习题 8.5

36

(1) 曲线绕z轴旋转：

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

曲线绕y轴旋转：

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{c^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$

37 曲线上任一点M由直线上某点M_0旋转而得，设$M(x,y,z)$、$M_0(x_0,y_0,z_0)$

$\therefore y_0=y$，$x^2+z^2=x_0^2+z_0^2$

直线方程可化为 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t \\ z=2t+3 \end{cases}$

令$y_0=-t_0$，则$x_0=t_0+1$，$z_0=2t_0+3$

$$\therefore x^2+z^2=x_0^2+z_0^2$$
$$=t_0^2+2t_0+1+4t_0^2+12t_0+9$$
$$=5t_0^2+14t_0+10$$
$$=5y^2-14y+10$$

$\therefore$ 所求旋转曲面之方程为：

$$x^2+z^2=5y^2-14y+10$$

40.

由题意即求柱线到zOx平面之投影柱面

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 ① \\ x+y+z=0 ② \end{cases}$ 从方程中消去y

由②式知$y=-x-z$，代入①式得

$$x^2+x^2+2xz+z^2+z^2=4$$

$\Rightarrow x^2+xz+z^2=2$ 即为所求柱面方程

41.

(1) 到xOy平面之投影曲线方程

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 ① \\ z=\sqrt{x^2+y^2} ② \end{cases}$ 方程中消去z

$$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$$

$\therefore$ 所求曲线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{a^2}{2} \\ z=0 \end{cases}$

(2) 到yOz平面之投影曲线方程

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 ① \\ z=\sqrt{x^2+y^2} ② \end{cases}$ 方程中消去x

$\Rightarrow z^2-y^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow z=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ 所求曲线方程为：

$\begin{cases} z=\frac{|a|}{\sqrt{2}} \\ x=0 \end{cases}$ 由于 $\frac{a^2}{2}=x^2+y^2$ $\therefore y\in[-\frac{|a|}{\sqrt{2}},\frac{|a|}{\sqrt{2}}]$

15. 已知直线的方向向量 $\vec{u}=(2,2,-1)$，过顶点 $A(1,2,3)$

设圆锥面上的一点 $M(x,y,z)$

$\vec{AM}=(x-1,y-2,z-3)$

$\vec{AM}$ 与 $\vec{u}$ 之间的夹角为 $\frac{\pi}{6}$（钝角的话是 $\frac{5\pi}{6}$）

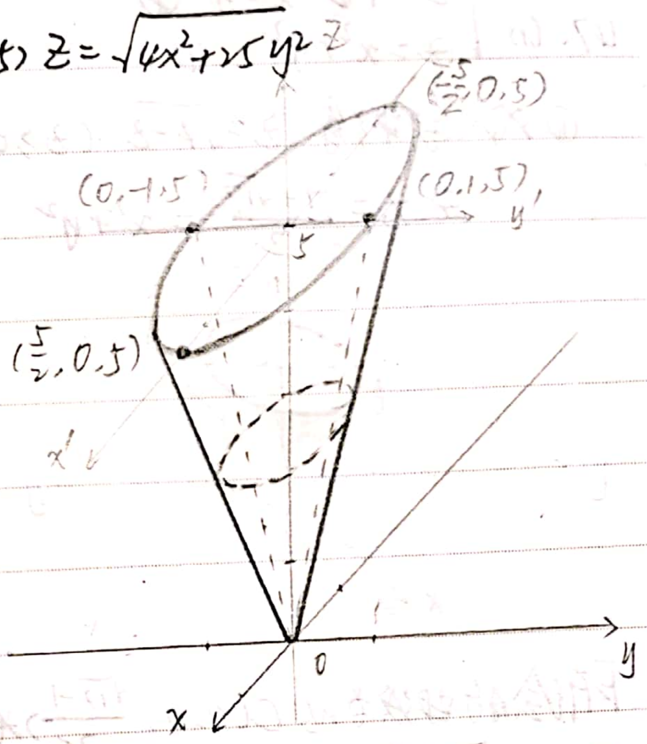
$\therefore |\cos\langle\vec{AM},\vec{u}\rangle|=\left|\frac{\vec{AM}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}||\vec{AM}|}\right|$

$$=\left|\frac{2x-2+2y-4-z+3}{3\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow 11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz$

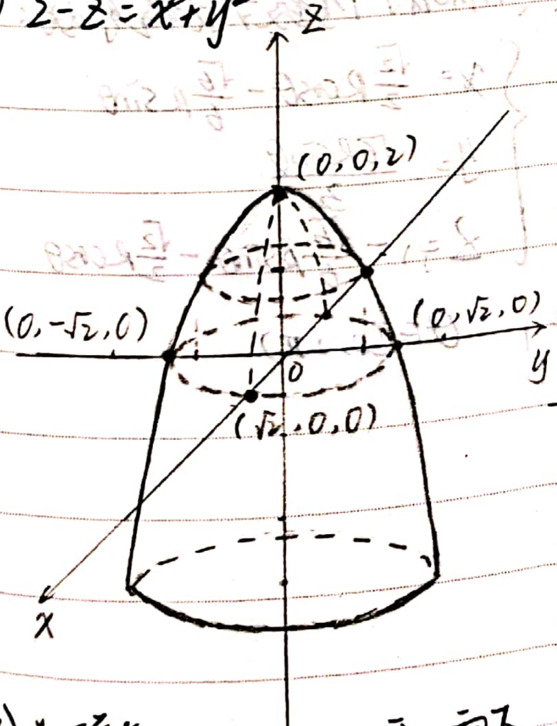
$-6x-60y-186z+342=0$

(5) $z=\sqrt{4x^2+25y^2}$



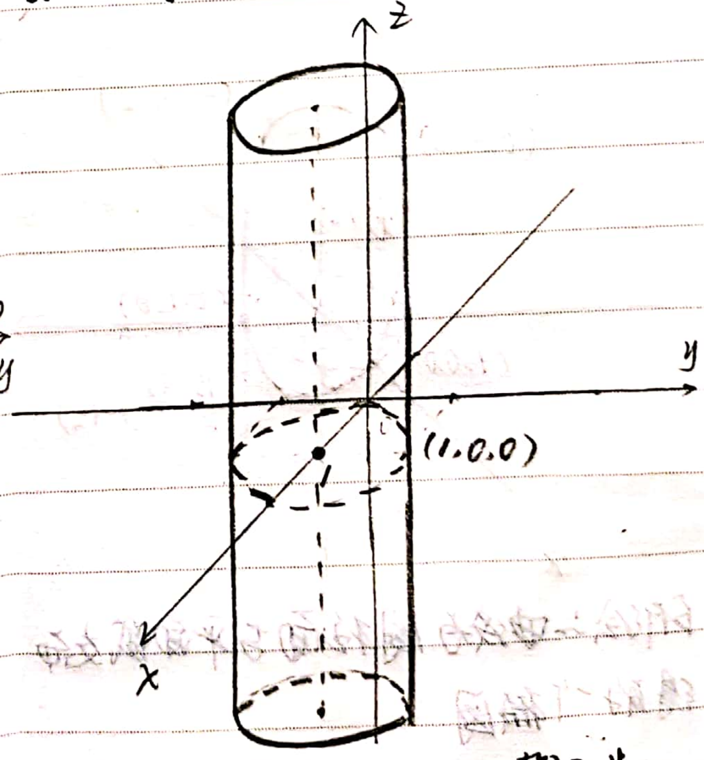
所绘为顶点为 $(0,0,0)$ 的上半个椭圆锥面

46.(5) $2-z=x^2+y^2$



所绘为顶点为 $(0,0,2)$，开口向下的旋转抛物面

(6) $x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

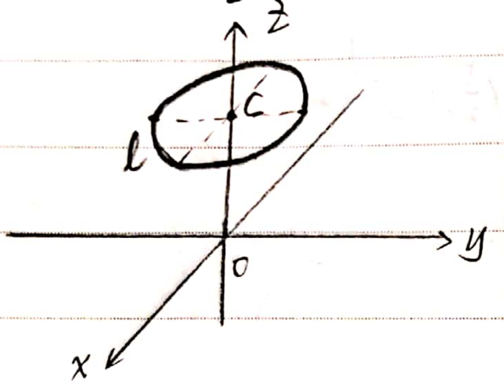


所绘为以 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 为中心轴，截面半径为1的圆柱面

47. (1) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} & ② \\ z=x^2+y^2 & ① \end{cases}$

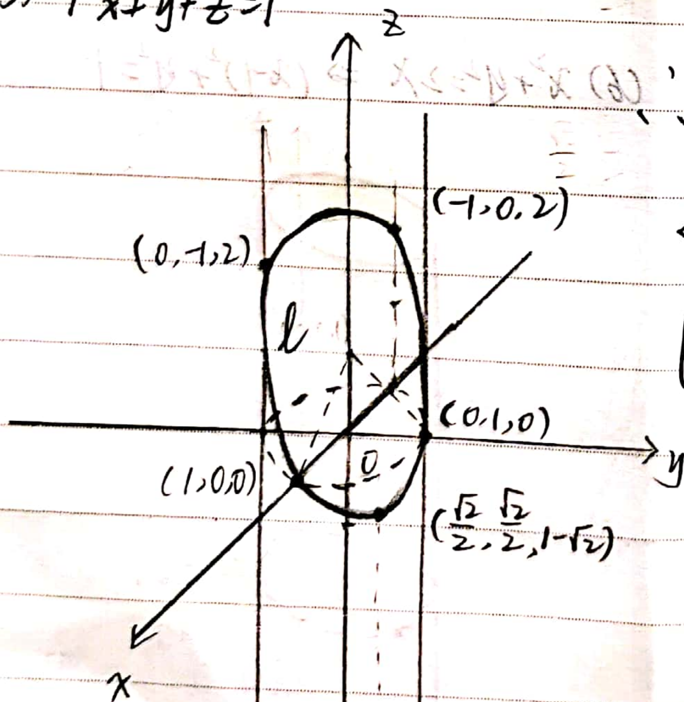
①代入②中得 $z=\sqrt{4-z}$ $(z\geq 0)$

$$\Rightarrow z=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}=x^2+y^2$$



所绘的曲线为以 $C(0,0,\frac{\sqrt{17}-1}{2})$ 为圆心，$\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ 为半径的圆周

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$



所绘之曲线为圆柱面与平面截交而得的一个椭圆

4). $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 & ① \\ x+y+z=0 & ② \end{cases}$

②代入①中得

$$2x^2+2xy+2y^2=R^2$$

$$\Rightarrow 2(x^2+xy+\frac{y^2}{4})+\frac{3}{2}y^2=R^2$$

$$\Rightarrow 2(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{2}y^2=R^2$$

令 $\begin{cases} \sqrt{2}(x+\frac{y}{2})=R\cos\theta \\ \sqrt{\frac{3}{2}}y=R\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{6}R\sin\theta}{3}$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{6}R\sin\theta$$

$$z=-x-y=-\frac{\sqrt{6}}{6}R\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta$$

∴所求的参数式方程可以为：

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{6}R\sin\theta \\ y=\frac{\sqrt{6}R\sin\theta}{3} \\ z=-\frac{\sqrt{6}}{6}R\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta \end{cases}$$

$\theta\in[0,2\pi)$