(4) $\vec{AD}=(0,1,k-1)$

若D与ABC共面

则 $(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}=0$

$\Rightarrow 5\times0+1\times(-1)+5\times(k-1)=0$

$\Rightarrow k=\frac{6}{5}$

习题 8-4

20(2)

所求平面与平面 $x-y+2z+1=0$ 拥有相同的法向量 $\vec{n}=(1,-1,2)$，又所求平面过 $(2,-1,3)$

∴所求平面方程为：$(x-2)-(y+1)+2(z-3)=0$

一般式为 $x-y+2z-9=0$

(3) 令 $A(4,2,1)$，$B(-1,-2,2)$，$C(0,4,-5)$

$\vec{AB}=(-5,-4,1)$ $\vec{AC}=(-4,2,-6)$

取法向量 $\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&-4&1\\-4&2&-6\end{vmatrix}$

$=22\vec{i}-34\vec{j}-26\vec{k}=(22,-34,-26)$

∴所求平面方程为

$22(x-4)-34(y-2)-26(z-1)=0$

$22x-88-34y+68-26z+26=0$

一般式为 $11x-17y-13z+3=0$

(5) 设所求平面方程为

$ax+by+cz+d=0$ 所求平面法向量 $\vec{n_1}=(a,b,c)$，平面 $2x+3z=5$ 的法向量 $\vec{n_2}=(2,0,3)$ ∵ $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$

又所求平面过 $(1,2,3)$ 和 $(-1,-2,-3)$

$$\therefore\begin{cases}2a+3c=0\\a+2b+3c+d=0\\-a-2b-3c+d=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}d=0\\a=6t\\b=3t\\c=-4t\end{cases}\quad(t\in R)$$

$\Rightarrow 6tx+3ty-4tz=0$

∴所求平面方程为：

$6x+3y-4z=0$

23. $\vec{OM}=(2,1,-1)$ 即为平面π的一个法向量，又平面π过M点

∴平面π的方程为：

$2(x-2)+(y-1)-(z+1)=0$

$\Rightarrow 2x+y-z-6=0$

24 (3)

该平面的法向量 $\vec{n}=(1,1,2)$ 即为所求

扫描全能王 创建

直线的一个方向向量 $\vec{u}$ 又直线过原点

$\therefore \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z}{2}$

$\Rightarrow$ 直线方程为：$x=y=\frac{z}{2}$

(4) 两个平面的法向量分别是

$\vec{n_1}=(1,-1,1)$ 和 $\vec{n_2}=(1,1,-1)$

设直线的方向向量 $\vec{u}=(a,b,c)$

$\therefore \begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{n_1}=a-b+c=0\\ \vec{u}\cdot\vec{n_2}=a+b-c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\ b=t\\ c=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

或者算 $\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ 得到 $\vec{u}$

取 $\vec{u}'=(0,1,1)$，又直线过点 $(2,0,1)$

$\Rightarrow$ 直线方程为 $\begin{cases}x=2\\ y-z+1=0\end{cases}$

(5) $2x+3y-z+8=0$

$\begin{cases}\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x=4\\ y=-3\\ z=7\end{cases}$

$\therefore$ 所求直线过点 $(4,-3,7)$，又直线过点 $(-1,-2,0)$

$\therefore$ 直线方程为 $\frac{x-4}{x+1}=\frac{y+3}{y+2}=\frac{z-7}{z}$

化简得 $\frac{x+1}{5}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{7}$

25. $\begin{cases}5x+y+z=0 & ①\\ 2x+3y-2z+5=0 & ②\end{cases}$

设直线方向为 $\vec{u}$，知 $\vec{u}$ 与平面① 和平面②的法向量 $\vec{n_1}=(5,1,1)$ 和 $\vec{n_2}=(2,3,-2)$ 垂直

$\therefore$ 可取 $\vec{u}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&1&1\\2&3&-2\end{vmatrix}$

$=-5\vec{i}+12\vec{j}+13\vec{k}$

在直线上取一点 (x_0,y_0,z_0) 令 $x_0=0$

则 $\begin{cases}y_0=-1\\ z_0=1\end{cases}$ $\therefore$ 直线过点 $(0,-1,1)$

$\therefore$ 该直线的点向式方程为：

$\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$

令 $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}=t$ 可得参数式方程：

$\begin{cases}x=-5t\\ y=12t-1\\ z=13t+1\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

27. $\begin{cases}3x+z=6 & ①\\ y+2z=0 & ②\end{cases}$ 记为 L_1

设直线方向为 $\vec{u}$，知 $\vec{u}$ 与平面①和平面②的法向量 $\vec{n_1}=(3,0,1)$ 和 $\vec{n_2}=(0,1,2)$ 垂直.

可取 $\vec{u}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k\\ 3&0&1\\0&1&2\end{vmatrix} = -\vec i-6\vec j+3\vec k$

$=(-1,-6,3)$

令 $\vec n=\vec u\times(0,0,1)=(-6,1,0)$

取直线上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$

令 $z_0=0 \Rightarrow \begin{cases}x_0=2\\ y_0=0\end{cases}$ ∴ $P_0(2,0,0)$

再取z轴上一点 O:(0,0,0) 距离 $d=\frac{|\vec n\cdot\vec{OP_0}|}{|\vec n|}=\frac{12\sqrt{37}}{37}$

~~设z轴上一点 $Q(0,0,a)$~~ $\vec{P_0Q}=(-2,0,a)$

~~则点Q到该直线的距离~~

$\cancel{d=\frac{|\vec{P_0Q}\times\vec u|}{|\vec u|}}$

~~其中 $\vec{P_0Q}\times\vec u=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\-2&0&a\\-1&-6&3\end{vmatrix}=6a\vec i+(6-a)\vec j+12\vec k$~~

~~$|\vec u|=\sqrt{1+36+9}=\sqrt{46}$~~

~~∴ $d=\frac{1}{\sqrt{46}}\sqrt{36a^2+a^2-12a+36+144}$~~

~~$=\frac{1}{\sqrt{46}}\sqrt{37a^2-12a+180}$ (a取$\frac{6}{37}$时取等)~~

~~$\geq\frac{1}{\sqrt{46}}\sqrt{180-\frac{144}{37\times4}}=\frac{12\sqrt{37}}{37}$~~

∴该直线与z轴之间的距离为 $\frac{12\sqrt{37}}{37}$

3°. 设过该直线的平面束方程为

$\lambda(x+2y-2z-5)+(5x-2y-z)=0$

$\Rightarrow(\lambda+5)x+(2\lambda-2)y-(2\lambda+1)z-5\lambda=0$

平面束的法向量 $\vec{n_1}=(\lambda+5,2\lambda-2,-2\lambda-1)$

zOx平面的法向量 $\vec{n_2}=(0,1,0)$.

(因 $x+2y-2z-5=0$ 平面不与zOx垂直，故只设参数λ)

∵所求平面与zOx平面垂直

∴ $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$

∴ $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=2\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=1$

∴所求平面的方程为

$6x-3z-5=0$

2. 直接看后面方法二比较直接

$L_2: \begin{cases}x=1+t\\ y=2\\ z=3-t\end{cases}$ $\xRightarrow{消去t}$ $\frac{x-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$, $\begin{cases} \\ y=2\end{cases}$

∴L_2的方向向量 $\vec{u_2}=(1,0,-1)$

L_1的方向向量 $\vec{u_1}=(2,1,1)$

设L_2上一点 $Q_0(1+t_0,2,3-t_0)$

取L_1上一点 $P_0(0,2,1)$

则点Q_0到L_1的距离

$d=\frac{|\vec{P_0Q_0}\times\vec{u_1}|}{|\vec{u_1}|}$

其中 $\vec{P_0Q_0}\times\vec{u_1}=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1+t_0&0&2-t_0\\2&1&1\end{vmatrix}$

$=(t_0-2)\vec i+(3-3t_0)\vec j+(1+t_0)\vec k$

$|\vec{u_1}|=\sqrt6$

∴ $d=\frac{1}{\sqrt6}\sqrt{11t_0^2-20t_0+14}$

$\geq\frac{1}{\sqrt6}\sqrt{14-\frac{400}{44}}$. $t_0=\frac{10}{11}$时取等

∴所求公垂线L_3必过$Q_0(\frac{21}{11},2,\frac{23}{11})$

设公垂线之方向向量$\vec{u_3}=(1,b,c)$

∵$L_1\perp L_3$，$L_2\perp L_3$

∴$\vec{u_1}\perp\vec{u_3}$，$\vec{u_2}\perp\vec{u_3}$

∴$\begin{cases}\vec{u_1}\cdot\vec{u_3}=2+b+c=0\\ \vec{u_2}\cdot\vec{u_3}=1-c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1\\ b=-3\end{cases}$

∴$\vec{u_3}=(1,-3,1)$

∴所求公垂线L_3之方程为(点向式)

$$\frac{x-\frac{21}{11}}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-\frac{23}{11}}{1}$$

方法二：

公垂线的方向向量为$\vec{u_1}\times\vec{u_2}=(-1,3,-1)$ 记为$\vec{l}$

现在求过直线L_1且平行于$\vec{l}$的平面π_1：

π_1的法向量 $\vec{n_1}=\vec{u_1}\times\vec{l}=(-4,1,7)$

所以π_1：$-4x+y+7z-9=0$

同理可求得过L_2且平行于$\vec{l}$的平面π_2：

$3x+2y+3z-16=0$

所以公垂线：$\begin{cases}-4x+y+7z-9=0\\ 3x+2y+3z-16=0\end{cases}$