TP

Exercice 1:

1. Aller voir l'aide en ligne de la fonction rnorm afin de savoir ce qui est donné en sorties des fonctions rnorm, dnorm, pnorm et qnorm
2. Sur une même fenêtre graphique, représenter la fonction de densité d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathcal{N}(-2,1)$ et $\mathcal{N}(3,1)$
3. Sur une même fenêtre graphique, représenter la fonction de densité d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathcal{N}(0,0.5)$ et $\mathcal{N}(0,5)$

Exercice 2:

1. Loi de $F_X(X)$
   (a) A l'aide du logiciel R, simulez 50 000 observations d'une loi $\mathcal{E}(4)$.
   (b) Calculer la fonction de répartition en chacun des points simulés.
   (c) Que pouvez-vous dire quant à la loi de ces nouvelles observations?
2. Méthode d'inversion
   (a) A l'aide de la méthode d'inversion de la fonction de répartition, simulez 10 000 observations d'une loi $\mathcal{E}(7)$.
   (b) Faire une représentation graphique de ces données et y superposez la fonction de densité d'une loi $\mathcal{E}(7)$.

Exercice 3:
On souhaite simuler des observations d'une variable aléatoire X de fonction de densité f en utilisant la méthode du rejet qui est la suivante :

- On suppose savoir simuler des observations d'une variable aléatoire Y de fonction de densité g satisfaisant :
$$\exists c > 0, \quad f \leq c.g$$
- On considère z une observation de Y.
  On considère u une observation d'une loi uniforme sur $[0;1]$.
  Si c.u.g(z) $<$ f(z) , alors on garde cette observation, sinon, on la supprime.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{e^{-x^2/2}}{2.\pi} \leq \sqrt{\frac{2.e}{\pi}}.\frac{e^{-|x|}}{2}$$

2. On pose $g(x) = \alpha.\frac{e^{-|x|}}{2}$. Trouver α de sorte que g soit une fonction de densité.
3. Montrer que pour simuler une observation selon la densité g , il suffit de considérer $z = t.y$ avec y une observation d'une loi exponentielle de paramètre 1 et t une observation d'une loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.
4. Utiliser le tout pour simuler 1000 réalisations d'une loi normale standard.
5. Utiliser une représentation graphique afin de confirmer la méthode.

Exercice 4:
Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre 2, toutes deux à deux indépedantes.
On pose
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
On pose $Y_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - 1/2}{1/2}$.

1. Faire une représentation de la loi de Y pour $n = 2$, $n = 20$ puis $n = 100$.
   Que constatez-vous?
2. Si vous remplacez la loi exponentielle par une loi uniforme sur $[0, 2]$ et Y par $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - 1}{\sqrt{1/3}}$, que se passe t'il?
3. Aurait-on pu travailler directement sur $\bar{X}_n$?

Exercice 5:
La planche de Galton est une planche verticale sur laquelle sont plantés des clous disposés en pyramide comme suit : 1 clou sur la 1ère ligne, 2 clous sur la seconde, 3 clous sur la 3ème et ainsi de suite jusque n clous sur la $n$ième ligne.
Des billes sont lâchées les unes après les autres à partir du sommet. A chaque clou rencontré, la bille a une probabilité p d'aller à gauche du clou et une probabilité $(1 - p)$ d'aller à droite du clou.
Sous la planche, les billes tombent dans $n + 1$ compartiments numérotés de 0 à n.

1. Que signifie concrètement l'événement "la bille dans le compartiment k" en termes de parcours de la bille depuis le sommet?
2. Ecrire un programme qui permet de visualiser l'évolution des effectifs de chaque compartiment (lors de la chute de billes les unes après les autres).
3. Comment estimer la probabilité associée à chaque compartiment lorsque $p = 1/2$?
4. Faire varier p. Expliquer le résultat obtenu sur les estimations des probabilités.