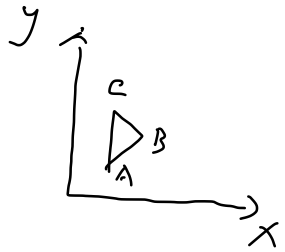
1.(1) $\int_L (x+y)^2 ds = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$



$= \int_1^2 (x+x)^2 \sqrt{2}\, dx + \int_1^2 (x+4-x)^2 \cdot \sqrt{2}\, dx$

$+ \int_1^3 (1+y)^2 dy$

$= \frac{28\sqrt{2}}{3} + 16\sqrt{2} + \frac{56}{3} = \frac{76\sqrt{2}+56}{3}$

(4) $\int_L (x^2+y^2) ds = a^2 \int_0^{2\pi} (1+t^2) \cdot a\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\, dt$

$= a^3 \int_0^{2\pi} t(1+t^2) dt = a^3(2\pi^2+4\pi^4)$

(8) 令 $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ 那么 $r^4 = a^2(r^2\cos^2 t - r^2\sin^2 t)$

$r = a\sqrt{\cos 2t}$ 由 $\cos 2t \geq 0$ 可得 $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$

根据对称性，原式 $= 4\int_{L^+} y\, ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2t}\sin t \sqrt{a^2\cos 2t + a^2\frac{\sin^2 2t}{\cos 2t}}\, dt$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin t\, dt = 4a^2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

(10) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 原式 $= \int_0^{2\pi} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sqrt{a^2 9\sin^2 t\cos^2 t}\, dt$

$= a^{\frac{7}{3}}\, 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3(\sin^4 t + \cos^4 t)\sin t\cos t\, dt$

这里用到这样一个结论：
若 $f(x,y) = f(y,x)$，那么
$\int_0^{2\pi} f(\sin^2 t, \cos^2 t) dt$
$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 t, \cos^2 t) dt$

$= 12a^{\frac{7}{3}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos t\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\sin t\, dt\right)$

$= 4a^{\frac{7}{3}}$

2.(1) 根据对称性 $\int_L x\, ds = \frac{1}{3}\int_L (x+y+z) ds = 0$

4.(1) $\rho(x,y,z)=\frac{1}{\pi b}|z|$

$m=\int_L \rho ds=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\pi}t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2}$ 质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

$a=\int_L x\rho ds=\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}a t\cos t\,dt=0$ $=(\frac{a}{m},\frac{b}{m},\frac{c}{m})$

$b=\int_L y\rho ds=\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}a t\sin t\,dt=-2a\sqrt{a^2+b^2}$ $=(0,-\frac{a}{\pi},\frac{4}{3}\pi b)$

$c=\int_L z\rho ds=\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}b t^2\,dt=\frac{8}{3}\pi^2 b\sqrt{a^2+b^2}$

5.(2) $I=\int_L(x^2+y^2)ds\underbrace{=\frac{2}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)ds}_{\text{对称性}}=\frac{2}{3}\cdot a^2\cdot 2\pi a=\frac{4}{3}\pi a^3$

8.(1) $L: x+y=\pi$

原式 $=\int_0^{\pi}\sin(\pi-x)dx+\int_0^{\pi}\sin x\,d(\pi-x)=0$

(3) 原式 $=\int_0^{2\pi}(2a-a(1-\cos t))\,a(1-\cos t)\,dt-\int_0^{2\pi}a\cos t\;a\sin t\,dt$

$=a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt-a^2\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt$

$=\pi a^2$

(5) $L: x=y=z=t$

原式 $=\int_0^1-3t^2dt+\int_0^1(2t-3t^2)dt+\int_0^1(1-4t^4)dt$

$=-1+0+\frac{1}{5}=-\frac{4}{5}$

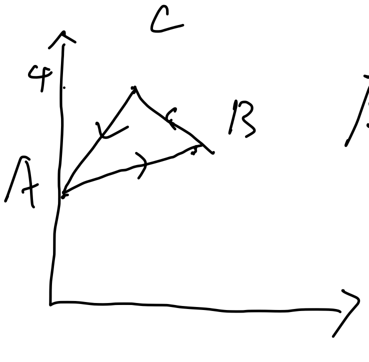
(8) $L:\begin{cases}x=x\\y=x^2\\z=x\end{cases}$ 原式 $=\int_0^1 e^x(x^2+x)dx+\int_0^1 2x\,dx+\int_0^1 dx$

$=e-1+1+1=e+1$

9.(1) $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t.\end{cases}$ 原式 $=\int_0^{2\pi}-(a\cos t+b\sin t)a\sin t\,dt+\int_0^{2\pi}(a\cos t-b\sin t)\cdot b\cos t\,dt$

$=ab\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt-(a^2+b^2)\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt$

$=0$

(2) 

原式 $=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}$

$=\int_0^2(\cos x-(\frac{1}{2}x+2)\sin x)dx+\int_0^2\cos x\cdot\frac{1}{2}dx$

$-\int_1^2\cos x-(5-x)\sin x\,dx+\int_1^2\cos x\,dx+$

$$-\int_0^1 \cos x-(2x+2)\sin x\,dx-\int_0^1 2\cos x\,dx$$

真TM难算、、、直接用Green公式吧，由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$，
所以积分是0

(5) 在所给曲线上，$|x|+|y|=1$，所以原式 $=\oint dx+dy=0$

(8) 令 $\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta \end{cases}$，并且 $x=\frac{a^2-z^2}{a}$，$z^2=a^2-ax$

$$\text{原式}=\oint_L (ax-x^2)dx+\int_0^{2\pi}\left(a^2-a\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta\right)\right)\frac{a}{2}\cos\theta\,d\theta+\oint_L\left(\frac{a^2-z^2}{a}\right)^2dz$$

$$=0+\frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi}(\cos\theta-\cos^2\theta)\,d\theta+0$$

$$=-\frac{a^3}{4}\pi$$

大家一定要想明白为啥这两个积分必定为0，但是中间的积分不一定为0？

以 $\oint_L (ax-x^2)dx$ 为例，记 $f(x)=ax-x^2$，这个积分等于 $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx$，（$\alpha$、$\beta$ 可以自己选取）$=0$（注意是闭合曲线）

但是对于 $\oint z^2dy$ 而言，z^2 不一定能写成某个 $f(y)$，所以它不具有另外两个积分那样的性质

10. $\vec{F}=(-y,x)$

(1) $\int_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_{L_1}-ydx+xdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}a^2$

(2) $\int_{L_2}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-a\sin^3t\,a\cdot 3\cos^2t(-\sin t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos^3t\,a\,3\sin^2t\cos t\,dt$

$=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{3}{16}\pi a^2$

(3) $\int_{L_3}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-a\sin^4t\,a\cdot 4\cos^3t(-\sin t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos^4t\,a\,4\sin^3t\cos t\,dt$

$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\cos^3t\,dt=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t(1-\sin^2t)\,d\sin t=\frac{a^2}{3}$