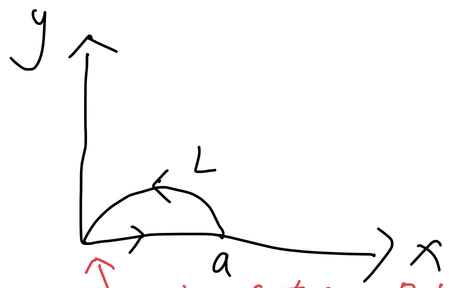
12. (2) $=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D 0\,dxdy = 0$ （注意这题dy在前面，坑的一B）

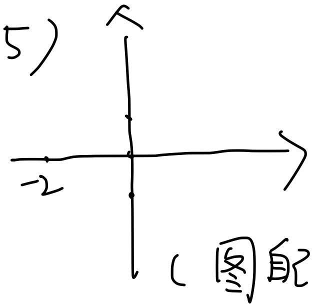
(3)



$\oint_L = \iint_D 0\,dxdy = 0$

注意这个直径也是L的一部分

(5)

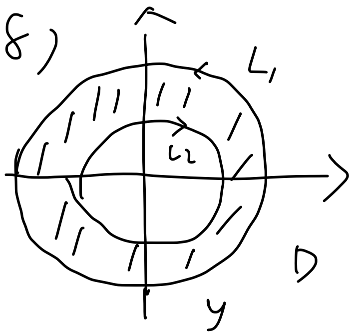


（图自脑补）

令 $x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$　　边界: $r=1-\cos\theta$

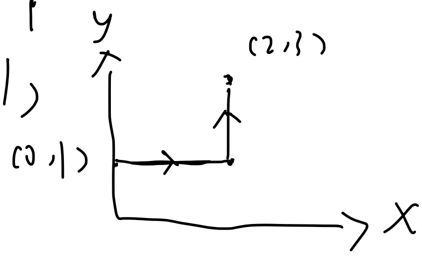
$$\oint_L = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1-\cos\theta} r\,dr$$
$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta = 3\pi$$

(8)



$$\oint_{L_1+L_2} = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 3\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$
$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^3 r^2\cdot r\,dr$$
$$=120\pi$$

13. (1)



选取如图的路径.

原式 $=\int_0^2(x+1)dx+\int_1^3(2-y)dy = 4$

(2) 选取 $(1,1,3)\xrightarrow{\text{直线}}(0,1,3)\xrightarrow{\text{直线}}(0,1,1)$

原式 $=\int_1^0 3\,dx + \int_3^1 0\,dz = -3$

14. (2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x - 2x\sin y = \frac{\partial P}{\partial y}$ 且处处连续，所以积分与路径无关 （$\mathbb{R}^2$是单连通的）

$$u(x,y) = \int_{\substack{(x_0,y_0)\to(x,y_0)\\ \text{直线}}} + \int_{\substack{(x,y_0)\to(x,y)\\ \text{直线}}} = \int_{x_0}^{x} 2x\cos y_0 + y_0^2\cos x\,dx + \int_{y_0}^{y} 2y\sin x - x^2\sin y\,dy$$
$$= (x^2-x_0^2)\cos y_0 + y_0^2(\sin x - \sin x_0) + (y^2-y_0^2)\sin x + x^2(\cos y - \cos y_0)$$
$$= x^2\cos y + y^2\sin x - x_0^2\cos y_0 - y_0^2\sin x_0$$

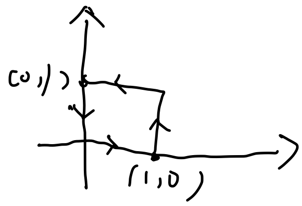
例11.4.8

即 $u(x,y) = x^2\cos y + y^2\sin x + C$

17. (2) $\vec{F}=(P,Q)=(y,\ xy-x)$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=y-1$, $\frac{\partial P}{\partial y}=1$, 两者不等.

所以 $\vec{F}$ 不是保守场. 取 L 为如图的正方形

用 Green 公式, $\oint \vec{F}\cdot d\vec{s}$ 显然不为0



18. (1) $=\int_0^{\pi}\sin t(-\sin t)dt+\int_0^{\pi}e^t\cos t\,dt+\int_0^{\pi}e^{2t}\sin t\,dt$

$=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1-e^{\pi})+\frac{1}{5}(1+e^{2\pi})=\frac{1}{5}e^{2\pi}-\frac{1}{2}e^{\pi}-\frac{\pi}{2}-\frac{3}{10}$

(2) L: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{e^{\pi}-1}$

$\int_L y\,dx+z\,dy+yz\,dz=0$ (因为 $y=0$)

22. (1) $\frac{\partial Q}{\partial x}=0=\frac{\partial P}{\partial y}$ 且处处连续, 所以是保守场. $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+C$

(4) $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos xy-x^2y\sin xy=\frac{\partial P}{\partial y}$ 且处处连续, 所以是保守场

设原函数为 u, 那么 $\frac{\partial u}{\partial y}=Q=x^2\cos xy$, 所以 $u(x,y)=x\sin xy+f(x)$

$P=\sin xy+xy\cos xy=\frac{\partial u}{\partial x}=\sin xy+xy\cos xy+f'(x)$

所以 $f'(x)=0\Rightarrow f(x)=C$, 所以 $u(x,y)=x\sin xy+C$

(当然也可以像14题(2)那样求)

例11.4.8 在区域为单连通的条件下, 要说明一个场 (P,Q) 是保守场, 只需验证它满足定理11.4.2的命题(3)或(4)

23. (2) 在右半平面过(1,0)和(6,8)的任一闭合曲线内,

$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\int_{(1,0)}^{(6,8)}=\int_{\substack{(1,0)\to(6,0)\\ \text{直线}}}+\int_{\substack{(6,0)\to(6,8)\\ \text{直线}}}=\int_1^6 1\,dx+\int_0^8\frac{y}{\sqrt{y^2+36}}dy$

$=5+\sqrt{y^2+36}\Big|_0^8=9$

24. (2) $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4x^2+y^2-x(8x)}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2}$. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-4x^2-y^2+2y^2}{(\quad)^2}=\frac{-4x^2+y^2}{(\quad)^2}$

$\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 但由于 (0,0) 在 L 围成的区域内, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 (0,0) 不连续, 所以不能用 Green 公式

$\Downarrow$

方法一：取 L'：$4x^2+y^2=1$，由定理11.4.5，可得

$$\oint_L = \oint_{L'} = \oint_{L'} x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos^2\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \pi$$

方法二：令 $u = \arctan\frac{y}{2x}$

那么 $\frac{1}{2}du = \frac{x\,dy - y\,dx}{4x^2+y^2}$，所以 $\oint_L = \frac{1}{2}\oint_L du$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

（想象一下 $\frac{y}{2x}$ 的意义，它是斜率的一半，那么它的变化范围当然是从 $-\infty$ 到 $+\infty$，再从 $-\infty$ 到 $+\infty$，那么 $\arctan\frac{y}{2x}$ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$，再从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$）

参考例11.4.7，例11.4.12，例11.4.13.