积分计算方法

1. 换元法

根本原则：边界对应边界

- 极坐标变换

我们采取 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 的换元方式，求得 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ ；对三重积分来说，引入 $z = z$ 即是柱坐标变换，由于原理是一致的（并且雅克比行列式也相等），我们不再赘述。

例 1

计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，$D: x^2+y^2 \le x+y$

解：

作换元

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

此时极坐标曲线转化为

$$r = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{1}{4}\pi), -\frac{1}{4}\pi \le \theta \le \frac{3}{4}\pi$$

积分得

$$I = \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta+\cos\theta} r\mathrm{d}r = \frac{8}{9}\sqrt{2}$$

例 2

计算曲面 $z^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ 和 $2z = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ 围成的图形体积

解：

作换元

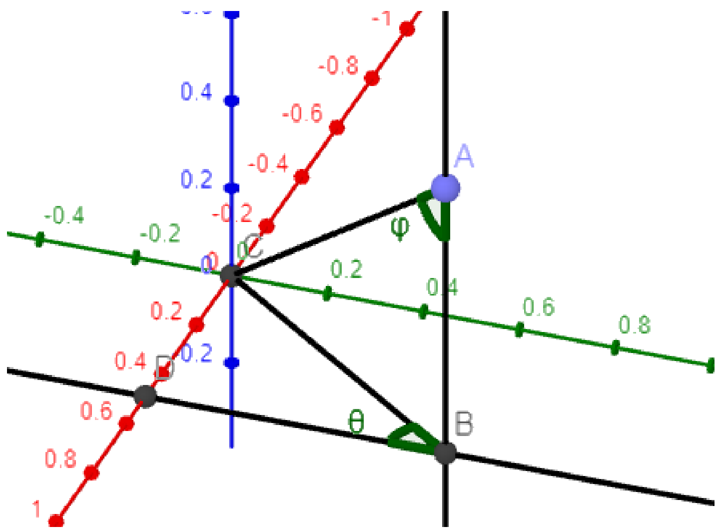
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \\ z = z \end{cases},\ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = 2r$$

此时利用边界确定积分限，注意到 z 的边界值为 $z=r$ 和 $z=\dfrac{r^2}{2}$ ，则

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 2r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{r}\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^2 2r(r-\frac{r^2}{2})\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\pi$$

- 球坐标变换

球坐标变换涉及两个角度参数，在确定参数范围的时候往往需要借助空间作图。我们以如下的坐标变换为例，此时 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ ，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$



例 1

计算积分 $I=\iiint_D \dfrac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，其中 D 由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 和平面 $z=0$ 围成，曲面在平面上方

解：

作球坐标换元，边界为 $r^2=a^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta$ ，注意到关于 z 的对称性和 r^2 的非负性

我们有 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ，从而

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}r^3\mathrm{d}r=\frac{a^4}{144}$$

- 正交变换

正交变换在解析几何中使用较多，它仅仅旋转坐标轴而保持区域体积不变。对可对角化的矩阵 A ，存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，（至于为什么，这是高等代数证明的问题）

例 1

计算 $I=\iint_D e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 $D=\{(x,y)|x\ge0,y\ge0\},\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 是常数

解：

先写出矩阵 A ，并求其特征值

$$A=\begin{pmatrix}1&\cos\alpha\\\cos\alpha&1\end{pmatrix},\lambda_1=1+\cos\alpha,\lambda_2=1-\cos\alpha$$

求出分别对应的特征向量

$$\vec{v_1}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T,\vec{v_2}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})^T$$

该特征向量即是变换后的坐标轴，因此新的坐标系为 $D:-x\le y\le x,x\in[0,+\infty)$

此时代回积分

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}e^{-(\lambda_1x^2+\lambda_2y^2)}\mathrm{d}y$$

引入一般形式的极坐标换元，可得

$$I=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

2. 参数方程 & 积分“求导”

- 参数方程

涉及参数方程的问题，一般将其中一个变量先看作整体表示积分上限，再代入参数化简。

例 1

计算 $I = \iint_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，$D = \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

解：

将 $y = y(t)$ 视为整体，则

$$I = \int_0^{2\pi a} \mathrm{d}x \int_0^y y^2 \mathrm{d}y$$

代入 $\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\mathrm{d}t$ 可得

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 (1 - \cos t)^3 \cdot a(1 - \cos t)\mathrm{d}t = \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u \mathrm{d}u = \frac{35}{12}\pi$$

- 积分“求导”问题

对单变量积分，我们有变限积分求导公式。但对重积分，这样的计算多少会有一些困难。通过换元或者引入含参积分，可以解决一部分这类问题。

例 1

设 f 是连续可导的单变量函数，令 $F(t) = \iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，$D = [0, t] \times [0, t]$

（1）证明： $F'(t) = \frac{2}{t}(F(t) + \iint_D xyf'(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

（2）证明： $F'(t) = \frac{2}{t} \int_0^{t^2} f(s)\mathrm{d}s$

解：

（1）作换元 $x=tu,y=tv$ ，则 $D'=[0,1]\times[0,1]$

由于积分和求导可以换序，所以

$$F'(t)=2t\iint_{D'}f(t^2uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+t^2\iint_{D'}2uvf'(t^2uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

再反向换元即可。

（2）令 $s=xy$ ，则 $\mathrm{d}s=x\mathrm{d}y$ ， $F(t)=\int_0^t\frac{1}{x}\mathrm{d}x\int_0^{tx}f(s)\mathrm{d}s$

令 $g(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$, $g'(u)=f(u)$ ，则

$$F'(t)=\int_0^t\frac{1}{x}g(tx)\mathrm{d}x=\frac{1}{t}g(t^2)+\int_0^t\frac{1}{x}g'(tx)\mathrm{d}x$$

整理可得。

例 2

我们再次引入含参积分求导公式：

设 $f(x,t),\dfrac{\partial}{\partial t}f(x,t)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续， $\alpha(t),\beta(t)$ 在 $[c,d]$ 上可导，

则 $\varphi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 可导，且

$$\varphi'(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x$$

对一些二重积分，我们可以利用这种方式简化其“导数”。

设 $F(t)=\int_0^{t^2}\mathrm{d}x\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}y$ ，求 $F'(t)$

解：

令 $f(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}y$ ，则

$$F'(t)=2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4+y^2-t^2)\mathrm{d}y+\int_0^{t^2}[\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

其中

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}y\\=&\sin[x^2+(x+t)^2-t^2]-(-1)\cdot\sin[x^2-(x-t)^2+t^2]+\int_{x-t}^{x+t}(-2t)\cos(x^2+\\&y^2-t^2)\mathrm{d}y\\=&2\sin 2x^2\cos 2xt-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

3. 分部积分与等值线

- 分部积分公式

格林公式建立了曲线积分和重积分的联系，我们便可以以此建立二重积分的分部积分公式。

设 u,v 在 D 内有一阶连续偏导数， ∂D 是分段光滑的正向边界曲线，则

$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}y$$
$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D}uv\mathrm{d}x$$

证明：

（可以先不写吗？）

- 等值线

想象一座山，我们可以作出其等高线图，于是这座山就可以被“等高线”的延伸所描述。在积分计算中，二重积分和三重积分的积分区域，同样可以做“等值”处理，这就有了下面的计算公式。（以二重积分为例）

设函数 $f(x,y)$ 的等值线是简单封闭曲线， D 是由 $f(x,y)=t_1$ 和 $f(x,y)=t_2$ 围成的区域， $f(x,y)$ 在 D 上连续。记 $F(t)$ 是由等值线 $f(x,y)=t_1$ 和 $f(x,y)=t$ 围成区域的面积， $h(t),F'(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 存在且可积，则

$$\iint_D h(f(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{t_1}^{t_2}h(t)F'(t)\mathrm{d}t$$

接下来，我们来看一个问题的三种计算方法：

设 $f(x,y)$ 在 $D:x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$

证明： $\displaystyle\iint_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2e}$

解：

方法一：格林公式

利用极坐标变换，有

$$I=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(r\cos\theta f_x+r\sin\theta f_y)\mathrm{d}\theta$$

注意到 $\mathrm{d}x=-r\sin\theta\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}y=r\cos\theta\mathrm{d}\theta$ ，从而

$$\int_0^{2\pi}(r\cos\theta f_x+r\sin\theta f_y)\mathrm{d}\theta=\oint_{L_r}-f_y\mathrm{d}x+f_x\mathrm{d}y$$

其中 $L_r:x^2+y^2=r^2$ ，由格林公式

$$\oint_{L_r}-f_y\mathrm{d}x+f_x\mathrm{d}y=\iint_{D_r}f_{xx}+f_{yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi(1-e^{-r^2})$$

从而

$$I=\int_0^1\pi r(1-e^{r^2})\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2e}$$

方法二：分部积分公式

设 $u=f_x$ ，$v=x^2+y^2$ ，则由 $\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D} uv\mathrm{d}y-\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 知

$$\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_{\partial D} f_x(x^2+y^2)\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)f_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理

$$\iint_D y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\oint_{\partial D} f_y(x^2+y^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)f_{yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到边界 $\partial D: x^2+y^2=1$ ，则

$$I=\frac{1}{2}\oint_{\partial D} -f_y\mathrm{d}x+f_x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)(f_{xx}+f_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

计算可得

$$I=\frac{1}{2}\iint_D (1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2e}$$

方法三：等值线

考虑圆盘 $D_t: x^2+y^2\le t^2$ ，令 $h(t)=1, f(x,y)=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$

因此，我们考虑“延伸”，那么 t 的微小变化对应圆盘边缘的曲线积分，即

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}t\oint_{\partial D_t} x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}s=\int_0^1 t\mathrm{d}t\oint_{\partial D_t}(\frac{x}{t},\frac{y}{t})\cdot(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}s$$

其中 $\cdot$ 表示向量点乘，由 $(\frac{x}{t},\frac{y}{t})$ 是外法向量，考虑两类曲线积分的关系

记外法向量为 $\vec{n}$ ，则 $\frac{x}{t}=\cos(\vec{n},x)$ ，$\frac{y}{t}=\cos(\vec{n},y)$

故 $\mathrm{d}s\cos(\vec{n},x)=\mathrm{d}y$ ，$\mathrm{d}s\cos(\vec{n},y)=-\mathrm{d}x$ ，代入积分

$$I=\int_0^1 t\mathrm{d}t\oint_{\partial D_t} -\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y=\int_0^1 t\mathrm{d}t\iint_{D_t}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2e}$$

对等值线这一方法，我们再引入一个例题讲解。

例 2

设平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限围成几何体 V ，

计算 $I=\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解：

设 $x+y+z=t$ ，则 $f(x,y,z)$ 即是小三棱锥的体积 $\frac{1}{6}t^3$ ，$h(t)=\frac{1}{(1+t)^3}$

此时

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^3}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$$

读者可以自行计算正常方法所需要的计算量。当然也可以看出，怎么寻找等值线的位置也是比较关键的问题。