

# 1. Introducción

Tenemos como objetivo , una vez modelado el problema , realizar una simulación y contrastar los resultados de esta con la teoría relativa a este tipo de problemas:

## Lavadero de Coches

Un pequeño autoservicio de lavado en el que el coche que entra no puede hacerlo hasta que el otro haya salido completamente, tiene una capacidad de aparcamiento de 10 coches, incluyendo el que está siendo lavado. La empresa ha estimado que los coches llegan siguiendo una distribución de Poisson con una media de 20 coches/hora, el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial de 12 minutos. La empresa abre durante 10 horas al día. ¿Cuál es la media de coches perdidos cada día debido a las limitaciones de espacio?

Posee como variables:

1. la capacidad de el autoservicio.
2. la distribución con la que llegan los coches a el autoservicio.
3. la distribución con la que son atendidos los coches.
4. el tiempo que abre la empresa durante un día.
5. la forma en que son atendidos los coches una vez en el autoservicio.
6. media de coches perdidos cada día debido a las limitaciones de espacio.

# 2. Modelo Matemático

Primero hay que establecer una unidad de tiempo, por ejemplo, usar una Poisson con un rate de 20 llegadas por hora, sería equivalente a una cantidad  $\lambda = 20/60/60$  llegadas por segundo.

El problema puede ser modelado como una cadena de Markov donde los estados representan la cantidad de clientes en el lavado en un momento dado, para poder usar este modelo, es necesario que las probabilidades de ir de un estado  $i$  a un estado  $j$  solamente dependa de el estado  $i$ . Además es necesario garantizar que en un momento dado de tiempo ocurre uno de varios sucesos con probabilidades tales que sumen 1, estos sucesos en el caso de el problema serían:

1. llega un cliente nuevo.
2. es atendido un cliente.
3. no sucede ninguno de los anteriores.

En particular es necesario garantizar que en un intervalo de tiempo no ocurre ninguna de las siguientes:

1. que lleguen dos o más clientes.
2. completen su servicio dos clientes.
3. o que llegue un cliente y es atendido otro.

Escogiendo como unidad de tiempo un segundo obtengo que:

1.  $\lambda = 20/60/60$ , rate con que llegan los clientes.
2.  $\mu = 1/12/60$ , rate con la que es atendido un cliente.

Con este  $\lambda$  se obtiene que si  $X \sim Pois(\lambda)$  :

- $P(X = 0) = 0,9944598$
- $P(X = 1) = 0,0055247$
- $P(X = 2) = 1,53466e - 05$  prácticamente despreciable, por lo que podemos asumir (1).

(2) no sucede porque el lavado atiende los clientes de uno en uno.

La probabilidad de que llegue un cliente en una unidad de tiempo se puede ver como la probabilidad de que una exponencial con un rate  $\lambda$  reporte un tiempo de llegada  $\leq 1$ , o sea si :  $Y \sim Exp(\lambda)$  entonces:  $P(Y \leq 1) = P(X = 1)$

La probabilidad de que suceda (3) es el producto de las probabilidades de ambos sucesos porque son independientes, que sería:  $P(X = 1) * P(Y = 1) = 0,0055247 * 0,001386961$  (lo consideramos como despreciable por lo que se puede asumir (3))

Dado que puedo asumir (1), (2), (3), puedo asumir el modelo de Markov, tendría 11 estados :  $0, 1, 2, \dots, 10$ .

Las transiciones serían (separando los estados 0, 10):

$$p_{ji} = \begin{cases} \mu & \text{si } i = j - 1 \\ \lambda & \text{si } i = j + 1 \\ 1 - \mu - \lambda & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta cadena de Markov posee una sola clase recurrente que no es periódica, por lo que se puede afirmar ( teorema ) que a largo plazo las probabilidades de que la cadena esté en un estado específico convergerán a una distribución  $\pi$ , donde  $\pi_j$  representa la probabilidad de que la cadena se encuentre en el estado  $j$ .

Asumamos por ahora, que ya calculamos  $\pi$ , entonces la probabilidad de perder a un cliente debido a que el lavado está lleno, sería la probabilidad de que llegue un cliente cuando la cadena está en el estado 10 (llena), que sería:

$$\pi_{10} * \lambda$$

Esta relación es la que usaremos en la simulación para contar los clientes perdidos.

Para hallar la distribución  $\pi$  se puede usar la siguiente relación:

Notar que en la cadena debe haber un cierto balance entre las transiciones que van de el estado  $i$  al estado  $i + 1$ , y las que van de el estado  $i + 1$  a el  $i$ , porque exceptuando la primera vez, cada vez que se va de el estado  $i$  al  $i + 1$ , se debe haber ido previamente de el  $i + 1$  a el  $i$ .

Por lo que  $\pi_i * p_{i,i+1} = \pi_{i+1} * p_{i+1,i}$ , esto permite hallar  $\pi$ , notar que:

1.  $\frac{p_{i,i+1}}{p_{i+1,i}}$  es constante  $= \frac{\lambda}{\mu} = \rho$
2.  $\sum_{i=0}^{10} \pi_i = 1$ . porque  $\pi$  es una distribución.

Queda que:

$$\pi_0 = \frac{(1 - \rho)}{1 - \rho^{11}}$$

$$\pi_n = \frac{(1 - \rho)}{1 - \rho^{11}} * \rho^n$$

## 3. Detalles de Implementación

### 3.1. Markov Chain

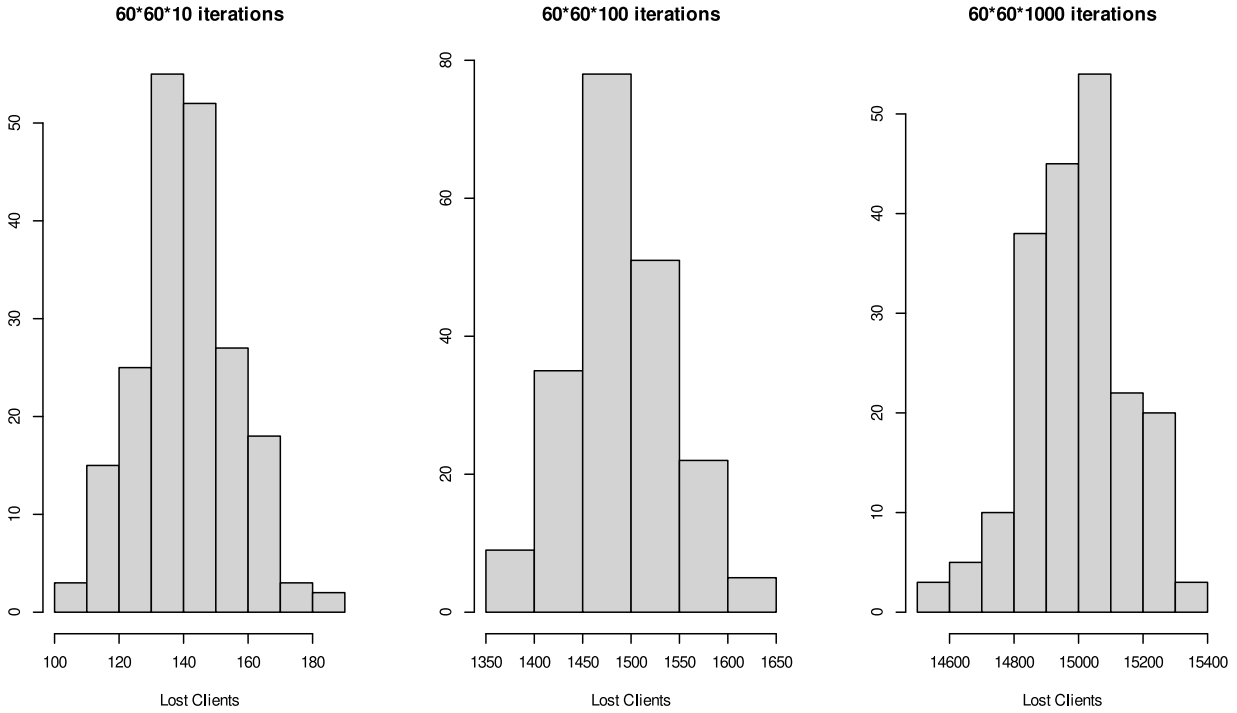
En R es posible definir una cadena de Markov a partir de la matriz de transición, una vez realizado esto es posible realizar la simulación tantas iteraciones como se desee, en nuestro caso sería un total de  $60 * 60 * 10$  que serían 10 horas en segundos, cada vez que se encuentre en el estado 10 (cola llena) podemos ver la probabilidad de que haya una llegada usando una variable aleatoria uniforme (como tirar una moneda biased) para decidir si hay una llegada o no con probabilidad  $p$ .

## 4. Resultados y Experimentos

### 4.1. Markov Chain

A través de la simulación obtenemos que la media de clientes perdidos es alrededor de 140, por otro lado, con los valores de los parámetros del problema se obtiene que se deben perder alrededor de

150 clientes, obtenido a través de hallar la media de clientes que deben llegar a el lavado siguiendo la distribución de Poisson, que sería:  $\mathbb{E}(x) = \lambda * 60 * 60 * 10$  multiplicado por la probabilidad de que cuando lleguen la cola esté llena  $\pi_{10}$ . Asumimos que la razón por la que hay esta diferencia de alrededor de 10 clientes, es porque la cantidad de iteraciones de la simulación no es suficiente, ya que la distribución  $\pi$  es cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para confirmar lo anterior multiplicamos por 10 la cantidad de iteraciones dos veces, visualizamos los resultados en los siguientes histogramas:



Como conclusión vemos que la cantidad de clientes perdidos aumentará proporcionalmente con respecto a el tiempo en que el lavado se encuentre abierto. La función :

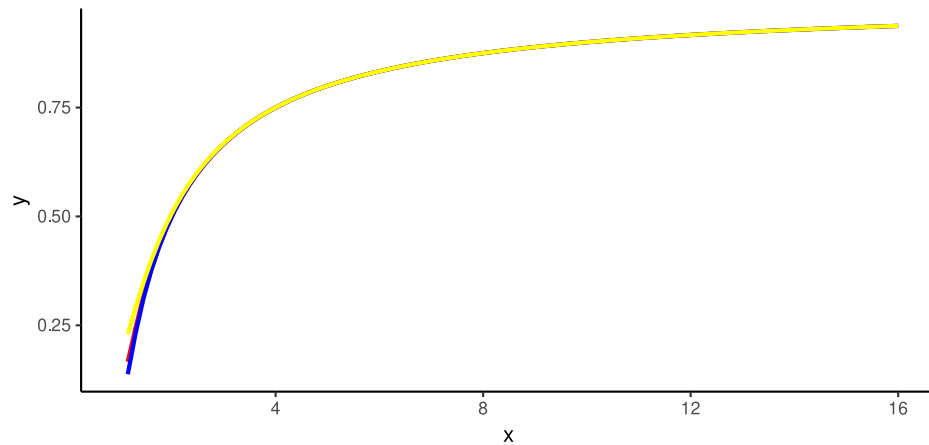
$$f(x) = \frac{(1-x)x^{10}}{1-x^{11}}$$

Es monótona creciente en  $[0, \infty)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  (parece una *CDF*), y no está definida en 1. De esto se deduce que si  $\frac{\lambda}{\mu}$  tiende a infinito la cantidad de clientes perdidos sería la máxima posible, que tiene sentido porque si la frecuencia con la que llegan clientes es mucho mayor comparada con la que son atendidos entonces habría congestión.

Aumentar la capacidad de la cola a  $m$ , resultaría en una nueva función:

$$f(x, m) = \frac{(1 - x)x^m}{1 - x^{m+1}}$$

Pero resulta que no hay mucha diferencia entre las funciones para diferentes valores de  $m$ :



Esta función en las condiciones del problema da como valor 0,75 lo que significa que las  $\frac{3}{4}$  partes del tiempo el lavadero está lleno, provocado porque la razón entre los rates es 4.

Como conclusión lo ideal sería disminuir el tiempo de atención a los clientes.