5$

II. Extragere fără întoarcere $\qquad HG \to (n, N, M)$

a) $Y \sim HG(5, 100, 31)$

b) $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$ $\qquad \Omega = \bigcup_{i=1}^{100} \{Y_1 = i\}$

$Y_1 \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots, 100\})$

$Y_2 \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots, 100\})$

$$\mathbb{P}(Y_2 = j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i)}_{\text{f. prob. totale}} \underbrace{\mathbb{P}(Y_2 = i)}_{\frac{1}{100}}$$

O partiție a lui $\Omega = \underbrace{B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n}_{\text{disj. 2 câte 2}}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i) \mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i) = \begin{cases} 0, & j = i \\ \frac{1}{99}, & j \neq i \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(Y_2 = j \mid Y_1 = i) \mathbb{P}(Y_1 = i) = 99 \cdot \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{100}.$$

c) $\mathbb{P}(\dots) = \mathbb{P}(\{Y_1 = 79\} \cup \dots \cup \{Y_5 = 79\}) =$

$$= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(Y_1 = 79) = \frac{5}{100}$$

6) Rep. geometrică și negativ binomială

Aruncăm cu o monedă în mod repetat, iar șansa de succes $= p$ $(\mathbb{P}(\{H\}) = p)$

$X =$ v. a care ne dă nr. de aruncări până obținem pt. prima oară succes (H) incluzând succesul (primul succes)

$X \in \{1, 2, 3, \dots\} \in \mathbb{N}^*$

$TTH \Rightarrow X = 3$

$H \Rightarrow X = 1$

$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \ k \geq 1$

$\underbrace{TT\dots T}_{k-1}H$

$X \sim G(p)$

$(\text{Geom}(p))$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p}$$

$(1 + q + q^2 + \dots)$

1

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Dacă $x \in (0,1)$, $n \to \infty$

$$\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$Y =$ nr. de eșecuri până la primul succes

$Y \in \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}$

$Y = X - 1$

$\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^k p$

Def V. a. Z care ne dă nr. de aruncări succesive până obținem pt. a r-a oară succes s.n. negativ binomială.

$$Z \sim NB(r, p)$$

$Z \in \{r, r+1, \dots\}$

$\mathbb{P}(Z = k)$

$r = 3$

HTT THH

TTH TTTHTTTH

$\{Z = k\}$ $\qquad$ $k = 7,\ r = 3$

H → întotdeauna

T H H T T T H

(H T)(T)(H) T T H

$1-p \cdot p \cdot p \cdot 1-p \ldots$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r} p^r$$

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$$

$$X_i \sim G(p)$$

7. V.a. de tip Poisson

Def: Spunem că o v.a. X este repartizată Poisson de parametru λ dacă $X \in \mathbb{N}$ și $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

Când se folosește?

$$\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1\ ? \qquad e^x = \sum_{k \geq 0}\frac{x^k}{k!}$$

Aproximarea Poisson a binomialei

$X \sim B(n, p)$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \simeq$$

Pp. n este mare și p este mic a.î. $np \to \lambda$

$$p \simeq \frac{\lambda}{n} \qquad \simeq \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!\, n^k}}_{\to 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\substack{1^\infty \\ \to e^{-1}}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} =$$

$\frac{\lambda}{n} \to 0$

$1-\frac{\lambda}{n} \to 1$

$$\frac{(n-k+1)\cdots(n-1)\,n}{n^k} = \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\to 1} \cdots \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}}_{\to e}\Big]^{-\frac{\lambda}{n}\cdot n} = e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Funcții de v.a.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ c.p , X v.a $\quad \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ at. $g\circ X$ este v.a.

g v.a. $\quad$ ($g \circ X$)

Obs: Dacă X este discretă $\Rightarrow g\circ X$ este ~~discretă~~ v.a. discretă

Exp:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1/2 & 1/2 & & \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

n pași

Fie Y v.a. care ne dă poziția după n pași. Vrem $P(Y=k)=?$

Considerăm X v.a. care ne dă nr. de pași spre dreapta, at. $X \sim B(n, \frac{1}{2})$

Dacă $X=i$, atunci a făcut $n-i$ pași spre stânga și poziția ei este $i-(n-i) = 2i-n$

$Y = 2X - n$

$Y = g(X)$

$$P(Y=k) = P(2X-n=k) = P\left(X=\frac{n+k}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

Distanța față de origine?

$Z = |Y|$

$Z = h(Y)$

$= h(g(X))$

$\mathbb{P}(Z = k)$

$k \neq 0$

$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Y=k \text{ sau } Y=-k) = \mathbb{P}(Y=k) + \mathbb{P}(Y=-k) = \cancel{2\binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}}$

$= 2 \cdot \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \to \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\cancel{C_n^k = C_n^{n-k}}$

$Y = g(X)$

$\boxed{\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(g(X) = y) = \sum_{\{x \mid g(x) = y\}} \mathbb{P}(X = x)}$

$\{g(X) = y\} = \{X \in g^{-1}(y)\}$

$X^{2022} \in \{0, 1\}$

Exp: $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$Y = X^2$ $\quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

X_1, X_2, X_3 $\quad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(X_1, X_2, X_3)$ v.a.

$X_1 + X_2 + X_3$

$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$

$\max(X_1, X_2, X_3)$

Independența v.a.

Intuiție: Două variabile aleatoare X și Y sunt independente dacă realizarea uneia nu influențează în niciun mod realizarea celeilalte.

Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și X și Y două v.a. Spunem că X și Y sunt indep, $X \perp\!\!\!\perp Y$, dacă ev. $\{X = x\}$ și $\{Y = y\}$ sunt indep $\forall x, y$.

(P) Fie X și Y două v.a. (discrete). Atunci $X \perp\!\!\!\perp Y$ dacă și numai dacă

$$\mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}(X \le x) \times \mathbb{P}(Y \le y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(P) $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B), \ \forall A, B \subseteq \mathbb{R}$ (intervale)

(P) Dacă X și Y v.a. a.î. $X \perp\!\!\!\perp Y$ și g și h două funcții atunci $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$

Obs: $X \perp\!\!\!\perp Y$ at. $3X + 7^X \cdot \sin(X) \perp\!\!\!\perp Y^9 \cos(Y^7)$

Def: $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt indep. dacă

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots X_n \le x_n) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \le x_1) \times \mathbb{P}(X_2 \le x_2) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \le x_n), \ \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Ex: $X \sim B(n, p)$ și $Y \sim B(m, p)$ indep $\to X + Y \sim B(n+m, p)$

Ex: $X \sim Pois(\lambda_1)$ și $Y \sim Pois(\lambda_2)$ indep $\to X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X + Y = n \mid X = k)\, \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X + Y = n \mid X = k)\, \mathbb{P}(X = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(Y = n-k \mid X = k)}_{\mathbb{P}(Y = n-k)}\, \mathbb{P}(X = k) =$$

$$\overset{\text{indep}}{=} \sum_{k=0}^{n} P(Y=n-k)\, P(X=k)$$

Media unei v.a. discrete

Repetăm un exp. de N ori și ne interesăm la valorile unei v.a. X de interes.

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8$$

$$1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 8,\ 8$$

$$m_e = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \to \frac{1+1+1+3+3+5+8+8}{8} = \frac{30}{8}$$

$$\to \frac{3\times 1 + 2\times 3 + 1\times 5 + 2\times 8}{8} = \frac{30}{8}$$

$$\{X = x\}$$

$$P(X=x) = f(x) \simeq \frac{N(x)}{N}$$

$$N(x) \simeq f(x) \cdot N$$

$$\boxed{m = \frac{\sum x \cdot N(x)}{N} = \frac{\sum x \cdot f(x) \cdot N}{N} = \sum x \cdot f(x)}$$

Def: Fie X o v.a. discretă. Se numește media lui X, valoarea

$$E[X] = \sum_x x f(x) = \sum_x x P(X=x)$$

ori de câte ori $\sum_x |x|\, f(x) < \infty$. Dacă $\sum |x| f(x) = \infty$ atunci spunem că X nu are medie.

Curs 8

Media și momentele de ordin superior

Def. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discretă, definim media v.a X:

$$E[X] = \sum_{x} x \, \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x} x \, f(x)$$

ori de câte ori $\sum |x| f(x) < \infty$. În cazul în care seria este ∞ atunci spunem că v.a. X nu are medie.

Ex: Aruncăm cu 1 zar.

$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{6}$

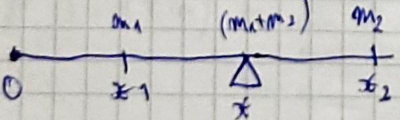
$E[X] = \sum x \, \mathbb{P}(X = x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

Ex:
$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$E[X] = x_1 p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow E[X] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Interpretare fizică:



$\bar{x} M = x_1 m_1 + x_2 m_2$

$\bar{x} = x_1 \frac{m_1}{M} + x_2 \frac{m_2}{M}$

Proprietăți: 1) Dacă X este constantă, i.e. $X = c$, atunci $E[X] = c$

2) Dacă $X \geq 0$ atunci $E[X] \geq 0$ (pozitivitate)

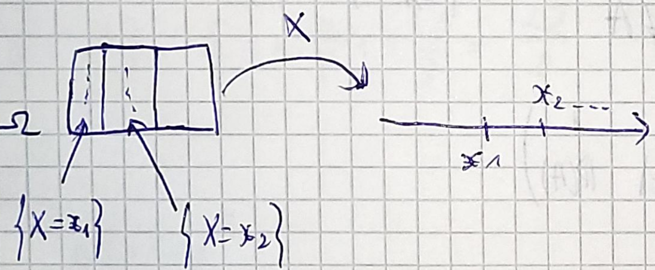
3) Dacă $X \geq Y$ atunci $E[X] \geq E[Y]$ (monotonie)

$(X(\omega) \geq Y(\omega),\ \forall \omega \in \Omega)$

4) (Liniaritate) Dacă X și Y două v.a. (discrete) și $a, b \in \mathbb{R}$ atunci

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

__Dem__: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$



$$E[X] = \sum_{x} x\, \mathbb{P}(X = x) \qquad \{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Ex: Aruncăm o monedă de 10 ori

X = nr. de H din cele 10 aruncări $\qquad \cancel{\{X = k\}}$

$\Omega = \{H, T\}^{10}$ $\qquad X \sim B(10, p)$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$$

$\{X = k\} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{10}) \mid \omega_i \in \{H, T\}$ și exact k sunt $H\}$

$$(\underbrace{H, H, \dots H}_{k}, \underbrace{T, \dots T}_{10-k})$$

$$E[X] = \sum_{x} x\, P(X=x) = \sum_{\omega}^{x} X(\omega) \sum P(\{\omega\})$$

$$E[X+Y] = \sum_{\omega} (X+Y)(\omega)\, P(\{\omega\}) = \sum_{\omega} \left(X(\omega)+Y(\omega)\right) P(\{\omega\}) =$$

$$= \sum_{\omega} X(\omega)\, P(\{\omega\}) + \sum_{\omega} Y(\omega)\, P(\{\omega\})$$

5) (Legătura dintre medie și prob.)

Fie $A \in \mathcal{F}$ eveniment

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \qquad P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$$

$$\mathbb{1}_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

$$E[\mathbb{1}_A] = P(A)$$

6) Fie X o v.a. (discretă) și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$Y = g(X)$. Atunci:

$$\boxed{E[g(X)] = \sum_{x} g(x)\, P(X=x)}$$

$$E[Y] = \sum_{y} y\, P(Y=y)$$

$$P(Y=y) = P(g(X)=y) =$$

$$= P(X \in g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X=x)$$

$$g^{-1}(y) = \{x \mid g(x) = y\}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "g \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$E[g(X)] = E[Y] = \sum_y y \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X=x) = \sum_x g(x) P(X=x)$$

! Exam

EXP: $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ $\qquad Y = X^2$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{5}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Met 1: $Y \in \{1, 4, 9\}$

$$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{5}{8}$$

~~$P(Y=4)$~~

$$E[X^2] = \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{2}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{22}{8}$$

Met 2

$$g(x) = x^2$$

$$E[X^2] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{9}{8} = \frac{22}{8}$$

7) Fie X și Y două v.a. independente

$$\boxed{E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]}$$

Dacă g și h sunt două funcții ($: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) atunci $g(X)$ și $h(Y)$ sunt indep.

$$\boxed{E[g(X) \cdot h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]}$$

$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad X \perp\!\!\!\perp Y$

$$E[X^7 Y^9] = E[X^7] \cdot E[Y^9]$$

Obs: În general, $E[XY] \neq E[X] \cdot E[Y]$

Def: Fie X o v.a (discretă). Numim moment de ordin k $(k \geq 1)$
$E[X^k]$.

Se numește moment de ordin k centrat în $a \in \mathbb{R}$, $E[(X-a)^k]$ și moment centrat de ordin k, $E[(X-E[X])^k]$.

Def: Varianța sau dispersia v.a X este momentul centrat de ordin 2 și se notează cu

$$Var(X) = E[(X-E[X])^2]$$

Obs: Arată gradul de împrăștiere a obs. (valorilor) față de medie.

Exp:

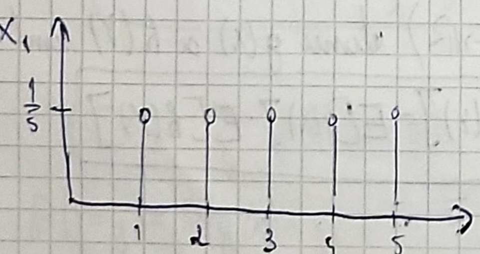
$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$X_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

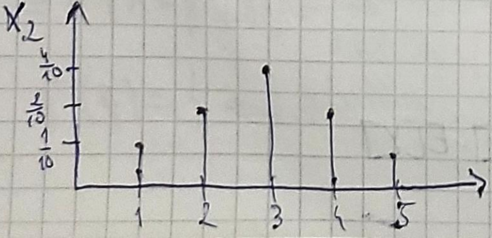
$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = E[X_4] = 3$$



$$Var(X_1) = E[(X_1-3)^2] =$$

$$= \frac{(1-3)^2}{5} + \frac{(2-3)^2}{5} + \frac{(3-3)^2}{5} + \frac{(4-3)^2}{5} + \frac{(5-3)^2}{5} = \frac{10}{5}$$

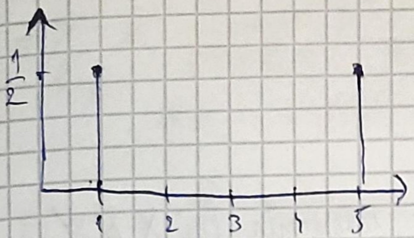
$4+2+2+4$

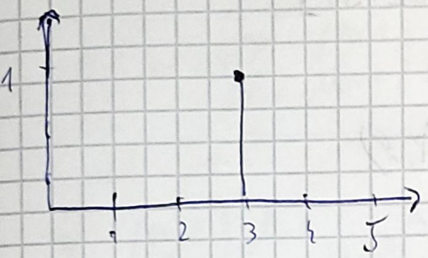


$$Var(X_2) = E[(X_2-3)^2] =$$

$$= \frac{(1-3)^2}{10} + \frac{(2-3)^2 \cdot 2}{10} + \frac{(3-3)^2 \cdot 4}{10} + \frac{(4-3)^2 \cdot 2}{10} + \frac{(5-3)^2 \cdot 1}{10} = \frac{12}{10}$$

$$Var(X_3) = \frac{(1-3)^2}{2} + \frac{(5-3)^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$





$Var(X_4) = 0$

Prop: 1) Dacă X este constantă $\Rightarrow Var(X) = 0$

$X - E[X]$

$a + X - E[a+X]$

2) $Var(X) \geq 0$

3) Dacă X v.a. și $a \in \mathbb{R}$ atunci $\boxed{Var(a+X) = Var(X)}$

4) Dacă X v.a și $b \in \mathbb{R}^*$ atunci $\boxed{Var(bX) = b^2 Var(X)}$

$$Var(bX) = E[(bX - E[bX])^2]$$
$$E[b^2 (X - E(X))^2]$$

$$Var(a + bX) = b^2 Var(X)$$

5) $\boxed{Var(X) = E[X^2] - E[X]^2}$

$$E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2X E(X) + E[X]^2]$$
$$= E[X^2] - 2E[X E[X]] + E[X]^2$$
$$= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2$$

6) X și Y indep.

$$\boxed{Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)}$$

Def: Fie X și Y două v.a. Se numește covarianța lui X și Y

$$Cov(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

În general:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

Def: Se numește abatere standard

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

X este măsurat într-o u.m.

$\sigma^2 \to$ varianță

$\sigma \to$ abatere standard

Exemple de calcul al mediei și varianței

① $X \sim B(p)$ $\qquad X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

$E[X] = p \qquad Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 =$

$$= p - p^2 = p(1-p)$$

② $X \sim B(n,p) \qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} \cdot \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} p^{k}(1-p)^{n-k} =$$

$(k-1)!$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k}(1-p)^{n-k} =$$

$$= np \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}}}_{=1} = np$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l}(1-p)^{n-1-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} p^{l}(1-p)^{m-l} = (p+1-p)^{m} = 1$$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ indep.

$$E[X] = E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n] = np$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$$

3) Hipergeometrica $HG(n, N, M)$

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

X_j la extragerea j avem bilă neagră $X_j = 1$ $\quad X_j \in \{0, 1\}$

albă $X_j = 0$ $\quad P(X_j = 1) = \frac{M}{N}$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

extragere fără întoarcere

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] = n \cdot \frac{M}{N}$$

4) $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\cancel{2}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{\cancel{k!}} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}}_{\lambda e^{\lambda}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} \right] = \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

5) $X \sim \text{Geom}(p)$

$X \in \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}}$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \cdot p = \sum_{k=1}^{1} k\, q^{k-1} \cdot p = p \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} =$$

$q = 1-p$

$1-q = p$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k - 1\right)' =$$

$$= p \left(\frac{1}{1-q} - 1\right)' = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$ (derivăm de două ori)

$E[X(X-1)] = ?$

Variabile aleatoare continue

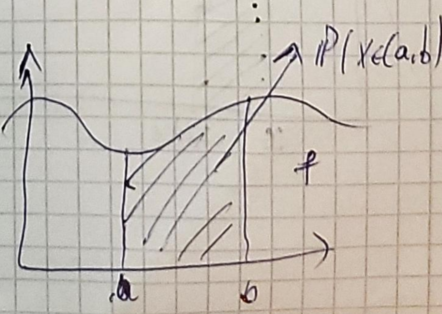
Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. V.a X este continuă (absolut cont) dacă există o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu prop.:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^1$$

un interval

Obs: Dacă $A = (a, b)$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Obs: În def. de mai sus f s.n. densitate de repartiție.

Ⓞ Dacă f este densitate de rep. atunci:

1) $f \geq 0$

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$\mathbb{P}(X = \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

Obs:

$\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

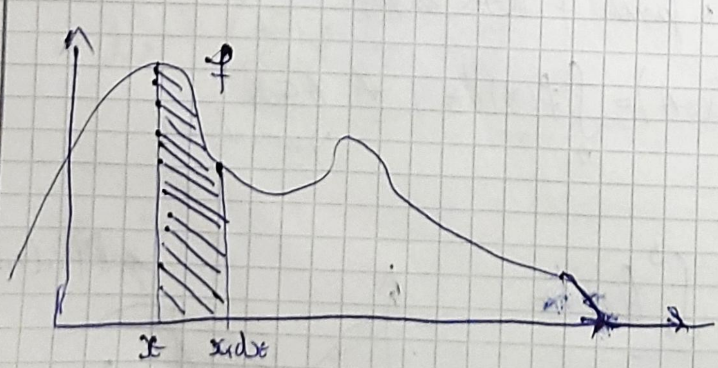
$A = \{a\}$

$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b)$
$= \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$
$= \mathbb{P}(a < X \leq b)$

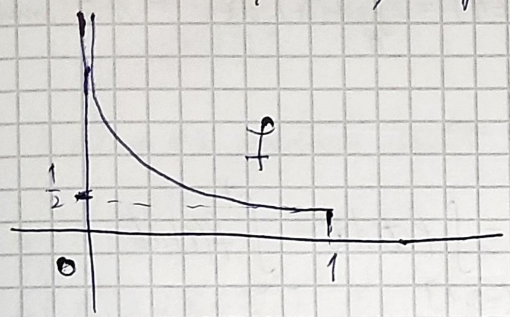
$\mathbb{P}(X \in (x, x+dx)) = \int_x^{x+dx} f(t)\,dt \simeq f(x)(x+dx-x) = f(x)dx$

dacă dx mic

$f(x) \simeq \dfrac{\mathbb{P}(X \in (x, x+dx))}{dx}$ $\quad \dfrac{\text{prob}}{\text{unitatea de lungime}}$



Exp: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$



$f(x) \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 1$$

$\Sigma \to \int$

$f(x) = \mathbb{P}(X = x) \to 0$

$$\frac{\mathbb{P}(X \in (x, x+dx))}{dx} \to f(x)$$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \to \int_A f(x)\,dx$$

Curs 9

X cont dacă $\exists f \geq 0$ a.î. $P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$, $\forall A \subseteq$ interval

Funcția de repartiție $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F(x) = P(X \leq x)$$
$$= P(X \in \underbrace{(-\infty, x]}_{A}) = \int_{(-\infty,x]} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt}$$

Cazul discret

$$F(x) = \sum_{y \leq x} P(X = y) = \sum_{y \leq x} f(y)$$

1) F cresc $\nearrow$

2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

3) F este continuă la dreapta

Obs: Din Th fundamentală a analizei.

Dacă f este cont în x_0 atunci $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$

Dacă f densitatea de rep. este continuă atunci F este derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x$

Obs: Dacă știm pe F atunci $f(x) = F'(x)$

Dacă știm pe f atunci $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Exp: Fie X o v.a cu densitatea

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \ x \in \mathbb{R}$$

X este o v.a repartizată logistic

a) $F(x) = ?$

b) $P(a < X < b) = ?$ $\quad (a = -3, \ b = 2)$

a) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = \int_0^{e^x} \frac{1}{(1+u)^2}\,du = -\frac{1}{1+u}\Big|_0^{e^x} =$

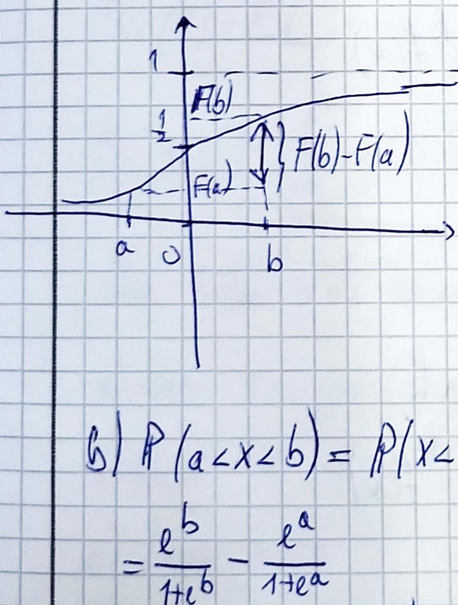
$u = e^t$
$du = e^t\,dt$

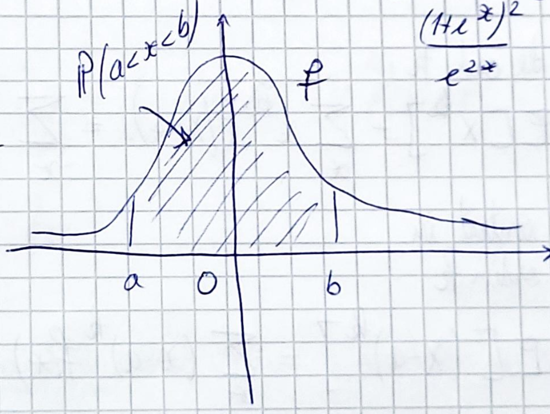
$= -\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+0} = \frac{e^x}{1+e^x}$

$f(x) = f(-x) \quad f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} =$

$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \ x \in \mathbb{R}$

$= \frac{e^{-x}}{\frac{(1+e^x)^2}{e^{2x}}} = f(x)$





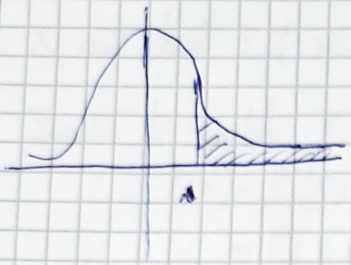
b) $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) =$

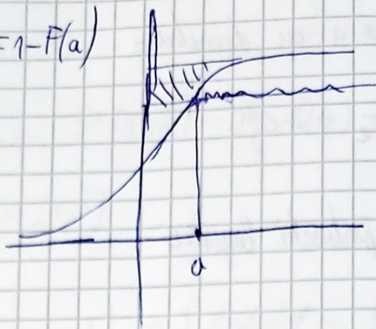
$= \frac{e^b}{1+e^b} - \frac{e^a}{1+e^a}$

$u = e^x$

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

$\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F(a)$





Media și momentele v.a. cont.

Cazul discret

X v.a.

media $E[X] = \sum_{x} x \, \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x} x f(x)$

$$\left(\sum |x| f(x) < \infty \right)$$

momentul de ord. k

$$E[X^k] = \sum_{x} x^k \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x} x^k f(x)$$

momentul centrat în
a de ordin k

$$E[(X-a)^k] = \sum_{x} (x-a)^k f(x)$$

Dacă $a = E[X]$ at. momentul centrat de ordin k

$$E[(X - E[X])^k] = \sum_{x} (x - E[X])^k f(x)$$

Pt. $k = 2$ Varianța

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Def: Fie X o v.a cont. cu densitatea de rep. f. Atunci definim:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

dacă $E[|X|] < \infty$ ($\nearrow$)

$\left(\int_{\infty}^{-\infty} |x| f(x) dx < \infty\right)$. În caz contrar media nu există.

Momentul de ord. k. $E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$

Momentul centrat în a de ord k. $E[(X-a)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k f(x) dx$

Momentul centrat de ord k $E[(X-E[X])^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-E[X])^k f(x) dx$

$$Var(X) = E[(X-E[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-E[X])^2 f(x) dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Prop. mediei și ale varianței din cazul discret se păstrează și în cazul cont.

a) Dacă $X = c$ (cont) at. $E[X] = c$ și $Var(X) = 0$

b) Dacă $X \geq 0$ atunci $E[X] \geq 0$

c) Dacă $X \geq Y$ at. $E[X] \geq E[Y]$

d) $E[aX+bY] = aE[X] + bE[Y]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

e) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

f) $Var(X) \geq 0$

g) Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$ at. $E[XY] = E[X]E[Y]$ și $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

① V.a. rep. uniform pe [a,b]

Def: Spunem că X este o v.a. rep. uniform pe [a,b], notăm $X \overset{\text{este rep.}}{\sim} U([a,b])$, dacă densitatea de rep. f este constantă pe [a,b]

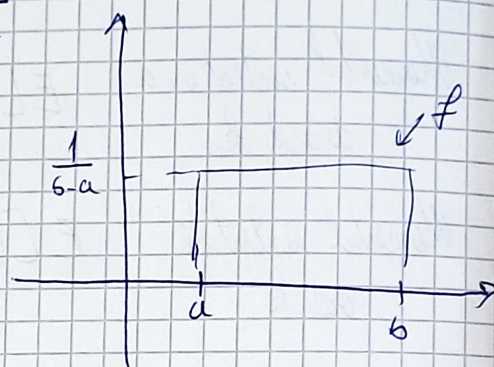
Obs: Dacă f este densitate $\Rightarrow f \geq 0$

$$\int f(x)\,dx = 1$$

Cum $f = c \Rightarrow c \geq 0$

$$\int_a^b c\,dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$



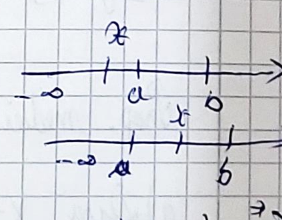
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$\boxed{\int_A f(x)\,dx = \int f(x)\,\mathbb{1}_A(x)\,dx}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}}$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

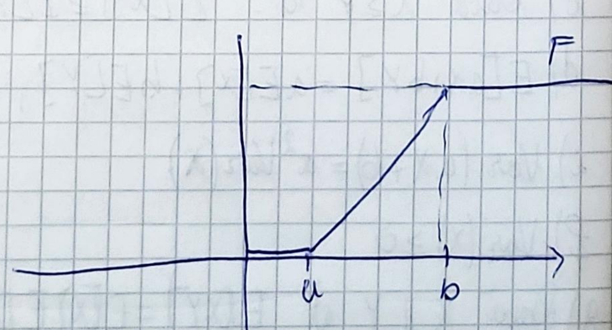
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = 1, & x > b \end{cases}$$



$$= \int \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\, \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(t)\,dt$$

$$= \int \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b] \cap (-\infty,x)}(t)\,dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



$U \sim \mathcal{U}([a,b])$, $[c,d] \subseteq [a,b]$

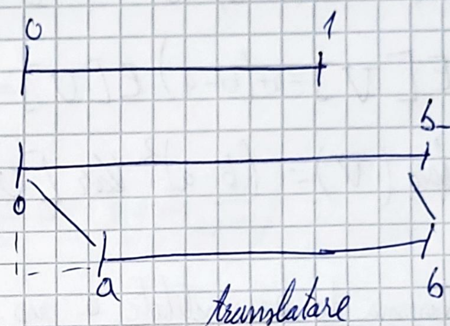
$$P(U \in [c,d]) = P(U \le d) - P(U \le c) =$$

$$= \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

$U \sim \mathcal{U}[0,1]$ unif. standard

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

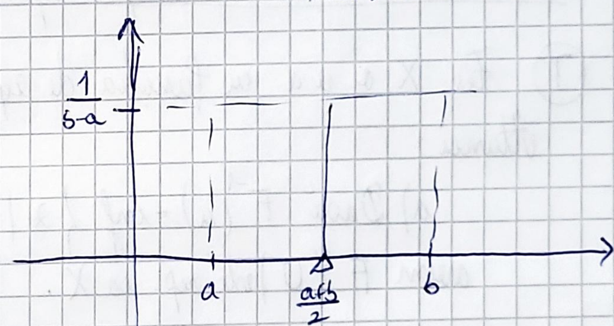
Fie $V = \underbrace{a}_{\text{translatare}} + \underbrace{(b-a)}_{\text{scalare}} U \sim \mathcal{U}([a,b])$



$$P(V \le x) = P(a + (b-a)U \le x) =$$

$$= P\left(U \le \frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



Fie $U \sim \mathcal{U}([a,b])$

$$E[U] = \int x f(x)\,dx = \int x \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(U) = E[U^2] - E[U]^2$$

$$E[U^2] = \int x^2 f(x)\,dx = \int x^2 \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{3(b-a)}} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$Var(U) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Met 2: Fie $U \sim \mathcal{U}[0,1]$

$$E[U] = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$E[U^2] = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{Tema!}}$ (momentele de ordin superior)

$$Var(U) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$V = a + (b-a)\,U \sim \mathcal{U}[a,b]$$

$$E[V] = a + (b-a)\,E[U] = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(V) = (b-a)^2\,Var[U] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Teorema de universalitate a rep. uniforme

(T) Fie X o v.a. cu funcția de rep F. Fie $U \sim \mathcal{U}[0,1]$.
Atunci:

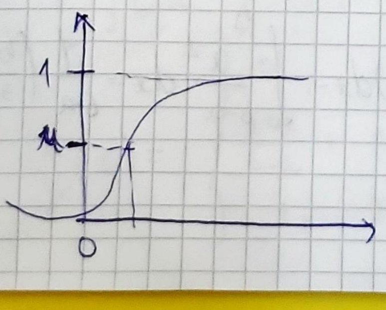
a) Dacă $F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \geq u\}$ funcție cuantilă avem $F^{-1}(U)$ este rep. ca X.

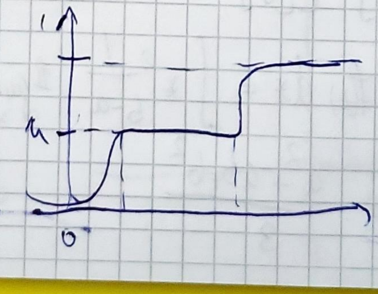
b) $F(X)$ este $\mathcal{U}([0,1])$

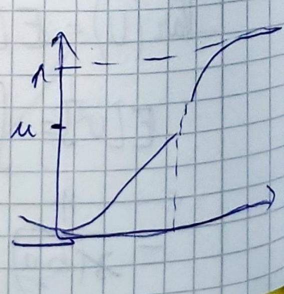
$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(X) = \frac{X-a}{b-a}$$

$F(x) = u$







a) F este cont. și str. cresc. (bij)

F^{-1} este inversa lui F

$$P(F^{-1}(U) \le x) = P(U \le F(x))$$

$$= F(x) = P(X \le x)$$

am aplicat $F(\nearrow)$

<u>Exp1</u>: X v.a. logistică

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

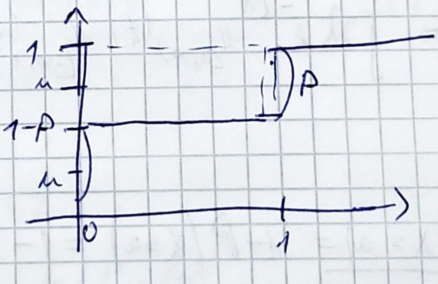
$$F(x) = u \iff \frac{e^x}{1+e^x} = u \iff e^x = \frac{u}{1-u} \iff x = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

$$F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

1) $U \sim \mathcal{U}[0,1)$

2) $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \sim$ logistica

<u>Exp2</u>: $X \sim B(p)$ $\quad P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & u \le 1-p \\ 1, & u > 1-p \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & p \le 1-u \\ 1, & p > 1-u \end{cases}$$

$F^{-1}(U) \sim B(p)$ $\qquad u \sim \mathcal{U}[0,1]$

$1-u \sim \mathcal{U}[0,1]$

Gen $U \sim \mathcal{U}[0,1]$

dacă $U \geq p \Rightarrow X = 0$

altfel $X = 1$

② V.a. repartizată exponențial.

Def: Fie X o v.a. Spunem că X este rep. exponențial de parametru λ, notăm $X \sim Exp(\lambda)$, dacă densitatea de rep. a lui X este

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \text{ și } \lambda > 0$$

Este f densitate?

$$f \geq 0, \quad \int f(x)dx = \int \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \cancel{\lambda}\left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty = 1$$

Cât este $F(x)$?

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)dt = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \int \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\, \mathbb{1}_{(-\infty, x)}(t)\, dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\underline{P(X > a)} = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$$

fct de supraviețuire

$$E[X] = \int x f(x)dx = \int x \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \int_0^\infty x(-e^{-\lambda x})' dx = \underbrace{-x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \int \left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)' dx =$$

$$\lim_{x\to\infty} x e^{-\lambda x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\lambda x}\cdot \lambda} = 0$$

$$= -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E[X^2] = \int x^2 f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty x^2 (-e^{-\lambda x})' dx =$$

$$= \underbrace{-x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} E[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

(P) (Prop. lipsei de memorie)

a) Dacă X este o v.a. rep $Exp(\lambda)$ atunci

$$P(X \geq s+t \mid X \geq s) = P(X \geq t), \quad \forall s,t > 0$$

b) Dacă X este o v.a. cont care verifică:

$$P(X \geq s+t \mid X \geq s) = P(X \geq t), \quad \forall s,t > 0$$

at. $X \sim Exp(\lambda)$

$$\frac{P(X \geq s+t,\ X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq s)} = \frac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda s})} = e^{-\lambda t} = P(X \geq t)$$

$$P(X \geq s+t) = P(X \geq s) P(X \geq t), \quad \forall s,t$$

$$h(s+t) = h(s)h(t) \Rightarrow h(\ ) = \ln(\ ) + \ln(\ )$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall (x,y)$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1), \quad f(r) = r f(1)$$

③. Rep. Normală

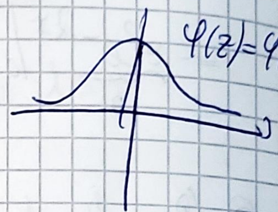
Def: Fie X o v.a. Spunem că X este rep. normal de parametrii μ și σ^2, notăm $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dacă admite ca densitate pe f:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Obs: repartiție Gaussiană

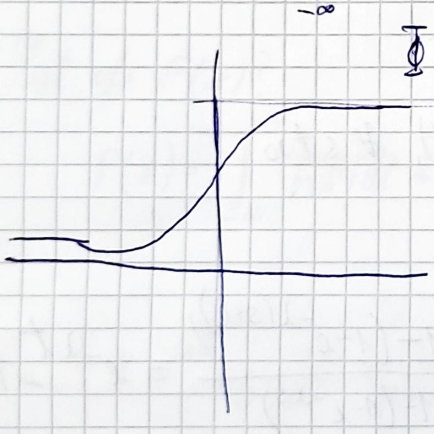
Obs: Dacă $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$, atunci $\mathcal{N}(0,1)$ s.n. normală standard și în acest caz densitatea se notează φ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Pt. normala standard, fct. de rep s.n. Φ

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$



Verificăm că φ este densitatea?

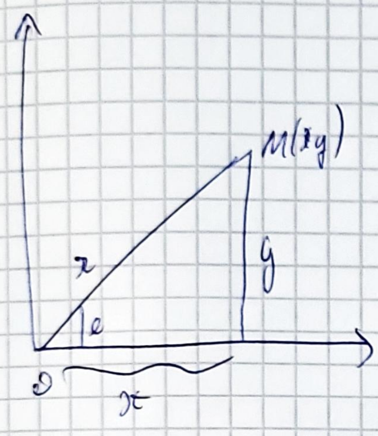
$\varphi(x) \geq 0$ ✓ (exponențială)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1 \quad \text{sau} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

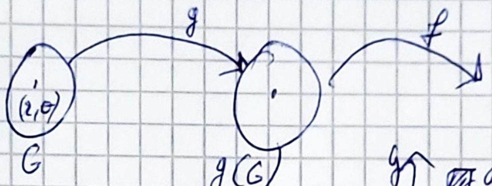
Calculăm $I^2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \overset{\text{Fubini}}{=}$

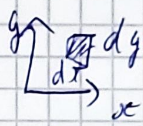
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$



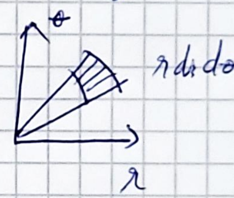
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad r\in[0,\infty) \quad \theta\in[0,2\pi) \quad [0,\infty)\times[0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

$$(r,\theta)\longrightarrow(\underbrace{r\cos\theta}_{x},\underbrace{r\sin\theta}_{y})$$





$$\cancel{\int_{g(G)} f(x)\,dx=\int_G f(g(y))}$$



$$\int_{g(G)} f(x)\,dx=\int_G f(g(y))\,|\det J_g|\,dy$$

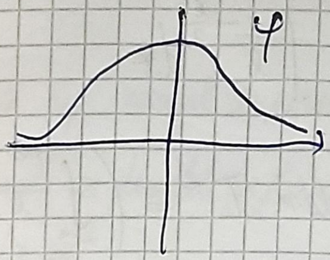
$$J_g=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$I^2=\iint e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}}\,d\theta\,dr=\int_0^{\infty}2\pi re^{-\frac{r^2}{2}}\,d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr=2\pi\int_0^{\infty}\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)'dr=2\pi\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\infty}\right)=2\pi\Rightarrow I=\sqrt{2\pi}$$

(medie/varianța) Temă!)

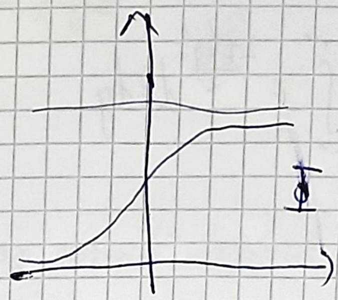
Curs 11 (10)



Repartiția normală

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$



$$\varphi(x) = \varphi(-x)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

$N(0,1)$ normala standard

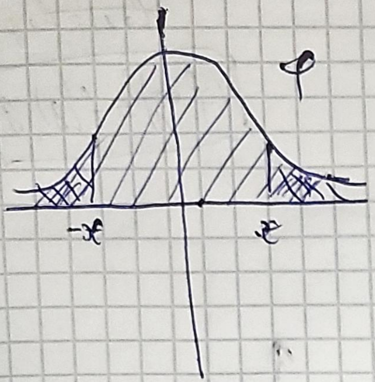
$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{fct. impară}} dx = 0$$

$$Var(X) = E[X^2] - \underbrace{E[X]^2}_{=0}$$

$$E[X^2] = \int x^2 \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' =$$

$$= \underbrace{\frac{-x\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \Rightarrow Var(X) = 1$$

Obs: Dacă $X \sim N(0,1)$ atunci $E[X] = 0$ și $Var(X) = 1$



$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt = \int_{+\infty}^{x} f(-u)(-du) =$$

s.v. $u = -t$

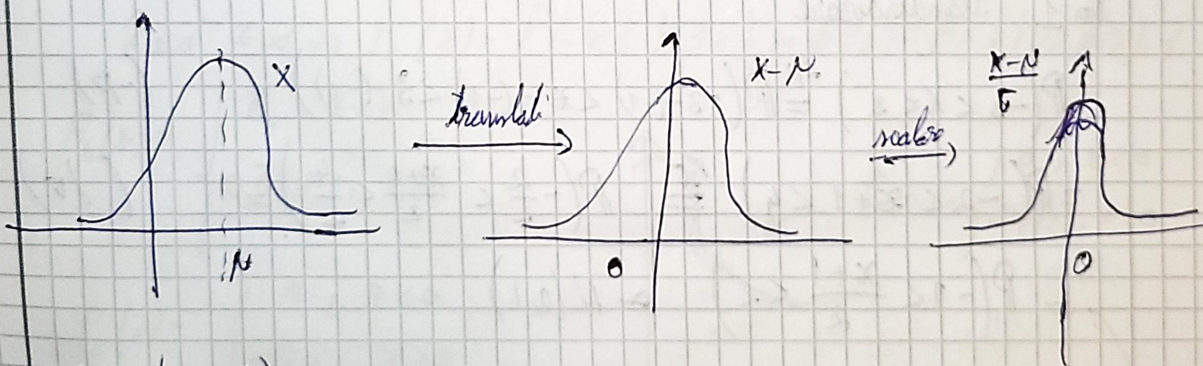
$$= \int_{x}^{+\infty} \underbrace{\varphi(-u)}_{= f(u)}\,du = \int_{x}^{+\infty} f(u)\,du = P(X > x)$$

$$= \S.\ 1 - \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

Def: Spunem că v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dacă admite densitatea de rep.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(P) Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ atunci $\exists\ Z \sim N(0,1)$ a.î. $X = \mu + \sigma Z$



$X \sim (\mu, \sigma^2)$

$$\rightarrow E[\mu + \sigma Z] = \mu + \sigma E[Z] = \mu$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$Var(X) = Var(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2$$

$$F(x) = P(X \le x) = P(\mu + \sigma Z \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$\cancel{(f \circ g)' = f' \circ g}$$

$$\boxed{(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'}$$

$$= \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}$$

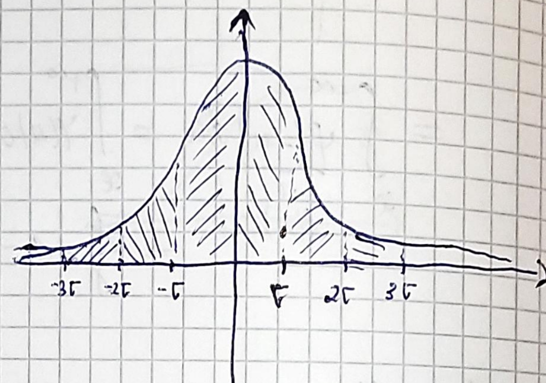
(P) (Prop 68 - 95 - 99.7 %)

Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ atunci

$$P(|X-\mu| \le \sigma) \simeq 68\%$$

$$P(|X-\mu| \le 2\sigma) \simeq 95\%$$

$$P(|X-\mu| \le 3\sigma) \simeq 99{,}7\%$$



$\boxed{\text{Ex}}$ $X \sim N(-1, 4)$

$P(|X| < 3)$

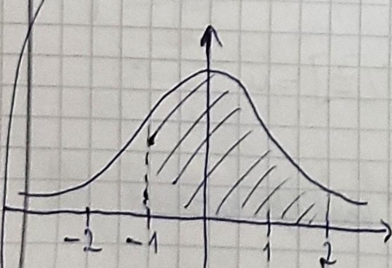
Sol:

Pas 1. Standardizare

$$P(-3 < X < 3) \overset{-\mu}{=} P(-3-(-1) < x - (-1) < 3 - (-1)) = \quad (-\mu)$$

$$= P(-2 < x+1 < 4) \overset{:\sigma}{=} P\left(-\frac{2}{2} < \frac{x+1}{2} < \frac{4}{2}\right) = \quad (/\sigma)$$

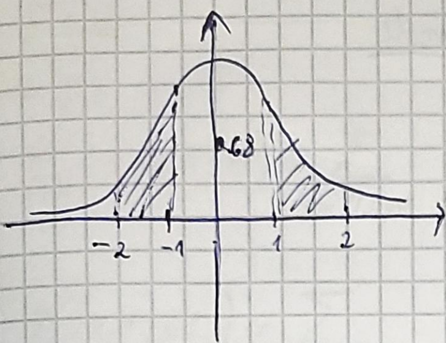
$$= P\left(-1 < \frac{x+1}{2} < 2\right) \quad \sim N(0,1)$$



$$P(-1 \le Z \le 1) \simeq 0.68$$

$$P(-2 \le Z \le 2) \simeq 0.95$$

$$\underbrace{P(-1 \le Z \le 1)}_{\simeq 0.68} + \underbrace{P(1 \le Z \le 2)}_{\simeq \frac{0.95 + 0.68}{2}} =$$



Ex2 $\quad Y \sim N(0,1) \quad , \quad X = |Y|$

$E[X]$, $Var(X)$, $\cancel{F(x)}$, $f(x)$

$$E[|Y|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$Var(|Y|) = E[|Y|^2] - E[|Y|]^2 = E[Y^2] - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

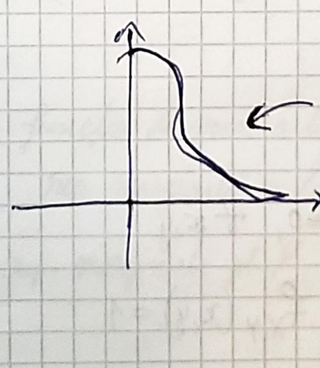
$$F_X(x) = P(X \le x) = P(|Y| \le x)$$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Dacă $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$

Dacă $x \geq 0 \Rightarrow F_X(x) = P(-x \le Y \le x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2\Phi(x) - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2\varphi(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2f(x), & x > 0 \end{cases}$$

Repartiții comune, marginale și condiționate

X, Y două v.a. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$P((X,Y) \in A \times B)$

$P(X \in A)$ sau $P(Y \in B)$

$P(X \in A \mid Y \in B)$

1) Cazul discret

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $Y: \Omega \to \mathbb{R}$

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

$Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Perechea $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$

$(X(\omega), Y(\omega))$

$(X,Y)(\Omega) = \{(x_i, y_j) \mid i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\} \to m \cdot n$ valori

Funcția de masă a (X,Y)

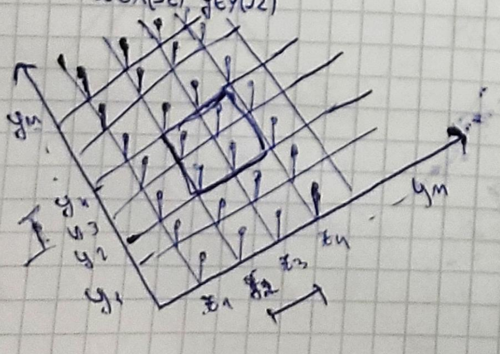
$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$, $\forall x \in \{x_1, \dots, x_m\}$, $y \in \{y_1, \dots, y_n\}$

$(P_{X,Y}(x,y))$

Prop:

a) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$, $\forall x, y$

b) $\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f_{X,Y}(x,y) = 1$



$A \subseteq \mathbb{R}$

$B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}((X,Y \in A \times B) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} \sum_{y \in Y(\Omega) \cap B} f_{X,Y}(x,y)$$

$$\mathbb{P}((X,Y) \in C) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ (x,y) \in C}} f_{X,Y}(x,y)$$

Reamintim

X discretă, $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} f_X(x)$$

$$\| $$

$$(P \circ X^{-1})(A)$$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \Omega) = \mathbb{P}(X \in A, Y \in \mathbb{R}) =$$

$$= \mathbb{P}(X \in A, \bigcup_y \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\bigcup_y \{X \in A, Y = y\}) = \sum_y \mathbb{P}(X \in A, Y = y)$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$\boxed{f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)}$$ → funcția de masă a lui X rep. marginală a lui X

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)}$$ → rep. marginală pt. Y

Fie X o v.a. discretă și $A \in \mathcal{F}$. $\mathbb{P}(A) > 0$

$$\mathbb{P}(X = x \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\| $$

$$f_{X|A}(x)$$

Dacă $A = \{Y = y\}$ atunci $\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}}$$ → fct. de masă condiționale a lui Y la X

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	Σ
x_1							
x_2							
$\vdots$							
x_i				$f_{X,Y}(x_i,y_j)$			
$\vdots$							
x_n							
Σ				$f_Y(y_j)$			

→ $f_X(x_i) = \sum_y f_{X,Y}(x_i, y)$

→ $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$

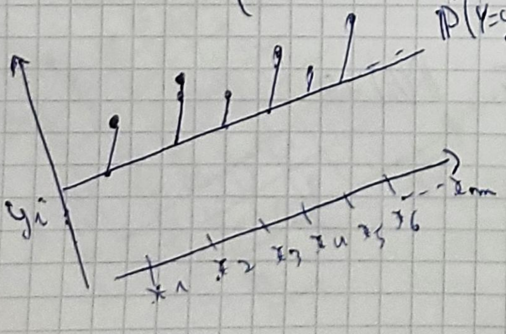
→ $\sum_x f_{X,Y}(y_i, x)$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots x_i \dots & x_n \\ & & f_X(x_i) & \end{pmatrix}$$

$$f_X(x_i) = \sum_{y=1}^{m} f_{X,Y}(x_i, y_i)$$

$$X \mid Y = y_j \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ & \frac{f_{X,Y}(x_i, y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} & & \end{pmatrix}$$

→ $\dfrac{f_{X,Y}(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}$



$$X|Y=y_j \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ & f_{X|Y}(x_i, y_j) & & \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \frac{f_{X,Y}(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}$$

Ex Prof. răspunde greșit $\frac{1}{4}$ din cazuri indep. de întrebări.

0, 1 sau 2 întreb. cu $\frac{1}{3}$

X – nr. întrebări $\in \{0,1,2\}$

Y – nr. de răsp. greșite $\in \{0,1,2\}$

$(X,Y) = ?$

$(X,Y)\ \Omega \to \mathbb{R}^2$

$(X,Y) = \{0,1,2\}^2$

X\Y	0	1	2	
0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{3}$

$$P(X=0, Y=0) = \frac{1}{3} = \cancel{P(X=0} \ \underbrace{P(X=0)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{P(Y=0|X=0)}_{1} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1)\,P(Y=1|X=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(X=1, Y=0) = P(X=1)\,P(Y=0|X=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

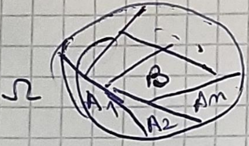
$$P(X=2, Y=0) = P(X=2)\,P(Y=0|X=2) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(X=2, Y=1) = P(X=2)\,P(Y=1|X=2) = \frac{1}{3} \cdot \binom{2}{1} \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{2!}{1!} = \frac{2}{16}$$

Formula prob. totale

$B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ formau o partiție pe Ω



$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

Dacă $B = \{X = x\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(X = x \mid A_i)}_{f_{X|A_i}(x)}\,\mathbb{P}(A_i)$

$$A = \{Y = y_i\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x \mid Y = y_i)\,\mathbb{P}(Y = y_i)$$

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|Y}(x \mid y_i)\, f_Y(y_i)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A)$$
$$= \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A \mid B)$$

$A = \{X = x\}$, $B = \{Y = y\}$

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)$$
$$= \mathbb{P}(Y = y)\,\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y \mid x)$$
$$= f_Y(y)\, f_{X|Y}(x \mid y)$$

Formula lui Bayes

$\cancel{\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y, X = x)}$

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)}{\sum_{x'} \mathbb{P}(X = x')\,\mathbb{P}(Y = y \mid X = x')}$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_X(x)\, f_{Y|X}(y \mid x)}{\sum_{x'} f_X(x')\, f_{Y|X}(y \mid x')}$$

(Ex) O găină depune N ouă, $N \sim Pois(\lambda)$. P.p. că fiecare ou eclozează cu prob. $p \in (0,1)$ indep. de celelalte.

X = nr. de ouă care au eclozat

Y = nr. de ouă care nu au eclozat

$X + Y = N$

Vrem să det. rep (X, Y) și rep. marginale și să verificăm $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$P(X=i, Y=j) = ?$$

$$P(N=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$X \mid N=n \sim B(n, p)$$

$$Y \mid N=n \sim B(n, 1-p)$$

$$P(X=i, Y=j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=i, Y=j \mid N=n) P(N=n) = P(X=i, Y=j \mid N=i+j) P(N=i+j)$$

Dacă $i+j \neq n \Rightarrow P(X=i, Y=j \mid N=n) = 0$

$$P(X=i, Y=j \mid N=i+j) = P(X=i \mid N=i+j) = \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j$$
$$= P(Y=j \mid N=i+j)$$

$$P(X=i, Y=j) = \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = \frac{(i+j)!}{i! \cdot j!} p^i (1-p)^j \cdot$$

$$\cdot e^{-\lambda(p+1-p)} \frac{\lambda^{i+j}}{\cancel{(i+j)!}} = e^{-\lambda p} \frac{p^i \lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda(1-p)} \frac{(1-p)^j \lambda^j}{j} =$$

$$= \left[e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \right] \cdot \left[e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \right]$$

$$P(X=i) = \sum_j P(X=i, Y=j) = \sum_j [\ ][\ ] = e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^i}{i!} \Rightarrow X \sim Pois(\lambda p)$$

$$Y \sim Pois(\lambda(1-p))$$

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i) P(Y=j), \forall i, j \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

Media unei fct. de v.a.

X v.a. $\Omega \to \mathbb{R}$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$E[g(X)] = \sum g(x) P(X = x)$$

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{E[g(X,Y)] = \sum g(x,y) P(X = x, Y = y)}$$

X, Y

$$E[XY] = \sum_{x,y} xy \, P(X = x, Y = y)$$

Ex

X\Y	-1	0	2	Σ
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{6}{18}$
2	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$
3	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$
	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{8}{18}$	

Rep. marginale X, Y, Rep $X / Y = 0$

$Y / X = 1$, $E[XY]$, $E[2X + 3Y]$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{6}{18} & \frac{5}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{18} & \frac{7}{18} & \frac{8}{18} \end{pmatrix}$$

~~$X|Y=0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3/18}{7/18} & \frac{4/18}{7/18} & \end{pmatrix}$~~

$$X|Y=0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3/18}{7/18} & 0 & \frac{4/18}{7/18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$Y|X=1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1/18}{6/18} & \frac{3/18}{6/18} & \frac{2/18}{6/18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

$$E[XY] \simeq \frac{1}{18}(-1) + 2 \cdot \frac{2}{18} + (-2)\,\frac{2}{18} + 4 \cdot \frac{3}{18} + 6 \cdot \frac{3}{18}$$

$$E[2X+3Y] = 2E[X] + 3E[Y]$$

$$= \sum (2x+3y)\, P(X=x, Y=y)$$

$$E[X|Y=0]$$

$$\boxed{E[X|Y=y] = \sum_x x\, P(X=x|Y=y)}$$

$$E[X|Y] = g(Y)$$

Curs 12

a) Cazul discret

X, Y v.a. discrete, $X \in \{x_1, \dots, x_m\}$
$Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) \leftarrow \text{rep. comună}$$

$$f_X(x) = P(X=x) = \sum_{y} f_{X,Y}(x,y)$$

$$f_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x} f_{X,Y}(x,y)$$

rep. marginală

rep. condiționată

$$f_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = P(Y=y \mid X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Media condiționată

Dacă X v.a. discretă și $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$ atunci am văzut că

$$f_{X|A}(x) = P(X=x \mid A) \leftarrow \text{este o probabilitate}$$

Media condiționată a lui X la A:

$$\boxed{E[X|A] = \sum_{x} x P(X=x \mid A) = \sum_{x} x f_{X|A}(x)}$$

Dacă g este o funcție, atunci $g(X)$ este o v.a. discretă și

$$\boxed{E[g(X)|A] = \sum_x g(x) f_{X|A}(x)}$$

Dacă $A = \{Y = y\}$ atunci

$$\boxed{E[X|Y=y] = \sum_x x f_{X|Y}(x|y)}$$

media condiționată a lui X la $Y=y$

Exp:

$X \backslash Y$	-1	0	2	Σ
1	1/18	3/18	2/18	6/18
2	2/18	0	3/18	5/18
3	0	4/18	3/18	7/18
Σ	3/18	7/18	8/18	

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{6}{18} & \frac{5}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{18} & \frac{7}{18} & \frac{8}{18} \end{pmatrix}$$

$$X|Y=0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3/18}{7/18} & 0 & \frac{4/18}{7/18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$E[X|Y=0] = 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{15}{7}$$

$$X|Y=-1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$E[X|Y=-1] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 0 = \frac{5}{3}$$

$$X|Y=2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

(Puteți calcula acum pt. $Y|X=1$ ...)

$$E[X|Y=2] = \frac{2}{8} + \frac{6}{8} + \frac{9}{8} = \frac{17}{8}$$

(P) Dacă X și Y sunt v.a. discrete atunci

$$\boxed{E[X] = E\sum_y E[X|Y=y]\,\mathbb{P}(Y=y)}$$

$$E[X|Y=y] = \sum_x x\, f_{X|Y}(x|y) \quad , \quad f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$\sum_y \sum_x x\, f_{X|Y}(x,y)\, f_Y(y) = \sum_y \sum_x x\, f_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_x x \underbrace{\sum_y f_{X,Y}(x,y)}_{f_X(x)} = E[X]$$

Def: Fie X și Y două v.a. discrete. Se numește media condiționată a lui X la Y, și se notează
$E[X|Y]$, v.a. de forma $h(Y)$ pt. care $h(y) = E[X|Y=y]$, $\forall y$

Exp: (cont.)
Am văzut că $E[X|Y=-1] = \frac{5}{3}$

$E[X|Y=0] = \frac{15}{7}$

$E[X|Y=2] = \frac{17}{8}$

$E[X|Y] = h(Y)$ ce valori ia această v.a?
$h(y) = E[X|Y=y]$

$$E[X|Y] \sim \begin{pmatrix} 5/3 & 15/7 & 17/8 \\ \mathbb{P}(Y=-1) & \mathbb{P}(Y=1) & \mathbb{P}(Y=2) \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5/3 & 15/7 & 17/8 \\ 3/18 & 7/18 & 8/18 \end{pmatrix}$$

$$E[E[X|Y]] = \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{18} + \frac{15}{7}\cdot\frac{7}{18} + \frac{17}{\cancel{18}\,8}\cdot\frac{8}{18} = \frac{5+15+17}{18} = \frac{37}{18} = E[X]$$

$$E[X] = \frac{6+10+21}{18} = \frac{37}{18}$$

(P) Media mediei condiționate este

$$\boxed{E[E[X|Y]] = E[X]}$$

$$E[X|Y] \sim \begin{pmatrix} E[X|Y=y_1] & \dots & E[X|Y=y_n] \\ P(Y=y_1) & \dots & P(Y=y_n) \end{pmatrix}$$

Ex: Calculați voi $E[Y|X]$

Obs: $Var(X|A) = E[(X-E[X|A])^2 | A]$
$= E[X^2|A] - E[X|A]^2$

$$Var(X|\underbrace{Y=y}_{\leftarrow A=\{Y=y\}}) = E[X^2|Y=y] - E[X|Y=y]^2$$

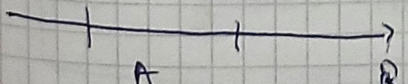
b) Cazul v.a. continue: rep. comună, rep. marginală, rep. condiționată

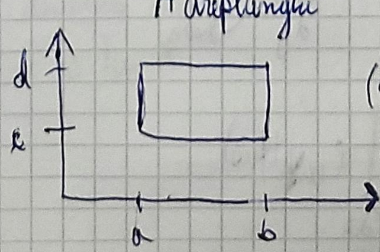
Def: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ c.p și X, Y două v.a. cont.

Spunem că vectorul (X,Y) formează o pereche de v.a. cont. dacă există $f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0$ cu prop:

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$$

A dreptunghi





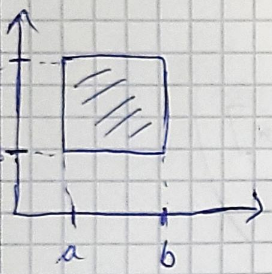
$(a,b)\times(c,d)$

Funcția $f_{(X,Y)}(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se numește densitatea comună a (X,Y)

Dacă $A=[a,b]\times[c,d]$

$$P((X,Y)\in[a,b]\times[c,d]) = P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) =$$

$$= \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$



$$= \int_a^b\int_c^d f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\,dx$$

Dacă $A=\mathbb{R}^2$ atunci

$$P((X,Y)\in\mathbb{R}^2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

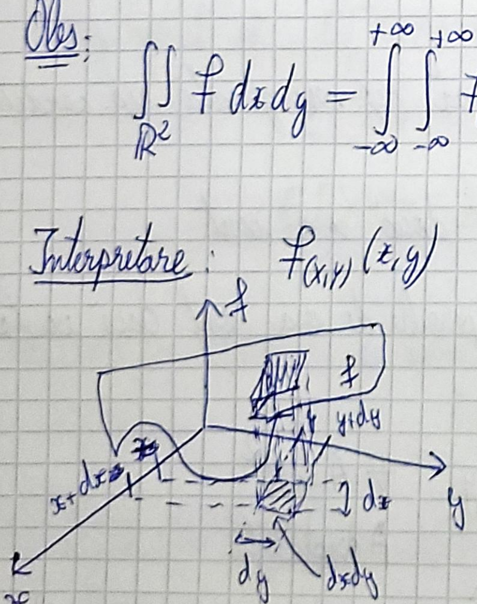
$f_{(X,Y)}$ este densitate $\Leftrightarrow$ a) $f_{(X,Y)} \geq 0$

b) $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1$

Obs:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

Interpretare: $f_{(X,Y)}(x,y)$

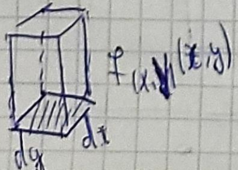


$$P(X\in(x,x+dx),\ Y\in(y,y+dy)) =$$

$$= \int_x^{x+dx}\int_y^{y+dy} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du$$

$dx,\ dy \to 0$

$$\approx f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$



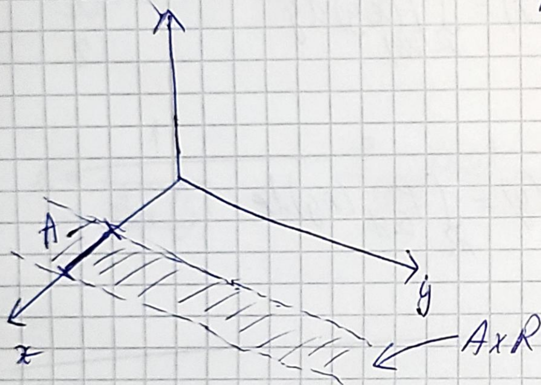
$$f_{(X,Y)}(x,y) \approx \frac{\mathbb{P}(X\in(x,x+dx),\ Y\in(y,y+dy))}{dx\,dy} \approx \frac{\text{probabilitatea}}{\text{unitatea de arie}}$$

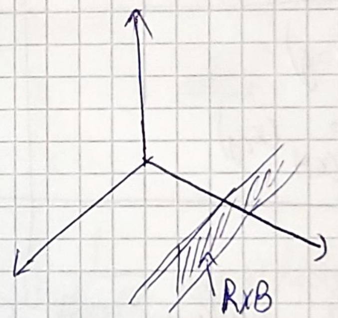
Obs: Dacă știm $f_{(X,Y)}(x,y)$ atunci putem calcula orice probabilitate de tipul $\mathbb{P}(X\in A, Y\in B)$

$f_{(X,Y)}(x,y)$ - conține toată informația despre X și Y

Vrem să calculăm

$$\mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(X\in A, Y\in\mathbb{R}) = \int_A\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\,dx$$





$$\mathbb{P}(Y\in B) = \mathbb{P}(X\in\mathbb{R}, Y\in B) = \int_{\mathbb{R}}\int_B f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\,dx$$

P.p. că X și Y v.a continue cu densitățile f_X și respectiv f_Y

$$\mathbb{P}(X\in A) = \int_A f_X(x)\,dx$$

Avem

$$\int_A f_X(x)\,dx = \int_A \overbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy}$$ ← densitatea marginală a lui X

similar

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx}$$ - densitatea marginală a lui Y

~~cazul discret~~

cazul discret	cazul cont.
$f_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)$	$f_{(X,Y)}(x,y)$
$f_X(x) = \mathbb{P}(X=x) = \sum_y f_{(X,Y)}(x,y)$	$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$
$f_Y = \mathbb{P}(Y=y) = \sum_x f_{(X,Y)}(x,y)$	$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$

Repartiția uniformă pe $S \subseteq \mathbb{R}^2$

Pp. $S \subseteq \mathbb{R}^2$ mărginită (triunghi, dreptunghi)

$(X,Y) \sim \mathcal{U}(S)$ dacă $\exists\ f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0$ a.î.

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in S \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Cât este c?

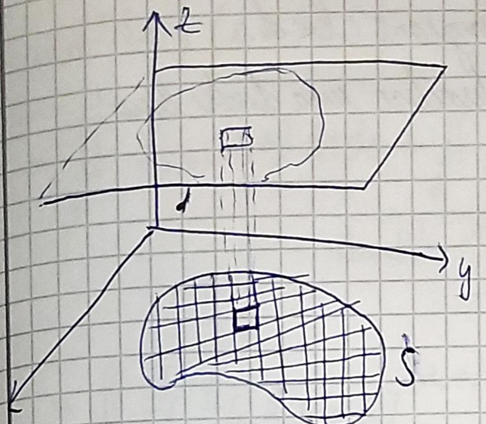
Cum $f_{(X,Y)}$ este densitate $\Rightarrow c \geq 0$ și

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} c \cdot \mathbb{1}_S(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$c = \frac{1}{\iint_S 1\,dx\,dy}$$

$S = [a,b] \times [c,d]$

$(b-a)(d-c)$



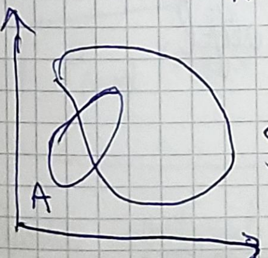
$$\iint_S 1\,dx\,dy = \sum 1 \times (\,)$$

aria drept. mic

$$\iint_S 1\,dx\,dy = \text{Aria}(S)$$

$$c = \frac{1}{\text{Aria}(S)} \qquad f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Aria}(S)}, & (x,y)\in S \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\big((X,Y)\in A\big) = \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \iint_A \frac{1}{\text{Aria}(S)} \mathbb{1}_S(x,y)\,dx\,dy =$$

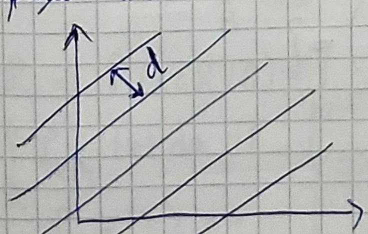


$$= \frac{\iint_A \mathbb{1}_S(x,y)\,dx\,dy}{\text{Aria}(S)} =$$

$$= \frac{\iint_{A\cap S} 1\,dx\,dy}{\text{Aria}(S)} = \frac{\text{Aria}(A\cap S)}{\text{Aria}(S)}$$

Exp: (Problema acului lui Buffon)

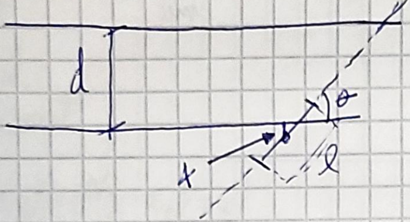
O suprafață marcată cu linii paralele aflate la distanța d una față de cealaltă.



Presupunem că aruncăm un ac de lungime $l < d$.

Care este probabilitatea ca acul să intersecteze una dintre linii?

<u>Poziția acului</u>

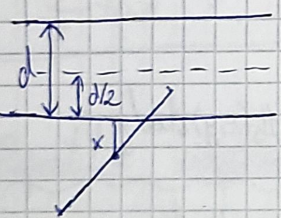


θ - unghiul ascuțit format de axa acului cu dr $\parallel$

x - distanța de la mijlocul acului la cea mai apropiată dreaptă

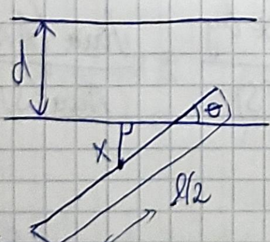
$(X, \theta) \sim U(S)$

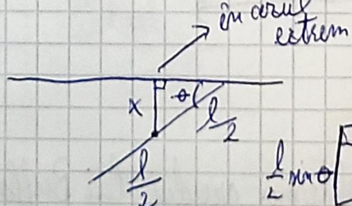
$$S = \left\{ (x, \theta) \;\middle|\; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le x \le \frac{d}{2} \right\}$$



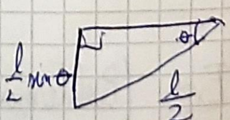
$$f_{(X,\theta)}(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{d}{2} \times \frac{\pi}{2}}, & (x,\theta) \in S \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Condiția ca acul să intersecteze o linie:





$x = \frac{l}{2} \sin\theta$



condiția:

$X \le \frac{l}{2} \sin(\theta)$

Vrem să calculăm $P(\underbrace{X \le \frac{l}{2} \sin\theta}_{\text{v.a.}}) = ?$

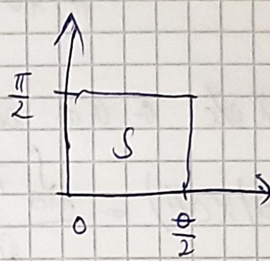
$= P((X, \theta) \in A)$

unde $A=\{(x,\theta)\in S \mid x \le \frac{\ell}{2}\sin\theta\}$

$$= \iint_A f_{(X,\Theta)}(x,\theta)\,dx\,d\theta = \iint_A \frac{1}{\frac{\pi d}{4}}\, \mathbb{1}_S(x,\theta)\,dx\,d\theta =$$

$\text{Aria}(S) \rightarrow$

$$= \iint_A \frac{4}{\pi d}\, \mathbb{1}_{[0,\frac{d}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]}(x,\theta)\,dx\,d(\theta) =$$



$$= \frac{4}{\pi d}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\ell}{2}\sin\theta} dx\,d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi d}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2}\sin\theta\,d\theta = \frac{2\ell}{\pi d}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta = \frac{2\ell}{\pi d}$$

Obs: Fct. de rep (X,Y)

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X\le x, Y\le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du$$

Densitatea comună se obține:

$$\boxed{f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F_{(X,Y)}(x,y)}$$

Repartiții condiționate

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p., X o v.a cont și $A\in\mathcal{F}$ cu $\mathbb{P}(A)>0$.

Definim densitatea condiționată a lui X la A, $f_{X|A}(x)$, funcția $f_{X|A}(x)$ care verifică

$$\mathbb{P}(X\in B \mid A) = \int_B f_{X|A}(x)\,dx, \ \forall\, B\subseteq \mathbb{R} \text{ interval}$$

Obs: $B=\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{P}(X\in\mathbb{R}\mid A) = 1$

astfel $\left.\begin{array}{l}\int_{\mathbb{R}} f_{X|A}(x)\,dx = 1 \\ f_{X|A}(x)\ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow f_{X|A}$ este o densitate de prob.

Obs: În locul lui A considerăm ev. $\{X\in A\}$ a.î. $\mathbb{P}(X\in A)>0$

~~$\mathbb{P}(X\in B \mid X\in A)$~~

$$\mathbb{P}(X\in B \mid X\in A) = \frac{\mathbb{P}(X\in B, X\in A)}{\mathbb{P}(X\in A)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X\in A\cap B)}{\mathbb{P}(X\in A)}$$

Cum X este o v.a. cont cu densitatea f_X avem

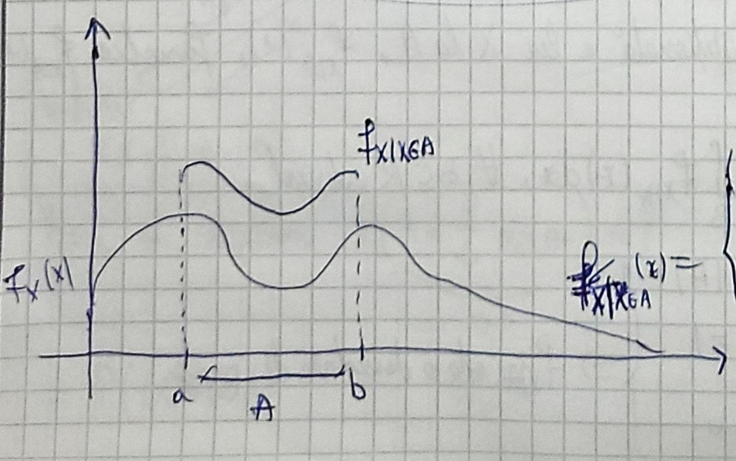
$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(X\in B \mid X\in A) &= \frac{\int_{A\cap B} f_X(x)\,dx}{\mathbb{P}(X\in A)} \\ \mathbb{P}(X\in B \mid X\in A) &= \int_B f_{X\mid\{X\in A\}}(x)\,dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\int f_{X\mid\{X\in A\}}(x)\,dx = \int_{A\cap B} \frac{f_X(x)\,dx}{\mathbb{P}(X\in A)}$$

$$= \int_B \frac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X\in A)} \mathbb{1}(x)\,dx$$

$$\int_{A\cap B} f\,dx = \int f\, \mathbb{1}_{A\cap B}(x)\,dx$$

$$= \int f(x)\, \mathbb{1}_A(x)\, \mathbb{1}_B(x)\,dx = \int_B f(x)\, \mathbb{1}_A(x)\,dx$$



$$f_{X\mid X\in A}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X\in A)}, & x\in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

__Exp__: $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, $[c,d] \subseteq [a,b]$

$$f_{X|X\in[c,d]}(x) = ?$$

Avem: $$f_{X|X\in[c,d]}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X\in[c,d])}, & x\in[c,d] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$$\mathbb{P}(X\in[c,d]) = \int_c^d f_X(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

$$f_{X|X\in[c,d]} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}{\frac{d-c}{b-a}}, & x\in[c,d) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$[c,d] \subseteq [a,b]$

$$f_{X|X\in[c,d]} = \frac{1}{d-c} \mathbb{1}_{[c,d]}(x)$$

adică $X|X\in[c,d] \sim \mathcal{U}([c,d])$

__Formula prob. totale__:

Fie $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ care formează o partiție pe Ω. și $B\in\mathcal{F}$ atunci

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

Dacă B $\{X \le x\}$ unde X v.a cont f_X

$$\mathbb{P}(X\le x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X\le x|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x} f_{X|A_i}(t)\,dt\,\mathbb{P}(A_i) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(t) P(A_i)\, dt$$

derivăm după x

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(t) P(A_i)\, dt$$

$$\boxed{f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(x) P(A_i)}$$

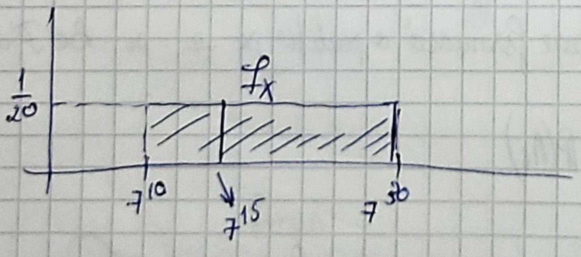
Obs: $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$, X v.a. cont f_X

$$f_X(x) = f_{X|A}(x) P(A) + f_{X|A^c} P(A^c)$$

Ex: Pp. că metroul circulă la intervale de 15 min începând cu ora 5^{00} a.m. Pp. că ajungem în stație în intervalul $7^{10}-7^{30}$ în mod aleator (uniform pe acest interval).

Ne propunem să determinăm rep. timpului de așteptare până la sosirea metrou.

Sol: Fie Y - timpul de așteptare până la sosirea primului metrou.
Vrem să determinăm $f_Y = ?$
Fie X - timpul de sosire în stație $\mathcal{U}([7^{10}, 7^{30}])$



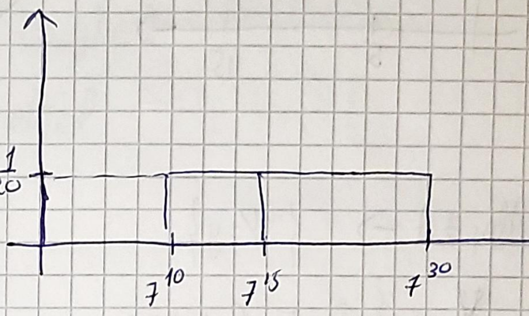
$A = \{7^{10} \le X \le 7^{15}\} \to$ urcăm în metroul de 7^{15}

$B = \{7^{15} < X \le 7^{30}\} \to$ — II — 7^{30}

$$f_Y(y) = f_{Y|A}(y)\, P(A) + f_{Y|B}(y)\, P(B)$$

$$P(A) = P(7^{10} \le X \le 7^{15}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

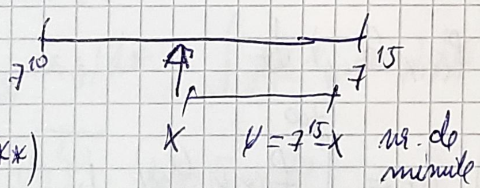
$$P(B) = P(7^{15} < X \le 7^{30}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$



$$f_Y(y) = f_{Y|A}(y)\cdot\frac{1}{4} + f_{Y|B}(y)\cdot\frac{3}{4} \quad (*)$$

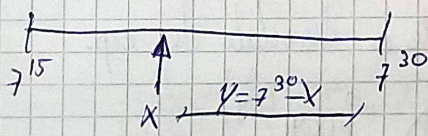
Anterior: $U \sim \mathcal{U}([a,b])$, $[c,d] \subseteq [a,b]$

$$U \mid U \in [c,d] \sim \mathcal{U}([c,d])$$



$$f_{Y|A}(y) = \frac{1}{5}, \quad 0 \le y \le 5 \quad (**)$$

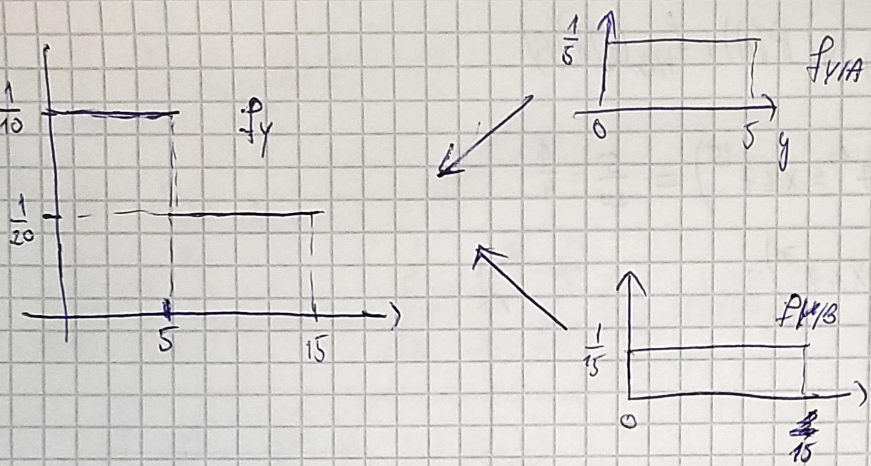
Dacă B s-a realizat:



$$f_{Y|B}(y) = \frac{1}{15}, \quad 0 \le y \le 15 \quad (***)$$

$$f_Y(y) = f_{Y|A}(y) P(A) + f_{Y|B}(y) P(B) = \frac{1}{5}\mathbb{1}_{[0,5]}(y)\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{15}\mathbb{1}_{[0,15]}(y)\cdot\frac{3}{4} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 \le y \le 5 \\ \frac{1}{20} & 5 \le y \le 15 \end{cases}$$



Aleg $A \to \{Y=y\}$

Y v.a. cont $f_Y(y)>0$

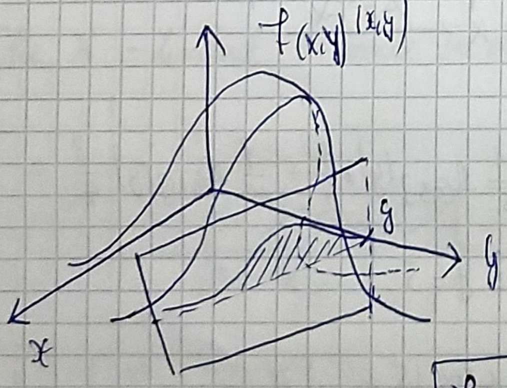
Definim densitatea condiționată a lui X la $Y=y$ prin

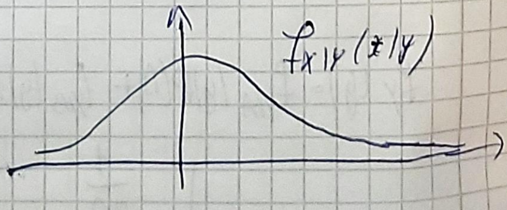
$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx = \frac{\int f_{(X,Y)}(x,y)\,dx}{f_Y(y)} = 1$$

$f_{X|Y}(x|y)$ este o densitate de rep.

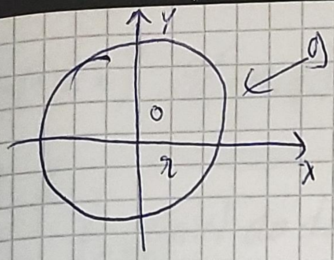




$$\boxed{f_{(X,Y)}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}$$

Ex: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le r^2\}$

$(X,Y) \sim \mathcal{U}(D)$



Vrem să calculăm:

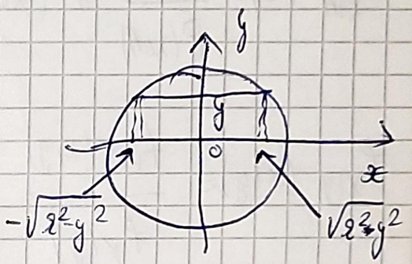
$$f_{X|Y}(x|y)=?$$

Știm

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\text{Aria}(D)}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$$

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$$



Densitatea marginală a lui Y:

$$f_Y(y)=\int f_{(X,Y)}(x,y)\,dx=\int \frac{1}{\pi r^2}\mathbb{1}_D(x,y)\,dx=$$

$$=\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\frac{1}{\pi r^2}\,dx=\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2},\quad y\in[-r,r]$$

$$\frac{1}{2a}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{\dfrac{1}{\pi r^2}\mathbb{1}_D(x,y)}{\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}\mathbb{1}_{[-r,r]}(x)}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}\mathbb{1}_{[-\sqrt{r^2-y^2},\,\sqrt{r^2-y^2}]}$$

Curs 13

$f_{X,Y}(x,y)$ - densitatea comună

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

$$f_{X|A}(x) = \frac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X\in A)} \quad \mathbb{P}(X\in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)\, dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Formula prob. totale:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(x)\, \mathbb{P}(A_i)$$

a) Y este o v.a. discretă $\{y_1, \dots, y_n\}$

X v.a. cont f_X

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|Y}(x|y_i)\, \mathbb{P}(Y=y_i)$$

b) Y o v.a. cont f_Y

X v.a. cont f_X

$$f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)\, dy$$

Independența v.a.

$X \perp Y$

$$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbb{P}(X\in A)\,\mathbb{P}(X\in B), \quad \forall A,B \subseteq \mathbb{R}$$

$A = (-\infty, x], B(-\infty, y] \Rightarrow P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x) P(Y \le y), \forall x, y$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv \quad \Big/ \text{ derivăm după } y \text{ și } x \text{ sau } x \text{ și } y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,du = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \,\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ldots\right)$$

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)}$$

(P) ~~Dacă~~ Fie X și Y sunt v.a. cu densitățile f_X și respectiv f_Y. Atunci $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

(P) Fie X și Y două v.a. și g și h două fct.

Dacă $f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y), \ \forall x, y$ atunci $X \perp\!\!\!\perp Y$

(P) Dacă X și Y sunt 2 v.a. independente atunci

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]\,E[h(Y)]$$

Obs: Dacă $g(x)$ și $h(y) = y$ atunci

$$E[XY] = E[X]\,E[Y]$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Formula lui Bayes

X, Y două v.a. cont

$$\xrightarrow[f_X]{X} \boxed{\text{zgomot}} \xrightarrow[f_{Y|X}(y|x)]{Y} \boxed{\text{inferență}} \xrightarrow{f_{X|Y}(x|y)}$$

semnal pe care nu îl observăm

semnal pe care îl observăm

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)$$
$$= f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{\int f_{Y|X}(y|x')\, f_X(x')\, dx'}$$

Caz hibrid

$$\xrightarrow[B]{\{0,1\}} \boxed{\text{zgomot}} \xrightarrow{Y} \boxed{\text{inferență}} \xrightarrow{P(A|Y=y)}$$

$+N(0,1)$

$P(Y=y)=0$

$$P(A|Y=y) = \lim_{dy \to 0} P(A|Y \in (y, y+dy))$$

$$\left(y-\frac{dy}{2}, y+\frac{dy}{2}\right)$$

$$= \lim_{dy \to 0} \frac{P(A \cap Y \in (y, y+dy))}{P(Y \in (y, y+dy))} =$$

$$= \lim_{dy \to 0} \frac{P(A)\, P(Y \in (y, y+dy) | A)}{P(Y \in (y, y+dy))} =$$

$$= \lim_{dy \to 0} \frac{P(A) \cdot \int_y^{y+dy} f_{Y|A}(u)\, du}{\int_y^{y+dy} f_Y(u)\, du} = \lim_{dy \to 0} \frac{P(A)\, f_{Y|A}(y)\, dy}{f_Y(y)\, dy}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A|Y=y) = \frac{\mathbb{P}(A) f_{Y|A}(y)}{(f_Y(y))}}$$

$$f_{Y|A}(y)\,\mathbb{P}(A) + f_{Y|A^c}(y)\,\mathbb{P}(A^c)$$

Formula lui Bayes

Formula prob. totale

X \ Y	discret	cont
discret	$\mathbb{P}(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x\|Y=y)\mathbb{P}(Y=y)$	$\mathbb{P}(X=x) = \int \mathbb{P}(X=x\|Y=y) f_Y(y)\,dy$
cont	$f_X(x) = \sum_y f_{X\|Y}(x\|y)\mathbb{P}(Y=y)$	$f_X(x) = \int f_{X\|Y}(x\|y) f_Y(y)\,dy$

Formula lui Bayes

X \ Y	discret	cont
discret	$\mathbb{P}(Y=y\|X=x) = \frac{\mathbb{P}(X=x\|Y=y)\mathbb{P}(Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}$	$f_{Y\|X}(y\|x) = \frac{\mathbb{P}(X=x\|Y=y) f_Y(y)}{\mathbb{P}(X=x)}$
cont.	$\mathbb{P}(Y=y\|X=x) = \frac{f_{X\|Y}(x\|y)\mathbb{P}(X=y)}{f_X(x)}$	$f_{Y\|X}(y\|x) = \frac{f_{X\|Y}(x\|y) f_Y(y)}{f_X(x)}$

__Exp__ A și B, durata de viață A $Exp(\lambda_0)$

— " — B $Exp(\lambda_1)$

$\lambda_0 < \lambda_1$

Pp. să primim un telefon de la A cu prob p_0 și de la B cu $p_1 = 1 - p_0$

Fie T durata de viață a telefonului primit.

a) Fct de rep. și densitatea lui T

b) Vrem să găsim prob. ca tel. să fie primit de la B știind că $T=t$.

T v.a. cont.

Fie I v.a.

$$I = \begin{cases} 0, & \text{dacă tel A} \\ 1, & \text{dacă tel B} \end{cases}$$

$\mathbb{P}(I=0) = p_0$

$\mathbb{P}(I=1) = p_1 = 1-p_0$

$T \mid I=0 \sim Exp(\lambda_0)$

$T \mid I=1 \sim Exp(\lambda_1)$

$$\mathbb{P}(T \le t) = \underbrace{\mathbb{P}(T \le t \mid I=0)}_{1-e^{-\lambda_0 t}} \underbrace{\mathbb{P}(I=0)}_{p_0} + \underbrace{\mathbb{P}(T \le t \mid I=1)}_{1-e^{-\lambda_1 t}} \underbrace{\mathbb{P}(I=1)}_{1-p_0} =$$

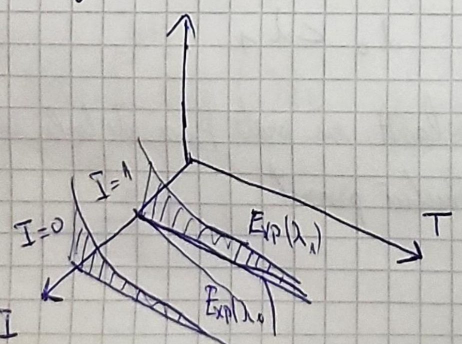
$Exp(\lambda)$ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$\quad F(x) = 1-e^{-\lambda x}$

$$= \left(1-e^{-\lambda_0 t}\right) p_0 + \left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)(1-p_0)$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} p_0 + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}(1-p_0), \ t>0$$

(T, I)



b) $P(I=1 \mid T=t) = \dfrac{f_{T|I}(t|1)\, P(I=1)}{f_T(t)} =$

$$= \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}(1-p_0)}{\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} p_0 + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}(1-p_0)}$$

<u>Media unei fct. de v.a.</u>

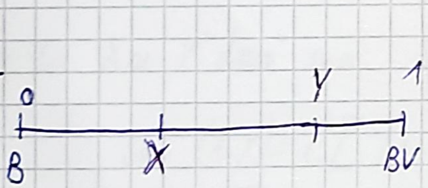
X, Y două v.a. $f_{X,Y}(x,y)$ și $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{E[g(X,Y)] = \iint g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy}$$

În particular,

$$E[XY] = \iint xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

Ex



$X, Y \sim U[0,1]$ indep.

$E[|X-Y|] =$

$$= \iint |x-y|\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

$$E[|X-Y|] = \iint |x-y|\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_y^1 (x-y)\, dx\, dy + \int_0^1 \int_0^y (y-x)\, dx\, dy = \cancel{\frac{x^2}{2}} \cancel{\int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - x\right)\Big|_0^y dx} =$$

$$= \int_0^1 \left(\cancel{yx} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^y dy = \int_0^1 \cancel{y^2} - \frac{y^2}{2} \cancel{2y}\, dy = \int_0^1 \frac{y}{2}^2 \cancel{2y}\, dy = \frac{y^3}{3} \cancel{\frac{2y^2}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Medie condiționată

X v.a. cont și A un ev. $\mathbb{P}(A)>0$

$$E[X|A] = \int x f_{X|A}(x)dx$$

Dacă $A = \{Y=y\}$

$$E[X|Y=y] = \int x f_{X|Y}(x|y)dx$$

Formula prob. totale

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(x)\,\mathbb{P}(A_i) \quad \Big|\cdot x, \text{ apoi integrez}$$

$$\boxed{E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X|A_i]\,\mathbb{P}(A_i)}$$

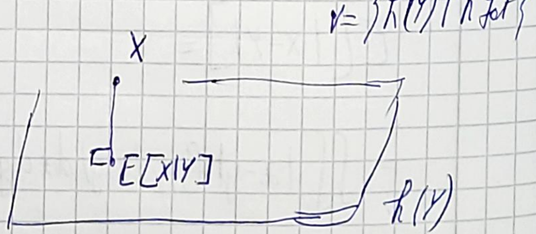
$$\boxed{E[X] = \int E[X|Y=y]\, f_Y(y)dy}$$

Def: Fie $g(y) = E[X|Y=y]$. Atunci v.a. $E[X|Y] = g(Y)$

Prop:

a) $E[E[X|Y]] = E[X]$

b) $Var(E[X|Y]) =$



$$E[X|Y] = \arg\min_{g} E[(X-g(Y))^2]$$
$$E[(X-g(Y))]$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

$$h = a_0 + a_1Y_1 + \dots + a_nY_n$$

$E[(X-a)^2]$

$E[|X-a|]$

$$Var(X) = Var(E[X|Y]) + E[Var(X|Y)]$$

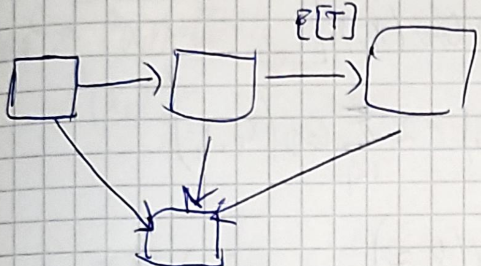
$N =$

$X_1, X_2, \dots$

$T = X_1 + X_2 + \dots + X_N$

$\omega_1 \quad N(\omega_1) = 10$

$T(\omega_1) = X_1^{(\omega_1)} + \dots + X_{10}^{(\omega_1)}$



Covarianța și corelație

Def: Fie X și Y două v.a. Se n. covarianța dintre X și Y

$$Cov(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

În particular, $X = Y \Rightarrow Cov(X,X) = Var(X)$

(P) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

Def: Spunem că v.a. X și Y sunt necorelate dacă $Cov(X,Y) = 0$

Altfel spus, $E[XY] = E[X]E[Y]$

Obs: Dacă $X \perp Y \Rightarrow X$ și Y sunt necorelate

EXP: $\left.\begin{array}{l} X \sim N(0,1) \\ Y = X^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} E[X]E[Y] = 0 \\ E[XY] = \underbrace{E[X^3]}_{\text{integrală din fct. impară} = 0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X$ și Y sunt necorelate

X și Y nu sunt indep!

Prop:

a) $Cov(X,X) = Var(X)$

b) $Cov(X, a) = 0$, a const.

c) $Cov(a+bX, Y) = b\, Cov(X,Y)$

d) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

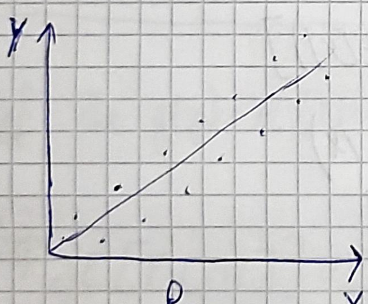
e) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\, Cov(X,Y)$

$$Var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

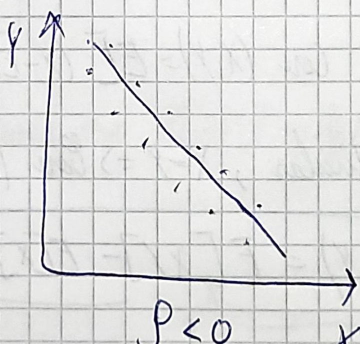
f) $Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

Def: Fie X și Y două v.a. și definim coeficientul de corelație dintre X și Y

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$



$\rho > 0$

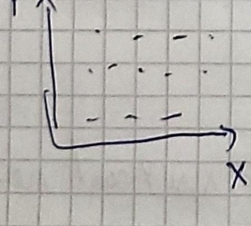


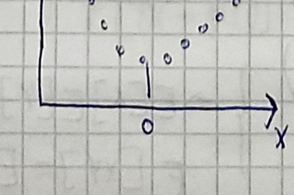
$\rho < 0$

$-1 < \rho < 1$

$\rho = 0$ (indep.)

$\rho = 0$ (necorelare)





Prop: $\rho \in [-1,1]$. Dacă $\rho = 1$ (sau -1) atunci $X = a + bY$ ($Y = a + bX$) aproape sigur

$$\mathbb{P}(X = a + bY) = 1 \quad (a.s.)$$

Dem: X, Y v.a. $\mathbb{E}[X] = \mu_{\cancel{x}}$, $Var(X) = \sigma_{\cancel{x}}^{2}$, $E[Y] = \mu_{\cancel{y}}$, $Var(Y) = \sigma_{\cancel{y}}^{2}$

μ_X $\quad$ σ_X^2

P. $\underline{\mu_X = \mu_Y = 0}$ și $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$

Dacă $\Rightarrow$ $\overline{\rho(X,Y) = E[X,Y]}$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X\ \sigma_Y}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$$

v.a. normalizate

Știm că $E[(X+\lambda Y)^2] \geq 0, \ \forall \lambda \in R$

$$\lambda^2 E[Y^2] + 2\lambda E[XY] + E[X^2] \geq 0 \quad \cancel{\forall \lambda \in R} \quad \forall \lambda$$

$$\cancel{\Delta = 4\lambda^2} \quad \Delta = 4E[XY]^2 - 4E[X^2]E[Y^2] \leq 0$$

$$\mathbb{E}[XY]^2 \leq \underbrace{E[X^2]}_{=1}\underbrace{E[Y^2]}_{=1} \Rightarrow E[XY]^2 \leq 1 \Rightarrow \rho(X,Y)^2 \leq 1 \Rightarrow |\rho(X,Y)| \leq 1$$

Inegalitatea Cauchy-Schwartz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1 \qquad \rho = 1$

$E[(X-Y)^2] = 0$

$X = Y$

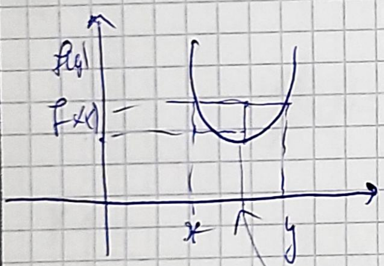
Inegalități și teoreme limită

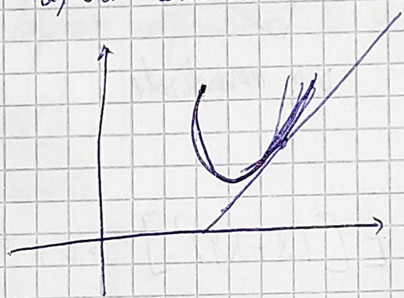
(T) (Inegalitatea Cauchy-Schwartz) Fie X și Y v.a. cu $Var(X) < \infty$, $Var(Y) < \infty$. Atunci

$$|E[XY]| \le \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

Inegalitatea lui Jensen

a) Fct. convexă

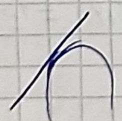




$tx + (1-t)y, \ t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y)$$

b) Concavă



Fct concavă: $\forall x, y, \ \forall t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \ge t f(x) + (1-t) f(y)$$

(T) (Ineg Jensen) Fie X v.a. și g o fct convexă. Atunci:

$$E[g(X)] \ge g(E[X])$$

Dacă g este concavă:

$$E[g(X)] \le g(E[X])$$

Obs: $Var(X) \ge 0$

$$E[X^2] \ge E[X]^2$$

(T) (Ineg lui Markov)

Fie X v.a. pozitivă. Atunci

$$P(X \ge a) \le \frac{E[X]}{a}$$

Dem

$$Y = \begin{cases} 0, & X < a \\ a, & X \ge a \end{cases}$$ atunci

$$E[Y] = a P(X \ge a)$$

$$Y \le X \Rightarrow E[Y] \le E[X]$$

Ex

$X \sim U([0,1])$

$$P(X \ge 2) \le \frac{1}{4}$$

$$P(X \ge 1) \le \frac{1}{2}$$

$$P\left(X \ge \frac{1}{2}\right) \le 1$$

(P) Ineg ~~Chebyshev~~ Chebyshev - Cebîșev)

Fie X v.a. $E[X] = \mu < \infty$, $Var(X) = \sigma^2 < \infty$

$$P(|X-\mu| \ge a) \le \frac{Var(X)}{a^2}, \forall a > 0$$

$$Y = (X-\mu)^2$$

$$\mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{E[Y]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}$$

Ales $a = k\sigma$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

(Ineg Chernoff)

Fie X v.a., $a > 0$, $t > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}} \quad \forall a, t$$

$$Y = (X-\mu)^2$$

$$\mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{E[Y]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}$$

Aleg $a = k\sigma$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

(Ineg Chernoff)

Fie X v.a., $a>0$, $t>0$

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E[e^{tx}]}{e^{ta}} \quad \forall a, t$$

Curs 14

Inegalități

1) $E[XY] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$: Cauchy-Schwartz

2) φ convexă $E[\varphi(X)] \geq \varphi(E[X])$ Jensen
φ concavă $E[\varphi(X)] \leq \varphi(E[X])$

3) $\cancel{X} > 0$, $a > 0$

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{E[X]}{a}$$ Markov

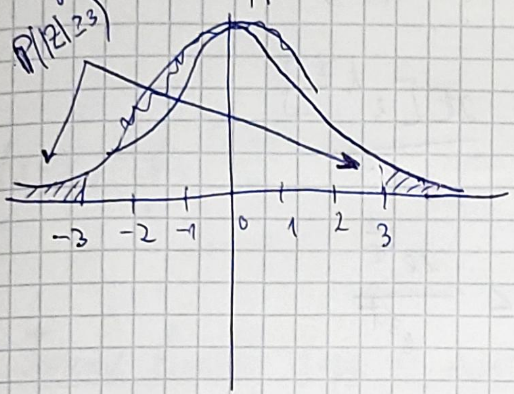
4) X v.a. $E[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$ Chebyshev

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}, \forall a > 0$$ (Cebâșev)

5) X v.a., $a > 0$, $t > 0$ atunci $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{E[e^{tx}]}{e^{ta}}, \forall$ Chernoff

Exp:

$Z \sim N(0,1)$. Vrem să mărginim superior $P(|Z| \geq 3)$ folosind Markov, Chebyshev, Chernoff



Avem prop 68 - 95 - 99.7

$P(|Z| \leq 1) \simeq 0.68$

$P(|Z| \leq 2) \simeq 0.95$

$P(|Z| \leq 3) \simeq 0.997$

Astfel: $P(|Z| \geq 3) \simeq 0.003$

a) Markov

$$P(|Z| \geq 3) \leq \frac{E[|Z|]}{3} \leq \sqrt{\frac{2}{9\pi}}$$

$$tx - \frac{x^2}{2} = x\left(t - \frac{x}{2}\right)$$

$$E[|Z|] = \int |z| \varphi(z)\, dz$$

$$= \int |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \underbrace{z e^{-\frac{z^2}{2}}}_{\left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)'} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)\Big|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$= 0.26$

b) $P(|Z| \geq 3) = P(|Z - \underset{\mu}{0}| \geq 3) \leq \frac{Var(Z)}{9} = \frac{1}{9} = 0.11$

c) Chernoff

$$P(|Z| \geq 3) = 2P(Z \geq 3) \leq \frac{E[e^{tZ}]}{e^{3t}}, \forall t$$

$$E[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + tx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx + t^2 - t^2)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}} dx = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{\frac{-(x-t)^2}{2}} dt = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Var

$\to x \sim N(t, 1)$

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 3) = 2\,\mathbb{P}(Z \geq 3) \leq \frac{2E[e^{tZ}]}{e^{3t}}$$

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 3) \leq 2e^{\frac{t^2}{2} - 3t} \leq \frac{2e^{\frac{t^2}{2}}}{e^{3t}}$$

Pt. $t=3$ avem

$$\mathbb{P}(|Z| \geq 3) \leq 2e^{-\frac{9}{2}} = 0.02$$

Ex: $X \in [a,b]$ $E[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

$$P(|X-\mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}, \ \forall t > 0$$

necunoscut

$$\leq \frac{(b-a)^2}{4t^2}$$

$$\sigma^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$g(\gamma) = E[(x-\gamma)^2]$$

$$\gamma = E[x]$$

$$E[(x-\gamma)^2] \geq E[(x-E[x])^2], \ \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

$$E[(x-\gamma)^2] = E[(\underbrace{x-E[x]}_{\sim} + \underbrace{E[x]-\gamma}_{\sim})^2]$$

$$= E[(x-E[x])^2] + 2\underbrace{E[(x-E[x])(E[x]-\gamma)]}_{=0} +$$

$$+ (E[x]-\gamma)^2] \geq E[(x-E[x])^2]$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X-E[X])^2] \leq E[(X-\gamma)^2], \ \forall \gamma$$

Pt $\gamma = \frac{a+b}{2}$ $\quad E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] = E\left[(X-a)(X-b) + \frac{(b-a)^2}{4}\right]$

$$= \underbrace{E[(X-a)(X-b)]}_{\leq 0} + \frac{(b-a)^2}{4} \leq \frac{(b-a)^4}{4}$$

$$(X-\gamma)^2 = \underset{\leq 0}{A} + \frac{(b-a)^4}{4}$$

Teoreme limită. Legea Nr. mari

Def: Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ un șir de v.a și X o v.a. peste $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Spunem că șirul $(X_n)_n$ conv. la X aproape sigur și notăm

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X$$

dacă $\mathbb{P}(\underbrace{\lim_n X_n = X}) = 1$

un eveniment

$$A = \{ w \in \Omega \mid \lim_n X_n(w) = X(w) \}$$

Def:

Fie $(X_n)_n$ un șir de v.a. și X o v.a. def. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Spunem că șirul X_n conv. în prob. la X și notăm

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

dacă $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Obs: $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \underset{\text{acuratețea}}{\varepsilon}) \leq \delta \leftarrow \text{nivel de încredere}$$

Exp: $X_n \sim \mathcal{U}([0,1])$ indep

$Y_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

At. $Y_n \xrightarrow{P} 0$

Pentru $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) \quad (\text{pt că } Y_n \geq 0)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \geq \varepsilon, X_2 \geq \varepsilon, \dots, X_n \leq \varepsilon) =$$

$$\overset{\text{indep}}{=} \mathbb{P}(X_1 \geq \varepsilon)\mathbb{P}(X_2 \geq \varepsilon) \dots \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon)$$

$$= (1 - \mathbb{P}(X_1 < \varepsilon))(1 - \mathbb{P}(X_2 < \varepsilon)) \dots (1 - \mathbb{P}(X_n < \varepsilon)) =$$

$$= (1-\varepsilon) \times (1-\varepsilon) \dots (1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n$$

pt. $\varepsilon \in [0,1]$

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \text{ pt. } \varepsilon \in (0,1)$$

$\downarrow_{n\to\infty}$

0

Def: Numim eșantion de volum n din populația Q, ~~v.a~~ v.a $X_1, X_2, \dots, X_n$ indep. și identic repartizate (i.i.d) cu ~~repartiț~~ $P_{X_i} = Q$

Media eșantionului $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

Pp. $X_1, X_2, \dots X_n$ eșantion de medie μ și varianța σ^2 ($\mathbb{E}[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$)

$$\mathbb{E}[\overline{X_n}] = \mathbb{E}\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}(\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n]) = \mu$$

$$Var(\overline{X_n}) = Var\left(\frac{X_1 + \dots X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(Var(X_1) + \dots + Var(X_n)) = \frac{\sigma^2}{n}$$

T (LNM) - Legea Nr. Mari (slabă)

Fie $(X_n)_n$ un șir de v.a. i.i.d cu $E[X_1]=\mu<\infty$, $Var[X_1]=\sigma^2<\infty$

Atunci $\overline{X_n} \xrightarrow{P} \mu$

Versiunea Tare

$(X_n)_n$ v.a. i.i.d $E[|X_1|]<\infty$, $E[X_1]=\mu$

$\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} \mu$

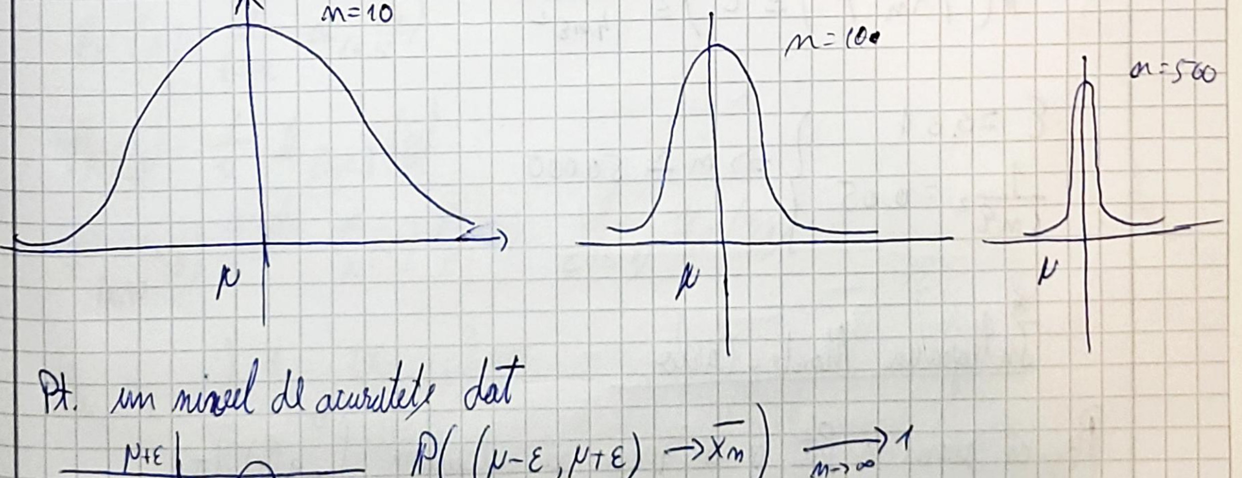
(slabă)

Dem Pt. $\varepsilon>0$

$P(|\overline{X_n}-\mu|\geq\varepsilon) \to 0$

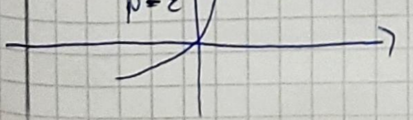
Inegalitatea Chebyshev

$$P(|\overline{X_n}-\mu|\geq\varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X_1})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$



Pt. un nivel de acuratețe dat

$P((\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon)\to\overline{X_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$



Exp: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p, $A \in \mathcal{F}$

Fie $X_i = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$ $\quad X_i \sim B(p)$

$p = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(A)$

$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ = frecvența relativă de apariție A în n. rep ale exp.

$\overline{X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} E[X_1] = \mathbb{P}(A)$

Exp: Fie p. procentul din pop. care votează cu A.

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim B(p)$ indep.

$p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

$p - p^2 - \frac{1}{4} \leq 0$

$-p^2 + p - \frac{1}{4} \leq 0$

$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ $\quad$ p - necunoscut

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X_1)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

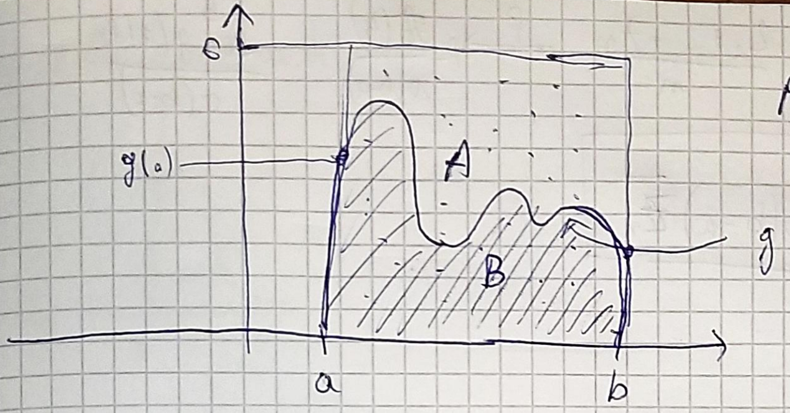
$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon = 0.01 \\ \frac{1}{4n\varepsilon^2} = 0.05 \end{array}\right\} \Rightarrow n \simeq 50000$$

Integrarea Monte-Carlo

Pp. că avem o fct g și vrem să calculăm $\int_a^b g(x)\,dx$

Pp. că pe $[a,b]$ avem $0 \leq g(x) \leq c$

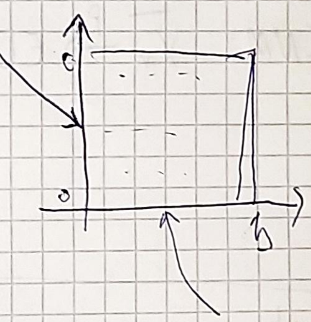


$A = [a,b] \times [0,c]$ - dreptunghi

$B = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le g(x)\}$

Generăm pct. unif $\epsilon(A)$

$(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n) \sim \mathcal{U}(A)$



$(X,Y) \sim \mathcal{U}(A)$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{A}(A)}, & (x,y) \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$\mathcal{A}(A) = c(b-a)$

$X \sim \mathcal{U}([a,b])$

$Y \sim \mathcal{U}([a,c])$ indep.

$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

$f_Y(y) = \frac{1}{c} \mathbb{1}_{[a,c]}(y)$

$f_{(X,Y)}(x,y) \overset{\text{indep}}{=\!=} f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{c(b-a)} \mathbb{1}_A(x,y)$

Fie $Z_i = \begin{cases} 1, & (X_i, Y_i) \in B \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$, $Z_i \sim \mathcal{B}(p)$

$p = \mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}((X_i, Y_i) \in B)$

$= \iint_B f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = \frac{\mathcal{A}(B)}{\mathcal{A}(A)}$

Din LNM i $\overline{Z_n} = \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow{P} p = \frac{\mathcal{A}(B)}{c(b-a)} = \frac{\int_a^b g(x)dx}{c(b-a)}$

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx \simeq c(b-a)\overline{Z_n}}$$

Vr 2

Fie $U_1, U_2, \dots, U_n \sim \mathcal{U}[a,b]$ ... ind.

$X_1 = g(U_1), \ X_2 = g(U_2) \dots \ X_n = g(U_n)$ i.i.d.

LNM: $\overline{X_n} \xrightarrow{P} E[X_1] = E[g(U_1)]$

$$= \int g(x) f_{U_1}(x)dx$$

$$= \int g(x) \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$$

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx \simeq (b-a) \cdot \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}}$$

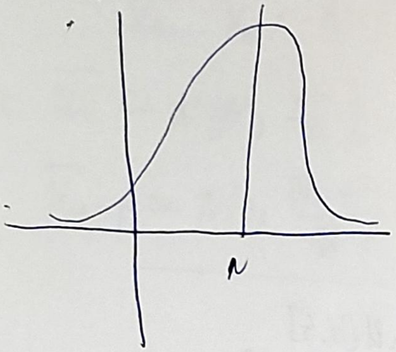
$$\boxed{\begin{gathered}\int_a^b g(x)dx \simeq (b-a) \cdot \frac{g(U_1) + \dots + g(U_n)}{n} \\ U_i \sim \mathcal{U}[a,b]\end{gathered}}$$

Th Limită Centrală (TLC)

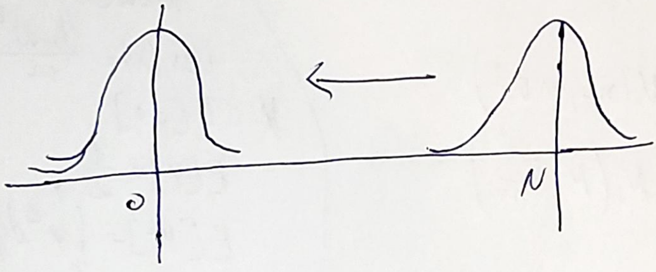
Din LNM $\overline{X_n} \xrightarrow{P} E[X_1]$

Fie $X_1 \dots X_n$ v.a. iid $E[X_1] = \mu$, $Var(X_1) = \sigma^2$

Transf. de locație și de scală



$X - E[X]$



$$Var\left(\frac{X-E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right) = 1$$

$$Z = \frac{X-E[X]}{\sqrt{Var(X)}}$$ – z scor
var. normalizată

$$Z_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n - E[X_1+\dots+X_n]}{\sqrt{Var(X_1+\dots+X_n)}}$$

$$= \frac{X_1+\dots+X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$ – variabila de scor
var. normalizată

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$$

(T) (Teorema Limită Centrală)

Fie $(X_n)_n$ un șir v.a. i.i.d de medie $E[X_i]=\mu<\infty$, $Var(X_i)=\sigma^2<\infty$. Atunci

$$\lim_n P(Z_n \le x) = \Phi(x), \forall x$$

unde $Z_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma}$, $\Phi(x) = \int_{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (fct. de rep. a normalei $\sim N(0,1)$)

Obs: $X_1, X_2, \dots, X_n$, $E[X_1]=\mu$, $Var(X_1)=\sigma^2$, $S_n = X_1+\dots+X_n$

$$P(S_n \le c) = P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \le \frac{c - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}}\right)$$

$$= P\left(Z_n \le \frac{c - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{c-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Pt. n suficient de mare

$$\begin{cases} S_n \simeq N(n\mu, n\sigma^2) \\ \bar{X}_n \simeq N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \end{cases}$$

$X \sim U[a,b]$

$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$Y \sim U[0,1]$

$E[Y] = \frac{1}{2}$

$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}$

$Var(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$X = a + (b-a)Y$

Exp: 100 pachete

$U([5,50])$

Care este prob ca greutatea totală ≥ 3000 Kg?

Fie $X_1, \dots, X_{100} \sim U([5,50])$ (greutățile pachetelor)

$S_{100} = X_1 + \dots + X_{100}$ greutatea totală

$$P(S_{100} \ge 3000) = P\Bigg(\underbrace{\frac{S_{100} - E[S_{100}]}{\sqrt{Var(S_{100})}}}_{Z_{100} \sim N(0,1)} \ge \frac{3000 - E[S_{100}]}{\sqrt{Var(S_{100})}}\Bigg) \overset{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{3000 - E[S_{100}]}{\sqrt{Var(S_{100})}}\right)$$

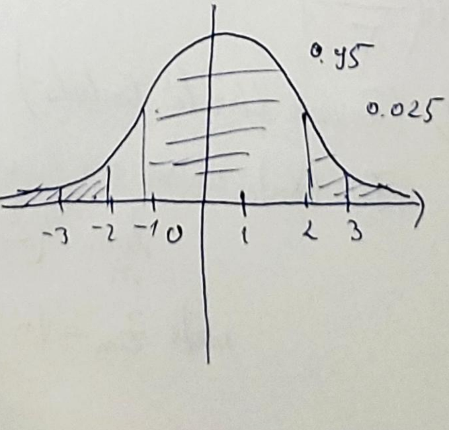
$E[S_{100}] = 100\, E[X_1] = 100 \cdot \frac{55}{2} = 27.5 \cdot 100 = 2750$

$Var(S_{100}) = 100\, Var(S_1) = 100 \cdot \frac{(50-5)^2}{12} = 16875$

$$P(S_{100} \ge 3000) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{3000 - 2750}{\sqrt{16875}}\right)$$

$$\simeq 1 - \Phi(1.92) = 0.0274$$

1-pnorm(1.92)



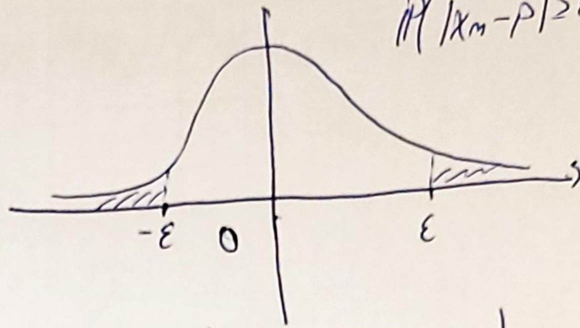
Exp: p pe A în populație

$X_1, \dots, X_n \sim B(p)$

TLC: $\overline{X_n} \simeq N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$\overline{X_n} - p \simeq N\left(0, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$P(|\overline{X_n} - p| \geq \varepsilon)$



$P(|\overline{X_n} - p| \geq \varepsilon) \simeq 2P(\overline{X_n} - p \geq \varepsilon)$

din simetrie

(P) $\overline{X_n} - p \simeq N\left(0, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$$P(|\overline{X_n} - p| \geq \varepsilon) \simeq 2P(\overline{X_n} - p \geq \varepsilon)$$

$$\simeq 2P\left(\frac{\overline{X_n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

$$\overset{TLC}{=} 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)\right) \leq 2(1 - \Phi(2\varepsilon\sqrt{n}))$$

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4n}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq 2\varepsilon\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \geq \Phi(2\varepsilon\sqrt{n})$$

$$P(|\overline{X_n} - p| \geq \varepsilon) \leq \underbrace{2(1 - \Phi(2\varepsilon\sqrt{n}))}_{0.05}$$

$\varepsilon = 0.01$

$2(1 - \Phi(2\varepsilon\sqrt{n})) = 0.05$

$\varepsilon = 0.01$

$$\Rightarrow \Phi(2 \times 0.01\sqrt{n}) = 0.975$$

$$2 \times 0.01\sqrt{n} = \underbrace{\Phi^{-1}(0.975)}_{\simeq 2}$$

$\sqrt{n} \simeq 100$

$n \simeq 10000$