

## Devoir maison

**Exercice :**

On considère  $X$  une variable aléatoire dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\theta} & \text{si } x \in [0; \theta[ \\ \frac{1}{4\theta} & \text{si } x \in [\theta; 2\theta[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la fonction  $f$  ainsi définie est une fonction de densité.
2. Déterminer la fonction de répartition, notée  $F_X$ , associée.
3. Calculer l'espérance et la variance de  $X$  si elles existent.
4. Par la méthode des moments, déterminer un estimateur de  $\theta$ .
5. Cet estimateur est-il sans biais? Si non, en considérer une version sans biais et dans la suite, nous travaillerons avec la version sans biais.
6. A partir du jeu de données, donner une estimation de  $\theta$ .
7. Donner un intervalle de confiance pour  $\theta$ .
8. Par la méthode de simulation par inversion, simulez 5000 observations de la variable  $X$  en utilisant l'estimation trouvée précédente.
9. A l'aide de la règle de Sturge, réaliser une représentation graphique adaptée.
10. Vos simulations vous semblent-elles correctes?
11. Comment à partir de simulations estimer  $P(X \in [0.3; 0.6])$ ?
12. Donner une estimation du biais et de l'erreur quadratique de l'estimateur considéré.